SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 7 - NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: 12/11/2026
(Đề gồm 6 trang)

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ có điểm cực đại là:

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$ và $x=2$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; Đẳng thức nào **sai**?

A. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 4. Điều tra về số tiền mua đồ dùng học tập trong một tháng của 40 học sinh lớp 12A1, ta có mẫu số liệu như sau (đơn vị: nghìn đồng):

Giá trị (x)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	Cộng
Tần số (n)	2	5	15	8	9	1	N = 40

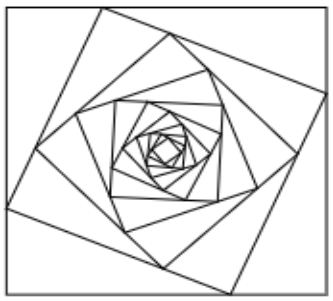
Số trung bình của mẫu số liệu là

A. 28. **B.** 23. **C.** 32. **D.** 25.

Câu 5. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

A. 4π . **B.** π. **C.** 2π . **D.** 3π .

Câu 6. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) (như hình vẽ dưới).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, .., C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i\left(i\in\{1,2,3,.....\}\right)$. Đặt $T=S_1+S_2+S_3+...S_n+....$ Biết $T=\frac{32}{3}$. Tính a?

A. 4 . **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2026;2027)$ sao cho hàm số $y=\frac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A. 2027 . **B.** 2029. **C.** 2030. **D.** 2031.

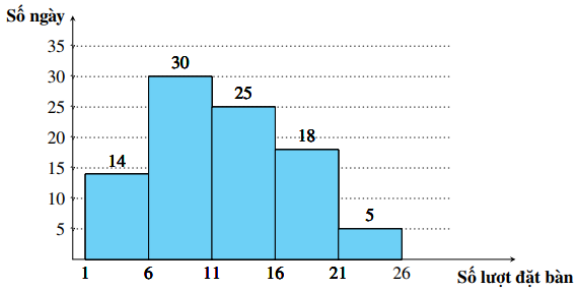
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$, lấy các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh BC, AD sao cho $BM=2MC$, $AN=2ND$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{a}=(2,-1,1);\ \vec{b}=(-2,3,1)$. Xác định vectơ $\vec{d}$, biết $\vec{d}$ vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $|\vec{d}|=3\sqrt{3}$

A. $(-3,-3,3)$ **B.** $(3,3,-3)$ **C.** $(-3,-3,-3);(3,3,3)$ **D.** $(3,3,-3);(-3,-3,3)$

Câu 10. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượng khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến 6 lượt đặt bàn, cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến 11 lượt đặt bàn;…



Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên

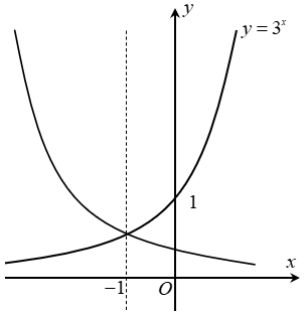
A. 9,5. **B.** 8,5. **C.** 10,5. **D.** 7,5.

Câu 11. Tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{2\cos x}{\cos x+3}$ là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của $a-2b$ bằng

A. -6. **B.** -1. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 12. Biết hàm số $f(x)=\dfrac{a}{b^2\cdot 3^x}$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y=3^x$ qua đường thẳng $x=-1$.

Biết a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A. $b^2=9a$. **B.** $b^2=4a$. **C.** $b^2=6a$. **D.** $b^2=a$.

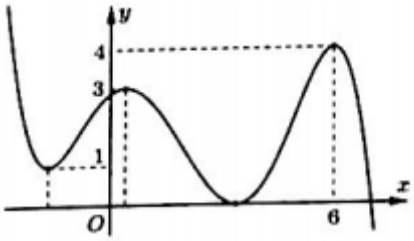
Câu 13. Cho $A=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+(m-2n-3)x-3m+6n}{x^2-3x}$. Biết $A=0$ và biểu thức $P=m^2+2n^2+m-2n+2026$ đạt giá trị nhỏ nhất tại m_0, n_0. Giá trị biểu thức $M=m_0^2+n_0^2$ bằng

A. $M=3$. **B.** $M=4$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Câu 14. Sắp xếp ngẫu nhiên 7 số tự nhiên từ 12 đến 18 thành một hàng ngang. Tính xác suất để hàng ngang nhận được có tổng của 4 số liên tiếp bất kỳ đều chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{3}{35}$. **B.** $\dfrac{2}{35}$. **C.** $\dfrac{4}{35}$. **D.** $\dfrac{1}{35}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA'}=k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$. Khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{BD'}$ thì khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $k+l=4$. **B.** $k+l=-3$. **C.** $k.l=3$. **D.** $k.l=-3$.

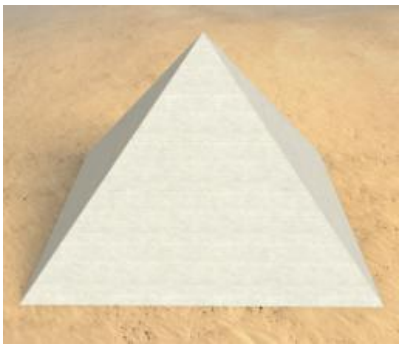
Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;0)$. Gọi $M(a;b;0)$ là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông và MB đạt giá trị lớn nhất. Khi đó, $T=2026a-2027b$ bằng

A. 2026 **B.** -2026 **C.** -2028 **D.** 2028

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên dương thỏa mãn $2^{(x-1)(x+1)}\ln\left[(x+1)^2+1\right]=2^{y-x-3}\ln\sqrt{x+y-1}$ và $x,y\le 2026$.?

A. 45. **B.** 44. **C.** 43. **D.** 46.

Câu 19. Một khối gỗ hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 12cm. Bác thợ cần cắt bỏ các đỉnh của khối gỗ như sau: các nhát cắt qua các trung điểm của các cạnh đáy và cắt cạnh bên tại 4 điểm tạo thành mặt phẳng (α) song song với mặt đáy (ví dụ: nhát cắt bỏ đỉnh A, cắt qua trung điểm hai cạnh đáy AB, AD và cắt cạnh bên SA), sau đó cắt bỏ đỉnh hình chóp bởi mặt phẳng (α). Tính thể tích lớn nhất của khối gỗ còn lại.



A. $32\sqrt{3}+144\sqrt{2}$ **B.** $16\sqrt{3}+144\sqrt{2}$ **C.** $16\sqrt{2}+144\sqrt{3}$ **D.** $32\sqrt{3}+288\sqrt{2}$

Câu 20. Có 15 thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Người ta bỏ tất cả các thẻ này vào 7 chiếc hộp mất nhãn (hộp không phân biệt, được phép rỗng) sao cho:

- Mỗi hộp chứa nhiều nhất 1 thẻ mang số nguyên tố;
- Có ít nhất hai thẻ mang số chính phương nằm cùng một hộp.

Gọi N là số cách phân chia thẻ thỏa mãn đề bài, giá trị $\frac{N}{7^4}$ bằng bao nhiêu?

A. 6517 **B.** 6715 **C.** 4802 **D.** 4820

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a),b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Một công xưởng phân phối hàng hóa trực tiếp có sức chứa tối đa 2200 công nhân làm việc. Hiện tại có 2000 công nhân đang làm việc. Mỗi công nhân có thể xử lý trung bình 2500 hàng hóa mỗi tháng và được chi trả lương 5 triệu đồng/tháng. Giá trung bình bán ra thị trường cho 1 gói hàng là 250000VND. Với sự phát triển trí tuệ nhân tạo AI và Robot, công ty muốn mua một số AI Robot công nhân có khả năng làm việc như một con người. Để tăng thêm lợi nhuận, công ty sẽ mua trả góp hàng tháng một số lượng AI Robot làm việc. Mỗi con AI Robot có khả năng xử lý trung bình lớn nhất 6000 hàng mỗi tháng. Đồng thời, công ty sẽ cắt giảm nhân sự bằng cách bớt 4 công nhân khi mua thêm 1 con AI Robot. Công ty sẽ trả góp cho 10 triệu đồng/tháng/AI Robot. Do công nhân không muốn mình bị công ty cắt giảm nên mỗi người công nhân sẽ tăng năng suất cho bản thân. Cứ thêm 1 AI Robot thì mỗi công nhân sẽ tăng khả năng xử lý trung bình thêm 15 hàng hóa mỗi tháng. Vì số lượng bán ra tăng do việc sử dụng AI Robot trong công xưởng, nên cứ 1 con AI Robot thì giá trung bình bán ra thị trường sẽ giảm 1000 VND. Giả sử công ty mua thêm x con AI Robot ($x>0$)

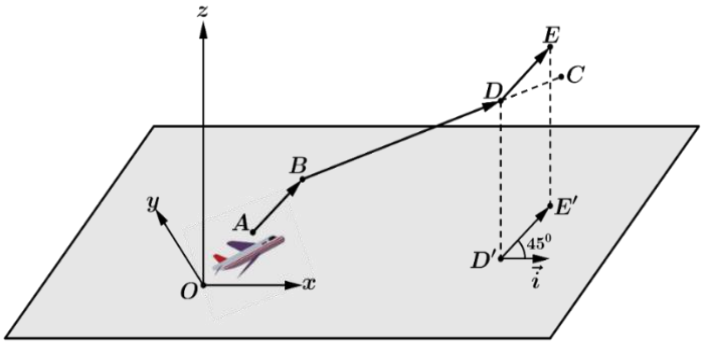
a) Khi công ty mua 25 AI Robot thì số lượng công nhân còn lại là 1900 người.

b) Khi công ty mua thêm x con AI Robot thì mỗi công nhân có thể xử lý trung bình $2500+15x$ hàng hóa.

c) Công ty có thể mua nhiều hơn 250con AI Robot

d) Công ty cần mua 19 AI Robot để thu được lợi nhuận cao nhất sau khi trừ hết tiền lương và tiền trả góp

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (Đơn vị đo trên mỗi trục tọa độ dài 1 km, mặt đất là mặt phẳng Oxy). Lúc đó, một chiếc máy bay bắt đầu di chuyển từ điểm $A(700;850;100)$ với vận tốc không đổi 150(km/h) theo hướng về điểm $B(800;900;200)$. Khi tới B, máy bay thay đổi hướng bay theo hướng về điểm $C(1100;1400;300)$ với vận tốc giữ nguyên là 150(km/h). Máy bay di chuyển theo hướng mới trong $30\sqrt{35}$ phút (tức là mới tới điểm $D \in BC$) thì bất ngờ gặp gió lớn khiến hướng bay của nó lệch 45^0 theo phương nằm ngang (tức là nếu $\vec{u}$ là vectơ hình chiếu xuống mặt đất của vectơ vận tốc trên đoạn đường từ điểm D trở đi thì góc lượng giác $(\vec{i};\vec{u}) = 45^0$; góc tạo bởi vectơ vận tốc với mặt đất không thay đổi) và vận tốc giảm còn 120(km/h). Máy bay tiếp tục bay theo hướng lệch trong 30 phút.



a) Tổng thời gian bay thực tế của máy bay trong cả hành trình này là 142 phút (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

b) Khi bắt đầu gặp gió lớn, máy bay cách mặt đất 275km.

c) Gọi $E(a;b;c)$ là vị trí cuối cùng của máy bay trong hành trình này. Khi đó $a+b+c=$ 2670 (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Tổng quãng đường cả hành trình dài hơn 650 km.

Câu 3. Kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai nhóm A và B được cho trong bảng tần số ghép nhóm như sau:

Điểm trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Học sinh nhóm A	4	5	3	4	2
Học sinh nhóm B	2	5	4	3	1

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số trung bình (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường A là 7,22.

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B là 6,5.

c) Độ lệch chuẩn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B là 1,13.

d) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)$.

a) Khi $m=0$ thì đạo hàm của $y=f(x)$ trên $(-2;+\infty)$ là $y' = \dfrac{2x}{(2x^2+1)\ln 2} - \dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$.

b) Khi $m=-1$ thì phương trình $f(x)=1$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Khi $0<m<2\sqrt{2}$ thì tập xác định của hàm số $y=f(2-x^2)$ là $D=[-2;2]$.

d) Có 4 giá trị m nguyên dương để phương trình $f(x)+\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M,N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA,CB sao cho MN song song với AB và $\dfrac{CM}{CA}=k$. Gọi S là giao điểm của $A'M$ và $B'N$.

a) Ba đường thẳng $A'M,B'N,C'C$ đồng quy tại điểm S.

b) Nếu $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a thì có thể tích $V=a^3$.

c) Nếu $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng a và $k=\dfrac{1}{2}$ thì góc giữa SA' và đáy bằng 45^0

d) Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm C có thể tích là V_1 và phần còn lại có thể tích là V_2. Khi $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ thì $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 6. Một hộp có 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 4thẻ trong hộp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Xác suất để lấy được 4 thẻ, trong đó có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 10 nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$

b) Xác suất để lấy được 4 thẻ có tổng số ghi trên các thẻ là một số chẵn là $\dfrac{1}{2}$

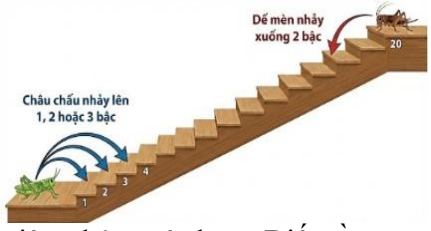
c) Xác suất để lấy được 4 thẻ có hiệu số ghi của hai thẻ bất kì trong các thẻ đó lớn hơn 1 bằng $\dfrac{759}{980}$

d) Xác suất để lấy được 4 thẻ có tổng các bình phương của số ghi trên các thẻ là một số chia hết cho 5 bằng 0,236(kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

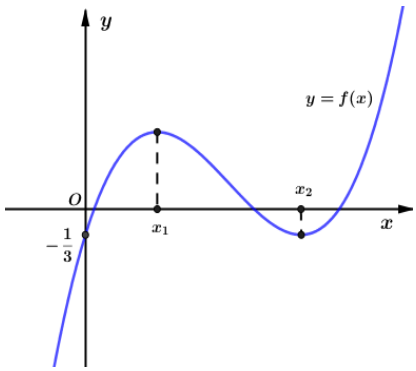
Câu 1. Một cầu thang rất dài được đánh số các bậc lần lượt là $0,1,2,3,\ldots$ theo thứ tự từ thấp lên cao

- Châu chấu xuất phát ở bậc 0; mỗi lượt nó nhảy lên 1 bậc, 2 bậc hoặc 3 bậc.
- Dế xuất phát ở bậc 20; mỗi lượt dế luôn nhảy xuống đúng 2 bậc.



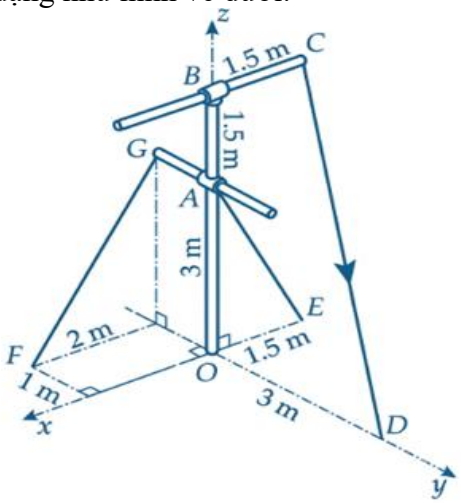
Hai con bắt đầu nhảy cùng lúc, cứ 10 giây nhảy một lượt. Biết rằng sau 10 lượt đầu tiên (khi dế nhảy hết bậc cầu thang) thì châu chấu có N cách nhảy sao cho hai con gặp nhau tại một bậc cầu thang nào đó, hãy tính giá trị $\dfrac{N}{9}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+bx^2+cx+d\,(b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ:



Biết hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $2x_1-x_2=-1$ và $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{2}{3}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2026;2027]$ để bất phương trình $f\left(\dfrac{x(3f(x)+1)}{(x-3)^2}\right)\le m$ đúng $\forall x\in\left[0;\sqrt{3}\right]$.

Câu 3. Một ống phun nước có hình dạng như hình vẽ dưới.

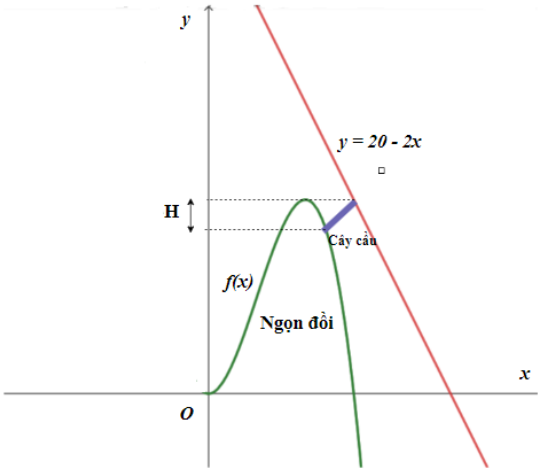


Để giữ cho ống nước được cân bằng không bị nghiêng kỹ sư sử dụng ba đoạn thép để nối các điểm C, A, G với mặt đất, các đoạn thép CD, GF, AE có độ lớn lực căng lần lượt bằng 1200N, 900N và 600N. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, coi gốc tọa độ là chân ống nước, trục Oz hướng lên trời, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) các thông số được cho như hình vẽ, đơn vị trên các hệ trục tọa độ tính bằng mét. Coi đường kính ống không đáng kể, độ lớn vectơ hợp lực của ba sợi thép tác động lên ống nước là bao nhiêu Newton (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) sao cho ứng với mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn:

$$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1?$$

Câu 5. Một ngọn đồi được giới hạn bởi một đường cong trong hệ tọa độ Oxy và được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$ *(tham khảo hình vẽ)*. Vị trí điểm cực đại là $(4;8)$ với đơn vị của hệ trục là $100m$ và vị trí điểm cực tiểu là gốc tọa độ O. Một con đường được xây dựng dọc theo đồi có phương trình $d: y=20-2x$. Người ta muốn xây dựng một cây cầu dạng đoạn thẳng nối từ ngọn đồi ra mặt đường. Biết rằng chi phí xây dựng cầu phụ thuộc vào chiều dài của cây cầu, công thức chi phí xây dựng là $C=20000L+500H$ (USD), trong đó L là chiều dài cây cầu và H là độ cao chênh lệch giữa hai đầu cầu được tính dựa vào L. Hỏi chi phí xây dựng cây cầu là bao nhiêu nghìn USD nếu người ta muốn xây dựng sao cho chiều dài cây cầu là ngắn nhất? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).*



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD. Trung tuyến CN của tam giác SCM kéo dài cắt SD tại P. Biết rằng $AB=3$, $\cos\left(SC,(ABCD)\right)=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$ và $d\left(C,(SBD)\right)=\dfrac{12}{13}$. Biết $V_{S.ANP}=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in N^*$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính $2a-b$?

----------HẾT----------

Thí sinh thực hiện nghiêm túc quy chế thi. CBCT không giải thích gì thêm

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LẦN 7 - NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: 12/11/2026
(Đề gồm 6 trang)

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ có điểm cực đại là:

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. ***C.** $x=2$. **D.** $x=-1$ và $x=2$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=1\\x=2\end{bmatrix}.$$

BBT:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↘		↗		↘	

Dựa vào BBT ta thấy: Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

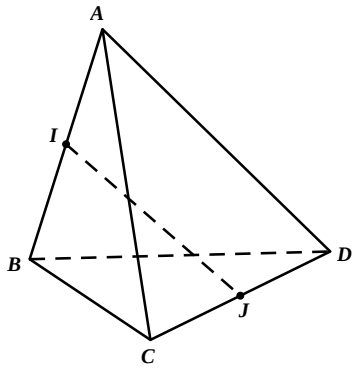
Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; Đẳng thức nào **sai**?

A. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

C. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$. ***D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\right)$.

Vậy đẳng thức **sai** là $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

***A.** $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$; $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$.

Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 4. Điều tra về số tiền mua đồ dùng học tập trong một tháng của 40 học sinh lớp 12A1, ta có mẫu số liệu như sau (đơn vị: nghìn đồng):

Giá trị (x)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	Cộng
Tần số (n)	2	5	15	8	9	1	N = 40

Số trung bình của mẫu số liệu là

A. 28. **B.** 23. **C.** 32. ***D.** 25.

Lời giải

Chọn D

Số trung bình cộng của mẫu: $\overline{x}=\frac{12,5.2+17,5.5+22,5.15+27,5.8+32,5.9+37,5.1}{40}=25$.

Câu 5. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

A. 4π. **B.** π. **C.** 2π. ***D.** 3π.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\cos(\sin x)=1 \Leftrightarrow \sin x=k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

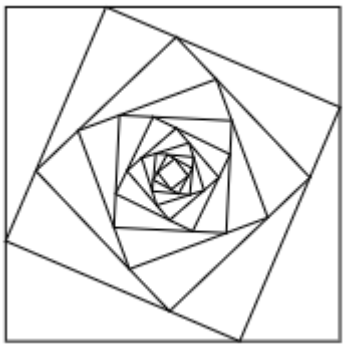
$x\in[0;2\pi] \Rightarrow \sin x\in[-1;1] \Rightarrow -1\le k2\pi\le 1 \Rightarrow k=0$.

Phương trình trở thành $\sin x=0 \Leftrightarrow x=m\pi \ (m\in\mathbb{Z})$.

Trên $[0;2\pi]$, phương trình có các nghiệm là $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x)=1$ trên $[0;2\pi]$ bằng 3π.

Câu 6. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia để có hình vuông (C_2) như hình vẽ dưới.



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, .., C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i\left(i\in\{1,2,3,.....\}\right)$. Đặt $T=S_1+S_2+S_3+...S_n+...$. Biết $T=\frac{32}{3}$. Tính a?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. ***D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2=\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2+\left(\frac{1}{4}a\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó diện tích $S_2=\frac{5}{8}a^2=\frac{5}{8}S_1$

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3=\sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2+\left(\frac{1}{4}a_2\right)^2}=\frac{a_2\sqrt{10}}{4}=a\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Do đó diện tích

$S_3=\left(\frac{5}{8}\right)^2a^2=\frac{5}{8}S_2$. Lý luận tương tự ta có các $S_1, S_2, S_3,...S_n...$ tạo thành một dãy cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=S_1$ và công bội $q=\frac{5}{8}$.

Khi đó: $T=\frac{S_1}{1-q}=\frac{8a^2}{3}$. Với $T=\frac{32}{3}$ ta có $a^2=4\Leftrightarrow a=2$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2026;2027)$ sao cho hàm số $y=\frac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A. 2027 . **B.** 2029. **C.** 2030. ***D.** 2031.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\neq m$ nên $m\notin(-\infty;-3)$

$y=\frac{3x+18}{x-m}\Rightarrow y'=\frac{-3m-18}{(x-m)^2}$

Để hàm số $y=\frac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $-3m-18<0\Leftrightarrow m>-6$

Vì $m\in(-2026;2027)$ và $m\notin(-\infty;-3)$ nên $m\in[-3;2027)$

Vậy có 2031 giá trị m nguyên thoả mãn.

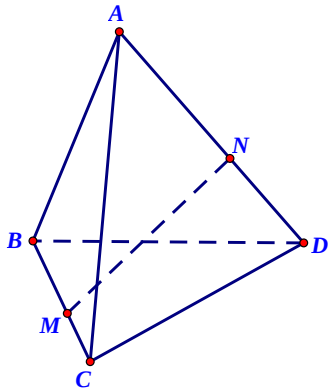
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$, lấy các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh BC, AD sao cho $BM=2MC$, $AN=2ND$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

***C.** $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt thuộc cạnh BC, AD sao cho $BM=2MC$, $AN=2ND$ nên $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}=-2\overrightarrow{ND}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{DN}$

Ta lại có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CD}$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{a}=(2,-1,1);\ \vec{b}=(-2,3,1)$. Xác định vectơ $\vec{d}$, biết $\vec{d}$ vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $|\vec{d}|=3\sqrt{3}$

A. $(-3,-3,3)$ **B.** $(3,3,-3)$

C. $(-3,-3,-3);(3,3,3)$ ***D.** $(3,3,-3);(-3,-3,3)$

Lời giải

Chọn D

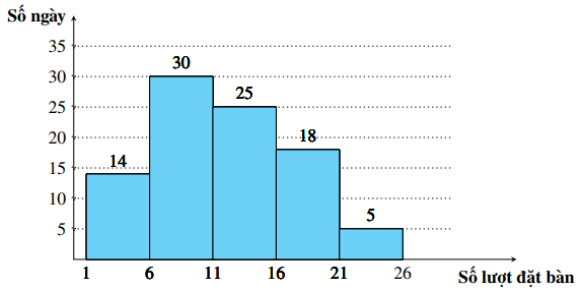
$\vec{d}=(d_1;d_2;d_3)$ vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}2d_1-d_2+d_3=0\\-2d_1+3d_2+d_3=0\end{cases}$

$\Rightarrow d_2+d_3=0\Rightarrow d_2=-d_3;d_1=-d_3$

$|\vec{d}|=3\sqrt{3}\Rightarrow d_1^2+d_2^2+d_3^2=27\Leftrightarrow d_3^2=9\Leftrightarrow d_3=\pm 3$

- Với $d_3=3\Rightarrow d_1=d_2=-d_3=-3\Rightarrow\vec{d}=(-3;-3;3)$
- Với $d_3=-3\Rightarrow d_1=d_2=3\Rightarrow\vec{d}=(3;3;-3)$

Câu 10. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượng khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến 6 lượt đặt bàn, cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến 11 lượt đặt bàn;…



Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên

A. 9,5. ***B.** 8,5. **C.** 10,5. **D.** 7,5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào biểu đồ ta lập được bảng ghép nhóm như sau:

Lượt đặt bàn	[1;6)	[6;11)	[11;16)	[16;21)	[21;26)
Số ngày	14	30	25	18	5

Cỡ mẫu $n=92$ và gọi $x_1,x_2,...,x_{92}$ là mẫu số liệu đã cho

Ta có:

$x_1,....,x_{14}\in[1;6)$ $x_{45},...,x_{69}\in[11;16)$

$x_{70},....,x_{87}\in[16;21)$ $x_{88},...,x_{92}\in[21;26)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\frac{x_{23}+x_{24}}{2}\in[6;11)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

$$Q_1=6+\frac{\frac{92}{4}-14}{30}(11-6)=7,5$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\frac{x_{69}+x_{70}}{2}\in[11;16)$ và $x_{70}\in[16;21)$. Do đó tứ phân bị thứ ba của mẫu số liệu là $Q_3=16$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là: $\Delta_Q=Q_3-Q_1=16-7,5=8,5$.

Câu 11. Tập giá trị của hàm số $y=\frac{2\cos x}{\cos x+3}$ là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của $a-2b$ bằng

A. -6. **B.** -1. **C.** -3. ***D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\frac{2\cos x}{\cos x+3}\Leftrightarrow(y-2)\cos x=3y(*)$.

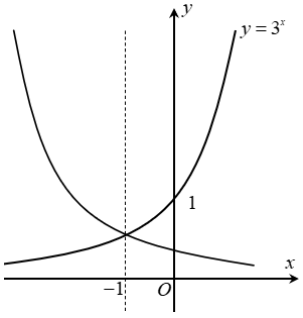
Trường hợp 1: $y=2$. Khi đó: $(*)$ trở thành: $0=6$ (vô lý).

Trường hợp 2: $y\neq 2$. Khi đó: $(*)$ trở thành: $\cos x=\frac{3y}{2-y}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì: $\begin{cases}-1\le\frac{3y}{2-y}\le 1\\ 2-y>0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le y\le\frac{1}{2}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[-1;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow a-2b=-1-2.\frac{1}{2}=-2$.

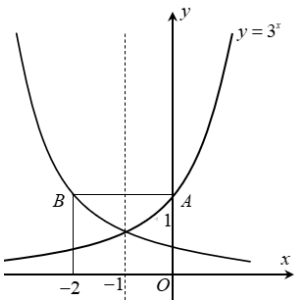
Câu 12. Biết hàm số $f(x)=\frac{a}{b^2\cdot 3^x}$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y=3^x$ qua đường thẳng $x=-1$. Biết a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



***A.** $b^2=9a$. **B.** $b^2=4a$. **C.** $b^2=6a$. **D.** $b^2=a$.

Lời giải

Chọn A



Trên đồ thị hàm số $y=3^x$ lấy $M\left(x_0;y_0\right)$ và gọi $N\left(x,f\left(x\right)\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và đối xứng với M qua đường thẳng $x=-1$.

Khi đó $\begin{cases}\dfrac{x+x_0}{2}=-1\\ f\left(x\right)=y_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-x-2\\ y_0=f\left(x\right)\end{cases}$.

Thay vào hàm số $y=3^x$ ta được: $f\left(x\right)=3^{-x-2}=\dfrac{1}{3^2.3^x}$.

Vậy $a=1;b=3\Rightarrow b^2=9a$.

Câu 13. Cho $A=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+\left(m-2n-3\right)x-3m+6n}{x^2-3x}$. Biết $A=0$ và biểu thức $P=m^2+2n^2+m-2n+2026$ đạt giá trị nhỏ nhất tại m_0,n_0. Giá trị biểu thức $M=m_0^2+n_0^2$ bằng

A. $M=3$. **B.** $M=4$. **C.** $M=1$. ***D.** $M=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$A=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+\left(m-2n-3\right)x-3m+6n}{x^2-3x}=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(m-2n-3\right)x-3m+6n=\left(x-3\right)^2$

$\Rightarrow\begin{cases}m-2n-3=-6\\ -3m+6n=9\end{cases}\Leftrightarrow m=2n-3$

Vậy: $P=\left(2n-3\right)^2+2n^2+2n-3-2n+2026=6n^2-12n+2032$

$\Rightarrow P$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow n=n_0=1\Rightarrow m=m_0=-1\Rightarrow M=m_0^2+n_0^2=2$

Câu 14. Sắp xếp ngẫu nhiên 7 số tự nhiên từ 12 đến 18 thành một hàng ngang. Tính xác suất để hàng ngang nhận được có tổng của 4 số liên tiếp bất kỳ đều chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{3}{35}$. **B.** $\dfrac{2}{35}$. **C.** $\dfrac{4}{35}$. ***D.** $\dfrac{1}{35}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $n\left(\Omega\right)=7!$

Gọi A là biến cố "hàng ngang nhận được có tổng của 4 số liên tiếp bất kỳ đều chia hết cho 3".

Giả sử các số đó xếp thành dãy $abcdefg$ với $a,b,c,d,e,f,g\in\left\{12;13;14;...;18\right\}$.

Ta có $X=\left\{12;15;18\right\},Y=\left\{13;16\right\},Z=\left\{14;17\right\}$.

Thấy rằng $12+13+14+...+18=105\vdots3$.

Vì $\begin{cases}a+b+c+d\vdots3\\ b+c+d+e\vdots3\\ c+d+e+f\vdots3\\ d+e+f+g\vdots3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c\vdots3\\ e+f+g\vdots3\\ a+b+g\vdots3\\ a+f+g\vdots3\end{cases}\Rightarrow d\vdots3,$

a,e đồng dư; c,g đồng dư; b,f đồng dư khi chia cho 3.

Vì thế cho nên để xếp được dãy thỏa mãn bài toán ta có các công đoạn

+) Chọn $d\in X$: có 3 cách chọn.

+) Từ mỗi tập $X\setminus\left\{d\right\},Y,Z$ chọn 1 số: có $2.2.2=8$ cách chọn.

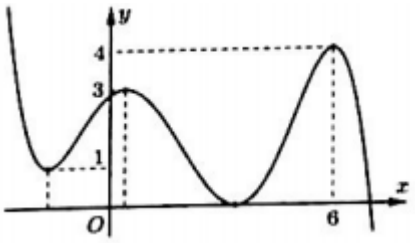
+) Xếp các chữ số ở trên theo thứ tự nào đó ta được dãy abc : có $3!=6$ cách xếp.

+) Xếp các số còn lại vào các vị trí tương ứng ta được dãy efg : có 1 cách xếp.

$\Rightarrow n(A)=3.8.6.1=144$.

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{144}{7!}=\dfrac{1}{35}$

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

***A.** $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3\Leftrightarrow 4m^3+m=\left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$

$\Leftrightarrow (2m)^3+2m=\left(2f^2(x)+5\right)\sqrt{2f^2(x)+5}+\sqrt{2f^2(x)+5}$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(2m)=f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)\Leftrightarrow 2m=\sqrt{2f^2(x)+5}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ f^2(x)=\dfrac{4m^2-5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ f(x)=\pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}\end{cases}$

Với $f(x)=-\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ từ đồ thị ta thấy chỉ có 1 nghiệm.

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình

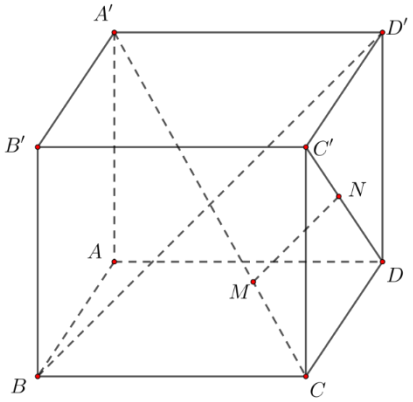
$f(x)=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ phải có hai nghiệm $\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}=4\Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{37}}{2},(m>0)$.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA'}=k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$. Khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{BD'}$ thì khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $k+l=4$. **B.** $k+l=-3$. ***C.** $k.l=3$. **D.** $k.l=-3$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{MA'}=k.\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AM}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AA'}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}=\dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}$.

và $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AN}=l.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=\dfrac{\overrightarrow{AC'}-l\overrightarrow{AD}}{1-l}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$.

Vậy $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$

$=\left(-\dfrac{k}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{a}+\left(-\dfrac{k}{1-k}-1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{c}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{BD'} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{k}{1-k}+\dfrac{1}{1-l}=-\dfrac{k}{1-k}-1\\ -\dfrac{k}{1-k}-1=\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2k}{1-k}+\dfrac{1}{1-l}=-1\\ \dfrac{k+1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}=-1\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3k+1}{1-k}=-2 \Leftrightarrow k=-3$. Từ đó ta có: $\dfrac{1}{1-l}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow l=-1$.

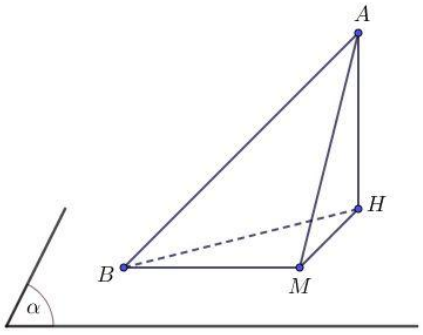
Vậy $k.l=3$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;0)$. Gọi $M(a;b;0)$ là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông và MB đạt giá trị lớn nhất. Khi đó, $T=2026a-2027b$ bằng

A. 2026 **B.** −2026 ***C.** −2028 **D.** 2028

Lời giải

Chọn C



Ta có: $B \in (Oxy)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên (Oxy) thì $AH \perp MB$, $AM \perp MB \Rightarrow MH \perp MB$

$\Rightarrow MB \le BH$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$, lúc đó M là hình chiếu của A trên (Oxy).

$\Rightarrow M\left(1;2;0\right) \Rightarrow T=2026a-2027b=2026.1-2027.2=-2028$

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên dương thỏa mãn $2^{(x-1)(x+1)}\ln\left[(x+1)^2+1\right]=2^{y-x-3}\ln\sqrt{x+y-1}$ và $x,y\le 2026.$?

A. 45. ***B.** 44. **C.** 43. **D.** 46.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x+y-1>0$.

Từ giả thiết $2^{(x-1)(x+1)}\ln\left[(x+1)^2+1\right]=2^{y-x-3}\ln\sqrt{x+y-1}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}\ln\left[x^2+2x+2\right]=2^{y-x-4}\ln(x+y-1)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+3}\ln\left(x^2+2x+2\right)=2^{y-x}\ln(x+y-1)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2x+2}\ln\left(x^2+2x+2\right)=2^{x+y-1}\ln(x+y-1)$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}^+$ nên suy ra $x+y\ge 2$. Do đó: $x+y-1\ge 1$.

Xét hàm số $f(t)=2^t\ln t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^t\cdot\ln 2\cdot\ln t+2^t\cdot\frac{1}{t}>0,\forall t\ge 1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Ta thấy $f\left(x^2+2x+2\right)=f(x+y-1)$.

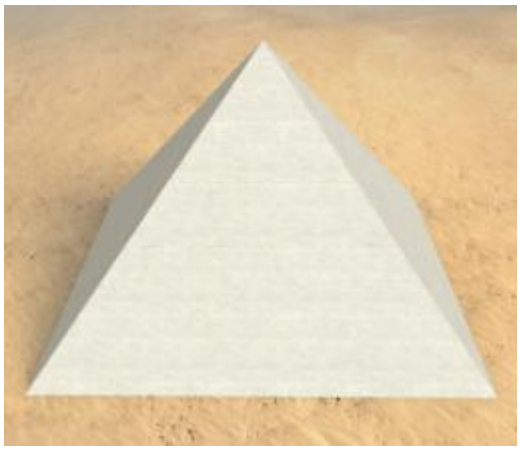
Suy ra $\Rightarrow x^2+2x+2=x+y-1$

$\Leftrightarrow y=x^2+x+3\le 2026.$

$\Leftrightarrow x^2+x-2022\le 0\Rightarrow x\in\left[1;\frac{-1+\sqrt{8089}}{2}\right]\Rightarrow x\in\{1;2;3;...;44\}$

Vâv có 44 giá trị nguyên của x. Nên có 44 cặp $(x;y)$

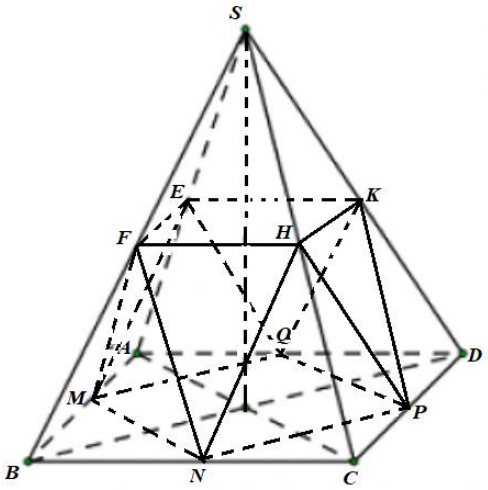
Câu 19. Một khối gỗ hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 12cm. Bác thợ cần cắt bỏ các đỉnh của khối gỗ như sau: các nhát cắt qua các trung điểm của các cạnh đáy và cắt cạnh bên tại 4 điểm tạo thành mặt phẳng (α) song song với mặt đáy (ví dụ: nhát cắt bỏ đỉnh A, cắt qua trung điểm hai cạnh đáy AB,AD và cắt cạnh bên SA), sau đó cắt bỏ đỉnh hình chóp bởi mặt phẳng (α). Tính thể tích lớn nhất của khối gỗ còn lại.



***A.** $32\sqrt{3}+144\sqrt{2}$ **B.** $16\sqrt{3}+144\sqrt{2}$ **C.** $16\sqrt{2}+144\sqrt{3}$ **D.** $32\sqrt{3}+288\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta đặt: $SE = SF = SH = SK = x,\ 0 < x < 12.$

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều cạnh bằng $12cm$ nên $S.EFHK$ cũng là hình chóp đều cạnh $x\,cm, 0 < x < 12$,

suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{12^3\sqrt{2}}{6} = 288\sqrt{2},\ V_{S.EFHK} = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{6}.$

Ta có $V_{E.AMQ} = V_{F.BMN} = V_{H.CNP} = V_{K.DPQ}$, mà

$$\frac{V_{F.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{BM.BN.BF}{BA.BC.BS} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{12-x}{12} \Rightarrow V_{F.BMN} = \frac{12-x}{48}V_{S.ABC} = \frac{12-x}{96}V_{S.ABCD} = 3(12-x)\sqrt{2}$$

Thể tích của khối gỗ còn lại là

$$V = V_{EFHKMNPQ} = 288\sqrt{2} - \frac{x^3\sqrt{2}}{6} - 12(12-x)\sqrt{2}$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$2\sqrt{6}$		12
V'		+	0	-	
V		↗	$32\sqrt{3}+144\sqrt{2}$	↘	

Vậy $V_{\max} = 32\sqrt{3} + 144\sqrt{2}$

Câu 20. Có 15 thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Người ta bỏ tất cả các thẻ này vào 7 chiếc hộp mất nhãn (hộp không phân biệt, được phép rỗng) sao cho:

- Mỗi hộp chứa nhiều nhất 1 thẻ mang số nguyên tố;
- Có ít nhất hai thẻ mang số chính phương nằm cùng một hộp.

Gọi N là số cách phân chia thẻ thỏa mãn đề bài, giá trị $\dfrac{N}{7^4}$ bằng bao nhiêu?

***A.** 6517 **B.** 6715 **C.** 4802 **D.** 4820

Lời giải

Chọn A

Các thẻ từ 1 đến 15 gồm:

- Số nguyên tố: 2, 3, 5, 7, 11, 13 → 6 thẻ.
- Số chính phương: 1, 4, 9 → 3 thẻ.
- Còn lại: 6, 8, 10, 12, 14, 15 → 6 thẻ.

Có 7 hộp không phân biệt, được phép rỗng.

Điều kiện 1: Mỗi hộp chứa nhiều nhất 1 thẻ nguyên tố. Vì có 6 số nguyên tố, ta xếp chúng vào 6 hộp khác nhau, mỗi hộp 1 thẻ. Do hộp không nhãn nhưng các nguyên tố phân biệt, cách xếp này là duy nhất: 6 hộp mỗi hộp chứa một nguyên tố, 1 hộp còn lại rỗng.

Sau khi xếp nguyên tố, các hộp trở nên phân biệt: 6 hộp được gắn với chính nguyên tố đó, hộp rỗng là duy nhất. Bây giờ xếp 9 thẻ còn lại (3 chính phương + 6 thường) vào 7 hộp này. Mỗi thẻ có 7 lựa chọn, độc lập.

Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn điều kiện 1 là 7^9.

Điều kiện 2: Có ít nhất hai thẻ chính phương cùng một hộp.

Ta tính phần bù: không có hai chính phương nào cùng hộp.

Số cách chọn 3 hộp khác nhau từ 7 hộp: $C_7^3 = 35$.

Xếp 3 thẻ chính phương phân biệt vào 3 hộp đó: $3! = 6$ cách.

6 thẻ còn lại mỗi thẻ có 7 cách chọn hộp: 7^6 cách.

Vậy số cách không có hai chính phương cùng hộp là $35 \times 6 \times 7^6 = 210 \times 7^6$.

Số cách thỏa mãn cả 2 điều kiện 1, 2 là: $N = 7^9 - 210 \times 7^6 \Rightarrow \frac{N}{7^4} = 6517$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a),b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một công xưởng phân phối hàng hóa trực tiếp có sức chứa tối đa 2200 công nhân làm việc. Hiện tại có 2000 công nhân đang làm việc. Mỗi công nhân có thể xử lý trung bình 2500 hàng hóa mỗi tháng và được chi trả lương 5 triệu đồng/tháng. Giá trung bình bán ra thị trường cho 1 gói hàng là 250000VND. Với sự phát triển trí tuệ nhân tạo AI và Robot, công ty muốn mua một số AI Robot công nhân có khả năng làm việc như một con người. Để tăng thêm lợi nhuận, công ty sẽ mua trả góp hàng tháng một số lượng AI Robot làm việc. Mỗi con AI Robot có khả năng xử lý trung bình lớn nhất 6000 hàng mỗi tháng. Đồng thời, công ty sẽ cắt giảm nhân sự bằng cách bớt 4 công nhân khi mua thêm 1 con AI Robot. Công ty sẽ trả góp cho 10 triệu đồng/tháng/AI Robot. Do công nhân không muốn mình bị công ty cắt giảm nên mỗi người công nhân sẽ tăng năng suất cho bản thân. Cứ thêm 1 AI Robot thì mỗi công nhân sẽ tăng khả năng xử lý trung bình thêm 15 hàng hóa mỗi tháng. Vì số lượng bán ra tăng do việc sử dụng AI Robot trong công xưởng, nên cứ 1 con AI Robot thì giá trung bình bán ra thị trường sẽ giảm 1000 VND**.** Giả sử công ty mua thêm x con AI Robot ($x > 0$)

***a)** Khi công ty mua 25 AI Robot thì số lượng công nhân còn lại là 1900 người.

***b)** Khi công ty mua thêm x con AI Robot thì mỗi công nhân có thể xử lý trung bình $2500+15x$ hàng hóa.

c) Công ty có thể mua nhiều hơn 250con AI Robot

***d)** Công ty cần mua 19 AI Robot để thu được lợi nhuận cao nhất sau khi trừ hết tiền lương và tiền trả góp

Lời giải

a	b	c	D
Đúng	Đúng	Sai	Đúng

Ta gọi x là số con robot mà công ty mua thêm; đặt $f(x)$ là hàm lợi nhuận (Điều kiện $x > 0$)

Từ các giả thiết đề đã cho ta rút ra được công thức tính lợi nhuận như sau:

Lợi nhuận = Số lượng công nhân × Số hàng trung bình của người × Giá bán trung bình + Số lượng robot × Số hàng trung bình của Robot × Giá bán trung bình – Số lượng công nhân × Lương – Số lượng Robot × Trả góp.

a) Đúng.

Số công nhân ban đầu: 2000, do công ty sẽ cắt giảm bớt 4 công nhân khi mua thêm 1 con AI Robot nên suy ra số công nhân còn lại sau khi mua x con robot là: $2000-4x$.

Khi công ty mua 25 con AI Robot thì số công nhân còn lại: $2000-4.25=1900$ (người)

b) Đúng

Mỗi công nhân có thể xử lý trung bình 2500 hàng hóa mỗi tháng, do thêm 1 AI Robot thì mỗi công nhân sẽ tăng khả năng xử lý trung bình thêm 15 hàng hóa mỗi tháng nên số hàng trung bình mà mỗi công nhân xử lý được khi công ty mua thêm x con robot là: $2500+15x$.

c) Sai

Giá trung bình bán ra thị trường cho 1 gói hàng là 250 (nghìn đồng), do cứ mua thêm 1 con AI Robot thì giá trung bình bán ra thị trường sẽ giảm 1 (nghìn đồng) nên giá bán trung bình cho 1 gói hàng khi công ty mua thêm x con robot là: $250-x$ (nghìn đồng)

Do giá bán là một số dương nên: $250-x>0 \Leftrightarrow x<250$

d) Đúng

ta có:

Số lượng robot**:** x

Tổng số hàng hóa công nhân làm ra là: $(2000-4x)(2500+15x)$

Tổng số hàng hóa Robot làm ra là: $6000x$

Tổng tiền lương mỗi tháng trả cho công nhân**:** $5000(2000-4x)$ (nghìn đồng)

Tiền trả góp mỗi tháng cho x con robot:$10000x$ (nghìn đồng)

Ta suy ra: Lợi nhuận công ty thu được khi mua thêm x con robot là:

$f(x)=(2000-4x)(2500+15x)(250-x)+6000x(250-x)-5000(2000-4x)-10000x$

$\Rightarrow f(x)=60x^3-41000x^2+1510000x+1240000000$

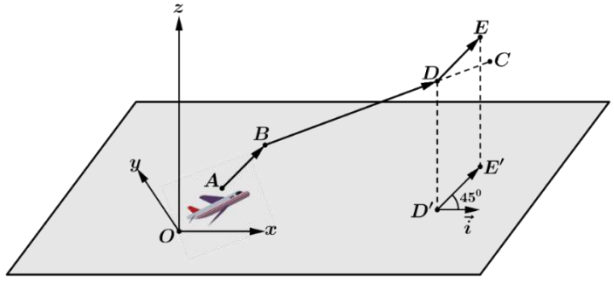
Quy về khảo sát hàm số: $g(x)=6x^3-4100x^2+151000x+124000000$ trên $(0;250)$

Ta có: $g'(x)=18x^2-82000x+151000=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 436,33 \\ x\approx 19,226 \end{array}\right.$

Lập BBT cho hàm số $g(x)$ ta thấy: $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x\approx 19,226$

Do x nguyên dương và $f(19)>f(20)$ nên suy ra để thu được lợi nhuận cao nhất sau khi trừ hết tiền lương và tiền trả góp thì công ty phải mua 19 con robot.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (Đơn vị đo trên mỗi trục tọa độ dài 1 km, mặt đất là mặt phẳng Oxy). Lúc đó, một chiếc máy bay bắt đầu di chuyển từ điểm $A\ 700;850;100$ với vận tốc không đổi 150(km/h) theo hướng về điểm $B\ 800;900;200$. Khi tới B , máy bay thay đổi hướng bay theo hướng về điểm $C\ 1100;1400;300$ với vận tốc giữ nguyên là 150(km/h). Máy bay di chuyển theo hướng mới trong $30\sqrt{35}$ phút (tức là mới tới điểm $D\in BC$) thì bất ngờ gặp gió lớn khiến hướng bay của nó lệch 45^0 theo phương nằm ngang (tức là nếu $\overrightarrow{v'}$ là vectơ hình chiếu xuống mặt đất của vectơ vận tốc trên đoạn đường từ điểm D trở đi thì góc lượng giác $\vec{i};\overrightarrow{v'}=45°$; góc tạo bởi vectơ vận tốc với mặt đất không thay đổi) và vận tốc giảm còn 120(km/h). Máy bay tiếp tục bay theo hướng lệch trong 30 phút.



a) Tổng thời gian bay thực tế của máy bay trong cả hành trình này là 142 phút (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

***b)** Khi bắt đầu gặp gió lớn, máy bay cách mặt đất 275km.

c) Gọi $E\ a;b;c$ là vị trí cuối cùng của máy bay trong hành trình này. Khi đó $a+b+c=$ 2670 (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

***d)** Tổng quãng đường cả hành trình dài hơn 650 km.

Lời giải

a	b	c	d
Sai	Đúng	Sai	Đúng

a) Sai: Ta có $AB = \sqrt{100^2 + 50^2 + 100^2} = 150\,\text{km}$

Thời gian bay từ A đến B là: $t_{A\to B} = \dfrac{150}{150} = 1$ giờ

Thời gian bay từ B đến D là $30\sqrt{35}$ phút; thời gian bay từ D đến E là 30 phút

Vậy tổng thời gian bay thực tế trong cả hành trình là: $\sum t = 60 + 30\sqrt{35} + 30 \approx 267$ phút.

b) Đúng: Ta có:

$\overrightarrow{BC} = (300;500;100);\ BC = 100\sqrt{35}$

$\overrightarrow{v_{BD}} \,//\, \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{v_{BD}} = \left|\overrightarrow{v_{BD}}\right|.\dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC} = 150.\dfrac{\overrightarrow{BC}}{100\sqrt{35}} = \left(\dfrac{450}{\sqrt{35}};\dfrac{750}{\sqrt{35}};\dfrac{150}{\sqrt{35}}\right)$

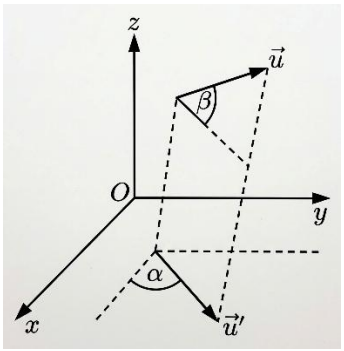
Mặt khác $30\sqrt{35}$ phút$= \dfrac{\sqrt{35}}{2}$ giờ và $\overrightarrow{BD} = t_{B\to D}.\overrightarrow{v_{BD}} = \dfrac{\sqrt{35}}{2}.\overrightarrow{v_{BD}} = (225;375;75)$

Khi đó tọa độ điểm D $(800+225;900+375;200+75) \Rightarrow D\ (1025;1275;275)$

Vậy $z_D = 275$ nên khi bắt đầu gặp gió lớn, máy bay cách mặt đất 275km.

c) Sai: Trước hết ta có hình vẽ sau:

Với $\vec{u}'$ là hình chiếu của $\vec{u}$ lên mặt phẳng Oxy; $\alpha = (\vec{i};\vec{u}');\ \beta = (\vec{u};(Oxy));$



Ta có: $x_{\vec{u}} = x_{\vec{u}'} = \left|\vec{u}'\right|.\cos\alpha = \left|\vec{u}\right|.\cos\beta.\cos\alpha;\ y_{\vec{u}} = y_{\vec{u}'} = \left|\vec{u}'\right|.\sin\alpha = \left|\vec{u}\right|.\cos\beta.\sin\alpha;\ z_{\vec{u}} = \left|\vec{u}\right|.\sin\beta$

Gọi $\vec{v}$ là vectơ vận tốc của máy bay kể từ khi gặp gió tại D

Áp dụng: $\beta = DE;\ Oxy = DC;\ Oxy = BC;\ Oxy$ mà $\overrightarrow{BC} \,//\, \vec{u}$ $3;5;1$ và $\overrightarrow{n_{Oxy}} = 0;0;1$

Suy ra $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{35}.1} = \dfrac{1}{\sqrt{35}} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{\dfrac{34}{35}}$

Vậy $\begin{cases} x_{\vec{v}} = \left|\vec{v}\right|.\cos\beta.\cos\alpha = 120.\sqrt{\dfrac{34}{35}}.\cos 45^\circ = 120.\sqrt{\dfrac{17}{35}} \\ y_{\vec{v}} = \left|\vec{v}\right|.\cos\beta.\sin\alpha = 120.\sqrt{\dfrac{34}{35}}.\sin 45^\circ = 120.\sqrt{\dfrac{17}{35}} \\ z_{\vec{v}} = \left|\vec{v}\right|.\sin\beta = 120.\dfrac{1}{\sqrt{35}} = \dfrac{120}{\sqrt{35}} \end{cases}$

Suy ra $\overrightarrow{DE} = t_{D\to E}.\vec{v'} = \dfrac{1}{2}.\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \dfrac{1}{2}\vec{v} = (1025;1275;275) + \dfrac{1}{2}\vec{v}$

Vậy $a+b+c=\left(1025+\frac{1}{2}.120.\sqrt{\frac{17}{35}}\right)+\left(1275+\frac{1}{2}.120.\sqrt{\frac{17}{35}}\right)+\left(275+\frac{1}{2}.\frac{120}{\sqrt{35}}\right)\approx 2669$

d) Đúng: Tổng quãng đường máy bay di chuyển trong cả hành trình là:

$S=AB+BD+DE=150+75\sqrt{35}+120.\frac{1}{2}\approx 653,7>650$ km.

Câu 3. Kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai nhóm A và B được cho trong bảng tần số ghép nhóm như sau:

Điểm trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Học sinh nhóm A	4	5	3	4	2
Học sinh nhóm B	2	5	4	3	1

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

***a)** Số trung bình (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường A là 7,22.

b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B là 6,5.

c) Độ lệch chuẩn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B là 1,13.

***d)** Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn.

Lời giải

a	b	c	d
Đúng	**Sai**	**Sai**	**Đúng**

a) Xét số liệu của trường A:

Số trung bình: $\overline{x_A}=\frac{4.5,5+5.6,5+3.7,5+4.8,5+2.9,5}{18}=7,22$

Chọn ĐÚNG.

b) Xét số liệu của trường B:

Mốt: $M_o=6+\frac{5-2}{(5-2)+(5-4)}.1=6,75$.

Chọn SAI.

c) Xét số liệu của trường B:

$$\overline{x_B}=\frac{2.5,5+5.6,5+4.7,5+3.8,5+1.9,5}{15}\approx 7,23$$

Độ lệch chuẩn: $\sigma_B=\sqrt{\frac{2.5,5^2+5.6,5^2+4.7,5^2+3.8,5^2+1.9,5^2}{15}-7,23^2}\approx 1,12$

Chọn SAI.

d)

***** Xét trường A: Cỡ mẫu: $n_A=18$

Gọi $x_1;x_2;\ldots;x_{18}$ là mẫu số liệu gốc về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1;\ldots;x_4\in[5;6);x_5;\ldots;x_9\in[6;7);x_{10};\ldots;x_{12}\in[7;8);x_{12};\ldots;x_{16}\in[8;9);x_{17};x_{18}\in[9;10)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_5 \in [6;7)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1 = 6 + \dfrac{\dfrac{18}{4} - 4}{5}(7-6) = 6{,}1$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{14} \in [8;9)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 8 + \frac{\dfrac{3.18}{4} - (4+5+3)}{4}(9-8) = 8{,}375$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 2{,}275$

- Xét trường B: Cỡ mẫu: $n_B = 15$

Gọi $y_1; y_2; \ldots; y_{15}$ là mẫu số liệu gốc về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường B được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $y_1; y_2 \in [5;6); y_3; \ldots; y_7 \in [6;7); y_8; \ldots; y_{11} \in [7;8); y_{12}; \ldots; y_{14} \in [8;9); y_{15} \in [9;10)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $y_4 \in [6;7)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1' = 6 + \dfrac{\dfrac{15}{4} - 2}{5}(7-6) = 6{,}35$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $y_{12} \in [8;9)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3' = 8 + \frac{\dfrac{3.15}{4} - (2+5+4)}{3}(9-8) \approx 8{,}08$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q' = Q_3' - Q_1' = 1{,}73$

Vậy nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn

Chọn ĐÚNG.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)$.

***a)** Khi $m = 0$ thì đạo hàm của $y = f(x)$ trên $(-2;+\infty)$ là $y' = \dfrac{2x}{(2x^2+1)\ln 2} - \dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$.

b) Khi $m = -1$ thì phương trình $f(x) = 1$ có hai nghiệm phân biệt.

***c)** Khi $0 < m < 2\sqrt{2}$ thì tập xác định của hàm số $y = f\left(2-x^2\right)$ là $D = [-2;2]$.

***d)** Có 4 giá trị m nguyên dương để phương trình $f(x) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a	b	c	d
Đúng	Sai	Đúng	Đúng

a) Khi $m = 0$ thì ta có $y = f(x) = \log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) = \dfrac{1}{2}\log_2(2x^2+1) - \log_2(x+2)$.

Do đó, $f'(x) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{4x}{(2x^2+1)\ln 2} - \dfrac{1}{(x+2)\ln 2} = \dfrac{2x}{(2x^2+1)\ln 2} - \dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$.

Vậy a) **đúng.**

b) Khi $m=-1$ thì phương trình $f(x)=1$ trở thành $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x+2}\right)=1$.

Khi đó $\sqrt{2x^2-x+1}=2.(x+2),\ (x>-2)$ hay $2x^2+17x+15=0,\ (x>-2)$. Suy ra $x=-1$.

Vậy b) **sai.**

c) Khi $0<m<2\sqrt{2}$ thì:

Biểu thức: $u(x)=2x^2+mx+1$ có $\Delta=m^2-8<0$ nên $2x^2+mx+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ xác định khi $2-x^2+2>0$ hay $4-x^2>0$. Suy ra $-2<x<2$.

Vậy c) **đúng.**

d) Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+mx+1>0\\ x+2>0\end{cases}$

Ta có $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2$

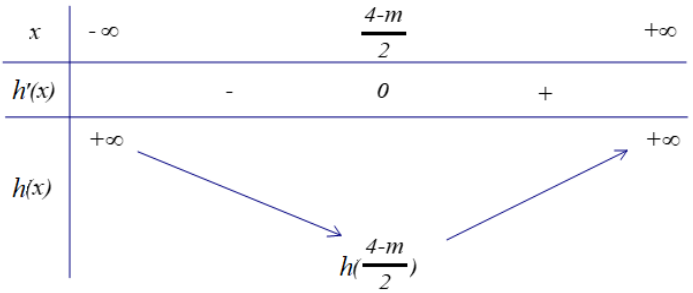
nên $\log_2\sqrt{2x^2+mx+1}+\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2+\log_2(x+2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$,

có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right)=f(x+2)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+mx+1}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ x^2+(m-4)x-3=0\end{cases}$

Do $h(x)=x^2+(m-4)x-3$ là tam thức bậc hai nên có bảng biến thiên



Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $h(x)=x^2+(m-4)x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2.

Suy ra: $\begin{cases}-2<\dfrac{4-m}{2}\\ h\left(\dfrac{4-m}{2}\right)<0<9-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\ m<\dfrac{9}{2}\\ -\left(\dfrac{4-m}{2}\right)^2-3<0\end{cases}\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{2}.$

Vậy $m\in\{1;2;3;4\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán..

Vậy d) **đúng.**

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M,N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA,CB sao cho MN song song với AB và $\dfrac{CM}{CA}=k$. Gọi S là giao điểm của $A'M$ và $B'N$.

***a)** Ba đường thẳng $A'M, B'N, C'C$ đồng quy tại điểm S.

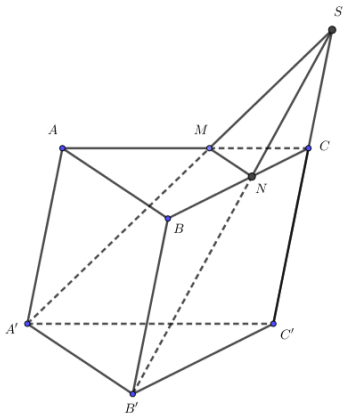
b) Nếu $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a thì có thể tích $V = a^3$.

c) Nếu $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a và $k = \frac{1}{2}$ thì góc giữa SA' và mặt đáy bằng $45°$.

***d)** Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm C có thể tích là V_1 và phần còn lại có thể tích là V_2. Khi $\frac{V_1}{V_2} = 2$ thì $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lời giải

a	b	c	d
Đúng	**Sai**	**Sai**	**Đúng**



a) Ba đường thẳng $A'M, B'N, C'C$ đồng quy tại điểm S.

Ta có: $(AA'C'C) \cap (BB'C'C) = C'C$

Mà $\begin{cases} S = A'M \cap B'N \\ A'M \subset (AA'C'C) \Rightarrow S \in (AA'C'C) \cap (BB'C'C) \Rightarrow S \in C'C \\ B'N \subset (BB'C'C) \end{cases}$.

Chọn ĐÚNG.

b) Nếu $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a thì có thể tích là:

$V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn SAI.

c) Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều suy ra $SC' \perp (A'B'C')$ nên góc giữa SA' và đáy bằng góc $SA'C'$.

Do $k = \frac{1}{2}$ nên M là trung điểm AC suy ra MC là đường trung bình tam giác $SA'C'$.

Tam giác $SA'C'$ vuông tại C' có $\tan SA'C' = \frac{SC'}{A'C'} = 2$.

Vậy góc giữa SA' và mặt đáy gần bằng $63°$.

Chọn SAI.

d) Ta có $\frac{V_1}{V_2} = 2$ nên $V_1 = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ và $V_2 = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Ta có $k = \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{MN}{A'B'} = \frac{SM}{SA'} = \frac{SN}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$.

$V_{S.MNC}=k^3.V_{S.A'B'C'}\Rightarrow V_1=V_{MNC.A'B'C'}=\left(1-k^3\right)V_{S.A'B'C'}$.

$\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{S_{A'B'C'}.CC'}{\dfrac{1}{3}S_{A'B'C'}.SC'}=\dfrac{3CC'}{SC'}=\dfrac{3\left(SC'-SC\right)}{SC'}=3\left(1-k\right)$

$\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}$.

$\Rightarrow V_1=\left(1-k^3\right).V_{S.A'B'C'}=\left(1-k^3\right).\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}=\dfrac{\left(k^2+k+1\right).V_{ABC.A'B'C'}}{3}$.

Vì $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ nên $V_1=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow\dfrac{k^2+k+1}{3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(\text{do } k>0\right)$.

Vậy $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 6. Một hộp có 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 4 thẻ trong hộp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Xác suất để lấy được 4 thẻ, trong đó có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 10 nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$

***b)** Xác suất để lấy được 4 thẻ có tổng số ghi trên các thẻ là một số chẵn là $\dfrac{1}{2}$

***c)** Xác suất để lấy được 4 thẻ có hiệu số ghi của hai thẻ bất kì trong các thẻ đó lớn hơn 1 bằng $\dfrac{759}{980}$

***d)** Xác suất để lấy được 4 thẻ có tổng các bình phương của số ghi trên các thẻ là một số chia hết cho 5 bằng 0,236(kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

Lời giải

a	b	c	d
Sai	Đúng	Đúng	Đúng

Số phần tử không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right)=C_{50}^4$

a) Gọi A là biến cố: Lấy được 4 thẻ, trong đó có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 10.

Ta xét biến cố đối: $\overline{A}$: Lấy được 4 thẻ, trong đó không có thẻ nào ghi số chia hết cho 10.

Từ 1 đến 50, có 5 số chia hết cho 10 và 45 số không chia hết cho 10.

Khi đó: $n\left(\overline{A}\right)=C_{45}^4$

$\Rightarrow P\left(A\right)=1-\dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{2323}{6580}>\dfrac{1}{3}$

Vậy a) sai.

b) Gọi B là biến cố: Lấy được 4 thẻ có tổng số ghi trên các thẻ là một số chẵn

Để lấy được 4 thẻ có tổng số ghi là một số chẵn, xảy ra các khả năng sau:

KN1: Lấy được 4 thẻ đều ghi số chẵn

KN2: Lấy được 2 thẻ ghi số chẵn và 2 thẻ ghi số lẻ

KN3: Lấy được 4 thẻ đều ghi số lẻ

Khi đó: $n\left(B\right)=C_{25}^4+C_{25}^2.C_{25}^2+C_{25}^0.C_{25}^4$

$\Rightarrow P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$

c) Gọi C là biến cố: Lấy được 4 thẻ có hiệu số ghi của hai thẻ bất kì trong các thẻ đó lớn hơn 1 bằng $\dfrac{759}{980}$

Gọi a,b,c,d là các số ghi trên các thẻ lấy được.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a<b<c<d \Rightarrow 1\le a<b<c<d\le 50$ (1)

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} b-a>1 \\ c-b>1 \\ d-c>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<b-1 \\ b<c-1 \\ c<d-1 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $1\le a<b-1<c-2<d-3\le 47$

$\Rightarrow n(C)=C_{47}^4$

$\Rightarrow P(C)=\dfrac{C_{47}^4}{C_{50}^4}=\dfrac{759}{980}$

d) Với mỗi số nguyên dương k, ta có: $(5k)^2=25k^2 \vdots 5$

$(5k+1)^2=25k^2+10k+1$ chia 5 dư 1

$(5k+2)^2=25k^2+20k+4$ chia 5 dư 4

$(5k+3)^2=25k^2+30k+9$ chia 5 dư 4

$(5k+4)^2=25k^2+40k+16$ chia 5 dư 1

Gọi M là tập hợp các thẻ ghi số chia hết cho 5 $\Rightarrow |M|=10$

N là tập hợp các thẻ ghi số chia cho 5 dư 1 hoặc dư 4 $\Rightarrow |N|=20$

P là tập hợp các thẻ ghi số chia cho 5 dư 2 hoặc dư 3 $\Rightarrow |P|=20$

Gọi D là biến cố: lấy được 4 thẻ có tổng bình phương các số ghi trên đó là một số chia hết cho 5.

Để lấy được 4 thẻ có tổng bình phương số ghi trên đó là số chia hết cho 5, xảy ra các khả năng sau:

KN1: Lấy cả 4 thẻ thuộc tập M

KN2: Lấy 2 thẻ thuộc tập M, 1 thẻ thuộc tập N và 1 thẻ thuộc tập P

KN3: Lấy 2 thẻ thuộc tập N và 2 thẻ thuộc tập P

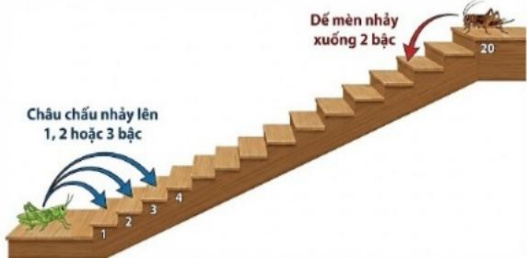
Khi đó: $n(D)=C_{10}^4+C_{10}^2.C_{20}^1.C_{20}^1+C_{20}^2.C_{20}^2$

$\Rightarrow P(D)=\dfrac{n(D)}{n(\Omega)}=\dfrac{5431}{23030}\simeq 0,2358.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một cầu thang rất dài được đánh số các bậc lần lượt là $0,1,2,3,\ldots$ theo thứ tự từ thấp lên cao

- Châu chấu xuất phát ở bậc 0; mỗi lượt nó nhảy lên 1 bậc, 2 bậc hoặc 3 bậc.
- Dế xuất phát ở bậc 20; mỗi lượt dế luôn nhảy xuống đúng 2 bậc.



Hai con bắt đầu nhảy cùng lúc, cứ 10 giây nhảy một lượt. Biết rằng sau 10 lượt đầu tiên (khi dế nhảy hết bậc cầu thang) thì châu chấu có N cách nhảy sao cho hai con gặp nhau tại một bậc cầu thang nào đó, hãy tính giá trị $\frac{N}{9}$.

Lời giải

Đáp án: 1647

Gọi k là số lượt nhảy để hai con gặp nhau ($1 \le k \le 10$).

- Vị trí của Dế sau k lượt: $20-2k$.
- Vị trí của Châu chấu sau k lượt là S_k.

Để hai con gặp nhau: $S_k = 20-2k$.

Vì mỗi bước Châu chấu nhảy từ 1 đến 3 bậc, ta có điều kiện: $k \le S_k \le 3k \Rightarrow k \le 20-2k \le 3k$

Giải bất phương trình ta được: $4 \le k \le 6$.

Ta xét 3 trường hợp có thể xảy ra.

Lưu ý: sau khi gặp nhau, Châu chấu vẫn tiếp tục nhảy cho đến hết 10 lượt, các bước sau đó tùy ý (mỗi bước có 3 lựa chọn).

Trường hợp 1: Gặp ở lượt thứ 4 ($k=4$)

Vị trí gặp: $20-2\times 4 = 12$.

Số cách để Châu chấu nhảy đến bậc 12 trong 4 lượt: Chỉ có 1 cách duy nhất là bộ $\{3;3;3;3\}$.

Số cách nhảy cho 6 lượt còn lại: $3^6 \Rightarrow$ Số cách trường hợp 1: 1×3^6.

Trường hợp 2: Gặp ở lượt thứ 5 **(**$k=5$**)**

Vị trí gặp: $20-2(5)=10$.

Số cách để tổng 5 bước bằng 10:

$\{2;2;2;2;2\}:\frac{5!}{5!}=1$ cách, $\{3;2;2;2;1\}:\frac{5!}{3!}=20$ cách, $\{3;3;2;1;1\}:\frac{5!}{2!\times 2!}=30$ cách.

Tổng cộng: $1+20+30=51$ cách.

Số cách nhảy cho 5 lượt còn lại: $3^5 \Rightarrow$ Số cách trường hợp 2: 51×3^5.

Trường hợp 3: Gặp ở lượt thứ 6 ($k=6$)

Vị trí gặp: $20-2(6)=8$.

Số cách để tổng 6 bước bằng 8:

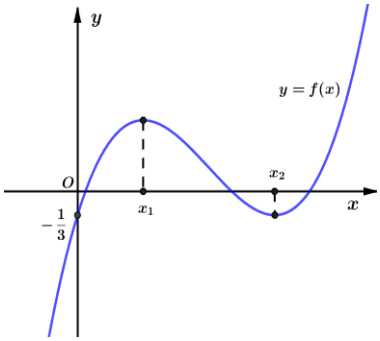
$\{3;1;1;1;1;1\}:\frac{6!}{5!}=6$ cách, $\{2;2;1;1;1;1\}\ \frac{6!}{2!\times 4!}=15$ cách.

Tổng cộng: $6+15=21$ cách.

Số cách nhảy cho 4 lượt còn lại: $3^4 \Rightarrow$ Số cách trường hợp 3: 21×3^4.

Vậy, $N = 1\times 3^6 + 51\times 3^5 + 21\times 3^4 \Rightarrow \frac{N}{9} = 1647$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx+d\ (b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ:



Biết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - x_2 = -1$ và $f(x_1) + f(x_2) = \frac{2}{3}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2026; 2027]$ để bất phương trình $f\left(\frac{x(3f(x)+1)}{(x-3)^2}\right) \le m$ đúng $\forall x \in \left[0; \sqrt{3}\right]$.

Lời giải

Đáp án: 2027

Ta có $f'(x) = x^2 + 2bx + c$. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ nên $d = -\frac{1}{3}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $f'(x)$. Áp dụng định lí Viet ta có

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2b \\ x_1.x_2 = c \end{cases}$, mà theo giả thiết $2x_1 - x_2 = -1$, suy ra $\begin{cases} x_1 = \frac{-2b-1}{3} \\ x_2 = \frac{1-4b}{3} \\ x_1.x_2 = c \end{cases} \Rightarrow \frac{(2b+1)(4b-1)}{9} = c \quad (1)$

Từ giả thiết suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là:

$A(x_1; f(x_1)), B(x_2; f(x_2)) \Rightarrow I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right) = \left(-b; \frac{1}{3}\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

Mà I thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên ta có:

$$-\frac{b^3}{3} + b^3 - bc - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2b^3 - 3bc - 2 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{2b^3 - 2}{3b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$(2b+1)(4b-1)b = 3(2b^3 - 2) \Leftrightarrow 2b^3 + 2b^2 - b + 6 = 0 \Leftrightarrow b = -2 \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3} \Rightarrow 3f(x) + 1 = x(x-3)^2$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3; \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bất phương trình $f\left(\frac{x(3f(x)+1)}{(x-3)^2}\right) \le m \Leftrightarrow f(x^2) \le m$

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ trên $\left[0; \sqrt{3}\right]$

Ta có: $g'(x) = 2xf'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right.$

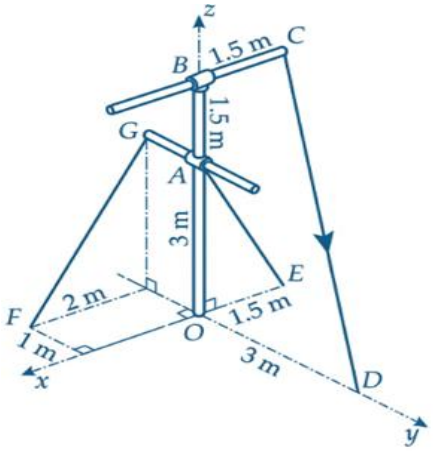
Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ trên $\left[0; \sqrt{3}\right]$ như sau:

x	0		1		$\sqrt{3}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘	$-\frac{1}{3}$

Để $f\left(x^2\right) \le m$, $\forall x \in \left[0;\sqrt{3}\right]$ thì $m \ge 1 \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;2027\}$

Vậy có 2027 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 3. Một ống phun nước có hình dạng như hình vẽ dưới.



Để giữ cho ống nước được cân bằng không bị nghiêng kỹ sư sử dụng ba đoạn thép để nối các điểm C, A, G với mặt đất, các đoạn thép CD, GF, AE có độ lớn lực căng lần lượt bằng 1200N, 900N và 600N. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, coi gốc tọa độ là chân ống nước, trục Oz hướng lên trời, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) các thông số được cho như hình vẽ, đơn vị trên các hệ trục tọa độ tính bằng mét. Coi đường kính ống không đáng kể, độ lớn vectơ hợp lực của ba sợi thép tác động lên ống nước là bao nhiêu Newton (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

Lời giải

Đáp án: 2402

Giả sử các tọa độ dựa trên các số đo trong hình (đơn vị mét), khi đó

Điểm trên ống $A(0;0;3)$; $G(0;-1;3)$; $C(-1,5;0;4,5)$.

Các điểm neo dưới đất:

$E(-1,5;0;0)$ nối với A.

$F(2;-1;0)$ nối với G.

$D(0;3;0)$ nối với C.

Ta có: $\overrightarrow{AE}=(-1,5;0;-3)\Rightarrow AE=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

$\vec{F_1}=\dfrac{F_1}{AE}\overrightarrow{AE}=\dfrac{600}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}.\overrightarrow{AE}\Rightarrow\vec{F_1}=\left(-120\sqrt{5};0;-240\sqrt{5}\right)$.

$\overrightarrow{GF}=(2;0;-3)\Rightarrow GF=\sqrt{13}$.

$\vec{F_2}=\dfrac{F_2}{GF}\overrightarrow{GF}=\dfrac{900}{\sqrt{13}}.\overrightarrow{GF}\Rightarrow\vec{F_2}=\left(\dfrac{1800}{\sqrt{13}};0;\dfrac{-2700}{\sqrt{13}}\right)$.

$\overrightarrow{CD}=(1,5;3;-4,5)\Rightarrow CD=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$.

$\vec{F_3}=\dfrac{F_3}{CD}\overrightarrow{CD}=\dfrac{1200}{\frac{3\sqrt{14}}{2}}\overrightarrow{CD}\Rightarrow\vec{F_3}=\left(\dfrac{1200}{\sqrt{14}};\dfrac{2400}{\sqrt{14}};-\dfrac{3600}{\sqrt{14}}\right)$.

Do đó $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\left(-120\sqrt{5}+\dfrac{1800}{\sqrt{13}}+\dfrac{1200}{\sqrt{14}};\dfrac{2400}{\sqrt{14}};-240\sqrt{5}-\dfrac{2700}{\sqrt{13}}-\dfrac{3600}{\sqrt{14}}\right)$

$\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}\right|=\sqrt{\left(-120\sqrt{5}+\dfrac{1800}{\sqrt{13}}+\dfrac{1200}{\sqrt{14}}\right)^2+\left(\dfrac{2400}{\sqrt{14}}\right)^2+\left(-240\sqrt{5}-\dfrac{2700}{\sqrt{13}}-\dfrac{3600}{\sqrt{14}}\right)^2}\approx 2402$.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) sao cho ứng với mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn

$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1$?

Lời giải

Đáp án: 36

$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1$

$$\Leftrightarrow \log_5\frac{3x^2+xy+36y^2}{xy}<\log_3\frac{3x^2+48xy+36y^2}{x^2+12y^2} \Leftrightarrow \log_5\left(3\left(\frac{x}{y}+\frac{12y}{x}\right)+1\right)<\log_3\left(3+\frac{48}{\frac{x}{y}+12\frac{y}{x}}\right)$$

Đặt $a=\frac{x}{y}+\frac{12y}{x}>0$. Ta được $\log_5(3a+1)-\log_3\left(3+\frac{48}{a}\right)<0$.

Xét $f(a)=\log_5(3a+1)-\log_3\left(3+\frac{48}{a}\right),\ a\in(0,+\infty)$.

$$\Rightarrow f'(a)=\frac{3}{(3a+1)\ln 5}+\frac{\frac{48}{a^2}}{\left(3+\frac{48}{a}\right)\ln 3}>0, \forall a>0.$$

$\Rightarrow f(a)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $f(8)=0\Rightarrow f(a)<0\Leftrightarrow a<8$. Khi đó ta có

$$\frac{x}{y}+12\frac{y}{x}<8\Leftrightarrow x^2+12y^2<8xy \Leftrightarrow x^2-8xy+12y^2<0 \Leftrightarrow (x-2y)(x-6y)<0\Leftrightarrow 2y<x<6y.$$

Để mỗi giá trị của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thì điều kiện là:

$$(6y-1)-(2y+1)+1\le 15\Leftrightarrow y\le 4, y\in N^*\Rightarrow 1\le y\le 4.$$

Với $y=1\Rightarrow x\in(2;6)\Rightarrow$ có 3 cặp $(x;y)$.

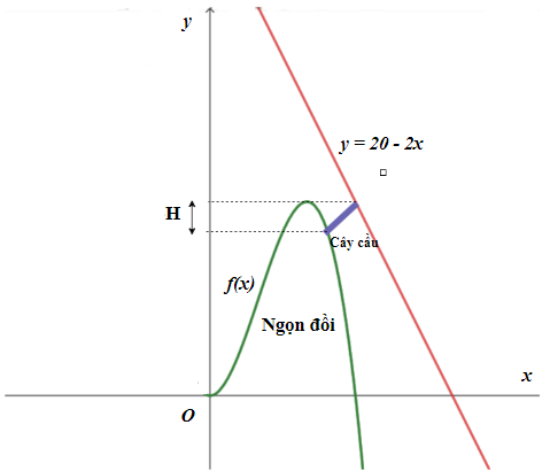
Với $y=2\Rightarrow x\in(4;12)\Rightarrow$ có 7 cặp $(x;y)$.

Với $y=3\Rightarrow x\in(6;18)\Rightarrow$ có 11 cặp $(x;y)$.

Với $y=4\Rightarrow x\in(8;24)\Rightarrow$ có 15 cặp $(x;y)$.

Vậy có 36 cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. Một ngọn đồi được giới hạn bởi một đường cong trong hệ tọa độ Oxy và được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$ *(tham khảo hình vẽ)*. Vị trí điểm cực đại là $(4;8)$ với đơn vị của hệ trục là $100m$ và vị trí điểm cực tiểu là gốc tọa độ O. Một con đường được xây dựng dọc theo đồi có phương trình $d: y=20-2x$. Người ta muốn xây dựng một cây cầu dạng đoạn thẳng nối từ ngọn đồi ra mặt đường. Biết rằng chi phí xây dựng cầu phụ thuộc vào chiều dài của cây cầu, công thức chi phí xây dựng là $C=20000L+500H$ (USD), trong đó L là chiều dài cây cầu và H là độ cao chênh lệch giữa hai đầu cầu được tính dựa vào L. Hỏi chi phí xây dựng cây cầu là bao nhiêu nghìn USD nếu người ta muốn xây dựng sao cho chiều dài cây cầu là ngắn nhất? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)*



Lời giải

Đáp án: 13,6

Ta có $f'(x)=ax(x-4)\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)+C$

Lại có: $f(0)=0$ và $f(4)=8\Rightarrow\begin{cases}C=0\\a\left(\frac{4^3}{3}-2.4^2\right)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=0\\a=-\frac{3}{4}\end{cases}$

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2$

Gọi $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là tiếp điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=20-2x$

Khi đó $-\frac{3}{4}x_0^2+3x_0=-2\Rightarrow x_0=\frac{6+2\sqrt{15}}{3}\Rightarrow f\left(x_0\right)=\frac{36+8\sqrt{15}}{9}$

Chiều dài cây cầu L có thể tính được bằng cách: $L=d\left(M;d\right)=\frac{\left|2.x_0+1.f\left(x_0\right)-20\right|}{\sqrt{5^2+1}}=\frac{108-20\sqrt{15}}{9\sqrt{26}}$

Tính chiều cao chênh lệch H:

Ta có đường thẳng $\Delta: y=ax+b$ là đường thẳng đi qua $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ và vuông góc với $d: y=20-2x$

Suy ra $a.(-2)=-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ và $f\left(x_0\right)=\frac{1}{2}x_0+b\Rightarrow b=f\left(x_0\right)-\frac{1}{2}x_0$

Khi đó $\Delta: y=\frac{1}{2}x+f\left(x_0\right)-\frac{1}{2}x_0$

Gọi $N\in d$ là đầu cầu thứ 2:

$$\begin{cases}y_N=\frac{1}{2}x_N+f\left(x_0\right)-\frac{1}{2}x_0\\y_N=20-2x_N\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{2}x_N=20-f\left(x_0\right)+\frac{1}{2}x_0\Rightarrow x_N=\frac{1}{5}x_0-\frac{2}{5}f\left(x_0\right)+8$$

$$\Rightarrow y_N=\frac{4}{5}f\left(x_0\right)-\frac{2}{5}x_0+4$$

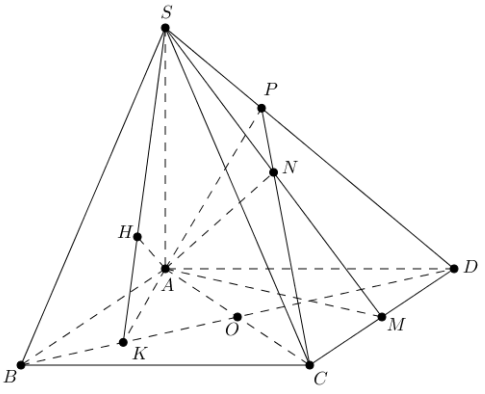
Vậy: $H=\left|\left(\frac{4}{5}f\left(x_0\right)-\frac{2}{5}x_0+4\right)-f\left(x_0\right)\right|=\frac{108-20\sqrt{15}}{45}$

Chi phí xây dựng cây cầu: $C=20000L+500H\approx 13649$ USD

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD. Trung tuyến CN của tam giác SCM kéo dài cắt SD tại P. Biết rằng $AB=3$, $\cos\left(SC,(ABCD)\right)=\frac{5}{\sqrt{26}}$ và $d\left(C,(SBD)\right)=\frac{12}{13}$. Biết $V_{S.ANP}=\frac{a}{b}$ với $a,b\in N^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính $2a-b$?

Lời giải

Đáp án: - 4



Trong tam giác ACD, ta chứng minh được $\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.AMD}}=\frac{SN}{SM}.\frac{SP}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $AK\perp BD$ tại K, $AH\perp AK$ tại H.

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{9+AD^2}$, $\tan\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(SC,\left(ABCD\right)\right)}-1}=\frac{1}{5}$.

AC là hình chiếu của SC trên $\left(ABCD\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{5}=\tan\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=\tan\left(SC,AC\right)=\tan SCA=\frac{SA}{AC}\Rightarrow SA=\frac{1}{5}\sqrt{9+AD^2}$

$AK=\frac{AB.AD}{AC}=\frac{3AD}{\sqrt{9+AD^2}}$

$AH=\frac{SA.AK}{SK}=\frac{SA.AK}{\sqrt{SA^2+AK^2}}=\frac{\frac{1}{5}\sqrt{9+AD^2}.\frac{3AD}{\sqrt{9+AD^2}}}{\sqrt{\frac{1}{25}\left(9+AD^2\right)+\frac{9AD^2}{9+AD^2}}}=3AD\sqrt{\frac{9+AD^2}{AD^4+243AD^2+81}}$

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AK\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp\left(SAK\right)\Rightarrow BD\perp AH$

mà $SK\perp AH\Rightarrow AH\perp\left(SBD\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SBD\right)\right)=AH$.

$AC\cap\left(SBD\right)=O\Rightarrow\frac{d\left(C,\left(SBD\right)\right)}{d\left(A,\left(SBD\right)\right)}=\frac{CO}{AO}=1\Rightarrow d\left(C,\left(SBD\right)\right)=AH$

$\Rightarrow\frac{12}{13}=3AD\sqrt{\frac{9+AD^2}{AD^4+243AD^2+81}}\Rightarrow\frac{16}{169}=\frac{AD^2\left(9+AD^2\right)}{AD^4+243AD^2+81}$

$\Rightarrow153AD^4-2367AD^2-1296=0\Rightarrow AD=4\Rightarrow SA=1$

$\Rightarrow V_{S.AMD}=\frac{1}{3}.SA.S_{AMD}=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}AD.MD=\frac{1}{6}.4.\frac{1}{2}AB=\frac{1}{3}.3=1\Rightarrow V_{S.ANP}=\frac{1}{6}\Rightarrow2a-b=-4$.

----------HẾT----------