

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG  
HÀ NỘI DỰ THI QUỐC GIA CÁC MÔN VĂN HÓA  
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2026-2027

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (BẢNG B)

Ngày thi: 14 tháng 9 năm 2026

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1 (5,0 điểm)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = \frac{1}{2}$  và  $u_{n+1} = \frac{3-u_n^2}{2}$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Chứng minh  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên tố lẻ  $(p, q)$ , với  $p < q$ , thỏa mãn  $p^{r^2} + (p+2)^{r^2}$  chia hết cho  $q$  và  $C_{p/q}^n$  chia hết cho  $pq$ .

Bài 3 (4,0 điểm)

Cho số nguyên  $n$  lớn hơn 3 và một đa giác đều  $P$  có  $2n$  đỉnh. Một tam giác được gọi là *phủ đa giác*  $P$  nếu tất cả các đỉnh của  $P$  đều nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

Tính số tam giác phủ đa giác  $P$  tạo bởi ba đường thẳng chứa ba cạnh của đa giác  $P$ .

Bài 4 (6,0 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC < BC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Ba đường cao  $AA_1, BB_1, CC_1$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại trực tâm  $H$ .

a) Gọi  $A_0, B_0, C_0$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Gọi  $X$  là giao điểm của hai đường thẳng  $B_0O$  và  $C_0A_0$ ,  $Y$  là giao điểm của hai đường thẳng  $C_0O$  và  $A_0B_0$ . Hai đường thẳng  $XY$  và  $B_0C_0$  cắt nhau tại điểm  $Z$ . Chứng minh đường thẳng  $A_0H$  vuông góc với đường thẳng  $A_0Z$ .

b) Kẻ đường kính  $AK$  của đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng  $BB_1, CC_1$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $A_1HK$ .

----- Hết -----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG  
HÀ NỘI**  
**DỰ THI QUỐC GIA CÁC MÔN VĂN HÓA**  
**LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2026-2027**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Môn thi: TOÁN (BẢNG B)**

Ngày thi: 15 tháng 9 năm 2026

Thời gian làm bài: 180 phút

**Bài 5 (5,0 điểm)**

Xét hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(1) > 0$  và

$$f(a)f(d) - f(b)f(c) = 1$$

với mọi số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $ad - bc = 1$ .

a) Chứng minh  $f(xy) = f(x)f(y)$  với mọi số thực  $x$  và  $y$ .

b) Chứng minh  $f(x) = x$  với mọi số thực  $x$ .

**Bài 6 (5,0 điểm)**

Cho  $P(x)$  là một đa thức với hệ số nguyên có bậc bằng 5 sao cho có vô hạn cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $xP(x) = yP(y)$  và  $x \neq y$ .

a) Chứng minh tồn tại số nguyên  $C$  có tính chất: Nếu  $(x, y)$  là cặp số nguyên thỏa mãn  $x \neq y$  và  $xP(x) = yP(y)$  thì  $|x + y| \leq C$ .

b) Chứng minh  $P(x)$  có nghiệm nguyên.

**Bài 7 (5,0 điểm)**

Cho số nguyên dương lẻ  $n$ . Một số nguyên dương  $m$  được gọi là số tốt nếu  $m^r + x^m$  chia hết cho  $n^r + x^n$  với mọi số nguyên dương  $x$ .

a) Chứng minh nếu  $m$  là một số tốt thì  $m$  chia hết cho  $n$ .

b) Tìm tất cả các số tốt.

**Bài 8 (5,0 điểm)**

Cho 9 số thực  $a_1, a_2, \dots, a_9$ . Khởi đầu với bộ 9 số thực  $(a_1, a_2, \dots, a_9)$ .

Ở mỗi bước, từ bộ vừa được tạo  $(x_1, x_2, \dots, x_9)$ , ta tạo ra một bộ mới  $(y_1, y_2, \dots, y_9)$  theo quy tắc sau: chọn các số  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_9 \in \{-1; 1\}$  sao cho biểu thức  $\left| \sum_{i=1}^9 \epsilon_i x_i \sqrt{i} \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có nhiều cách chọn, lấy một cách tùy ý), sau đó đặt  $y_i = x_i + \epsilon_i \sqrt{i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

Chứng minh sau hữu hạn bước, sẽ xuất hiện một bộ  $(u_1, u_2, \dots, u_9)$  sao cho tồn tại chỉ số  $i$  để  $|u_i| \geq \frac{15}{2}$ .

----- Hết -----

*Giám thị không giải thích gì thêm.*

## CHỌN ĐTQG HÀ NỘI 2026 – NGÀY 1

**Bài toán 0.1.** (Lim Olympic - Hà Nội TST - P1)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = \frac{1}{2}$  và  $u_{n+1} = \frac{3 - u_n^2}{2}$  với mọi số nguyên dương  $n$ .  
 Chứng minh  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

 **Lời giải.**

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $0 < u_{2n-1} < 1 < u_{2n} < \frac{3}{2}$ .

Với  $n = 1$ , ta có  $u_1 = \frac{1}{2}$  và  $u_2 = \frac{3 - u_1^2}{2} = \frac{11}{8}$ , nên khẳng định đúng.

Giả sử  $0 < u_{2n-1} < 1$ . Khi đó  $1 < \frac{3 - u_{2n-1}^2}{2} < \frac{3}{2}$ , nên  $1 < u_{2n} < \frac{3}{2}$ .

Tiếp theo, từ  $1 < u_{2n} < \frac{3}{2}$  suy ra  $0 < \frac{3 - u_{2n}^2}{2} < 1$ , nên  $0 < u_{2n+1} < 1$ .

Do đó, theo nguyên lý quy nạp,  $0 < u_{2n-1} < 1 < u_{2n} < \frac{3}{2}$  với mọi  $n \geq 1$ .

Mặt khác, ta có  $u_{n+2} - u_n = \frac{3 - u_{n+1}^2}{2} - u_n = \frac{3 - \left(\frac{3 - u_n^2}{2}\right)^2}{2} - u_n = \frac{(1 - u_n)^3(u_n + 3)}{8}$ .

♦ Nếu  $n$  lẻ thì  $0 < u_n < 1$ , do đó  $u_{n+2} - u_n > 0$ . Suy ra dãy  $(u_{2n-1})$  tăng.

Lại có  $u_{2n-1} < 1$ , nên  $(u_{2n-1})$  bị chặn trên. Vì thế tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n-1} = a$  với  $a \leq 1$ .

♦ Nếu  $n$  chẵn thì  $u_n > 1$ , do đó  $u_{n+2} - u_n < 0$ . Suy ra dãy  $(u_{2n})$  giảm.

Lại có  $u_{2n} > 1$ , nên  $(u_{2n})$  bị chặn dưới. Vì thế tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = b$  với  $b \geq 1$ .

Từ  $u_{2n} = \frac{3 - u_{2n-1}^2}{2}$  và  $u_{2n+1} = \frac{3 - u_{2n}^2}{2}$ , cho  $n \rightarrow \infty$ , ta được  $b = \frac{3 - a^2}{2}$  và  $a = \frac{3 - b^2}{2}$ .

Lấy hai đẳng thức trừ nhau, ta có

$$b - a = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b - a)(a + b)}{2},$$

suy ra  $(b - a)(2 - a - b) = 0$ .

Nếu  $a = b$  thì do  $a \leq 1 \leq b$ , ta có  $a = b = 1$ .

Nếu  $a + b = 2$ , thay  $b = 2 - a$  vào  $b = \frac{3 - a^2}{2}$ , ta được  $2 - a = \frac{3 - a^2}{2}$ , hay  $(a - 1)^2 = 0$  nên  $a = b = 1$ .

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 1$ , do đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

**Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Hà Nội TST - P2)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên tố lẻ  $(p, q)$ , với  $p < q$ , thỏa mãn  $p^{p^2} + (p+2)^{p^2}$  chia hết cho  $q$  và  $C_{3pq}^{pq}$  chia hết cho  $pq$ .

**Lời giải.**

Trước hết, từ  $q \mid C_{3pq}^{pq}$  suy ra  $q \leq 3p$ . Thật vậy, nếu  $q > 3p$  thì  $3pq < q^2$ , nên theo công thức Legendre,

$$v_q \left( C_{3pq}^{pq} \right) = \left\lfloor \frac{3pq}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{pq}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2pq}{q} \right\rfloor = 3p - p - 2p = 0,$$

trái với giả thiết. Ta có  $p^{p^2} + (p+2)^{p^2} \equiv 0 \pmod{q}$ . Trường hợp  $q = p+2$  là không thể, vì khi đó về trái đồng dư với  $p^{p^2} \not\equiv 0 \pmod{q}$ . Vì vậy  $q > p+2$  nên  $\gcd(q, p+2) = 1$ .

Vì  $\gcd(p, q) = 1$  nên tồn tại  $p^{-1} \in \mathbb{Z}$  sao cho  $p \cdot p^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$ , đặt  $a = (p+2)p^{-1}$  thì  $\gcd(a, q) = 1$ .

Khi đó  $a^{p^2} \equiv -1 \pmod{q}$ , nên  $a^{2p^2} \equiv 1 \pmod{q}$  nhưng  $a^{p^2} \not\equiv 1 \pmod{q}$ . Đặt  $d = \text{ord}_q a$  thì ta có  $d \mid 2p^2$ ,  $d \nmid p^2$ , do đó  $d \in \{2, 2p, 2p^2\}$ . Mặt khác  $d \mid q-1$  và  $q \leq 3p$ , nên  $d < 3p$ . Vì  $p \geq 3$ , suy ra  $d \neq 2p^2$ .

Nếu  $d = 2$  thì  $a \equiv -1 \pmod{q}$ , nên  $p+2 \equiv -p \pmod{q}$ , tức  $q \mid 2(p+1)$ , vô lý vì  $q > p$  lẻ.

Vậy  $d = 2p$  nên  $2p \mid q-1$ . Kết hợp  $p < q \leq 3p$  ta được  $q-1 = 2p$ , hay

$$q = 2p + 1.$$

Để ý với  $m$  nguyên dương thì  $v_p((mp)!) = m + v_p(m!)$  nên

$$v_p \left( C_{3pq}^{pq} \right) = v_p \left( C_{3q}^q \right) = v_p \left( C_{6p+3}^{2p+1} \right).$$

Nếu  $p \geq 7$  thì  $6p+3 < p^2$ , do đó

$$v_p \left( C_{6p+3}^{2p+1} \right) = \left\lfloor \frac{6p+3}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2p+1}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{4p+2}{p} \right\rfloor = 6 - 2 - 4 = 0$$

nên trái với giả thiết. Vậy  $p \in \{3, 5\}$ . Thử lại để thấy  $(p, q) = (5, 11)$  là nghiệm duy nhất thỏa mãn.

**Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Hà Nội TST - P3)**

Cho số nguyên  $n$  lớn hơn 3 và một đa giác đều  $P$  có  $2n$  đỉnh. Một tam giác được gọi là **phủ đa giác**  $P$  nếu tất cả các đỉnh của  $P$  đều nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác. Tính số tam giác phủ đa giác  $P$  tạo bởi ba đường thẳng chứa ba cạnh của đa giác  $P$ .

**Lời giải.**

Gọi  $(I)$  là đường tròn nội tiếp đa giác  $P$ , ta thu được  $2n$  tiếp điểm của  $P$  với  $(I)$ .

Chọn ba cạnh của  $P$  và gọi  $A, B, C$  lần lượt là các tiếp điểm tương ứng theo chiều kim đồng hồ.

Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số khoảng giữa hai tiếp điểm liên tiếp khi đi từ  $A$  đến  $B$ ,  $B$  đến  $C$ ,  $C$  đến  $A$ .

Khi đó  $x, y, z$  là các số nguyên dương và  $x + y + z = 2n$ .

Bây giờ ta cần điều kiện để ba đường thẳng đã chọn tạo thành một tam giác phủ  $P$ .

Giả sử hai tiếp tuyến tại  $A, B$  cắt nhau tại  $T$  thì  $AIBT$  nội tiếp, khi đó từ việc tam giác phủ  $P$  ta suy ra được  $0 < \angle ATB = 180^\circ - \angle AIB = 180^\circ - \frac{180^\circ x}{n}$  nên  $x < n$ . Tương tự ta có  $y < n$  và  $z < n$ .

Ngược lại, giả sử  $x, y, z < n$  thì tạo thành tam giác phủ  $P$  vì khi đó 3 góc của tam giác đó là

$$180^\circ - \frac{180^\circ x}{n}, \quad 180^\circ - \frac{180^\circ y}{n}, \quad 180^\circ - \frac{180^\circ z}{n}$$

Vậy điều kiện cần và đủ là  $x, y, z < n$ .

Như thế, ta chỉ còn phải đếm các bộ số nguyên dương  $(x, y, z)$  sao cho  $x + y + z = 2n$  và  $x, y, z < n$ .

Đặt  $x' = n - x$ ,  $y' = n - y$ ,  $z' = n - z$  thì  $x', y', z' > 0$  và  $x' + y' + z' = n$ .

Ngược lại, mỗi bộ số nguyên dương  $(x, y, z)$  thỏa mãn  $x + y + z = n$  xác định duy nhất một bộ  $(x', y', z')$  thỏa mãn các điều kiện trên nên theo bài toán chia kẹo Euler, số cách là  $C_{n-1}^2$ .

Với một bộ có thứ tự  $(x, y, z)$  cố định, có  $2n$  cách chọn tiếp điểm đầu tiên  $A$ . Sau khi  $A$  và  $(x, y, z)$  đã được chọn thì  $B, C$  hoàn toàn được xác định. Vì thế ta có  $2nC_{n-1}^2$  cách chọn.

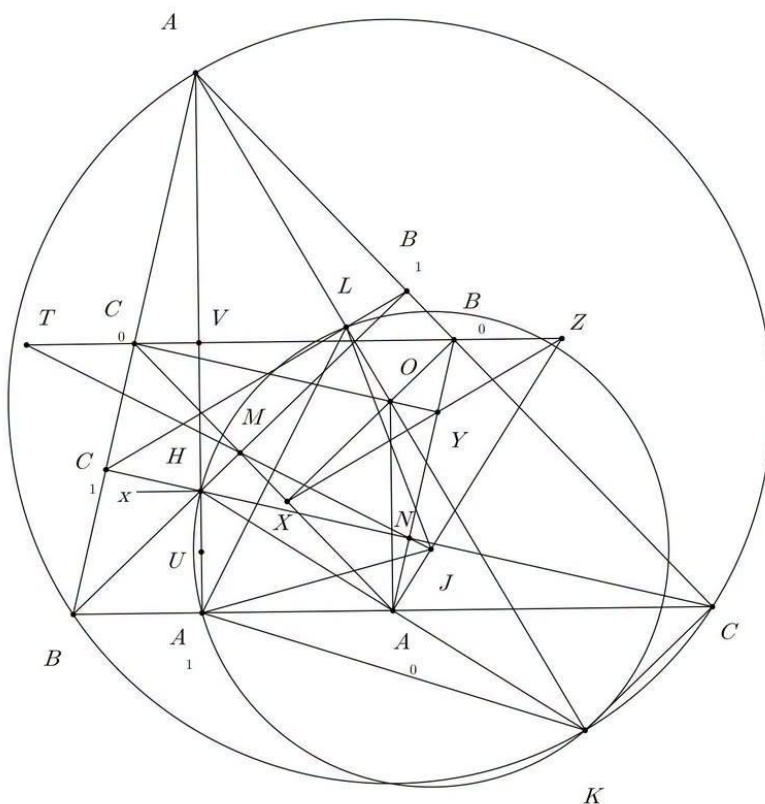
Trong cách chọn này, mỗi bộ xuất hiện đúng 3 lần nên số tam giác cần tìm là

$$\frac{2nC_{n-1}^2}{3} = \frac{2n}{3} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

**Bài toán 0.4.** (Lim Olympic - Hà Nội TST - P4)

Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC < BC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Ba đường cao  $AA_1, BB_1, CC_1$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại trực tâm  $H$ .

- ① Gọi  $A_0, B_0, C_0$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Gọi  $X$  là giao điểm của hai đường thẳng  $B_0O$  và  $C_0A_0$ ,  $Y$  là giao điểm của hai đường thẳng  $C_0O$  và  $A_0B_0$ . Hai đường thẳng  $XY$  và  $B_0C_0$  cắt nhau tại điểm  $Z$ . Chứng minh đường thẳng  $A_0H$  vuông góc với đường thẳng  $A_0Z$ .
- ② Kẻ đường kính  $AK$  của đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng  $BB_1, CC_1$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $A_1HK$ .



**Lời giải.**

- ① Ta dễ thấy  $O$  là trực tâm  $\Delta A_0B_0C_0 \Rightarrow A_0(OZB_0C_0) = -1$  theo hàng điểm tứ giác toàn phần.

Kẻ đường thẳng  $Hx$  song song  $BC \Rightarrow H(xA_0BC) = -1$ .

$\Rightarrow H(xA_0BC) = A_0(OZC_0B_0)$  mà  $Hx \perp A_0O$ ,  $HB \perp A_0C_0$ ,  $HC \perp A_0B_0 \Rightarrow HA_0 \perp A_0Z$ .

- ② **Cách 1:** Với  $L$  là giao điểm của  $AO$  với  $B_1C_1$  thì  $AO$  vuông  $B_1C_1$  và từ kết quả quen thuộc ta có  $MN$  là trung trực  $A_1L$  (**Bạn đọc có thể tham khảo HSG Hà Nội lớp 9 2021-2022**).

Lại dễ có  $AH \cdot AA_1 = AB_1 \cdot AC = AL \cdot AK \Rightarrow HA_1KL$  nội tiếp  $\Rightarrow$  Tâm  $J$  của  $(A_1HK)$  nằm trên trung trực  $A_1L$  và nằm trên  $MN$  do  $MN$  là trung trực  $A_1L$ .

**Cách 2: (Lời giải của bạn Đỗ Đức Việt Hưng)**

Gọi  $MN$  cắt  $A_0Z$ ,  $B_0C_0$  lần lượt tại  $J, T$ . Gọi  $U$  là trung điểm  $A_1H$ . Gọi  $B_0C_0$  cắt  $AA_1$  tại  $V$ .

Theo Menelaus, ta có:  $\frac{JA_0}{JZ} \cdot \frac{NB_0}{NA_0} \cdot \frac{TZ}{TB_0} = 1$  và  $\frac{NA_0}{NB_0} \cdot \frac{MC_0}{MA_0} \cdot \frac{TB_0}{TC_0} = 1$ . Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{JA_0}{JZ} \cdot \frac{NB_0}{NA_0} \cdot \frac{TZ}{TB_0} \cdot \frac{NA_0}{NB_0} \cdot \frac{MC_0}{MA_0} \cdot \frac{TB_0}{TC_0} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{JA_0}{JZ} \cdot \frac{TZ}{TC_0} \cdot \frac{MC_0}{MA_0} &= 1 \Leftrightarrow \frac{JA_0}{JZ} = \frac{TC_0}{TZ} \cdot \frac{MA_0}{MC_0} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh  $JU // VZ$  hay

$$\begin{aligned} \frac{JA_0}{JZ} &= \frac{UA_1}{A_1V - UA_1} = \frac{A_1H}{A_1A - A_H} = \frac{A_1H}{HA} \\ \Leftrightarrow \frac{TC_0}{TZ} \cdot \frac{MA_0}{MC_0} &= \frac{A_1H}{HA} \Leftrightarrow \frac{TC_0}{TZ} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{A_1H}{HA} \Leftrightarrow \frac{TC_0}{TZ} = \frac{A_1H}{HA} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \end{aligned}$$

Mà theo Menelaus, ta có:  $\frac{A_1H}{HA} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{BC}{BA_1} = 1$ .

Khi này ta cần chứng minh  $\frac{TZ}{TC_0} = \frac{BC}{BA_1} \Leftrightarrow 1 + \frac{C_0Z}{TC_0} = 1 + \frac{A_1C}{BA_1} \Leftrightarrow \frac{C_0Z}{TC_0} = \frac{A_1C}{BA_1}$ .

Theo Ceva, ta có:  $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1 \Leftrightarrow \frac{C_0Z}{TC_0} = \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{MA_0}{MC_0} \cdot \frac{NB_0}{NA_0} = \frac{TB_0}{TC_0}$ .

Ta có:  $\Delta A_0B_0C_0 \sim \Delta ABC$ , suy ra:

$$\frac{TC_0}{TB_0} = \frac{NA_0}{NB_0} \cdot \frac{MC_0}{MA_0} = \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{YB_0}{YA_0} \cdot \frac{XA_0}{XC_0} = \frac{ZB_0}{ZC_0}$$

Suy ra:  $TB_0 = ZC_0$  hay điều cần chứng minh đúng.

Như vậy  $JU // VZ \Rightarrow JU \perp HA_1 \Rightarrow J$  thuộc trung trực  $HA_1$ .

Mà  $J \in ZA_0$  hay  $J$  thuộc trung trực  $HK$  nên  $J$  là tâm  $(HA_1K)$ . Vậy  $MN$  đi qua tâm  $(HA_1K)$ .

**Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Hà Nội TST - P5)**

Xét hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(1) > 0$  và  $f(a)f(d) - f(b)f(c) = 1$  với mọi số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $ad - bc = 1$ .

- 1 Chứng minh  $f(xy) = f(x)f(y)$  với mọi số thực  $x, y$ .
- 2 Chứng minh  $f(x) = x$  với mọi số thực  $x$ .

**Lời giải.**

- 1 Cho  $a = d = 1, b = 0$  và  $c$  tùy ý. Ta được  $f(1)^2 - f(0)f(c) = 1$ .

Thay tiếp  $c = 0$  ta được  $f(0)(f(c) - f(0)) = 0$  với mọi  $c \in \mathbb{R}$ . Nếu  $f(0) \neq 0$  thì  $f$  là hàm hằng, trái với giả thiết. Vậy  $f(0) = 0$ , do đó  $f(1)^2 = 1$ . Vì  $f(1) > 0$  nên  $f(1) = 1$ .

Với  $t \in \mathbb{R}$ , thay  $(a, b, c, d) = (t + 1, t, 1, 1)$  ta được  $f(t + 1) - f(t) = 1$ .

Bây giờ, với  $x, y \in \mathbb{R}$ , thay  $(a, b, c, d) = (x, xy - 1, 1, y)$  ta có

$$f(x)f(y) - f(xy - 1) = 1 \iff f(xy) = f(xy - 1) + 1 = f(x)f(y).$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

- 2 Nếu  $t > 0$  thì  $f(t) = f(\sqrt{t})^2 \geq 0$ . Mặt khác,  $1 = f(1) = f(t)f(1/t)$ , nên thực chất  $f(t) > 0$ .

Cho  $0 < x < y$  và đặt  $u = y/x - 1 > 0$ . Từ câu trên và đẳng thức  $f(u + 1) = f(u) + 1$ , ta có được  $f(y) = f(x)(1 + f(u)) > f(x)$ . Vậy  $f$  tăng nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Ta có  $f(n) = n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , rồi  $f(1/n) = 1/n$  và  $f(p/q) = p/q$  với mọi  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

Do  $f$  tăng trên  $(0, +\infty)$  và tập  $\mathbb{Q}^+$  trù mật trong tập  $\mathbb{R}^+$ , suy ra  $f(x) = x$  với mọi  $x > 0$ .

Cuối cùng,  $f(0) = 0$  và  $f(-1) = f(0) - 1 = -1$ . Với  $x < 0$ , câu trên cho  $f(x) = f(-1)f(-x) = x$ .

Vậy  $f(x) = x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Hà Nội TST - P6)**

Cho  $P(x)$  là một đa thức với hệ số nguyên có bậc bằng 5 sao cho có vô hạn cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $xP(x) = yP(y)$  và  $x \neq y$ .

- 1 Chứng minh tồn tại số nguyên  $C$  có tính chất: nếu  $(x, y)$  là cặp số nguyên thỏa mãn  $x \neq y$  và  $xP(x) = yP(y)$  thì  $|x + y| \leq C$ .
- 2 Chứng minh  $P(x)$  có nghiệm nguyên.

**Lời giải.**

Viết  $P(X) = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$ , trong đó  $a \neq 0$ .

Xét một cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $x \neq y$  và  $xP(x) = yP(y)$ , do đó

$$\begin{aligned} 0 &= a(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) + b(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\ &\quad + c(x + y)(x^2 + y^2) + d(x^2 + xy + y^2) + e(x + y) + f. \end{aligned}$$

① Ta có  $4x^2y^2 \leq (x^2 + y^2)^2$ , nên  $x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2$ . Đồng thời,

$$|x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4| \leq 2(x^2 + y^2)^2,$$

$$|x^2 + xy + y^2| \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2).$$

Vì  $a \neq 0$ , khi  $x^2 + y^2$  đủ lớn, ta có được

$$|a(x^4 + x^2y^2 + y^4) + c(x^2 + y^2) + e| \geq \frac{3|a|}{8}(x^2 + y^2)^2,$$

$$|b(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + d(x^2 + xy + y^2) + f| \leq 2|b|(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}|d|(x^2 + y^2) + |f|.$$

Do đó  $|x + y| \leq \frac{8}{3|a|} \left( 2|b| + \frac{3}{2}|d| + |f| \right)$  khi  $x^2 + y^2$  đủ lớn.

Còn khi  $x^2 + y^2$  bị chặn thì chỉ có hữu hạn cặp số nguyên  $(x, y)$ .

Vì vậy tồn tại số nguyên  $C$  sao cho mọi cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn đề bài đều có  $|x + y| \leq C$ .

② Do  $x + y$  là số nguyên và bị chặn, trong vô hạn cặp đã cho phải tồn tại một số nguyên  $t$  sao cho  $x + y = t$  với vô hạn cặp  $(x, y)$ . Khi đó  $xP(x) = (t - x)P(t - x)$  với vô hạn số nguyên  $x$ . Hai vế là các đa thức theo  $x$ , nên  $XP(X) = (t - X)P(t - X)$  với mọi  $X \in \mathbb{R}$ .

Nếu  $t \neq 0$ , thay  $X = 0$  ta được  $tP(t) = 0$ , suy ra  $P(t) = 0$ .

Nếu  $t = 0$  thì  $XP(X) = (-X)P(-X)$ , suy ra  $P(X) + P(-X) = 0$ . Thay  $X = 0$ , ta được  $P(0) = 0$ .

Vậy  $P(x)$  có nghiệm nguyên.

### Nhận xét.

Bài toán trên là bài toán trong đề thi **IMO Shortlist 2002**, nhưng được đổi từ bậc 3 lên bậc 5.

### Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Hà Nội TST - P7)

Cho số nguyên dương lẻ  $n$ . Một số nguyên dương  $m$  được gọi là số tốt nếu  $m^x + x^m$  chia hết cho  $n^x + x^n$  với mọi số nguyên dương  $x$ .

- ① Chứng minh nếu  $m$  là một số tốt thì  $m$  chia hết cho  $n$ .
- ② Tìm tất cả các số tốt.

### Lời giải.

① Nếu  $n = 1$  thì bài toán luôn đúng. Xét  $n > 1$ .

Gọi  $p$  là ước nguyên tố bất kỳ của  $n$ .

Chọn  $x = n$ , ta có  $m^n + n^m : n \implies m^n : n : p \implies m : p$ .

Chọn  $x = p \cdot (mn + 1)$ , ta có  $xv_p(n) > n$ ,  $xv_p(m) > m$

$$\implies v_p(m^x + x^m) = xv_p(m), \quad v_p(n^x + x^n) = xv_p(n)$$

Mà  $m^x + x^m : n^x + x^n$  nên  $xv_p(m) \geq xv_p(n)$ , hay  $v_p(m) \geq v_p(n)$ .

Điều này đúng với mọi số nguyên tố  $p | n$  nên ta có  $m : n$ .

② Đặt  $m = kn$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ .  $k = 1$  thỏa mãn, ta xét  $k \geq 2$ .

Theo định lý Schur, tập ước nguyên tố của  $\{n + x^n \mid x \in \mathbb{Z}^+\}$  là vô hạn.

Tồn tại  $x_0 \in \mathbb{Z}^+$  và số nguyên tố  $p > kn + n^k$  để  $p \mid n + x_0^n$ .

Theo định lý thặng dư Trung Hoa, tồn tại  $x \in \mathbb{Z}^+$  để  $x \equiv 1 \pmod{p-1}$ ,  $x \equiv x_0 \pmod{p}$ .

Khi đó  $n^x + x^n \equiv n + x_0^n \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow 0 \equiv m^x + x^m \equiv m + x_0^m \equiv kn + x_0^{kn} \equiv kn + (-n)^k \pmod{p}$$

$$\Rightarrow kn + (-n)^k \div p, \text{ mà } |kn + (-n)^k| \leq kn + n^k < p$$

Do đó phải có  $kn + (-n)^k = 0$ , từ đây ta dễ dàng suy ra mâu thuẫn vì  $k > 1$ .

Vậy ta phải có  $m = n$ .

### Bài toán 0.8. (Lim Olympic - Hà Nội TST - P8)

Cho 9 số thực  $a_1, a_2, \dots, a_9$ . Khởi đầu với bộ 9 số thực  $(a_1, a_2, \dots, a_9)$ .

Ở mỗi bước, từ bộ vừa được tạo  $(x_1, x_2, \dots, x_9)$ , ta tạo ra một bộ mới  $(y_1, y_2, \dots, y_9)$  theo quy tắc

sau: chọn các số  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_9 \in \{-1, 1\}$  sao cho biểu thức  $\left| \sum_{i=1}^9 \varepsilon_i x_i \sqrt{i} \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có

nhiều cách chọn, lấy một cách tùy ý), sau đó đặt  $y_i = x_i + \varepsilon_i \sqrt{i}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

Chứng minh sau hữu hạn bước, sẽ xuất hiện một bộ  $(u_1, u_2, \dots, u_9)$  sao cho tồn tại chỉ số  $i$  để  $|u_i| \geq \frac{15}{2}$ .

#### Lời giải.

Trước hết, ta có bổ đề sau:

#### Bổ đề 0.1.

Với mọi số thực  $c_1, \dots, c_9$ , tồn tại các cách chọn dấu  $\delta_1, \dots, \delta_9 \in \{-1, 1\}$  sao cho  $\left| \sum_{i=1}^9 \delta_i c_i \right| \leq \max_{1 \leq i \leq 9} |c_i|$ .

*Chứng minh.* Thật vậy, đặt  $M = \max |c_i|$  và chọn các dấu lần lượt. Nếu tổng tạm thời là  $S$  với  $|S| \leq M$ , ta chọn dấu của số hạng tiếp theo ngược với dấu của  $S$ ; tổng mới có trị tuyệt đối bằng  $||S| - |c_i|| \leq M$ . Bắt đầu từ tổng bằng 0, ta thu được điều phải chứng minh.  $\square$

#### Trở lại bài toán ban đầu:

Giả sử trái lại rằng ở mọi bước, tất cả các số trong bộ nhận được đều có trị tuyệt đối nhỏ hơn  $15/2$ .

Xét một bước đi từ bộ  $(x_1, \dots, x_9)$  đến bộ  $(y_1, \dots, y_9)$ .

Áp dụng bổ đề cho các số  $x_1\sqrt{1}, x_2\sqrt{2}, \dots, x_9\sqrt{9}$ . Do các dấu  $\varepsilon_i$  trong đề bài được chọn để trị tuyệt đối của tổng là nhỏ nhất, ta có  $\left| \sum_{i=1}^9 \varepsilon_i x_i \sqrt{i} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq 9} |x_i| \sqrt{i} < \frac{15}{2} \cdot 3 = \frac{45}{2}$ .

Để ý thêm

$$\sum_{i=1}^9 y_i^2 - \sum_{i=1}^9 x_i^2 = \sum_{i=1}^9 (2\varepsilon_i x_i \sqrt{i} + i) = 2 \sum_{i=1}^9 \varepsilon_i x_i \sqrt{i} + 45 \geq 45 - 2 \left| \sum_{i=1}^9 \varepsilon_i x_i \sqrt{i} \right| > 0$$

Vì vậy tổng bình phương của 9 số trong bộ tăng ngặt sau mỗi bước.

Mặt khác, sau một số bước bất kỳ, số hạng thứ  $i$  trong bộ luôn có dạng  $a_i + k_i \sqrt{i}$  với  $k_i \in \mathbb{Z}$ . Điều kiện  $|a_i + k_i \sqrt{i}| < 15/2$  chỉ cho phép hữu hạn giá trị của  $k_i$ . Do đó chỉ có hữu hạn bộ có thể xuất hiện nếu tất cả các số hạng trong bộ đều có trị tuyệt đối nhỏ hơn  $15/2$ .

Quá trình vô hạn khi ấy phải lặp lại một bộ, trái với việc tổng bình phương tăng ngặt sau mỗi bước. Vậy sau hữu hạn bước phải xuất hiện một bộ  $(u_1, \dots, u_9)$  có ít nhất một chỉ số  $i$  thỏa mãn  $|u_i| \geq 15/2$ .