

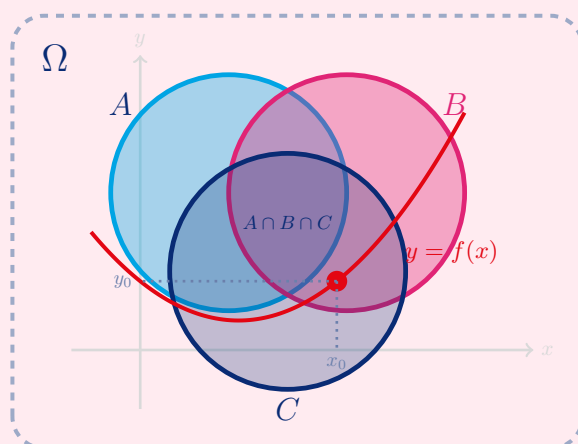
NGÔ ĐỨC TÀI
GV chuyên luyện thi THPT Quốc Gia
Zalo 0889971004

Lý thuyết và phân dạng

TOÁN

10

HỌC KÌ I



Chương I. Mệnh đề và tập hợp

3

§1. Mệnh đề	3
§2. Tập hợp	17
§3. Ôn tập chương 1	43

Chương II. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

52

§1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	52
§2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn	67
§3. Ôn tập chương 2	87

Chương III. Hệ thức lượng trong tam giác

95

§1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°	95
§2. Hệ thức lượng trong tam giác	106
§3. Ôn tập chương 3	128

Chương IV. Vectơ

138

§1. Các khái niệm mở đầu	138
§2. Tổng và hiệu của hai vectơ	147
§3. Tích của một vectơ với một số	165
§4. Vectơ trong mặt phẳng tọa độ	179
§5. Tích vô hướng của hai vectơ	197
§6. Ôn tập chương 4	213

Chương V. Các số đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm 228

§1. Số gần đúng và sai số	228
§2. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm	238
§3. Các số đặc trưng đo độ phân tán	252
§4. Ôn tập chương 5	263

§1 MỆNH ĐỀ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Mệnh đề, mệnh đề chứa biến

⚙ **Mệnh đề:** Mệnh đề là một **câu khẳng định** đúng hoặc sai.

- ☆ Câu khẳng định đúng gọi là mệnh đề **đúng**.
- ☆ Câu khẳng định sai gọi là mệnh đề **sai**.
- ☆ Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.
- ☆ Những mệnh đề liên quan đến toán học được gọi là mệnh đề toán học.

⚙ **Mệnh đề chứa biến:** Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó và với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

2) Mệnh đề phủ định

⚙ Cho mệnh đề P . Mệnh đề “không phải P ” gọi là mệnh đề phủ định của P .

⚙ **Chú ý:**

- ☆ Mệnh đề phủ định của P , kí hiệu là $\bar{P}$.
- ☆ Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

3) Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Cho hai mệnh đề P và Q .

⚙ **Mệnh đề kéo theo:** Mệnh đề “Nếu P thì Q ” gọi là mệnh đề kéo theo, kí hiệu $P \Rightarrow Q$.

- ☆ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ” hoặc “Từ P suy ra Q ”
- ☆ Mệnh đề này chỉ sai khi P đúng và Q sai.

⚙ **Mệnh đề đảo:** Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó, $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.

Lưu ý

Xét định lý dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó, ta có thể phát biểu định lý này theo một trong 2 cách sau:

- ① P là điều kiện đủ để có Q . ② Q là điều kiện cần để có P .

4) Mệnh đề tương đương

⚙ Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là mệnh đề tương đương.

⚙ **Chú ý:**



- ☆ Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” được kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- ☆ Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng.

Lưu ý

Xét định lý dạng $P \Leftrightarrow Q$. Khi đó, ta có thể phát biểu định lý này theo một trong các cách sau:

- ① P là điều cần và đủ để có Q .
 ② P khi và chỉ khi Q .
 ③ P tương đương Q .

5) Mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

⚙ Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi: $\forall x \in X, P(x)$.



- ☆ Mệnh đề này đúng khi tất cả các giá trị của $x \in X$ đều làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- ☆ Nếu ta tìm được ít nhất một giá trị $x \in X$ làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

⚙ Mệnh đề chứa kí hiệu tồn tại: $\exists x \in X, P(x)$.



- ☆ Mệnh đề này đúng khi ta tìm được ít nhất một giá trị của $x \in X$ làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- ☆ Nếu tất cả giá trị của $x \in X$ đều làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định mệnh đề, mệnh đề chứa biến

Mệnh đề phải là một câu khẳng định có tính đúng – sai rõ ràng. Mệnh đề chứa biến là câu phụ thuộc vào biến x . Mệnh đề chứa biến chưa phải là mệnh đề.

Ví dụ 1

Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề?

- ① Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên.
- ② $5 < 7 - 3$.
- ③ Có bao nhiêu dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng?
- ④ Đây là cách xử lí khôn ngoan!
- ⑤ x^2 là số vô tỉ.

 a,b là các mệnh đề

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- | | |
|--|--------------------------|
| a) $\sqrt{2}$ là số vô tỉ. | c) 100 tỉ là số rất lớn. |
| b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{10}} > 2$. | d) Trời hôm nay đẹp quá! |

 a,b là mệnh đề

Dạng

2

Tính đúng sai của mệnh đề

Ví dụ 2

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Vịnh Hạ Long là di sản thiên nhiên thế giới;
- b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$.
- c) $5^2 + 12^2 = 13^2$.

❖ Ví dụ 3

Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ n là bội của 3” với n là số tự nhiên. Phát biểu các mệnh đề $P(6)$, $P(11)$ và xét tính đúng sai của chúng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2



Xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau:

- a) P : “ $3^2 + 4^2 = 5^2$ ”.
- b) Q : “Ước chung lớn nhất của 8 và 12 là 2”.
- c) R : “Số 12 có tất cả 6 ước nguyên dương”.

Bài 3



Với mỗi mệnh đề chứa biến sau, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

- a) $P(x)$: “ $x^2 = 2$ ”.
- b) $Q(x)$: “ $x^2 + 1 > 0$ ”.
- c) $R(n)$: “ $n + 2$ chia hết cho 3” (n là số tự nhiên).

Dạng

3

Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương

- ◇ Mệnh đề “nếu P thì Q ” gọi là **mệnh đề kéo theo**. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- ◇ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P **đúng** Q **sai**.
- ◇ Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là **mệnh đề đảo** của $P \Rightarrow Q$.
- ◇ Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là **mệnh đề tương đương**. Ký hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- ◇ Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng.

Ví dụ 4

Cho các mệnh đề P : “ a và b cùng chia hết cho c ”, Q : “ $a + b$ chia hết cho c ”.

- a) Hãy phát biểu định lý $P \Rightarrow Q$. Nêu giả thiết kết luận của định lý và phát biểu định lý này dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.
- b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ rồi xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4



Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề: “Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC là tam giác cân” và xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

Bài 5



Cho tứ giác $ABCD$, xét hai câu sau:

P : “Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° ”.

Q : “ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn”.

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.

Dạng

4

Phủ định của một mệnh đề

Thêm (hoặc bớt) từ “không” (hoặc “không phải”) vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

⇒ Ví dụ 5

Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề và mệnh đề phủ định của nó.

a) Paris là thủ đô của nước Anh;

☞ P đúng, $\bar{P}$ sai

b) 23 là số nguyên tố;

☞ P đúng, $\bar{P}$ sai

c) 2 021 chia hết cho 3;

☞ P sai, $\bar{P}$ đúng

d) Phương trình $x^2 - 3x + 4 = 0$ vô nghiệm.

☞ P sai, $\bar{P}$ đúng

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề và mệnh đề phủ định của nó.

a) P : “Châu Á là châu lục lớn nhất thế giới”.

☞ P đúng, $\bar{P}$ sai

b) Q : “2 lớn hơn 1”.

☞ Q đúng, $\bar{Q}$ sai

c) R : “15 là ước của 80”.

☞ R sai, $\bar{R}$ đúng

d) S : “Bất phương trình $2x + 1 > 0$ vô nghiệm”.

☞ S sai, $\bar{S}$ đúng

Dạng

5

Mệnh đề với kí hiệu $\forall$ và $\exists$ và phủ định

- ◇ Ta đọc $\forall x \in X, \exists x \in X$ lần lượt là: Với mọi x thuộc X , tồn tại (có ít nhất) x thuộc X .
- ◇ Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".
- ◇ Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Ví dụ 6

Sử dụng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề sau:

- (1) Với mọi số tự nhiên x , $\sqrt{x}$ là số vô tỉ;
- (2) Bình phương của mọi số thực đều không âm;
- (3) Có số nguyên cộng với chính nó bằng 0;
- (4) Có số tự nhiên n sao cho $2n - 1 = 0$.

Ví dụ 7

Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5x - 4$;

c) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$.

🔍 P sai, $\overline{P}$ đúng

🔍 Q đúng, $\overline{Q}$ sai

🔍 H sai, $\overline{H}$ đúng

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Ví dụ 8

Sử dụng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề sau:

- a) Mọi số thực cộng với số đối của nó đều bằng 0;
- b) Có một số tự nhiên mà bình phương bằng 9.

Bài 7



Lập mệnh đề phủ định các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x - 2$; ❏ P sai, $\bar{P}$ đúng. c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$; ❏ R đúng, $\bar{R}$ sai.
 b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$; ❏ Q sai, $\bar{Q}$ đúng. d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$. ❏ S sai, $\bar{S}$ đúng.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Câu nào sau đây **không** là mệnh đề?

- (A) $x > 2$.
 (B) $3 < 1$.
 (C) $4 - 5 = 1$.
 (D) Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

❖ **Câu 2.** Trong các câu sau, câu nào **không phải** là mệnh đề?

- (A) Buồn ngủ quá!.
 (B) Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.
 (C) 8 là số chính phương.
 (D) Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

❖ **Câu 3.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ?

- (A) Các bạn hãy làm bài đi!. (B) Các bạn có chăm học không ?.
 (C) An học lớp mấy ?.
 (D) Việt Nam là một nước thuộc Châu Á.

❖ **Câu 4.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ?

- (A) 15 là số nguyên tố. (B) $a + b = c$.
 (C) $x^2 + x = 0$. (D) $2n + 1$ chia hết cho 3.

❖ **Câu 5.** Trong các câu sau, câu nào **không phải** là mệnh đề?

- (A) $5 + 2 = 8$. (B) $2 > 0$. (C) $4 - \sqrt{17} > 0$. (D) $5 + x = 2$.

❖ **Câu 6.** Câu nào sau đây là một mệnh đề?

- (A) Số 150 có phải là số chẵn không?. (B) Số 30 là số chẵn.
 (C) $2x - 1$ là số lẻ. (D) $x^3 + 1 = 0$.

❖ **Câu 7.** Phát biểu nào dưới đây là mệnh đề toán học?

- (A) Việt Nam là một quốc gia thuộc Châu Á.
 (B) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.
 (C) $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ thừa số}}$.
 (D) Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

❖ **Câu 8.** Phát biểu nào dưới đây là mệnh đề chứa biến?

- (A) Tích của hai số thực trái dấu là một số thực âm.
 (B) Mọi số nguyên lẻ đều chia hết cho 2.
 (C) $3n$ chia hết cho 9.
 (D) 17 là số chính phương.

❖ **Câu 9.** Định lý có dạng $A \Rightarrow B$ được hiểu như thế nào?

- (A) A khi và chỉ khi B. (B) B suy ra A.
 (C) A là điều kiện cần để có B. (D) A là điều kiện đủ để có B.

❖ **Câu 10.** Phủ định của mệnh đề " $5 + 4 = 10$ " là mệnh đề nào sau đây?

- (A) $5 + 4 < 10$. (B) $5 + 4 > 10$. (C) $5 + 4 \leq 10$. (D) $5 + 4 \neq 10$.

❖ **Câu 11.** Phủ định của mệnh đề " $5 + \pi > 10$ " là mệnh đề nào sau đây?

- (A) $5 + \pi < 10$. (B) $5 + \pi > 10$. (C) $5 + \pi \leq 10$. (D) $5 + \pi \neq 10$.

❖ **Câu 12.** Phủ định của mệnh đề "14 là số nguyên tố" là mệnh đề nào sau đây?

- (A) 14 không phải là số nguyên tố. (B) 14 chia hết cho 2.
 (C) 14 không phải là hợp số. (D) 14 chia hết cho 7.

❖ **Câu 13.** Phủ định của mệnh đề "Dơi là một loài chim" là mệnh đề nào sau đây?

- (A) Dơi là một loài có cánh. (B) Chim cùng loài với dơi.
 (C) Dơi là một loài ăn trái cây. (D) Dơi không phải là loài chim.

❖ **Câu 14.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- (A) 20 chia hết cho 5. (B) 5 chia hết cho 20.
 (C) 20 là bội số của 5. (D) 5 là ước số của 20.

❖ **Câu 15.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

- (A) $P(0)$. (B) $P(1)$. (C) $P(-1)$. (D) $P(-2)$.

❖ **Câu 16.** Với giá trị nào của $n \in \mathbb{N}$, mệnh đề chứa biến $P(n)$: " n chia hết cho 12" là đúng?

- (A) $n = 48$. (B) $n = 4$. (C) $n = 3$. (D) $n = 88$.

❖ **Câu 17.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: " $\sqrt{x} > x$ ", với $x \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $P(0)$. (B) $P(1)$. (C) $P\left(\frac{1}{2}\right)$. (D) $P(2)$.

❖ **Câu 18.** Xét mệnh đề chứa biến $P(x)$ " $x^2 - 3x = 0$ ", với $x \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của x thì $P(x)$ là mệnh đề đúng?

- (A) $x = 0$. (B) $x = 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = -3$.

❖ **Câu 19.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- (A) Nếu "33 là hợp số" thì "15 chia hết cho 25".
 (B) Nếu "7 là số nguyên tố" thì "8 là bội số của 3".
 (C) Nếu "20 là hợp số" thì "24 chia hết cho 6".
 (D) Nếu " $3 + 9 = 12$ " thì " $4 > 7$ ".

❖ **Câu 20.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo **sai**?

- (A) "Tứ giác là hình bình hành thì có hai cặp cạnh đối song song và bằng nhau".
 (B) "Tam giác đều thì có ba góc có số đo bằng 60° ".
 (C) "Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau".
 (D) "Một tứ giác có 4 góc vuông thì tứ giác đó là hình chữ nhật".

❖ **Câu 21.** Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$ " khẳng định rằng

- (A) Bình phương của mỗi số thực bằng 3.
 (B) Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.
 (C) Chỉ có một số thực bình phương bằng 3.
 (D) Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

❖ **Câu 22.** Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0$ ".

- (A) $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0$ ". (B) $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0$ ".
 (C) $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 \leq 0$ ". (D) $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 \leq 0$ ".

❖ **Câu 23.** Xét mệnh đề P : " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 3 < 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

- (A) " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \leq 0$ ". (B) " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 3 > 0$ ".
 (C) " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \geq 0$ ". (D) " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \leq 0$ ".

❖ **Câu 24.** Tìm mệnh đề **sai**.

- (A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$. (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$.
 (C) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 6 = 0$. (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x < \frac{1}{x}$.

❖ **Câu 25.** Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 = 0$. (B) $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.
 (C) $\forall x \in \mathbb{N}, (2x + 1)^2 - 1$ chia hết cho 4. (D) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^5 > x^2$.

❖ **Câu 26.** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 2n$. (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. (C) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$. (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

❖ **Câu 27.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n + 1)$ là số chính phương. (B) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n + 1)$ là số lẻ.
 (C) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n + 1)(n + 2)$ là số lẻ. (D) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 6.

❖ **Câu 28.** Cho các mệnh đề

① $X: “\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 > 0”$

② $Y: “\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = 0”$

③ $P: “\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 = 0”$

④ $Q: “\forall x \in \mathbb{R}, x > 0”$

Các mệnh đề đúng là

Ⓐ $X, P.$

Ⓑ $Y, Q.$

Ⓒ $X, Y.$

Ⓓ $P, Q.$

❖ **Câu 29.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

Ⓐ $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không chia hết cho 3.

Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, x < 3 \Rightarrow x^2 < 9.$

Ⓒ $\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 + m + 1$ là một số chẵn.

Ⓓ $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}.$

❖ **Câu 30.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0.$

Ⓑ $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0.$

Ⓒ $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2.$

Ⓓ $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} > 0.$



2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Xét các câu sau đây

(1) Ổ đây đẹp quá!

(2) Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ vô nghiệm.

(3) 16 không là số nguyên tố.

(4) Số π có lớn hơn 3 hay không?

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

a) Trong các câu trên có 3 mệnh đề.

b) Trong các câu trên có 2 câu không phải là mệnh đề.

c) Câu (3) là mệnh đề.

d) Câu (1), (4) không phải là mệnh đề.

❖ **Câu 2.** Cho $P(n) = n^2 - 6n + 10$ với n là số tự nhiên. Khi đó

a) $P(1)$ chia hết cho 3.

b) $P(2)$ là số lẻ.

c) $P(2n) > P(n) - 1$ với $n = 1$.

d) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $\frac{2P(n) - 1}{n - 3}$ là số nguyên.

❖ **Câu 3.** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0.$

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4.

c) $P: “\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y = 1”$.

d) $Q: “\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 2”$.

❖ **Câu 4.** Cho hai mệnh đề P : “Hai tam giác bằng nhau” và Q : “Hai tam giác có diện tích bằng nhau”. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là “Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau”.

- b)** Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là “Nếu hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau”.
- c)** Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đúng.
- d)** Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

❖ **Câu 5.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x): x^2 - 7x + 6 = 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)** $P(1)$ là mệnh đề đúng. **b)** $P(0)$ là mệnh đề đúng.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng. **d)** $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

❖ **Câu 6.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 > x$, với $x \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)** $P(2)$ là mệnh đề sai. **b)** $P(0)$ là mệnh đề sai.
c) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng. **d)** $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

↔ **Câu 7.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x): x^2 + 2x + 3 > 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)** $P(-2)$ là mệnh đề sai. **b)** $P(2)$ là mệnh đề đúng.
c) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng. **d)** $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

❖ **Câu 8.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x > \frac{1}{x}"$, xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a)** $P(1)$. **b)** $P\left(-\frac{1}{3}\right)$. **c)** $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$. **d)** $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$.

3

Tự luận.

Bài 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

- Số π là số vô tỉ;
- Bình phương của mọi số thực đều là số dương;
- Tồn tại số thực x mà x lớn hơn số nghịch đảo của nó;
- Fansipan là ngọn núi cao nhất Việt Nam.

🔑 a,b,c là mệnh đề toán học

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

- a) A : “Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2$ là trục tung”;
- b) B : “Phương trình $3x^2 + 1 = 0$ có nghiệm”;
- c) C : “Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$ không song song với nhau”;
- d) D : “Số 2024 không chia hết cho 4”.

Bài 3. Cho mệnh đề kéo theo có dạng $P \Rightarrow Q$: “Vì 120 chia hết cho 6 nên 120 chia hết cho 9”.

- a) Mệnh đề trên đúng hay sai?
- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

Bài 4. Cho mệnh đề kéo theo có dạng $P \Rightarrow Q$: “Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường”.

a) Mệnh đề trên đúng hay sai?

mệnh đề đúng

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

mệnh đề đúng

Bài 5. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM . Xét các mệnh đề:

P : “Tam giác ABC vuông tại A ”, Q : “Độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC ”.

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

$P \Rightarrow Q$ đúng, $Q \Rightarrow P$ đúng.

b) Nếu cả hai mệnh đề trong ý a) là đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

Bài 6. Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

$\exists n \in \mathbb{Z} : n$ không chia hết cho chính nó.

b) Có một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0;

$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$.

c) Mọi số nguyên dương đều lớn hơn nghịch đảo của nó;

$\forall n \in \mathbb{N}^* : n > \frac{1}{n}$.

d) Mọi số thực đều lớn hơn số đối của nó.

$\forall x \in \mathbb{R} : x > -x$.

Bài 7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ chia hết cho 2;

Sai

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$;

Đúng

c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$;

Sai

d) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 = 0$.

Đúng

Bài 8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Xét mệnh đề “Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1”. Mệnh đề này đúng hay sai?

Đúng

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên. Mệnh đề đảo đúng hay sai?

Đúng

c) Nêu điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1.

$a + b + c = 0$

Bài 9. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định của đó

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$;

Sai

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$;

Sai

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;

Đúng

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

Đúng

Bài 10. Mệnh đề “ $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2^{100} + 1$ ” đúng hay sai? Vì sao.

Sai

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	A	3	D	4	A	5	D	6	B	7	C	8	C	9	D	10	D
11	C	12	A	13	D	14	B	15	B	16	A	17	C	18	A	19	C	20	C
21	B	22	C	23	C	24	B	25	C	26	B	27	D	28	C	29	D	30	A

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d S	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 7.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 8.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ

§2 TẬP HỢP

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Nhắc lại về tập hợp



Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau

- ◇ **Cách 1:** Liệt kê các phần tử của tập hợp;
- ◇ **Cách 2:** Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.



- ◇ $a \in S$: phần tử a thuộc tập hợp S .
- ◇ $a \notin S$: phần tử a không thuộc tập hợp S .
- ◇ Số phần tử của tập hợp S được kí hiệu là $n(S)$.
- ◇ Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\emptyset$.

2) Tập hợp con



Nếu mọi phần tử của tập hợp T đều là phần tử của tập hợp S thì ta nói T là một tập hợp con (tập con) của S và viết là $T \subset S$ (đọc là T chứa trong S hoặc T là tập con của S).



🔔 **LƯU Ý.**

- ◇ Thay cho $T \subset S$, ta còn viết $S \supset T$ (đọc là S chứa T).
- ◇ Kí hiệu $T \not\subset S$ để chỉ T không là tập con của S .
- ◇ Từ định nghĩa trên, T là tập con của S nếu mệnh đề $\forall x, x \in T \Rightarrow x \in S$ đúng
- ◇ Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

3) Hai tập hợp bằng nhau



Hai tập hợp S và T được gọi là hai tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của T cũng là phần tử của tập hợp S và ngược lại. Kí hiệu là $S = T$.



🔔 **LƯU Ý.** Nếu $S \subset T$ và $T \subset S$ thì $S = T$.

4) Các tập hợp số



Nhắc lại một số tập hợp đã học

- ◇ Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
- ◇ Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm

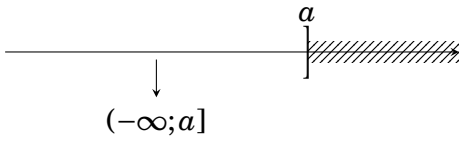
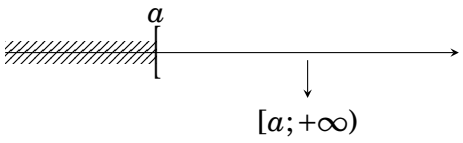
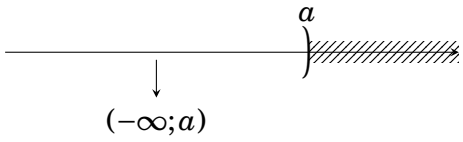
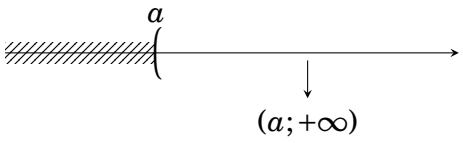
$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$
- ◇ Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ gồm các số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
 Số hữu tỉ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
- ◇ Tập hợp các số thực kí hiệu $\mathbb{R}$, gồm các số hữu tỷ và các số vô tỷ. Số vô tỷ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.



Mối quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5) Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

Tên gọi	Kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (Phần không bị gạch chéo)
Tập số thực	$(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn	$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng	$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

Nửa khoảng	$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng	$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Kí hiệu $+\infty$: Đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng).

Kí hiệu $-\infty$: Đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

a, b gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

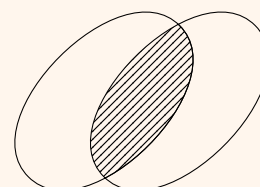
6) Các phép toán trên tập hợp

Giao của hai tập hợp



Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp S và T gọi là **giao của hai tập hợp** S và T , kí hiệu là $S \cap T$.

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \in T\}.$$



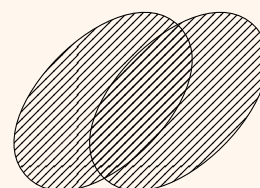
$S \cap T$

Hợp của hai tập hợp



Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là **hợp của hai tập hợp** S và T , kí hiệu là $S \cup T$.

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$



$S \cup T$



🔔 Lưu ý.

- Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

- Đặc biệt, nếu A và B không có phần tử chung, tức $A \cap B = \emptyset$, thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

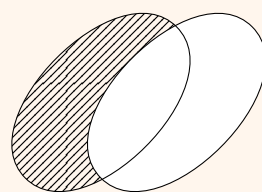
Hiệu của hai tập hợp. Phần bù của tập con



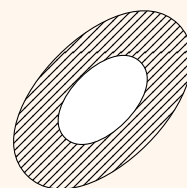
Hiệu của hai tập hợp S và T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T , kí hiệu là $S \setminus T$.

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}.$$

Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là **phần bù của T trong S** , kí hiệu là $C_S T$.



$S \setminus T$



$S \setminus T$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tập hợp và phần tử của tập hợp

- ◇ Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- ◇ Nêu đặc trưng của tập hợp.



🔔 Lưu ý. Khi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

- a) Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tùy ý.

Chẳng hạn, để viết tập hợp A các nghiệm của phương trình $x(x-1)=0$, ta có thể viết $A = \{0; 1\}$ hoặc $A = \{1; 0\}$.

- b) Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần.

Chẳng hạn, nếu kí hiệu B là tập hợp các chữ cái tiếng Anh trong từ “mathematics” thì $B = \{m; a; t; h; e; i; c; s\}$.

- c) Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng “...” mà không

nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp.

Chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên không quá 100 có thể viết là $\{0; 1; 2; \dots; 100\}$.

❖ Ví dụ 1

Viết mỗi tập hợp sau dưới dạng thích hợp:

a) Tập hợp A các ước dương của 18;

$$A = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

b) Tập hợp B các nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$;

$$B = \{1; -4\}$$

c) Tập hợp C các số tự nhiên lẻ;

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số lẻ}\} \text{ hoặc } C = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$$

d) Tập hợp D các nghiệm của phương trình $x + 3y = 1$.

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + 3y = 1\}$$

❖ Ví dụ 2

Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê các phần tử.

$$1 \quad A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0\}.$$

$$3 \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}.$$

$$C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$A = \{\pm 1\}$$

$$2 \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\}.$$

$$B = \{3; 4; 5; 6\}$$

$$4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}.$$

$$D = \{2; -3\}$$

❖ Ví dụ 3

Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng.

$$a) A = \{2; 3; 5; 7\}.$$

$$b) B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

$$c) C = \{-5; 0; 5; 10\}.$$

$$d) D = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}.$$

❖ Ví dụ 4

Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}.$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}.$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$

🔍 A, B là tập rỗng

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử và tìm số phần tử của mỗi tập hợp đó:

a) Tập hợp A các ước của 24;

🔍 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, n(A) = 8$

b) Tập hợp B gồm các chữ số trong số 1 113 305;

🔍 $B = \{0, 1, 3, 5\}, n(B) = 4$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội của } 5 \text{ và } n \leq 30\};$

🔍 $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}, n(C) = 7$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 = 0\}.$

🔍 $D = \emptyset, n(D) = 0$

Bài 2



Gọi S là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 24x + 143 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $13 \in S;$

b) $11 \notin S;$

c) $n(S) = 2.$

Bài 3



Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau

① $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}.$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

② B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

③ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2) = 0\}.$

$C = \{-2, 1\}$

Bài 4



Viết các tập hợp sau đây dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số lẻ và } x \leq 15\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 5\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 5 > 0\}.$

Dạng

2

Tập hợp con. Hai tập hợp bằng nhau

◇ Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- ◇ $\emptyset \subset A$, với mọi tập hợp A .
- ◇ $A \subset A$, với mọi tập hợp A .
- ◇ Có tập A gồm có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, tập A có 2^n tập con.
- ◇ $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A. \end{cases}$

Ví dụ 5

Trong mỗi cặp tập hợp sau đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Chúng có bằng nhau không?

- a) $A = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 = 0\}$; 🔍 $A = B$
- b) C là tập hợp các tam giác đều và D là tập hợp các tam giác cân; 🔍 $C \subset D$
- c) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 12\}$ và $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 24\}$. 🔍 $E \neq F$

Ví dụ 6

Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

a) $A = \{x; y\}$.

b) $B = \{1; 2; 3\}$

Ví dụ 7

Cho hai tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$ và $B = \{a; c; e; f\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $X \subset A$ và $X \subset B$.

Ví dụ 8

Cho hai tập hợp $A = \{1; a; 5\}, B = \{a + 2; 3; b\}$ với a, b là các số thực. Biết rằng $A = B$, hãy xác định a và b .

 $a = 3, b = 1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5



Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

- Xác định tất cả tập con có hai phần tử của A .
- Xác định tất cả tập con có ít hơn hai phần tử của A .
- Tập A có tất cả bao nhiêu tập con?
- Xác định tất cả các tập X thỏa $A \subset X \subset B$.

Bài 6



- Cho hai tập hợp: $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 4\}$ và $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 12\}$. Chứng tỏ rằng $E = G$.
 $E = G$
- Cho $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ và $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là căn bậc hai của } 4\}$. Hỏi hai tập hợp S và T có bằng nhau không? Vì sao?
 $S = T = \{-2, 2\}$

Bài 7



Cho hai tập hợp $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x+3}{x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - (m+2)x + 2m = 0\}$. Tìm tất cả các số nguyên m sao cho $B \subset A$.

$m \in \{-4; 0; 2; 6\}$

Dạng

3

Kí hiệu khoảng, đoạn, nửa khoảng

Ví dụ 9

Biểu diễn các tập dưới đây bằng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng như sau:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\};$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leq x < 4\};$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 10\};$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4}\right\};$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq \sqrt{3}\};$

f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{\pi}{2}\right\}.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8



Hãy dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp sau đây:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}.$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}.$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}.$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$

g) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}.$

h) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 9\}.$

Bài 9



Hãy nối mỗi dòng ở bảng bên trái với một dòng thích hợp ở bảng bên phải để được các tập hợp bằng nhau.

$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$
$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$
$A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 6 > 0\}$

$B_1 = (-\infty; 5]$
$B_2 = (-\infty; 2)$
$B_3 = [1; 5]$
$B_4 = (-2; +\infty)$

Dạng

4

Các phép toán trên tập hợp

Ví dụ 10

Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Tìm các tập hợp $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 11

Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$.

Xác định tập $A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 12

Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$, $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$. Xác định

a) $A \setminus B, B \setminus A$ và $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$;

b) $C_E(A \cap B)$ và $C_E A \cup C_E B$;

c) $C_E(A \cup B)$ và $C_E A \cap C_E B$.

❖ Ví dụ 13

Xác định các tập hợp sau đây:

a) $(1;3) \cup [-2;2]$

$\hookrightarrow [-2;3)$

b) $(-\infty;1) \cap [0;\pi]$

$\hookrightarrow [0;1)$

c) $\left[\frac{1}{2};3\right) \setminus (1;+\infty)$

$\hookrightarrow \left[\frac{1}{2};1\right]$

d) $C_{\mathbb{R}}[-1;+\infty)$

$\hookrightarrow (-\infty;-1)$

❖ Ví dụ 14

Cho hai tập hợp $A = \{1;2;2a-1\}$, $B = \{0;b;2b-5\}$ với a, b là những số thực. Biết rằng $A \cap B = \{1;3\}$, hãy tìm giá trị của a và b .

$\hookrightarrow a=2, b=3$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10



Cho hai tập hợp

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội của } 2 \text{ và } n < 15\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội của } 3 \text{ và } n < 15\}$$

Xác định số phần tử của các tập hợp $A, B, A \cup B$ và $A \cap B$. $\hookrightarrow A \cup B$ có 10 phần tử, $A \cap B$ có 3 phần tử

Bài 11



Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và các tập hợp con $A = \{1;2;3;4\}$, $B = \{2;4;6;8\}$. Xác định $C_E A$, $C_E B$, $C_E(A \cup B)$, $C_E A \cap C_E B$.

Bài 12



Cho $A = \{(x; y) | x, y \in \mathbb{R}, 3x - y = 9\}$, $B = \{(x; y) | x, y \in \mathbb{R}, x - y = 1\}$. Hãy xác định $A \cap B$.

$$A \cap B = \{(4; 3)\}$$

Bài 13



Xác định các tập hợp sau đây:

a) $(1; 3) \cup [2; 4)$

$$(1; 4)$$

b) $(-1; 0) \cap \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\emptyset$$

c) $(2; 4) \setminus \left[1; \frac{5}{2}\right]$

$$\left(\frac{5}{2}; 4\right)$$

d) $C_{\mathbb{R}}(-\infty; -3)$

$$[-3; +\infty)$$

Dạng

5

Các bài toán biện luận theo tham số

Ví dụ 15

Cho hai tập hợp $A = (-3; 5]$, $B = [a; +\infty)$. Tìm a để

a) $A \cap B = [-2; 5]$.

b) $A \cap B$ có đúng một phần tử.

Ví dụ 16

Cho $A = (-\infty; m + 1]$, $B = (-1; +\infty)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $A \cup B = \mathbb{R}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 14



Cho số thực $a < 0$ và hai tập hợp $A = (-\infty; 9a)$, $B = \left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$. Tìm a để $A \cap B \neq \emptyset$.

.....

.....

.....

.....

Bài 15



Cho hai tập hợp $A = [-2; m]$, $B = (1; 5]$. Tùy theo m , xác định tập $B \setminus A$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

6

Toán thực tế ứng dụng của tập hợp

❖ Ví dụ 17

Tại vòng chung kết của một trò chơi truyền hình, có 100 khán giả tại trường quay có quyền bình chọn cho hai thí sinh A và B. Biết rằng có 85 khán giả bình chọn cho thí sinh A, 72 khán giả bình chọn cho thí sinh B và 60 khán giả bình chọn cho cả hai thí sinh này. Có bao nhiêu khán giả đã tham gia bình chọn? Có bao nhiêu khán giả không tham gia bình chọn?

97 người tham gia bình chọn và 3 người không tham gia bình chọn

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18

Kết quả thi học kì một của một trường THPT có 48 thí sinh giỏi môn Toán, 37 thí sinh giỏi môn Vật Lí, 42 thí sinh giỏi môn Văn. Biết rằng có 75 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Vật lí, 76 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Văn, 66 thí sinh giỏi môn Vật lí hoặc môn Văn và có 4 thí sinh giỏi cả ba môn. Hỏi

- ① có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 1 môn. 🔍 65
- ② có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 2 môn. 🔍 25
- ③ có bao nhiêu học sinh giỏi ít nhất 1 môn. 🔍 94



Cho A, B, C là ba tập hợp bất kì. Khi đó

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C).$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 16



Thầy Đạt giao cho lớp 10A2 dự án điều tra về tình hình sử dụng nước uống trong sinh hoạt hằng ngày của các học sinh trong trường. Sau một tuần tiến hành phỏng vấn thu thập thông tin, nhóm điều tra thu được số liệu sau đây:

- ☞ Có 184 bạn trả lời phỏng vấn là có uống nước đun sôi hằng ngày;
- ☞ Có 150 bạn trả lời phỏng vấn là có uống nước đóng chai hằng ngày;
- ☞ Trong số những bạn trả lời phỏng vấn, 87 bạn trả lời là có sử dụng cả nước đun sôi và nước đóng chai hằng ngày.

Thầy Đạt muốn biết số lượng học sinh đã được phỏng vấn để đánh giá được quy mô của đợt khảo sát. Tuy nhiên nhóm điều tra lại quên thống kê thông tin này. Hãy giúp nhóm điều tra xác định số lượng học sinh đã tham gia phỏng vấn, biết rằng tất cả các bạn được phỏng vấn đều chỉ uống nước đun sôi hoặc uống nước đóng chai. 🔍 247

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề “7 là một số tự nhiên”?

- (A) $7 \subset \mathbb{N}$. (B) $7 \in \mathbb{N}$. (C) $7 < \mathbb{N}$. (D) $7 \leq \mathbb{N}$.

❖ **Câu 2.** Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề “ $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ”?

- (A) $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. (B) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
(C) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (D) $\sqrt{2}$ không trùng với $\mathbb{Q}$.

❖ **Câu 3.** Tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ được viết dưới dạng đặc trưng là

- (A) $A = \{n \in \mathbb{N} | 1 < n \leq 7\}$. (B) $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 7\}$.
(C) $A = \{n \in \mathbb{N} | 0 < n \leq 7\}$. (D) $A = \{n \in \mathbb{N} | 1 < n < 7\}$.

❖ **Câu 4.** Cho tập hợp $A = \{3k | k \in \mathbb{Z}, -2 < k \leq 3\}$. Khi đó tập A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là:

- (A) $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. (B) $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
(C) $A = \{-3; 0; 3; 6; 9\}$. (D) $A = \{-6; -3; 0; 3; 6; 9\}$.

❖ **Câu 5.** Cho tập A có 3 phần tử, số tập con của tập A bằng

- (A) 6. (B) 3. (C) 8. (D) 4.

❖ **Câu 6.** Số tập con gồm 3 phần tử có chứa e, f của $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ là

- (A) 10. (B) 14. (C) 8. (D) 12.

❖ **Câu 7.** Hãy viết lại tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ dưới dạng liệt kê.

- (A) $X = \{1\}$. (B) $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$. (C) $X = \emptyset$. (D) $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

❖ **Câu 8.** Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} | -2 < n \leq 5\}$. Tập hợp A bằng tập hợp nào sau đây?

- (A) $M = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. (B) $N = \{-1; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
(C) $P = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. (D) $Q = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

❖ **Câu 9.** Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x - 4 = 0\}$. Dùng phương pháp liệt kê phần tử, xác định tập hợp B .

- (A) $B = \{-1\}$. (B) $B = \{4\}$. (C) $B = (-1; 4)$. (D) $B = \{-1; 4\}$.

❖ **Câu 10.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 + 8x + 15 = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $A = \{-3; -5\}$. (B) $A = \emptyset$. (C) $A = \{\emptyset\}$. (D) $A = \{0\}$.

❖ **Câu 11.** Tập hợp $Y = \{a\}$ có bao nhiêu tập hợp con?

- (A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 0.

❖ **Câu 12.** Tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$ có bao nhiêu tập con gồm hai phần tử?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 13.** Tập hợp $\{a; b; c\}$ có bao nhiêu tập con?

- (A) 3. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

❖ **Câu 14.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào bằng tập $\emptyset$?

- (A) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 1 < 0\}$. (B) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 0\}$.
(C) $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n < 5\}$. (D) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 = 0\}$.

❖ **Câu 15.** Cho tập hợp $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ và } x + y = 2\}$. Tập hợp B có bao nhiêu phần tử?

- (A) 4. (B) 8. (C) 3. (D) 9.

❖ **Câu 16.** Có bao nhiêu tập hợp X thỏa mãn điều kiện $\{a; b\} \subset X \subset \{a; b; c; d; e\}$?

- (A) 2. (B) 4. (C) 8. (D) 10.

❖ **Câu 17.** Ta gọi H là tập hợp các hình bình hành, V là tập hợp tất cả các hình vuông, N là tập hợp tất cả các hình chữ nhật và T là tập hợp tất cả các hình tứ giác. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- (A) $H \subset T$. (B) $V \subset N$. (C) $V \subset H$. (D) $N \subset V$.

❖ **Câu 18.** Tập hợp $X = [-1; 4]$ có bao nhiêu phần tử?

- (A) 2. (B) 1. (C) 5. (D) Vô số.

❖ **Câu 19.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $A = (-1; 4]$. (B) $A = \{-1; 4\}$. (C) $A = (-1; 4)$. (D) $A = [-1; 4]$.

❖ **Câu 20.** Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $X = (-2; 5)$. (B) $X = \{-2; 5\}$. (C) $X = [-2; 5)$. (D) $X = [-2; 5]$.

❖ **Câu 21.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 1\}$. Tập A bằng tập nào trong các tập hợp sau?

- (A) $(0; 1)$. (B) $[0; 1]$. (C) $[0; 2]$. (D) $[-1; 2]$.

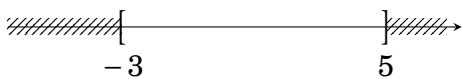
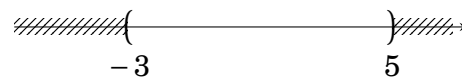
❖ **Câu 22.** Cho tập hợp $A = [-2; 1)$. Tập hợp A là tập con của tập hợp nào sau đây?

- (A) $B = [-1; 2)$. (B) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$.
(C) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 1\}$. (D) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x < 1\}$.

❖ **Câu 23.** Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$. Tập hợp nào trong các tập hợp sau đây **không** chứa tập hợp X ?

- (A) $A = [-3; 7)$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $B = [-3; +\infty)$. (D) $C = [-1; +\infty)$.

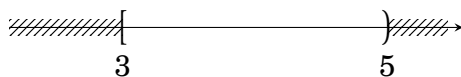
❖ **Câu 24.** Cho tập hợp $X = [-3; 5]$. Biểu diễn tập hợp X trên trục số ta được hình biểu diễn nào trong các hình sau (phần không bị gạch chéo)?

- (A)  (B) 
(C)  (D) 

❖ **Câu 25.** Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a < b < c < d$. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- (A) $(a; c) \subset (c; d)$. (B) $(b; c) \subset (b; d)$. (C) $(b; c) \subset (a; d)$. (D) $(a; c) \subset (a; d)$.

❖ **Câu 26.** Cho tập hợp A được biểu diễn trên trục số như sau (phần không bị gạch chéo).



Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $A = (3; 5)$. (B) $A = [3; 5)$. (C) $A = [3; 5]$. (D) $A = (3; 5]$.

❖ **Câu 27.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0\}$.

- (A) $X = \{0\}$. (B) $X = \{2\}$. (C) $X = \emptyset$. (D) $X = 0$.

❖ **Câu 28.** Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 4) = 0\}$ ta được

- (A) $A = \left\{\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; 2\right\}$. (B) $A = \{1; 2\}$. (C) $A = \left\{-2; \frac{1}{6}; 1; 2\right\}$. (D) $A = \{-2; 1; 2\}$.

❖ **Câu 29.** Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; x; y\}$. Xét các mệnh đề sau đây

(I) : " $3 \in A$ "; (II) : " $\{3; 4\} \in A$ "; (III) : " $\{x; 3; y\} \in A$ ".

Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 30.** Tập hợp nào sau đây có đúng một tập con?

- (A) $\{0\}$. (B) $\{0; 1\}$. (C) $\emptyset$. (D) $\{1\}$.

❖ **Câu 31.** Viết tập $M = \{x \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \sqrt{x} \text{ là ước của } 8\}$ dạng liệt kê các phần tử là

- (A) $M = \{1; 4; 16; 64\}$. (B) $M = \{0; 1; 4; 16; 64\}$. (C) $M = \{1; 2; 4; 8\}$. (D) $M = \{0; 1; 2; 4; 8\}$.

❖ **Câu 32.** Cách viết nào sau đây **không đúng**?

- (A) $1 \subset \mathbb{N}$. (B) $1 \in \mathbb{N}$. (C) $\{1\} \subset \mathbb{N}$. (D) $1 \in \mathbb{N}^*$.

❖ **Câu 33.** Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, D là tập nghiệm của đa thức $P^2(x) + Q^2(x)$. D là tập hợp nào sau đây

- (A) $A \cup B$. (B) $A \cap B$. (C) $A \setminus B$. (D) $B \setminus A$.

❖ **Câu 34.** Ký hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp 10A. T là tập hợp các học sinh nam, G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $T \cup G = H$. (B) $T \cap G = \emptyset$. (C) $H \setminus T = G$. (D) $G \setminus T = \emptyset$.

❖ **Câu 35.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{N}$. (B) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}$. (C) $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. (D) $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}^*$.

❖ **Câu 36.** Cho $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ bằng:

- (A) $\{0; 1; 5; 6\}$. (B) $\{1; 2\}$. (C) $\{2; 3; 4\}$. (D) $\{5; 6\}$.

❖ **Câu 37.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N}^* | 3 < n^2 < 30\}$. Khi đó, tập hợp $A \cap B$ bằng:

- (A) $\{2; 4\}$. (B) $\{2\}$. (C) $\{4; 5\}$. (D) $\{3\}$.

❖ **Câu 38.** Cho tập hợp A . Chọn khẳng định đúng.

- (A) $A \cap \emptyset = A$. (B) $A \cup \emptyset = A$. (C) $\emptyset \notin A$. (D) $\{\emptyset\} \subset A$.

❖ **Câu 39.** Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$. Xác định $A \cup B$.

- (A) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. (B) $\{0\}$. (C) $\emptyset$. (D) $\{2; 4\}$.

❖ **Câu 40.** Cho $X = \{7; 2; 8; 4; 9; 12\}$; $Y = \{1; 3; 7; 4\}$. Tập hợp nào sau đây bằng $X \cap Y$?

- (A) $\{1; 2; 3; 4; 8; 9; 7; 12\}$. (B) $\{2; 8; 9; 12\}$.
(C) $\{4; 7\}$. (D) $\{1; 3\}$.

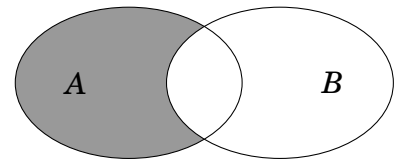
❖ **Câu 41.** Cho các tập hợp $M = [-3; 6]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

- (A) $(-\infty; -2) \cup (3; 6)$. (B) $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.
(C) $[-3; -2) \cup (3; 6]$. (D) $(-3; -2) \cup (3; 6)$.

❖ **Câu 42.** Cho hai tập hợp M, N thỏa mãn $M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

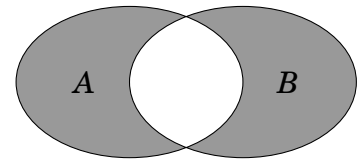
- (A) $M \setminus N = M$. (B) $M \cap N = N$. (C) $M \cap N = M$. (D) $M \setminus N = N$.

❖ **Câu 43.** Cho hai tập hợp A và B được biểu diễn bằng sơ đồ Ven như hình vẽ bên. Phần tô đậm là biểu diễn của tập hợp nào dưới đây?



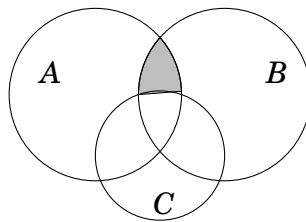
- (A) $B \setminus A$. (B) $A \cup B$. (C) $A \cap B$. (D) $A \setminus B$.

❖ **Câu 44.** Cho hai tập hợp A và B được biểu diễn bằng sơ đồ Ven như hình vẽ bên. Phần tô đậm là biểu diễn của tập hợp nào dưới đây?



- (A) $A \cap B$. (B) $A \cup B$.
(C) $A \setminus B$. (D) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

❖ **Câu 45.** Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



- (A) $A \cap B \cap C$. (B) $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. (C) $(A \cup B) \setminus C$. (D) $(A \cap B) \setminus C$.

❖ **Câu 46.** Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \geq 3\}$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2)$. (C) $[2; +\infty)$. (D) $(-\infty; 2]$.

❖ **Câu 47.** Tập hợp $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3x + \frac{3}{2} < -\frac{3}{2}\}$ bằng tập hợp nào dưới đây?

- (A) $(1; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $[1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1]$.

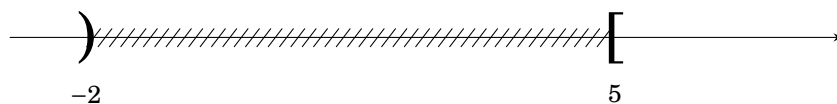
❖ **Câu 48.** Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ bằng tập hợp nào sau đây?

- (A) $[1; 2]$. (B) $(1; 2)$. (C) $[1; 2)$. (D) $(1; 2]$.

❖ **Câu 49.** Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

- (A) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$. (B) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (C) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

❖ **Câu 50.** Hình vẽ dưới là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



- (A) $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.
(C) $(-\infty; -2] \cup (5; +\infty)$. (D) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

❖ **Câu 51.** Cho các tập hợp $A = (-5; 3)$ và $B = [-2; 7)$. Tìm $A \cup B$.

- (A) $[-2; 3)$. (B) $(-5; -2)$. (C) $(-5; 7)$. (D) $[3; 7)$.

❖ **Câu 52.** Cho $P = (-5; 7)$, $Q = (1; +\infty)$. Tập hợp $P \setminus Q$ là

- (A) $[7; +\infty)$. (B) $(-5; 1)$. (C) $(1; 7)$. (D) $(-5; 1]$.

❖ **Câu 53.** Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

- (A) $A \cap B = C$. (B) $A \cup B = C$. (C) $A \setminus B = C$. (D) $B \setminus A = C$.

❖ **Câu 54.** Phần bù của $[-2; 1)$ trong $\mathbb{R}$ là

- (A) $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2)$.
(C) $(2; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1]$.

❖ **Câu 55.** Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}; B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}; C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{g(x)} = 0\right\}.$$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $C = A \cup B$. (B) $C = A \cap B$. (C) $C = A \setminus B$. (D) $C = B \setminus A$.

❖ **Câu 56.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N}, x < 20 \text{ và } x \text{ chia hết cho } 4\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) A có 6 phần tử. (B) A có 5 phần tử. (C) A có 8 phần tử. (D) A có 7 phần tử.

❖ **Câu 57.** Cho $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20 \text{ và } x \text{ chia hết cho } 3\}$. Lựa chọn phương án đúng.

- (A) $B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$. (B) $B = \{0; 6; 9; 12; 15; 18\}$.
(C) $B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15\}$. (D) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$.

❖ **Câu 58.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$. Các phần tử của tập A là

- (A) $A = \{-1; 1\}$. (B) $A = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$.
(C) $A = \{-1\}$. (D) $A = \{1\}$.

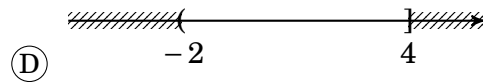
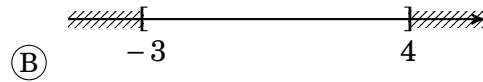
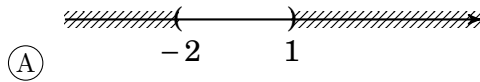
❖ **Câu 59.** Cho ba tập hợp sau: M là tập hợp các tam giác có 2 góc tù; N là tập hợp các tam giác có độ dài ba cạnh là ba số nguyên liên tiếp; P là tập hợp các số nguyên tố chia hết cho 3. Tập hợp nào rỗng?

- (A) Chỉ M . (B) Chỉ N và P . (C) Chỉ P và M . (D) Cả M, N, P .

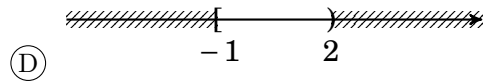
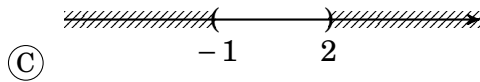
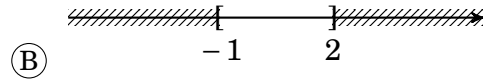
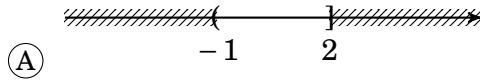
❖ **Câu 60.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tập hợp $(1; m)$ chứa đúng 1 số nguyên dương.

- (A) $m = 2$. (B) $m > 2$. (C) $m = 3$. (D) $m = 4$.

❖ **Câu 61.** Biểu diễn trên trục số của tập hợp $[-3; 1) \cap (-2; 4]$ là hình nào?



❖ **Câu 62.** Biểu diễn trên trục số của tập hợp $(0; 2) \cup [-1; 1)$ là hình nào?



❖ **Câu 63.** Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) $C = A \cup B$. (B) $C = A \cap B$. (C) $C = A \setminus B$. (D) $C = B \setminus A$.

❖ **Câu 64.** Xác định tất cả các giá trị của m sao cho $(m - 7; m) \subset (-4; 3)$?

- (A) $m > 3$. (B) $m < 3$. (C) $m = 3$. (D) Không tồn tại m .

❖ **Câu 65.** Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m + 1]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \subset A$.

- (A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $1 < m < 2$. (D) $1 \leq m \leq 2$.



2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} | -2 < n \leq 3\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) -2 là một phần tử thuộc tập A .
b) Tập A có tất cả 5 tập con gồm 1 phần tử.
c) Tập A có tất cả 5 tập con gồm 4 phần tử.
d) Tập A có tất cả 16 tập con.

❖ **Câu 2.** Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N}^* | n \leq 3\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $A = \{1; 2; 3\}$.
b) $n(A) + n(B) = 8$.
c) Tập hợp A là con của tập hợp B .
d) Số các tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là 3 tập.

❖ **Câu 3.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 6x + 5 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = 1\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $A = \{1; 5\}$. (b) $B = \{-1; 1\}$. (c) $A \cap B = \{1\}$. (d) $B \setminus A = \{-1\}$.

❖ **Câu 4.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là số lẻ}, x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là các ước của } 12\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $A = \{0; 1; 3; 5; 7\}$. (b) $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
c) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$. (d) $A \setminus B = \{5; 7\}$.

d) Tập hợp $B \setminus A$ chứa 2 số nguyên.

d) $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 3]$.

d) Tổng các phần tử của tập hợp A và tập hợp B là 3.

d) $A \cup C = \{-6; -3; -2; 2; 3; 5; 7; 9\}.$

d) Điều kiện của a để $A \cap B \neq \emptyset$ là $-1 < a < -\frac{1}{3}$ hoặc $a \geq \frac{5}{2}$.

A horizontal number line with arrows at both ends. Two points are marked with brackets: a left bracket at -1 and a right bracket at 1. The segment between -1 and 1 is filled with diagonal hatching lines, representing the closed interval [-1, 1].

d) Không tồn tại giá trị của m để $A \subset B$.

d) Có 17 học sinh thích chỉ thích chơi cầu lông.

d) Ban tổ chức đã huy động 85 người phiên dịch cho hội nghị.

❖ **Câu 13.** Một lớp học có 50 học sinh, trong đó có 35 học sinh giỏi toán, 25 học sinh giỏi văn. Biết rằng mỗi học sinh trong lớp đều giỏi ít nhất 1 môn Toán hoặc Văn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Lớp có tổng cộng 60 học sinh giỏi.
- b) Lớp có 10 học sinh giỏi cả 2 môn Văn và Toán.
- c) Lớp có 15 học sinh giỏi Văn mà không giỏi Toán.
- d) Lớp có 35 học sinh giỏi Toán.

❖ **Câu 14.** Một lớp có 40 học sinh, biết rằng ai cũng đăng kí thi ít nhất một trong hai môn là cờ vua và cờ tướng. Có 17 em đăng kí môn cờ vua, 28 em đăng kí môn cờ tướng.

- a) Có 28 học sinh chỉ đăng kí môn cờ tướng.
- b) Số học sinh đăng kí môn cờ vua là 17 học sinh.
- c) Số học sinh đăng kí môn cờ tướng là 28 học sinh.
- d) Có tất cả 5 học sinh đăng kí cả hai môn cờ.

❖ **Câu 15.** Trong đợt quyên góp ủng hộ đồng bào bị lũ lụt năm 2020, có 25 học sinh lớp 12A đã tham gia ủng hộ, mỗi học sinh ủng hộ nhiều nhất 2 tờ tiền khác nhau trong ba loại tờ tiền mệnh giá 5000 đồng, 10000 đồng và 20000 đồng. Biết rằng số học sinh đã tham gia ủng hộ thỏa đồng thời ba kết quả sau:

- ◇ Số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5000 đồng bằng tổng số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 10000 đồng và số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 20000 đồng.
- ◇ Trong số học sinh không ủng hộ tờ 5000 đồng thì số học sinh có ủng hộ tờ 10000 đồng nhiều gấp hai lần số học sinh có ủng hộ tờ 20000 đồng.
- ◇ Số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5000 đồng nhiều hơn số học sinh ủng hộ tờ 5000 đồng và một tờ khác là 1 học sinh.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Có 2 học sinh ủng hộ một tờ 10000 đồng và một tờ 20000 đồng.
- b) Có 8 học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5000 đồng.
- c) Nếu gọi số học sinh ủng hộ một tờ 5000 đồng và một tờ 10000 đồng là a và số học sinh ủng hộ một tờ 20000 đồng và một tờ 5000 đồng là c thì $9a = c$.
- d) Có 6 học sinh lớp 12A chỉ ủng hộ một tờ 10000 đồng.



3 Tự luận.

❖ **Bài 1.** Gọi X là tập hợp các quốc gia tiếp giáp với Việt Nam. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp X và biểu diễn tập X bằng biểu đồ Ven.

❖ **Bài 2.** Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của tập hợp X .

❖ **Bài 3.** Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ " $\subset$ ": $[2; 5]$, $(2; 5)$, $[2; 5)$, $(1; 5]$.

❖ **Bài 4.** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------|---|--------------------------------|
| a) $[-3; 7] \cap (2; 5);$ | $\mathbb{Q} \cap (2; 5)$ | c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3);$ | $\mathbb{Q} \cap [3; +\infty)$ |
| b) $(-\infty; 0] \cap (-1; 2);$ | $\mathbb{Q} \cap (-1; 0]$ | d) $(-3; 2) \setminus [1; 3).$ | $\mathbb{Q} \cap (-3; 1)$ |

Bài 5. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(-4; 1] \cap [0; 3)$; b) $(0; 2] \cup (-3; 1]$; c) $(-2; 1) \cap (-\infty; 1]$; d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3]$.

$\mathbb{Q} \quad [0; 1]$

$\mathbb{Q} \quad (-3; 2]$

$\mathbb{Q} \quad (-2; 1)$

$\mathbb{Q} \quad (3; +\infty)$

Bài 6. Tìm $D = E \cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau

- a) $2x + 3 \geq 0$ và $-x + 5 \geq 0$; $\mathbb{Q} \quad D = \left[-\frac{3}{2}; 5\right]$ b) $x + 2 > 0$ và $2x - 9 < 0$. $\mathbb{Q} \quad D = \left(-2; \frac{9}{2}\right)$.

Bài 7. Hãy viết tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp $A = \{0; 4; 8; 12; 16\}$.

$\mathbb{Q} \quad A = \{x \in \mathbb{N} \mid x:4 \text{ và } x \leq 16\}$

Bài 8. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6 = 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 6 = 0\}.$$

$\mathbb{Q} \quad B \text{ là tập rỗng}$

Bài 9. Cho $X = \{a; b\}$. Các cách viết sau đúng hay sai? Giải thích kết luận đưa ra.

① $a \subset X$;

② $\{a\} \subset X$;

③ $\emptyset \in X$

Bài 10. Cho $A = \{2; 5\}, B = \{5; x\}, C = \{2; y\}$. Tìm x và y để $A = B = C$.

$\mathbb{Q} \quad x = 2, y = 5$

Bài 11. Cho A là một tập hợp. Xác định các tập hợp sau:

- a) $A \cap A$; b) $A \cap \emptyset$; c) $A \cup A$; d) $A \cup \emptyset$; e) $A \setminus A$; f) $A \setminus \emptyset$.

Bài 12. Xác định tập hợp $A \cap B$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 < 0\}$; $\mathbb{Q} \quad A \cap B = \{-\sqrt{2}\}$

b) $A = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\}, B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = -x + 5\}$; $\mathbb{Q} \quad A \cap B = \{(2; 3)\}$

c) A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật. $\mathbb{Q} \quad A \cap B$ là tập hợp các hình vuông

Bài 13. Cho $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $A = \{x \in E \mid x \text{ là bội của } 3\}$, $B = \{x \in E \mid x \text{ là ước của } 6\}$. Xác định các tập hợp $A \setminus B, B \setminus A, C_E A, C_E B, C_E(A \cup B), C_E(A \cap B)$.

Bài 14. Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và $B = \{6l + 3 \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $B \subset A$.

Bài 15. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a\}$ và $B = \{1; a^2\}$. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho $B \subset A$.

$\mathbb{Q} \quad a = -1; 1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0$

Bài 16. Cho các tập hợp: $A = [-1; 7], B = (m - 1; m + 5)$ với m là một tham số thực. Tìm m để:

a) $B \subseteq A$; $\mathbb{Q} \quad 0 \leq m \leq 2$ b) $A \cap B = \emptyset$. $\mathbb{Q} \quad m \geq 8 \text{ hoặc } m \leq -6$

Bài 17. Cho $A = [m; m + 2]$ và $B = [n; n + 1]$ với m, n là các tham số thực. Tìm điều kiện của các số m và n để tập hợp $A \cap B$ chứa đúng một phần tử.

$\mathbb{Q} \quad n + 1 = m \text{ hoặc } n = m + 2$

Bài 18. Cho $A = (-\infty; m + 1), B = [3; +\infty)$ với m là một tham số thực. Tìm m để:

a) $A \cup B = \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \quad m \geq 2$ b) $A \cap B$ chứa đúng 5 số nguyên. $\mathbb{Q} \quad 6 < m \leq 7$

Bài 19. Trong số 35 học sinh của lớp 10H, có 20 học sinh thích học môn Toán, 16 học sinh thích môn Tiếng Anh và 12 học sinh thích cả hai môn này. Hỏi lớp 10H:

a) có bao nhiêu học sinh thích ít nhất một trong hai môn Toán và Tiếng Anh? $\mathbb{Q} \quad 24$

b) có bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn này?

11

Bài 20. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào?

6

Bài 21. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 35 người phiên dịch tiếng Anh, 30 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 16 người phiên dịch được cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Ban tổ chức đã huy động bao nhiêu người phiên dịch cho hội nghị đó?

49

b) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Anh?

19

c) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Pháp?

14

Bài 22. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

a) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

18

b) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

37

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

3

Bài 23. Lớp 10A có 27 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và cờ vua, trong đó có 19 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, 15 học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua.

a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua?

12

b) Có bao nhiêu học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ?

7

c) Biết trong lớp có 8 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ trên. Lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

35

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	B	2	C	3	C	4	C	5	C	6	C	7	B	8	C	9	D	10	B
12	C	13	D	14	D	15	C	16	C	17	D	18	D	19	A	20	D	21	C
22	B	23	A	24	A	25	A	26	B	27	C	28	B	29	A	30	C	31	A
32	A	33	B	34	D	35	D	36	A	37	B	38	B	39	A	40	C	41	C
42	B	43	D	45	D	46	C	47	A	48	D	49	B	50	A	51	C	52	D
53	A	54	A	55	C	56	B	57	A	58	A	59	A	60	C	61	A	62	D
63	B	64	C	65	D														

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 4.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 6.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 8.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 9.	☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 11.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 12.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
Câu 13.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 14.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 15.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ		

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 1



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- (a) “19 là số nguyên tố”.
- (b) “Tam giác vuông có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền”.
- (c) “Các em cố gắng tập thật tốt nhé, sắp thi giữa học kì 1 rồi”.
- (d) “Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được đường tròn”.

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

❖ **Câu 2.** Cho tập hợp $A = (-3; +\infty)$. Tập hợp nào dưới đây là tập con của tập A ?

- (A) $(-\infty; 2)$. (B) $(-2; +\infty)$. (C) $(-4; +\infty)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

❖ **Câu 3.** Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ” là

- (A) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 0$. (B) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 0$. (C) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$. (D) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$.

❖ **Câu 4.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập rỗng?

- (A) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$. (B) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.
 (C) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$. (D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 3 = 0\}$.

❖ **Câu 5.** Số phần tử của tập hợp $A = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

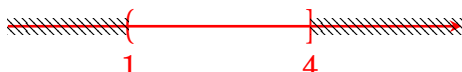
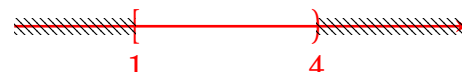
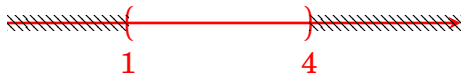
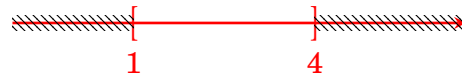
❖ **Câu 6.** Tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 1 - 2x \leq 1\}$ được viết lại dưới dạng đoạn, khoảng, nửa khoảng là

- (A) $(-1; 0]$. (B) $[0; 2)$. (C) $[1; 2]$. (D) $(0; 2]$.

❖ **Câu 7.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 6x^2 + 8 = 0\}$.

- (A) $X = \{2; 4\}$. (B) $X = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.
 (C) $X = \{\sqrt{2}; 2\}$. (D) $X = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2; 2\}$.

❖ **Câu 8.** Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho tập hợp $(1; 4]$?

- (A) . (B) .
 (C) . (D) .

❖ **Câu 9.** Phát biểu nào sau đây **không** là một mệnh đề toán học?

- (A) Số 2025 chia hết cho 5.
- (B) Nếu hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn thì hình thang đó cân.
- (C) Nếu bạn Minh chăm chỉ thì bạn Minh sẽ thành công.
- (D) Các số nguyên tố đều là số lẻ.

❖ **Câu 10.** Phủ định của mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ là số chẵn” là

- (A) “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ không là số chẵn”. (B) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ không là số lẻ”.
(C) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ là số lẻ”. (D) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ là số chẵn”.

❖ **Câu 11.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$. A là tập hợp nào sau đây?

- (A) $(-3; 2)$. (B) $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$. (C) $\{-3; 2\}$. (D) $[-3; 2)$.

❖ **Câu 12.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 < 4 + 2x\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}$. Tất cả các số nguyên thuộc cả hai tập hợp A và B là

- (A) 0 và 1. (B) $-1; 0; 1$ và 2. (C) 1 và 2. (D) 1.

❖ **Câu 13.** Cho hai tập hợp $E = (2; 4], F = (4; 5), E \cup F$ bằng

- (A) $(2; 5)$. (B) $\emptyset$. (C) $[2; 5)$. (D) $\{3; 4\}$.

❖ **Câu 14.** Cho hai tập hợp $A = [-4; 3), B = (-2; +\infty)$. $A \setminus B$ bằng

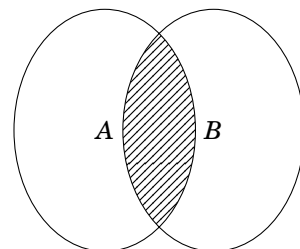
- (A) $[-4; -2)$. (B) $\{-4; -3; -2\}$. (C) $[3; +\infty)$. (D) $[-4; -2]$.

❖ **Câu 15.** Cho định lí: “Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau”. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích của chúng bằng nhau.
(B) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.
(C) Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.
(D) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích của chúng bằng nhau.

❖ **Câu 16.** Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- (A) $A \cap B$. (B) $A \setminus B$. (C) $A \cup B$. (D) $B \setminus A$.



❖ **Câu 17.** Dùng kí hiệu khoảng, đoạn để viết lại tập hợp sau $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3\right\}$.

- (A) $B = \left[-\frac{1}{2}; 3\right)$. (B) $B = \left(-\frac{1}{2}; 3\right]$. (C) $B = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$. (D) $B = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

❖ **Câu 18.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}; B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$. Tìm $A \setminus B$.

- (A) $A \setminus B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$. (B) $A \setminus B = [-1; 0)$.
(C) $A \setminus B = (-1; 0)$. (D) $A \setminus B = \{-1\}$.

❖ **Câu 19.** Viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$ bằng cách liệt kê phần tử.

- (A) $A = \left\{\frac{-1}{2}; 2; 3\right\}$. (B) $A = \{2; 3\}$. (C) $A = \{-1; 2\}$. (D) $A = \{-1; 2; 3\}$.

❖ **Câu 20.** Cho tập hợp $A = [-3; 5]$. Viết lại tập hợp A bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng.

- (A) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. (B) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 5\}$.
(C) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. (D) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$.

❖ **Câu 21.** Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3\}$ và $Y = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$. Tìm $C_Y X$.

- (A) $C_Y X = \{-1; 5\}$. (B) $C_Y X = \{0; 1; 2; 3\}$.
(C) $C_Y X = \emptyset$. (D) $C_Y X = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$.

❖ **Câu 22.** Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm số các tập con của A .

- (A) 10. (B) 12. (C) 16. (D) 8.

❖ **Câu 23.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x): x^2 - 3x - 2 \geq 0$ với $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào đúng?

- (A) $P(2)$. (B) $P(0)$. (C) $P(-1)$. (D) $P(3)$.

❖ **Câu 24.** Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Tập hợp nào sau đây là tập con của tập hợp A ?

- (A) $\{1; 3; 5\}$. (B) $\{0; 2; 4\}$. (C) $\{2; 4; 6\}$. (D) $\{\emptyset\}$.

❖ **Câu 25.** Cho 2 tập hợp $A = (-2; 5)$; $B = [0; 9]$. Tìm $A \cap B$.

- (A) $A \cap B = [5; 9)$. (B) $A \cap B = [0; 5)$. (C) $A \cap B = (-2; 0)$. (D) $A \cap B = (-2; 9]$.

❖ **Câu 26.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

- (A) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$. (B) $\forall x \in \mathbb{N}, x : 3$.
(C) $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 < 0$. (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

❖ **Câu 27.** Cho số tự nhiên n . Xét mệnh đề “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 4 thì n chia hết cho 2”. Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là

- (A) “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 2 thì n chia hết cho 4”.
(B) “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 2 thì n không chia hết cho 4”.
(C) “Nếu số tự nhiên n không chia hết cho 2 thì n không chia hết cho 4”.
(D) “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 4 thì n không chia hết cho 2”.

❖ **Câu 28.** Phần bù của tập hợp $(-\infty; -2)$ trong tập hợp $(-\infty; 4)$ là

- (A) $[-2; 4)$. (B) $[-2; 4]$. (C) $(-2; 4]$. (D) $(-\infty; -2)$.

❖ **Câu 29.** Phủ định của mệnh đề “ $4 + 20 = 18$ ” là mệnh đề

- (A) $4 + 20 = 18$. (B) $4 + 20 \leq 18$. (C) $4 + 20 \geq 18$. (D) $4 + 20 \neq 18$.

❖ **Câu 30.** Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và tập $B = \{7, 8, 9\}$. Khi đó:

- (A) $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (B) $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
(C) $A \setminus B = \{7, 8, 9\}$. (D) $A \setminus B = \emptyset$.

❖ **Câu 31.** Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{Q}, 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ” là

- (A) $\exists x \in \mathbb{Q}, 2x^2 - 5x + 2 > 0$. (B) $\forall x \in \mathbb{Q}, 2x^2 - 5x + 2 = 0$.
(C) $\forall x \in \mathbb{Q}, 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$. (D) $\exists x \in \mathbb{Q}, 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$.

❖ **Câu 32.** Mệnh đề $P: “\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n”$ được phát biểu là

- (A) $P: “\text{Mọi số tự nhiên đều có bình phương lớn hơn hoặc bằng chính nó}”$.
(B) $P: “\text{Mọi số tự nhiên đều có bình phương lớn hơn chính nó}”$.
(C) $P: “\text{Tồn tại số tự nhiên mà bình phương lớn hơn hoặc bằng chính nó}”$.
(D) $P: “\text{Tồn tại số tự nhiên mà bình phương nhỏ hơn chính nó}”$.

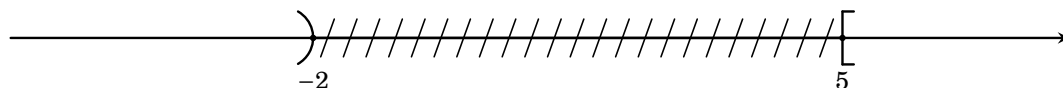
❖ **Câu 33.** Cho ba tập hợp $A = [0; 4]$, $B = [0; 4)$ và $S = (0; 4)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $B \subset A$. (B) $A \subset B$. (C) $A \subset S$. (D) $B \subset S$.

❖ **Câu 34.** Cho tập hợp $A = \{1; 2; 5; 6\}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\emptyset \subset A$. (B) $\{1\} \in A$. (C) $3 \notin A$. (D) $\{1; 5\} \subset A$.

❖ **Câu 35.** Phần **không bị gạch** trong hình vẽ sau đây là biểu diễn của tập hợp nào?



- (A) $(-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$. (C) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. (D) $(-\infty; 2) \cup [5; +\infty)$.

❖ **Câu 36.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: " \forall x \in \mathbb{N}: x^2 + x - 1 > 0 "$ là

- (A) $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{N}: x^2 + x - 1 > 0 "$. (B) $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{N}: x^2 + x - 1 > 0 "$.
(C) $\bar{P}: " \exists x \in \mathbb{N}: x^2 + x - 1 \leq 0 "$. (D) $\bar{P}: " \forall x \in \mathbb{N}: x^2 + x - 1 < 0 "$.

❖ **Câu 37.** Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ được phát biểu lại theo cách khác là

- (A) P là điều kiện đủ để có Q . (B) P là kết luận, Q là giả thiết.
(C) P là điều kiện cần để có Q . (D) P là điều kiện cần và đủ để có Q .

❖ **Câu 38.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$. Tập A được viết lại là

- (A) $[-2; 5)$. (B) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
(C) $[-2; 5]$. (D) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

❖ **Câu 39.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \leq 4 + 2x\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 7 < 3x - 1\}$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập hợp $A \cap B$?

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 2.

❖ **Câu 40.** Cho tập hợp $M = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 0\}$. Tập hợp M có bao nhiêu phần tử?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

❖ **Câu 41.** Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$: “Nếu $3^2 + 1$ là số chẵn thì 3 là số lẻ”. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- (A) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai. (B) Cả mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều sai.
(C) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai. (D) Cả mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

❖ **Câu 42.** Cho mệnh đề P : “Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1”. Mệnh đề nào sau đây là một cách phát biểu khác của mệnh đề đã cho?

- (A) Điều kiện đủ để một trong hai số a và b nhỏ hơn 1 là $a + b < 2$.
(B) Điều kiện cần để một trong hai số a và b nhỏ hơn 1 là $a + b < 2$.
(C) Điều kiện đủ để $a + b < 2$ là một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
(D) Điều kiện cần và đủ để một trong hai số a và b nhỏ hơn 1 là $a + b < 2$.

❖ **Câu 43.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0$. (B) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$.
(C) $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n$. (D) $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $n < 2n$.

❖ **Câu 44.** Cho tập hợp $A = \{1; 2; 5; 7\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $X \subset A$ và $X \subset B$?

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

❖ **Câu 45.** Mỗi học sinh lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng rổ. Biết rằng có 30 bạn chơi bóng đá, 22 bạn chơi bóng rổ và 10 bạn chơi cả hai môn. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

- (A) 42. (B) 45. (C) 40. (D) 43.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho tập hợp $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\emptyset \subset A$.
 b) $2 \in A$.
 c) Số tập con của tập hợp A có 1 phần tử là 8.
 d) $A = \{n \in \mathbb{N} | n = 2k, 0 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{N}\}$.

❖ **Câu 2.** Cho hai tập hợp $A = (-3; 2]$ và $B = [0; +\infty)$.

- a) $0 \in B$. b) $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
 c) $A \cap B = (-3; +\infty)$. d) $A \cup B = [0; 2]$.

❖ **Câu 3.** Cho ba tập hợp $A = [-5; 1]$, $B = (-3; 2)$ và $C = [2; +\infty)$. Khi đó:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q} | -5 \leq x \leq 1\}$. b) $B \cup C = (-3; +\infty)$.
 c) $A \cap B \cap C = \emptyset$. d) $C_{\mathbb{R}} B = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

❖ **Câu 4.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 7\}$ và $B = [3; 7)$.

- a) $A = (-\infty; 7)$.
 b) $A \cup B = B$.
 c) $B \subset A$.
 d) Tập hợp $A \setminus B$ chứa 3 phần tử là số nguyên dương.

❖ **Câu 5.** Cho hai tập hợp $A = (-3; 5]$, $B = (2; +\infty)$.

- a) $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$. b) $A \cup B = (-3; +\infty)$.
 c) $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 5\}$. d) $A \cap B = (-3; 2]$.

❖ **Câu 6.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 10\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 5\}$.

- a) $A \setminus B = (-1; 0] \cup (5; 10)$. b) $B \setminus A = \emptyset$.
 c) $C_A B = (-1; 0] \cup (5; 10)$. d) $A = (-1; 10]; B = [0; 5]$.

❖ **Câu 7.** Cho các mệnh đề sau, xét tính đúng sai của chúng:

- a) Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: “ $|2x - 5| \leq 7$ ” với x là số nguyên. Có đúng 7 giá trị của x làm cho $P(x)$ đúng.
 b) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ vô nghiệm.
 c) Cho mệnh đề T : “Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau”. Mệnh đề đảo của T là “Nếu hai tam giác có diện tích bằng nhau thì chúng bằng nhau”.
 d) Cho mệnh đề Q : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0$ ”. Mệnh đề phủ định là $\bar{Q}$: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ ”.

❖ **Câu 8.** Cho các tập hợp số, xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$, tập hợp A là tập rỗng.
- b) Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 9\}$. Tập hợp A có 4 phần tử.
- c) Cho hai tập hợp A và B biết, $A \setminus B = \{a; f\}$, $B \setminus A = \{b; g; h\}$, $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$, khi đó $A \cap B = \{c; d; e\}$.
- d) $(-5; 2) \cap [-4; +\infty) = [-4; 2)$.

❖ **Câu 9.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$.

- a) $A = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.
- b) $B = \{0; 1; 2\}$.
- c) $A \subset B$.
- d) $B \setminus A = \{0; 2\}$.

❖ **Câu 10.** Cho $P(n) = n^2 - 4n + 5$ với n là số tự nhiên. Khi đó

- a) $P(n+1) > P(n)$ với $n = 3$.
- b) $P(1)$ là số lẻ.
- c) $P(3)$ là số nguyên tố.
- d) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $P(n) = 1$.

❖ **Câu 11.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$ và $B = \{x = 2n \mid n \in \mathbb{N}; n \leq 3\}$

- a) $B = \{0; 2; 4; 6\}$.
- b) $A \setminus B = \{1; 3\}$.
- c) $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$.
- d) $A \cap B = \{2; 4\}$.

❖ **Câu 12.** Cho hai tập hợp $A = \{1; 3; 5; 7\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$. Khi đó

- a) $\{3\} \subset A$.
- b) $B = \{1; 2; 3; 4\}$.
- c) $A \cap B = \{1; 3\}$.
- d) $B \setminus A = \{2; 4\}$.

❖ **Câu 13.** Xét tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau.

- a) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$.
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ và $n+2$ là các số nguyên tố.
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$.

❖ **Câu 14.** Cho ba tập hợp $A = (1; 5)$; $B = [-2; 3]$ và $C = (m-1; +\infty)$. Khi đó

- a) $A \cup B = [-2; 1)$.
- b) $A \cap B = (1; 3]$.
- c) $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.
- d) Nếu $2 \leq m \leq 4$ thì $B \cap C = (0; 3]$.

❖ **Câu 15.** Lớp 10A có tất cả 50 học sinh trong đó có 13 học sinh chỉ thích đá bóng, 18 học sinh chỉ thích chơi cầu lông, 10 học sinh không thích môn nào trong hai môn thể thao nói trên và số học sinh còn lại thích chơi cả hai môn thể thao nói trên. Khi đó

- a) Có 40 học sinh thích chơi môn cầu lông hoặc môn bóng đá.
- b) Có 27 học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá.
- c) Có 31 học sinh thích chỉ một trong hai môn bóng đá và môn cầu lông.
- d) Có 26 học sinh thích cầu lông.



3

Tự luận.

❖ **Bài 1.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$; $B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$. Xác định các tập hợp sau:

$$A \cup B; A \cap B; A \setminus B.$$

❖ **Bài 2.** Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Xác định các tập hợp sau

$$A \cap B; B \setminus A \text{ và } C_{\mathbb{R}} B.$$

❖ **Bài 3.** Cho các tập hợp $A = [-1; 2)$, $B = (-\infty; 1]$.

Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $\mathbb{R} \setminus B$; $C_{\mathbb{R}} A$.

Bài 4. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(-\infty; 1) \cap (0; +\infty)$; $\mathcal{A}$ (0;1) b) $(4; 7] \cup (-1; 5)$; $\mathcal{A}$ (-1;7] c) $(4; 7] \setminus (-3; 5]$; $\mathcal{A}$ (5;7]

Bài 5. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

◇ A: “Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng”.

◇ B: “Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm A(3;6)”.

$\mathcal{A}$ $\bar{A}$ sai; $\bar{B}$ đúng

Bài 6. Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 7\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}$ và

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 6\}.$$

a) Chứng minh rằng $A \subset E$ và $B \subset E$.

b) Tìm $C_E A; C_E B; C_E (A \cup B)$.

$\mathcal{A}$ $C_E A = \{1; 2; 4; 5\}$; $C_E B = \{1; 4; 6\}$; $C_E (A \cup B) = \{1; 4\}$

c) Chứng minh rằng: $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Bài 7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) A: “ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > \frac{1}{n}$ ”;

b) B: “ $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 3 = 0$ ”;

c) C: “ $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$ ”;

d) D: “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3”.

$\mathcal{A}$ $\bar{A}$ đúng; $\bar{B}$ đúng; $\bar{C}$ sai; $\bar{D}$ sai

Bài 8. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -4\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

$\mathcal{A}$ $A = (-7; -4)$; $B = [-3; 1]$; $C = (-\infty; 0]$; $D = (-1; +\infty)$

Bài 9. Viết các tập hợp sau đây dưới dạng liệt kê các phần tử:

a) $A = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 10 - x^2, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 \geq 0 \text{ và } 7 - x \geq 2\}$;

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{6-x} \in \mathbb{N}\right\}$;

d) $D = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + 2y = 8\}$.

◇ **Câu 16.** Cho hai tập hợp $A = [m - 3; m + 2]$, $B = (-3; 5)$ với $m \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để $A \cap B$ khác tập rỗng. $\mathcal{A}$ 18

Bài 10. Cho tập hợp $A = [m - 3; m + 2]$, $B = (-2; 5]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $A \subset B$. $\mathcal{A}$ 2

Bài 11. Cho hai tập hợp $A = [a; 5]$ và $B = [-2; 3]$, với $a < 5$. Số a cần thỏa mãn điều kiện gì để $A \cap B = \emptyset$? $\mathcal{A}$ $3 < a < 5$

Bài 12. Cho tập $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 2)(4x^2 + 5x + 1) = 0\}$; với m là số thực, xét tập

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (3m + 1)x + 3m = 0\}.$$

Tìm m để $D \cup E$ có đúng 3 phần tử và tổng bình phương của chúng bằng 6. $\mathcal{A}$ $m = -\frac{1}{3}$

Bài 13. Một lớp học có 25 học sinh chơi bóng đá, 23 học sinh chơi bóng bàn, 14 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bàn, 6 học sinh không chơi môn thể thao nào. Tìm số học sinh của lớp?

40

Bài 14. Thống kê tại một trung tâm mua sắm gồm 46 cửa hàng, với 26 cửa hàng có bán quần áo, 16 cửa hàng có bán giày và 34 cửa hàng bán ít nhất một trong hai mặt hàng này. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cửa hàng bán cả quần áo và giày?

8

b) Có bao nhiêu cửa hàng chỉ bán một trong hai loại quần áo hoặc giày?

26

c) Có bao nhiêu cửa hàng không bán cả hai loại hàng hóa trên?

12

Bài 15. Trong kì thi chọn học sinh giỏi các môn văn hóa, lớp 10A có 7 học sinh đăng kí thi môn Toán, 5 học sinh đăng kí thi môn Vật Lí, 6 học sinh đăng kí thi môn Hóa học; trong đó có 3 học sinh đăng kí thi cả Toán và Vật lí, 4 học sinh đăng kí thi cả Toán và Hóa học, 2 học sinh đăng kí thi Vật lí và Hóa học, 1 học sinh đăng kí thi cả ba môn. Hỏi lớp 10A có tất cả bao nhiêu học sinh đăng kí thi học sinh giỏi các môn Toán, Lí, Hóa.

10

Bài 16. Trong đợt khảo sát nghề, giáo viên chủ nhiệm lớp 10D đưa ra ba nhóm ngành cho học sinh lựa chọn, đó là: Giáo dục, Y tế, Công nghệ thông tin. Học sinh có thể chọn từ một đến ba nhóm ngành nêu trên hoặc không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm ngành trên. Giáo viên chủ nhiệm thống kê theo từng nhóm ngành và được kết quả: có 6 học sinh chọn nhóm ngành Giáo dục, 9 học sinh chọn nhóm ngành Y tế, 10 học sinh chọn nhóm ngành Công nghệ thông tin, 22 học sinh không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm trên. Nếu thống kê số lượng học sinh chọn theo từng hai nhóm ngành được kết quả: có 3 học sinh chọn hai nhóm ngành Giáo dục và Y tế, 2 học sinh chọn hai nhóm ngành Y tế và Công nghệ thông tin, 3 học sinh chọn hai nhóm ngành Giáo dục và Công nghệ thông tin. Hỏi có bao nhiêu học sinh chọn cả ba nhóm ngành nêu trên biết lớp 10D có 40 học sinh?

1

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	B	2	B	3	D	4	C	5	C	6	B	8	A	9	C	10	C	11	D
12	A	13	A	14	D	15	D	16	A	17	B	18	D	19	B	20	A	21	A
22	C	23	C	24	A	25	B	26	D	27	A	28	C	29	D	30	B	31	C
32	A	33	A	34	B	35	D	36	C	37	A	38	A	39	B	40	B	41	D
42	A	43	D	44	B	45	A												

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
Câu 3.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 4.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 9.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 11.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 12.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 13.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S	Câu 14.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 15.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S		

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (ax + by \geq c, ax + by < c, ax + by > c) \quad (1)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho; a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

2) Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một **nghiệm** của bất phương trình đã cho.



🔔 Lưu ý. Nghiệm của các bất phương trình

$$ax + by + c > 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0$$

được định nghĩa tương tự.

3) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ



♦ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.

◇ Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng toạ độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d .

☆ Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn $ax + by > c$;

☆ Nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ d) gồm các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn $ax + by < c$.

☆ Bờ d gồm các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn $ax + by = c$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Các khái niệm về bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (ax + by \geq c, ax + by < c, ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho; a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một **nghiệm** của bất phương trình đã cho. Nghiệm của các bất phương trình

$$ax + by + c > 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0$$

được định nghĩa tương tự.

◇ Ví dụ 1

Bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y ?

a) $2x - 3y + 1 < 0$;

b) $-x - y + 1 \geq 0$;

c) $x + y^2 - 1 > 0$.

◇ Ví dụ 2

Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \geq 0$?

a) $(9; 1)$

b) $(2; 6)$

c) $(0; -4)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $3x + 4y < 5$;

b) $-x + 3y \leq 1$;

c) $3x - xy \geq 5$.

d) $3x^2 + 4y < 5$.

Bài 2



Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-5x + 2y > 10$?

① $(-2; 1)$.

② $(1; 5)$.

③ $(0; 5)$.

Dạng

2

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

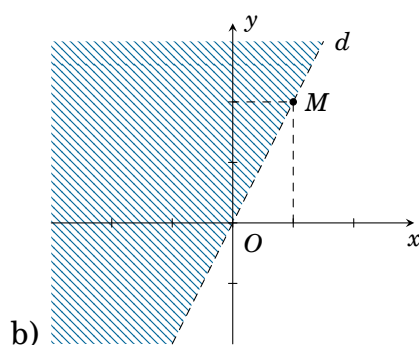
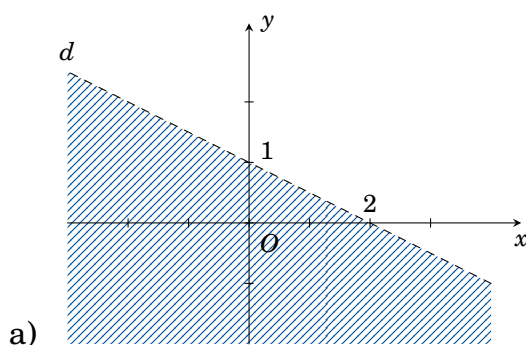
- ◇ Bước 1. Vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.
- ◇ Bước 2. Lấy một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc tọa độ O nếu $c \neq 0$). Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c .
- ◇ Bước 3. Kết luận
 - ☆ Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.
 - ☆ Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Ví dụ 3

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 3$.

Ví dụ 4

Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi hình sau là miền nghiệm của bất phương trình nào?



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $x - 2y + 5 > 0;$

b) $x + 2y \leq 0;$

c) $y \geq 2;$

d) $x \leq 4.$

❖ Ví dụ 5

Cho biết mỗi 100 g thịt bò chứa khoảng 26,1 g protein, một quả trứng nặng 44 g chứa khoảng 5,7 g protein (nguồn: <https://www.vinmec.com>). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số quả trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x và y .

a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein trong khẩu phần ăn hằng ngày của người đó.

$0,261x + 5,7y \leq 60$

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

- ◇ Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?
- ◇ Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?

❖ Ví dụ 6

Bác An trồng hai loại hoa gồm hoa hồng và hoa ly để bán vào dịp Tết Nguyên đán. Hoa hồng có giá 80000 đồng/chậu, hoa ly có giá 120000 đồng/chậu. Bác An tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền bán hoa thu được phải đạt tối thiểu 30 triệu đồng. Hỏi số lượng chậu hoa bán được trong những trường hợp nào thì bác An không phải bù lỗ?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60m^2 . Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5\text{m}^2$, một chiếc bàn là $1,2\text{m}^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

- a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12m^2 . 🔗 $0,5x + 1,2y \leq 48$

- b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Nhân ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11, Công viên nước Đầm Sen và Công đoàn ngành giáo dục Thành phố Hồ Chí Minh tổ chức hội thi đua thuyền rồng dành cho giáo viên của tất cả các trường THPT trên địa bàn và được tổ chức tại Đầm Sen. Vé vào cổng được bán ra cho giáo viên và học sinh có hai loại:

- ◆ Loại 1 (dành cho học sinh): 20 000 đồng/vé;

- ◆ Loại 2 (dành cho giáo viên): 30 000 đồng/vé.

Công ty công viên nước Đầm Sen tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được khi vào cổng này phải đạt tối thiểu 30 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì công viên nước Đầm Sen phải bù lỗ?

Bài 6



Hà, Châu, Liên và Ngân cùng đi mua trà sữa. Cả bốn bạn có tất cả 185 nghìn đồng. Bốn bạn mua 4 cốc trà sữa với giá tiền 35 nghìn đồng một cốc. Các bạn gọi thêm trân châu cho vào trà sữa. Một phần trân châu đen có giá 5 nghìn đồng, một phần trân châu trắng có giá 10 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số phần trân châu đen, trân châu trắng mà bốn bạn định mua thêm.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trân châu đen, trắng.

$x + 2y \leq 9$

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1

Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $2x^2 + 3y > 0$. (B) $x^2 + y^2 < 2$. (C) $x + y^2 \geq 0$. (D) $x + y \geq 0$.

❖ **Câu 2.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào **không phải** là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $2x + 3y > 0$. (B) $x + y^2 \leq 7$. (C) $x + 2 \geq 0$. (D) $x - y > 0$.

❖ **Câu 3.** Bất phương trình $x + 2y \leq 3$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 1. (B) 2. (C) Vô nghiệm. (D) Vô số nghiệm.

❖ **Câu 4.** Tìm cặp số là nghiệm của bất phương trình $-2x + 3y - 5 > 0$.

- (A) $(-1; 1)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(0; 0)$. (D) $(3; 1)$.

❖ **Câu 5.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $x + 2y - 3 > 0$.

- (A) $(-2; 3)$. (B) $(-1; 4)$. (C) $(4; 0)$. (D) $(-1; 0)$.

❖ **Câu 6.** Cặp số $(1; -1)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- (A) $x + y - 3 > 0$. (B) $-x - y < 0$. (C) $x + 3y + 1 < 0$. (D) $-x - 3y - 1 < 0$.

❖ **Câu 7.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-2(x - y) + y > 3$?

- (A) $(4; -4)$. (B) $(2; 1)$. (C) $(-1; -2)$. (D) $(-4; 4)$.

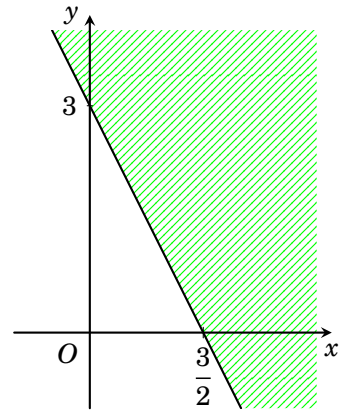
❖ **Câu 8.** Cho đường thẳng $d: 7x - 9y + 2 = 0$ chia mặt phẳng toạ độ làm hai nửa mặt phẳng, trong đó miền nghiệm của bất phương trình $7x - 9y + 2 > 0$ là nửa mặt phẳng

- (A) có bờ là đường thẳng d và không chứa điểm $O(0; 0)$.

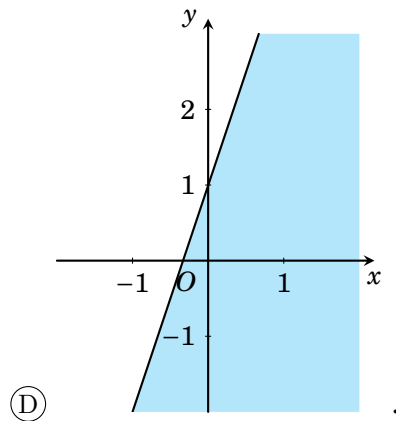
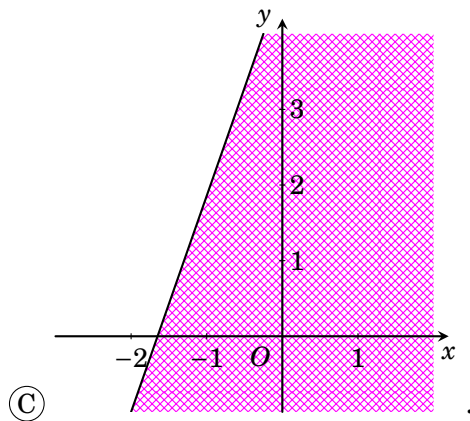
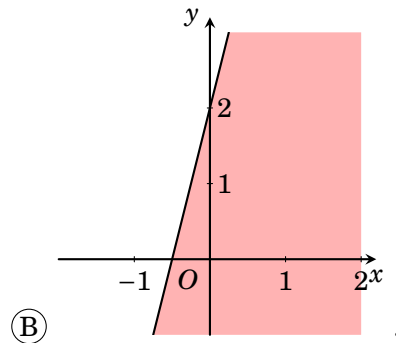
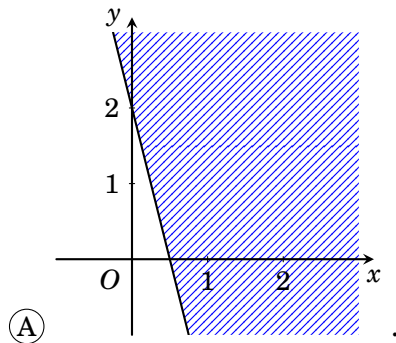
- Ⓐ không có bờ d và chứa điểm $O(0;0)$.
 Ⓑ có bờ là đường thẳng d và chứa điểm $O(0;0)$.
 Ⓒ không chứa bờ d và không chứa điểm $O(0;0)$.

❖ **Câu 9.** Phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới là miền nghiệm của bất phương trình nào?

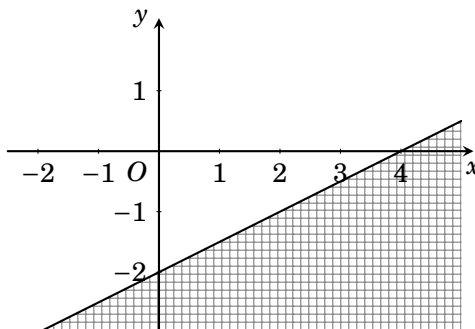
- Ⓐ $2x + y < 3$. Ⓑ $2x + y > 3$. Ⓒ $x + 2y < 3$. Ⓓ $x + 2y > 3$.



❖ **Câu 10.** Miền nghiệm của bất phương trình sau $3x - y + 1 \geq 0$ là phần tô đậm của hình vẽ nào dưới đây?



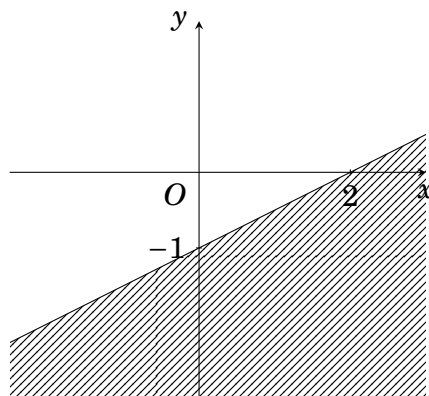
❖ **Câu 11.** Phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới là miền nghiệm của bất phương trình



- Ⓐ $2x - 4y < 8$. Ⓑ $2x - 4y > 8$. Ⓒ $2x - 4y > -5$. Ⓓ $2x - 4y > -3$.

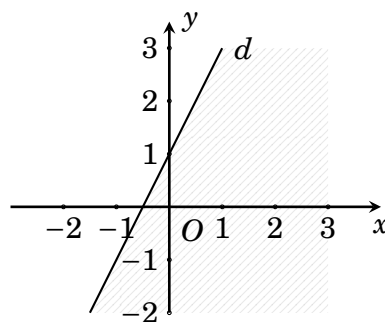
❖ **Câu 12.** Phần gạch chéo trong hình vẽ dưới đây (không bao gồm đường thẳng d) là miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn nào sau đây?

- (A) $2x - y < 0$. (B) $x - 2y < 2$.
(C) $2y - x < -2$. (D) $2x - y > 1$.

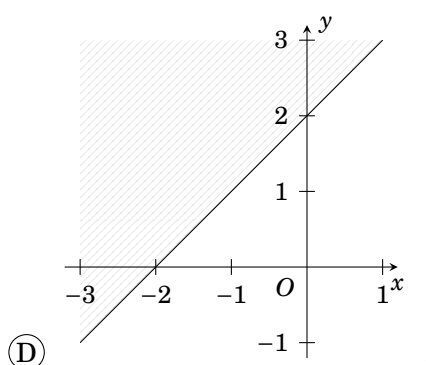
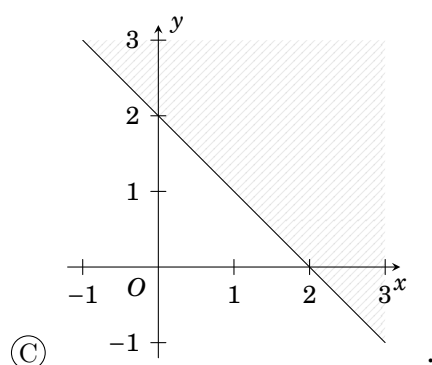
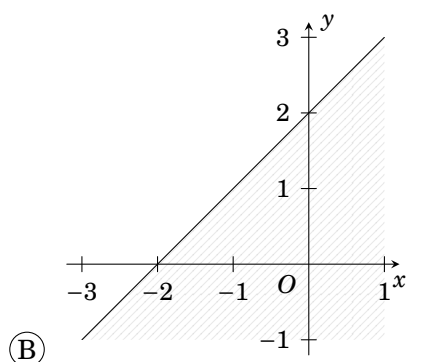
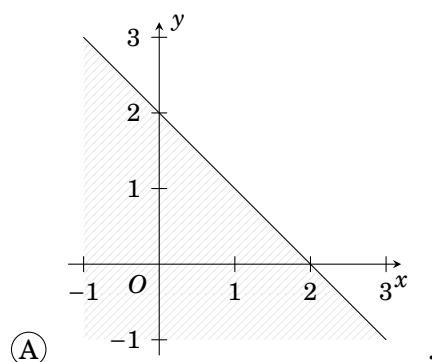


❖ **Câu 13.** Bất phương trình nào sau đây có miền nghiệm (phần không gạch sọc) như hình vẽ bên?

- (A) $2x - y + 1 < 0$. (B) $x - y + 1 < 0$.
(C) $2x - 3y + 1 < 0$. (D) $2x - y - 1 < 0$.



❖ **Câu 14.** Miền nghiệm của bất phương trình $x + y \leq 2$ là phần không bị gạch sọc của hình vẽ nào trong các hình sau?

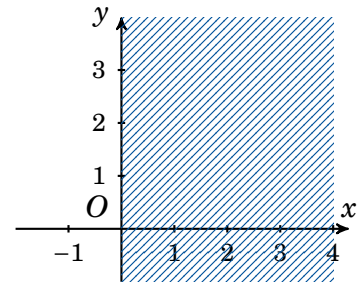


❖ **Câu 15.** Cho bất phương trình $2x + 3y - 2 < 0$. Miền nghiệm của bất phương trình là

- (A) nửa mặt phẳng chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (không kể bờ).
(B) nửa mặt phẳng chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (kể cả bờ).
(C) nửa mặt phẳng không chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (không kể bờ).
(D) nửa mặt phẳng không chứa điểm O có bờ là đường thẳng $2x + 3y - 2 = 0$ (kể cả bờ).

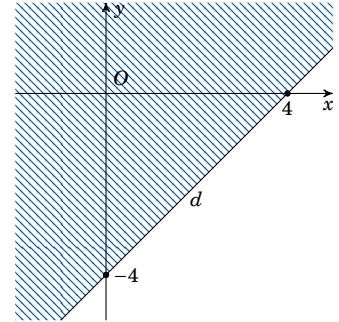
❖ **Câu 16.** Hình vẽ sau có phần không tô và cả trục Oy là miền nghiệm của một trong bốn bất phương trình dưới đây. Hãy tìm bất phương trình đó.

- (A) $x \geq 0$. (B) $x \leq 0$.
(C) $y \geq 0$. (D) $y \leq 0$.



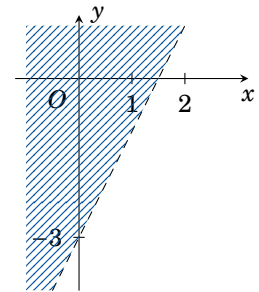
❖ **Câu 17.** Hãy chọn bất phương trình mà miền nghiệm của nó là nửa mặt phẳng không bị gạch có bờ là đường thẳng d như hình bên.

- (A) $x - y > 4$. (B) $x - y < 4$. (C) $x - y \leq 4$. (D) $x - y \geq 4$.

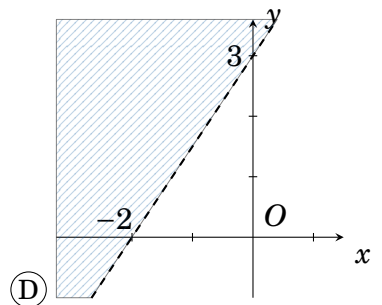
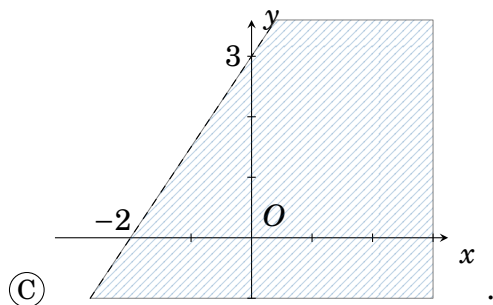
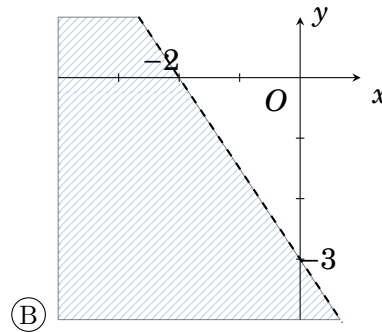
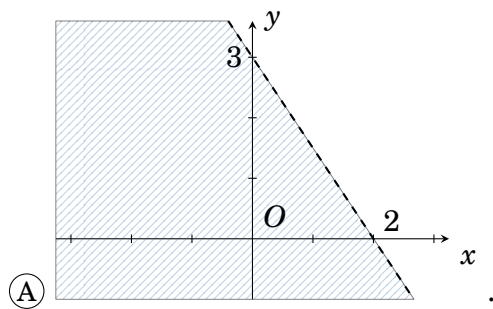


❖ **Câu 18.** Phần không bị gạch trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?

- (A) $x - 2y < 3$. (B) $2x - y > 3$.
(C) $x - 2y > 3$. (D) $2x - y < 3$.



❖ **Câu 19.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x - 2y < -6$ (phần không bị gạch) được biểu diễn bởi hình nào sau đây?



❖ **Câu 20.** Tìm m để $mx - 3y < 2$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $m \neq 0$. (C) $m > 0$. (D) $m < 0$.

❖ **Câu 21.** Tìm tất cả các số thực a sao cho miền nghiệm của bất phương trình $x \leq a$ chứa điểm $M(-1; 0)$.

- (A) $a > -1$. (B) $a \geq -1$. (C) $a > 0$. (D) $a \geq 0$.

❖ **Câu 22.** Bạn Lan có 15 nghìn đồng để đi mua vở. Vở loại A có giá 3000 đồng một cuốn, vở loại B có giá 4000 đồng một cuốn. Hỏi bạn Lan có thể mua nhiều nhất bao nhiêu quyển vở sao cho bạn có cả hai loại vở?

- (A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) 6.

❖ **Câu 23.** Nhu cầu canxi tối đa cho một người cao tuổi trong một ngày là 1500 mg. Trong 100 g đậu nành có 165 mg canxi, 100 g thịt có 15 mg canxi. Gọi $x, y (x, y \in \mathbb{N})$ lần lượt là số gam đậu nành và số gam thịt mà một người cao tuổi ăn trong một ngày. Hỏi x, y phải thỏa mãn điều kiện gì để lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người cao tuổi không vượt quá mức tối đa?

- (A) $1,65x + 0,15y \leq 1500$. (B) $165x + 15y < 1500$.
(C) $1,65x + 0,15y = 1500$. (D) $165x + 15y \leq 1500$.

❖ **Câu 24.** Để chuẩn bị đồ dùng học tập cho năm học mới, mẹ cho Hoa 100000 đồng để đi mua dụng cụ học tập. Sau khi lên danh sách đồ dùng còn thiếu, Hoa quyết định đi mua x chiếc bút và y sổ vở để ghi chép. Biết giá tiền của một chiếc bút là 5000 đồng và giá tiền một cuốn vở là 7000 đồng. Hỏi x, y phải thỏa mãn điều kiện gì để bạn Hoa có thể mua đảm bảo đủ đồ dùng cho học tập?

- (A) $5x + 7y = 100$. (B) $7x + 5y \leq 100$. (C) $5x + 7y < 100$. (D) $5x + 7y \leq 100$.

❖ **Câu 25.** Trong 1 lạng (100g) thịt bò chứa khoảng 26g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20g protein. Trung bình trong một ngày, một gia đình cần tối thiểu 460g protein. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và cá rô phi mà một gia đình nên ăn trong một ngày. Hỏi lượng cá rô phi và thịt bò trong một ngày gia đình cần ăn là bao nhiêu để đủ lượng protein tối thiểu?

- (A) $13x + 10y \geq 460$. (B) $13x + 10y \geq 230$. (C) $10x + 13y \geq 460$. (D) $26x + 20y \geq 460$.

❖ **Câu 26.** Công ty viễn thông Viettel có gói cước Hi School tính phí là 1190 đồng mỗi phút gọi nội mạng và 1390 đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Một bạn học sinh đăng kí gói cước trên và sử dụng x phút gọi nội mạng, y phút gọi ngoại mạng trong một tháng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để mô tả số tiền bạn đó phải trả trong một tháng ít hơn 100 nghìn đồng.

- (A) $119x + 139y \geq 10000$. (B) $139x + 119y < 10000$.
(C) $119x + 139y \leq 10000$. (D) $119x + 139y < 10000$.

❖ **Câu 27.** Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Gọi x, y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa trong mỗi tuần. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y sao cho Nam kiếm thêm tiền mỗi tuần được ít nhất là 900 nghìn đồng.

- (A) $3x + 2y \leq 180$. (B) $3x + 2y > 180$.
(C) $3x + 2y \geq 180$. (D) $3x + 2y < 180$.

❖ **Câu 28.** Anh A muốn thuê một chiếc ô tô (có người lái) trong một tuần. Giá thuê xe như sau: từ thứ hai đến thứ sáu phí cố định là 900 nghìn đồng/ngày và phí tính theo

quãng đường di chuyển là 10 nghìn đồng/km còn thứ bảy và chủ nhật thì phí cố định là 1200 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 15 nghìn đồng/km. Gọi x, y lần lượt là số km mà anh A đi trong các ngày từ thứ hai đến thứ sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền anh A phải trả không quá 20 triệu đồng.

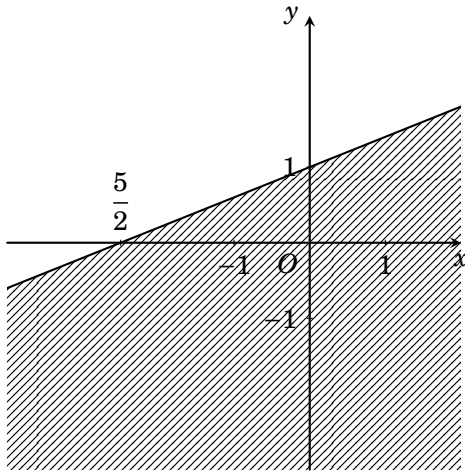
- (A) $10x + 15y \leq 20000$. (B) $2x + 3y \geq 2720$. (C) $10x + 15y \geq 20000$. (D) $2x + 3y \leq 2720$.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

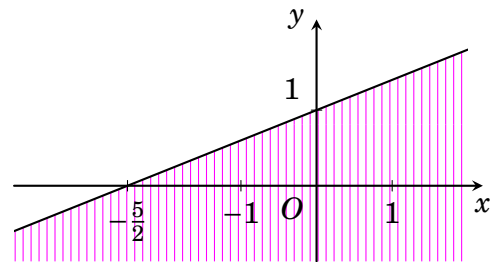
❖ **Câu 1.** Cho bất phương trình $2x - 5y > 5$ (1).

- a) Bất phương trình (1) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
 b) Cặp số $(x, y) = (1, 1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).
 c) Bất phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.
 d) Miền không được tô đậm (không kể bờ d) trong hình sau là miền nghiệm của bất phương trình (1)



❖ **Câu 2.** Cho bất phương trình $2x - 5y > 5$. (1)

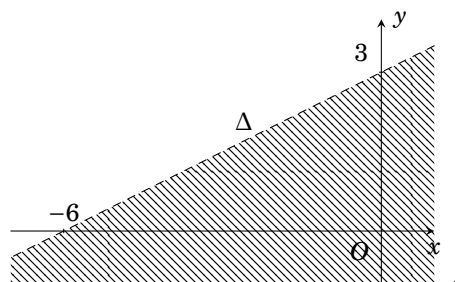
- a) Bất phương trình (1) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
 b) Cặp số $(x, y) = (1, 1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).
 c) Bất phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.
 d) Miền không được tô đậm (không kể bờ d) trong hình vẽ là miền nghiệm của bất phương trình (1).



❖ **Câu 3.** Cho bất phương trình hai ẩn $x - 2y + 6 > 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

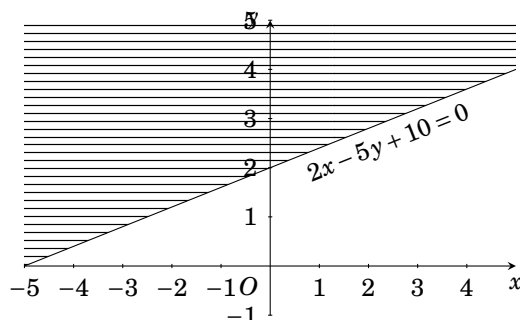
- a) Bất phương trình có vô số nghiệm.
 b) Bộ số $(0; 0)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
 c) Bộ số $(0; 3)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

- d)** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình là miền không gạch chéo (không kể bờ Δ) như hình bên dưới



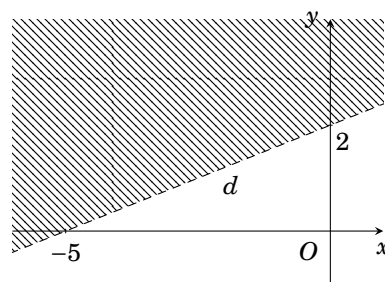
❖ **Câu 4.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 5y + 10 \geq 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Bộ số $(1; 3)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Bộ số $(1; 1)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Bộ số $(2; 2)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng Oxy như hình bên dưới (miền không gạch chéo, kể cả bờ)



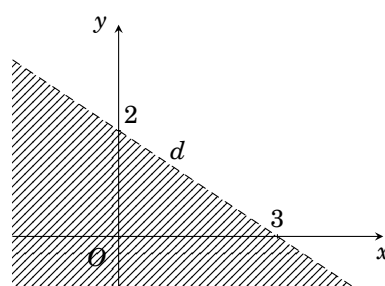
❖ **Câu 5.** Cho một bất phương trình bậc nhất hai ẩn có miền nghiệm là miền không gạch chéo (không kể bờ d) như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Điểm $(-5; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Điểm $(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Phương trình đường thẳng d là $-2x + 5y - 10 = 0$.
- Bất phương trình đã cho là $-2x + 5y - 10 < 0$.



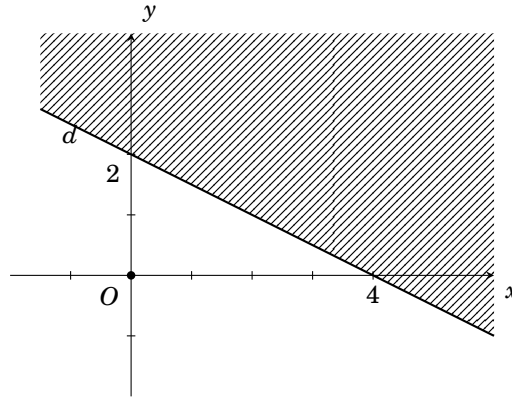
❖ **Câu 6.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn có miền nghiệm là miền không gạch chéo (không kể bờ d) như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Điểm $(3; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Điểm $(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Phương trình đường thẳng d là $2x + 3y - 6 = 0$.
- Bất phương trình đã cho là $2x + 3y - 6 < 0$.



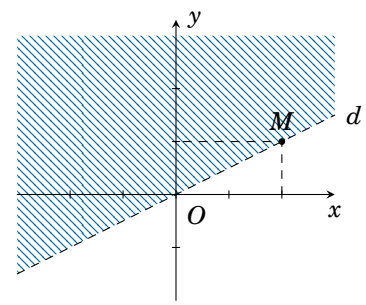
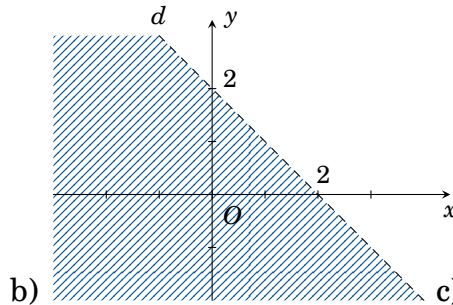
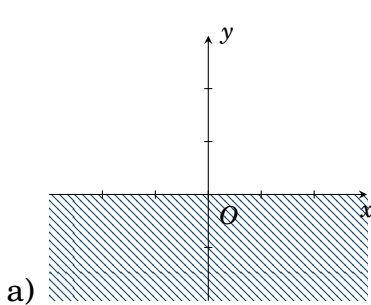
❖ **Câu 7.** Cho bất phương trình $3(x - 1) + 4(y - 2) < x - 3$ (1). Khi đó

- a) Bất phương trình (1) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- b) Điểm $B(-2; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).
- c) Miền nghiệm của bất phương trình (1) chứa gốc tọa độ.
- d) Miền không tô đậm, không kể bờ là miền nghiệm của bất phương trình (1).



3 Tự luận.

❖ **Bài 1.** Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi hình sau là miền nghiệm của bất phương trình nào?



❖ **Bài 2.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|----------------------|
| a) $x - 2y - 1 > 0$; | b) $x + y - 1 \leq 0$; | c) $3x - y \leq 0$; |
| d) $-x + y + 2 > 0$; | e) $y + 2 \geq 0$; | f) $-x + 2 \leq 0$. |

❖ **Bài 3.** Hà mang 95000 đồng ra chợ mua hoa cúc và hoa hồng. Một bông hoa cúc có giá 4000 đồng, một bông hoa hồng có giá 7000 đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà Hà phải chi để mua x bông hoa cúc và y bông hoa hồng. 🔗 $4x + 7y \leq 95$

❖ **Bài 4.** Một rạp chiếu phim 2D phục vụ khán giả một bộ phim mới với 2 loại vé khác nhau. Vé loại 1 (từ thứ 2 đến thứ 5) giá 80000 đồng/vé, vé loại 2 (từ thứ 6 đến chủ nhật và ngày lễ) giá 100000 đồng/vé. Để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 150 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

❖ **Bài 5.** Giá sách của Hoa có thể chứa được khối lượng sách tối đa là 4 kg. Hoa xếp cả hai loại sách (loại 1 và loại 2) vào giá. Sách loại 1 có khối lượng 100 gam mỗi cuốn và sách

loại 2 có khối lượng 200 gam mỗi cuốn. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho khối lượng của x cuốn loại 1 và y cuốn loại 2 có thể được xếp lên giá sách. $x + 2y \leq 40$

Bài 6. Một công ty trách nhiệm hữu hạn cần thuê xe chở 140 người. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó loại xe A có 10 chiếc, loại xe B có 10 chiếc. Biết xe A chở tối đa 20 người, xe B chở tối đa 10 người. Gọi x, y lần lượt là số xe hai loại A, B cần thuê. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn số xe cần thuê cho công ty và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó. $2x + y \geq 14$

Bài 7. Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

- a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thỏa mãn điều kiện đề bài. $3x - y \geq 0$
- b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	D	2	B	3	D	4	B	5	D	6	C	7	D	8	B	9	B	10	D
11	B	12	C	13	A	14	C	15	A	16	B	17	D	18	B	19	B	20	A
21	B	22	C	23	A	24	D	25	B	26	D	27	C	28	D				

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a S b S c S d S	Câu 2.	a Đ b S c S d Đ
Câu 3.	a Đ b Đ c S d S	Câu 4.	a S b S c S d S
Câu 5.	a S b Đ c Đ d Đ	Câu 6.	a Đ b S c Đ d S
Câu 7.	a Đ b Đ c Đ d Đ		

§2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn



- ① Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- ② Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

2) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ



Để biểu diễn miền nghiệm của hệ ta làm như sau

- ◇ Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- ◇ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- ◇ Cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ.
 - ☆ Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
 - ☆ Xác định miền không bị gạch bỏ - đó là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

3) Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

- Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.
- Người ta chứng minh được $F = ax + by$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Các khái niệm về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Nhận dạng được hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và nghiệm.

❖ Ví dụ 1

Cho hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 4x + 5y + 20 > 0 \\ y \leq 0 \\ x - 3y - 18 < 0. \end{cases}$$

- a) Hệ trên có phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?
b) Cặp số $(x; y) = (0; 0)$ có là một nghiệm của hệ bất phương trình trên không?
Tìm thêm 3 nghiệm khác của hệ bất phương trình trên.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cặp số $(1; -2)$ có là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau đây không?

$$\begin{cases} y + 2 > 0 \\ x - 2 \leq 0 \\ 2y - 6 < 0. \end{cases}$$

Dạng

2

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ❖ Viết các bất phương trình trong hệ dưới dạng phương trình đường thẳng (thay dấu lớn, bé bởi dấu bằng).
- ❖ Vẽ các đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ.
- ❖ Xác định một điểm M thỏa các bất phương trình trong hệ.
- ❖ Lần lượt tô đậm các nửa mặt phẳng không chứa M và có bờ là các đường thẳng đã vẽ. Ta được miền nghiệm của hệ.

❖ Ví dụ 2

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Ví dụ 3

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ

$$\begin{cases} x - y + 1 < 0 & (1) \\ 2x - y + 4 > 0 & (2) \\ x + y - 4 < 0. & (3) \end{cases}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2



Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2. \end{cases}$$

Bài 3



Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y > 1 \\ y > -1. \end{cases}$$

Dạng

3

Ứng dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn giải bài toán tối ưu

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = ax + by$ với $(x; y)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước ta làm như sau

- ◇ Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường thu được là một đa giác.
- ◇ Tính giá trị F tương ứng với $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.
- ◇ Kết luận:
 - ☆ Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
 - ☆ Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.



Ta thừa nhận kết quả: Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $T(x; y) = ax + by$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác.

❖ Ví dụ 4

Một công ty cần thuê xe vận chuyển ít nhất 140 người và 9 tấn hàng hoá. Nơi cho thuê xe có hai loại: A và B. Một chiếc xe loại A có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng hoá. Một chiếc xe loại B có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng hoá. Gọi x là số xe loại A và y là số xe loại B mà công ty này thuê.

- a) Viết một hệ bất phương trình ẩn x, y thỏa mãn tất cả các điều kiện đã cho.
- b) Giải bài toán bằng cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó và xác định tọa độ các đỉnh của miền nghiệm này.
- c) Giả sử chi phí thuê một chiếc xe loại A là 4 triệu đồng, loại B là 3 triệu đồng. Công ty này phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí là thấp nhất?

Ví dụ 5

Một cửa hàng điện tử dự định kinh doanh hai loại tivi: loại 50 inch và loại 55 inch với số vốn ban đầu không vượt quá 1,8 tỉ đồng. Giá nhập và lợi nhuận dự kiến của mỗi loại tivi được cho trong bảng sau:

Số tiền	Loại Tivi	
	Ti vi 50 inch	Ti vi 55 inch
Giá nhập vào (triệu đồng/1 máy)	15	25
Lợi nhuận dự kiến (triệu đồng/1 máy)	2	3

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu tiêu thụ của thị trường sẽ không vượt quá 100 chiếc tivi cả hai loại. Tính số lượng tivi mỗi loại mà cửa hàng nên nhập về để lợi nhuận thu được (sau khi bán hết hàng nhập về) là lớn nhất.

 70 chiếc tivi loại 50 inch và 30 chiếc tivi loại 55 inch

🔗 Ví dụ 6

Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất?

🔗 40

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4



Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất?

🔗 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn

Bài 5



Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Trong các hệ bất phương trình sau, hệ bất phương trình nào **không** phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

(A) $\begin{cases} y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 5 \end{cases}$
 (B) $\begin{cases} x > 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 \leq 0 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} x^2 - y \leq 2 \\ 4x + 5y \leq 1 \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} x - y > 3 \\ 1 - \frac{1}{2}x + y > 0 \end{cases}$

❖ **Câu 2.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2y - 3 < 0 \\ 2x + y - 2 > 0 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho?

(A) $Q(-1; -5)$.
 (B) $N(2; 2)$.
 (C) $P(3; -1)$.
 (D) $M(2; 3)$.

❖ **Câu 3.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} y \geq 0 \\ 3x + 2y - 6 < 0 \end{cases}$ có miền nghiệm là S và bốn điểm $O(0; 0)$, $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(-1; 3)$. Có bao nhiêu điểm thuộc S ?

(A) 1.
 (B) 2.
 (C) 3.
 (D) 4.

❖ **Câu 4.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y < -3 \\ 2x > 4 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

- (A) (3; -7). (B) (3; 0). (C) (3; 7). (D) (0; 7).

❖ **Câu 5.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y \geq 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau?

- (A) (1; -3). (B) (-2; 1). (C) (3; -2). (D) (4; 1).

❖ **Câu 6.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + y \geq -1 \\ x - y < -2 \end{cases}$ **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

- (A) (5; 8). (B) (6; 9). (C) (4; 7). (D) (3; 4).

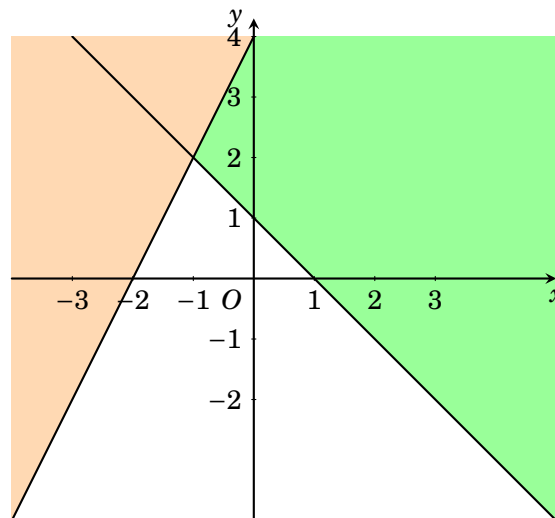
❖ **Câu 7.** Điểm $M(0; -3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- (A) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} 2x - y > -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$

❖ **Câu 8.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

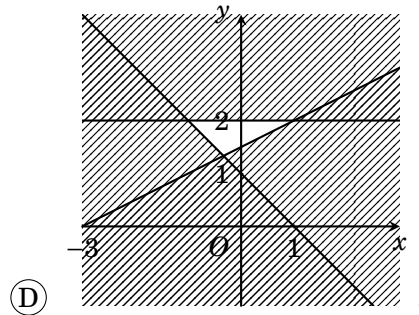
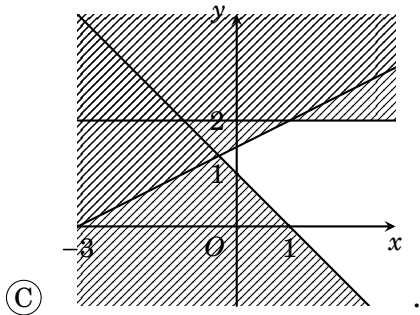
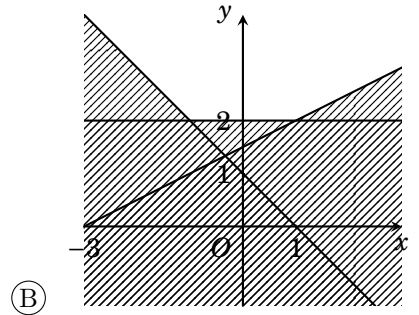
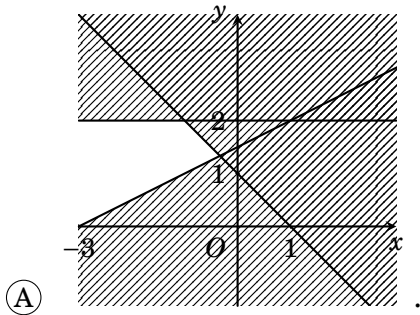
- (A) $O(0; 0)$. (B) $M(1; 1)$. (C) $N(-1; 1)$. (D) $P(-1; -1)$.

❖ **Câu 9.** Miền không bị gạch chéo (kể cả đường thẳng d_1 và d_2) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

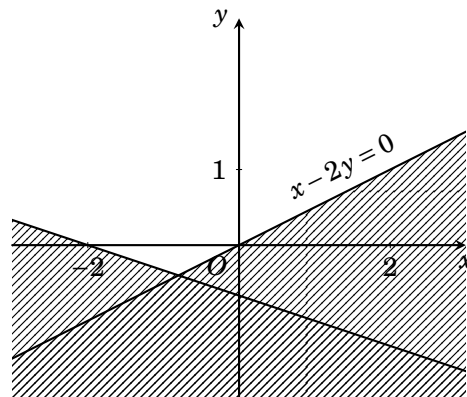


- (A) $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$

❖ **Câu 10.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y \geq 2 \\ -x + 2y > 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



❖ **Câu 11.** Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây, biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



(A) $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < -2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y < -2 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \end{cases}$

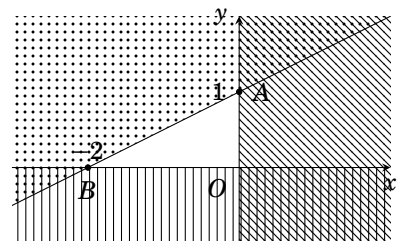
❖ **Câu 12.** Miền tam giác OAB là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

(A) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq -2 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x - 2y \geq 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \geq -2 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \geq -2 \end{cases}$



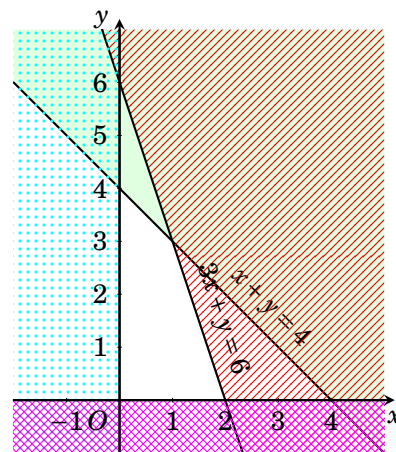
❖ **Câu 13.** Miền không bị gạch chéo trong hình bên dưới là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

(A)
$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

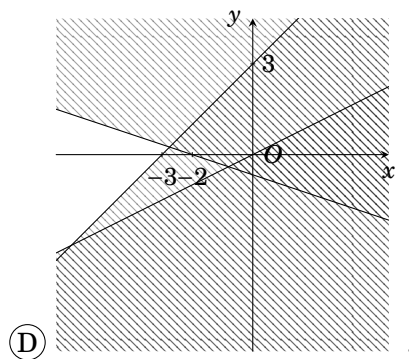
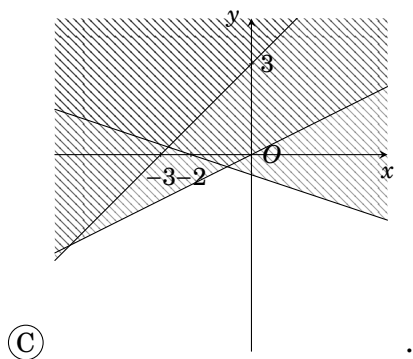
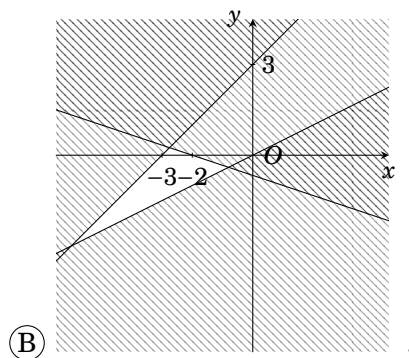
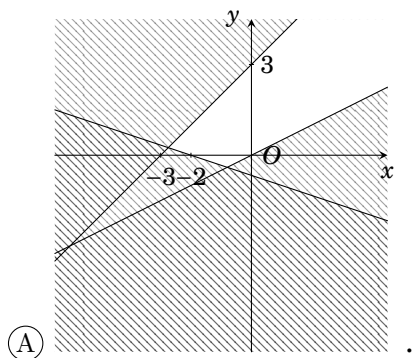
(B)
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(C)
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

(D)
$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

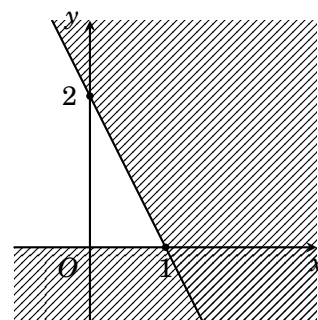


❖ **Câu 14.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$
 là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?

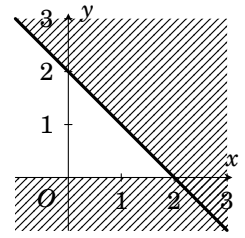


❖ **Câu 15.** Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?

(A)
$$\begin{cases} y > 0 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$$
 (B)
$$\begin{cases} y > 0 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$$
 (C)
$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$$
 (D)
$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2y > 2 \end{cases}$$

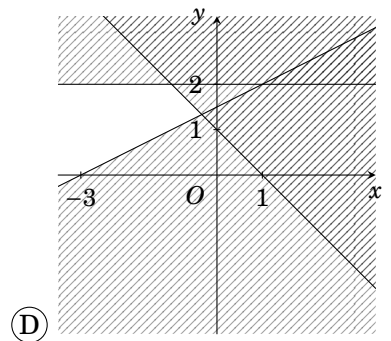
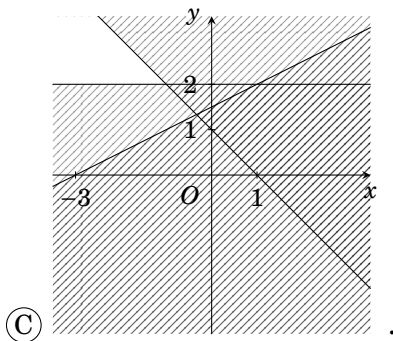
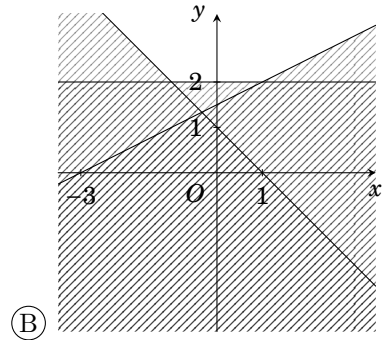
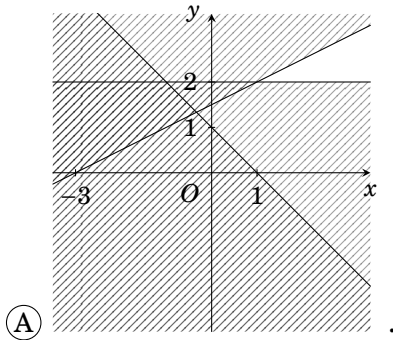


❖ **Câu 16.** Phần mặt phẳng không bị gạch, kể cả phần biên của nó trên đường thẳng $y = 0$ trong hình vẽ bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?



- (A) $\begin{cases} y \leq 0 \\ 2x + y > 1. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x + y < 2 \\ y \geq 0. \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2x - 2y > 6 \\ 2x + y \geq 1. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y \leq 0 \\ x + y < 1. \end{cases}$

❖ **Câu 17.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y \geq 2 \\ -x + 2y > 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



❖ **Câu 18.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là

- (A) $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$. (B) $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.
(C) $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$. (D) $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

❖ **Câu 19.** Biểu thức $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm

M có tọa độ là

- (A) $(4; 1)$. (B) $(\frac{8}{3}; \frac{7}{3})$. (C) $(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$. (D) $(5; 0)$.

❖ **Câu 20.** Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ trên miền xác định bởi hệ

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases} \quad \text{là}$$

(A) $F_{\max} = 6$.

(B) $F_{\max} = 8$.

(C) $F_{\max} = 10$.

(D) $F_{\max} = 12$.

❖ **Câu 21.** Xét x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất M

của biểu thức $F = 3x + 2y$.

(A) $M = 8$.

(B) $M = 10$.

(C) $M = 6$.

(D) $M = 9$.

❖ **Câu 22.** Xét x, y thỏa mãn hệ điều kiện $\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ 3x + 8y - 24 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức $F(x; y) = x - y - 1$.

(A) 5.

(B) 7.

(C) 6.

(D) 8.

❖ **Câu 23.** Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có tối thiểu 5 lần thực hành sau giờ học. Gọi x là điểm trung bình các môn học và y là số lần thực hành sau giờ học, hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống này.

(A) $\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 5 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 5 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x < 7 \\ y < 5 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x > 7 \\ y > 5 \end{cases}$

❖ **Câu 24.** Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Nam không thể làm thêm việc nhiều hơn 15 giờ mỗi tuần. Gọi x, y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa. Hệ bất phương trình nào sau đây xác định số giờ để làm mỗi việc nếu Nam muốn kiếm được ít nhất 100 nghìn đồng mỗi tuần?

(A) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 15 \\ 15x + 10y \geq 100 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 15 \\ 15x + 10y > 100 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 15 \\ 15x + 10y \geq 100 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y > 15 \\ 15x + 10y < 100 \end{cases}$

❖ **Câu 25.** Một công ty cần mua các tủ đựng hồ sơ. Có hai loại tủ: Tủ loại A chiếm 3 m² sàn, loại này có sức chứa 12 m³ và có giá 7,5 triệu đồng; tủ loại B chiếm 6 m² sàn, loại này có sức chứa 18 m³ và có giá 5 triệu đồng. Cho biết công ty chỉ thu xếp được nhiều nhất là 60 m² mặt bằng cho chỗ đựng hồ sơ và ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch mua sắm để công ty có được thể tích đựng hồ sơ lớn nhất.

(A) Mua 7 tủ loại A và 5 tủ loại B.

(B) Mua 5 tủ loại A và 9 tủ loại B.

© Mua 2 tủ loại A và 9 tủ loại B.

© Mua 9 tủ loại A và 5 tủ loại B.

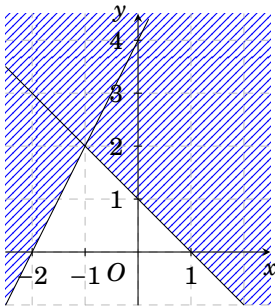


2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ Câu 1. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 & (1) \\ 2x - y + 4 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

- a) Hệ đã cho là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
 b) Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là (1;0).
 c) Điểm $M(2;3)$ không thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.
 d) Phần không bị gạch (kể cả bờ) trong hình vẽ dưới đây là miền nghiệm của hệ đã cho.

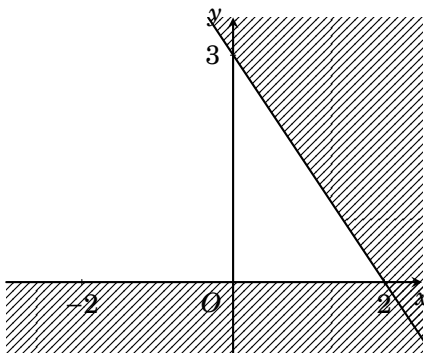


❖ Câu 2. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$
. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) (0;3) là một nghiệm của (I).
 b) Miền nghiệm của (I) chứa điểm (1;3).
 c) $M(x;y)$ thuộc miền nghiệm của (I) thì $2y - x \leq 7$.
 d) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ là 1.

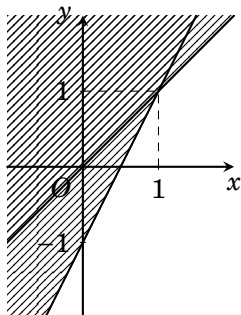
❖ Câu 3. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} y \geq 0 & (1) \\ 3x + 2y \leq 6 & (2) \end{cases}$$
. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hệ đã cho là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
 b) Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất.
 c) Điểm $A(1;1)$ không thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.
 d) Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây biểu diễn miền nghiệm của hệ đã cho



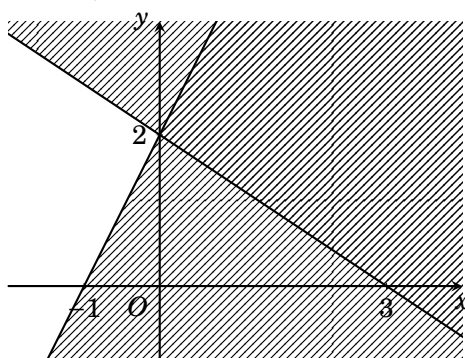
❖ **Câu 4.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hệ bất phương trình đã cho là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
- Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- Phần không tô đậm (kể cả bờ) biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình



❖ **Câu 5.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y + 2 < 0 & (1) \\ 2x + 3y - 6 < 0 & (2) \end{cases}$. Khi đó

- Hệ đã cho là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là $(-2; 1)$.
- Gốc tọa độ thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.
- Phần không gạch chéo (không kể bờ) trong hình vẽ dưới đây biểu diễn miền nghiệm của hệ đã cho



❖ **Câu 6.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$. Khi đó

- Không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Hệ bất phương trình vô nghiệm.
- Điểm $M\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ thuộc miền nghiệm hệ bất phương trình.
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác (kể cả các cạnh của tam giác).

❖ **Câu 7.** Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mại hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20

người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B mà công ty thuê.

a) Số tiền thuê xe là $4x + 3y$.

b) $2x + y < 14$.

c) $2x + 5y \geq 30$.

d) Số tiền thuê xe thấp nhất là 32 triệu.

❖ **Câu 8.** Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1 kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Bất phương trình biểu thị lượng lipit tối thiểu trong thức ăn mỗi ngày của gia đình đó là $x + 2y \leq 2$.

b) Các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương

$$\text{trình là } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

c) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Biểu thức biểu diễn F theo x và y là $F(x; y) = 250x + 160y$.

d) Để chi phí ít nhất gia đình thì cần mua 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn.

❖ **Câu 9.** Một công ty thời trang chuẩn bị cho một đợt khuyến mãi nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hai nền tảng mạng xã hội Tik Tok và You Tube. Biết chi phí cho 1000000 lượt xem quảng cáo trên Tik Tok là 20 triệu đồng, chi phí cho 1000000 lượt xem quảng cáo trên You Tube là 40 triệu đồng. Tik Tok chỉ nhận các hợp đồng trên 6000000 lượt xem. You Tube do các công ty có nhu cầu quảng cáo lớn nên chỉ nhận các hợp đồng dưới 3000000 lượt xem. Theo các phân tích, cùng một lượng lượt xem quảng cáo thì trên You Tube cho hiệu quả gấp 3 lần quảng cáo trên Tik Tok. Công ty thời trang dự tính chi tối đa 160 triệu cho quảng cáo. Gọi x (triệu lượt) là số lượt xem trên Tik Tok, y (triệu lượt) là số lượt xem trên You Tube mà công ty cần thuê để quảng cáo.

a) Số tiền công ty phải trả cho 6 triệu lượt xem trên TikTok là 120 triệu đồng.

b) Chi phí quảng cáo mà công ty phải trả là $20y + 40x$ triệu đồng.

c) Để hiệu quảng cáo cao nhất thì giá trị của biểu thức $x + 3y$ là nhỏ nhất.

d) Khi thời lượng quảng cáo đạt hiệu quả cao nhất thì $x = 6$ (triệu lượt), $y = 1$ (triệu lượt).

❖ **Câu 10.** Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lý do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư lãi suất chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Gọi số tiền bác An đầu tư cho trái phiếu chính phủ, trái phiếu ngân hàng lần lượt là x, y (triệu đồng).

- a) Số tiền mà bác An đầu tư cho trái phiếu doanh nghiệp là $1200 - x - y$ (triệu đồng).
- b) Lợi nhuận bác An thu được là $F(x; y) = 0,07x + 0,08y$ (triệu đồng).
- c) Lợi nhuận lớn nhất mà bác An thu được sau một năm là 96,5 (triệu đồng).
- d) Để thu được lợi nhuận lớn nhất thì bác an cần đầu tư 200 triệu mua trái phiếu ngân hàng.

❖ **Câu 11.** Bác An dự định trồng hai loại cây ăn trái là mít và xoài trong nông trại rộng 100 ha. Biết mỗi ha trồng mít cần 20 công chăm sóc và thu lại lợi nhuận 150 triệu đồng, mỗi ha trồng xoài cần 40 công chăm sóc và thu lại lợi nhuận 180 triệu đồng. Biết rằng tổng số công cần dùng không được vượt quá 2800 công. Gọi x, y ha lần lượt là diện tích đất dùng để trồng mít và xoài. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $x + y < 100$.
- b) $x + 2y \leq 140$.
- c) Tổng lợi nhuận thu được là $F = 150x + 180y$ (triệu đồng).
- d) Lợi nhuận thu được lớn nhất là 15 tỷ đồng.

❖ **Câu 12.** Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy II hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng và một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng. Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (tấn) là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số tiền lãi của nhà máy $T(x; y) = 4x + 3y$ (triệu đồng).
- b) $x + 6y > 36$.
- c) $3x + 2y < 27$.
- d) Tiền lãi cao nhất trong một chu trình sản xuất là 37 triệu đồng.

❖ **Câu 13.** Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 700 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y là hai số tự nhiên. Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $3x + 2y \leq 180$.
- b) $x + 6y \leq 220$.
- c) Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,7y$ (triệu đồng).
- d) Tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 30 triệu đồng.

❖ **Câu 14.** Một cơ sở sản xuất hàng hóa sản xuất hai loại hàng I và II từ nguyên liệu A, B. Trữ lượng các nguyên liệu A và B hằng ngày lần lượt là 12 kg và 9 kg. Để sản xuất một thùng hàng loại I cần 2 kg nguyên liệu loại A và 1 kg nguyên liệu loại B. Để sản

xuất một thùng hàng loại II cần 3 kg nguyên liệu loại A và 3 kg nguyên liệu loại B. Giá bán một thùng hàng loại I và loại II lần lượt là 5 triệu đồng và 7 triệu đồng. Qua tiếp thị, được biết một ngày nhu cầu tiêu thụ hàng loại II là không quá 3 thùng và nhu cầu hàng loại I hơn hàng loại II không quá 1 thùng. Gọi x, y lần lượt là số thùng hàng loại I và loại II mà cơ sở sản xuất ($x, y \in \mathbb{N}$). Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Doanh thu của cửa hàng là $T(x, y) = 5x + 7y$.
- b) Lượng nguyên liệu A, B cần sử dụng lần lượt là $2x + y$ (kg), $3x + 3y$ (kg).
- c) Doanh thu lớn nhất của hàng có thể thu được là 21 triệu đồng.
- d) Trong trường hợp tối ưu, cửa hàng đạt doanh thu lớn nhất thì lượng nguyên liệu loại A cần dùng là 12 kg.

❖ **Câu 15.** Một khách hàng cần đặt một thợ mộc một số bàn học và một số ghế. Để làm một cái bàn học người thợ mất 6 giờ và mất 4 giờ để làm một cái ghế. Người thợ mộc có tối đa 36 giờ trong một tuần để làm bàn và ghế. Khách hàng yêu cầu người thợ mộc làm số ghế nhiều nhất là hơn số bàn một cái. Số lượng bàn và ghế tối đa người thợ mộc có thể làm được trong một tuần là 7 cái. Biết một cái bàn học bán ra lãi 180 nghìn đồng, mỗi cái ghế bán ra lãi 140 nghìn đồng. Gọi x và y lần lượt là số ghế và số bàn học mà người thợ mộc làm được trong một tuần ($x, y \geq 0$). Khi đó

- a) Số tiền lãi xướng thu được là $f(x, y) = 180x + 140y$ (nghìn đồng).
- b) Tổng thời gian hoàn thành số bàn và ghế là $6x + 4y$ (giờ).
- c) Số tiền lãi lớn nhất khi người thợ đóng được 3 cái ghế và 4 cái bàn trong 1 tuần.
- d) Số tiền lãi lớn nhất khi người thợ đóng được 21 cái ghế và 16 cái bàn trong 5 tuần.

❖ **Câu 16.** Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư lãi suất chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Gọi số tiền bác An đầu tư cho trái phiếu chính phủ, trái phiếu ngân hàng lần lượt là x, y (triệu đồng). Khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số tiền mà bác An đầu tư cho trái phiếu doanh nghiệp là $1200 - x - y$ (triệu đồng).
- b) Lợi nhuận bác An thu được là $F(x, y) = 0,07x + 0,08y$ (triệu đồng).
- c) Lợi nhuận lớn nhất mà bác An thu được sau một năm là 96,5 (triệu đồng).
- d) Để thu được lợi nhuận lớn nhất thì bác An cần đầu tư 200 triệu mua trái phiếu ngân hàng.



3 Tự luận.

🔗 **Bài 1.** Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases}$

a, d

Bài 2. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x; y)$ đã cho có phải là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

a/ $(0; 2)$, b/ $(-1; -3)$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases} \quad (0; 2), (1; 0); \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases} \quad (-1; -3), (0; -3).$$

Bài 3. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 10y \leq 20 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Bài 4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ nhất thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng và một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

$x = 0, y = 240$.

Bài 5. Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1300 mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15 mg canxi.

(Nguồn: <https://hongngochospital.vn>)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

a) $165x + 15y \geq 1300$, b) $C(5; 50)$

Bài 6. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20000 đồng
14h00 – 22h00	22000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 – 18h00 và không quá

20 nhân viên trong khoảng 18h00 – 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

 8nv ca I, 24nv ca 2.

 **Bài 7.** Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 ca-lo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 ca-lo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 ca-lo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

- Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.
- Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

 **Bài 8.** Một công ty, trong một tháng cần sản xuất ít nhất 12 viên kim cương to và 9 viên kim cương nhỏ. Từ 1 tấn Cacbon loại 1 (giá 100 triệu đồng) có thể chiết xuất được 6 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ, từ 1 tấn Cacbon loại 2 (giá 40 triệu đồng) có thể chiết xuất được 2 viên kim cương to và 2 viên kim cương nhỏ. Mỗi viên kim cương to có giá 20 triệu đồng, mỗi viên kim cương nhỏ có giá 10 triệu đồng. Hỏi trong một tháng công ty này thu về được nhiều nhất là bao nhiêu tiền. Biết rằng mỗi tháng chỉ có thể sử dụng tối đa 4 tấn Cacbon mỗi loại.

 nhiều nhất 280 triệu

 **Bài 9.** Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trường THPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

 3150

 **Bài 10.** Một cơ sở sản xuất dự định sản xuất ra hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo ra từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng đơn vị dự trữ của từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu cần để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho tương ứng trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ mỗi tuần	Số đơn vị cần dùng cho một đơn vị sản phẩm	
		Sản phẩm A	Sản phẩm B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Mỗi đơn vị sản phẩm A lãi 300000 đồng, mỗi đơn vị sản phẩm B lãi 200000 đồng. Hãy cho biết với kế hoạch sản xuất như thế nào thì số tiền lãi thu được hàng tuần là lớn nhất.

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	C	3	C	4	A	5	A	6	D	7	A	8	C	9	C	10	B
11	D	12	D	13	C	14	A	15	B	16	B	17	B	18	A	19	A	20	C
21	A	22	B	23	A	24	C	25	C										

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 8.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 9.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 11.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 12.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
Câu 13.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 14.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 15.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 16.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 2



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y ?

- (A) $2x - y > 0$. (B) $x^2 + 5y^2 > 3$. (C) $2x + 3y^2 + 1 > 0$. (D) $x + 4y - 3xy > 0$.

❖ **Câu 2.** Bất phương trình nào dưới đây **không phải** là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $3x - y \leq 1$. (B) $2x + xy \leq 4$. (C) $x + 3y \geq 1$. (D) $x - y \leq 0$.

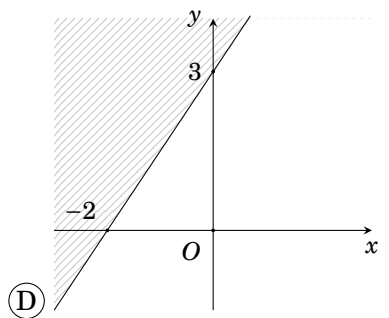
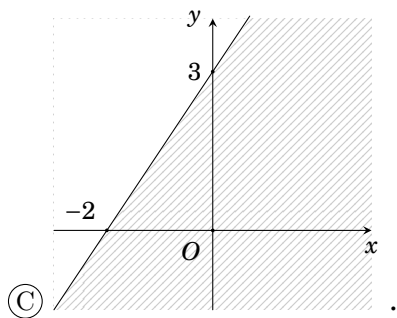
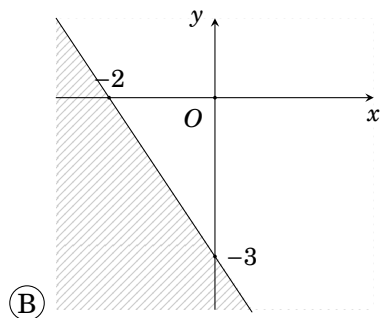
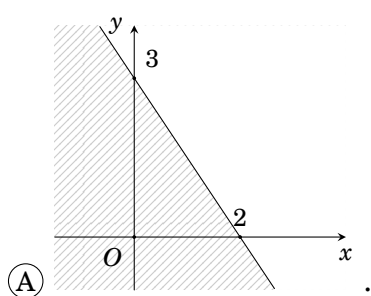
❖ **Câu 3.** Hệ nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- (A) $\begin{cases} 3x - y > 5 \\ x < 6 + 4y. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ x + y = 5. \end{cases}$ (C) $\begin{cases} xy < 1 \\ x + 4x > 5. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x^2 + y < 3 \\ x - y > 1. \end{cases}$

❖ **Câu 4.** Miền nghiệm của bất phương trình $-x + 2 - 3(y - 1) \leq 5(1 - x)$ không chứa điểm nào trong các điểm sau?

- (A) $I(2; 1)$. (B) $I(-1; -1)$. (C) $I(-1; 1)$. (D) $I(0; 0)$.

❖ **Câu 5.** Miền nghiệm của bất phương trình $3x - 2y > -6$ là phần tô đậm (không kể bờ) trong hình vẽ nào sau đây?



❖ **Câu 6.** Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $2x + y \geq 4$?

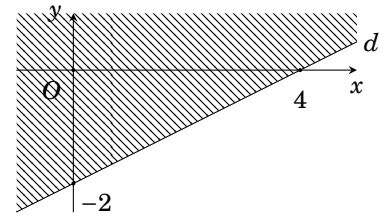
- (A) $(1; 2)$. (B) $(2; 3)$. (C) $(1; -3)$. (D) $(3; 0)$.

❖ **Câu 7.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ $\begin{cases} x \leq 4 \\ x - 5y > 4 \end{cases}$?

- (A) $P(2; -1)$. (B) $N(7; 0)$. (C) $Q(-2; 1)$. (D) $M(-1; 1)$.

❖ **Câu 8.** Phần **không** bị gạch trong hình vẽ bên (kể cả đường thẳng d) là miền nghiệm của bất phương trình nào?

- (A) $x - 2y \geq 4$. (B) $4x - 2y \leq 1$.
(C) $x - 2y \leq 4$. (D) $x - 2y > 4$.



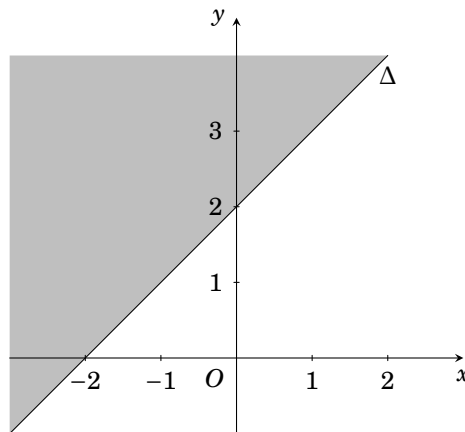
❖ **Câu 9.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y > 3$?

- (A) $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$. (B) $N(1; 1)$. (C) $P\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. (D) $Q(-1; -3)$.

❖ **Câu 10.** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 3y < 3 \\ x + y > 5 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào sau đây?

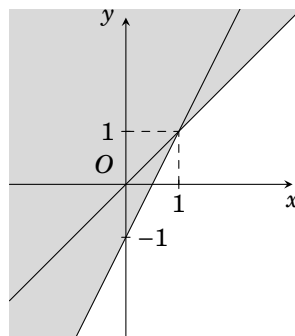
- (A) $A(0; 0)$. (B) $B(5; 3)$. (C) $C(-2; 2)$. (D) $D(1; -1)$.

❖ **Câu 11.** Đường thẳng Δ chia mặt phẳng tọa độ Oxy làm hai miền. Miền không tô đậm (không kể Δ) ở hình vẽ dưới đây là miền nghiệm của bất phương trình nào?



- (A) $x + y + 2 \geq 0$. (B) $x - y + 2 \leq 0$. (C) $x - y + 2 > 0$. (D) $x - 2y + 2 > 0$.

❖ **Câu 12.** Phần **không tô đậm** trong hình vẽ dưới đây (không kể bờ), biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



- (A) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - 3y > 1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

❖ Câu 13. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > 2 \\ x - y < 3 \end{cases}$ chứa điểm nào sau đây?

- (A) (1; -1). (B) (2; 6). (C) (0; -4). (D) (-2; -10).

❖ Câu 14. Điểm A(2; 1) thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- (A) $x - y + 1 < 0$. (B) $-2x + y - 2 > 0$. (C) $2x - y + 1 > 0$. (D) $x - 2y > 0$.

❖ Câu 15. Cặp số (x; y) nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y \leq 0 \\ x - 2y \geq 1 \end{cases}$?

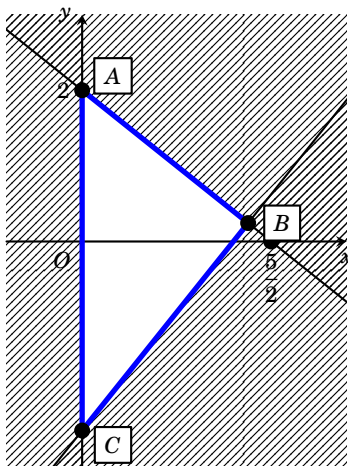
- (A) (1; 0). (B) (3; 1). (C) (1; -3). (D) (-2; 3).

❖ Câu 16. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x - 4y + 12 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ là miền chứa điểm

nào trong các điểm sau?

- (A) P(-1; 5). (B) M(1; -3). (C) N(4; 3). (D) Q(-2; -3).

❖ Câu 17. Miền tam giác ABC kẻ cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ bất phương trình dưới đây?



- (A) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 5y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 10 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x > 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y \geq 0 \\ 5x - 4y \geq 10 \\ 5x + 4y \leq 10 \end{cases}$

❖ Câu 18. Điểm O(0; 0) **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- (A) $\begin{cases} x + 3y < 6 \\ 2x + y \geq -4 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x + 3y \geq 0 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x + 3y < 0 \\ 2x + y > -4 \end{cases}$

❖ Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq m \\ y < m \end{cases}$ không chứa điểm M(0; 2)?

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

❖ **Câu 20.** Bạn Danh để dành được 900 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em mồ côi, Danh đã lấy ra x tờ tiền loại 50 nghìn đồng, y tờ tiền loại 100 nghìn đồng để trao tặng. Một bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x, y là

- (A) $50x + 100y \geq 900$. (B) $50x + 100y \leq 900$. (C) $100x + 50y \leq 900$. (D) $x + y = 900$.

❖ **Câu 21.** Một cơ sở sản xuất hai loại bàn và ghế. Để làm 1 chiếc bàn cần 3 tấm gỗ và 2 giờ công; để làm 1 chiếc ghế cần 2 tấm gỗ và 1 giờ công. Cơ sở có tối đa 18 tấm gỗ và 10 giờ công trong một ngày. Lợi nhuận từ mỗi chiếc bàn và ghế lần lượt là 200 nghìn đồng và 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số bàn và ghế được làm trong ngày. Để lợi nhuận đạt lớn nhất, trong ngày cơ sở cần sản xuất bao nhiêu chiếc mỗi loại?

- (A) $x = 5; y = 0$. (B) $x = 0; y = 9$. (C) $x = 5; y = 2$. (D) $x = 0; y = 0$.

❖ **Câu 22.** Một cửa hàng dự định nhập hai loại sản phẩm. Mỗi sản phẩm loại A có giá 200 nghìn đồng, mỗi sản phẩm loại B có giá 300 nghìn đồng. Cửa hàng chỉ có số tiền tối đa là 12 triệu đồng để nhập hàng. Gọi x và y lần lượt là số sản phẩm loại A và loại B được nhập. Hãy lập bất phương trình theo x và y để biểu diễn điều kiện về chi phí mà cửa hàng phải thỏa mãn.

- (A) $200x + 300y \geq 12000$. (B) $x + y \leq 12$.
(C) $200x + 300y = 12000$. (D) $200x + 300y \leq 12000$.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Xét hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y + 1 \geq 0. \end{cases}$$

a) Cặp số $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của bất phương trình $x - y + 1 \geq 0$.

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , miền nghiệm của bất phương trình $x + y - 3 \leq 0$ **không** chứa điểm $O(0; 0)$.

c) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$$
 là một miền tam giác có chứa gốc tọa độ $O(0; 0)$.

d) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$$
 là miền tam giác ABC với $A(-2; -1), B(4; -1), C(1; 2)$.

❖ **Câu 2.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ -2x + 6y \geq 12. \end{cases}$$

a) Cặp số $(-1; 3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

b) Cặp số $(-2; 0)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình trên.

c) Hệ trên là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

d) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tam giác, kể cả ba cạnh, với các đỉnh có tọa độ lần lượt là: $(-6;0)$, $(5;0)$, $(1;1)$.

❖ **Câu 3.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$
 có miền nghiệm là miền D .

a) Hệ bất phương trình trên là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Cặp số $(x; y) = (1; 3)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

c) Miền nghiệm D của hệ bất phương trình trên là một tứ giác.

d) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = -x + y$ trên miền D bằng 1.

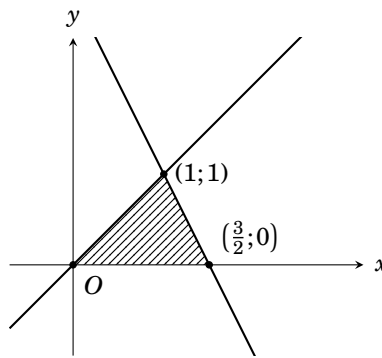
❖ **Câu 4.** Cho hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
. Các khẳng định sau là

đúng hay sai?

a) Có 2 giá trị nguyên của m để $(x; y) = (m; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

b) $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên.

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là một miền tam giác tô đậm dưới đây



d) Với x, y thỏa mãn hệ bất phương trình trên, giá trị lớn nhất của hàm $F = 2x + 3y$ bằng 5.

❖ **Câu 5.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y \leq 4 & (1) \\ x + 3y \leq 6 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \end{cases}$$

a) Điểm $M(1;1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).

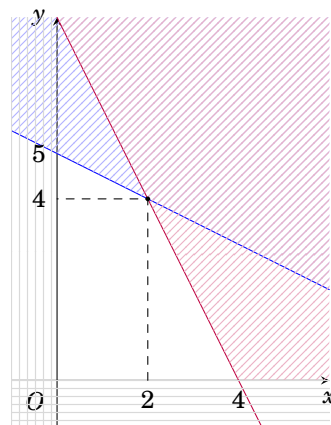
b) Điểm $N(2;0)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong của một tứ giác kể cả cạnh của tứ giác đó và một đỉnh có tọa độ là $(3;1)$.

d) Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = 2x + 3y$ (với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho) bằng 8.

❖ **Câu 6.** Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 & (1) \\ 2x + y \leq 8 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \end{cases}$$



- Bất phương trình (1) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Hệ đã cho không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- (4;5) là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền không bị gạch (kể cả bờ).

❖ **Câu 7.** Trong một cuộc thi pha chế đồ uống gồm hai loại là X và Y , mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 cốc nước lọc và 210 g đường. Để pha chế 1 cốc đồ uống loại X cần 1 cốc nước lọc, 30 g đường và 1 g hương liệu. Để pha chế 1 cốc đồ uống loại Y cần 1 cốc nước lọc, 10 g đường và 4 g hương liệu. Mỗi cốc đồ uống loại X nhận được 6 điểm thưởng, mỗi cốc đồ uống loại Y nhận được 8 điểm thưởng. Gọi x, y lần lượt là số cốc đồ uống loại X , loại Y mà đội chơi cần pha chế.

a) Điều kiện của x, y là các số tự nhiên và thỏa mãn (I):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases}.$$

b) Điểm $M(2;1)$ thuộc miền nghiệm của hệ (I).

c) Miền nghiệm của hệ (I) là miền tứ giác.

d) Để đạt được số điểm thưởng cao nhất, đội chơi cần pha chế 6 cốc đồ uống loại X và 3 cốc đồ uống loại Y .

❖ **Câu 8.** Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là 150 m² (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích 3 m²/chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích 5 m²/chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lý không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hỏi bãi giữ xe nên cho đăng kí mỗi loại xe bao nhiêu chiếc để doanh thu lớn nhất? Gọi x là số xe du lịch và y là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$.

b) Giải bài toán trên bằng cách lập hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn thì biểu diễn hình học miền nghiệm của hệ là một hình tam giác.

c) Tổng doanh thu của bãi xe trong 1 đêm là $40x + 50y$.

d) Để có doanh thu cao nhất, chủ bãi xe cho đăng kí 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải một đêm.

❖ **Câu 9.** Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên một vùng đất có diện tích 10 hécta. Trên diện tích mỗi hécta, nếu trồng dưa thì cần 20 ngày công và thu được 5 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 ngày công và thu được 6 triệu đồng. Biết rằng tổng

số ngày công không quá 180. Gọi x, y lần lượt là số hécta trồng dưa và số hécta trồng củ đậu. Khi đó

a) Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mô tả bài toán trên là
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ 20x + 30y \geq 180 \end{cases}.$$

b) $(2; 4)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình mô tả bài toán trên.

c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình mô tả bài toán trên là một miền tam giác.

d) $F(x; y) = 5x + 6y$ là số tiền thu được khi trồng x hécta dưa và y hécta củ đậu (đơn vị: triệu đồng).



3

Tự luận.

Bài 1. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y < 1 \\ 2x - y \geq 3 \end{cases}$ trên mặt phẳng tọa độ.

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2x-y+1}{3}$ trên mặt phẳng tọa độ.

Bài 3. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ y \leq 4 \\ x \leq 5 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$ trên mặt phẳng

tọa độ. Từ đó tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = -x - y$ với $(x; y)$ thỏa mãn hệ trên.

GTLN bằng 1 và GTNN bằng -9

Bài 4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc tối đa 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số tiền lãi mà phân xưởng thu được trong một ngày cao nhất là bao nhiêu nghìn đồng.

6480

Bài 5. Nhân dịp tết Trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh muốn sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Để sản xuất hai loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, bột mì, trứng, mứt bí, lạp xưởng,... Xí nghiệp đã nhập về 600 kg bột mì và 240 kg đường, các nguyên liệu khác luôn đáp ứng được số lượng mà xí nghiệp cần. Mỗi chiếc bánh nướng cần 120 g bột mì, 60 g đường. Mỗi chiếc bánh dẻo cần 160 g bột mì và 40 g đường. Theo khảo sát thị trường, lượng bánh dẻo tiêu thụ không vượt quá ba lần lượng bánh nướng và sản phẩm của xí nghiệp sản xuất luôn được tiêu thụ hết. Mỗi chiếc bánh nướng lãi 8000 đồng, mỗi chiếc bánh dẻo lãi 6000 đồng. Hãy lập kế hoạch để xí nghiệp sản xuất bao nhiêu chiếc bánh nướng, bao nhiêu chiếc bánh dẻo để thu được lợi nhuận cao nhất.

3 000 bánh nướng và 1 500 bánh dẻo

Bài 6. Một xưởng sản xuất đồ gỗ mỹ nghệ sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Mỗi bộ sản phẩm loại I bán ra lãi 4 triệu đồng và mỗi bộ sản phẩm loại II bán ra lãi 5 triệu đồng. Để sản xuất bộ sản phẩm loại I cần sử dụng máy làm việc trong 3 giờ và công nhân làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất bộ sản phẩm loại II cần sử dụng máy làm việc trong 3 giờ và công nhân làm việc trong 2 giờ. Biết rằng trong quá trình sản xuất không thể đồng thời làm hai loại sản phẩm cùng lúc, số công nhân luôn ổn định. Một ngày máy làm việc không quá 15 giờ, công nhân làm việc không quá 8 giờ. Số tiền lãi lớn nhất xưởng đó đạt được trong một ngày là bao nhiêu triệu đồng?

23

Bài 7. Một cửa hàng điện máy dự định kinh doanh hai loại ti vi thông minh là Android TV và Tizen OS với số vốn ban đầu không vượt quá 3 tỉ đồng. Giá mua vào và lợi nhuận dự kiến cho mỗi loại ti vi được cho trong bảng sau

	Android TV	Tizen OS
Giá mua vào	10 triệu đồng/1 ti vi	15 triệu đồng/1 ti vi
Lợi nhuận dự kiến	2 triệu đồng/1 ti vi	2,8 triệu đồng/1 ti vi

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu hàng tháng của thị trường sẽ không vượt quá 250 ti vi cả hai loại. Tìm số lượng ti vi mỗi loại cửa hàng cần nhập về trong tháng đó để lợi nhuận thu được là cao nhất.

580

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	B	3	A	4	A	5	C	6	C	7	A	8	A	9	A	10	B
11	C	12	D	13	B	14	C	15	C	16	C	17	B	18	D	19	B	20	B
21	A	22	D																

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

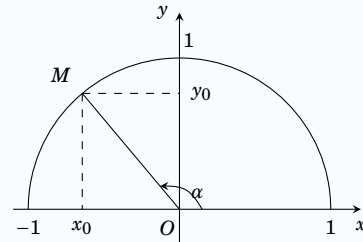
Câu 1.	a Đ b S c Đ d Đ	Câu 2.	a S b S c Đ d S
Câu 3.	a Đ b Đ c S d Đ	Câu 4.	a S b S c Đ d Đ
Câu 5.	a Đ b S c Đ d S	Câu 6.	a Đ b S c S d Đ
Câu 7.	a Đ b Đ c S d S	Câu 8.	a Đ b S c Đ d Đ
Câu 9.	a S b Đ c Đ d Đ		

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Giá trị lượng giác của một góc

⚙ **Định nghĩa:** Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định duy nhất một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$, khi đó ta có định nghĩa:

- ☆ **sin** của góc α là y_0 , kí hiệu $\sin \alpha$.
- ☆ **cosin** của góc α là x_0 , kí hiệu $\cos \alpha$.
- ☆ **tang** của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), kí hiệu $\tan \alpha$.
- ☆ **cotang** của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), kí hiệu $\cot \alpha$.



⚙ **Bảng giá trị lượng giác của góc đặc biệt:**

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

◇ Các công thức cơ bản:



$$\textcircled{1} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\textcircled{2} \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\textcircled{3} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha};$$

$$\textcircled{4} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\textcircled{5} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\textcircled{6} 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

2) Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác

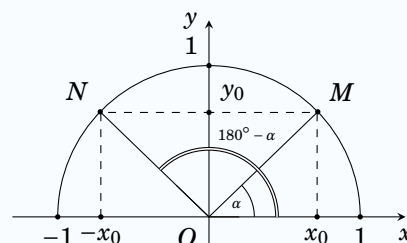
⚙ **Hai góc bù nhau:** Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

$$\textcircled{1} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\textcircled{2} \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\textcircled{4} \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$



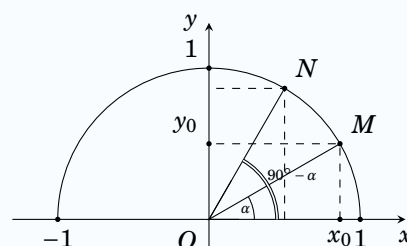
⚙ **Hai góc phụ nhau:** Hình vẽ bên, hai điểm M và N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xON} = 90^\circ - \alpha$)

$$\bullet \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\bullet \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\bullet \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\bullet \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng **1** Tính các giá trị lượng giác

- ◇ Dựa vào định nghĩa các giá trị lượng giác.
- ◇ Sử dụng các công thức lượng giác.
- ◇ Sử dụng bảng giá trị lượng giác góc đặc biệt và máy tính bỏ túi.
- ◇ $\sin \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- ◇ $\cos \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cos \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- ◇ $\tan \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- ◇ $\cot \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cot \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ví dụ 1

Tính giá trị biểu thức sau

a) $A = 2\cos 30^\circ + 3\sin 120^\circ$.

b) $B = a \cdot \cos 60^\circ + 2a \tan 45^\circ - 3a \sin 30^\circ$.

Ví dụ 2

Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

d) $\tan \alpha = 3$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ví dụ 3

Cho $\tan \alpha = 2$. Giá trị của $A = \frac{3\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ bằng bao nhiêu?

 $A = 7$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Tính $A = \cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ + \cos^2 105^\circ + \cos^2 165^\circ$.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) -1.

🔍 2

Bài 2



Viết giá trị lượng giác của góc 120° .

.....

.....

.....

Bài 3



Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Cho α là góc nhọn và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính các giá trị còn lại của góc lượng giác α .

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Cho $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

🔍 -10

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

2

Biến đổi, rút gọn biểu thức lượng giác

Ví dụ 4

Chứng minh rằng: $\frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin 2x + \sin x} = \cot x$

Ví dụ 5

Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A + B) = \sin C$.

b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.

c) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau (giả sử các biểu thức luôn có nghĩa).

a) $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2 = 4$

c) $\frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x} = 1$

d) $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$

Bài 7. Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ và $\alpha - \beta = 90^\circ$. Chứng minh:

a) $\sin \alpha = \cos \beta$;

b) $\cos \alpha = -\sin \beta$;

c) $\tan \alpha = -\cot \beta$.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

(A) 1.

(B) $\sqrt{2}$.

(C) $\sqrt{3}$.

(D) 0.

❖ **Câu 2.** Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

(B) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(D) 2.

❖ **Câu 3.** Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là **đúng**?

(A) $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(D) $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

❖ **Câu 4.** Tính giá trị biểu thức $P = \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$.

(A) $P = \sqrt{3}$.

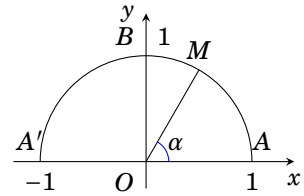
(B) $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $P = 1$.

(D) $P = 0$.

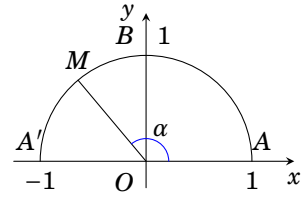
❖ **Câu 5.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\sin \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha < 0$. (C) $\sin \alpha = 0$. (D) $\sin \alpha = 1$.



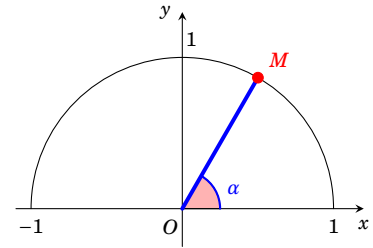
❖ **Câu 6.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\cos \alpha > 0$. (B) $\cos \alpha < 0$. (C) $\cos \alpha = 0$. (D) $\cos \alpha = -1$.



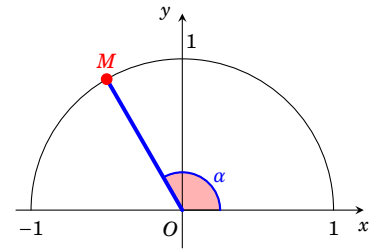
❖ **Câu 7.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\cos \alpha > 0$. (B) $\cos \alpha < 0$. (C) $\cos \alpha = 0$. (D) $\cos \alpha = -1$.



❖ **Câu 8.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $\sin \alpha > 0$. (B) $\sin \alpha < 0$. (C) $\sin \alpha = 0$. (D) $\sin \alpha = 1$.



❖ **Câu 9.** Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M\left(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Giá trị lượng giác của $\tan \alpha$ là

- (A) $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. (B) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. (C) $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. (D) $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

❖ **Câu 10.** Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$, với điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Giá trị lượng giác của $\cot \alpha$ là

- (A) $\cot \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. (B) $\cot \alpha = 2\sqrt{2}$. (C) $\cot \alpha = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. (D) $\cot \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

❖ **Câu 11.** Cho điểm $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Gọi góc $\alpha = \widehat{xOM'}$ với M' là điểm đối xứng với M qua trục Oy . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cos \alpha < 0$. (B) $\cos \alpha > 0$. (C) $\cot \alpha < 0$. (D) $\tan \alpha < 0$.

❖ **Câu 12.** Tính $A = \sin(180^\circ - x) + \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) - \cos(90^\circ - x)$.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) -1.

❖ **Câu 13.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

- (A) $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$. (B) $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$. (C) $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. (D) $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.

❖ **Câu 14.** Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- (A) $\sin \alpha < 0$. (B) $\cos \alpha > 0$. (C) $\tan \alpha < 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

❖ **Câu 15.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

- (A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. (B) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
(C) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. (D) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

❖ **Câu 16.** Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- (A) $\sin \alpha = -\cos \beta$. (B) $\cos \alpha = \sin \beta$. (C) $\tan \alpha = \cot \beta$. (D) $\cot \alpha = \tan \beta$.

❖ **Câu 17.** Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$.

- (A) $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. (B) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. (C) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. (D) $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

❖ **Câu 18.** Giá trị của $\tan 180^\circ$ bằng

- (A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) Không xác định.

❖ **Câu 19.** Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

- (A) $\cot \alpha = 2$. (B) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. (C) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. (D) $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

❖ **Câu 20.** Cho $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\sin \alpha + \sin \beta = 0$. (B) $\cos \alpha + \cos \beta = 0$. (C) $\tan \alpha + \tan \beta = 0$. (D) $\cot \alpha + \cot \beta = 0$.

❖ **Câu 21.** Rút gọn biểu thức $S = \cos(90^\circ - x)\sin(180^\circ - x) - \sin(90^\circ - x)\cos(180^\circ - x)$ ta được

- (A) $S = 0$. (B) $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. (C) $S = 2\sin x \cos x$. (D) $S = 1$.

❖ **Câu 22.** Biểu thức $E = \sin(180^\circ - x) - 2\cos(90^\circ - x) + \cos x \cdot \tan x$ ($x \neq 90^\circ$) sau khi thu gọn bằng với biểu thức nào trong 4 biểu thức dưới đây?

- (A) $A = 0$. (B) $B = -2\sin x$. (C) $C = \sin x$. (D) $D = -2\cos x$.

❖ **Câu 23.** Cho tam giác ABC , tính giá trị biểu thức $P = \sin A \cdot \cos(B + C) + \cos A \cdot \sin(B + C)$.

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) 2.

❖ **Câu 24.** Rút gọn biểu thức $A = -\sin(180^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \cos x$ ta được

- (A) $A = -\sin x$. (B) $A = \sin x$. (C) $A = 2\sin x$. (D) $A = \cos x$.

❖ **Câu 25.** Cho $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khi đó giá trị $\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}}$ bằng

- (A) $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$. (B) $\frac{2\sqrt{19}}{19}$. (C) $\frac{-\sqrt{19}}{19}$. (D) $\frac{\sqrt{19}}{19}$.

❖ **Câu 26.** Kết quả rút gọn của biểu thức $\left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1}\right)^2 + 1$ bằng

- (A) 2. (B) $1 + \tan \alpha$. (C) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$. (D) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

❖ **Câu 27.** Cho $A = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x}$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) $A = \tan^4 x$. (B) $A = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$. (C) $A = \cot^4 x$. (D) $A = \cot^2 x$.



Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Biết $\sin \alpha = \frac{2}{7}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

b) $\tan \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

c) $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{7}$.

❖ **Câu 2.** Biết $\cos x = -\frac{5}{13}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x = \frac{12}{13}$.

b) $\cot x = \frac{12}{5}$.

c) $\sin(180^\circ - x) = \frac{12}{13}$.

d) $\cos(180^\circ - x) = -\frac{12}{13}$.

❖ **Câu 3.** Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\sin \alpha > 0$.

b) $\cot(90^\circ - \alpha) > 0$.

c) $\sin(135^\circ - \alpha) < 0$.

d) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 90^\circ\right) < 0$.

❖ **Câu 4.** Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị.

a) $\sin \alpha = x_0; \cos \alpha = y_0$.

b) Nếu $x_0 < 0$ thì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

c) Nếu $x_0 = \frac{1}{3}; y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ thì giá trị $\cot \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

d) Nếu $x_0 = -\frac{1}{3}; y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ thì giá trị $\frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{7}{9}$.

❖ **Câu 5.** Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\tan \alpha > 0$.

b) $\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{2}{3}$.

c) Giá trị $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$.

d) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2\tan^2 \alpha$.

❖ **Câu 6.** Cho $\sin x = \frac{5}{13}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$.

a) $\cos x > 0$.

b) Giá trị của biểu thức $P = 2\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{-94}{169}$.

c) Giá trị $\tan x = \frac{5}{12}$.

d) Giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} = \frac{25}{313}$.

❖ **Câu 7.** Cho tam giác ABC , biết $\widehat{A}$ là góc tù. Khi đó

a) $\cos A < 0$.

b) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

c) $\cos(A + B) = \cos C$.

d) $\sin(A + B) = \sin C$.

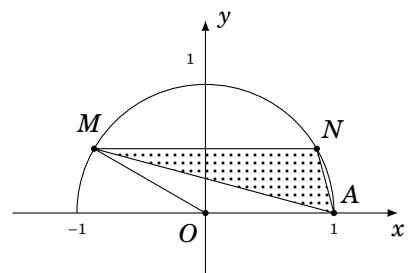
❖ **Câu 8.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. Lấy N đối xứng với M qua trục tung.

a) $\widehat{xON} = 45^\circ$.

b) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

c) $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

d) $S_{\triangle MAN} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.





3 Tự luận.

Bài 1. Biết $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức

a) $P = \sin 165^\circ + \cos 75^\circ$.

b) $Q = \cos 165^\circ + \cos 75^\circ$.

Bài 2. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$;

b) $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$;

c) $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$;

d) $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$.

Bài 3. Tính $M = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 89^\circ$.

Q $M = 1$

Bài 4. Tính $A = \cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 50^\circ + \cdots + \cos 150^\circ + \cos 170^\circ$.

Q $A = 0$

Bài 5. Rút gọn $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cdots + \cos^2 180^\circ$.

Q 9

Bài 6. Biết $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = 4 \sin^2 \alpha + 8 \tan^2 \alpha$ là

Q 27

Bài 7. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{\sin a + 5 \cos a}{\sin^3 a - 2 \cos^3 a}$ khi $\tan a = 2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Q $5,83$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = 3$.

Bài 9. Cho A, B, C là ba góc trong tam giác ABC . Chứng minh rằng:

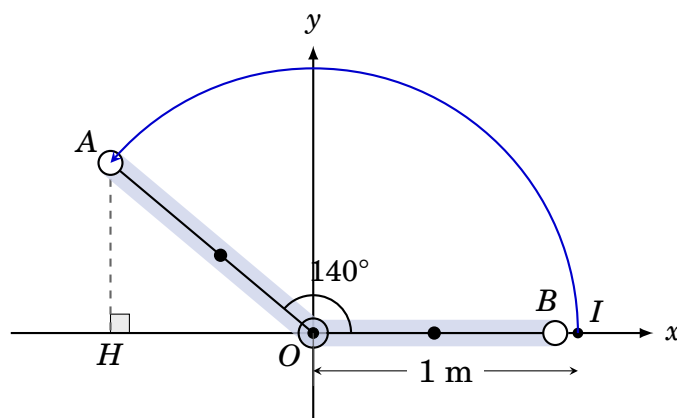
$$P = \cos^2 \left(180^\circ - \frac{B}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{180^\circ + A + C}{2} \right) + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{A + C}{2} = 1.$$

Bài 10. Một cánh tay robot dài 1m gấp vật từ vị trí A , sau đó quay một góc 140° quanh O đến vị trí B rồi thả vật rơi tự do chạm đất (Hình vẽ).

a) Hỏi khi vật rơi chạm đất, vật cách vị trí A bao nhiêu mét?

b) Nếu muốn vật rơi chạm đất cách vị trí A một khoảng 1,5m thì cánh tay robot cần quay một góc bao nhiêu độ?

Q a) 1,77m b) 120°



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	B	2	A	3	C	4	D	5	A	6	B	7	A	8	A	9	B	10	A
11	B	12	A	13	D	14	C	15	C	16	A	17	D	18	B	19	A	20	A
21	D	22	A	23	A	24	A	25	A	26	C	27	A						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 4.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 8.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ

§2 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Định lí côsin

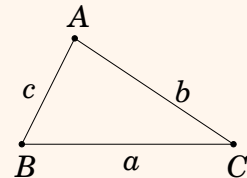


Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C . Khi đó:

$$\diamond a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\diamond b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$\diamond c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



🔔 Lưu ý. Từ Định lí côsin, ta tính được $\cos A, \cos B, \cos C$ theo độ dài các cạnh a, b, c của tam giác ABC , cụ thể:

$$\diamond \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\diamond \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

$$\diamond \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2) Định lí sin



Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C . R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

3) Công thức tính diện tích tam giác

Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C ; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Khi đó



$$\diamond S = pr = \frac{(a + b + c)r}{2};$$

$$\diamond S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C;$$

$$\diamond S = \frac{abc}{4R};$$

$$\diamond S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Bài toán sử dụng định lý sin và cosin

◀ Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = 4$, $AC = 7$. Tính độ dài cạnh BC . 🔗 $BC = \sqrt{93}$

◀ Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 100^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$ và $b = 10$. Tính a , c , R và số đo góc B .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = 5$, $AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC .

🔗 $BC = \sqrt{129}$

Bài 2



Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 75^\circ$ và cạnh $BC = 5$.

- Tính độ dài AB và AC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$AC = \frac{5\sqrt{6}}{3}, AB = \frac{15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{6}, R = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Dạng 2 Bài toán có dùng công thức tính diện tích

Trong tam giác ABC , ta kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C ; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . Khi đó

$$\diamond S = pr = \frac{(a+b+c)r}{2};$$

$$\diamond S = \frac{abc}{4R};$$

$$\diamond S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C;$$

$$\diamond S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

VD Ví dụ 3

Tính diện tích S của tam giác ABC có $c = 4, b = 6, \hat{A} = 150^\circ$.

86

VD Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 15 \text{ cm}, b = 13 \text{ cm}, c = 14 \text{ cm}$.

a) Tính diện tích tam giác ABC .

84

b) Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

87 $h_b = \frac{168}{13}$

c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC .

88 $R = \frac{65}{8}, r = 4$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = 15$ cm và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

$$S = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$ cm, $b = 2$ cm và $\widehat{C} = 30^\circ$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

$$S = \sqrt{3}, h_a = 1, R = 2, r = 2\sqrt{3} - 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Tam giác ABC có $c = 3$ cm, $b = 4$ cm; $S = 3\sqrt{3}$ cm².

- a) Tính độ dài BC .
b) Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

$\hookrightarrow BC = \sqrt{13}$ hoặc $\sqrt{37}$, $h_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dạng 3 Rút gọn, chứng minh biểu thức

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$;

b) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

⇔ Ví dụ 7

Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$;

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R \sin B \sin C$.

[illegible]

4

❖ Ví dụ 8

a) $AB = 3, BC = 5, \hat{B} = 60^\circ$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8



a) $BC = 100, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$.

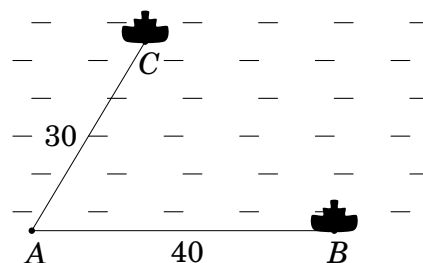
b) $AB = 100, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 45^\circ.$

Dạng 5 Các ứng dụng thực tế

❖ Ví dụ 9

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?

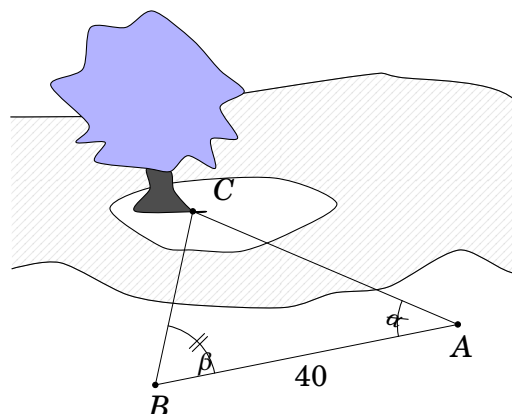
 khoảng 36 hải lí



❖ Ví dụ 10

Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Tính độ dài AC .

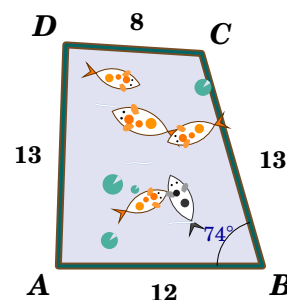
🔍 41,5



❖ Ví dụ 11

Bác Tiến mua được một mảnh đất, trên đó có sẵn một ao cá hình dạng tứ giác $ABCD$ (Hình vẽ). Bác muốn tính diện tích ao cá này nên đã tiến hành đo được chiều dài bốn cạnh lần lượt là 8m, 13m, 12m và 13m. Đứng từ đỉnh B của ao cá, bác Tiến dùng thước ngắm đo được số đo $\widehat{ABC} = 74^\circ$. Với những dữ liệu nói trên, hãy giúp bác Tiến tính diện tích ao cá (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

🔍 101,7

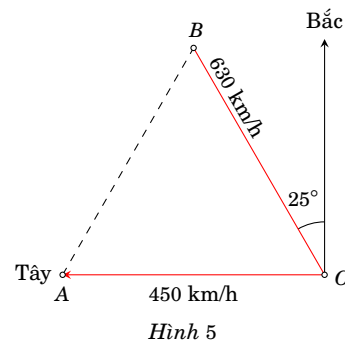


BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9

Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc di chuyển với tốc độ 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại di chuyển theo hướng lệch so với hướng bắc 25° về phía tây với tốc độ 630 km/h. Sau 90 phút, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét? Giả sử chúng đang ở cùng độ cao.

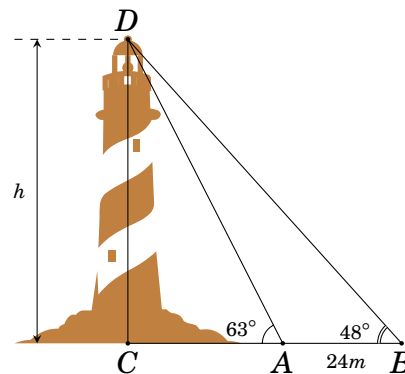
🔗 599,8 m.



Bài 10

Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = 63^\circ$; $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Tính chiều cao h của khối tháp.

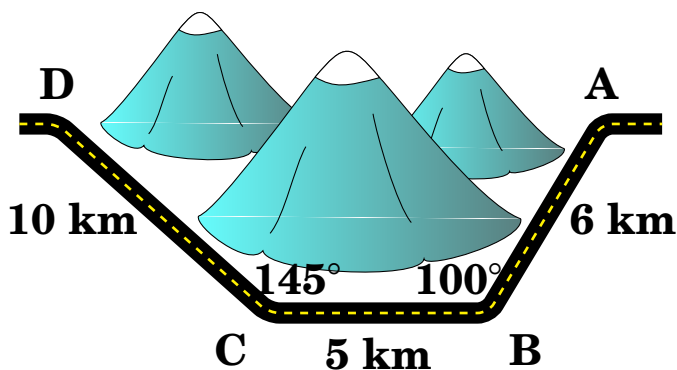
🔗 61,4 m.



Bài 11



Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ như mô hình trong hình bên. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



giảm khoảng 6,77 km

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Gọi S là diện tích tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- (A) $S = \frac{1}{2}ab \cos C$. (B) $S = \frac{abc}{4R}$. (C) $S = ah_a$. (D) $S = ab \sin C$.

❖ **Câu 2.** Trong tam giác ABC bất kì với $BC = a, AC = b, AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\frac{a}{\sin A} = 2R$. (B) $\sin A = \frac{a}{2R}$. (C) $b \sin B = 2R$. (D) $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

❖ **Câu 3.** Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Hệ thức nào dưới đây đúng?

- (A) $\cos A = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2ac}$. (B) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
(C) $\cos A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$. (D) $\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2abc}$.

❖ **Câu 4.** Cho tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$. Đẳng thức nào **sai**?

- (A) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. (B) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
(C) $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cos C$. (D) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$.

- ❖ **Câu 5.** Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?
 (A) $a = 2R \cos A$. (B) $a = 2R \sin A$. (C) $a = 2R \tan A$. (D) $a = R \sin A$.
- ❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC có các góc $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$, cạnh $BC = 5$ cm. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
 (A) 7 cm. (B) 8 cm. (C) 9 cm. (D) 10 cm.
- ❖ **Câu 7.** Cho $\triangle ABC$ có $a = 4$, $c = 5$, $\hat{B} = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là
 (A) $5\sqrt{3}$. (B) 10. (C) 5. (D) $10\sqrt{3}$.
- ❖ **Câu 8.** Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$.
 (A) $\sqrt{56}$. (B) $\sqrt{48}$. (C) 6. (D) 8.
- ❖ **Câu 9.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng
 (A) $\frac{8}{9}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) 1.
- ❖ **Câu 10.** Cho tam giác ABC có $b = 7$; $c = 5$; $\cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác $\triangle ABC$ là
 (A) 8. (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. (C) $8\sqrt{3}$. (D) 7.
- ❖ **Câu 11.** Cho $\triangle ABC$ có $b = 6$, $c = 8$, $\hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là
 (A) $2\sqrt{13}$. (B) $3\sqrt{12}$. (C) $2\sqrt{37}$. (D) $\sqrt{20}$.
- ❖ **Câu 12.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ$, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$ cm. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng
 (A) $R = 1$ cm. (B) $R = 2$ cm. (C) $R = 4$ cm. (D) $R = 3$ cm.
- ❖ **Câu 13.** Cho tam giác ABC có góc $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, cạnh $AB = 4$. Tính độ dài cạnh AC .
 (A) $2\sqrt{6}$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. (C) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. (D) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.
- ❖ **Câu 14.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính cạnh AB .
 (A) $5\sqrt{6}$. (B) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. (C) $5\sqrt{2}$. (D) $10\sqrt{2}$.
- ❖ **Câu 15.** Tam giác ABC có $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm và diện tích là 80 cm^2 . Tính số đo góc B của tam giác ABC .
 (A) 45° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 75° .
- ❖ **Câu 16.** Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .
 (A) $AC = 5\sqrt{2}$. (B) $AC = 5\sqrt{3}$. (C) $AC = 10$. (D) $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.
- ❖ **Câu 17.** Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng
 (A) 90° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 30° .
- ❖ **Câu 18.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính cạnh AB .
 (A) $10\sqrt{2}$. (B) $5\sqrt{6}$. (C) $5\sqrt{2}$. (D) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

❖ **Câu 19.** Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- (A) $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. (B) $R = 10$. (C) $R = 10\sqrt{3}$. (D) $R = 5$.

❖ **Câu 20.** Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- (A) $S_{\Delta ABC} = 9$. (B) $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. (C) $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$. (D) $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 21.** Cho tam giác ABC có $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác ABC bằng

- (A) $9\sqrt{15}$. (B) $3\sqrt{15}$. (C) 105 . (D) $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

❖ **Câu 22.** Cho tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- (A) $r = 16$. (B) $r = 7$. (C) $r = \frac{7}{2}$. (D) $r = 8$.

❖ **Câu 23.** Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

- (A) $h_a = 3\sqrt{3}$. (B) $h_a = \sqrt{3}$. (C) $h_a = \frac{3}{2}$. (D) $h_a = 3$.

❖ **Câu 24.** Cho ΔABC có $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 8$ cm. Giá trị của $\cos B$ là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{17}{32}$. (D) $\frac{11}{16}$.

❖ **Câu 25.** Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Khi đó độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A bằng

- (A) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. (B) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$. (C) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$. (D) $3\sqrt{15}$.

❖ **Câu 26.** Tính diện tích của tam giác ABC có $b = 2$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$.

- (A) $2 + 2\sqrt{3}$. (B) 1 . (C) $\sqrt{3}$. (D) $1 + \sqrt{3}$.

❖ **Câu 27.** Cho tam giác ABC có góc $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 9$. Độ dài cạnh AC là

- (A) $\frac{6\sqrt{6}}{2}$. (B) $3\sqrt{6}$. (C) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$. (D) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

❖ **Câu 28.** Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $BC = \sqrt{6}$ m. Độ dài cạnh AC bằng

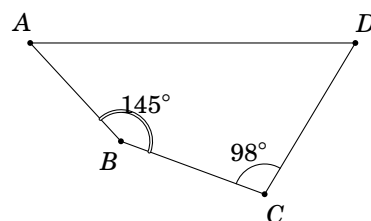
- (A) 4 m. (B) $\sqrt{2}$ m. (C) 2 m. (D) 1 m.

❖ **Câu 29.** Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Số đo của góc lớn nhất của tam giác là

- (A) $\hat{A} = 135^\circ$. (B) $\hat{A} = 150^\circ$. (C) $\hat{B} = 60^\circ$. (D) $\hat{A} = 120^\circ$.

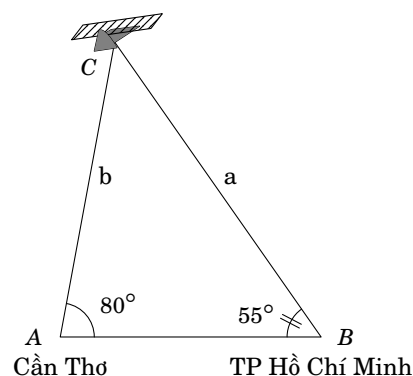
❖ **Câu 30.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 35$, $BC = 42$, $CD = 51$, $\widehat{ABC} = 145^\circ$, $\widehat{BCD} = 98^\circ$. Tính độ dài cạnh AD .

- (A) $74,2$. (B) $77,3$. (C) $71,7$. (D) $70,5$.



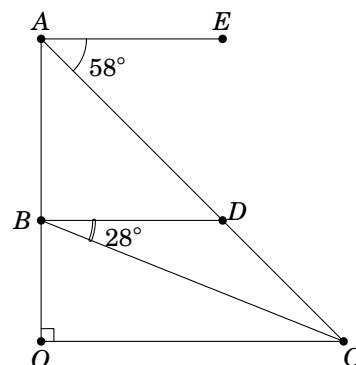
❖ **Câu 31.** Một vệ tinh quay quanh Trái Đất, đang bay phía trên hai trạm quan sát ở hai thành phố Hồ Chí Minh và Cần Thơ. Khi vệ tinh nằm giữa hai trạm này, góc nâng của nó được quan sát đồng thời là 55° tại thành phố Hồ Chí Minh và 80° tại Cần Thơ. Hỏi khi đó vệ tinh cách trạm quan sát tại Cần Thơ bao xa? Biết rằng, khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 127 km, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị

- (A) 150 km. (B) 132 km. (C) 140 km. (D) 147 km.



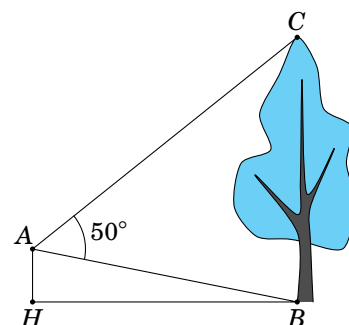
❖ **Câu 32.** Tại điểm B trên ngọn đồi có một cái tháp cao 80 m. Từ vị trí quan sát C người ta đo được các góc tương ứng là $\widehat{CAE} = 58^\circ$, $\widehat{CBD} = 28^\circ$ (hình vẽ). Khi đó chiều cao OB của ngọn đồi gần nhất với giá trị nào sau đây?

- (A) 39,3 m. (B) 38,8 m. (C) 39,8 m. (D) 40,9 m.



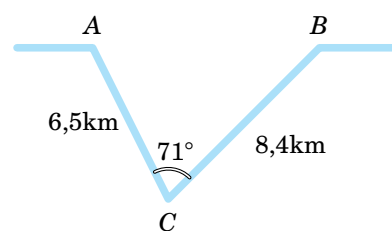
❖ **Câu 33.** Từ vị trí A người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Biết $AH = 5$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Chiều cao của cây nằm trong khoảng nào sau đây? (Tính theo đơn vị m)

- (A) (17;18). (B) (18;19). (C) (19;20). (D) (20;21).



❖ **Câu 34.** Một tàu vận tải đang di chuyển trên Đại Tây Dương thì có cảnh báo băng trôi phía trước nên đã di chuyển như hình vẽ. Nếu đi thẳng từ A đến B thì quãng đường ngắn lại bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

- (A) 5,8 km. (B) 6,1 km. (C) 7,2 km. (D) 6,6 km.



❖ **Câu 35.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 38 km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

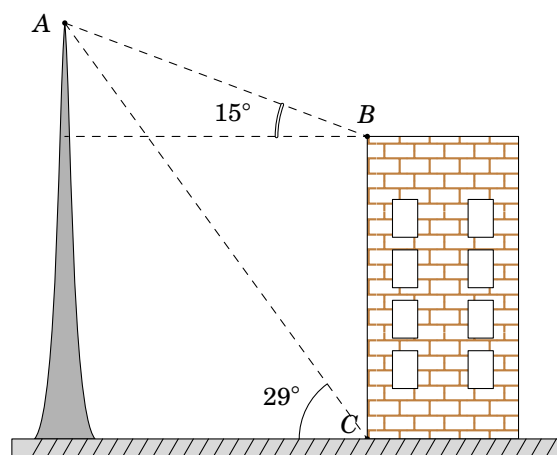
- (A) 70,2 km. (B) 71,3 km. (C) 69,4 km. (D) 66,8 km.

❖ **Câu 36.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

- (A) $10\sqrt{13}$ km. (B) $20\sqrt{13}$ km. (C) 1300 km. (D) 5200 km.

❖ **Câu 37.** Từ đỉnh của một tòa nhà người ta đo được góc tạo bởi hướng nhìn đến đỉnh của tháp truyền thông và phương ngang là 15° . Từ chân tòa nhà đó người ta đo được góc tạo bởi hướng nhìn đến đỉnh của tháp truyền thông và phương ngang là 29° . Biết tòa nhà cao 50 m, tính chiều cao của tháp.

- (A) 91,5 m. (B) 90,6 m. (C) 93,9 m. (D) 96,8 m.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho tam giác ABC có $BC = a = 7$; $AC = b = 8$; $AB = c = 5$.

- a) Góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
 b) Diện tích tam giác ABC là $10\sqrt{3}$.
 c) Chiều cao từ A đến BC là $\frac{20\sqrt{3}}{7}$.
 d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Câu 2.** Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AC = b = 7$; $AB = c = 5$; $\cos A = \frac{3}{5}$.

- a) góc A là góc tù.
 b) $a = 4\sqrt{2}$.
 c) $\sin A = -\frac{4}{5}$.
 d) Độ dài đường cao hạ từ đỉnh A bằng $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 20$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

- a) $BC = 18$. b) $\widehat{ABC} = 75^\circ$. c) $S = 129$. d) $2R - 5r < 0$.

❖ **Câu 4.** Cho tam giác ABC có $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 3$ và $\cos A = \frac{-\sqrt{3}}{9}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau.

- a) Góc nhỏ nhất trong tam giác là góc $\widehat{B}$.
 b) Độ dài cạnh BC là 5.
 c) Gọi M là trung điểm của cạnh AC . Độ dài cạnh BM là $\sqrt{13}$.
 d) Diện tích của tam giác ABC là $\sqrt{26}$.

❖ **Câu 5.** Cho tam giác ABC với $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau.

- a) Tam giác ABC có diện tích $\sqrt{2}$.
 b) Tam giác ABC có chiều cao $AH = 1$.
 c) Tam giác ABC có góc $\widehat{B}$ là góc tù.
 d) Tam giác ABC có tổng độ dài bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp bằng $\frac{7\sqrt{15}}{10}$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 2$, $\hat{A} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm M nằm giữa hai điểm B và C .

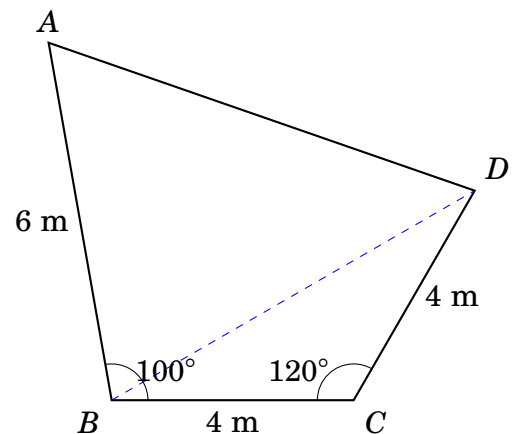
- a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$. b) $BC = \sqrt{7}$.
 c) $\cos B = \frac{\sqrt{7}}{7}$. d) Độ dài AM nhỏ nhất bằng $\frac{189}{49}$.

❖ **Câu 7.** Cho $\triangle ABC$, có diện tích bằng $12\sqrt{3}$, cạnh $AB = 6$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

- a) Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{B}$.
 b) Độ dài cạnh $BC = 2\sqrt{37}$.
 c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\frac{3\sqrt{111}}{2}$.
 d) Độ dài chân đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ có độ dài là $\frac{25}{7}$.

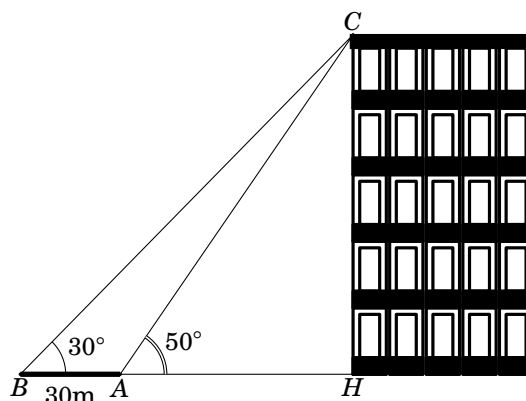
❖ **Câu 8.** Người ta định lát gạch tổ ong trên mảnh đất hình tứ giác $ABCD$ như mô hình. Biết rằng $AB = 6$ m, $BC = CD = 4$ m, $\widehat{ABC} = 100^\circ$, $\widehat{BCD} = 120^\circ$ và giá lát gạch là 400 000 đồng trên một mét vuông (bao gồm cả công thợ).

- a) Độ dài đường chéo BD bằng $4\sqrt{3}$ m.
 b) Số đo góc $\widehat{ABD}$ bằng 80° .
 c) Diện tích tam giác BCD bằng $4\sqrt{3}$ m².
 d) Chi phí để lát gạch toàn bộ mảnh đất lớn hơn 11 triệu đồng.



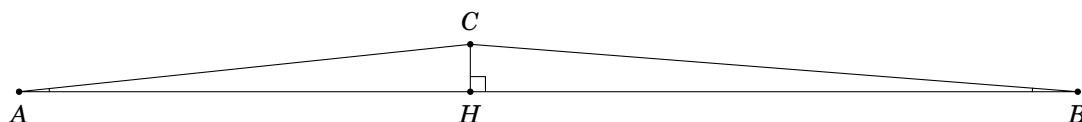
❖ **Câu 9.** Hai người dân đứng cách nhau 30 m cùng nhìn lên đỉnh của một tòa nhà theo góc nhìn lần lượt là 30° và 50° (tham khảo hình vẽ). Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau (các kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

- a) Góc nhìn từ đỉnh tòa nhà về hai phía A và B nơi hai người dân đang đứng là góc $\widehat{ACB}$ có số đo 30° .
 b) Khoảng cách từ vị trí người A tới nóc của tòa nhà là 43,9 m.
 c) Chiều cao của tòa nhà là khoảng 30 m.
 d) Vì gặp sự cố nên tầng trên cùng của tòa nhà đang bị cháy. Để cứu hộ đám cháy, một xe cứu hỏa đã tiếp cận dưới chân tòa nhà và chân thang đứng cách mặt đất 1,8 m, chiều dài tối đa của thang xếp là 40 m. Để tiếp cận được đám cháy thì xe cứu hỏa phải đứng cách chân tòa một khoảng xa nhất là 21,7 m.



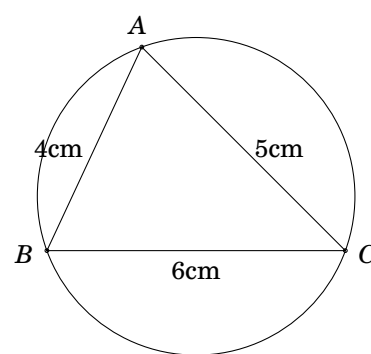
❖ **Câu 10.** Lúc 7 giờ kém 5 sáng, bạn Mai đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường phải đi lên dốc và xuống một con dốc (hình vẽ). Cho biết đoạn lên dốc dài 300 m, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$. Gọi C là đỉnh dốc. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau.

- Độ dốc lúc lên cao hơn lúc xuống.
- Độ cao con dốc là (làm tròn đến hàng phần mười) là 31,3 m.
- Quãng đường chim bay đi từ nhà đến trường (làm tròn đến hàng đơn vị) là 749 m.
- Để kịp đến trường lúc 7 giờ đúng, Mai đã lên dốc với vận tốc (làm tròn đến hàng đơn vị) là 6 km/h, biết Mai khi xuống dốc bạn đi tự do ko đạp xe với vận tốc không đổi là 15 km/h.



❖ **Câu 11.** Từ một miếng bìa hình tròn, bạn Nam đánh dấu ba điểm A, B, C trên đường tròn rồi cắt miếng bìa để thu được tam giác ABC có $AB = 4\text{ cm}$, $AC = 5\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$ (Hình vẽ).

- Nửa chu vi của tam giác ABC bằng $\frac{15}{2}$ (cm).
- Diện tích tam giác ABC lớn hơn 10 (cm^2).
- Tam giác ABC là tam giác nhọn.
- Gọi AD là đường phân giác trong của tam giác ABC. Chiều dài của AD lớn hơn 3 (cm).



Tự luận.

❖ **Bài 1.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$, $c = 12$.

- Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác.
- Tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.
- Tính diện tích của tam giác.
- Tính độ dài các đường cao của tam giác.

$$a = 12\sqrt{2}, b = 6\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1);$$

$$R = 12$$

$$S = 36(\sqrt{3} + 1)$$

$$h_a = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1), h_b = 6\sqrt{2}, h_c = 6(\sqrt{3} + 1)$$

❖ **Bài 2.** Cho tam giác ABC có $a = 19$, $b = 6$, $c = 15$.

- Tính $\cos A$.
- Tính diện tích tam giác.
- Tính độ dài đường cao h_c .
- Tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

$$\cos A = -\frac{5}{9}$$

$$S = 10\sqrt{14}$$

$$h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

❖ **Bài 3.** Cho tam giác ABC có $a = 4$, $\hat{C} = 60^\circ$, $b = 5$.

- Tính các góc và các cạnh còn lại của tam giác.
- Tính diện tích của tam giác.
- Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác.

$$c = \sqrt{21}, \hat{A} \approx 49^\circ, \hat{B} \approx 71^\circ$$

$$S = 5\sqrt{3}$$

$$m_a = \sqrt{19}$$

Bài 4. Giải tam giác ABC , biết:

- a) $a = b = 6; \widehat{C} = 54^\circ$. b) $c = 7; b = 23; \widehat{A} = 130^\circ$. c) $c = 14; \widehat{A} = 60^\circ; \widehat{B} = 40^\circ$.
 d) $b = 35; \widehat{A} = 40^\circ; \widehat{C} = 120^\circ$. e) $a = 14; b = 18; c = 20$. f) $a = 6; b = 7,3; c = 4,8$.

Bài 5. Gọi S là diện tích tam giác ABC . Chứng minh rằng

- a) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$. b) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Bài 6. Cho tam giác MNP có $MN = 10$, $MP = 20$ và $\widehat{M} = 42^\circ$.

- a) Tính diện tích tam giác MNP . 🔍 xấp xỉ 67
 b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP . Tính diện tích tam giác ONP .

🔍 xấp xỉ 56,3

Bài 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh các tam giác GBC, GAB, GAC có diện tích bằng nhau.

Bài 8. Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.

- a) Chứng minh $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{BD}{BA} \cdot \frac{BE}{BC}$.
 b) Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 9. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có

- a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$. d) $h_a = 2R \sin B \sin C$.
 b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$. e) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.
 c) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

Bài 10. Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD . Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến kẻ từ A và B vuông góc. Chứng minh:

- a) $a^2 + b^2 = 5c^2$. b) $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$.

Bài 12. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{2} = \frac{\sin C}{\sqrt{3}}$. Tính số đo các góc của tam giác. 🔍 $\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$

Bài 13. Cho tam giác ABC có $S = 2R^2 \sin A \sin B$. Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác vuông.

Bài 14. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh $b \neq c$ và thỏa mãn hệ thức: $a^2 = \frac{b^3 - c^3}{b - c}$. Tính số đo góc A .

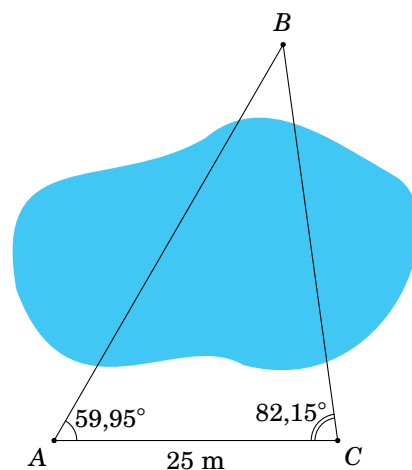
Bài 15. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $a^2 = \frac{b^3 + b^2c + bc^2 + c^3}{b + c}$. Tính số đo góc A . 🔍 $\widehat{A} = 90^\circ$

Bài 16. Cho tam giác ABC với ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng:

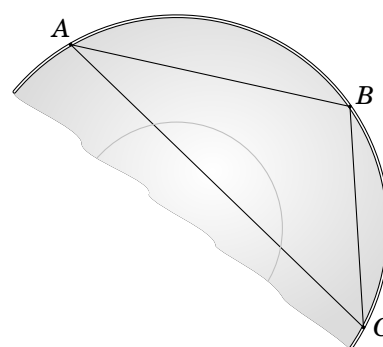
$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

Bài 17. Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng: $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

Bài 18. Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC , BCA . Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59,95^\circ$, $\widehat{BCA} = 82,15^\circ$ (hình vẽ bên). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? **29**



Bài 19. Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết $AB = 6,1$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 16,8$ cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). **11,6**



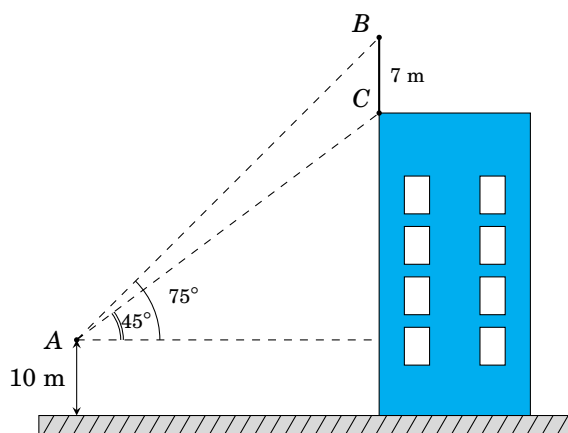
Bài 20. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 7 m. Từ một vị trí quan sát A cao 10 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 75° và 45° so với phương nằm ngang.

a) Tính các góc của tam giác ABC .

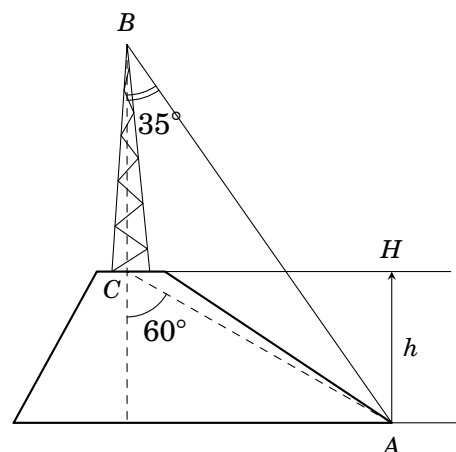
135°

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

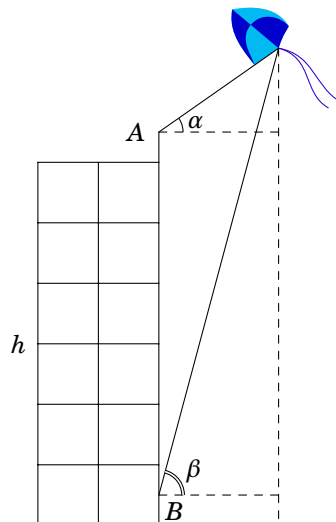
12,56



Bài 21. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười). **81,4**

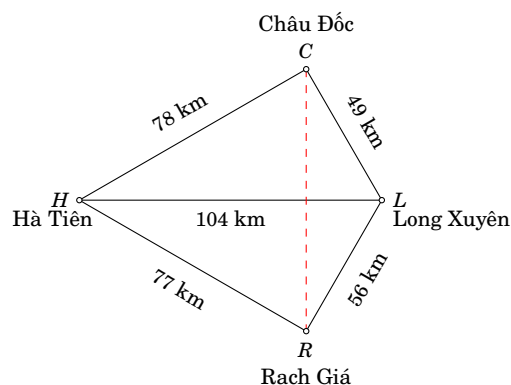


Bài 22. Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất tới mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20$ m (minh họa ở hình bên). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



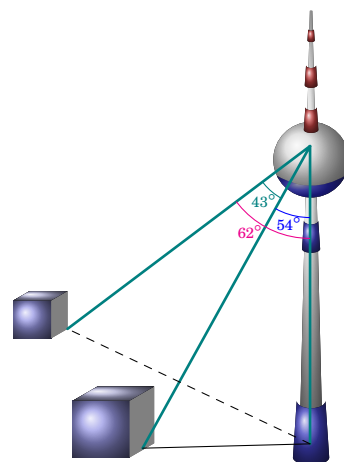
25

Bài 23. Trên bản đồ địa lí, người ta thường gọi tứ giác với bốn đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa theo các khoảng cách đã cho trên, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá.



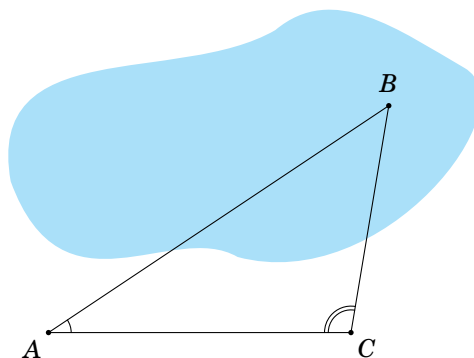
76,3 m.

Bài 24. Một người đứng ở trên một tháp truyền hình cao 352 m so với mặt đất, muốn xác định khoảng cách giữa hai cột mốc trên mặt đất bên dưới. Người đó quan sát thấy góc được tạo bởi hai đường ngắm tới hai mốc này là 43° , góc giữa phương thẳng đứng và đường ngắm tới một điểm mốc trên mặt đất là 62° và đến điểm mốc khác là 54° (Hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai cột mốc này (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị).



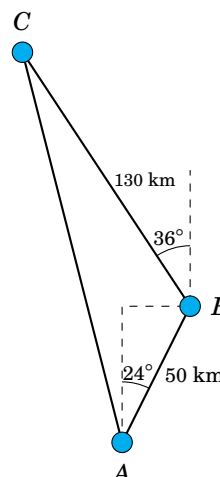
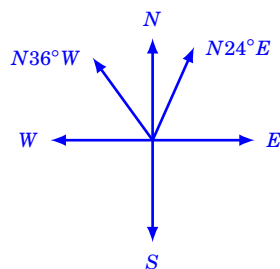
142

Bài 25. Bác An cần đo khoảng cách từ một địa điểm A trên bờ hồ đến một địa điểm B ở giữa hồ. Bác sử dụng giác kế để chọn một điểm C cùng nằm trên bờ với A sao cho $\widehat{BAC} = 45^\circ$, $\widehat{ACB} = 85^\circ$ và $AC = 60$ m. Hỏi khoảng cách AB bằng bao nhiêu mét?



≈ 60,9

Bài 26. Một tàu cá xuất phát từ đảo A , chạy 50 km theo hướng $N24^\circ E$ đến đảo B để lấy thêm ngư cụ, rồi chuyển hướng $N36^\circ W$ chạy tiếp 130 km đến ngư trường C .



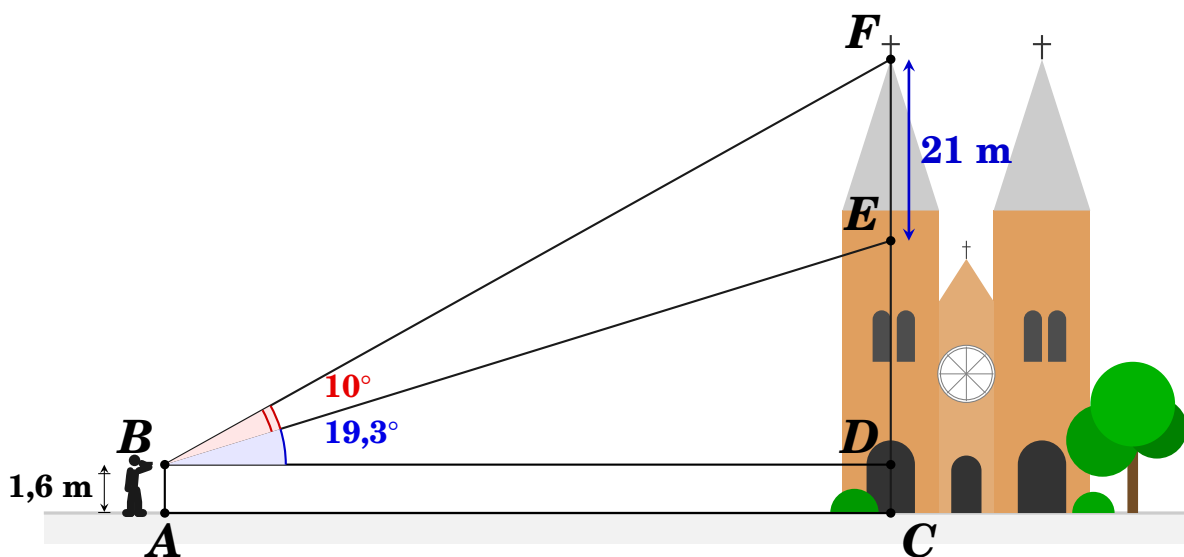
a) Tính khoảng cách từ vị trí xuất phát A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị đo kilômét).

161

b) Tìm hướng từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

Bài 27. Nhà thờ Đức Bà tọa lạc tại trung tâm Thành phố Hồ Chí Minh được khánh thành vào tháng 4 năm 1880, tuy nhiên lúc đó nhà thờ chưa có hai mái hình chóp. Cho đến năm 1895, người ta mới xây thêm hai mái hình chóp này để che gác chuông, mỗi mái cao 21 m và vẫn giữ nguyên hình dáng cho đến hiện nay. Trong một buổi học tập ngoài trời tại nhà thờ Đức Bà, giáo viên bộ môn Toán đã chia sẻ cho học sinh lớp 10A về lịch sử nói trên của nhà thờ. Sau đó giáo viên chia lớp thành nhiều nhóm, các nhóm cùng thực hiện một dự án với đề bài: "Xác định khoảng cách từ mắt mình đến đỉnh mái của nhà thờ (đoạn BF) và chiều cao nhà thờ (đoạn CF)". Bạn Minh dùng giác kế xác định được $\widehat{FBE} = 10^\circ$, $\widehat{EBD} = 19,3^\circ$ (Hình vẽ). Là một thành viên trong nhóm bạn Minh, hãy giúp nhóm hoàn thành nhiệm vụ được giao, biết rằng khoảng cách từ mắt bạn Minh đến mặt đất là 1,6 m.

$\approx 48,75$



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	B	2	C	3	B	4	C	5	B	6	C	7	C	8	A	9	D	10	B
11	A	12	B	13	A	14	C	15	B	16	D	17	C	18	C	19	B	20	D
21	B	22	C	23	D	24	B	25	C	26	D	27	C	28	C	29	D	30	D
31	D	32	C	33	C	34	B	35	C	36	B	37	D						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 7.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 9.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 11.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ		

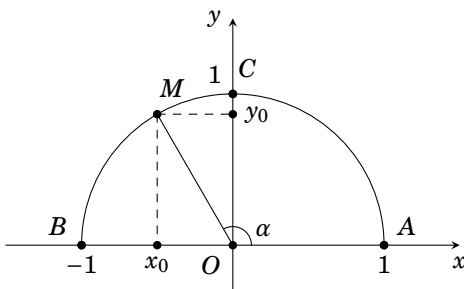
§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 3

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm $M(x_0; y_0)$ sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$ (hình vẽ bên dưới). Khi đó giá trị lượng giác $\sin \alpha$ bằng



- (A) x_0 . (B) $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$). (C) y_0 . (D) $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$).

❖ **Câu 2.** Tính giá trị của biểu thức $P = 2\sin 30^\circ - 4\cos 0^\circ$ ta được

- (A) $P = 1$. (B) $P = -4$. (C) $P = 5$. (D) $P = -3$.

❖ **Câu 3.** Giá trị của biểu thức $A = 2 - \sqrt{2}\sin 45^\circ + \cos^2 60^\circ$ là

- (A) $A = \frac{-3}{2}$. (B) $A = \frac{5}{4}$. (C) $A = \frac{3}{2}$. (D) $A = \frac{-5}{4}$.

❖ **Câu 4.** Trong $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Công thức nào đúng?

- (A) $S = ac \sin B$. (B) $S = \frac{1}{2}ac \sin C$. (C) $S = \frac{1}{2}ac \sin A$. (D) $S = \frac{1}{2}ac \sin B$.

❖ **Câu 5.** Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi S , p lần lượt là diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

- (A) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (B) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.
(C) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$. (D) $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- (A) $\sin A = \frac{a}{2R}$. (B) $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$. (C) $\frac{a}{\sin A} = 2R$. (D) $b \cdot \sin B = 2R$.

❖ **Câu 7.** Giá trị biểu thức $\cos^2 30^\circ - 2\tan 60^\circ \cdot \cot 60^\circ$ bằng

- (A) $-\frac{5}{4}$. (B) $\frac{7}{4}$. (C) $-\frac{7}{4}$. (D) $\frac{5}{4}$.

❖ **Câu 8.** Cho $\triangle ABC$ có $a = 4$, $c = 6$, $\widehat{B} = 120^\circ$. Diện tích của tam giác là

- (A) $12\sqrt{3}$. (B) 6. (C) $6\sqrt{3}$. (D) 12.

❖ **Câu 9.** Tam giác ABC có $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 30^\circ$. Độ dài cạnh AB là

- (A) $\sqrt{5+3\sqrt{2}}$. (B) $\sqrt{5+\sqrt{6}}$. (C) $\sqrt{5-3\sqrt{2}}$. (D) $\sqrt{5-\sqrt{6}}$.

❖ **Câu 10.** Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Độ dài cạnh BC là

- (A) $BC = \sqrt{3}$. (B) $BC = 2$. (C) $BC = 1$. (D) $BC = \sqrt{2}$.

❖ **Câu 11.** Cho tam giác ABC có $AB = 26$, $BC = 28$, $CA = 30$. Độ dài đường cao AH của tam giác là

- (A) 21. (B) 24. (C) 14. (D) 12.

❖ **Câu 12.** Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. (B) $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
(C) $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$. (D) $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.

❖ **Câu 13.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Diện tích tam giác là

- (A) $\frac{1}{2}ac \sin C$. (B) $\frac{1}{2}bc \sin B$. (C) $\frac{1}{2}ac \sin B$. (D) $\frac{1}{2}bc \sin C$.

❖ **Câu 14.** Cho tam giác ABC có $AC = 2$, $\widehat{C} = 150^\circ$, $BC = \sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh AB .

- (A) $AB = 13$. (B) $AB = 10$. (C) $AB = \sqrt{10}$. (D) $AB = \sqrt{13}$.

❖ **Câu 15.** Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi S , R , h_c lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường cao hạ từ đỉnh C của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $S = \frac{1}{2}abc$. (B) $\frac{a}{\sin A} = R$.
(C) $\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. (D) $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

❖ **Câu 16.** Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\cot \alpha$.

- (A) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. (B) $\cot \alpha = 3$. (C) $\cot \alpha = \sqrt{3}$. (D) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

❖ **Câu 17.** Cho góc α là góc tù. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\sin \alpha < 0$. (B) $\cos \alpha < 0$. (C) $\tan \alpha > 0$. (D) $\cot \alpha > 0$.

❖ **Câu 18.** Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 60^\circ$, $a = 8$, $c = 5$. Độ dài cạnh b bằng

- (A) 7. (B) 129. (C) 49. (D) $\sqrt{129}$.

❖ **Câu 19.** Cho tam giác ABC có $a = 8$, $b = 3$, $\widehat{C} = 60^\circ$. Diện tích tam giác ABC bằng

- (A) 12. (B) $6\sqrt{3}$. (C) 24. (D) $12\sqrt{3}$.

❖ **Câu 20.** Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 3$. Tỷ số $\frac{BC}{\sin A}$ bằng

- (A) 3. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 6. (D) 4.

❖ **Câu 21.** Cho góc α bù với β với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Biết $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{5}$. Khi đó $\sin \beta$ bằng

- (A) $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$. (B) $\sin \beta = \frac{-\sqrt{3}}{5}$. (C) $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{5}$. (D) $\sin \beta = \frac{-\sqrt{2}}{5}$.

❖ **Câu 22.** Cho $\cos \alpha = \frac{4}{13}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

- (A) $\frac{4}{3\sqrt{17}}$. (B) $\frac{3\sqrt{17}}{13}$. (C) $\frac{3\sqrt{17}}{14}$. (D) $-\frac{3\sqrt{17}}{13}$.

❖ **Câu 23.** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết $AB = 15$, $AC = 17$, $BC = 8$.

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 3.

❖ **Câu 24.** Cho tam giác ABC với $AB = 12$ và $\hat{C} = 30^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- (A) 12. (B) 6. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $12\sqrt{3}$.

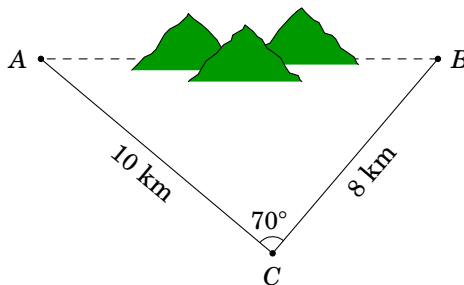
❖ **Câu 25.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$, $AC = 8$, góc $A = 45^\circ$. Khi đó diện tích $\triangle ABC$ bằng

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) $20\sqrt{3}$. (C) $20\sqrt{2}$. (D) $10\sqrt{2}$.

❖ **Câu 26.** Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\tan(A+B) + \tan C = 0$. (B) $\cos(A+B) = \cos C$.
(C) $\sin(A+B) + \sin C = 0$. (D) $\cot(A+B) = \cot C$.

❖ **Câu 27.** Để lắp đường dây điện cao thế từ vị trí A đến vị trí B , do phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10km, sau đó nối đường dây từ vị trí C đến vị trí B dài 8km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 70° .



Chiều dài tăng thêm của dây điện vì không thể nối trực tiếp từ A đến B là bao nhiêu kilômét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

- (A) 7,5. (B) 6,3. (C) 14,3. (D) 3,2.

❖ **Câu 28.** Trong đợt bão Noru đổ bộ vào miền Trung năm 2022, có hai tàu đánh cá thuộc hai tỉnh cùng neo đậu tại một khu tránh trú bão. Sau khi bão tan, hai tàu cùng xuất phát về cảng cá quê nhà, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 28 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 25 km/h. Sau 6 giờ, cả hai tàu cùng cập cảng của mình. Hỏi hai cảng cá cách nhau bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

- (A) 159,8 km. (B) 195,7 km. (C) 150 km. (D) 168 km.



Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 7$, $b = 9$, $c = 12$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Diện tích tam giác ABC là $S = 14\sqrt{5}$.
b) Nửa chu vi của tam giác ABC là $p = 14$.
c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \sqrt{3}$.
d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{54\sqrt{5}}{5}$.

❖ **Câu 2.** Cho $\triangle ABC$ có số đo các cạnh lần lượt là $AB = c = 7$, $AC = b = 9$, $BC = a = 12$.

a) $\widehat{ACB} = 45^\circ$.

b) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$, với p là nửa chu vi của tam giác.

c) Diện tích $\triangle ABC$ bằng $13\sqrt{5}$.

d) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.

❖ **Câu 3.** Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = 5$, $AC = 8$, và $BC = 7$.

a) Chu vi tam giác ABC bằng 20.

b) $\cos C = \frac{1}{7}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{35}{8\sqrt{3}}$.

d) Lấy điểm K là điểm đối xứng của B qua C . Diện tích tam giác ABK bằng $30\sqrt{3}$.

❖ **Câu 4.** Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 2$. Gọi R , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của tam giác ABC .

a) $\widehat{C} = 75^\circ$.

b) $AC > BC$.

c) $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 5.** Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Khi đó

a) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

b) $\cot \alpha < 0$.

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

d) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $BC = 12$, $\widehat{B} = 60^\circ$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

a) $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = R$.

b) $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos B$.

c) Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B$.

d) $AC = \sqrt{124}$.

❖ **Câu 7.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$, $AC = 4$, diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Khi đó

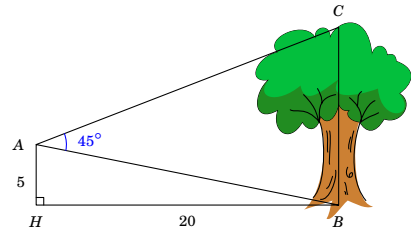
a) $\sin A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos^2 A = \frac{1}{4}$.

c) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

d) $2\cos^2 A + \sqrt{3}\sin A = 1$.

❖ **Câu 8.** Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (tham khảo hình bên dưới). Biết rằng độ dài $AH = 5$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.



a) Diện tích tam giác AHB bằng 50 m^2 .

b) Số đo của góc $\widehat{ABC}$ xấp xỉ 78° .

c) Chiều cao của cây xấp xỉ bằng 17 m.

d) Nếu $\widehat{ACB} = 45^\circ$ thì độ dài đoạn AC bằng 10 m.



Tự luận.

Bài 1. Cho góc tù α có $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

a) Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

b) Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \sin \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cot(90^\circ - \alpha).$$

$$B = \frac{3(\sin \alpha + \sqrt{2} \cdot \cos \alpha) - 2 \sin \alpha}{\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}.$$

$$\text{☞ } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \cot \alpha = -2\sqrt{2}; A = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}, B = -3$$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 15^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$, $c = 2$.

a) Tính số đo góc A và độ dài các cạnh a , b .

$$\text{☞ } a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

b) Tính diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

$$\text{☞ } S = \sqrt{3} - 1, R = 2$$

c) Lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{BCD} = \widehat{DCA}$ (tức CD là tia phân giác của $\widehat{BCA}$).

Tính độ dài CD .

$$\text{☞ } CD = 2 + 2\sqrt{3}$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$. Trên các cạnh AB , BC lần lượt lấy các điểm M , K sao cho $BM = BK = 2$. Tính độ dài MK .

$$\text{☞ } \frac{8\sqrt{30}}{15}$$

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Bài 5. Cho $0^\circ < x < 180^\circ$ và $\cos x = -\frac{3}{5}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{\tan^3 x + 2 \tan^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x}{2 \tan^3 x \cdot \cos^3 x}.$$

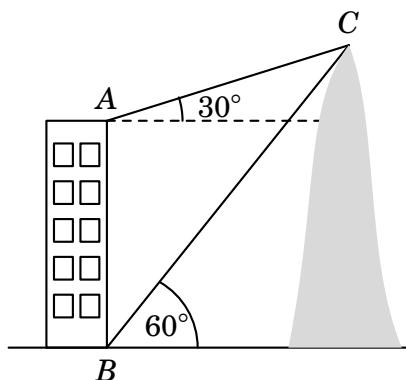
$$\text{☞ } -\frac{1}{27}$$

Bài 6. Nhà ông Thành có một khu vườn hình tam giác ABC , biết rằng $AB = 80$ m và $10 \sin A = 12 \sin B = 6 \sin C$. Hỏi khu vườn nhà ông Thành có diện tích bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

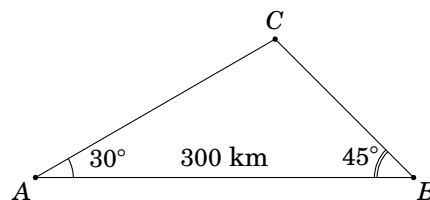
$$\text{☞ } 730$$

Bài 7. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$ m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc 60° . Tính chiều cao ngọn núi so với mặt đất.

$$\text{☞ } 105$$

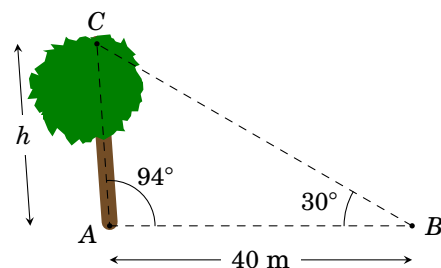


Bài 8. Hai tàu du lịch xuất phát từ hai thành phố cảng A và B cách nhau 300 km đến đảo C như hình minh họa. Biết hai tàu cùng chuyển động đều với vận tốc 80 km/h và $\widehat{CAB} = 30^\circ$, $\widehat{CBA} = 45^\circ$. Tàu 1 ở thành phố A khởi hành lúc 8 h, tàu 2 ở thành phố B muốn đến đảo C cùng lúc với tàu 1 thì phải khởi hành sau tàu 1 bao nhiêu phút? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút)



48

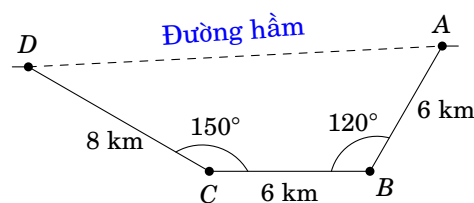
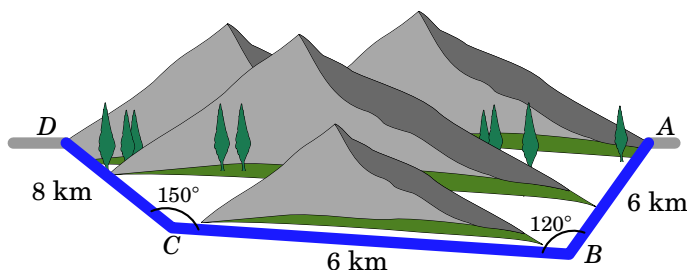
Bài 9. Do ảnh hưởng của gió, một cái cây bị nghiêng một góc 4° so với phương thẳng đứng. Tại một điểm cách gốc cây 40 mét, góc nâng từ điểm đó đến ngọn cây là 30° (hình vẽ).



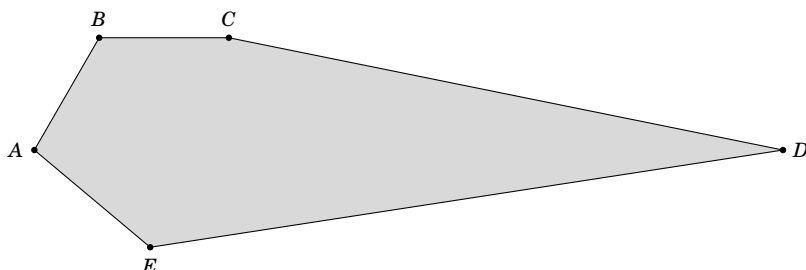
24

Hãy tính chiều cao h (mét) của cây (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

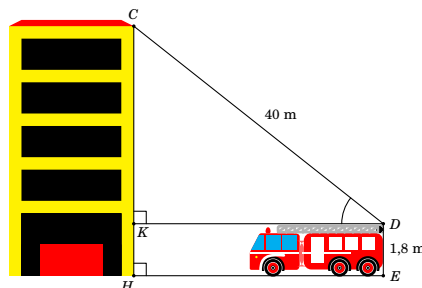
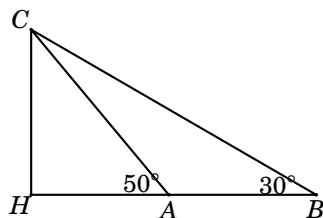
Câu 9. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong hình vẽ bên dưới, trong đó $AB = BC = 6$ (km), $CD = 8$ (km), $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $\widehat{BCD} = 150^\circ$. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi vào mùa mưa bão, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Tính độ dài đoạn đường AD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 10. Ông An định thiết kế một mảnh đất trồng rau có dạng hình ngũ giác $ABCDE$ (xem hình minh họa bên dưới). Ông đo được các cạnh AB , CD , DE , EA lần lượt là 3 m, 6 m, 7 m, 4 m; cạnh $BC \parallel AD$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$; $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Hãy giúp ông An tính diện tích mảnh đất (đơn vị mét vuông, kết quả diện tích mảnh đất làm tròn đến hàng phần trăm).

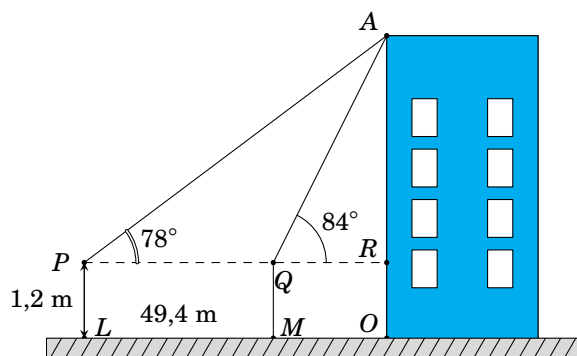


Bài 10. Hai người dân đứng cách nhau 30 m cùng nhìn lên đỉnh của một tòa nhà theo góc nhìn lần lượt là 30° và 50° . Vì gặp sự cố nên tầng trên cùng của tòa nhà đang bị cháy. Để cứu hộ đám cháy, một xe cứu hỏa đã tiếp cận dưới chân tòa nhà và chân thang đứng cách mặt đất 1,8 m, chiều dài tối đa của thang xếp là 40 m. Để tiếp cận được đám cháy thì xe cứu hỏa phải đứng cách chân tòa một khoảng xa nhất là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần mười)



24,3

Bài 11. Để xác định chiều cao của một tòa nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M , sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 84^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 49,4$ m thì nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 78^\circ$. Tính chiều cao của tòa nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là $PL = QM = 1,2$ m (Hình vẽ).

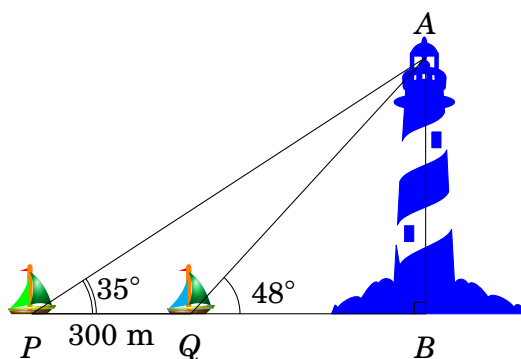


Giải thích: Góc nâng là góc tạo bởi tia ngắm nhìn lên và đường nằm ngang.

461,2 m

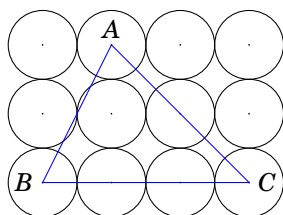
Bài 12. Cho hai tàu thủy P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q , người ta nhìn thấy tháp hải đăng AB dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

568,46 m



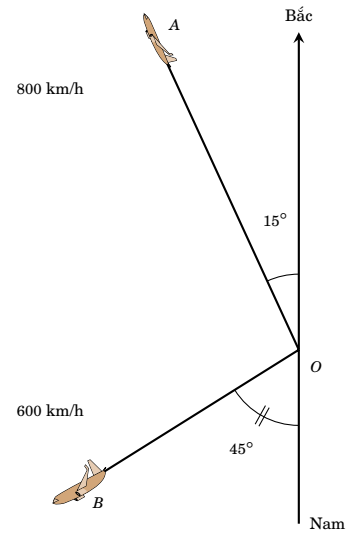
Bài 13. Cho 12 đường tròn có cùng bán kính bằng 13 đặt tiếp xúc nhau như hình vẽ. Các điểm A, B và C là tâm của các đường tròn. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

41,1



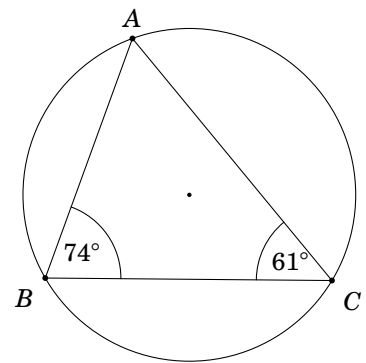
Bài 14. Hai máy bay rời một sân bay cùng một lúc. Một chiếc bay với vận tốc 800 km/h theo hướng lệch so với hướng bắc 15° về phía tây. Chiếc còn lại bay theo hướng lệch so với hướng nam 45° về phía tây với vận tốc 600 km/h (Hình vẽ). Hỏi hai máy bay đó cách nhau bao xa sau 3 giờ?

3650 km



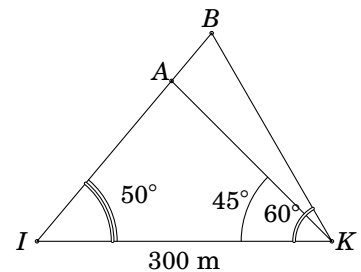
Bài 15. Một bác nông dân dùng hàng rào để dựng nên một chuồng nuôi gà có dạng hình tròn trên mặt đất bằng phẳng. Bác nông dân chọn ba vị trí A, B, C trên hàng rào bao quanh chuồng để lần lượt gắn ba chiếc đèn thấp sáng. Biết rằng khoảng cách giữa hai chiếc đèn tại A, B là 8 m; chiếc đèn tại B nhìn đoạn thẳng nối hai chiếc đèn tại A, C với một góc 74° ; chiếc đèn tại C nhìn đoạn thẳng nối hai chiếc đèn tại A, B với một góc 61° . Tính diện tích của chuồng nuôi gà đó (theo đơn vị m^2 ; làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

66

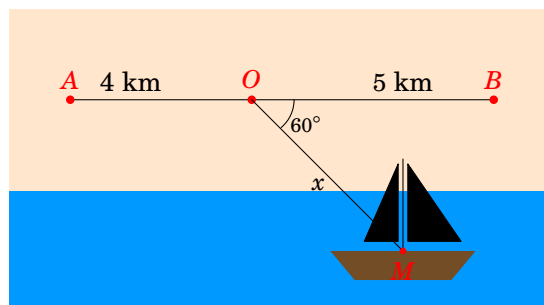


Bài 16. Trong một cuộc đua thuyền ghe được tổ chức trên sông, có hai ghe A và B ở vị trí như hình vẽ. Điểm K là vị trí khán giả đứng xem và quan sát thấy ghe A và ghe B theo các góc tạo với bờ IK lần lượt là 45° và 60° . Điểm I là đích đến của cuộc đua. Lúc ghe A , ghe B và đích I thẳng hàng, từ điểm I quan sát thấy ghe A và ghe B tạo với bờ một góc bằng 50° . Khoảng cách giữa điểm I và điểm K là 300 m. Tính khoảng cách giữa hai ghe thuyền (đơn vị mét, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

64



Bài 17. Một con tàu biển M rời cảng O và chuyển động thẳng theo phương tạo với bờ biển một góc 60° . Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía của cảng O và lần lượt cách cảng O khoảng cách là 4 km và 5 km (tham khảo hình vẽ).

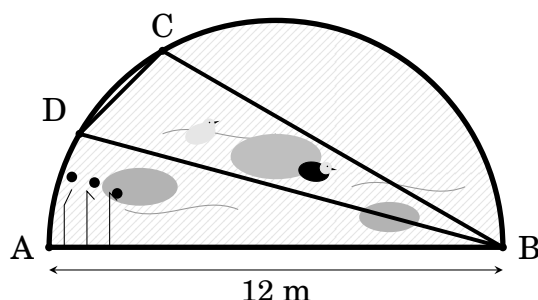


Biết khoảng cách từ con tàu đến hai đài quan sát A và B là bằng nhau. Khoảng cách từ con tàu M đến cảng O là bao nhiêu km?

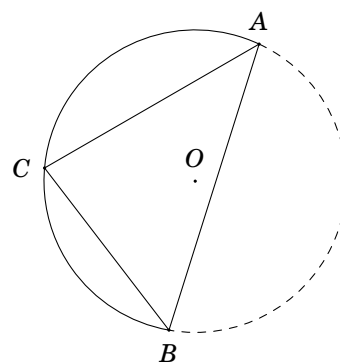
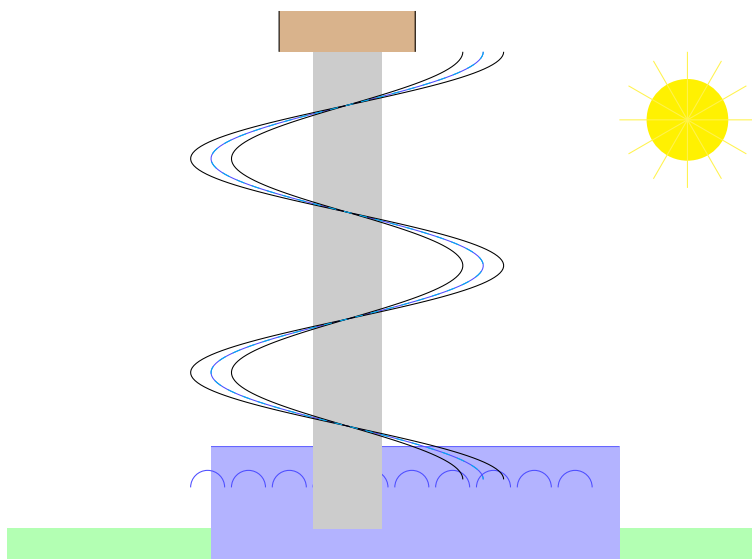
1

Bài 18. Nhà anh Bình có một cái ao với hình dạng là một nửa hình tròn, bờ ao là đường kính $AB = 12$ m. Trên lối đi quanh ao (tức trên cung $\widehat{AB}$) anh Bình đặt 3 chiếc cọc tại vị trí điểm C , D và B . Sau đó anh Bình dùng lưới rào thành một vùng mặt ao hình tam giác BCD để nuôi vịt trong đó, biết rằng $\widehat{AD} = \widehat{CD}$. Khi số đo $\widehat{AD}$ bằng 30° thì diện tích của phần ao được rào để nuôi vịt bằng $a\sqrt{b}$ m², với $a > b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng bao nhiêu?

90



Bài 19. Trượt nước là một trò chơi vận động được nhiều người yêu thích trong các công viên nước. Một cái máng trượt nước có thiết kế dạng cung tròn với hai đầu mút là A và B . Người ta xác định được hai điểm A , B ở hai đầu máng trượt và một điểm C nằm trên máng trượt sao cho $AB = 10$ m, $AC = 6$ m, $BC = 7$ m. Độ dài máng trượt nước đó (độ dài cung tính từ điểm A đến điểm B) bằng bao nhiêu mét (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết độ dài cung tròn tính theo công thức $\ell = \frac{n\pi R}{180}$ (ℓ : độ dài cung tròn, n : số đo (độ) của góc ở tâm chắn cung tròn, R : bán kính đường tròn)



23

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	D	3	B	4	D	5	C	6	D	7	A	8	C	9	C	10	A
11	B	12	B	13	C	14	D	15	D	16	B	17	B	18	A	19	B	20	C
21	D	22	B	23	D	24	A	25	D	26	A	27	A	28	A				

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 2.	☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S

§1 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Khái niệm vectơ

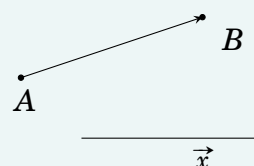


- ♦ **Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- ♦ **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa hai điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

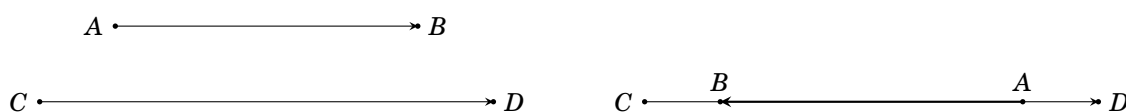


LƯU Ý.

- ♦ Nếu chỉ rõ điểm đầu là A và điểm cuối là B, ta có "vectơ AB", kí hiệu $\overrightarrow{AB}$. Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối, ta dùng các chữ cái thường để kí hiệu. Ví dụ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \dots$
- ♦ Độ dài $\vec{a}$, kí hiệu $|\vec{a}|$; Độ dài $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$ và hiển nhiên $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



2) Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau



- ♦ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là **giá** của vectơ đó.

- ◇ Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ◇ Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- ◇ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

3) Vectơ-không

⚙ **Định nghĩa:** Là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

- ☆ Kí hiệu $\vec{0}$, nghĩa là $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \dots$;
- ☆ Độ dài vectơ-không bằng 0, nghĩa là $|\vec{0}| = 0$.

⚙ **Qui ước:** Vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định một vectơ

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

◇ Ví dụ 1

Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm số vectơ được tạo thành từ hai điểm này?

◇ Ví dụ 2

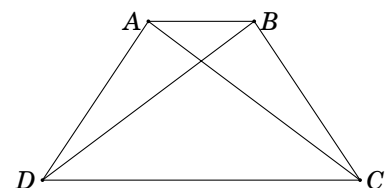
Cho tam giác ABC . Viết tất cả các vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C .

Dạng 2 Sự cùng phương và hướng của hai vectơ. Hai vectơ bằng nhau, đối nhau

- ◇ Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ◇ Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ◇ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

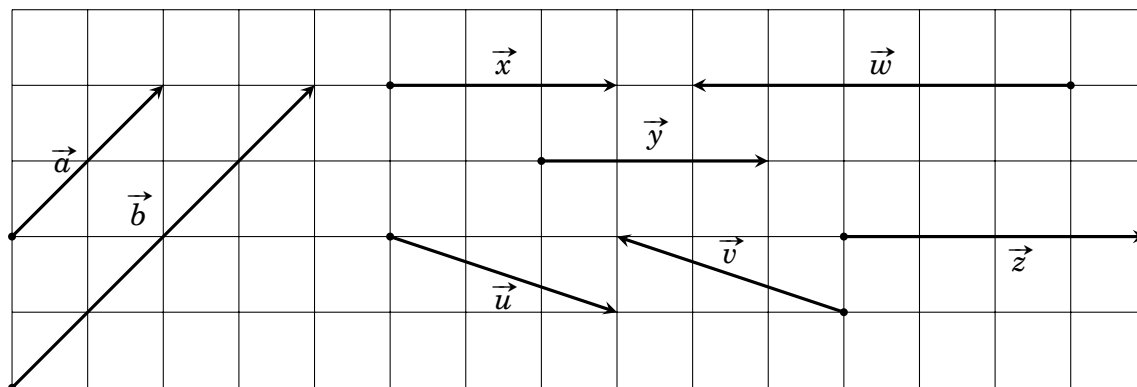
◇ Ví dụ 3

Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AB, CD , $AB < CD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên bằng nhau hay không?



❖ Ví dụ 4

Trong hình vẽ bên dưới, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các vectơ bằng nhau.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là một trong bốn đỉnh của hình bình hành $ABCD$. Trong số các vectơ trên, hãy chỉ ra

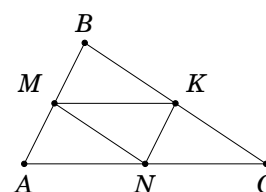
- Các vectơ cùng phương.
- Các cặp vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.
- Các cặp vectơ bằng nhau.

Bài 2



Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và K lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC .

- Tìm các vectơ bằng với $\vec{AM}$.
- Tìm các vectơ bằng với $\vec{KN}$.



Dạng

3

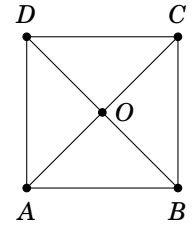
Độ dài của vectơ

- ◇ **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa hai điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- ◇ Độ dài $\vec{a}$, kí hiệu $|\vec{a}|$. Độ dài $\vec{AB}$, kí hiệu $|\vec{AB}|$ và hiển nhiên $|\vec{AB}| = AB$.

Ví dụ 5

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng 2.

- Tính độ dài của các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AO}$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Tính độ dài vectơ $\vec{AI}$.



Ví dụ 6

Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng 3. Gọi H là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC .

- Hãy tính độ lớn của vectơ $\vec{AH}$
- Hãy tính độ lớn của vectơ $\vec{AG}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



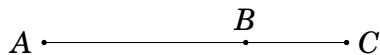
Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của vectơ $\vec{MD}$ và $\vec{MN}$.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và B ở giữa như hình vẽ sau.



Cặp vectơ nào sau đây ngược hướng?

- (A) $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 2.** Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (B) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$. (C) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. (D) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$.

❖ **Câu 3.** vectơ có điểm đầu M và điểm cuối N được kí hiệu như thế nào là đúng?

- (A) MN . (B) NM . (C) $\overrightarrow{MN}$. (D) $\overrightarrow{mn}$.

❖ **Câu 4.** Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

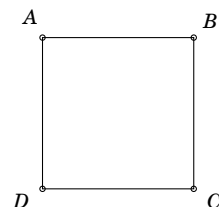
- (A) 2. (B) 6. (C) 13. (D) 12.

❖ **Câu 5.** Cho hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và cuối là các đỉnh của hình bình hành?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 6.** Cho hình vuông $ABCD$, câu nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. (D) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.



❖ **Câu 7.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
 (B) Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
 (C) Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng.
 (D) Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.

❖ **Câu 8.** Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

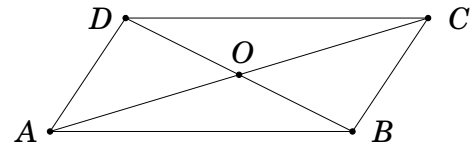
- (A) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 9.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$. (B) $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.
 (C) $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$.

❖ **Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Trên hình vẽ, số vectơ (khác $\vec{0}$, khác $\vec{AC}$) cùng phương với vectơ $\vec{AC}$ là

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



❖ **Câu 11.** Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\vec{AB}$ và $\vec{AM}$ cùng phương. (B) $\vec{MA} = \vec{MB}$.
(C) $|\vec{AB}| = |\vec{MB}|$. (D) $\vec{AB}$ và $\vec{MB}$ ngược hướng.

❖ **Câu 12.** Cho tam giác đều ABC , mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- (A) $\vec{AC}$ không cùng phương $\vec{BC}$. (B) $\vec{AB} = \vec{BC}$.
(C) $\vec{AC} \neq \vec{BC}$. (D) $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$.

❖ **Câu 13.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là I . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\vec{IC} = \vec{DI}$. (B) $\vec{AI} = \vec{IC}$. (C) $\vec{BI} = \vec{DI}$. (D) $\vec{IA} = \vec{BI}$.

❖ **Câu 14.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\vec{AB} = \vec{DC}$ và $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

- (A) Hình bình hành. (B) Hình thoi. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình vuông.

❖ **Câu 15.** Cho tứ giác A, B, C, D thỏa mãn $\vec{AB} = \vec{DC}$, phát biểu nào sau đây là **sai**?

- (A) $AB = CD$.
(B) $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ là hai vectơ cùng hướng.
(C) AC và BD nhận cùng một điểm làm trung điểm.
(D) $ABCD$ là hình bình hành.

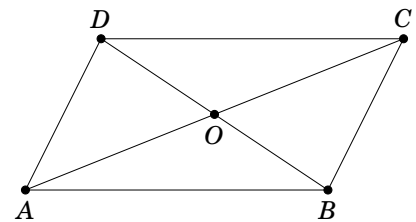
❖ **Câu 16.** Cho tam giác ABC , gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\vec{MN}$ và $\vec{AC}$ cùng phương. (B) $\vec{MN}$ và $\vec{BC}$ cùng phương.
(C) $\vec{MN}$ và $\vec{AB}$ cùng phương. (D) $\vec{MN}$ và $\vec{BN}$ cùng phương.

❖ **Câu 17.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O .

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\vec{AB} = \vec{CD}$. (B) $\vec{OA} = \vec{OC}$.
(C) $\vec{OB} = \vec{OD}$. (D) $\vec{AD} = \vec{BC}$.

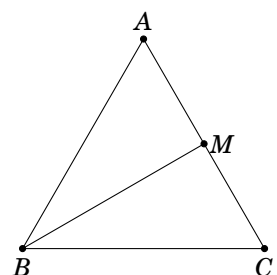


❖ **Câu 18.** Cho hình bình hành $ABCD$. Hai vectơ nào ngược hướng?

- (A) $\vec{AB}$ và $\vec{DB}$. (B) $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$. (C) $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$. (D) $\vec{AB}$ và $\vec{DC}$.

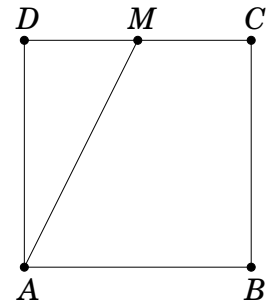
❖ **Câu 19.** Cho tam giác đều ABC cạnh a , có trung tuyến BM . Độ dài của $\vec{BM}$ là

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
(C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



❖ **Câu 20.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ lớn của vectơ $\overrightarrow{AM}$.

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
(C) $\frac{3a}{2}$. (D) $\frac{5a}{2}$.



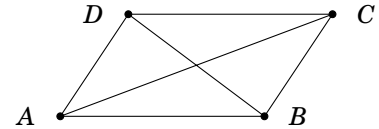
2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{QK}$ là cùng phương. b) $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KQ}$.
c) $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{QK}|$. d) $\overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{QK}$ là ngược hướng.

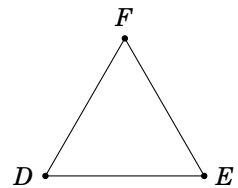
❖ **Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là cùng hướng.
b) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.
c) $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD}|$.
d) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.



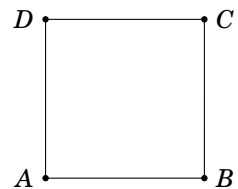
❖ **Câu 3.** Cho tam giác đều DEF . Gọi M là trung điểm của đoạn DE . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF}$. b) $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD}$.
c) $\overrightarrow{ME}$ cùng phương với $\overrightarrow{ED}$. d) $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}|$.



❖ **Câu 4.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a , I là điểm trên cạnh BC thỏa $CI = \frac{1}{2}IB$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là ngược hướng.
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
c) $|\overrightarrow{AC}| = 2a$.
d) $|\overrightarrow{AI}| = \frac{\sqrt{13}a}{3}$.



❖ **Câu 5.** Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Lấy điểm P đối xứng với điểm M qua N .

- a) $MN = BC$. b) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{MN}|$.
c) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng. d) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên BC .

- a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$. b) $|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{15}}{4}$.
c) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$. d) $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

❖ **Câu 7.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và có $AB = AD = \frac{1}{2}DC = a$. Gọi BF là đường phân giác trong của tam giác ABD ($F \in AD$).

- a) $CA^2 = DA^2 + DC^2$.
- b) $|\overrightarrow{CA}| = a\sqrt{3}$.
- c) $\widehat{ABF} = 45^\circ$.
- d) $|\overrightarrow{BF}| \approx 2,08a$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

❖ **Câu 8.** Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O .

- a) $B'C \perp BC$.
- b) $B'C \parallel AB$.
- c) Tứ giác $AB'CH$ là hình bình hành.
- d) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$; $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

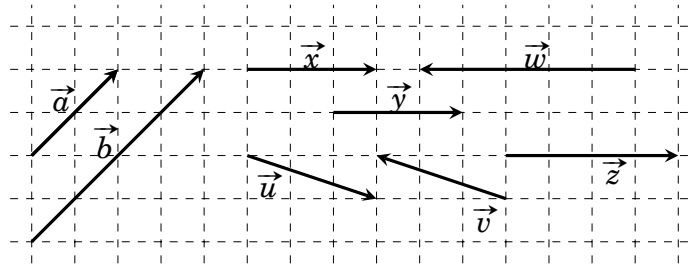


3

Tự luận.

❖ **Bài 1.** Cho các vectơ như hình vẽ. Có bao nhiêu cặp vectơ cùng phương xuất hiện trong hình?

8



❖ **Bài 2.** Cho đoạn thẳng MN có trung điểm là I .

- a) Viết các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là một trong ba điểm M , N , I .
- b) Vectơ nào bằng $\overrightarrow{MI}$, bằng $\overrightarrow{NI}$?

❖ **Bài 3.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD . Tìm vectơ:

- a) Cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$.
- b) Ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 8. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm của AG . Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AI}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu?

2,31

❖ **Bài 5.** Cho hình bình hành $ABCD$ biết $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 5\sqrt{2}$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Độ dài $\overrightarrow{BD}$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

9,9

❖ **Bài 6.** Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

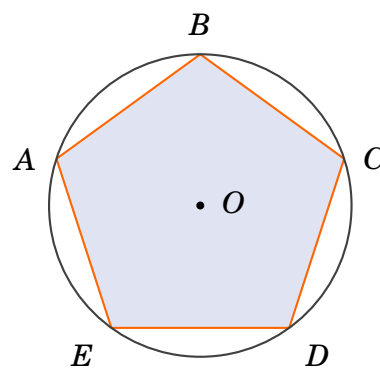
❖ **Bài 7.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MN}$ với $A(1;2)$, $M(0;-1)$, $N(3;5)$.

- a) Hãy chỉ ra mối liên hệ giữa các vectơ trên.
- b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó qua N hay không? nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N ?

Bài 8. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp trong đường tròn (C) tâm O bán kính R .

a) Gọi $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OD'}, \overrightarrow{OE'}$ lần lượt là các vectơ đối của $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$. Các điểm A', B', C', D', E' có nằm trên đường tròn (C) không?

b) Tính AA', AB, AD theo R .



Bài 9. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O) có BD là đường kính. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

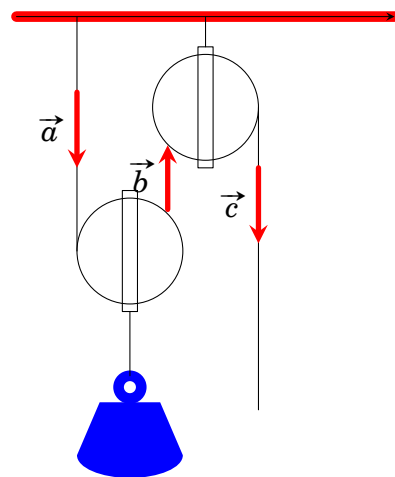
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{CH}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi M là trung điểm của BH . Hãy tìm điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BM}$.

Bài 10. Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của đoạn dây mô tả bằng các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (như hình vẽ).

a) Hãy chỉ ra các vectơ cùng phương.

b) Trong các vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.



Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	D	3	C	4	A	5	C	6	D	7	B	8	D	9	D	10	D
11	A	12	B	13	B	14	B	15	B	16	B	17	D	18	C	19	C	20	B

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d S	Câu 2.	a Đ b S c Đ d S
Câu 3.	a S b S c Đ d Đ	Câu 4.	a Đ b S c S d Đ
Câu 5.	a S b Đ c S d Đ	Câu 6.	a Đ b S c Đ d S
Câu 7.	a Đ b S c S d S	Câu 8.	a Đ b S c Đ d Đ

§2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Phép toán cộng hai vectơ

Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

⚙ Quy tắc 3 điểm:

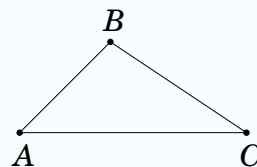
Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

- Dấu hiệu nhận biết là "điểm liên tiếp nhau".
- Các hệ thức tương tự

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$



⚙ Quy tắc hình bình hành:

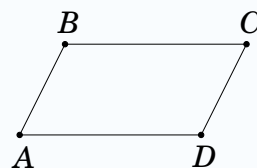
Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

- Dấu hiệu nhận biết là "cùng gốc".
- Các hệ thức tương tự

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$$



⚙ Quy tắc cộng vectơ đối:

- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý

- ◇ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- ◇ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- ◇ Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2) Phép toán hiệu hai vectơ

⚙ Vectơ đối:

- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).

- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

⚙️ **Quy tắc trừ:** Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có

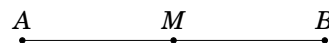
$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

3) Công thức trung điểm, trọng tâm

⚙️ **Công thức trung điểm:**

- Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}.$$

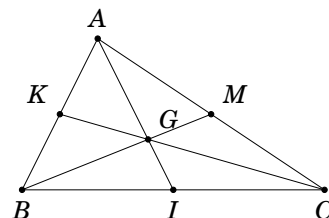


- Tương tự $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}.$

⚙️ **Công thức trọng tâm:**

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$



- Tương tự $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}.$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Thực hiện phép toán cộng, trừ hai vectơ

- ⚙️ Nếu hai vectơ được sắp xếp thỏa mãn một trong các quy tắc (ba điểm, hình bình hành, vectơ đối), thì ta tiến hành phép cộng theo quy tắc tương ứng.
- ⚙️ Nếu hai vectơ được sắp xếp chưa thỏa mãn quy tắc (điểm chưa liên tiếp, chưa cùng gốc), thì ta tiến hành dời;
 - ☆ Đề không cho hình vẽ (điểm bất kì), ta dùng quy tắc 3 điểm để chèn điểm vào.
 - ☆ Đề cho hình vẽ (tam giác, hình bình hành,...), ta dùng vectơ bằng nhau, thay vectơ này bởi vectơ khác bằng với nó sao cho có thể ghép được "quy tắc cộng" với các vectơ còn lại.

🔗 Ví dụ 1

Cho các điểm A, B, C, D, E bất kì. Tính

a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}.$

b) $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD}.$

c) $\vec{AC} - \vec{AD} - \vec{DE}.$

Ví dụ 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB . Tính

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.

b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IB}$.

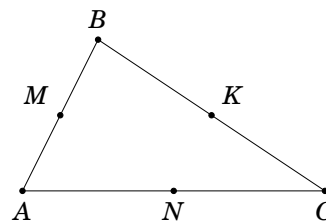
Ví dụ 3

Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và K lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC .

a) Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{MK}$.

b) Tìm các vectơ đối của $\overrightarrow{MN}$.

c) Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK}$.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho M, N, P là các điểm bất kì. Tính

a) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$.

b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$.

c) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PN}$.





A diagram of a parallelogram with vertices labeled A , B , C , and D . The diagonals AC and BD are drawn and intersect at point O .

- a) Tìm vectơ bằng với $\overrightarrow{OC}$.
- b) Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$;
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$.

2

- ① Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.
- ② Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại).

Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$; d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB ; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Ví dụ 6

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Ví dụ 7

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$;

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 4



Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB ; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 5



Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O ; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CD}$;

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Bài 6



Cho tam giác ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF$, $ACPQ$, $BCIJ$. Chứng minh $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{QF} = \vec{0}$.

Dạng

3

Tìm độ dài vectơ

⚙ **Định nghĩa:** Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$. Ta có $|\overrightarrow{AB}| = AB$ (1).

⚙ **Chú ý:**

- Nếu đề cho tính độ dài của một vectơ là tổng (hiệu) của nhiều vectơ khác, trước tiên ta sử dụng các quy tắc để tính toán tổng các vectơ đó về 1 vectơ, rồi áp dụng công thức (1).
- Các công thức tính toán cần nhớ:

* Đường cao trong tam giác đều bằng $\text{cạnh} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

* Đường chéo của hình vuông bằng $\text{cạnh} \cdot \sqrt{2}$.

❖ Ví dụ 8

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a . Tính

a) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$. $\rightarrow a\sqrt{2}$ b) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$. $\rightarrow a$ c) $|\vec{AB} + \vec{OD} - \vec{BC}|$. $\rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2}$

❖ Ví dụ 9

Cho tam giác ABC vuông tại A . $AB = 2a$, $AC = a$. Tính độ dài các vectơ

a) $\vec{AB} + \vec{AC}$. $\rightarrow a\sqrt{5}$ b) $\vec{AB} - \vec{AC}$. $\rightarrow a\sqrt{5}$

❖ Ví dụ 10

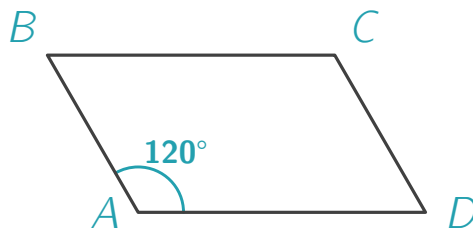
Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các vectơ sau

a) $\vec{AB} - \vec{AC}$. $\rightarrow a$ b) $\vec{AB} + \vec{AC}$. $\rightarrow a\sqrt{3}$ c) $\vec{AB} + \vec{CB}$. $\rightarrow a\sqrt{3}$

Ví dụ 11

Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 1 và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tính độ dài của các vectơ

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}.$$



🔍 1; 1

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7



Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $BC = 3$. Gọi I là trung điểm CD . Tính

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

🔍 3

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

🔍 5

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}|$.

🔍 $3\sqrt{5}$

Bài 8



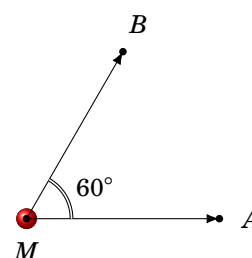
Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a , gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính

a) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$. $\text{ĐS: } a\sqrt{3}$ b) $|\vec{AB} - \vec{GC}|$. $\text{ĐS: } 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $|\vec{AB} + \vec{AG}|$. $\text{ĐS: } \frac{a\sqrt{21}}{3}$

Dạng 4 Toán thực tế áp dụng tổng hiệu vector

Ví dụ 12

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9



Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$; $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M . Cường độ hai lực $\vec{F}_1; \vec{F}_2$ lần lượt là $300N$ và $400N$. Tìm cường độ lực tổng hợp tác động vào vật, biết $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

.....

.....

.....

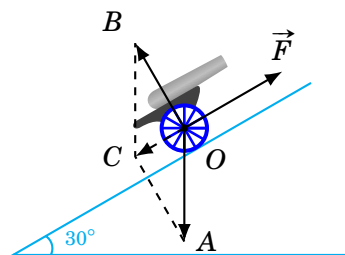
.....

.....

Bài 10



Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng $22\,148\,N$ (xấp xỉ $2\,260\,kg$) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng $100\,N$ thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng)?



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1

Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ Câu 1. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$. (B) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. (C) $\vec{AB} + \vec{CB} = \vec{AC}$. (D) $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{BC}$.

❖ Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$. (B) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{DB}$. (C) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$. (D) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$.

❖ **Câu 3.** Đẳng thức nào dưới đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}$. (B) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$. (C) $\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$. (D) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

❖ **Câu 4.** Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 5.** Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

- (A) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. (B) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. (C) $IA = IB$. (D) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

❖ **Câu 6.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$. (B) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$.

❖ **Câu 7.** Cho 4 điểm A, B, C, O phân biệt. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

❖ **Câu 8.** Cho vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Với điểm O bất kỳ, dựng vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chọn mệnh đề đúng.

- (A) A là trung điểm đoạn OB . (B) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.
(C) B là trung điểm đoạn OA . (D) O là trung điểm đoạn AB .

❖ **Câu 9.** Cho tứ giác $ABCD$. Tìm khẳng định đúng

- (A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.
(C) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 10.** Cho ba điểm M, N, P . vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

- (A) $\overrightarrow{PN}$. (B) $\overrightarrow{PM}$. (C) $\overrightarrow{MP}$. (D) $\overrightarrow{NM}$.

❖ **Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$. (B) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.

❖ **Câu 12.** Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$ bằng

- (A) $\overrightarrow{AC}$. (B) $2\overrightarrow{DC}$. (C) $\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{BD}$.

❖ **Câu 13.** Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$. (B) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$. (C) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM}$. (D) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

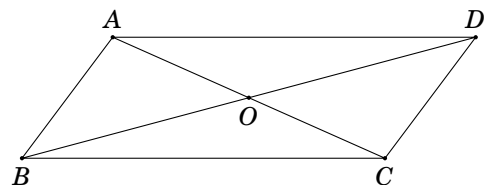
❖ **Câu 14.** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ bằng?

- (A) $\vec{0}$. (B) $\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{BA}$.

❖ **Câu 15.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O .

Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}$. (B) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
(C) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.



❖ **Câu 16.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây đúng?

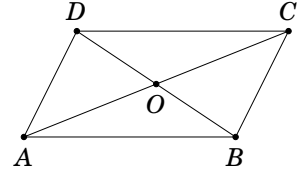
- (A) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. (D) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.

❖ **Câu 17.** Cho G là trọng tâm tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$. (B) $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{GC}$.
(C) $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{CG}$. (D) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

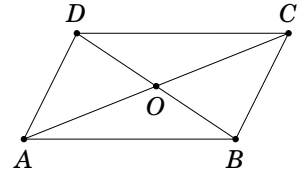
❖ **Câu 18.** Cho O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\vec{AO} - \vec{DO}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- (A) $\vec{DC}$. (B) $\vec{BA}$. (C) $\vec{BC}$. (D) $\vec{AC}$.



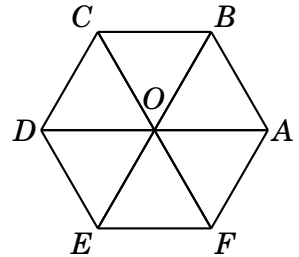
❖ **Câu 19.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$. (B) $\vec{OA} - \vec{OC} = \vec{0}$.
(C) $\vec{OA} + \vec{CO} = \vec{0}$. (D) $\vec{AO} + \vec{OC} = \vec{0}$.



❖ **Câu 20.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) $\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{EO} = \vec{0}$. (B) $\vec{BC} - \vec{EF} = \vec{AD}$.
(C) $\vec{OA} - \vec{OE} = \vec{EB} - \vec{OC}$. (D) $\vec{AB} + \vec{CD} - \vec{EF} = \vec{0}$.



❖ **Câu 21.** Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a . Khi đó $|\vec{AB} + \vec{BC}|$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) a . (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 22.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\vec{AB} + \vec{AD}|$ bằng

- (A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $2a$. (D) a .

❖ **Câu 23.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Khi đó $|\vec{CB} - \vec{CA}|$ bằng

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) a . (C) $2a$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 24.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $S = |2\vec{AD} + \vec{DB}|$.

- (A) $S = a$. (B) $S = a\sqrt{3}$. (C) $S = a\sqrt{2}$. (D) $S = a\sqrt{5}$.

❖ **Câu 25.** Cho tam giác ABC . Vị trí của điểm M sao cho $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ là

- (A) M trùng C .
(B) M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.
(C) M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.
(D) M trùng B .

❖ **Câu 26.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính độ dài của vectơ $\vec{OA} + \vec{OB}$.

- (A) a . (B) $2a$. (C) $\frac{a}{2}$. (D) $3a$.

❖ **Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4a$ và $AD = 3a$. Tính $|\vec{BA} + \vec{DA}|$.

- (A) $7a$. (B) $6a$. (C) $5a$. (D) $2a\sqrt{3}$.



Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$. b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$. c) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MP}$. d) $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB}$.

❖ **Câu 2.** Cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ. Khi đó

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$. b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

❖ **Câu 3.** Cho tam giác ABC , M, N, P là trung điểm BC, CA, AB .

- a) $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành. b) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$. d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

❖ **Câu 4.** Cho hình bình hành $ABCD$, M, N là trung điểm BC, AD .

- a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$. b) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BM}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$.
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. d) $3|\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB}| = 2OD$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a , trọng tâm G . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.
c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 2a$. d) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Câu 7.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , có trọng tâm G .

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}| = 2a$. c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$. d) $|\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$.
c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$.
d) Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}|$ thì $ABCD$ là hình thoi.

❖ **Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$.
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. d) $3|\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB}| = 2OD$.

❖ **Câu 10.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a , trọng tâm G . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.
c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 2a$. d) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Câu 11.** Cho $ABCD$ là hình vuông tâm O có cạnh a . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Khi đó

- a) $\vec{OC} = \vec{AO}$.
 b) $|\vec{AB} + \vec{OD}| = AO$.
 c) $|\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD}| = 0$.
 d) Độ dài vectơ $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$ bằng DC .

❖ **Câu 12.** Cho ba lực $\vec{MA} = \vec{F}_1$, $\vec{MB} = \vec{F}_2$, và $\vec{MC} = \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều là 100N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Lực tổng hợp tác dụng lên vật có độ lớn bằng 0 N .
 b) $\widehat{AMC} = 150^\circ$.
 c) Cường độ của lực $\vec{F}_3$ là $100\sqrt{3}\text{ N}$.
 d) Khi $\widehat{AMB} = 90^\circ$ thì cường độ của lực $\vec{F}_3$ là 100 N .



Tự luận.

❖ **Bài 1.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

- a) $\vec{DO} + \vec{AO} = \vec{AB}$.
 b) $\vec{CO} - \vec{BO} = \vec{BA}$.
 c) $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$.
 d) $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$.
 e) $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$.
 f) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

❖ **Bài 2.** Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G . Chứng minh rằng

- a) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$.
 b) $\vec{AB} - \vec{AF} + \vec{CD} - \vec{CB} + \vec{EF} - \vec{ED} = \vec{0}$.

❖ **Bài 3.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD .

- a) Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{CD} = 2\vec{IJ}$.
 b) Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} = 4\vec{IJ}$.

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm AM .

- a) Chứng minh rằng $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.
 b) Với điểm O bất kỳ. Chứng minh rằng $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OI}$.

❖ **Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Gọi I là trung điểm BC . Xác định và tính độ dài vectơ

- a) $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$. 🔍 $2\sqrt{3}\text{ cm}$.
 b) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$. 🔍 5 cm .
 c) $\vec{w} = \vec{CA} + \vec{CB}$. 🔍 $\sqrt{73}\text{ cm}$.

Bài 6. Cho hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G . Chứng minh $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$.

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a . Cho hai điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Tìm độ dài các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NO}$. ❏ $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

Bài 8. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và ba điểm G, H, K thỏa mãn:

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}; \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AG}$.

❏ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Bài 9. Cho tam giác ABC đều cạnh a , gọi G là trọng tâm tam giác và H là trung điểm BC . Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

❏ $a\sqrt{3}$.

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

❏ a .

c) $|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}|$.

❏ a .

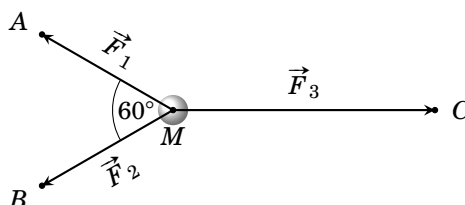
d) $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$.

❏ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

e) $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}|$.

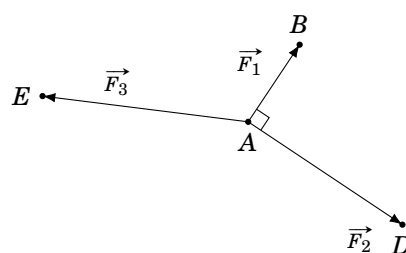
❏ $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Bài 10. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ $\vec{F}_3$ bằng bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của Newton)?

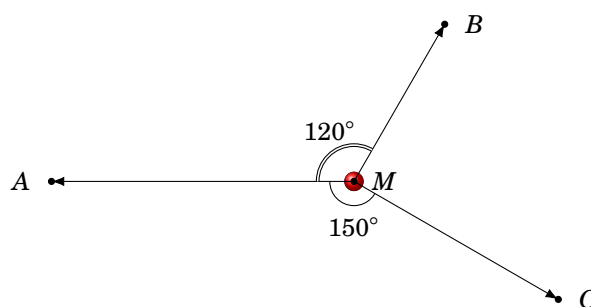


❏ 43,3

Bài 11. Trên hình bên biểu diễn ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ cùng tác động vào vật ở vị trí cân bằng A. Cho biết $|\vec{F}_1| = 30N$, $|\vec{F}_2| = 40N$. Tính cường độ của lực $\vec{F}_3$.

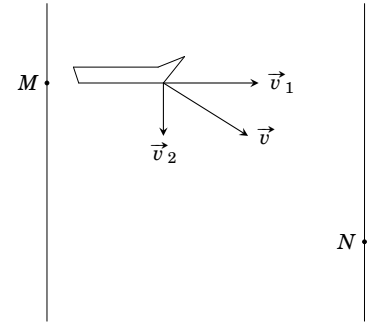


Bài 12. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên như hình vẽ. Biết cường độ của lực $\vec{F}_1$ là 50N, $\widehat{AMB} = 120^\circ$, $\widehat{AMC} = 150^\circ$. Cường độ của lực $\vec{F}_3$ bằng bao nhiêu? (kết quả tính bằng đơn vị N làm tròn đến 1 chữ số thập phân).



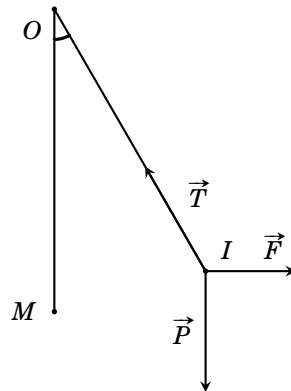
❏ 43,3

Bài 13. Người ta thiết kế một bến phà như hình vẽ bên. Khi phà di chuyển từ bờ M sang bờ N với vận tốc $v_1 = 10$ m/s theo hướng vuông góc với bờ, do nước chảy với vận tốc $v_2 = 6$ m/s cùng phương với bờ nên phà sẽ đi theo hướng của véc-tơ $\vec{v}$ là véc-tơ tổng của hai véc-tơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$. Hãy tính vận tốc v (m/s) của phà khi đi từ bờ M sang bờ N (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân).



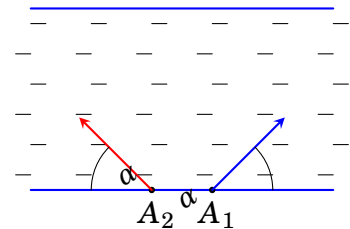
11,7

Bài 14. Một con lắc đơn đang đứng yên tại vị trí cân bằng M . Thực tập viên tác dụng một lực $\vec{F}$ lên con lắc đưa nó đến vị trí I và giữ yên như hình vẽ. Biết rằng con lắc đang chịu tác động của lực căng dây $\vec{T}$ có cường độ 30 N, trọng lực $\vec{P}$ và lực tác dụng $\vec{F}$. Hãy xác định cường độ của lực $\vec{F}$?

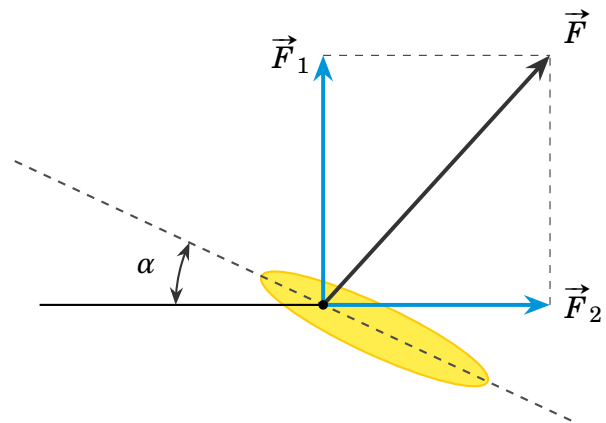


15

Bài 15. Hai con tàu cùng xuất phát từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



Bài 16. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực $\vec{F}$ của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng $\vec{F}_1$ và lực cản $\vec{F}_2$. Cho biết $\alpha = 30^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



$$|\vec{F}_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |\vec{F}_2| = \frac{a}{2}$$

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 C	3 A	4 B	5 D	6 D	7 C	8 D	9 B	10 C
11 C	12 C	13 B	14 A	15 C	16 B	17 B	18 C	19 A	20 D
21 B	22 A	23 D	24 C	25 B	26 A	27 C			

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 8.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 9.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 11.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 12.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S

§3 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Tích của một vectơ với một số



- ♦ Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực $k > 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.
- ♦ Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.



LƯU Ý.

- ♦ Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.
- ♦ vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.
- ♦ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- ♦ Để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta cần chỉ ra hai vectơ tạo bởi các cặp điểm trong ba điểm đó cùng phương.

2) Tính chất



Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực k, t , ta luôn có

- ♦ $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- ♦ $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- ♦ $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- ♦ $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Xác định hai vectơ cùng hướng, ngược hướng

Ta có $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $|\vec{a}| = |k||\vec{b}|$ và $\begin{cases} k > 0 \text{ thì } \vec{a} \& \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ k < 0 \text{ thì } \vec{a} \& \vec{b} \text{ ngược hướng.} \end{cases}$

Ví dụ 1

Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\vec{AM} = k\vec{AB}$.

b) $\vec{MA} = k\vec{MB}$.

c) $\vec{MA} = k\vec{AB}$.

❖ Ví dụ 2

Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC . Tìm số k trong các đẳng thức sau:

- a) $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{MG}$. b) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{GA}$. c) $\overrightarrow{GM} = k\overrightarrow{GA}$. d) $\overrightarrow{GM} = k\overrightarrow{AM}$.

Bài 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm K thỏa mãn $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Dạng 2 Tìm độ dài vectơ

Phương pháp giải: Để tính $|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

- ① Biến đổi và rút gọn biểu thức vectơ $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$ dựa vào qui tắc ba điểm, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,... sao cho $\vec{v}$ là đơn giản nhất.
- ② Tính độ dài của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

Một số kiến thức hình học phẳng thường được sử dụng

$$\diamond \text{ Chiều cao tam giác đều} = \text{cạnh} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\diamond \text{ Đường chéo hình vuông} = \text{cạnh} \cdot \sqrt{2}.$$

Cho tam giác ABC vuông tại A , có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

$$\diamond \text{ Pitago: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

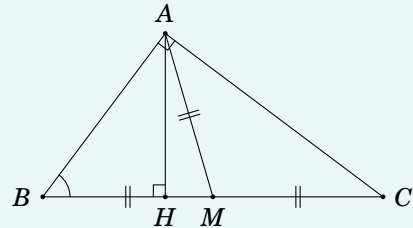
$$\Rightarrow \begin{cases} BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Trung tuyến } AM = \frac{1}{2}BC.$$

$$\diamond AB^2 = BH \cdot BC \text{ và } AC^2 = CH \cdot BC.$$

$$\diamond \frac{1}{HA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \text{ và } AH^2 = HB \cdot HC.$$

$$\diamond \sin \widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC}; \quad \cos \widehat{ABC} = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC}; \quad \tan \widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} = \frac{AC}{AB}.$$

**Bài 3**

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Gọi I là trung điểm BC . Xác định và tính độ dài vectơ

a) $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}.$

$\hookrightarrow 2\sqrt{3} \text{ cm}.$

b) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}.$

$\hookrightarrow 5 \text{ cm}.$

c) $\vec{w} = \vec{CA} + \vec{CB}.$

$\hookrightarrow \sqrt{73} \text{ cm}.$

d) $\vec{x} = 2\vec{IA} - \vec{CA}.$

$\hookrightarrow 3 \text{ cm}.$

Dạng

3

Biểu diễn vectơ qua hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{c}$ ta có duy nhất một cách biểu diễn sau

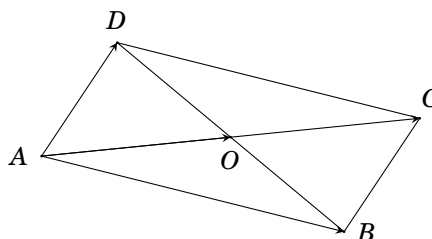
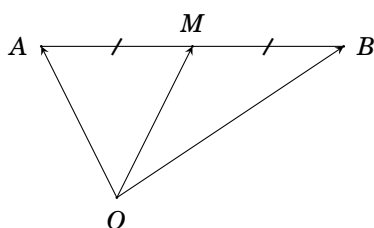
$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Ta thường sử dụng các quy tắc

+ Quy tắc ba điểm $\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = \vec{ON} - \vec{OM}$.

+ Quy tắc trung điểm $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

+ Quy tắc hình bình hành $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} = 2\vec{AO}$ với $ABCD$ là hình bình hành tâm O .



❖ Ví dụ 3

Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC , trọng tâm G . Hãy phân tích các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \vec{AK}$, $\vec{v} = \vec{BM}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Ví dụ 4

Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $\vec{MB} = -3\vec{MC}$. Phân tích vectơ $\vec{AM}$ theo 2 vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF .

- a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$.
b) Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GC}$ theo $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4



Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC , D là trung điểm AM . Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 5



Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là điểm trên đoạn AC sao cho $NA = 2NC$, K là trung điểm của MN .

- a) Phân tích $\overrightarrow{AK}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. b) Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Dạng

4

Sự cùng phương của hai vector và ứng dụng

Để chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng ta chọn một điểm làm điểm gốc, giả sử chọn điểm M . Sau đó chứng minh một trong hai đẳng thức sau

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP} \text{ với } k \neq 0.$$

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN} \text{ với } k \neq 0.$$

❖ Ví dụ 6

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

❖ Ví dụ 7

Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $DE \parallel AM$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7



Cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle BMN$. Gọi M, N là điểm sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

a) Phân tích $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo 2 vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi I là điểm trên BC sao cho $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, G, I thẳng hàng.

$$k = \frac{6}{11}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

5

Toán thực tế áp dụng tích một vectơ với một số

❖ Ví dụ 8

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là 300 (N) và 400 (N). Biết $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

🔍 500

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8



Có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

🔍 $50\sqrt{3}$

BÀI TẬP



1

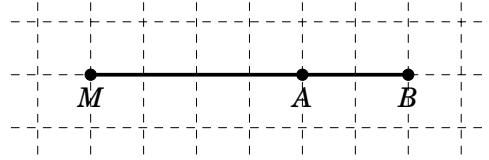
Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho vec tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Xét vectơ $-3\vec{a}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

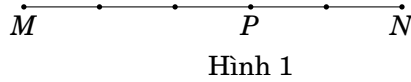
- (A) $-3\vec{a}$ cùng phương với $\vec{a}$. (B) $-3\vec{a}$ cùng hướng với $-3\vec{a}$.
(C) $|-3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$. (D) $-3\vec{a}$ có giá trị với $\vec{a}$.

❖ **Câu 2.** Cho ba điểm A, B, M được xác định như hình bên. Tìm đẳng thức đúng.

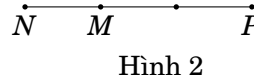
- (A) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$.
 (C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.



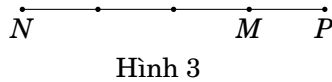
❖ **Câu 3.** Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{PN}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây.



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

❖ **Câu 4.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào đúng?

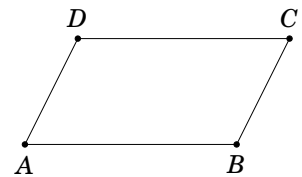
- (A) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 5.** Cho I là trung điểm của đoạn AB . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (A) $IA + IB = 0$. (B) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

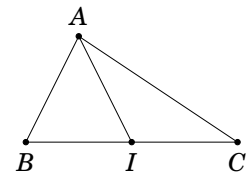
❖ **Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. (B) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.
 (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. (D) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



❖ **Câu 7.** Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- (A) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. (B) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.
 (C) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. (D) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.



❖ **Câu 8.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

❖ **Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. (B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.
 (C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

❖ **Câu 10.** Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm và M là trung điểm của BC . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. (C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.

❖ **Câu 11.** Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$. (B) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. (C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

❖ **Câu 12.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (B) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (C) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. (D) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 13.** Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm AB , DM cắt AC tại I . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 14.** Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- (A) M là trung điểm của BC .
 (B) M là trung điểm của IA .
 (C) M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.
 (D) M là trung điểm của IC .

❖ **Câu 15.** Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$.

❖ **Câu 16.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

- (A) $17a$. (B) $\sqrt{17}a$. (C) $5a$. (D) $\sqrt{20}a$.

❖ **Câu 17.** Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Độ dài của $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là

- (A) $\frac{\sqrt{140}}{4}a$. (B) $\frac{\sqrt{541}}{4}a$. (C) $\frac{\sqrt{520}}{4}a$. (D) $\frac{\sqrt{321}}{4}a$.

❖ **Câu 18.** Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. (B) $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$. (C) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. (D) $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$.

❖ **Câu 19.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị của $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

- (A) $A\sqrt{2}$. (B) $2a$. (C) $2a\sqrt{2}$. (D) $3a$.

❖ **Câu 20.** Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

- (A) $2a\sqrt{3}$. (B) $a\sqrt{5}$. (C) $a\sqrt{6}$. (D) $4a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 21.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 22.** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$, $BD = a$. Giá trị của $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ bằng

- (A) $a\sqrt{5}$. (B) $5a$. (C) $3a$. (D) $a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 23.** Cho tam giác ABC và I thỏa $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. (B) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$. (C) $2\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. (D) $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

❖ **Câu 24.** Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $3\overrightarrow{AI} = 5\overrightarrow{IB}$. Tìm k biết $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

- (A) $k = \frac{5}{8}$. (B) $k = 1$. (C) $k = \frac{5}{3}$. (D) $k = \frac{3}{5}$.

❖ **Câu 25.** Cho tam giác ABC với AD là đường phân giác trong. Biết $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 26.** Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Phân tích $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$

- (A) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$. (B) $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$. (D) $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

❖ **Câu 27.** Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là điểm trên cạnh AB sao cho $AN = 3NB$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

❖ **Câu 28.** Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BG}$. (B) $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BG}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BG}$. (D) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BG}$.



2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = \frac{2018}{2019}\vec{b}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. b) $a = \frac{2018}{2019}b$.
c) $\vec{b} = \frac{2019}{2018}\vec{a}$. d) $|\vec{a}| > |\vec{b}|$.

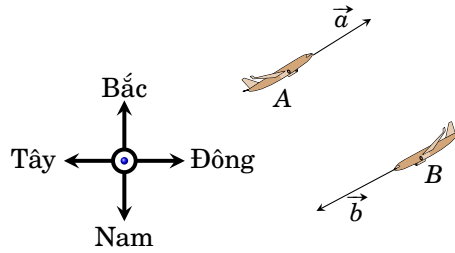
❖ **Câu 2.** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD , G là trọng tâm tam giác ABC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. b) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. d) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$.

❖ **Câu 3.** Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = BI$. Gọi J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = JC$ và G là trọng tâm $\triangle ABC$.

- a) $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$. b) $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
c) $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. d) $\overrightarrow{AG} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$.

❖ **Câu 4.** Máy bay A đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h (như hình vẽ).



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

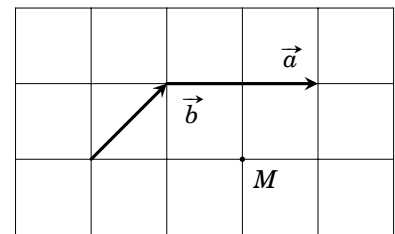
- Vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B ngược hướng với vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.
- $\vec{a} = 600$ km/h, $\vec{b} = 800$ km/h.
- $\vec{b} = \frac{4}{3}\vec{a}$.
- $|\vec{a} + \vec{b}| = 200$ (km/h).



3 Tự luận.

❖ **Bài 1.** Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và một điểm M như hình bên

- Hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{MN} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{MP} = -2\vec{b}$.
- Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1. Tính $|5\vec{a}|$, $|-5\vec{b}|$.



❖ **Bài 2.** Lấy một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

- I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

❖ **Bài 3.** Cho hai điểm phân biệt A và B.

- Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.
- Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

❖ **Bài 4.** Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC thỏa mãn $BD = DE = EC$. Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

❖ **Bài 5.** Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, H thỏa mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

- Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;
- Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

❖ **Bài 6.** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

- $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$.
- $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{IC}$.
- $\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MI}$.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

- Chứng minh rằng $3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.
- Chứng minh 3 đường AC, BD và MN đồng quy.

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O . Gọi G là trọng tâm và H là trực tâm của tam giác ABC . AD là đường kính của (C) và M là trung điểm của đoạn BC .

- Chứng minh rằng $BHCD$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Bài 9. Cho tam giác ABC .

- Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
- Xác định điểm N thỏa mãn $4\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

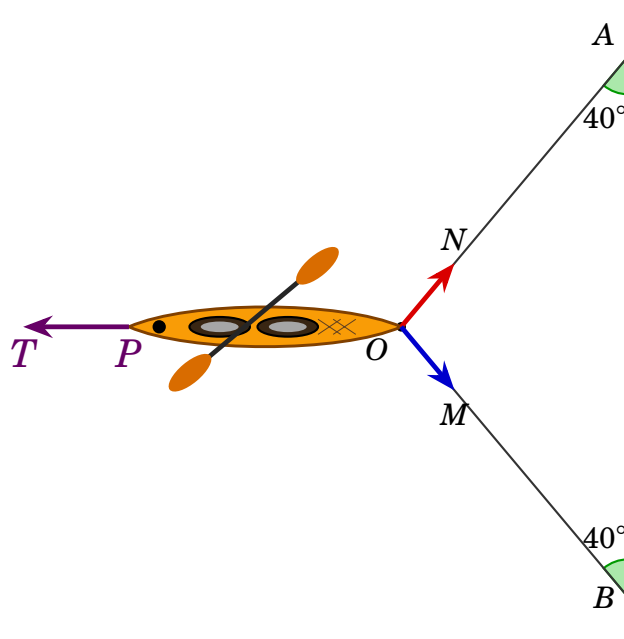
Bài 10. Cho tam giác ABC .

- Tìm điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.
- Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Bài 11. Máy bay A bay với vận tốc $\vec{a}$, máy bay B bay cùng hướng có vận tốc chỉ bằng một nửa máy bay A . Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A .

$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$

Bài 12. Một thuyền kayak được neo đứng yên bằng các sợi dây không co giãn tại các điểm O và P như hình vẽ. Gọi $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{PT}$ là các vectơ biểu diễn lực căng của các dây. Biết $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{ON}| = 50\text{N}$, tính $|\overrightarrow{PT}|$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



64.28N

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 B	2 B	3 D	4 B	5 B	6 C	7 A	8 B	9 C	10 A
11 C	12 C	13 C	14 D	15 B	16 B	17 B	18 D	19 C	20 D
21 A	22 A	23 C	24 A	25 C	26 B	27 D	28 B		

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

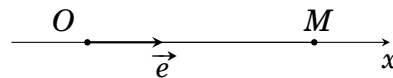
Câu 1.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 2.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ

§4 VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

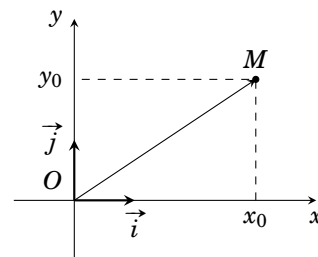
1) Trục tọa độ

- Trục tọa độ là đường thẳng trên đó xác định một điểm gốc là O và một vec tơ đơn vị $\vec{e}$, kí hiệu $(O, \vec{e})$.
- Xét điểm M trên trục $(O, \vec{e})$, ta luôn có $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$. Khi đó k là tọa độ của M trên trục đã cho.



2) Hệ trục tọa độ

- Hệ trục tọa độ bao gồm 2 trục vuông góc nhau (hình vẽ), kí hiệu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ hay Oxy .



- O là gốc tọa độ;
- Ox gọi là trục hoành; Oy gọi là trục tung;
- $\vec{i}, \vec{j}$ là các vec tơ đơn vị và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

3) Tọa độ điểm, tọa độ vectơ

1) Tọa độ vectơ

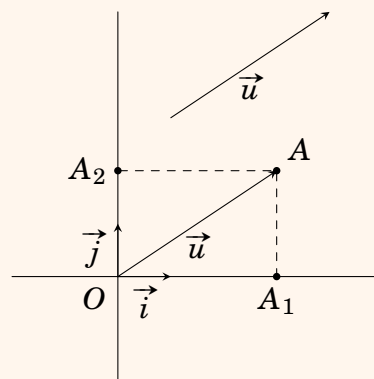


Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên Ox và Oy .

Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x; y)$ để $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y \cdot \vec{j}$.

Như vậy $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Cặp số $(x; y)$ duy nhất đó được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ Oxy và viết $\vec{u} = (x; y)$ hoặc $\vec{u}(x; y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.



$$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



Lưu ý. Từ định nghĩa tọa độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Nếu $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{u}' = (x'; y')$ thì $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Như vậy mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

2) Tọa độ của một điểm

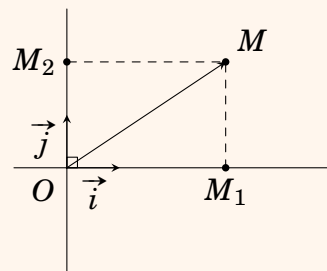


Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó. Như vậy cặp số $(x; y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$.

Khi đó ta viết $M = (x; y)$ hoặc $M(x; y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của điểm M . Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M , tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

Như vậy

$$M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



4) Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2).$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2), \text{ với } k \text{ là một hằng số.}$$

5) Biểu thức tọa độ điểm

Cho ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Khoảng cách giữa hai điểm } A, B \text{ là } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Trung điểm } I \text{ của } AB: x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ và } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC: x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ và } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

$$\textcircled{5} \quad ABC \text{ là ba đỉnh của tam giác} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ không cùng phương với } \overrightarrow{AC}$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Tọa độ điểm và tọa độ vectơ trên hệ trục Oxy

Tọa độ vectơ: $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Tọa độ điểm: $M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng (Oxy), tìm tọa độ của các vectơ sau?

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

b) $\vec{v} = \pi\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$.

c) $\vec{x} = -3\vec{j}$.

d) $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i}$.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng (Oxy), tìm tọa độ của các điểm thỏa mãn?

a) $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

b) $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

c) $\overrightarrow{OP} = 2\vec{j}$.

d) $\overrightarrow{OQ} = -5\vec{i}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Viết tọa độ của các vectơ sau

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

b) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$.

c) $\vec{c} = 3\vec{i}$.

Dạng

2

Phép toán vectơ (tổng, hiệu, tích vectơ với một số) trong Oxy

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó

① $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

② $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

③ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$, với k là một hằng số.

❖ Ví dụ 3

Cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau

a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

b) $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

❖ Ví dụ 4

Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2



Cho $\vec{a} = (-2; 0)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Tính tọa độ vectơ

a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

b) $\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$.

Bài 3



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-1; -4)$ và $\vec{c} = (-3; 2)$.

a) Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

b) Tìm tọa độ của $\vec{x} = 4\vec{a} + 7\vec{b} - 2\vec{c}$.

Dạng

3

Sự cùng phương của hai vectơ và ứng dụng

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau

◇ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Cụ thể, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases} \text{ hay } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, b_1b_2 \neq 0.$$

◇ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

◇ Điểm M thuộc đường thẳng $AB \Leftrightarrow$ ba điểm M, A, B thẳng hàng.

◇ Ví dụ 5

Tìm x để các cặp vectơ sau cùng phương

① $\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (6; x)$.

🔗 $x = -4$

② $\vec{m} = (0; 4)$, $\vec{n} = (x; 7)$.

🔗 $x = 0$

③ $\vec{u} = (x; -6)$, $\vec{v} = (-8; 2x)$.

🔗 $\pm 2\sqrt{6}$

◇ Ví dụ 6

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $M(4; 0)$, $N(-2; 3)$, $P(6; 1)$.

a) Chứng minh ba điểm M, N, P là ba đỉnh của một tam giác.

b) Xác định điểm Q trên trục hoành biết các điểm N, P, Q thẳng hàng. 🔗 $Q(10; 0)$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4



Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(2; -5)$, $B(-3; 6)$, $C(12; -27)$, $D(m; 2)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Xác định m để ba điểm A, B, D thẳng hàng.

$m = -\frac{23}{11}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (m; 2)$, $\vec{b} = (1 - m; m + 4)$ (với m là tham số). Tìm m sao cho $2\vec{a} - 3\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c} = (4; -2)$.

$m = -19$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

4

Tọa độ của điểm và vectơ thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

- ◇ Gọi điểm (vectơ) cần tìm có tọa độ $(x; y)$.
- ◇ Theo yêu cầu bài toán, lập hệ phương trình với hai ẩn x, y .
- ◇ Giải hệ phương trình tìm $x, y \Rightarrow$ tọa độ của điểm (vectơ) cần tìm.

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(3; 4)$, $C(-2; -1)$.

- Tìm tọa độ trung điểm của cạnh AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(1; 3)$.

- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$.
- Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Trên mặt phẳng Oxy , cho 2 điểm $A(-2; -2)$ và $B(5; -4)$.

- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác OAB .
- Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2; 0)$.

Bài 7



Trên mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-3;4)$, $B(1;1)$, $C(2;-5)$.

- Chứng minh ba điểm A , B , C không thẳng hàng.
- Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của AB , BC , CA . Tìm tọa độ M , N , P .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ điểm E trên trục tung sao cho $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Bài 8



Cho tam giác ABC . Biết các điểm $M(1;1)$, $N(2;3)$, $P(0;4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BC , CA .

- Tìm tọa độ các đỉnh A , B , C .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Bài 9



Cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(3;-4)$, $C(5;0)$. Tìm tọa độ điểm D nếu biết

a) $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$.

c) tứ giác $ABCD$ hình bình hành.

d) tứ giác $ABCD$ hình thang có hai đáy là BC , AD với $BC = 2AD$.

Dạng

5

Độ dài của vectơ

Với $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ thì

$$|\overrightarrow{MN}| = MN = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Ví dụ 9

Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(2;2)$, $C(8;5)$.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC . Chứng tỏ tam giác ABC vuông tại B .

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10



Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2;1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1;3)$.

- Tìm tọa độ điểm B .
- Tìm điểm M trên Oy sao cho tam giác ABM cân tại B .

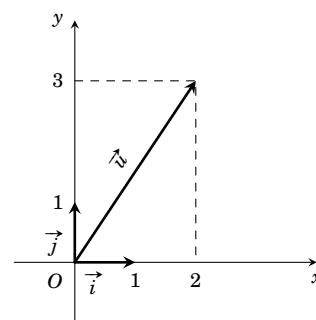
BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{u}$ được biểu diễn như hình vẽ. Tìm tọa độ của $\vec{u}$.

- (A) $(1;3)$. (B) $(3;1)$. (C) $(3;2)$. (D) $(2;3)$.



❖ **Câu 2.** Trong hệ trục $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ của vectơ $\vec{i} - \vec{j}$ là

- (A) $(-1;1)$. (B) $(1;0)$. (C) $(0;1)$. (D) $(1;-1)$.

❖ **Câu 3.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;-1)$, $B(4;3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- (A) $\overrightarrow{AB} = (2;4)$. (B) $\overrightarrow{AB} = (6;2)$. (C) $\overrightarrow{AB} = (-2;-4)$. (D) $\overrightarrow{AB} = (8;-3)$.

❖ **Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-2;1)$ và $B(3;-5)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- (A) $\sqrt{61}$. (B) $\sqrt{17}$. (C) $\sqrt{41}$. (D) $\sqrt{11}$.

❖ **Câu 5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-3;5)$ và $B(2;-2)$. Tọa độ điểm trung điểm M của đoạn thẳng AB là

- (A) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. (B) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. (C) $\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$. (D) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

❖ **Câu 6.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2;-3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là

- (A) $(3;-2)$. (B) $(2;-3)$. (C) $(3;2)$. (D) $(2;3)$.

❖ **Câu 7.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biết $\vec{a} = (1;-5)$ và $\vec{b} = (-2;6)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

- (A) $(3;-11)$. (B) $(1;-1)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-3;11)$.

❖ **Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = (-1;-2)$, $\vec{v} = (2;2)$. Tọa độ của vectơ $2\vec{u} + \vec{v}$ là

- (A) $(-1;3)$. (B) $(-2;1)$. (C) $(2;4)$. (D) $(0;-2)$.

❖ **Câu 9.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\vec{a} = (-5;0)$, $\vec{b} = (-4;0)$ cùng hướng. (B) $\vec{s} = (7;3)$ là vectơ đối của $\vec{d} = (-7;3)$.
(C) $\vec{u} = (4;2)$, $\vec{v} = (8;3)$ cùng phương. (D) $\vec{a} = (6;3)$, $\vec{b} = (2;1)$ ngược hướng.

❖ **Câu 10.** Cho $\vec{a} = (3;-4)$. Chọn khẳng định đúng?

- (A) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. (B) $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$. (C) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. (D) $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

❖ **Câu 11.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-3;1)$ và $B(6;5)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ).

- (A) $G\left(\frac{3}{2}; 3\right)$. (B) $G\left(3; \frac{4}{3}\right)$. (C) $G(1;2)$. (D) $G(2;1)$.

❖ **Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ của điểm M là

- (A) $(-2;3)$. (B) $(2;-3)$. (C) $(3;-2)$. (D) $(-3;2)$.

❖ **Câu 13.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$. Tọa độ $\vec{u}$ là

- (A) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; 5\right)$. (B) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$. (C) $\vec{u} = (-1;10)$. (D) $\vec{u} = (1;-10)$.

❖ **Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$. Tính tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} = (-3;-3)$. (B) $\overrightarrow{AB} = (2;-1)$. (C) $\overrightarrow{AB} = (3;3)$. (D) $\overrightarrow{AB} = (7;1)$.

❖ **Câu 15.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Biết $A(1;3)$, $B(-3;3)$, $C(8;0)$. Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng

- (A) 1. (B) 6. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 16.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{u} = (-5;12)$. Khi đó độ dài của $\vec{u}$ bằng

- (A) 13. (B) 7. (C) $\sqrt{119}$. (D) 12.

❖ **Câu 17.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác EHF có $E(-1;3)$, $H(3;-4)$, $F(4;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác EHF .

- (A) $G\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$. (B) $G\left(2; \frac{1}{3}\right)$. (C) $G\left(\frac{8}{3}; 3\right)$. (D) $G(2;3)$.

❖ **Câu 18.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-2;1)$, $\vec{c} = (3;-1)$. Tính tọa độ của vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

- (A) $(3;6)$. (B) $(-3;6)$. (C) $(-3;-6)$. (D) $(3;-6)$.

❖ **Câu 19.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(-2;0)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) A, B, C thẳng hàng. (B) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

❖ **Câu 20.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{u} = (x-4;3)$ và $\vec{v} = (-2;y+1)$. Tìm giá trị của biểu thức $x+y$ biết $\vec{u} = \vec{v}$.

- (A) 2. (B) -2. (C) 4. (D) 0.

❖ **Câu 21.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $2\vec{u} - 4\vec{v}$ là

- (A) $(-7;-13)$. (B) $(-7;-7)$. (C) $(-7;13)$. (D) $(9;-13)$.

❖ **Câu 22.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Khi đó độ dài của $\vec{v}$ bằng

- (A) $\sqrt{7}$. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

❖ **Câu 23.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(1;3)$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B là

- (A) $\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) 10. (D) $2\sqrt{5}$.

❖ **Câu 24.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $M(2;-1)$, $N(3;m)$. Tìm m để $MN = \sqrt{5}$

- (A) $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$. (B) $m = \pm 3$. (C) $m = \pm 1$. (D) $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

❖ **Câu 25.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(0;2)$, $B(-4;3)$. Khi đó chu vi của tam giác OAB là

- (A) $\sqrt{17}$. (B) $7 + \sqrt{17}$. (C) 11. (D) $2 + \sqrt{5}$.

❖ **Câu 26.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- (A) $C(6;-3)$. (B) $C(-6;3)$. (C) $C(-6;-3)$. (D) $C(-3;6)$.

❖ **Câu 27.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- (A) $I(1;2)$. (B) $I\left(1; \frac{2}{5}\right)$. (C) $I\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. (D) $I(2;-2)$.

❖ **Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{a} = (-5;0)$, $\vec{b} = (4;m)$. Tìm m sao cho

hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

- (A) $m = -5$. (B) $m = -1$. (C) $m = 0$. (D) $m = 4$.

❖ **Câu 29.** Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ là

- (A) $k = 4, 4; h = -0, 6$. (B) $k = 3, 4; h = -0, 2$.
(C) $k = 4, 6; h = -5, 1$. (D) $k = 2, 5; h = -1, 3$.

❖ **Câu 30.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 4)$, $B(-3; 2)$, $C(-3; -5)$, $M(x; y)$ thỏa mãn $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $y = -2x$. (B) $y = \frac{1}{3}x$. (C) $y = \frac{1}{4}x$. (D) $y = 4x$.

❖ **Câu 31.** Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

- (A) $x = -15$. (B) $x = 3$. (C) $x = 15$. (D) $x = 5$.

❖ **Câu 32.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$ và C thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox . Tìm tọa độ điểm C .

- (A) $C(0; 4)$. (B) $C(2; 4)$. (C) $C(0; 2)$. (D) $C(0; -4)$.

❖ **Câu 33.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{AB}, \vec{CD}$ là hai vectơ đối nhau. (B) $\vec{AB}, \vec{CD}$ ngược hướng.
(C) $\vec{AB}, \vec{CD}$ cùng hướng. (D) A, B, C, D thẳng hàng.

❖ **Câu 34.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(6; 5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- (A) $D(4; 3)$. (B) $D(3; 4)$. (C) $D(4; 4)$. (D) $D(8; 6)$.

❖ **Câu 35.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2; 3)$, $B(5; 4)$, $C(1; -2)$. Tìm tọa độ đỉnh D sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

- (A) $(8; -1)$. (B) $(8; 1)$. (C) $(-1; 8)$. (D) $(-1; -8)$.

❖ **Câu 36.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(1; -2)$ là trung điểm của AB , với $A \in Ox$, $B \in Oy$. Khi đó

- (A) $A(0; 2)$. (B) $B(0; 4)$. (C) $B(-4; 0)$. (D) $A(2; 0)$.

❖ **Câu 37.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $M(-2; 1)$. Tọa độ điểm đối xứng với M qua trục Ox là

- (A) $(2; -1)$. (B) $(-2; -1)$. (C) $(2; 1)$. (D) $(1; 2)$.

❖ **Câu 38.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $M(-2; 3)$ và $N(1; -4)$. Tìm tọa độ của điểm P thuộc trục tung sao cho $\vec{MP}$ và $\vec{NP}$ cùng phương.

- (A) $P\left(0; -\frac{5}{3}\right)$. (B) $P\left(0; \frac{5}{3}\right)$. (C) $P\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$. (D) $P\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

❖ **Câu 39.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-2; x)$. Biết rằng ba điểm O, A, B thẳng hàng. Khi đó giá trị của biểu thức $S = 2x^2$ bằng

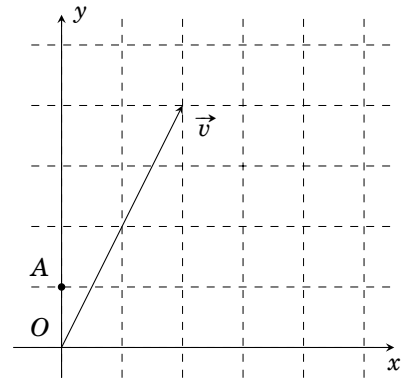
- (A) 2. (B) 8. (C) -32. (D) 32.

❖ **Câu 40.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $M(2; -1)$, $N(3; m)$. Tìm m để $MN = \sqrt{5}$

- (A) $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$. (B) $m = \pm 3$. (C) $m = \pm 1$. (D) $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

❖ **Câu 41.** Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(0; 1)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (2; 4)$. Xác định vị trí B của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 2,5 giờ.

- (A) $B(4; 5; 6; 5)$. (B) $B(5; 9)$.
(C) $B(5; 11)$. (D) $B(2; 4)$.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = (-1; 2)$.

- a) $\vec{a} = (0; 3)$. b) $\vec{a} + \vec{b} = (0; 5)$.
c) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

❖ **Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có các đỉnh thỏa mãn $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{OC} = 4\vec{i} + \vec{j}$.

- a) $A(2; -1)$, $B(1; 1)$, $C(4; 1)$.
b) Trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.
c) Trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
d) Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì điểm $D(2; -1)$.

❖ **Câu 3.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{i}$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (-4; 9)$. Khi đó

- a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 2)$.
b) $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 5)$.
c) $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} = (-5; -25)$.
d) Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$ thì $m^2 + n^2 = 1$.

❖ **Câu 4.** Cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$, $\vec{c} = (-3; 4)$. Khi đó

- a) $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ cùng phương. b) $2\vec{a} = (2; 4)$.
c) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = (4; -12)$. d) $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, khi đó $m + n > 3$.

❖ **Câu 5.** Cho ba điểm $A(-3; 4)$, $B(-3; 1)$, $C(1; 2)$. Khi đó

- a) $\vec{AB} = (0; -3)$.
b) Ba điểm A, B, C lập thành một tam giác.
c) Để $ABCD$ là một hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(5; 1)$.
d) Giao điểm của đường thẳng AC và trục hoành là điểm $M(-5; 0)$.

❖ **Câu 6.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; -1)$, $B(1; 4)$, $C(7; 0)$. Khi đó

- a) $AB = \sqrt{26}$.
b) Chu vi tam giác ABC bằng 17,4 (làm tròn đến hàng phần chục).

- c) Tam giác ABC là tam giác đều.
 d) Diện tích tam giác ABC bằng 26.

❖ **Câu 7.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;1)$, $B(-1;-4)$, $C(-2;0)$.

- a) $\overrightarrow{OC} = -2\vec{j}$.
 b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$.
 c) Tọa độ $I\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$ với I là trung điểm của BC .
 d) Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó $D(1;5)$.

❖ **Câu 8.** Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $M(-2;1)$, $N(4;5)$, $P(3;0)$, $Q(0;11)$.

- a) $\overrightarrow{MN} = (6;4)$.
 b) Hai vectơ $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{PN}$ cùng phương.
 c) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.
 d) Gọi R là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$. Khi đó ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

❖ **Câu 9.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = (2;5)$ và ba điểm $A(-2;1)$, $B(3;-2)$, $C(14;3)$.

- a) $2\vec{a} + \vec{b} = (8;3)$.
 b) Các điểm O, A, B thẳng hàng.
 c) $\overrightarrow{AC} = 2(2\vec{a} + \vec{b})$.
 d) Cho điểm $D(x;y)$ thì tứ giác $OABD$ là hình bình hành. Khi đó $x + y = 2$.

❖ **Câu 10.** Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1;3)$, $B(4;5)$, $C(1;-2)$.

- a) Ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
 b) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng BC là $I(-3;-7)$.
 c) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G(2;2)$.
 d) Khi điểm $D(2;-2)$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

❖ **Câu 11.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(1;2)$, $B(3;-1)$, $C(2;0)$.

- a) Trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$.
 b) Các điểm A, B, C thẳng hàng.
 c) Cho điểm $D(x;y)$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó $2y - 1 = 6$.
 d) Đường tròn tâm B đi qua điểm A cắt tia Oy tại điểm $M(a;b)$. Khi đó $a + b = 1$.



Tự luận.

❖ **Bài 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = (1;2)$, $\vec{v} = (-3;4)$, $\vec{a} = (4;8)$

- a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$.
 b) Tìm tọa độ $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$.
 c) Tìm mối liên hệ giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{u}$.

❖ **Bài 2.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1;3)$, $B(2;4)$, $C(-3;2)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
 b) Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .

- c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
 d) Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABD .

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(-2; 1)$ và $N(4; 5)$.

- a) Tìm tọa độ của điểm P thuộc Ox sao cho $PM = PN$.
 b) Tìm tọa độ của điểm Q sao cho $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{PN}$.
 c) Tìm tọa độ của điểm R thỏa mãn $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$. Từ đó suy ra P, Q, R thẳng hàng.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(-3; 2)$ và $N(2; 7)$.

- a) Tìm tọa độ của điểm P thuộc trục tung sao cho M, N, P thẳng hàng.
 b) Tìm tọa độ của điểm Q đối xứng với N qua Oy .
 c) Tìm tọa độ của điểm R đối xứng với M qua trục hoành.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $C(1; 6)$ và $D(11; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của điểm E thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$ có độ dài ngắn nhất.
 b) Tìm tọa độ của điểm F thuộc trục hoành sao cho $|2\overrightarrow{FC} + 3\overrightarrow{FD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = CD$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1; 2), B(3; 4)$ và $C(2; -1)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác đó.
 b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp và trực tâm H của tam giác ABC .

$$I\left(\frac{15}{4}; \frac{5}{4}\right), H\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

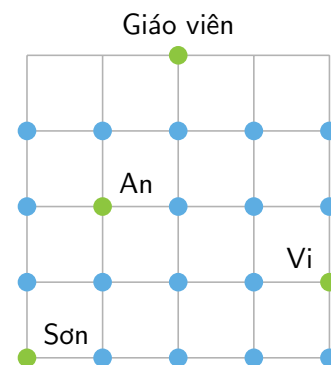
Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết điểm $A(4; 5), C(-2; -1)$. Gọi M là trung điểm của BC , N là giao điểm của BD và AM . Biết $N(4; 1)$, tọa độ điểm D có dạng $D(a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

3

Bài 7. Một lớp học có 20 học sinh và 1 giáo viên được bố trí ngồi như Hình vẽ. Học sinh ngồi ở các vị trí nút giao của lưới ô vuông, cạnh của một ô vuông nhỏ trong hình là 1 m. Quy ước chỉ được chọn hệ trục tọa độ sao cho các trục tọa độ trùng với các đường thẳng trong lưới ô vuông và vectơ đơn vị trên các trục đều có độ dài 1 m.

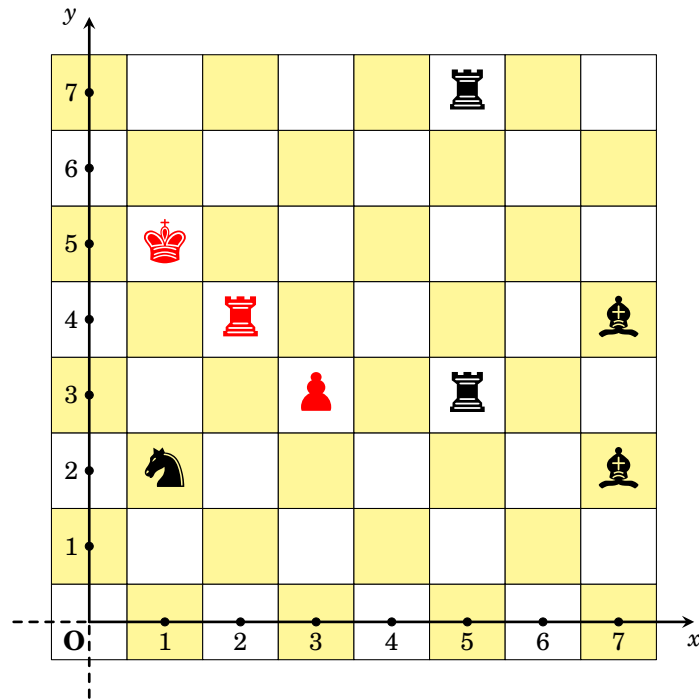
- a) Hãy cho hai ví dụ về cách chọn hệ trục tọa độ để tọa độ của An là $(1; 1)$. Trong mỗi trường hợp, hãy cho biết tọa độ của điểm tương ứng với vị trí của giáo viên, Vi và Sơn.
 b) Có bao nhiêu cách chọn hệ trục tọa độ sao cho giáo viên thuộc phần tư thứ hai, An và Sơn thuộc phần tư thứ ba và Vi thuộc phần tư thứ tư của mặt phẳng Oxy ?

4



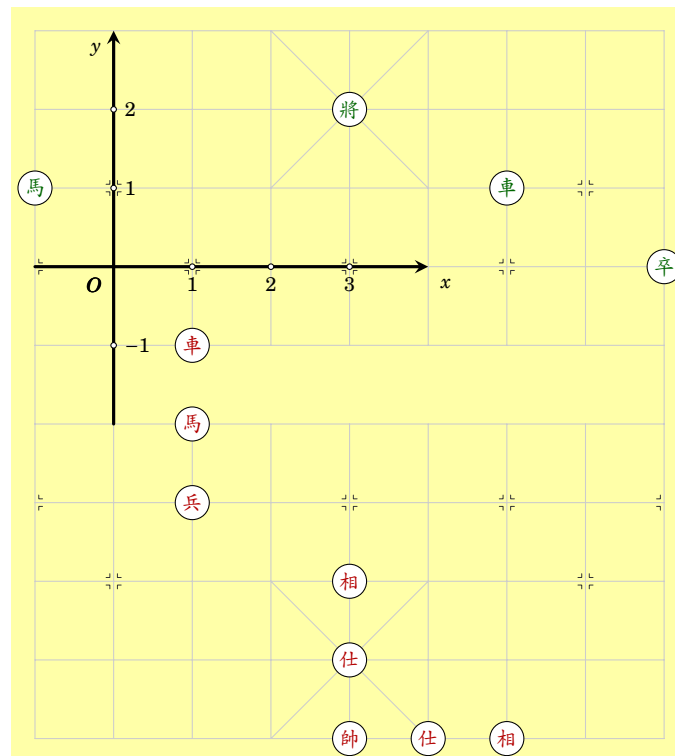
Bài 8. Trong hình bên dưới, quân mã đang ở vị trí có tọa độ $(1; 2)$. Hỏi sau một nước đi quân mã có thể đến những vị trí nào? Lưu ý: quân mã di chuyển theo hình chữ L - hình

chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 .



Bài 9. Trong hình vẽ bên dưới, quân xe bên cờ đỏ đang ở vị trí có tọa độ $(1; -1)$. Biết rằng sau một nước đi, quân xe bên cờ đỏ đến vị trí có tọa độ là $(a; b)$ thì sẽ chiếu tướng được bên cờ xanh mà không bị quân mã cờ xanh ăn quân xe đỏ. Biết rằng luật chơi cờ tướng đối với quân xe chỉ được đi dọc hoặc ngang khắp bàn cờ miễn không có quân nào cản, quân mã đi theo đường chéo hình chữ nhật kích thước là 1×2 và không bị quân nào cản ngay cạnh nó theo đường ngang hoặc đường dọc. Ví dụ quân mã đen ở tọa độ trên có thể đi đến tọa độ $(0, -1)$, $(1, 0)$. Tính $a^2 + b^2$.

10



Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;-5)$. Tọa độ của điểm $M(m;n)$ thuộc trục Ox sao cho $|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi đó giá trị của $m+n$ bằng bao nhiêu?

-4

Câu 13. Cho biết sự chuyển động của một chiếc thuyền được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Thuyền rời bến từ vị trí $A(2;3)$, chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (a;b)$, sau khi khởi hành 2 giờ thì vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) là $B(8;9)$. Tính $a+b$.

6

Bài 11. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy) với đơn vị trên các trục (tính theo ki-lô-mét), một xe thiết giáp chuyển động thẳng đều từ mục tiêu A có tọa độ $(60;20)$ đến mục tiêu B có tọa độ $(20;50)$ và thời gian đi quãng đường AB là 3 giờ. Gọi $M(x_M;y_M)$ là tọa độ của xe thiết giáp tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Hỏi y_M bằng bao nhiêu?

30

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 D	2 D	3 A	4 A	5 D	6 B	7 C	8 D	9 A	10 A
11 C	12 A	13 B	14 C	15 B	16 A	17 B	18 B	19 B	20 C
21 A	22 C	23 A	24 D	25 B	26 C	27 C	28 C	29 A	30 D
31 C	32 A	33 B	35 A	36 D	37 B	38 A	39 D	40 D	41 C

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 3.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 6.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 7.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 9.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 11.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ		

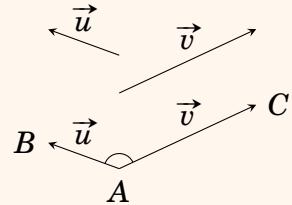
§5 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Góc giữa hai vectơ



Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tùy ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.
Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



- ◇ Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- ◇ Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$.
Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.



① $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

② $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ thì
 $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$

③ $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$ thì
 $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

2) Tích vô hướng của hai vectơ



Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$



- ◇ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ◇ $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được coi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}$.
Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| |\vec{u}| \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

3) Biểu thức tọa độ và tích chất của tích vô hướng



Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$



Lưu ý.

- ◇ Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- ◇ Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- ◇ Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- ◇ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- ◇ $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- ◇ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- ◇ $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.



Từ các tính chất trên, ta có thể chứng minh được:

- ◇ $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$ (tính chất phân phối đối với phép trừ);
- ◇ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
- ◇ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Tích vô hướng, góc giữa hai vectơ (chưa xét tọa độ)

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Góc giữa hai vectơ: Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Ví dụ 2

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\rightarrow 8a^2$

Ví dụ 3

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính các tích vô hướng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\rightarrow 0$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

$\rightarrow -3a^2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\rightarrow -a^2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\frac{1}{2}a^2$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

$-\frac{1}{2}a^2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$-\frac{1}{2}a^2$

Bài 2



Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

$2a^2$

c) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\frac{a^2}{2}$

Dạng

2

Tích vô hướng, góc giữa hai vectơ (theo tọa độ)

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Góc giữa hai vectơ: Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Ví dụ 4

Cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 4)$. Tính $\cos \alpha$, với $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$.

Ví dụ 5

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

 120°

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (2; 4)$ và $\vec{c} = (3; -1)$.

a) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$

b) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

 -6

c) Tính $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

 -1

d) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

 $-\frac{3}{5}$

Dạng

3

Ứng dụng tích vô hướng

◇ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

◇ Trong Vật lí, tích vô hướng của $\vec{F}$ và $\vec{d}$ biểu diễn công A sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thực hiện độ dịch chuyển $\vec{d}$. Ta có công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

❖ Ví dụ 6

Cho tam giác ABC với $A(-1;2)$, $B(8;-1)$, $C(8;8)$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC .

- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.
- Tìm tọa độ của H .
- Giải tam giác ABC .

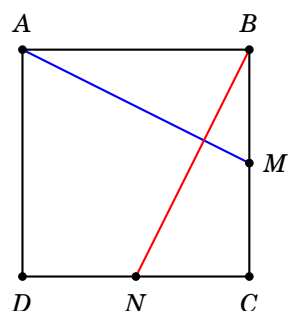
❖ Ví dụ 7

Cho hình chữ nhật $ABCD$ và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

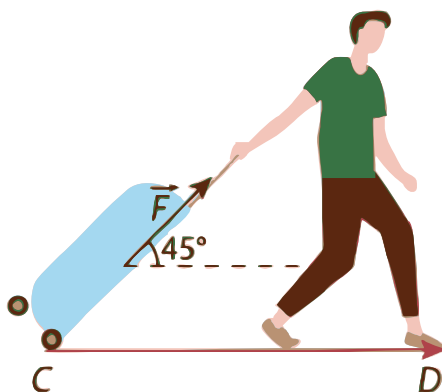
❖ Ví dụ 8

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD . Chứng minh rằng hai đường thẳng AM và BN vuông góc với nhau.



Ví dụ 9

Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ có cường độ 50N, hợp với phương di chuyển một góc 45° , dùng để kéo một vật đi một quãng đường 30m (Hình vẽ). Kết quả thay đổi thế nào nếu lực $\vec{F}$ này có phương song song với hướng di chuyển?



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3), B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tính độ dài đường cao AA' của $\triangle ABC$.

Bài 5



Trong mặt phẳng Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (6; -2)$, $\vec{c} = (x; 1)$.

- Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Tìm tất cả các giá trị của x để $\vec{a} \perp \vec{c}$.
- Tìm tất cả các giá trị của x để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{c}$.
- Tìm tọa độ vectơ $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{a} \perp \vec{d}$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = 20$.

Bài 6



Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh thỏa mãn hệ thức $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. Chứng minh rằng $AC \perp BD$.

Bài 7



Một lực $\vec{F}$ dùng để kéo một xe goòng đi quãng đường 100 m, lực $\vec{F}$ tạo với phương ngang một góc 15° . Công sinh ra là 500 J. Tính cường độ của $\vec{F}$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

🔍 5,14

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

❖ **Câu 2.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ thì góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- (A) 180° . (B) 0° . (C) 90° . (D) 45° .

❖ **Câu 3.** Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\vec{CA}$ và $\vec{CB}$ bằng

- (A) 30° . (B) 60° . (C) 120° . (D) 90° .

❖ **Câu 4.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $4\sqrt{3}$. (D) 1.

❖ **Câu 5.** Cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (-3; 4)$. Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ là

- (A) 11. (B) -10. (C) 5. (D) -2.

❖ **Câu 6.** Cho hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Xét hai vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$. (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$.

❖ **Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(3; -1)$, $B(2; 10)$, $C(-4; 2)$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- (A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -26$. (B) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 26$. (C) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -40$. (D) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 40$.

❖ **Câu 8.** Trong hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho vectơ $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

- (A) $\frac{7}{5}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) 1. (D) $\frac{6}{5}$.

❖ **Câu 9.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- (A) $\alpha = 45^\circ$. (B) $\alpha = 90^\circ$. (C) $\alpha = 30^\circ$. (D) $\alpha = 60^\circ$.

❖ **Câu 10.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

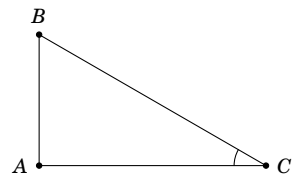
- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.
(C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

❖ **Câu 11.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

- (A) $P = 18$. (B) $P = 28$. (C) $P = 0$. (D) $P = 20$.

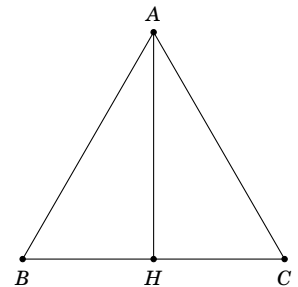
❖ **Câu 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{C} = 30^\circ$. Góc giữa $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$ bằng

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 45° .



❖ **Câu 13.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm của BC . Tính $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$.

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. (B) 0 . (C) a^2 . (D) $\frac{a^2}{2}$.



❖ **Câu 14.** Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$ bằng

- (A) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 30^\circ$. (B) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 45^\circ$. (C) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 120^\circ$. (D) $(\vec{BA}, \vec{BC}) = 135^\circ$.

❖ **Câu 15.** Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Khi đó $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

- (A) $\frac{a^2}{2}$. (B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. (D) a^2 .

❖ **Câu 16.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3. Khi đó $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

- (A) $9\sqrt{3}$. (B) $9\sqrt{2}$. (C) 9 . (D) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 17.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ bằng

- (A) $-a^2$. (B) a^2 . (C) $-a^2\sqrt{2}$. (D) $a^2\sqrt{2}$.

❖ **Câu 18.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{DB}$ bằng

- (A) $-a^2$. (B) a^2 . (C) $-a^2\sqrt{2}$. (D) $a^2\sqrt{2}$.

❖ **Câu 19.** Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 và có tích vô hướng là -6 . Tính góc giữa hai vectơ đó.

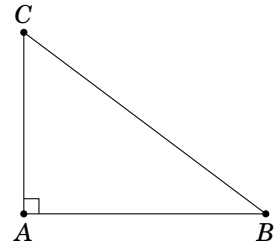
- (A) 60° . (B) 120° . (C) 45° . (D) 90° .

❖ **Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 0)$, $B(3; 1)$, $C(-1; -1)$. Tính số đo góc B .

- (A) $\widehat{B} = 15^\circ$. (B) $\widehat{B} = 60^\circ$. (C) $\widehat{B} = 120^\circ$. (D) $\widehat{B} = 135^\circ$.

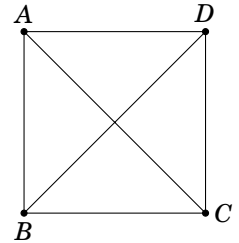
❖ **Câu 21.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

- (A) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$. (B) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$.
(C) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. (D) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.



❖ **Câu 22.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.
(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.



❖ **Câu 23.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

- (A) $P = 18$. (B) $P = 28$. (C) $P = 0$. (D) $P = 20$.

❖ **Câu 24.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

- (A) $k = -20$. (B) $k = -40$. (C) $k = 20$. (D) $k = 40$.

❖ **Câu 25.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

- (A) $k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$. (B) $k = \frac{5}{8}$. (C) $k = \frac{37}{4}$. (D) $k = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

❖ **Câu 26.** Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực hợp $\vec{F}$ với hướng dịch chuyển là một góc 60° . Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

- (A) $4500\sqrt{3}(J)$. (B) $4500(J)$. (C) $450\sqrt{3}(J)$. (D) $450(J)$.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Khi đó

- a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$. b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$. c) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$. d) $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.

❖ **Câu 2.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Khi đó

- a) $(\vec{i}; \vec{j}) = 90^\circ$. b) $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$. c) $\cos(\vec{a}; \vec{i}) = \frac{3}{5}$. d) $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

❖ **Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Khi đó

- a) $\vec{a} \perp \vec{b}$.
b) Tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ là $\vec{u} = (-2; 24)$.
c) Cô-sin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
d) Biết rằng $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (với $m, n \in \mathbb{R}$). Khi đó $m - n = -3$.

❖ **Câu 4.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Khi đó

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$.

b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$.

❖ **Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{b} = \vec{i} + 7\vec{j}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $|\vec{a}| = 7$.

b) $|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$.

d) $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

❖ **Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$.

❖ **Câu 7.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{a^2}{2}$.

❖ **Câu 8.** Cho tam giác đều ABC tâm O , có độ dài các cạnh bằng a . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60° .

b) Góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60° .

c) Tích vô hướng của $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 0.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ bằng $-\frac{a^2}{2}$.

❖ **Câu 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$.

a) $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$.

❖ **Câu 10.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , G là trọng tâm tam giác ABC .

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

b) $\overrightarrow{AC}^2 = a^2$.

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = -a^2$.

d) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{3}$.

❖ **Câu 11.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Xét tính đúng - sai của các khẳng định bên dưới.

a) $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = (-2; 24)$.

b) $|\vec{a}|^2 = 2|\vec{b}|^2$.

c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 12$.

d) vectơ $\vec{x} = \vec{b} + 5\vec{i}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}$.

❖ **Câu 12.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 1)$. Biết $\vec{c}$ thỏa mãn $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$ và $(\vec{a} + 2\vec{c}) \cdot \vec{b} = 1$. Khi đó

a) $|\vec{c}| = \sqrt{5}$.

b) $\vec{b} \cdot \vec{c} = -1$.

c) $\vec{a} \perp \vec{c}$.

d) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1$.



Tự luận.

❖ **Bài 1.** ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 6$, $AC = 8$, AH là đường cao. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ và $\overrightarrow{AH} \cdot (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 120^\circ$, $\widehat{C} = 20^\circ$, độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A bằng 4. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(0;-5)$, $C(-6;-2)$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại B .

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3;3)$, $B(4;4)$.

a) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

$M(0;7)$

b) Tìm tọa độ điểm $N \in Ox$ để A, B, N thẳng hàng.

$N(-24;0)$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau

a) $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (2;6)$;

b) $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (2;4)$;

c) $\vec{a} = (\sqrt{-2};1)$, $\vec{b} = (2;\sqrt{-2})$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t .

b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

a) Giải tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Bài 9. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Bài 11. Cho biết $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

22

Bài 12. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$.

a) Tính $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

36

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

$\approx 53,13^\circ$

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(4;3)$.

a) Tìm tọa độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .

$C(3;0)$, $P = 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$, $S = 2$

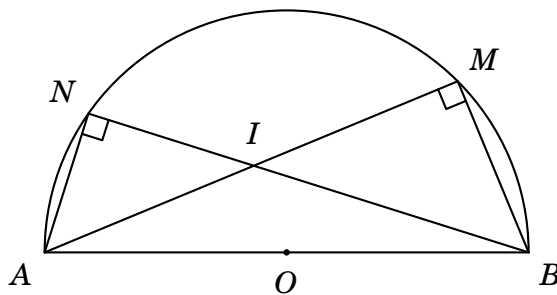
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

$D(4;-1)$ hoặc $D(0;3)$

Bài 14. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I .

a) Chứng minh: $\vec{AI} \cdot \vec{AM} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$ và $\vec{BI} \cdot \vec{BN} = \vec{BI} \cdot \vec{BA}$.

b) Tính $\vec{AI} \cdot \vec{AM} + \vec{BI} \cdot \vec{BN}$ theo R .



Bài 15. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tùy ý. Chứng minh rằng: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MO^2 - OA^2$.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;4)$ và $C(9;2)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết rằng tung độ của B là một số âm.

Đáp án: $B(4;-1), D(6;7)$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1)$ và $B(7;5)$.

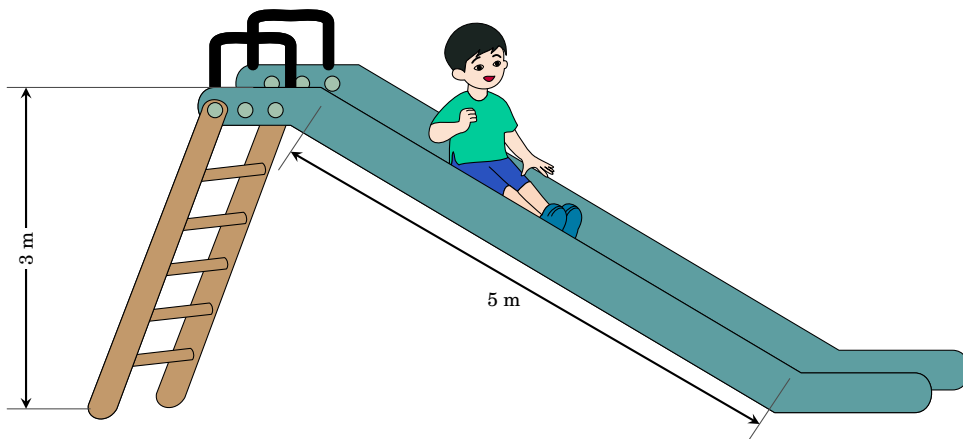
a) Tìm tọa độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều A và B .

Đáp án: $C(6;0)$

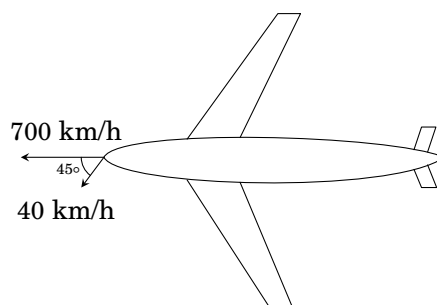
b) Tìm tọa độ của điểm D thuộc trục tung sao cho vectơ $\vec{DA} + \vec{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

Đáp án: $D(0;3)$

Bài 18. Một đứa trẻ cân nặng 15 kg trượt trên một cầu trượt dài 5 m từ độ cao 3 m (hình vẽ). Tính công sinh ra bởi trọng lượng của đứa trẻ, bỏ qua lực ma sát. Cho biết trọng lực tính bởi công thức $P = mg$, trong đó m là khối lượng của vật và $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Đơn vị của P là Newton.



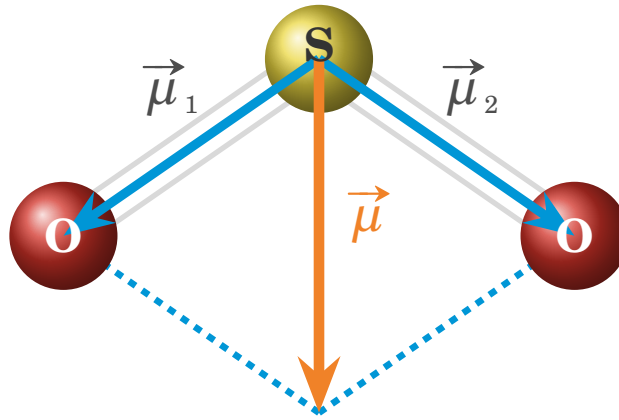
Bài 19. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



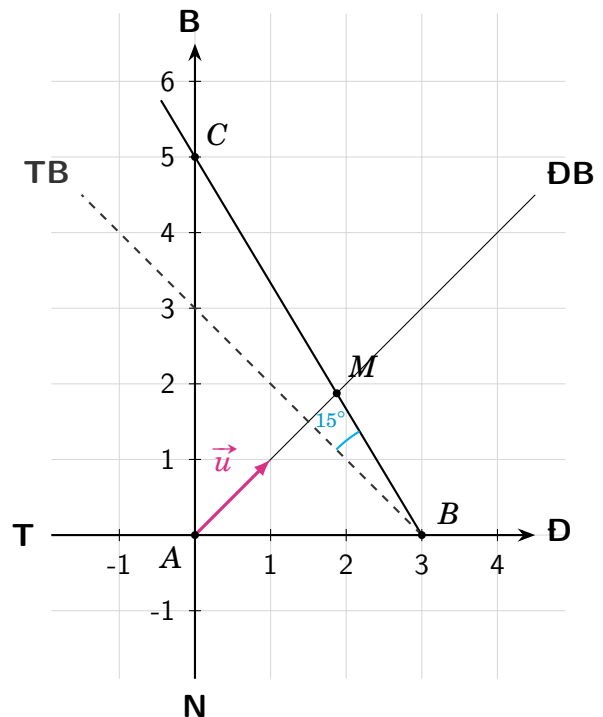
Đáp án: $728,83$

Bài 20. Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120° . Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$ có cùng phương với liên kết cộng hóa trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị. Cho biết vectơ tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2 . Tính độ dài của $\vec{\mu}$.

1,6



Bài 21. Trong một cuộc thi truy tìm kho báu có hai đội A và B tham gia. Bản đồ học được giao cho có đơn vị là 1km. Hệ trục tọa độ trong bản đồ có điểm gốc là A, chiều dương của trục hoành trùng với hướng Đông, chiều dương của trục tung trùng với hướng Bắc. Đơn vị trên mỗi trục tương ứng 1km. Đội A xuất phát từ điểm A và đi theo hướng Đông – Bắc (ĐB), đội B xuất phát từ điểm B(3;0) và đi theo hướng chệch về hướng Bắc 15° so với hướng Tây – Bắc (TB).



Ban tổ chức cho biết kho báu nằm ở giao điểm của hai đường đi của hai đội. Hãy xác định tọa độ của kho báu theo hướng dẫn sau:

- ◇ Giả sử $M(x; y)$ là vị trí của kho báu. Đội A đi theo hướng của vectơ $\vec{u} = (1; 1)$. Do $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{u}$ nên tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} = (t; t)$. Suy ra $M(t; t)$.
- ◇ Gọi C là giao điểm của đường đi của đội B với trục NB. Sử dụng tính chất $\widehat{ABC} = 60^\circ$ để tìm tọa độ của điểm C và vectơ $\overrightarrow{BC}$.
- ◇ Vectơ $\overrightarrow{BM} = (t - 3; t)$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ nên tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Từ đó suy ra giá trị của t .

1,902

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	A	3	B	4	B	5	B	6	D	7	D	8	C	9	A	10	C
11	A	12	A	13	B	14	C	15	A	16	C	17	A	18	B	19	C	20	D
21	A	22	C	23	A	24	B	25	A	26	B								

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 4.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 9.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 11.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 12.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ

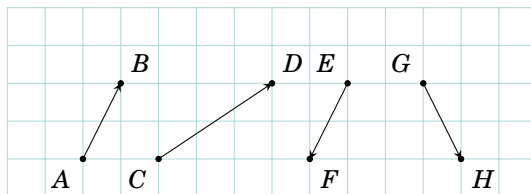
§6 ÔN TẬP CHƯƠNG 4

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ Câu 1. Trong các vectơ sau, hãy tìm cặp vectơ ngược hướng.

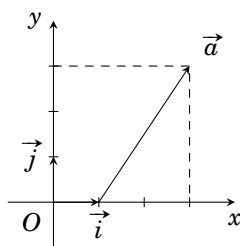


- (A) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$. (B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{GH}$. (C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{GH}$.

❖ Câu 2. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. (C) $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$. (D) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

❖ Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho vectơ $\vec{a}$ được biểu diễn như hình vẽ.



Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- (A) (3;3). (B) (3;2). (C) (2;3). (D) (3;-2).

❖ Câu 4. Tìm giá trị của k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 15$.

- (A) $k = 3$. (B) $k = -\frac{1}{3}$. (C) $k = \frac{1}{3}$. (D) $k = -3$.

❖ Câu 5. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA . Có bao nhiêu vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{MP}$ biết các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm $A; B; C; M; N; P$?

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

❖ Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. (B) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

❖ Câu 7. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Xác định vectơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

- (A) $\overrightarrow{MP}$. (B) $\overrightarrow{MN}$. (C) $\overrightarrow{MQ}$. (D) $\overrightarrow{MR}$.

❖ Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị $S = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

- (A) $S = a\sqrt{3}$. (B) $S = a\sqrt{2}$. (C) $S = 2a$. (D) $S = a\sqrt{6}$.

- ❖ **Câu 9.** Cho điểm M trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?
- (A) $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$. (D) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$.
- ❖ **Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$. (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
- ❖ **Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vectơ nào sau đây có cùng phương
- (A) $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$. (B) $\vec{a} = (\sqrt{2}; 6)$ và $\vec{b} = (1; 3\sqrt{2})$.
 (C) $\vec{i} = (0; 1)$ và $\vec{j} = (1; 0)$. (D) $\vec{c} = (1; 3)$ và $\vec{d} = (2; -6)$.
- ❖ **Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau?
- (A) $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{v} = (4; 6)$. (B) $\vec{a} = (1; -1)$ và $\vec{b} = (-1; 1)$.
 (C) $\vec{z} = (a; b)$ và $\vec{t} = (-b; a)$. (D) $\vec{n} = (1; 1)$ và $\vec{k} = (2; 0)$.
- ❖ **Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1?
- (A) $\vec{a} = (1; 1)$. (B) $\vec{b} = (1; -1)$. (C) $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$. (D) $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.
- ❖ **Câu 14.** Góc giữa vectơ $\vec{a} = (1; -1)$ và vectơ $\vec{b} = (-2; 0)$ có số đo bằng
- (A) 90° . (B) 0° . (C) 135° . (D) 45° .
- ❖ **Câu 15.** Khẳng định nào sau đây là đúng?
- (A) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$. (B) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.
 (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$. (D) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- ❖ **Câu 16.** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và M là một điểm tùy ý. Khẳng định nào **sai**?
- (A) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$.
 (C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. (D) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- ❖ **Câu 17.** Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = 7$, $|\vec{v}| = 12$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 42\sqrt{3}$. Tính góc $(\vec{u}, \vec{v})$.
- (A) 45° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 60° .
- ❖ **Câu 18.** Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2$, $AC = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ bằng
- (A) $\sqrt{13}$. (B) 40. (C) $2\sqrt{10}$. (D) 5.
- ❖ **Câu 19.** Đoạn thẳng AB có M là trung điểm. Khẳng định nào sau đây đúng?
- (A) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{MB}$. (C) $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. (D) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.
- ❖ **Câu 20.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- (A) Nếu hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng thì ba điểm A, B, C thẳng hàng và C nằm giữa A và B .
 (B) Nếu hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng thì ba điểm A, B, C thẳng hàng và C nằm giữa A và B .
 (C) Nếu hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C thẳng hàng và C nằm giữa A và B .

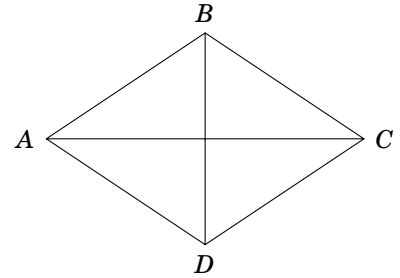
- Ⓓ Nếu hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ có giá vuông góc với nhau thì ba điểm A, B, C thẳng hàng và C nằm giữa A và B .

❖ **Câu 21.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{OC}$?

- Ⓐ $\overrightarrow{CO}$. Ⓑ $\overrightarrow{OA}$. Ⓒ $\overrightarrow{AO}$. Ⓓ $\overrightarrow{OB}$.

❖ **Câu 22.** Cho hình thoi $ABCD$. vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là

- Ⓐ $\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{BA}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.



❖ **Câu 23.** Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau.

- Ⓐ Hai vectơ được gọi là cùng phương khi và chỉ khi giá của chúng song song với nhau.
 Ⓑ Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi chúng cùng phương và cùng độ dài.
 Ⓒ Vectơ–không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.
 Ⓓ Vectơ $\vec{0}$ cùng phương, ngược hướng với mọi vectơ.

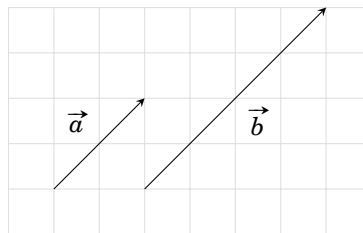
❖ **Câu 24.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.
 Ⓑ Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình bình hành.
 Ⓒ Nếu $AB = kAC$ thì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
 Ⓓ $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a})\vec{b}$.

❖ **Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(4; -3)$ và $N(-2; 0)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$ là

- Ⓐ $(-2; 3)$. Ⓑ $(6; -3)$. Ⓒ $(-6; 3)$. Ⓓ $(2; -3)$.

❖ **Câu 26.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ trong hình sau



Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{a} = -2\vec{b}$. Ⓑ $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$. Ⓒ $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$. Ⓓ $\vec{a} = 2\vec{b}$.

❖ **Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = 4\vec{j} - \vec{i}$. Tọa độ vec tơ $\vec{a}$ là

- Ⓐ $\vec{a} = (-1; -4)$. Ⓑ $\vec{a} = (4; -1)$. Ⓒ $\vec{a} = (-4; 1)$. Ⓓ $\vec{a} = (-1; 4)$.

❖ **Câu 28.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 3), B(-4; 7)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- Ⓐ $(-6; 4)$. Ⓑ $(-2; 4)$. Ⓒ $(-1; 5)$. Ⓓ $(-2; 10)$.

❖ **Câu 29.** Cho tam giác đều ABC . Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- (A) 30° . (B) 60° . (C) 120° . (D) 150° .

❖ **Câu 30.** Cho tam giác ABC , khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

❖ **Câu 31.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ với $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Kết quả của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) 6. (D) $3\sqrt{3}$.

❖ **Câu 32.** Cho tam giác $\triangle ABC$ đều cạnh a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- (A) $\frac{a^2}{2}$. (B) $-a^2$. (C) $-\frac{a^2}{2}$. (D) a^2 .

❖ **Câu 33.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$ và $AD = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ là

- (A) 4. (B) 5. (C) 7. (D) 3.

❖ **Câu 34.** Cho tam giác đều $\triangle ABC$ có độ dài cạnh bằng 8. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) 32. (B) -32. (C) 16. (D) -16.

❖ **Câu 35.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $3a^2$. (B) $6a^2$. (C) a^2 . (D) 0.

❖ **Câu 36.** Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm cạnh BC , G là trọng tâm tam giác ABC và M là một điểm tùy ý. Xét các mệnh đề sau

- (1) $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; (2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$; (3) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$; (4) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng.

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

❖ **Câu 37.** Trên mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{u} = 7\vec{j} - 9\vec{i}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

- (A) $\vec{u} = (-9; 7)$. (B) $\vec{u} = (-7; -9)$. (C) $\vec{u} = (7; -9)$. (D) $\vec{u} = (9; -7)$.

❖ **Câu 38.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $A(-5; 4)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$. (B) $\overrightarrow{AO} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$. (C) $\overrightarrow{AO} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$. (D) $\overrightarrow{OA} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$.

❖ **Câu 39.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$.

- (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 40.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

- (A) 7. (B) 12. (C) 5. (D) 1.

❖ **Câu 41.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1; 3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ là

- (A) $\overrightarrow{OM} = (-1; 3)$. (B) $\overrightarrow{OM} = (-1; -3)$. (C) $\overrightarrow{OM} = (1; -3)$. (D) $\overrightarrow{OM} = (1; 3)$.

❖ **Câu 42.** Trên đường thẳng AB lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Điểm M được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây?

(A) $A \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad M \quad \cdot \quad B \quad \cdot$

(B) $A \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad B \quad \cdot \quad M \quad \cdot$

(C) $A \quad \cdot \quad M \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad B \quad \cdot$

(D) $A \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad B \quad \cdot \quad M \quad \cdot$

❖ **Câu 43.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(3; -1)$, $B(-4; 2)$, $C(4; 3)$. Tìm tọa độ của điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

(A) $D(11; 0)$.

(B) $D(3; -6)$.

(C) $D(-11; 0)$.

(D) $D(-3; 6)$.

❖ **Câu 44.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 8)$. Tọa độ $\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$ là

(A) $\vec{c} = (-13; -36)$.

(B) $\vec{c} = (17; 44)$.

(C) $\vec{c} = (4; 12)$.

(D) $\vec{c} = (-13; 25)$.

❖ **Câu 45.** Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

(B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

(C) Hai vectơ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

(D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

❖ **Câu 46.** Cho tam giác ABC có cạnh $AB = 4$; $AC = 7$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

(A) 4.

(B) 7.

(C) 14.

(D) 28.



2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(-2; 5)$, $B(-4; -2)$, $C(1; 5)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; -7)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 0)$.

b) Nếu G là trọng tâm thì tọa độ G là $\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(3; 10)$.

d) $\widehat{BAC} \approx 105^\circ$.

❖ **Câu 2.** Cho tam giác ABC với $A(-2; 5)$, $B(-4; -2)$, $C(1; 5)$.

a) Đoạn $AB = \sqrt{53}$.

b) Tọa độ vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là $(-1; 14)$.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}) > 0,84$.

d) Gọi M là trung điểm BC , khi đó $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

❖ **Câu 3.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; 6)$, $B(3; 2)$, $C(-1; 7)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-5; 4)$.

b) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

d) Tam giác ABC vuông tại B .

❖ **Câu 4.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O .

a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BO}$ cùng phương.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD}$.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

❖ **Câu 5.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , có trọng tâm G . Khi đó:

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
- b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$.
- c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.
- d) Gọi CM là trung tuyến của tam giác ABC thì $\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$.

❖ **Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm I , $AD = 17$, $DC = 34$ và góc $\widehat{DAB} = 60^\circ$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của DC và AB .

- a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$.
- b) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{ID}$.
- c) $\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- d) $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = 17\sqrt{7}$.

❖ **Câu 7.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

- a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- b) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{PA}$.
- c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.
- d) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}$ với G là trọng tâm tam giác ABC .

❖ **Câu 8.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1;5), B(-4;1), C(2;2)$.

- a) $\overrightarrow{BC} = (6;1)$.
- b) Với $D(x_D; y_D)$ thì $\overrightarrow{AD} = (x_D - 1; y_D + 5)$.
- c) Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $D(5;6)$.
- d) Điểm $I(-1;1)$ là trung điểm của đoạn thẳng BC .

❖ **Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-2), B(-3;-1)$.

- a) $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
- b) $\overrightarrow{AB} = (-4;1)$.
- c) Tọa độ của điểm C sao cho $OABC$ là hình bình hành là $C(4;1)$.
- d) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $(-1; -3/2)$.

❖ **Câu 10.** Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O , cạnh bằng a và $\widehat{ABD} = 60^\circ$.

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
- b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- c) $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}| = a\sqrt{3}$.
- d) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{3a^2}{4}$.

❖ **Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(3;-2), B(5;3), C(-1;2)$.

- a) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $(6;1)$.
- b) M là điểm đối xứng với A qua B , khi đó điểm M có tọa độ $(7;8)$.
- c) Độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $\sqrt{37}$.
- d) Tam giác $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC}$ là góc tù.

❖ **Câu 12.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a .

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- b) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.
- c) $|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA}|$.
- d) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$.

❖ **Câu 13.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}$ và G là trọng tâm $\triangle ABC$.

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OD}$.
- c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- d) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 14.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao BH . Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = 8$.

b) $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BH}$ bằng $2\sqrt{3}$.

d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

❖ **Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ và hai điểm $P(2; 3)$, $Q(7; -4)$.

a) $\vec{a} = (2; -3)$.

b) $\overrightarrow{PQ} = (5; -7)$.

c) $|\vec{b}| = 1$.

d) Hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\vec{c}$ cùng phương.

❖ **Câu 16.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 8$. Khi đó

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. b) $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{4}{5}$. c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 48$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 10$.

❖ **Câu 17.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O cạnh bằng 4. Khi đó

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$. b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$. c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = -16$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{5}$.

❖ **Câu 18.** Cho tam giác ABC có $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$).

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$.

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{BC}^2 = 20$.

d) $AD \perp BE$ khi $k = \frac{4}{5}$.

❖ **Câu 19.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O , $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BO . Khi đó

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

c) $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

d) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2$.

❖ **Câu 20.** Cho hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh bằng a .

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.

b) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BD}$ bằng $2a$.

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DB} = a^2$.

d) Với điểm M tùy ý, gọi $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$. Giá trị nhỏ nhất của T là $2025a$.

❖ **Câu 21.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB = 4$, $AD = 3$.

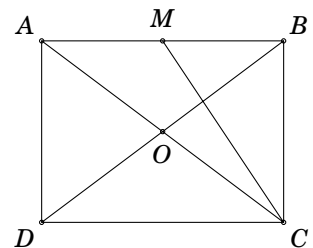
Gọi M là trung điểm của AB .

a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 7$.

c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.



❖ **Câu 22.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O biết $AB = 2a$, $AD = a$ và M là trung điểm của AB .

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

c) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC}| = a\sqrt{5}$.

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = 4a^2$.

❖ **Câu 23.** Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O , cạnh bằng a và $\widehat{ABD} = 60^\circ$.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $|\vec{CB} + \vec{CD}| = a\sqrt{3}$.

d) $\vec{AO} \cdot \vec{CD} = \frac{3a^2}{4}$.

❖ **Câu 24.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AB = 4$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AC}$.

a) $\vec{AB} = \vec{AC}$.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

c) $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

d) $\vec{AM} \cdot \vec{BE} = 1$.

❖ **Câu 25.** Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng 6 và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$ và điểm N là trung điểm của cạnh AC .

a) $|\vec{AB}| = 6$.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18$.

c) $(\vec{BA}; \vec{BC}) = 60^\circ$.

d) $\vec{BN} \cdot \vec{CM} = -51$.

❖ **Câu 26.** Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC . Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$.

a) $\vec{AM} = -\frac{3}{2}\vec{AG}$.

b) $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$.

c) Với I là điểm đối xứng với G qua M thì $\vec{GI} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

d) $|\vec{GM}| = \frac{1}{6}|\vec{a} + \vec{b}|$.

❖ **Câu 27.** Cho tam giác đều ABC có cạnh $BC = 18$ cm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . H là hình chiếu của A trên cạnh BC .

a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

b) $AH = 18\sqrt{3}$ cm.

c) $GA = 2\sqrt{3}$ cm.

d) Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{AB}|$ là đường tròn có định có bán kính $R = 2$ cm.

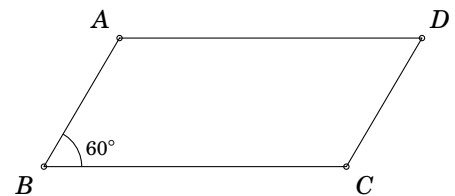
❖ **Câu 28.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm và $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

a) $|\vec{BD}| = 2\sqrt{3}$ cm.

b) $\vec{AB} \cdot (\vec{DA} + \vec{AC}) = 1$.

c) Diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng 4 cm².

d) $\vec{AB} = \vec{DC}$.



❖ **Câu 29.** Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = 3a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC . Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn $12AJ - 7AC = 0$. Khi đó

a) $\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$.

b) $\vec{BJ} = -\vec{AB} + \frac{7}{12}\vec{AC}$.

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4a^2$.

d) $AI \perp BJ$.

❖ **Câu 30.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh bằng 21. Điểm G là trọng tâm tam giác ABD .

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

b) $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$.

c) $\vec{GB} + \vec{GD} = \vec{GC}$.

d) Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = 9$ là đường tròn bán kính 15.

❖ **Câu 31.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7,5$.

c) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 19$.

d) $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 8,5$.

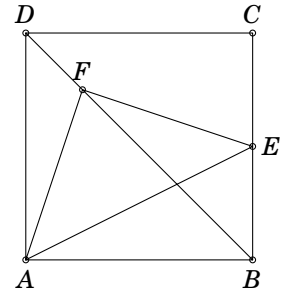
❖ **Câu 32.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy E là trung điểm của BC , điểm F thoả mãn $\vec{BF} = \frac{3}{4}\vec{BD}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.

b) $\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AD}$.

c) $\vec{EF} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$.

d) Tam giác AEF vuông cân.



Tự luận.

❖ **Bài 1.** Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\vec{MB}$ và $\vec{MC}$.

b) Biểu thị vectơ $\vec{AM}$ theo hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

❖ **Bài 2.** Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có:

$$\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}.$$

❖ **Bài 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1)$, $B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$.

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $BCAD$ là một hình bình hành.

❖ **Bài 4.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $|\vec{AB} + \vec{OD}|, |\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD}|$.

❖ $|\vec{AB} + \vec{OD}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\vec{AB} - \vec{OC} + \vec{OD}| = 0$

b) Tính độ dài vectơ $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$.

❖ $|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}| = 2a$

❖ **Bài 5.** Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy các điểm M, N , không trùng với B và C sao cho $BM = MN = NC$.

a) Chứng minh rằng hai tam giác ABC và AMN có cùng trọng tâm.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Đặt $\vec{GB} = \vec{u}$ và $\vec{GC} = \vec{v}$. Hãy biểu thị các vectơ sau qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\vec{GA}, \vec{GM}, \vec{GN}$.

❖ $\vec{GA} = -(\vec{u} + \vec{v}), \vec{GM} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}, \vec{GN} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

❖ **Bài 6.** Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 5$ và $\widehat{CAB} = 60^\circ$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

❖ $10; -6;$

b) Lấy các điểm M, N thoả mãn $2\vec{AM} + 3\vec{MC} = \vec{0}$ và $\vec{NB} + x\vec{NC} = \vec{0}$ ($x \neq -1$). Xác định x sao cho $AN \perp BM$.

❖ $x = -\frac{14}{65}$

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD . Lấy P thuộc đoạn DM và Q thuộc đoạn BN sao cho $DP = 2PM$, $BQ = xQN$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. 💡 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{x+2}{2(x+1)}\vec{u} + \frac{x}{x+1}\vec{v}$;

b) Tìm x để A, P, Q thẳng hàng. 💡 $x = 2$

Bài 8. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90^\circ$, $BC = 1$, $AB = 2$, $AD = 3$. Gọi M là trung điểm của AB .

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi N là trung điểm của CD , G là trọng tâm tam giác MCD và I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $9IC = 5ID$. Chứng minh rằng A, G, I thẳng hàng.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng AI và BI .

💡 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; $AI = \frac{15}{7}$, $BI = \frac{13}{7}$

Bài 9. Cho $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Gọi H là trung điểm DC , M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$, gọi K là giao điểm của DM và BH .

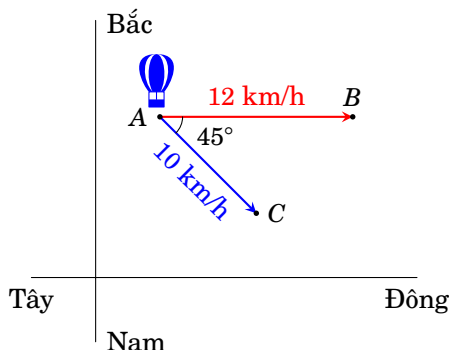
a) Tính $|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}|$ theo a .

b) Biểu thị $\overrightarrow{BK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Câu 33. Cho hình bình hành $ABCD$ gọi M là trung điểm của cạnh CD , N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN , đường thẳng AG cắt BC tại K . Khi đó $\overrightarrow{BK} = \frac{m}{n} \cdot \overrightarrow{BC}$ (với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $S = m + n$. 💡 17

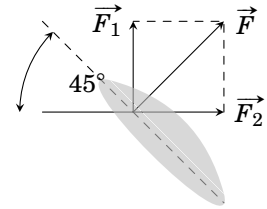
Câu 34. Một vật tại điểm M trên mặt phẳng ngang chịu tác dụng của hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ có độ lớn lần lượt là 1500 N và 1000 N. Cho biết góc giữa $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ là 60° . Biết vectơ hợp lực $\vec{F}$ là tổng của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Tính cosin của góc giữa $\vec{F}$ và $\vec{F}_1$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục). 💡 0,9

Bài 10. Một khinh khí cầu đang bay từ hướng tây sang hướng đông với tốc độ 12 km/h thì gặp một luồng gió thổi từ hướng bắc sang hướng nam với vận tốc 10 km/h. Khinh khí cầu bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi (như hình vẽ bên dưới). Tìm vận tốc mới của khinh khí cầu. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị km/h)



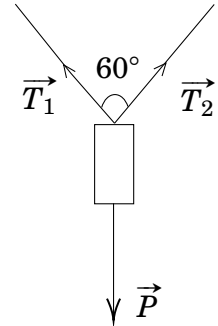
💡 20,3

Bài 11. Khi máy bay nghiêng cánh một góc 45° , lực $\vec{F}$ của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng $\vec{F}_1$ và lực cản $\vec{F}_2$ (tham khảo hình vẽ) biết $|\vec{F}| = 20 \text{ N}$. Tính $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$ (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị là N).



28,2

Bài 12. Một vật khối lượng $m = 40\sqrt{3} \text{ kg}$ được treo cố định trên trần nhà bằng hai sợi dây không giãn có độ dài bằng nhau. Biết rằng lực căng dây $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$ có độ lớn như nhau và hợp với nhau một góc 60° (hình bên). Lực căng của dây bằng bao nhiêu? Biết $P = m \cdot g$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Bài 13. Trung tâm Khí tượng Thủy văn đang theo dõi lộ trình của một cơn bão trên bản đồ vệ tinh (được gắn hệ trục tọa độ Oxy , với đơn vị độ dài trên các trục là km). Giả sử tâm bão chuyển động thẳng đều theo một hướng cố định. Lúc 7 giờ 00, tâm bão ở vị trí điểm $A(120; -50)$. Lúc 9 giờ 00 cùng ngày, tâm bão di chuyển đến vị trí điểm $B(180; 30)$. Các nhà khí tượng dự báo rằng nếu giữ nguyên tốc độ và hướng di chuyển, cơn bão sẽ đổ bộ vào đất liền lúc 12 giờ 00 trưa cùng ngày tại vị trí điểm $C(x; y)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $T = x - 2y$.

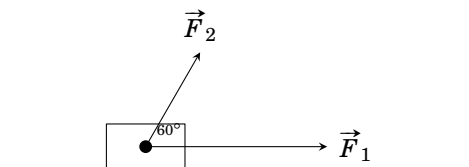
-30

Bài 14. Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$, trong đó độ lớn lực $\vec{F}_2$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F}_1$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ có phương hợp với lực $\vec{F}_1$ các góc 30° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $50\sqrt{3} \text{ N}$. Tìm độ lớn của lực $\vec{F}_2$.



300

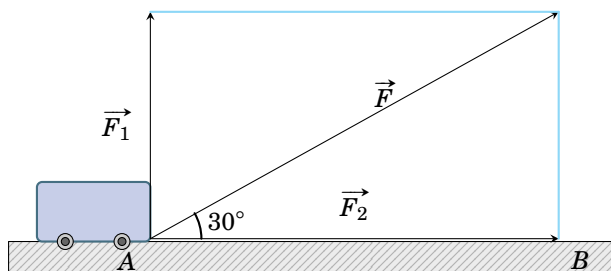
Bài 15. Một vật nằm trên mặt phẳng ngang chịu tác dụng của hai lực $\vec{F}_1 = 50 \text{ N}$ có phương song song với mặt phẳng ngang và $\vec{F}_2 = 30 \text{ N}$ theo phương tạo với mặt phẳng ngang một góc 60° (như hình vẽ). Ta nhận thấy vật di chuyển theo phương nằm ngang một quãng đường 28 m. Tính công sinh ra (đơn vị: Jun) bởi lực $\vec{F}$ là hợp lực của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ nói trên.



1820

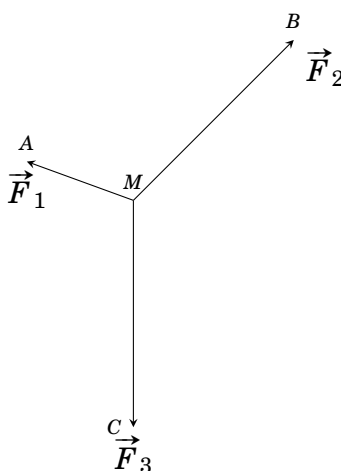
Bài 16. Hai người cùng kéo một xe goòng như hình. Mỗi người cầm vào một sợi dây cùng buộc vào xe goòng, và lực tổng hợp, hợp với phương ngang (mặt đường) một góc 30° .

Người thứ nhất kéo một lực là $30\sqrt{3}$ (N), người thứ hai kéo một lực là 90 (N). Hỏi công sinh ra khi kéo vật đi một khoảng dài 100 m là bao nhiêu?



9000

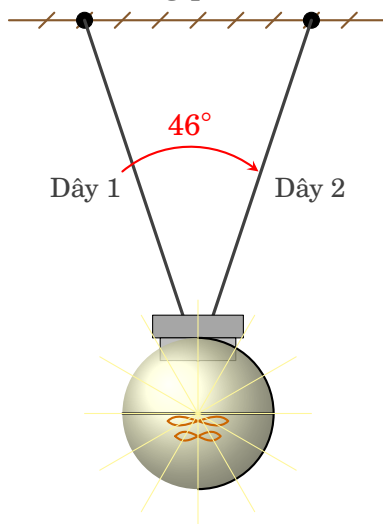
Bài 17. Tại ba điểm A, B, C lần lượt kéo lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ để giữ cân bằng một vật M như hình vẽ. Biết lực kéo tại mỗi điểm B, C gấp hai lần lực kéo tại A . Tính góc giữa $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (đơn vị độ, kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 18. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(1;3), B(2;4), C(-3;5)$. Xác định tọa độ điểm N trên trục tung sao cho $Q = 2|\vec{NA} + 2\vec{NB}| + 3|\vec{NA} + \vec{NC}|$ nhỏ nhất.

Bài 19. Một bóng đèn có khối lượng $m = 0,4$ kg được treo cân bằng bởi hai sợi dây. Hai sợi dây này có chiều dài bằng nhau, được gắn vào cùng một điểm trên bóng đèn và hai đầu còn lại được gắn lên trần nhà. Biết rằng hai sợi dây hợp với nhau một góc 46° . Tính lực căng của mỗi sợi dây, đơn vị N. Cho biết trọng lực tác dụng lên bóng đèn là $\vec{P} = m\vec{g}$, với $g = 10 \text{ m/s}^2$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

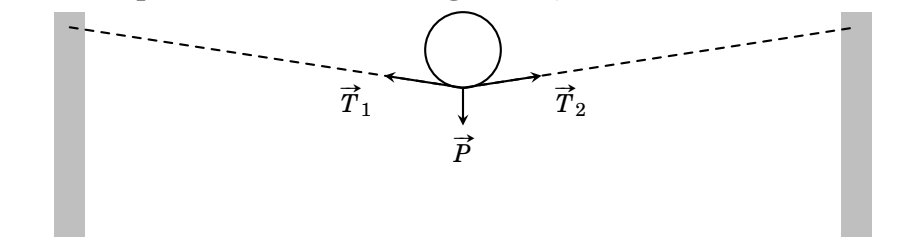
2,17



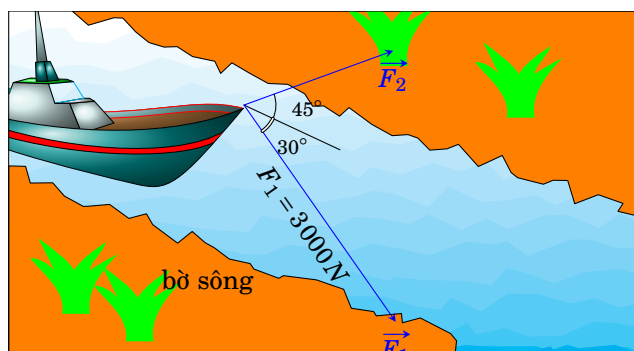
Bài 20.

- a) Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; -3), B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $\triangle ABM$ vuông tại A .
- b) Để kéo đường dây điện bằng qua một hồ hình thang vuông tại A và B với độ dài $AB = 180$ m, $BC = 140$ m, $AD = 200$ m, người ta dự định làm 4 cột điện tiếp tiếp cách đều nhau trên một đường thẳng, cột thứ nhất nằm trên bờ AB và cách đỉnh A khoảng 60 m, cột thứ ba đến bờ AD . Tính khoảng cách từ vị trí cột thứ ba đến bờ AD .

Bài 21. Một diễn viên xiếc (coi là một vật rắn) trọng lượng 700 N đi trên dây làm dây võng xuống một góc 140° . Tính lực căng của dây treo khi diễn viên xiếc đứng cân bằng (như hình minh họa bên dưới), coi dây không giãn. Biết rằng khi ở vị trí cân bằng thì $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

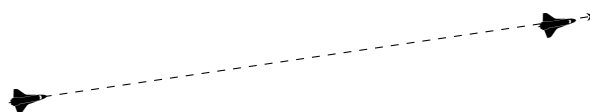


Bài 22. Trong khu đóng tàu, để vận chuyển tàu tới khu hạ thủy, người ta đào một đường kênh và lắp đặt 2 ròng rọc kéo hai bên bờ. Khi kéo tàu, người ta muốn dùng dây kéo để kéo tàu đi dọc theo bờ hai bên (như hình vẽ minh họa). Ròng rọc thứ nhất dùng lực kéo 3000 N tạo với hướng tàu di chuyển một góc 30° ; lực kéo ròng rọc thứ hai tạo với hướng tàu di chuyển một góc 45° . Hỏi ròng rọc thứ hai cần dùng lực kéo bao nhiêu để kéo được con tàu đi dọc theo bờ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



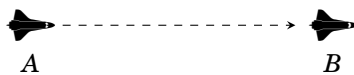
2,120

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , một đài kiểm soát không lưu đặt ở gốc tọa độ $O(0;0)$, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $A(-5;5)$ và $B(2;6)$. Biết rằng khi máy bay đến vị trí $M(a;b)$ thì máy bay gần trạm kiểm soát không lưu nhất. Tính giá trị biểu thức $20a - 15b$.



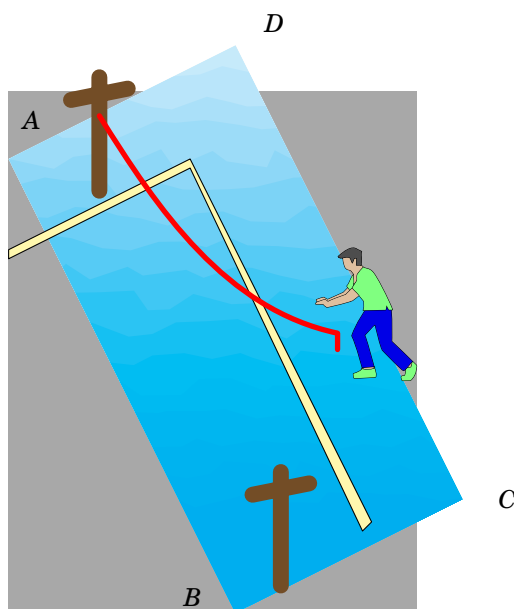
🔍 -100

Bài 24. Trên màn hình ra-đa của đài kiểm soát không lưu (được xem như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(900;400)$ đến thành phố B có tọa độ $(300;700)$, thời gian bay quãng đường AB là 4 giờ. Gọi tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 3 giờ là $(a;b)$. Tính $P = a + b$.



🔍 1075

Bài 25. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB = 140$ m, $AD = 50$ m. Người ta dự định làm năm cột điện liên tiếp thẳng hàng và cách đều nhau. Cột thứ nhất nằm trên bờ AB và cách đỉnh A một khoảng bằng 10 m. Cột thứ năm nằm trên bờ CD và cách đỉnh C một khoảng bằng 30 m. Khoảng cách từ cột thứ tư đến bờ AD bằng bao nhiêu mét.



🔍 85

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	D	3	C	4	B	5	C	6	B	7	A	8	B	9	A	10	A
11	B	12	C	13	D	14	C	15	D	16	B	17	B	18	C	19	A	20	A
21	C	22	A	23	C	24	D	25	C	26	B	27	D	28	C	29	B	30	C
31	B	32	C	33	B	34	B	35	C	36	B	37	A	38	D	39	A	40	C
41	D	42	A	43	A	44	A	45	D	46	C								

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 4.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 9.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 10.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 11.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 12.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 13.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 14.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 15.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 16.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 17.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 18.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 19.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 20.	☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d S
Câu 21.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 22.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 23.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 24.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S
Câu 25.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 26.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 27.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S	Câu 28.	☐ a S ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 29.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 30.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 31.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 32.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ

§1 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu $\bar{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là **số gần đúng**, kí hiệu là a .

2) Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

⚙ **Sai số tuyệt đối:** Cho $\bar{a}$ là số đúng và a là số gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $\Delta_a = |a - \bar{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\bar{a}$ và số gần đúng a , được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a .



☆ Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên cũng không biết được Δ_a . Tuy nhiên ta có thể đánh giá được $\Delta_a \leq d$, với d là một số dương nào đó.

☆ Nếu $\Delta_a \leq d$ thì $|a - \bar{a}| \leq d \Leftrightarrow a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Khi đó, ta có thể viết $\bar{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.

☆ Với d càng nhỏ thì a càng gần $\bar{a}$ nên d gọi là **độ chính xác của số gần đúng**.

⚙ **Sai số tương đối:** Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a và được tính bởi công thức $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.



☆ Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$, suy ra $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|}$. Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo càng cao.

☆ Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

3) Quy tròn số gần đúng

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là **số quy tròn**. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

 Quy tắc quy tròn số:

① Đối với chữ số hàng làm tròn:



- ✎ Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
- ✎ Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.

② Đối với chữ số sau hàng làm tròn:



- ✎ Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
- ✎ Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

 Nhận xét:

- ① Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- ② Khi quy tròn số đúng $\bar{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Ví dụ, số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.
- ③ Cho số gần đúng a với độ chính xác d . Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Cho $\bar{a}$ là số đúng và a là số gần đúng của $\bar{a}$.

- ① Sai số tuyệt đối được tính theo công thức: $\Delta_a = |a - \bar{a}|$.
- ② Sai số tương đối được tính theo công thức: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.
- ③ Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì
 - Số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.
 - Đánh giá sai số tương đối $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$.

 Ví dụ 1

Cho giá trị gần đúng của $\frac{8}{17}$ là 0,47 thì sai số tuyệt đối không vượt quá bao nhiêu?

❖ Ví dụ 2

Một bao gạo ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg.

- Xác định khối lượng đúng, khối lượng gần đúng và độ chính xác của bao gạo.
- Khối lượng thực của bao gạo nằm trong đoạn nào?

❖ Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh đo được như sau $a = 12\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $b = 10,2\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $c = 8\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$. Tính chu vi P của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Giả sử khối lượng đúng của một hộp kẹo là 0,85 kg. Bình và An cân hộp kẹo này và ghi nhận kết quả lần lượt là 0,8 kg và 1 kg.

- Tìm sai số tuyệt đối của kết quả cân của mỗi bạn.
- Kết quả cân của bạn nào chính xác hơn? Vì sao?

Bài 2



Hãy xác định sai số tuyệt đối của số $a = 123456$ biết sai số tương đối $\delta_a = 0,2\%$.

Bài 3



Hai kỹ thuật viên trắc địa tham gia đo diện tích của một thửa đất hình tam giác. Người thứ nhất đo đáy tam giác với kết quả 65,58 (m) với sai số tương đối là 1%. Người thứ hai đo đường cao tương ứng của tam giác với kết quả 47,39 (m) với sai số tương đối là 3%. Hãy tính diện tích của tam giác và viết kết quả dưới dạng chuẩn.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Một người thợ cần biết chiều cao của một ngôi nhà. Anh ta thực hiện các phép đo trong ba lần và được kết quả như sau: $h_1 = 10,23 \pm 0,43$ (m), $h_2 = 10,58 \pm 0,2$ (m), $h_3 = 9,92 \pm 0,63$ (m). Hỏi trong ba số liệu đó, người thợ nên chọn số nào làm chiều cao ngôi nhà.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

2

Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

- ◇ Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.
- ◇ Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên, nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.
- ◇ Chẳng hạn, số quy tròn đến hàng nghìn của $x = 2841675$ là $x = 2842000$, của $y = 432415$ là $y \approx 432000$.
- ◇ Số quy tròn đến hàng trăm của $x = 12,4253$ là $x \approx 12,43$, của $y = 4,1521$ là $y \approx 4,15$.

Ví dụ 4

Cho số gần đúng $a = 2841275$ có độ chính xác $d = 300$. Hãy viết số quy tròn của a .

.....

.....

.....

❖ Ví dụ 5

Biết $\sqrt{7} = 2,6457513\dots$

- Làm tròn kết quả đến phần mười và ước lượng sai số tuyệt đối.
- Làm tròn kết quả đến phần nghìn và ước lượng sai số tuyệt đối.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ Ví dụ 6

Cho số gần đúng $a = 6547$ với độ chính xác $d = 100$. Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5



Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 3,1463$ biết $\bar{a} = 3,1463 \pm 0,001$.

.....	
.....	
.....	

Bài 6



Cho biết $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$. Hãy quy tròn $\sqrt{3}$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 7



Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây:

a) $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

b) $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Trong các số sau đây, số nào là số đúng?

- (A) Độ dài đường chéo của hình vuông cạnh 1 là $\sqrt{2}$.
 (B) Bán kính Trái Đất là 6371 km.
 (C) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày.
 (D) Số π xấp xỉ bằng 3,14.

❖ **Câu 2.** Khi một bao bì gạo ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg, số 0,2 được gọi là gì?

- (A) Số gần đúng. (B) Sai số tuyệt đối. (C) Độ chính xác. (D) Sai số tương đối.

❖ **Câu 3.** Công thức tính sai số tuyệt đối Δ_a của số gần đúng a so với số đúng $\bar{a}$ là

- (A) $\Delta_a = a - \bar{a}$. (B) $\Delta_a = \bar{a} - a$. (C) $\Delta_a = |a - \bar{a}|$. (D) $\Delta_a = a + \bar{a}$.

❖ **Câu 4.** Cho số gần đúng $a = 2,53$ với độ chính xác $d = 0,01$. Số đúng $\bar{a}$ chắc chắn thuộc đoạn nào sau đây?

- (A) $[2,53; 2,54]$. (B) $[2,52; 2,54]$. (C) $[2,51; 2,55]$. (D) $[2,52; 2,53]$.

❖ **Câu 5.** Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a , được tính hoặc đánh giá theo công thức nào?

- (A) $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$. (B) $\delta_a = \frac{|a|}{d}$. (C) $\delta_a = |a| \cdot d$. (D) $\delta_a \leq \frac{\Delta_a}{d}$.

❖ **Câu 6.** Làm tròn số 2359,3 đến hàng chục ta được số quy tròn là

- (A) 2359. (B) 2360. (C) 2350. (D) 2300.

❖ **Câu 7.** Làm tròn số 18,693 đến hàng phần trăm ta được số quy tròn là

- (A) 18,69. (B) 18,70. (C) 18,60. (D) 18,68.

❖ **Câu 8.** Cho số đo độ cao của một ngọn núi là 1235 ± 5 m. Số quy tròn của số gần đúng 1235 là

- (A) 1235. (B) 1230. (C) 1240. (D) 1200.

❖ **Câu 9.** Cho số gần đúng $a = 581268$ với độ chính xác $d = 200$. Số quy tròn của a là

- (A) 581000. (B) 581300. (C) 581200. (D) 580000.

❖ **Câu 10.** Viết số quy tròn của số gần đúng 11251900 ± 300 .

- (A) 11251000. (B) 11250000. (C) 11251900. (D) 11252000.

❖ **Câu 11.** Viết số quy tròn của số gần đúng $18,2857 \pm 0,01$.

- (A) 18,29. (B) 18,3. (C) 18,28. (D) 18,0.

❖ **Câu 12.** Sử dụng máy tính cầm tay để tìm số gần đúng cho $\sqrt[3]{7}$ với độ chính xác 0,0005, ta thu được kết quả nào sau đây?

- (A) 1,91. (B) 1,912. (C) 1,913. (D) 1,9129.

❖ **Câu 13.** Biết số gần đúng $a = 7975421$ có độ chính xác $d = 150$. Hãy ước lượng sai số tương đối của a .

- (A) $\delta_a \leq 0,15\%$. (B) $\delta_a \leq 0,19\%$. (C) $\delta_a \leq 0,25\%$. (D) $\delta_a \leq 0,21\%$.

❖ **Câu 14.** Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $5 \pm 0,03$ m và chiều rộng $3 \pm 0,01$ m. Xác định sai số tương đối của phép đo diện tích mảnh vườn.

- (A) 0,75%. (B) 0,85%. (C) 0,95%. (D) 0,1%.

❖ **Câu 15.** Một công ty sử dụng dây chuyền A để đóng gạo vào bao với khối lượng mong muốn là 5 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg. Công ty cũng sử dụng dây chuyền B để đóng gạo với khối lượng chính xác là 20 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $20 \pm 0,5$ kg. Hỏi dây chuyền nào đóng gói tốt hơn?

- (A) Dây chuyền A đóng gói tốt hơn dây chuyền B.
(B) Dây chuyền B đóng gói tốt hơn dây chuyền A.
(C) Hai dây chuyền đóng gói tốt như nhau.
(D) Không có dây chuyền nào đóng gói tốt.

❖ **Câu 16.** Nếu lấy 3,14 làm giá trị gần đúng cho số π thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- (A) 0,01. (B) 0,02. (C) 0,03. (D) 0,04.

❖ **Câu 17.** Cho số a là số gần đúng của số $\bar{a}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) $a > \bar{a}$. (B) $a < \bar{a}$. (C) $|\bar{a} - a| > 0$. (D) $-a < \bar{a} < a$.

❖ **Câu 18.** Dây chuyền A đóng bao gạo với khối lượng $5 \pm 0,2$ kg. Dây chuyền B đóng bao gạo $20 \pm 0,5$ kg. Khẳng định nào sau đây là đúng khi so sánh chất lượng hai dây chuyền?

- (A) Dây chuyền A tốt hơn vì độ chính xác nhỏ hơn ($0,2 < 0,5$).
(B) Hai dây chuyền tốt như nhau.
(C) Dây chuyền B tốt hơn vì có sai số tương đối nhỏ hơn.
(D) Không thể so sánh được.

❖ **Câu 19.** Các nhà vật lý đo hằng số Hubble bằng hai phương pháp cho kết quả là $67,90 \pm 0,55$ và $67,74 \pm 0,46$. Phương pháp nào chính xác hơn?

- (A) Phương pháp thứ nhất.
(B) Phương pháp thứ hai.
(C) Hai phương pháp chính xác bằng nhau.

Ⓓ Không đánh giá được.

❖ **Câu 20.** An và Bình cùng tính chu vi hình tròn bán kính $R = 2$ cm. An lấy $\pi \approx 3,14$ được kết quả 12,56 cm. Bình lấy $\pi \approx 3,1$ được kết quả 12,4 cm. Nhận xét nào sau đây đúng?

- Ⓐ Kết quả của An chính xác hơn. Ⓑ Kết quả của Bình chính xác hơn.
 Ⓒ Hai kết quả chính xác như nhau. Ⓓ Cả hai đều là kết quả đúng tuyệt đối.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cho số gần đúng $a = 581268$ với độ chính xác $d = 200$. Có số quy tròn là 581200.
 b) Cho số gần đúng của π là $a = 3,141592653589$, độ chính xác là 10^{-10} . Số quy tròn của a là 3,141592654.
 c) Chiều dài một cái cầu đo được là $l = 1745,25 \pm 0,01$ m. Có số quy tròn là 1745,3 m.
 d) Số gần đúng $\sqrt{5}$ với độ chính xác 0,005 là $\approx 2,24$.

❖ **Câu 2.** Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân ta được $\sqrt{8} = 2,828427125$.

- a) Số 2,828427125 là số chính xác.
 b) Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần nghìn là 2,8284.
 c) Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần mười là 2,8.
 d) Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần trăm là 2,83.

❖ **Câu 3.** Khi đo độ dài của hai đoạn thẳng, ta thu được hai kết quả là $l_1 = 10 \pm 0,1$ cm và $l_2 = 100 \pm 0,2$ cm. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Phép đo l_1 có sai số tuyệt đối lớn hơn phép đo l_2 .
 b) Phép đo l_1 có độ chính xác cao hơn phép đo l_2 theo tiêu chí sai số tuyệt đối.
 c) Sai số tương đối của phép đo l_1 không vượt quá 1%.
 d) Phép đo l_1 có chất lượng tốt hơn phép đo l_2 .

❖ **Câu 4.** Biết một vật thể có thể tích $V = 180,37 \text{ cm}^3 \pm 0,05 \text{ cm}^3$.

- a) Số 180,37 là số gần đúng của thể tích.
 b) Sai số tương đối của giá trị gần đúng ấy không vượt quá 0,03.
 c) Độ chính xác của số gần đúng của thể tích là $d = \pm 0,05$.
 d) Thể tích của vật là một số nằm trong khoảng từ 180,32 cm^3 đến 180,42 cm^3 .

❖ **Câu 5.** Một miếng đất hình chữ nhật với chiều dài là $\bar{x} = 23,64 \pm 0,01$ m và chiều rộng là $\bar{y} = 15,05 \pm 0,01$ m. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Số quy tròn của $y = 15,05$ là 15,1.
 b) Số đúng $\bar{x}$ thuộc $[23,63; 23,65]$.
 c) Sai số tương đối của số gần đúng $x = 23,64$ là $\delta_x \leq 0,05\%$.
 d) Chu vi của miếng đất là $P = 77,38 \text{ m} \pm 0,02 \text{ m}$.

❖ **Câu 6.** Một công ty sử dụng dây chuyền A để đóng gói vào bao với khối lượng mong muốn 5 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng $5 \pm 0,2$ kg. Gọi $\bar{a}$ là khối lượng thực tế của một bao gạo do dây chuyền A đóng gói. Khi đó

- a) Số đúng $\bar{a}$. b) 5,2 là số gần đúng của $\bar{a}$.
 c) Độ chính xác là $d = 5$ kg. d) Giá trị của $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[4,8; 5,2]$.

❖ **Câu 7.** Kết quả đo chiều dài của một thửa đất là $75,4 \text{ m} \pm 0,5 \text{ m}$ và đo chiều dài của một cây cầu là $466,2 \text{ m} \pm 0,5 \text{ m}$. Khi đó

a) Đối với phép đo thửa đất, sai số tương đối không vượt quá $0,663\%$.

b) Đối với phép đo thửa đất, có sai số tương đối là $\frac{d}{|a|} = \frac{0,5}{75,4} = \frac{5}{754}$.

c) Đối với phép đo chiều dài cây cầu, có sai số tương đối lớn hơn $\frac{5}{4662} \approx 0,107\%$.

d) Phép đo cây cầu có độ chính xác cao hơn phép đo chiều dài của một thửa đất.



Tự luận.

❖ **Bài 1.** Trên bao bì của một sản phẩm có ghi “khối lượng tịnh $200 \pm 2 \text{ g}$ ”. Hãy đánh giá sai số tương đối của số gần đúng này. 🔍 1

❖ **Bài 2.** Trên bao bì của một sản phẩm có ghi “khối lượng tịnh $200 \pm 2 \text{ g}$ ”. Hãy đánh giá sai số tương đối của số gần đúng này. 🔍 1

❖ **Bài 3.** Bạn Ngân có một mảnh nhựa với bề mặt hình tròn bán kính 1 dm . Bạn ấy thực hiện đo chu vi của mép mảnh nhựa đó bằng cách sử dụng một sợi dây dài không dẫn như sau: Cố định một đầu sợi dây trên mép mảnh nhựa, rồi quấn sợi dây quanh mép mảnh nhựa một vòng cho đến khi đầu dây cố định chạm vào thân sợi dây lần đầu tiên, sau đó đo độ dài phần dây chạm vào mép mảnh nhựa và được kết quả là 6 dm . Khi đó sai số tuyệt đối trong phép đo không vượt quá bao nhiêu dm . 🔍 0,3

❖ **Bài 4.** Độ dài các cạnh của mảnh vườn hình chữ nhật là $x = 7,8 \text{ m} \pm 2 \text{ cm}$ và $y = 25,6 \text{ m} \pm 4 \text{ cm}$. Tìm diện tích (sau khi quy tròn) của mảnh vườn. 🔍 200

❖ **Bài 5.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi AL và CI lần lượt là đường cao của tam giác ABD và BCD . Biết $DL = LI = IB = 1$. Diện tích hình chữ nhật là bao nhiêu (kết quả chính xác làm tròn đến hàng phần trăm)? 🔍 4,24

❖ **Bài 6.** Trong một cuộc điều tra dân số, người ta viết dân số của một tỉnh là $3\,574\,625 \text{ người} \pm 50\,000 \text{ người}$. Sai số tương đối của số gần đúng này không vượt quá bao nhiêu phần trăm? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) 🔍 1,4

❖ **Bài 7.** Kết quả đo chiều dài một cây cầu có độ chính xác là $0,75 \text{ m}$ với dụng cụ đo đảm bảo sai số tương đối không vượt quá $0,15\%$. Chiều dài gần đúng của cây cầu là bao nhiêu mét? 🔍 500

❖ **Bài 8.** Số quy tròn của số $1,4142135$ với độ chính xác $0,005$ là bao nhiêu? 🔍 1,41

❖ **Bài 9.** Số $\bar{a}$ được cho bởi số gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá $0,5\%$. Sai số tuyệt đối của số gần đúng a không vượt quá bao nhiêu phần trăm? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) 🔍 2,9

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	A	2	C	3	C	4	B	5	A	6	B	7	A	8	C	9	A	10	D
11	B	12	C	13	B	14	C	15	B	16	A	17	C	18	C	19	B	20	A

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 2.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d S	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 6.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ
Câu 7.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ		

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Số trung bình



Số trung bình cộng của một mẫu n số liệu thống kê bằng tổng các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$ bằng

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$



🔔 LƯU Ý.

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

Giá trị	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

- Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k,$$

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}, f_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, f_k = \frac{n_k}{n}$,
với $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Giá trị	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	$\dots$	f_k

- Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2) Trung vị



Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- ♦ Nếu n là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là trung vị.
- ♦ Nếu n là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$ gọi là trung vị. Trung vị kí hiệu là M_e .



🔔 LƯU Ý.

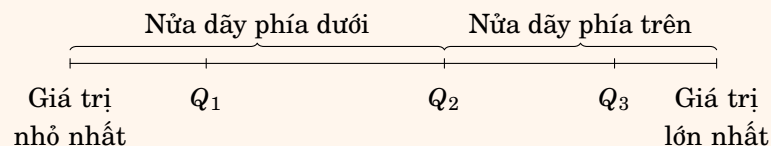
- Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường, trong khi đó số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị trung bình.
- Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.
- Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.

3) Tứ phân vị



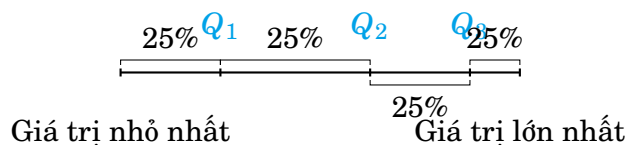
Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm N số liệu thành một dãy không giảm. Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- ◇ Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị.
- ◇ Nếu N là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- ◇ Nếu N là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).



Ý nghĩa:

Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.



4) Một

Định nghĩa: Một của một mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_o .



🔔 LƯU Ý.

- 1) Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều một.
- 2) Có thể dùng một để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Số trung bình

- ♦ **Số trung bình** (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$, kí hiệu là $\bar{x}$ được tính bằng công thức

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

- ♦ Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{n},$$

trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

❖ Ví dụ 1

Kết quả bốn lần kiểm tra môn toán của bạn Hoa là: 7, 9, 8, 9. Tính số trung bình cộng $\bar{x}$ của mẫu số liệu trên.

 8,25

❖ Ví dụ 2

Thông kê số sách mỗi bạn trong lớp đã đọc trong năm 2021, An thu được kết quả như bảng bên. Hỏi trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc bao nhiêu cuốn sách?

 3,325

Số cuốn sách	1	2	3	4	5
Số bạn	3	5	15	10	7

❖ Ví dụ 3

Cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

- a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?

 $\approx 23,5^\circ\text{C}$

- b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất; cao nhất là bao nhiêu độ C?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1**

Điểm kiểm tra môn Toán của một nhóm gồm 9 học sinh như sau

1 1 3 6 7 8 9 10

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên và nêu nhận xét.

$\bar{x} \approx 5,9$

.....

.....

.....

Bài 2

Bảng sau cho ta biết thời gian chạy cự li 100m của các bạn trong lớp (đơn vị giây)

Thời gian	12	13	14	15	16
Số bạn	5	7	10	8	6

Hãy tính thời gian chạy trung bình cự li 100m của các bạn trong lớp.

$\bar{x} \approx 14,083$

.....

.....

.....

Bài 3

Một cửa hàng bán xe đạp thống kê số xe bán được hàng tháng trong năm 2021 như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số xe	8	10	7	10	22	28	28	25	20	10	9	7

a) Hãy tính số xe trung bình cửa hàng bán được mỗi tháng?

b) Tính xem trong bốn quý (I, II, III, IV), quý nào cửa hàng bán được nhiều xe nhất?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2 Xác định số trung vị của mẫu số liệu

Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện các bước sau:

- ◇ Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- ◇ Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị. Nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

⇒ Ví dụ 4

Một công ty nhỏ gồm 1 giám đốc và 5 nhân viên, thu nhập mỗi tháng của giám đốc là 20 triệu đồng, của nhân viên là 4 triệu đồng. Tìm trung vị cho mẫu số liệu về lương của giám đốc và lương của nhân viên công ty.

 4

⇒ Ví dụ 5

Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là

2,8 1,2 3,4 14,6 1,3 2,5 4,2 1,9 3,5 0,8

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

 2,65

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4



Cho bảng số liệu ghi lại điểm của 40 học sinh trong bài kiểm tra giữa kỳ I môn Toán như sau

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1	40

Tìm số trung bình và trung vị của mẫu số liệu trên.

 $\bar{x} = 6,1; M_e = 6$

Dạng

3

Xác định tứ phân vị

Để tìm các **tứ phân vị** của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- ◇ Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- ◇ Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2 .
- ◇ Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1 .
- ◇ Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3 .
- ◇ Khi đó, Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các **tứ phân vị** của mẫu số liệu.

◇ Ví dụ 6

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu sau

21 35 17 43 8 59 72 119

 $Q_1 = 19, Q_2 = 39, Q_3 = 65,5$

◇ Ví dụ 7

Hàm lượng Natri (đơn vị miligam, $1\text{mg} = 0,001\text{g}$) trong 100g một số loại ngũ cốc được cho như sau

0 340 70 140 200 180 210 150 100 130

140 180 190 160 290 50 220 180 200 210

Hãy tìm các tứ phân vị. Các tứ phân vị này cho ta thông tin gì?

 $Q_1 = 135, Q_2 = 180, Q_3 = 205$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5



Thống kê GDP năm 2020 (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) của 10 nước tại khu vực Đông Nam Á được kết quả như sau:

Brunei	Campuchia	Indonesia	Lào	Malaysia
12,02	25,95	1059,64	19,08	338,28
Myanma	Philippines	Singapore	Thái Lan	Việt Nam
81,26	362,24	339,98	501,89	340,82

a) Hãy tìm các tứ phân vị của dãy số liệu trên.

$Q_1 = 25,95, Q_2 = 339,13, Q_3 = 362,24$

b) Giải thích ý nghĩa của các tứ phân vị này. Việt Nam có thuộc nhóm 25% quốc gia có GDP năm 2020 cao nhất trong vùng Đông Nam Á không?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

4

Xác định một dựa vào mẫu số liệu

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

Ví dụ 8

Thời gian truy cập internet (đơn vị giờ) trong một ngày của một số học sinh lớp 10 được cho như sau

0 0 1 1 1 3 4 4 5 6

Tìm mốt của mẫu số liệu này.

.....

.....

.....

Ví dụ 9

Số áo của một cửa hàng đã bán ra trong một tháng được thống kê trong bảng tần số sau

Cỡ áo	37	38	39	40	41	42	43
Số áo bán được (tần số)	15	46	62	81	51	20	3

Tìm một của mẫu số liệu này.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

- a) Một của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?
 b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Lớp 10A của một trường trung học phổ thông có điểm thi môn Toán trong học kỳ 1 vừa qua được thống kê trong bảng sau

Điểm thi	5	6	7	8	9	10
Tần số	2	7	9	12	8	4

Tính điểm trung bình cộng môn Toán của lớp 10A (làm tròn đến hàng phần mười).

- (A) 7,9. (B) 7,6. (C) 8,0. (D) 7,7.

❖ **Câu 2.** Tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu:

27 15 18 30 19 40 100 9 46 10 200.

- (A) 15. (B) 18. (C) 46. (D) 40.

❖ **Câu 3.** Thời gian chạy (giây) cự li 50 m của 6 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây

Thời gian (giây)	8,1	8,4	8,5
Tần số	1	2	3

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

- Ⓐ 8,4 (giây). Ⓑ 8,5 (giây). Ⓒ 8,7 (giây). Ⓓ 8,6 (giây).

❖ **Câu 4.** Cho bảng phân bố tần số sau: khối lượng 20 học sinh lớp 10A

Khối lượng (kg)	Tần số
50	4
51	5
52	6
55	3
56	2

Số trung bình cộng $\bar{x}$ của bảng số liệu đã cho là

- Ⓐ 53. Ⓑ 52,8. Ⓒ 52,2. Ⓓ 52.

❖ **Câu 5.** Một của một bảng phân bố tần số là

- Ⓐ Tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.
 Ⓑ Giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số.
 Ⓒ Giá trị có tần số nhỏ nhất trong bảng phân bố tần số.
 Ⓓ Tần số nhỏ nhất trong bảng phân bố tần số.

❖ **Câu 6.** Cho bảng số liệu ghi lại điểm của 40 học sinh trong bài kiểm tra 1 tiết môn Toán.

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1	40

Số trung vị là

- Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 6,5. Ⓓ 7.

❖ **Câu 7.** Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu được gọi là

- Ⓐ Một. Ⓑ Số trung bình. Ⓒ Số trung vị. Ⓓ Độ lệch chuẩn.

❖ **Câu 8.** Tiền thưởng (triệu đồng) của cán bộ và nhân viên trong một công ty được cho ở bảng dưới đây

Tiền thưởng	12	13	14	15	16	Cộng
Tần số	25	15	11	16	17	84

Tính một M_0 .

- Ⓐ $M_0 = 15$. Ⓑ $M_0 = 12$. Ⓒ $M_0 = 10$. Ⓓ $M_0 = 16$.

❖ **Câu 9.** Cân nặng (kg) của một nhóm học sinh nữ lớp 10A cho bởi số liệu sau:

38 39 44 44 46 47 47 48 52 55.

Tìm số trung vị của mẫu số liệu trên.

- (A) 44. (B) 46. (C) 46,5. (D) 47.

❖ **Câu 10.** Điều tra tiền lương một tháng của 100 người lao động trên địa bàn một xã ta có bảng phân bố tần số sau:

Tiền lương (VND)	6 000 000	7 000 000	8 500 000	9 500 000	10 000 000	10 500 000
Tần số	13	37	25	11	6	8

Tìm một của bảng phân bố tần số trên.

- (A) 6 000 000. (B) 7 000 000. (C) 8 500 000. (D) 9 500 000.

❖ **Câu 11.** Chiều dài (đơn vị mét) của 5 con cá voi xanh trưởng thành được cho như sau:

25 22 31 33 27.

Tìm chiều dài trung bình của 5 con cá voi xanh trên.

- (A) 27,6 m. (B) 28,2 m. (C) 27 m. (D) 23 m.

❖ **Câu 12.** Số học sinh của các lớp khối 10 trong một trường trung học được thống kê như sau:

35 40 37 46 38 42 43 36

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu được thống kê ở trên là

- (A) 36. (B) 42. (C) 39. (D) 40.

❖ **Câu 13.** Số liệu sau đây cho ta lãi hàng tháng của một cửa hàng trong năm 2023. Đơn vị là triệu đồng

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	10	12	18	15	22	20	15	13	18	17	20	22

Tìm số trung vị của mẫu số liệu trên.

- (A) 17,5. (B) 15. (C) 20. (D) 21.

❖ **Câu 14.** Để đủ điều kiện được cấp chứng chỉ A của trung tâm tin học, học viên phải trải qua 6 lần thi trắc nghiệm, thang điểm mỗi lần là 100 điểm, và phải đạt trung bình 70 điểm trở lên. Qua 5 lần thi bạn Vân đạt trung bình 67,5 điểm. Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Vân phải đạt ít nhất bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

- (A) 90. (B) 80. (C) 70. (D) 82,5.

❖ **Câu 15.** Số áo bán được trong một quý ở cửa hàng bán áo sơ mi nữ được thống kê như sau:

Cỡ áo	36	37	38	39	40	41	42
Tần số (Số áo bán được)	13	45	126	125	110	40	12

Giá trị một của bảng phân bố tần số trên bằng

- (A) 12. (B) 126. (C) 42. (D) 38.

❖ **Câu 16.** Tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu:

27 15 18 30 19 40 100 9 46 10 200.

- (A) 40. (B) 18. (C) 15. (D) 46.

❖ **Câu 17.** Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$) trung bình các ngày trong tuần đầu tháng 3 của Nam Định là

20 19 22 19 24 28 25

Tìm số trung vị của mẫu số liệu trên.

- (A) 23. (B) 25. (C) 24. (D) 22.



2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu:

9 8 15 8 20.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trung vị là 9.
b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là 12.
c) Tứ phân vị thứ nhất $Q_1 = 17,5$.
d) Một của mẫu số liệu trên là 15.

❖ **Câu 2.** Điểm điều tra về chất lượng sản phẩm mới (thang điểm 100) như sau:

72 68 39 41 54 61 72 75 80 61 50 65 78

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Một của mẫu số liệu là 61.
b) Tổng số trung vị, tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba là 190.
c) $n = 12$.
d) Tứ phân vị thứ hai là số thứ 6.

❖ **Câu 3.** Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán của 20 học sinh.

Điểm	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	1	2	3	4	5	4	1	20

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Một là $M_0 = 10$.
b) Số trung bình $\bar{x} = 7,5$.
c) Tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = 7,5$.
d) Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 6$.

❖ **Câu 4.** Thống kê số bao xi măng được bán ra tại một cửa hàng vật liệu xây dựng trong 6 tháng cho kết quả như sau:

60	61	65	63	61	71
----	----	----	----	----	----

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Sai khác giữa số trung bình và số trung vị là 1,5.
b) Một của mẫu số liệu là 61.
c) Mẫu số liệu trên có $n = 12$.
d) Khoảng cách từ Q_1 đến Q_2 là 3.

❖ **Câu 5.** Bảng số liệu sau cho biết mức lương hàng năm của các cán bộ và nhân viên trong một công ty (đơn vị: nghìn đồng)

20910	76000	20350	20060
21410	20110	21410	21360
20350	21130	20960	125000

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Mức lương trung bình các cán bộ nhân viên là $\bar{x} = 34087,5$ (nghìn đồng).
- b) Mức lương lớn nhất là 76000.
- c) Số trung vị là 21045 (nghìn đồng).
- d) Có thể lấy mức lương bình quân làm giá trị đại diện.

3 Tự luận.

❖ **Bài 1.** Một cửa hàng bán xe đạp thông kê số xe bán được hàng tháng trong năm 2021 ở bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số xe	10	8	7	5	8	22	28	25	20	10	9	7

- a) Hãy tính số xe trung bình của hàng bán được mỗi tháng trong năm 2021.
- b) Hãy so sánh hiệu quả kinh doanh trong quý III của cửa hàng với 6 tháng đầu năm 2021.

❖ **Bài 2.** Bảng sau thống kê số sách mỗi bạn học sinh tổ 1 và tổ 2 đã đọc ở thư viện trường trong một tháng:

Tổ 1	3	1	2	1	2	2	3	25	1
Tổ 2	4	5	4	3	3	4	5	4	

- a) Tính các trung vị của số sách các bạn ở Tổ 1 và số sách các bạn ở Tổ 2 đã đọc.
- b) Sử dụng trung vị, hãy so sánh xem các bạn ở tổ nào đọc nhiều sách ở thư viện hơn.

❖ **Bài 3.** Hãy tìm tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

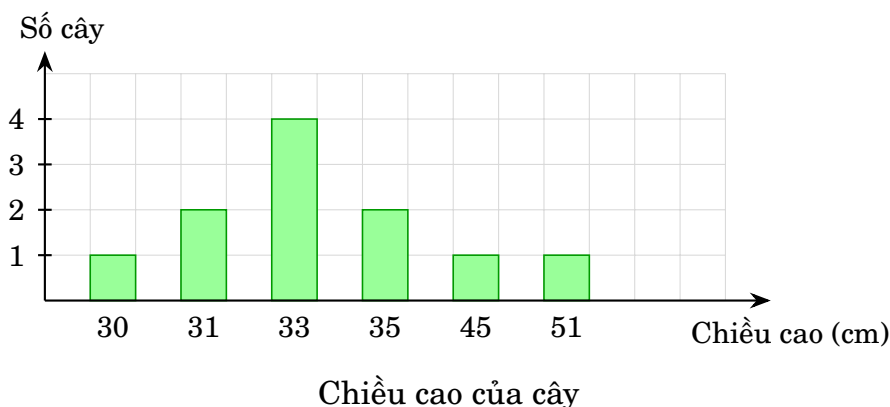
- a) 10; 13; 15; 2; 10; 19; 2; 5; 7.
- b) 15; 19; 10; 5; 9; 10; 1; 2; 5; 15.

❖ **Bài 4.** Cân nặng của 20 vận động viên môn đấu vật của một câu lạc bộ được ghi lại ở bảng sau:

50	56	57	62	58	52	66	61	54	61
64	69	52	65	58	68	67	56	59	54

Để thuận tiện cho việc luyện tập, ban huấn luyện muốn xếp 20 vận động viên trên thành 4 nhóm, mỗi nhóm gồm 25% số vận động viên có cân nặng gần nhau. Bạn hãy giúp ban huấn luyện xác định các ngưỡng cân nặng để phân nhóm mỗi vận động viên.

Bài 5. Biểu đồ dưới trình bày số liệu về chiều cao (tính bằng cm) của một số cây lấy gỗ mới được trồng:



a) Tính số trung bình và trung vị của mẫu số liệu.

$\bar{x} = \frac{390}{11} \approx 35,45$, Trung vị = 33

b) Trong hai số trung bình và trung vị, số nào thể hiện tốt hơn xu thế trung tâm của mẫu số liệu đã cho?

Chọn trung vị

Bài 6. Tổng lượng mưa trong năm tại một trạm quan trắc đặt tại Nha Trang từ 2010 đến 2020 được thể hiện trong biểu đồ sau



a) Hãy tính lượng mưa trung bình tại trạm quan trắc trên từ 2010 đến 2020.

b) Hãy tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

$\bar{x} = 1564,1$; $Q_1 = 1225,8$; $Q_2 = 1381,1$; $Q_3 = 1769,8$

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	D	2	A	3	A	4	C	5	B	6	B	7	A	8	B	9	C	10	B
11	A	12	C	13	A	14	D	15	D	16	D	17	D						

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S	Câu 2.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S
Câu 3.	☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S		

§3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Khoảng biến thiên



Khoảng biến thiên, kí hiệu là R , là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.



🔔 LƯU Ý.

- 1) Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- 2) Sử dụng khoảng biến thiên có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán song khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất mà bỏ qua thông tin từ tất cả các giá trị khác. Do đó, khoảng biến thiên rất dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

2) Khoảng tứ phân vị



Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q , là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$



🔔 LƯU Ý.

- 1) Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- 2) Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.

3) Phương sai và độ lệch chuẩn

Ta xét mẫu số liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$, nếu gọi số trung bình là $\bar{x}$ thì với mỗi giá trị x_i , độ lệch của nó so với giá trị trung bình là $x_i - \bar{x}$.



Phương sai là giá trị $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$.

Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$ được gọi là độ lệch chuẩn.

LƯU Ý.

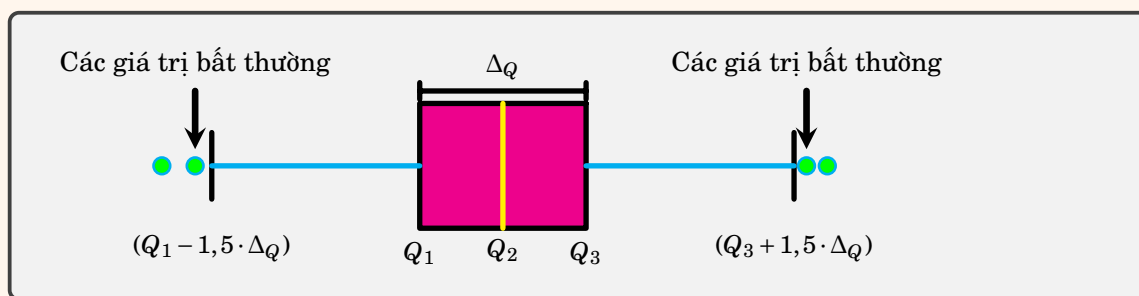
- ① Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.
- ② Ngoài ra, người ta còn sử dụng đại lượng sau để đo độ phân tán của mẫu số liệu

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

4) Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác bằng biểu đồ hộp



Trong mẫu thống kê, đôi khi ta gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là giá trị bất thường. Những giá trị này xuất hiện trong mẫu số liệu có thể do nhầm lẫn hay sai sót nào đó. Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện những giá trị bất thường này (xem hình sau).



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Xác định khoảng biến thiên dựa vào mẫu số liệu

- ◇ Khoảng biến thiên, kí hiệu là R , là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.
- ◇ Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.
- ◇ Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - 1,5\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + 1,5\Delta_Q$. Khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

Ví dụ 1

Tuổi thọ trung bình người dân của 11 nước được thống kê như sau:

69 77 75 83 65 75 74 68 73 72 71

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

❖ Ví dụ 2

Điểm trung bình môn học kì của hai bạn An và Bình được cho bảng sau

	Toán	Vật lí	Hóa học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Tin học	Tiếng Anh
An	9,2	8,7	9,5	6,8	8,0	8,0	7,3	6,5
Bình	8,2	8,1	8,0	7,8	8,3	7,9	7,6	8,1

- a) Điểm trung bình môn học kì của hai bạn có như nhau không?
- b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên mẫu số này, bạn nào học đồng đều hơn?

❖ Ví dụ 3

Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg)

2,977 3,155 3,920 3,412 4,236

2,593 3,270 3,813 4,042 3,387

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 1**

Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là

6,3 6,6 7,5 8,2 8,3 7,8 7,9 9,0 8,9 7,2 7,5 8,7 7,7 8,8 7,6.

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

.....

.....

.....

Bài 2

Nhiệt độ trung bình các tháng trong năm 2019 của hai tỉnh Lai Châu và Lâm Đồng được ghi lại trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lai Châu	14,8	18,8	20,3	23,5	24,7	24,2	23,6	24,6	22,7	21,0	18,6	14,2
Lâm Đồng	16,3	17,4	18,7	19,8	20,2	20,3	19,5	19,3	18,6	18,5	17,5	16,0

a) Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Hãy cho biết trong một năm, nhiệt độ địa phương nào ít thay đổi hơn?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

2

Xác định phương sai, độ lệch chuẩn dựa vào mẫu số liệu

◇ Phương sai là giá trị $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$.

◇ Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là độ lệch chuẩn.

❖ Ví dụ 4

Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường Trung học

43 45 46 41 40.

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

❖ Ví dụ 5

Bảng dưới đây thống kê tổng số giờ nắng trong năm 2019 theo từng tháng được đo bởi hai trạm quan sát khí tượng đặt ở Tuyên Quang và Cà Mau.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tuyên Quang	25	89	72	117	106	117	156	203	227	146	117	145
Cà Mau	180	223	257	245	191	111	141	134	130	122	157	173

- a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của dữ liệu từng tỉnh.
b) Nêu nhận xét về sự thay đổi tổng số giờ nắng theo từng tháng ở mỗi tỉnh.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng và bạn Huy như sau

Bạn Dũng (1)	8	6	7	5	9
Bạn Huy (2)	6	7	7	8	7

- a) Tính phương sai của mẫu số liệu trên.
- b) So sánh phương sai của mẫu số liệu (Bạn Dũng) với phương sai của mẫu số liệu (Bạn Huy). Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Nhiệt độ trung bình các tháng trong năm 2019 của hai tỉnh Lai Châu và Lâm Đồng được ghi lại trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lai Châu	14,8	18,8	20,3	23,5	24,7	24,2	23,6	24,6	22,7	21,0	18,6	14,2
Lâm Đồng	16,3	17,4	18,7	19,8	20,2	20,3	19,5	19,3	18,6	18,5	17,5	16,0

- a) Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.
- b) Hãy cho biết trong một năm, nhiệt độ địa phương nào ít thay đổi hơn?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu

Để tìm các số liệu bất thường của một mẫu số liệu ta thực hiện các bước giải như sau:

- ◇ Tìm khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ của mẫu số liệu.
- ◇ Xác định đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$.
- ◇ Tìm các số liệu **không** thuộc đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$ là **các số liệu bất thường**.

🔗 Ví dụ 6

Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 25 chiếc xe qua trạm như sau:

20 41 41 80 40 52 52 52 60 55 60 60 62
60 65 60 65 135 70 70 65 75 75 70 55

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5



Bình dùng đồng hồ đo thời gian để một vật rơi tự do (đơn vị: giây) từ vị trí A đến vị trí B trong 10 lần, cho kết quả như sau:

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số giây	0,398	0,399	0,408	0,410	0,406	0,405	0,402	0,401	0,290	0,402

Bình nghĩ là giá trị 0,29 ở lần đo thứ 9 không chính xác. Hãy kiểm tra nghi ngờ của Bình.

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Điểm số của câu lạc bộ Chelsea đạt được tại giải ngoại hạng, từ mùa giải 2012-2013 đến mùa giải 2020-2021 như sau:

75 82 87 50 93 70 72 66 67

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

- (A) 27. (B) 23. (C) 50. (D) 43.

❖ **Câu 2.** Sản lượng gạo của Việt Nam từ 2007 đến 2017 như sau:

2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
4,53	4,68	6,05	6,75	7,18	7,72	6,68	6,32	6,57	4,89	5,77

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

- (A) 2,81. (B) 3,11. (C) 1,92. (D) 3,19.

❖ **Câu 3.** Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 2 môn toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là $s_x^2 = 0,573$. Độ lệch chuẩn của bảng thống kê đó xấp xỉ bằng

- (A) 0,812. (B) 0,657. (C) 0,757. (D) 0,936.

❖ **Câu 4.** Phương sai của dãy số 2; 3; 4; 5; 6 là

- (A) $s_x^2 = 2$. (B) $s_x^2 = 4$. (C) $s_x^2 = \sqrt{2}$. (D) $s_x^2 = -2$.

❖ **Câu 5.** Cho mẫu số liệu thống kê {1;2;3;4;5;6;7;8;9}. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

- (A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 6.** Chọn câu đúng trong các câu trả lời sau đây: Phương sai bằng

- (A) bình phương của độ lệch chuẩn. (B) căn bậc hai của độ lệch chuẩn.
(C) hai lần của độ lệch chuẩn. (D) một nửa của độ lệch chuẩn.

❖ **Câu 7.** Để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê so với số trung bình, ta dùng đại lượng nào sau đây?

- (A) Số trung vị. (B) Phương sai. (C) Mốt. (D) Số trung bình.

❖ **Câu 8.** Khoảng tứ phân vị của dãy số 2; 3; 4; 5; 6 là

- (A) $\Delta_Q = 3$. (B) $\Delta_Q = 2$. (C) $\Delta_Q = \sqrt{2}$. (D) $\Delta_Q = -2$.

❖ **Câu 9.** Điểm thi của lớp 10C của một trường Trung học Phổ Thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	
Tần số	7	5	10	12	4	2	$n = 40$

Phương sai của bảng phân bố tần số đã cho là

- (A) 1,94. (B) 3,94. (C) 0,94. (D) 2,94.

❖ **Câu 10.** Cho phương sai của các số liệu bằng 4. Tìm độ lệch chuẩn.

- (A) 8. (B) 2. (C) 4. (D) 16.

❖ **Câu 11.** Cho mẫu số liệu

3 6 7 8 9 10 12 16 19

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

- (A) 9. (B) 6,5. (C) 7,5. (D) 14.

❖ **Câu 12.** Điểm thi của lớp 10C của một trường Trung học Phổ Thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	
Tần số	7	5	10	12	4	2	$n = 40$

Phương sai của bảng phân bố tần số đã cho là

- (A) 0,94. (B) 3,94. (C) 2,94. (D) 1,94.

❖ **Câu 13.** Để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê so với số trung bình, ta dùng đại lượng nào sau đây?

- (A) Số trung bình. (B) Số trung vị. (C) Một. (D) Phương sai.

❖ **Câu 14.** Bảng số liệu sau cho biết thời gian làm bài tính bằng phút của 50 học sinh.

Thời gian	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Số học sinh	1	3	4	7	8	9	8	5	3	2	$N = 50$

Phương sai của mẫu số liệu thống kê trên bằng

- (A) 7,68. (B) 2,13. (C) 4,63. (D) 4,54.

❖ **Câu 15.** Cho mẫu số liệu sau

158 146 152 160 170 154 175 155 x

Khi đó x nhận giá trị nào sau đây để mẫu số liệu này có khoảng biến thiên là 30?

- (A) 160. (B) 130. (C) 145. (D) 180.



2

Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho mẫu số liệu 15; 20; 1; 2; 4; 3; 7; 5.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cỡ mẫu là 8.
b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 10.
c) Khoảng tứ phân vị của mẫu là 8.
d) Mẫu số liệu có giá trị trung vị là 4,5.

❖ **Câu 2.** Khoảng biến thiên tổng số giờ nắng trong năm của một tỉnh thành được thống kê từ năm 2006 đến 2019 được cho như sau

1884	1600	1645	2049,9	1913,8	1664,1	1846,5
1964,8	1951	2023,6	1996,2	1699,1	1845	2190,4

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số giờ nắng lớn nhất là 2190,4 giờ.
- b) Số giờ nắng trung bình trong năm là 1826,67 giờ.
- c) Số giờ nắng nhỏ nhất 1600 giờ.
- d) Khoảng biến thiên là 520,4.

❖ **Câu 3.** Số liệu thống kê tỉ lệ (%) tốt nghiệp THPT của một địa phương từ năm học 2001 - 2002 đến năm học 2016 - 2017 được cho như sau

98,82	97,46	99,19	98,90	98,65	79,51	85,06	86,18
98,68	99,23	99,93	99,34	99,74	93,08	97,34	97,82

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tỉ lệ tốt nghiệp trung bình 95,56%.
- b) Độ lệch chuẩn $s \approx 6,09$.
- c) Phương sai $s^2 \approx 36,03$.
- d) 99,19 là tỉ lệ (%) tốt nghiệp THPT cao nhất.

❖ **Câu 4.** Điều tra thu nhập của 40 hộ gia đình ở một bản được số liệu như sau

Thu nhập (triệu đồng/năm)	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
Số hộ gia đình	1	3	4	6	8	7	6	3	2

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Một của mẫu số liệu là 8.
- b) Phương sai của mẫu số liệu trên là 1,9561.
- c) Cỡ mẫu là 40.
- d) Số trung bình của mẫu số liệu trên là 6,1125.

3 Tự luận.

❖ **Bài 1.** Hãy tính khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu: 10; 20; 3; 1; 3; 4; 7; 4; 9.

$$R = 19, \Delta Q = 6$$

❖ **Bài 2.** Bảng dưới đây thống kê tổng số giờ nắng trong năm 2019 theo từng tháng được đo bởi hai trạm quan sát khí tượng đặt ở Tuyên Quang và Cà Mau.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tuyên Quang	25	89	72	117	106	177	156	203	227	146	117	145
Cà Mau	180	223	257	245	191	111	141	134	130	122	157	173

- a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của dữ liệu từng tỉnh.
- b) Nêu nhận xét về sự thay đổi tổng số giờ nắng theo từng tháng ở mỗi tỉnh.

Bài 3. Điều tra một số học sinh về số cái bánh chưng mà gia đình mỗi bạn tiêu thụ trong dịp Tết Nguyên đán, kết quả được ghi lại ở bảng sau.

Số cái bánh chưng	6	7	8	9	10	11	15
Số gia đình	5	7	10	8	5	4	1

Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

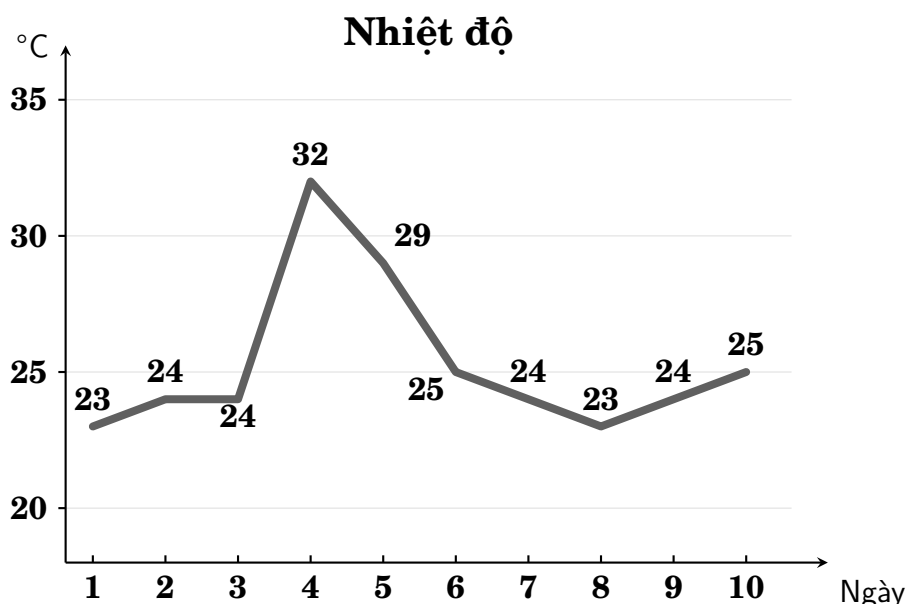
$s \approx 1,8$

Bài 4. Để biết cây đậu phát triển như thế nào sau khi gieo hạt, bạn Châu gieo 5 hạt đậu vào 5 chậu riêng biệt và cung cấp cho chúng lượng nước, ánh sáng như nhau. Sau 2 tuần, 5 hạt đậu đã nảy mầm và phát triển thành 5 cây con. Bạn Châu đo chiều cao từ rễ đến ngọn của mỗi cây (đơn vị mm) và ghi kết quả là mẫu số liệu sau

112 102 106 94 101

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). $s = 5,93$

Bài 5. Biểu đồ sau ghi lại nhiệt độ lúc 12 giờ trưa tại một trạm quan trắc trong 10 ngày liên tiếp (đơn vị: °C).



a) Hãy viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ từ biểu đồ trên.

b) Hãy tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. $R = 9; \Delta Q = 1;$

c) Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó. $\bar{x} = 25,3; S^2 = 7,61; S \approx 2,76$

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1 D	2 D	3 C	4 A	5 A	6 A	7 B	8 A	9 A	10 B
11 C	12 D	13 D	14 D	15 C					

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	a Đ b S c S d Đ	Câu 2.	a Đ b S c Đ d S
Câu 3.	a Đ b Đ c S d S	Câu 4.	a S b S c Đ d Đ

§4 ÔN TẬP CHƯƠNG 5

BÀI TẬP



1 Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Lượng điện tiêu thụ (đơn vị: kWh) hàng tháng của gia đình ông Bình trong năm 2024 được ghi lại như sau

163	165	159	172	167	168
170	161	164	170	174	166

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho bằng

- (A) 11. (B) 13. (C) 15. (D) 17.

❖ **Câu 2.** Cho bảng số liệu ghi lại điểm của 40 học sinh trong bài kiểm tra 1 tiết môn toán

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1

Mốt của dấu hiệu là

- (A) $M_o = 18$. (B) $M_o = 6$. (C) $M_o = 40$. (D) $M_o = 7$.

❖ **Câu 3.** Chiều dài của một cây cầu là $l = 1547,25 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$. Hãy cho biết số quy tròn của l .

- (A) 1547 m. (B) 1547,3 m. (C) 1547,2 m. (D) 1548 m.

❖ **Câu 4.** Cho bảng tần số về tiền thưởng (triệu đồng) của một số nhân viên trong một công ty.

Số tiền thưởng	2	3	4	5	6
Tần số	5	15	10	6	7

Mốt của bảng tần số đã cho là bao nhiêu triệu đồng?

- (A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 2.

❖ **Câu 5.** Cho mẫu số liệu thống kê 1;2;3;4;5;6;7;8;9. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

- (A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

❖ **Câu 6.** Kết quả điều tra mức lương (đơn vị: triệu đồng) hàng tháng của một số công nhân của nhà máy A được ghi lại như sau

2	9	9	8	10	9	9	11	9
---	---	---	---	----	---	---	----	---

Phương sai của mẫu số liệu đã cho bằng

- (A) $\frac{611}{3}$. (B) $\frac{1028}{81}$. (C) $\frac{1010}{81}$. (D) $\frac{470}{81}$.

❖ **Câu 7.** Cho mẫu số liệu 10; 20; 3; 1; 3; 4; 7; 4; 9. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $R = 20$. (B) $Q_2 = 3$.
(C) $\Delta Q = 20$. (D) Mẫu có một giá trị ngoại lệ là 20.

❖ **Câu 8.** Trung vị của dãy mẫu số liệu 65; 68; 70; 72; 73; 78; 84; 90 là

- (A) Số liệu thứ 4 của dãy.
(B) Số liệu thứ 5 của dãy.
(C) Trung bình cộng của số liệu thứ 4 và thứ 5 của dãy.
(D) 4,5.

❖ **Câu 9.** Quy tròn số 3,654 đến hàng phần mười, được số 3,7. Sai số tuyệt đối là

- (A) 0,1. (B) 0,05. (C) 0,04. (D) 0,046.

❖ **Câu 10.** Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$) trung bình các ngày trong tuần đầu tháng 3 của Nam Định là

20 19 22 19 24 28 25.

Tìm số trung vị của mẫu số liệu trên.

- (A) 24. (B) 22. (C) 25. (D) 23.

❖ **Câu 11.** Một cửa hàng bán xe ô tô thống kê lại số lượng xe (đơn vị: chiếc) bán được trong 6 tháng đầu năm theo bảng số liệu sau

Tháng	1	2	3	4	5	6
Số lượng	3	5	7	11	5	2

Mốt của mẫu số liệu đã cho là

- (A) 5. (B) 11. (C) 4. (D) 2 và 5.

❖ **Câu 12.** Theo kết quả thống kê điểm thi giữa kỳ 2 môn toán khối 11 của một trường THPT, người ta tính được phương sai của bảng thống kê đó là $s_x^2 = 0,573$. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê đó xấp xỉ bằng

- (A) 0,936. (B) 0,757. (C) 0,657. (D) 0,812.

❖ **Câu 13.** Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu 8; 7; 22; 20; 18; 15; 19; 11; 13; 13 là

- (A) $Q_3 = 19,5$. (B) $Q_3 = 20$. (C) $Q_3 = 18,5$. (D) $Q_3 = 19$.

❖ **Câu 14.** Cho số gần đúng $a = 32925$ với độ chính xác $d = 60$. Số quy tròn của số a bằng

- (A) 32000. (B) 33000. (C) 32930. (D) 32900.

❖ **Câu 15.** Bảng số liệu sau là kết quả kiểm tra cân nặng (đơn vị: kg) của 18 học sinh lớp 10A.

Cân nặng	43	45	47	50	57
Số lượng	4	5	4	4	1

Trung vị của mẫu số liệu đã cho bằng

- (A) 44. (B) 45. (C) 46. (D) 47.

❖ **Câu 16.** Cho số điểm thi môn Toán của 7 học sinh như sau

9 10 4 8 7 2 6

Trung vị của mẫu số liệu trên là

- (A) 7. (B) 9. (C) 6. (D) 8.

❖ **Câu 17.** Cho mẫu thống kê 3; 4; 5; 6; 6; 7; 9; 9; 12; 18; 20. Tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu trên bằng

- (A) 10. (B) 15. (C) 13. (D) 12.

❖ **Câu 18.** Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 136\,738 \pm 40\,000$.

- (A) 140\,000. (B) 100\,000. (C) 0. (D) 136\,738.

❖ **Câu 19.** Nhà trường thống kê điểm thi môn Ngoại ngữ của học sinh trong kỳ thi khảo sát chất lượng. Kết quả thống kê bằng bảng dưới đây

Điểm số	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	3	12	53	113	60	6	2

Hỏi có bao nhiêu học sinh tham gia trong kì thi?

- (A) 113. (B) 249. (C) 534. (D) 467.

❖ **Câu 20.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng nhỏ.
 (B) Số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn bằng nhau.
 (C) Số liệu càng phân tán thì phương sai bằng số trung bình cộng.
 (D) Số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.

❖ **Câu 21.** Cho số gần đúng $a = 7\,141\,516$ với độ chính xác $d = 400$. Số qui tròn của số gần đúng a là

- (A) 7\,142\,000. (B) 7\,141\,000. (C) 7\,141\,500. (D) 7\,141\,600.

❖ **Câu 22.** Số đặc trưng nào sau đây đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu?

- (A) Khoảng biến thiên. (B) Khoảng tứ phân vị.
 (C) Trung vị. (D) Độ lệch chuẩn.

❖ **Câu 23.** Một hình chữ nhật có diện tích $S = 180,57 \text{ cm}^2 \pm 0,6 \text{ cm}^2$. Tính sai số tương đối của phép đo trên.

- (A) 3,32%. (B) 0,03%. (C) 0,33%. (D) 3,3%.

❖ **Câu 24.** Điều tra năng suất lúa của 7 héc-ta trồng lúa của hai vùng A và B ta thu được mẫu số liệu sau:

❖ **Vùng A:** 41; 44; 45; 47; 51; 53; 54.

❖ **Vùng B:** 43; 44; 47; 48; 50; 51; 52.

Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- (A) Khoảng tứ phân vị của vùng A lớn hơn khoảng tứ phân vị của vùng B.
 (B) Năng suất trung bình của hai vùng A và B là như nhau.

- © Vùng A trồng lúa ổn định hơn vùng B.
 © Khoảng biến thiên ở vùng A lớn hơn khoảng biến thiên của vùng B.



2 Trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Tổng số trận bão đổ bộ vào đất liền của Việt Nam từ năm 1945 đến năm 2014 ở mỗi tháng $1, 2, \dots, 12$ được ghi nhận lại theo thứ tự như sau

4 3 4 4 9 28 50 66 94 97 82 21

(Nguồn: NOAA, Tổng cục Hải Dương và Khí quyển Hoa Kỳ)

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 94$.
 b) Số trung bình của mẫu số liệu trên là 37.
 c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $\Delta Q = 70$.
 d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên làm tròn đến hàng đơn vị là 35.

❖ **Câu 2.** Kết quả bài thi môn Toán của các bạn học sinh tổ 1 được thống kê ở bảng sau

6	7	8	7	9
5	8	8	9	10
7	8	3	9	8

- a) Mốt của mẫu số liệu trên là 10.
 b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là 7.
 c) Mẫu số liệu trên có 2 giá trị ngoại lệ.
 d) Sau khi bỏ đi các giá trị ngoại lệ, điểm thi trung bình của mẫu số liệu trên là 7,8 (làm tròn đến hàng phần chục).

❖ **Câu 3.** Cho bảng phân bố tần số về Số tiền thưởng cho nhân viên trong một công ty A cuối năm 2025 như sau:

Số tiền thưởng (triệu đồng)	7	8	9	10	11
Tần số	5	15	10	6	7

- a) Công ty A có 43 nhân viên.
 b) Không có nhân viên nào có số tiền thưởng dưới 7 triệu đồng.
 c) Có 6 nhân viên có số tiền thưởng từ 10 triệu trở lên.
 d) Mốt của bảng phân bố tần số đã cho là 8 triệu đồng.

❖ **Câu 4.** Kết quả điều tra mức lương hằng tháng của một số công nhân của hai nhà máy A và B được cho ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Công nhân nhà máy A	4	5	5	47	5	6	4	4	
Công nhân nhà máy B	2	9	9	8	10	9	9	11	9

- a) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ở nhà máy A là $s = 14$.
 b) Giá trị tứ phân vị thứ 2 của mẫu số liệu ở nhà máy B là $Q_2 = 9$.

c) Một của mẫu số liệu ở nhà máy B là $M_o = 11$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở nhà máy A là $\Delta_Q = 1$.

❖ **Câu 5.** Kết quả điều tra mức lương hằng tháng (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân hai nhà máy A và B được cho trong bảng sau:

Nhà máy A	4	5	5	4	7	5	6	4	4
Nhà máy B	2	9	9	8	10	9	9	11	9

a) Một của mẫu số liệu ở nhà máy A là $M_o \in \{4; 5\}$.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ở nhà máy B là $R = 11$.

c) Mức lương trung bình hằng tháng của các công nhân ở nhà máy A là $\bar{x} = 10$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở nhà máy B là $\Delta_Q = 1$.

❖ **Câu 6.** Mẫu số liệu dưới đây thống kê số giờ học thêm của 10 học sinh trong một tuần: 2; 3; 4; 4; 5; 6; 6; 7; 8; 15. Khi đó

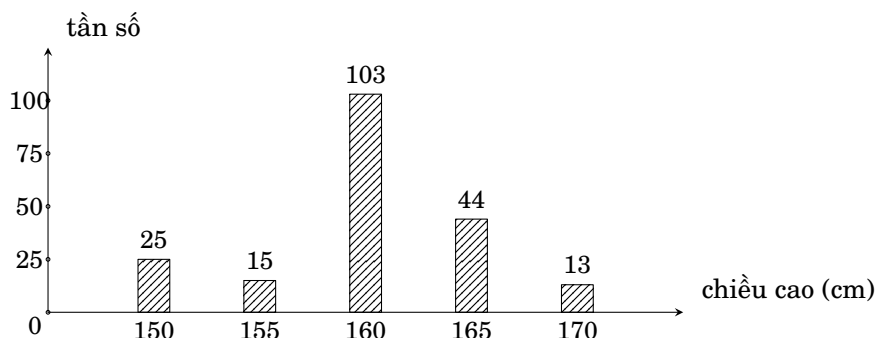
a) Số giờ học thêm trung bình của 10 học sinh trên là 6 giờ.

b) Độ lệch chuẩn về số giờ học thêm của 10 học sinh trên là 2,5 giờ.

c) Giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu trên là 15.

d) Một của mẫu số liệu trên bằng 15.

❖ **Câu 7.** Cho biểu đồ chiều cao đầu năm học của một nhóm học sinh lớp 10 như hình vẽ.



a) Trong số các học sinh ở trên, có bạn A lớp 10 chiều cao là 155 cm, bạn thuộc nhóm 25% học sinh có chiều cao thấp nhất.

b) Số trung bình cộng của mẫu số liệu là $\bar{x} = 159,8$ (làm tròn đến hàng phần mười).

c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $S = 5,124$ (làm tròn đến hàng phần nghìn).

d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 10$.

❖ **Câu 8.** Số lượng thiệp xuân của các lớp làm được trong cuộc thi thiết kế được thống kê như sau

Số lượng thiệp	5	6	7	8	9	10
Số lớp	10	12	7	15	7	4

a) Mẫu số liệu không có giá trị ngoại lệ.

b) Trung bình mỗi lớp làm được $\bar{x} \approx 7$ thiệp (làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Một của mẫu số liệu $M_o = 6$.

d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu $\Delta_Q = 2$.

❖ **Câu 9.** Số liệu thu nhập bình quân đầu người một tháng (đơn vị: triệu đồng) năm 2023 của 6 vùng kinh tế - xã hội tại Việt Nam được cho trong bảng sau (nguồn: *gso.gov.vn* - Kết quả khảo sát mức sống dân cư 2023)

Vùng kinh tế - xã hội	Thu nhập (triệu đồng)
Đồng bằng sông Hồng	6,2
Trung du và miền núi phía Bắc	3,4
Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung	4,1
Tây Nguyên	3,6
Đông Nam Bộ	6,5
Đồng bằng sông Cửu Long	4,4

- Vùng kinh tế Tây Nguyên có mức thu nhập bình quân thấp nhất trong 6 vùng.
- Thu nhập trung bình của các vùng là 4,7 triệu đồng/tháng.
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu thu nhập giữa các vùng là 3,1 triệu đồng.
- Nếu tất cả các vùng đều có thu nhập tăng thêm 1 triệu đồng/tháng thì độ lệch chuẩn của mẫu số liệu mới sẽ không thay đổi so với số liệu ban đầu.

3 Tự luận.

❖ **Bài 1.** Tại một trạm y tế của phường, người ta khảo sát độ tuổi của các trẻ em có độ tuổi dưới 15 và số liệu được ghi lại bằng sau

Tuổi	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Số trẻ em	1	1	2	5	3	3	2	2	1

Hãy xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

❖ **Bài 2.** Một cửa hàng giày thể thao thống kê cỡ giày của 12 khách hàng nam vừa bán được trong ngày như sau:

38; 39; 39; 40; 40; 41; 42; 42; 42; 42; 43; 43; 44.

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

 3

❖ **Bài 3.** Theo báo cáo “*Digital 2024: Vietnam*” từ *We Are Social* và *Meltwater*, thời gian sử dụng Internet trung bình mỗi ngày của người dùng Việt Nam có sự khác biệt giữa các nhóm tuổi và mục đích. Để khảo sát thực tế tại một lớp học, bạn lớp trưởng thống kê thời gian sử dụng điện thoại (đơn vị: giờ) trong một ngày của 10 học sinh trong lớp như sau

6,2	5,5	7,0	6,5	8,0	6,5	5,0	6,5	9,0	7,8
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tìm trung vị, tứ phân vị và một của mẫu số liệu trên.

❖ **Bài 4.** Cho mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số như sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Tần số	3	$m^2 + 2m$	10	15	$11m - 20$	8	5

Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho x_2 và x_5 là hai một của mẫu số liệu đã cho.

Bài 5. Điểm trung bình môn 9 môn học năm học vừa qua của bạn Nga và bạn Mai được thống kê như sau:

Môn học	Toán	Văn	Tiếng Anh	Vật lý	Lịch sử	Quốc phòng	Sinh học	Tin học	Hóa học
Nga	9,5	8,5	9,1	9,0	9,2	9,4	9,3	9,3	7,9
Mai	9,3	8,8	9,5	9,1	9,5	9,8	8,3	9,5	8,2

a) Trong hai bạn Nga và Mai, bạn nào có điểm trung bình tất cả các môn cao hơn?

b) Hãy cho biết bạn nào học đồng đều các môn học hơn. Vì sao?

Bài 6. Sản lượng cà phê (đơn vị: nghìn tấn) của hai tỉnh Đắk Lắk (cũ) và Gia Lai (cũ) giai đoạn 2016-2020:

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Đắk Lắk	450,2	462,5	455,8	470,1	468,0
Gia Lai	390,6	405,3	398,4	410,2	402,5

a) Tính độ lệch chuẩn và khoảng biến thiên của sản lượng cà phê từng tỉnh.

b) Tỉnh nào có sản lượng cà phê ổn định hơn? Giải thích.

Bài 7. Hàm lượng Natri (đơn vị mg) trong 100 g một số loại ngũ cốc được cho như sau

0 340 70 140 200 180 210 150 100 130
140 180 190 160 290 50 220 180 200 210

Gọi T là tổng các giá trị bất thường của mẫu số liệu. Giá trị $T = ?$

 12

Bài 8. Căn cứ theo Thông tư số 22/2021/TT-BGDĐT về quy định đánh giá học sinh trung học cơ sở và trung học phổ thông. Đối với môn học đánh giá bằng điểm số, điểm trung bình môn học kì (ĐTB_{mhk}) được tính theo công thức sau

$$\text{ĐTB}_{mhk} = \frac{\text{TĐĐG}_{tx} + 2 \times \text{ĐĐG}_{gk} + 3 \times \text{ĐĐG}_{ck}}{\text{Số ĐĐG}_{tx} + 5}$$

Trong đó

- ◇ ĐTB_{mhk} : Điểm trung bình môn học kì.
- ◇ TĐĐG_{tx} : Tổng điểm đánh giá thường xuyên.
- ◇ ĐĐG_{gk} : Điểm đánh giá giữa kì.
- ◇ ĐĐG_{ck} : Điểm đánh giá cuối kì.
- ◇ Số ĐĐG_{tx} : Số điểm đánh giá thường xuyên.

Bạn An có các điểm trước kì kiểm tra cuối học kì như sau

ĐĐG_{tx}				ĐĐG_{gk}	ĐĐG_{ck}	ĐTB_{mhk}
9	8	9	10	7,5		8,0

Để bạn An có điểm trung bình học kì là 8,0 thì bạn An cần có kết quả bài kiểm tra cuối kì là bao nhiêu điểm?

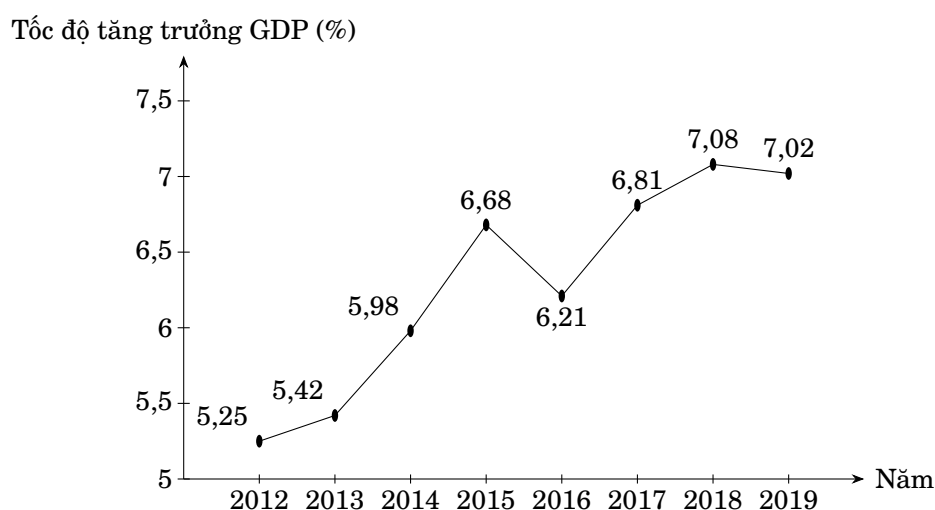
 7

Bài 9. Z-score là chỉ số được Tổ chức Y tế Thế giới (WHO) sử dụng để đánh giá tình trạng dinh dưỡng của con người thông qua các thông số chiều cao, cân nặng và độ tuổi.

$$Z = \frac{H - \bar{h}}{s}.$$

Trong đó $\bar{h}$ là chiều cao trung bình của lứa tuổi, s là độ lệch chuẩn, H là chiều cao người đang xét. Nếu $Z < -3$ thì người đó suy dinh dưỡng thể thấp còi, mức độ nặng; nếu $-3 \leq Z < -2$ thì suy dinh dưỡng thể thấp còi, mức độ vừa. Hỏi một người 17 tuổi, cao 155 cm có bị suy dinh dưỡng thể thấp còi không? Nếu bị thì ở mức độ nào? Biết rằng chiều cao trung bình của nam 17 tuổi là 175,16 cm và độ lệch chuẩn là 7,64 cm.

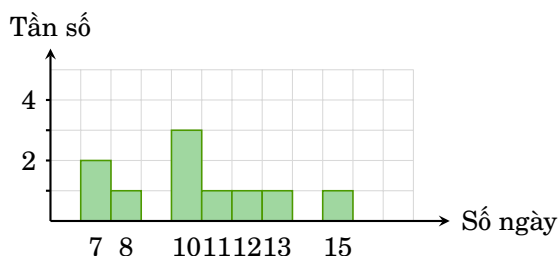
Bài 10. Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên dưới biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019.



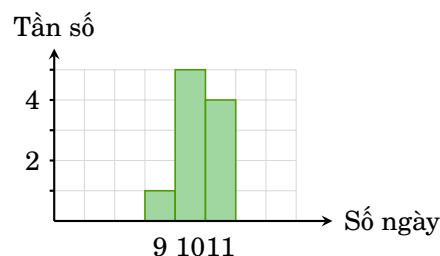
Tính phương sai của mẫu số liệu đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

0,44

Bài 11. Một công ty sản xuất thường xuyên đặt mua nguyên vật liệu ở hai nhà cung ứng X, Y . Để đảm bảo tiến độ sản xuất, công ty muốn trung bình việc thực hiện một đơn đặt hàng nguyên vật liệu mất khoảng 10 ngày. Sau vài tháng hoạt động, người ta thống kê số ngày mà mỗi nhà cung ứng X, Y thực hiện các đơn đặt hàng bằng hai biểu đồ dưới đây.



Hình a) Số ngày nhà cung ứng X thực hiện đơn hàng



Hình b) Số ngày nhà cung ứng Y thực hiện đơn hàng

- Tính số ngày trung bình mà mỗi nhà cung ứng X, Y thực hiện một đơn hàng.
- Phân tích xu thế trung tâm và mức độ phân tán của hai mẫu số liệu thu được. Nhà cung ứng nào đáng tin cậy hơn về việc giao hàng đúng tiến độ?

$\bar{x}_X = \bar{x}_Y = 10,3$; Chọn Y

Bảng đáp án trắc nghiệm nhiều phương án

1	C	2	B	3	B	4	A	5	D	6	D	7	D	8	C	9	D	10	B
11	C	12	B	13	D	14	D	15	C	16	A	17	D	18	A	19	B	20	D
21	A	22	C	23	C	24	C												

Bảng đáp án trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S	Câu 2.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 3.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ	Câu 4.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d S
Câu 5.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d Đ	Câu 6.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S
Câu 7.	☐ a Đ ☐ b S ☐ c S ☐ d S	Câu 8.	☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ
Câu 9.	☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ		