

Bài 1. (4,0 điểm)

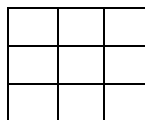
- a) Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{x^2 + (n+1)x + m + n}{x+1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của các tham số m, n để đồ thị hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $(-2; -2)$.
- b) Một nhà đầu tư bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thêm 100.000 đồng thì sẽ có một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì nhà đầu tư đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

Bài 2. (4,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $4^{\ln x+1} - 6^{\ln x} - 2 \cdot 3^{\ln x^2+2} = 0$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2+4}-2) = \sqrt{3x^2+5} \end{cases}$$
.

Bài 3. (4,0 điểm)

- a) Sau khi mua ô tô, ông A đến phòng cảnh sát giao thông bấm chọn ngẫu nhiên một biển số xe. Biết rằng thời điểm đi bấm số xe, biển số xe có dạng 47A 245. xy , với x, y là các chữ số thuộc $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Tính xác suất để ông A bấm được biển số xe 47A 245. xy thỏa $x < y$.
- b) Cho một bảng ô vuông 3×3 , mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Có bao nhiêu cách tô màu mà trong bảng vuông đó có chứa bảng vuông 2×2 mà cả bốn ô vuông đơn vị đều được tô bởi màu đỏ. (Bảng ô vuông được cố định, không xoay, như hình vẽ).



Bài 4. (4,0 điểm)

- a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 5. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 5\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính cosin góc tạo bởi đường thẳng AC với mặt phẳng (SCD) và khoảng cách giữa BD và MN .

- b) Ở phường Tân An, có hai trạm phát sóng wifi A, B đặt trên hai trụ cao 20m và hai trụ này cách nhau 500m. Trạm A có tầm phát sóng 400m, trạm B có tầm phát sóng 300m. Trên mặt đất có nút giao hai con đường ở vị trí C cách chân hai trạm phát sóng A và B lần lượt là 600m và 400m. Biết có một Flycam đang bay trên không trung trong vùng phủ sóng sóng wifi của trạm A hoặc trạm B và một ô tô đang di chuyển trên con đường thẳng nối từ chân trạm A đến C, rồi chuyển hướng vào đường thẳng từ C đến chân trạm B. Hỏi khoảng cách lớn nhất có thể của Flycam với ô tô là bao nhiêu mét (giả sử chân trụ trạm A và B ở sát cạnh đường và Flycam được điều khiển bởi sóng wifi này nên khi ra ngoài vùng phủ sóng của trạm A và B thì sẽ bị rơi).

Bài 5. (4,0 điểm)

- a) Cho dãy số thực (a_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) thỏa mãn $0 \leq a_n + 4a_{n+1} + 3a_{n+2} \leq 2025, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng dãy (a_n) bị chặn.
- b) Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, gọi M là trung điểm của AD. Đường thẳng BM cắt AC tại N. Biết AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN, chứng minh rằng
- $$\frac{BM}{MN} = \left(\frac{AC}{AB} \right)^2.$$

-----HẾT-----

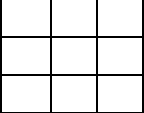
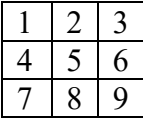
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu, không được sử dụng máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

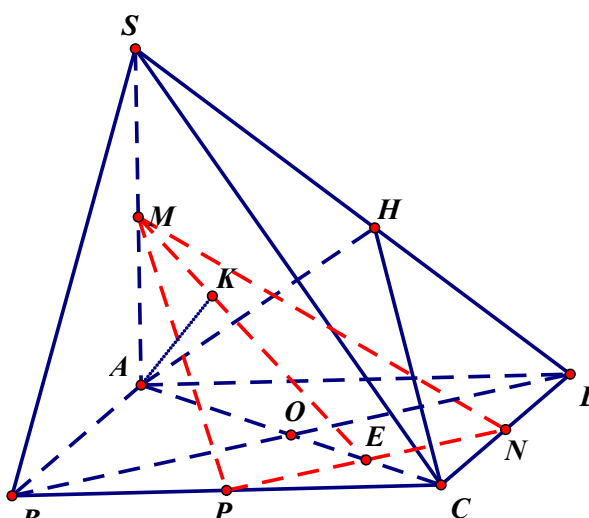
Họ và tên.....Số báo danh:.....

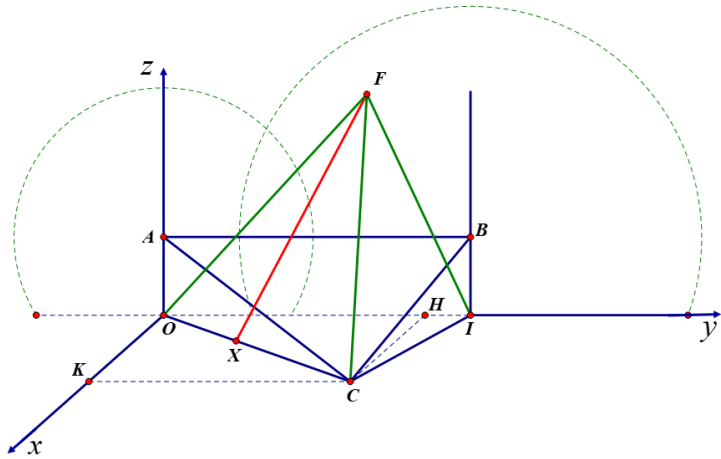
ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

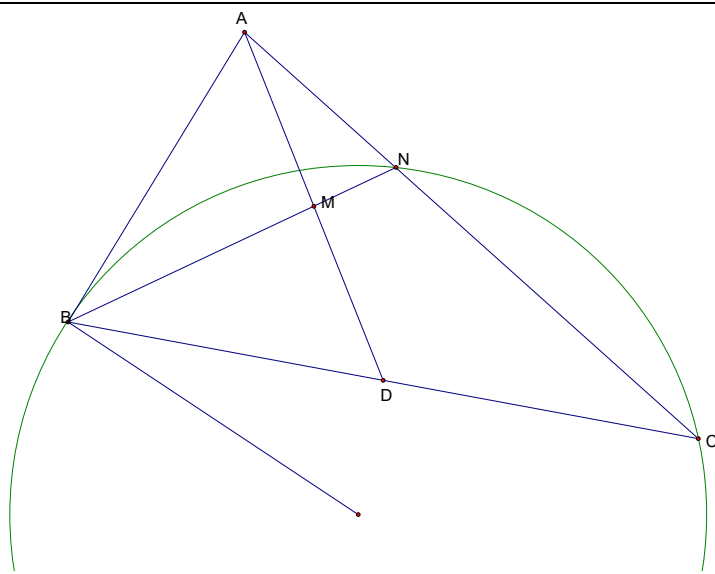
Bài	Đáp án	Điểm																														
1a	Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{x^2 + (n+1)x + m + n}{x+1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của các tham số m, n để đồ thị hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $(-2; -2)$.	2đ																														
	Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{m}{(x+1)^2}$, với mọi $x \neq -1$. Nếu $m \leq 0$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$ (loại).	0,5																														
	Nếu $m > 0$ thì phương trình: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - m}{(x+1)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 - \sqrt{m}$ và $x_2 = -1 + \sqrt{m}$.	0,5																														
	BBT: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-1 - \sqrt{m}$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$-1 + \sqrt{m}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td colspan="2">↗</td><td colspan="2">↘</td><td colspan="2">↘</td><td colspan="2">↗</td></tr></table>	x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{m}$		-1		$-1 + \sqrt{m}$		$+\infty$	y'		+	0	-		-	0	+		y		↗		↘		↘		↗		0,25
x	$-\infty$		$-1 - \sqrt{m}$		-1		$-1 + \sqrt{m}$		$+\infty$																							
y'		+	0	-		-	0	+																								
y		↗		↘		↘		↗																								
	Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $(-2; -2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -1 - \sqrt{m} = -2 \\ f(-2) = -2 \end{cases}$	0,5																														
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m} = 1 \\ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$	0,25																														
1b	Một nhà đầu tư bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thêm 100.000 đồng thì sẽ có một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì nhà đầu tư đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?	2đ																														
	Gọi x (đồng/tháng) là số tiền tăng thêm của giá cho thuê mỗi căn hộ. ($x \geq 0$) Số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{x}{100000}$ (căn hộ)	0,5																														
	Khi đó, số tiền nhà đầu tư thu được là:	0,5																														

	$T(x) = (2000000 + x) \left(40 - \frac{x}{100000} \right) = 80000000 + 20x - \frac{x^2}{100000}$ (đồng/tháng)	
	Khảo sát hàm số $T(x)$ trên $[0; +\infty)$. Ta có: $T'(x) = 20 - \frac{2x}{100000}$ $T'(x) = 0 \Leftrightarrow 2000000 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1000000$	0,5
	Lập bảng biến thiên ta tìm được GTLN của $T(x) = T(1000000)$. Vậy để có thu nhập cao nhất thì nhà đầu tư cho thuê mỗi căn hộ với giá là 3.000.000 (đồng/tháng)	0,5
2a	Giải phương trình: $4^{\ln x + 1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2 + 2} = 0$.	2đ
	ĐK: $x > 0$, Biến đổi PT đã cho thành: $4.2^{2\ln x} - 6^{\ln x} - 18.3^{2\ln x} = 0$	0,5
	Chia cả hai vế của PT cho $3^{2\ln x}$ và đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x}$, $t > 0$ thì được PT:	0,5
	$4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ t = -2(\text{loại}) \end{cases}$	0,5
	Với $t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = e^{-2}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = e^{-2}$.	0,5
2b	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 & (1) \\ y(\sqrt{x^2 + 4} - 2) = \sqrt{3x^2 + 5} & (2) \end{cases}$	2đ
	Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$. Vì $\sqrt{x^2 + 4} - 2 > 0, \forall x > 0$ nên từ (2) $\Rightarrow y > 0$ (1) $\Rightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow \sqrt{x}(y - 2x) + y(y - 2x) = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2x)(\sqrt{x} + y) = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ (3) (Vì $x > 0; y > 0$ nên $\sqrt{x} + y > 0$)	0,5
	Thay (3) vào (2) ta có $2x(\sqrt{x^2 + 4} - 2) = \sqrt{3x^2 + 5} \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$ (4)	0,5
	Xét các hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 5}}$ và $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ Ta có $f'(x) = \frac{10}{(\sqrt{3x^2 + 5})^3} > 0, g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4} \cdot (\sqrt{x^2 + 4} - 2)^2} < 0, \forall x > 0$ Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.	0,5
	Mặt khác $f(\sqrt{5}) = g(\sqrt{5}) = 1$ nên $x = \sqrt{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4)	0,5

	Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$.	
3a	Ông A sau khi mua ô tô, ông đến phòng cảnh sát giao thông bấm chọn ngẫu nhiên biển số xe. Biết rằng thời điểm đi bấm số xe, biển số xe có dạng 47A 245. xy, với x, y là các chữ số thuộc $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Tính xác suất để ông A bấm được số xe 47A 245. xy thỏa $x < y$.	2đ
	Không gian mẫu $\Omega = \{xy : x, y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}\}$ nên $n(\Omega) = 100$	0,5
	Biến cố A: “ Bấm được số xy thỏa : $x, y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và $x < y$ ”. Số cách chọn 2 số khác nhau thuộc $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là : $C_{10}^2 = 45$ cách.	0,5
	Số cách xếp 2 số này vào 2 vị trí x, y sao cho $x < y$ là : 1 cách Suy ra $n(A) = 45 \times 1 = 45$.	0,5
	Vậy $P(A) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.	0,5
3b	Cho một bảng ô vuông 3×3 , mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Có bao nhiêu cách tô màu mà trong bảng vuông đó có chứa bảng vuông 2×2 mà cả bốn ô vuông đơn vị đều được tô bởi màu đỏ . (Bảng ô vuông được cố định, không xoay như hình vẽ). 	2đ
	Đánh số các ô vuông trên bảng vuông 3×3 như sau.  Gọi A_i ($i = 1, 2, 4, 5$) là tập các bảng vuông 3×3 chứa bảng màu đỏ 2×2 mà ô i là ô trên cùng bên trái và A là tập các bảng vuông 3×3 thỏa đề bài. Ta có $A = A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5$ nên	0,5
	$\begin{aligned} n(A) &= n(A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5) \\ &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_4) + n(A_5) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_5) \\ &\quad - n(A_2 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_4 \cap A_5) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \\ &\quad + n(A_1 \cap A_4 \cap A_5) + n(A_2 \cap A_4 \cap A_5) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \end{aligned}$ Ta có $n(A_i) = 2^5$, do 5 ô còn lại, mỗi ô có hai cách tô màu xanh hoặc đỏ) với $i = 1, 2, 4, 5$.	0,5
	$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_4) = n(A_2 \cap A_5) = n(A_4 \cap A_5) = 2^3$ và $n(A_1 \cap A_5) = n(A_2 \cap A_4) = 2^2$	0,5
	$n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = n(A_1 \cap A_2 \cap A_5) = n(A_1 \cap A_4 \cap A_5) = n(A_2 \cap A_4 \cap A_5) = 2$ $n(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) = 1$ Vậy $n(A) = 4 \times 2^5 - (4 \times 2^3 + 2 \times 2^2) + 4 \times 2 - 1 = 95$.	0,5
4a	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 5. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 5\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính cosin góc tạo bởi đường thẳng AC với mặt phẳng (SCD) và khoảng cách giữa BD và MN .	2đ

		
	Gọi H là hình chiếu của A lên SD. Ta có $AH \perp SD$ Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ Lại có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của AC lên mp(SCD) Do đó $(AC, (SCD)) = (AC, HC) = \widehat{ACH}$	0,5
	Tính được $AC = 5\sqrt{2}$, $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ Xét $\triangle ACH$ vuông tại H, ta có $\sin \widehat{ACH} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $\cos \widehat{ACH} = \frac{\sqrt{10}}{4}$	0,5
	Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra PN song song với BD nên BD song song với (MNP)	0,25
	Do đó $d(BD, MN) = d(BD, (MNP)) = d(O, (MNP)) = \frac{1}{3}d(A, (MNP))$	0,25
	$\begin{cases} NP \perp AC \\ NP \perp SA \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SAC) \Rightarrow (MNP) \perp (SAC)$ và $(MNP) \cap (SAC) = ME$ Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $d(A, (MNP)) = AK$	0,25
	Tính được $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow MA = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $AE = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{4}$ Tam giác vuông MAE, có $AK = \frac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ Vậy $d(BD, MN) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.	0,25
4b	Ở phường Tân An, có hai trạm phát sóng wifi A, B đặt trên 2 trụ cao 20m và hai trụ này cách nhau 500m. Trạm A có tầm phát sóng 400m, trạm B có tầm phát sóng 300m. Trên mặt đất có nút giao hai con đường ở vị trí C cách chân hai trạm phát sóng A và B lần lượt là 600m và 400m. Biết có 1 Flycam đang bay trên không trung trong vùng phủ sóng sóng wifi của trạm A hoặc trạm B và một ô tô đang di chuyển trên con đường thẳng nối từ chân trạm A đến C, rồi của vào đường thẳng từ C đến chân trạm B. Hỏi khoảng cách lớn nhất có thể của Flycam với ô tô là bao nhiêu mét (giả sử	2đ

	chân trụ trạm A và B ở sát cạnh đường và Flycam được điều khiển bởi sóng wifi này nên khi ra ngoài vùng phủ sóng của trạm A và B thì sẽ bị rơi).	
		
	Gọi O là chân trụ của trạm A và I là chân trụ của trạm B. Khi đó ta có $OA=20m$, $IB=20m$, $OI=500m$. Xe ô tô di chuyển trên đường từ O đến C và từ C đến I, ta có $OC=600$, $IC=400$. Kí hiệu ô tô là X và Flycam là F. Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ, ta có $O(0;0;0)$, $A(0;0;20)$, $I(0;500;0)$, $B(0;500;20)$. Flycam F đang bay trong vùng phủ sóng sóng wifi của trạm A hoặc trạm B nên F thuộc khối cầu tâm A bán kính $R_1 = 400$, hoặc F thuộc khối cầu tâm B bán kính $R_2 = 300$.	0,5
	Theo đề bài ta cần tìm giá trị lớn nhất của FX. + Khi X thuộc đoạn OC, ta có $FX \leq \max\{FO; FC\}$, và khi X thuộc đoạn CI, ta có $FX \leq \max\{FC; FI\}$ Suy ra $FX \leq \max\{FO; FC; FI\}$.	0,5
	Lại có $FO \leq \max\{OA + R_1; OB + R_2\} = \max\{420; 300 + 20\sqrt{626}\} = 300 + 20\sqrt{626}$ $FC \leq \max\{CA + R_1; CB + R_2\} = \max\{400 + 20\sqrt{901}; 300 + 20\sqrt{401}\} = 400 + 20\sqrt{901}$ $FI \leq \max\{IA + R_1; IB + R_2\} = \max\{400 + 20\sqrt{626}; 320;\} = 400 + 20\sqrt{626}$	0,5
	Suy ra $FX \leq 400 + 20\sqrt{901}$, nên $\max FX = 400 + 20\sqrt{901}$ khi ô tô ở vị trí C, Flycam ở vị trí trên tia đối tia AC và thuộc mặt cầu A.	0,5
5a	Cho dãy số thực $(a_n)(n = 0, 1, 2, \dots)$ thỏa mãn $0 \leq a_n + a_{n+1} + 3a_{n+2} \leq 2025, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng dãy (a_n) bị chặn.	2đ
	Ta có $0 \leq a_1 + a_2 + 3a_3 \leq 2025 \Leftrightarrow \frac{-a_1 - a_2}{3} \leq a_3 \leq \frac{2025 - a_1 - a_2}{3}$. Suy ra $a_3 \leq \max\left\{\left \frac{a_1 + a_2}{3}\right ; \left \frac{2025 - a_1 - a_2}{3}\right \right\} \leq \max\left\{\frac{ a_1 + a_2 }{3}; \frac{2025 + a_1 + a_2 }{3}\right\}$.	0,5
	Đặt $t = \max\{ a_1 ; a_2 ; 2025\}$, thì $a_3 \leq \max\left\{\frac{2t}{3}; t\right\} \leq t$.	0,5
	Bằng quy nạp ta chứng minh $a_n \leq t, \forall n \geq 1$. Thật vậy, giả sử $a_k \leq t, \forall k = 1, \dots, n-1$. Khi đó $a_n \leq \max\left\{\frac{ a_{n-2} + a_{n-1} }{3}; \frac{2025 + a_{n-2} + a_{n-1} }{3}\right\} \leq \max\left\{\frac{2t}{3}; t\right\} \leq t$.	0,5
	Tóm lại, $a_n \leq t, \forall n \geq 1$ hay dãy (a_n) bị chặn.	0,5
5b	Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, gọi M là trung điểm của AD. Đường thẳng	2đ

	BM cắt AC tại N. Biết AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN, chứng minh rằng $\frac{BM}{MN} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.	
		
	AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN nên ta có $\widehat{ABN} = \widehat{ACB}$ (1) (1) $\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta ANB \Leftrightarrow \left(\frac{BC}{BN}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$	0,5
	Áp dụng định lý Sin trong tam giác ABM và AMN ta có: $\frac{BM}{MN} = \frac{\sin \widehat{MAB} \cdot \sin \widehat{MNA}}{\sin \widehat{ABM} \cdot \sin \widehat{NAM}}$ Tương tự, từ tam giác ABD và tam giác ADC ta có $\frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{NAM}} = \frac{BD \sin \widehat{ABD}}{DC \sin \widehat{DCA}} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{DCA}}$	0,5
	Trong tam giác NBC ta có $\left(\frac{BC}{BN}\right)^2 = \frac{\sin^2 \widehat{BNC}}{\sin^2 \widehat{BCN}} = \frac{\sin^2 \widehat{MNA}}{\sin^2 \widehat{BCN}}$	0,5
	$\frac{BM}{MN} = \frac{\sin \widehat{ABD} \cdot \sin \widehat{MNA}}{\sin \widehat{ABM} \cdot \sin \widehat{DCA}} = \frac{\sin^2 \widehat{MNA}}{\sin^2 \widehat{BCN}} = \left(\frac{BC}{BN}\right)^2$	0,5

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>