

Họ và tên:

Số báo danh:

Mã đề 101

PHẦN I (8,0đ) Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án (0,4đ/câu).

Câu 1. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $a(a > 0)$?

- A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^2}{9}$. C. $\frac{2a^2}{9}$. D. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là các điểm trên AD và BC thỏa $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$. Biết rằng $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{DC}$, khi đó $x - y$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(1; 2; 3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{343}{6}$. B. $\frac{343}{18}$. C. $\frac{343}{12}$. D. $\frac{343}{36}$.

Câu 4. Đo quãng đường (km) từ nhà tới nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy ghi lại như sau:

3 5 4 5 6 4 7 8 10 11 11 10 12 13 15 12 14 17 16 12 18 19 20 20 21 23 24 24 25 26
27 28 30 31 32 32 33 35 34 35

Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là $[0; 6)$.

Số trung bình và số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm lần lượt là

- A. $\bar{x} = 18,75; M_e = 18$. B. $\bar{x} = 18; M_e = 18,75$. C. $\bar{x} = M_e = 18$. D. $\bar{x} = M_e = 18,75$.

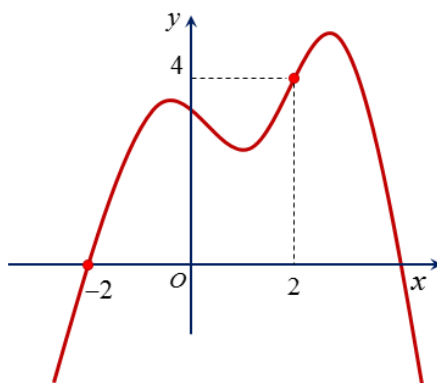
Câu 5. Cho $\sin 2a = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$. Tính $P = \sin^4 a + \cos^4 a$.

- A. $\frac{121}{81}$. B. $\frac{1}{81}$. C. $\frac{161}{81}$. D. $\frac{41}{81}$.

Câu 6. Một lớp không quá 19 học sinh có nhiệm vụ xếp 140 chiếc ghế nhựa thành các chõng. Nhân việc này họ đã nghĩ ra trò chơi “**lực sĩ**”, thể lệ như sau: Mỗi người bốc một lá thăm trong đó có một lá thăm “**lực sĩ**”, người bốc phải thăm “**lực sĩ**” là người duy nhất làm công việc xếp ghế. Những người còn lại, mỗi người lấy một chiếc ghế trong số 140 chiếc nêu trên để ngồi quan sát. Với số ghế còn lại, chàng lực sĩ đã xếp thành các chõng thỏa mãn: Chõng thứ nhất có 1 chiếc ghế, từ chõng thứ hai trở đi mỗi chõng nhiều hơn chõng liền trước 1 chiếc ghế. Tính số chõng ghế mà chàng lực sĩ xếp được.

- A. 19. B. 18. C. 17. D. 16.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2| - |x|$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 4. B. 2. C. 6. D. 0.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{3}$. D. $-\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;6)$. Biết rằng có hai điểm M, N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM, AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45° . Tổng các hoành độ hai điểm M, N tìm được là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 5.

Câu 10. Khảo sát về chiều cao các mẫu trang trí tượng đã bán của một cửa hàng như sau:

Chiều cao (mm)	$[100; 200)$	$[200; 300)$	$[300; 400)$	$[400; 500)$
Số lượng	35	30	20	15

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần mười).

- A. 206. B. 160,1. C. 106,2. D. 260,12.

Câu 11. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng

- A. 0. B. π . C. 2π . D. 3π .

Câu 12. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $5^x - 5^{-x} = 2 \cos nx$ có 2024 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $25^x + 25^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx$.

- A. 4048. B. 2024. C. 4047. D. 2025.

Câu 13. Biết rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4^2} + \frac{11}{4^3} + \dots + \frac{4n-1}{4^n} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

- A. 20. B. 21. C. 22. D. 23.

Câu 14. Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

- A. $\frac{397}{1728}$. B. $\frac{1385}{1728}$. C. $\frac{1331}{1728}$. D. $\frac{1603}{1728}$.

Câu 15. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3}{3x^2 + x + 2}$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB

luôn đi qua điểm $E(1; 2)$. Khi đó

- A. $m < -10$. B. $m \in (-10; 0)$. C. $m \in (0; 8)$. D. $m > 8$.

Câu 16. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $SA = a$. Diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2}{4}$. Gọi P là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SP}$. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = AM + MN + NP$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{8}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Câu 17. Cho $A(1; 2; 0); B(3; -1; 2); C(1; 2; 2); D(3; -1; 1); M \in (Oxy)$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2 - \frac{1}{4}MD^4$.

A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. 6. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 18. Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x^2 + y^2 \geq 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $mx + 3y + 3m - 12 = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán?

A. 5. B. 6. C. 11. D. 10.

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 4a, BC = 3\sqrt{2}a, \widehat{ABC} = 45^\circ$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^\circ$. Sin góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

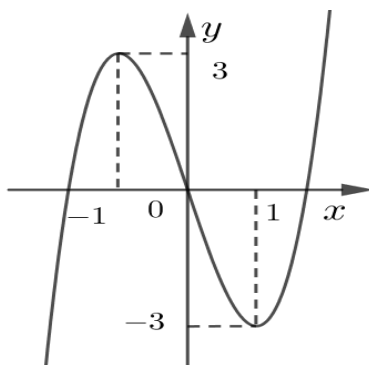
A. $\frac{4\sqrt{7}a^3}{7}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\sqrt{2}a^3$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 20. Có hai rổ bóng riêng biệt chỉ chứa hai loại bóng Đỏ và Xanh. Biết tổng số bóng của hai rổ là 24 và rổ nào cũng chứa cả hai màu. Lấy ngẫu nhiên mỗi rổ một quả bóng thì xác suất để được cả hai quả bóng đều màu Đỏ là $\frac{4}{15}$. Hỏi xác suất để được cả hai quả đều màu Xanh bằng

A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{5}{18}$. C. $\frac{11}{15}$. D. $\frac{7}{15}$.

PHẦN II (7.2đ). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở

Câu 1. Cho hàm số $y = h(x) = f'(x)$ là hàm số đa thức bậc ba và có đồ thị như hình sau:



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $h(3) = 18$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos x\right)$ bằng 3.

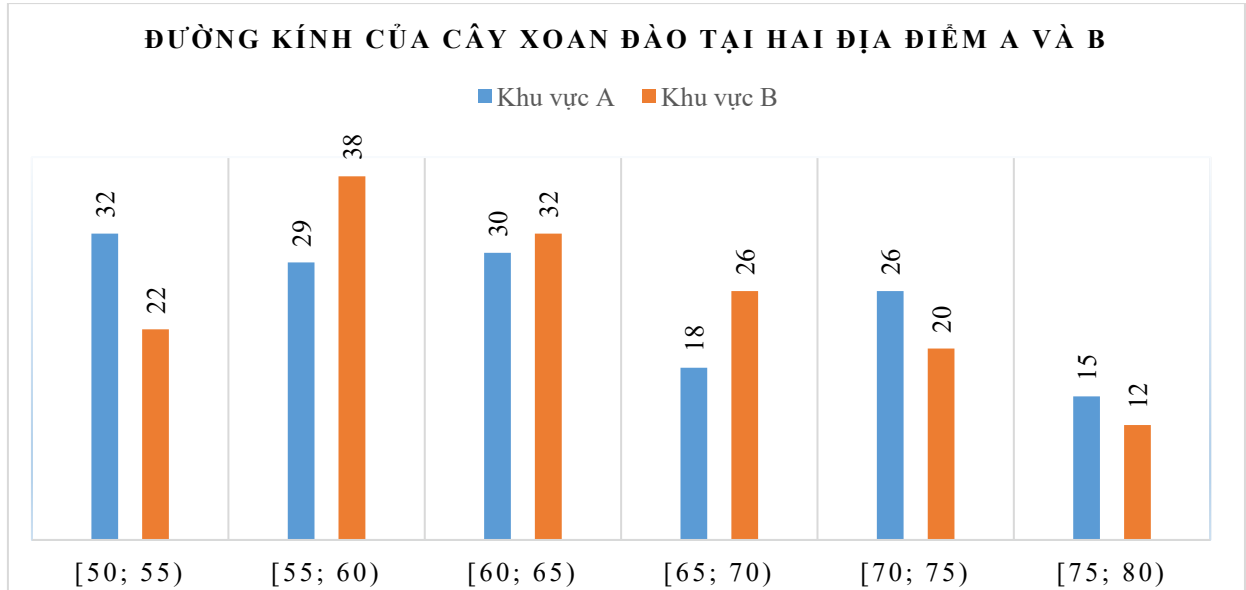
c) Hàm số $g(x) = f(x^3 + 1) + \frac{3}{2}x^6 + 3x^3 + 2025$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

d) Nếu $f(0) = 0$ thì số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x^4) - x^2|$ là 5.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$.

- Điểm $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC .
- Khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $OD = \sqrt{5}$.
- Điểm $H(a;b;c)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC . Khi đó $3a + 6b + 9c = 6$.
- Biết điểm $M(x;y;z)$ để biểu thức $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $4x - 2y + z = -5$.

Câu 3. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra đường kính thân của một số cây xoan đào 8 năm tuổi (đơn vị: cm) của một giống cây xoan đào ở hai địa điểm A và B; (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B bằng nhau.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B lớn hơn khu vực A;
- Tổng phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B là 126.
- Dựa theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì các cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A có đường kính đồng đều hơn khu vực B.

Câu 4. Cho phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ (*).

- Điều kiện xác định của phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Khi $m = 0$ thì tích các nghiệm của phương trình bằng 4.
- Khi $m = 1$ thì phương trình có bốn nghiệm.
- Có đúng 4 giá trị của tham số m để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt.

- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O , $SA \perp (ABCD)$
- $AC \perp SB$.
 - Biết $SA = 2a$, $AB = a$ và I là trung điểm của SD . Khi đó cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AIC) và (SBC) bằng $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
 - Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng 3. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng $27\sqrt{3}$.
 - Biết $SA = 2$, $SB = 3$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm J của SG cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại M, N, P . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}$ bằng $\frac{18}{11}$.

Câu 6. Một hộp đựng 100 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 100. Chọn từ hộp ra bốn thẻ.

- Xác suất của biến cố A : “Chọn được bốn thẻ đều ghi số chẵn” là $P(A) = \frac{49}{198}$.
- Xác suất của biến cố B : “Chọn được bốn thẻ trong đó có ít nhất 2 thẻ ghi số lẻ” là $P(B) = \frac{1}{3}$.
- Xác suất của biến cố C : “Tổng các số ghi trên 4 thẻ là một số chẵn” là $P(C) = \frac{1601}{3201}$.
- Xác suất của biến cố D : “Tổng lập phương của bốn số chia hết cho 4” là 0,28 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHẦN III (4,8đ). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 (trả lời đúng 1 câu được 0,8đ)

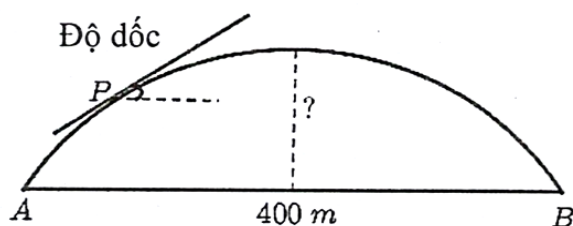
Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Biết rằng trên (C) có những điểm mà tiếp tuyến của đồ thị tại mỗi điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{5}{2}$ lần bán kính đường tròn nội tiếp (I là giao điểm 2 đường tiệm cận). Tính tổng hoành độ của tất cả những điểm đó?

Câu 2: Mỗi lượt, ta gieo một con xúc xắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất hai lượt gieo được kết quả con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm và đồng xu xuất hiện mặt sấp (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 3. Cho phương trình $\ln(1-x) - \log(x^2 - 4x - m) - x + m = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thực $x \in [2; 8]$?

Câu 4. Trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị độ dài trên các trục là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm $I(1; 2; 2)$ biết rằng bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4; -4; 2)$ và $N(6; 0; 6)$. Gọi $E(a; b; c)$ là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm sao cho tổng khoảng cách từ E đến vị trí M và N lớn nhất. Tính $T = a + b + c$.

- Câu 5.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m . Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Chiều cao lớn nhất giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



- Câu 6.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng 3. Gọi M là điểm thay đổi trên cạnh AB , (P) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SA và BC , (H) là thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) . Khi M di chuyển đến vị trí để (H) là hình thoi thì (P) chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện, tính thể tích V của khối đa diện chứa đỉnh A .

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

Phần 1:

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chọn	A	B	D	A	D	D	C	B	B	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chọn	D	A	C	A	B	D	C	A	B	A

Phần 2

Câu 1:

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

Câu 2:

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

Câu 3:

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

Câu 4:

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

Câu 5:

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------------	---------------	---------------	----------------

Câu 6:

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

Phần 3:

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	-4	0,07	13	4	17,6	1,04

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I (8,0đ) Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án (**0,4đ/câu**).

Câu 1. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $a (a > 0)$?

A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a^2}{9}$.

C. $\frac{2a^2}{9}$.

D. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Cạnh góc vuông x , $0 < x < \frac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$. $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	$\nearrow \frac{a^2}{6\sqrt{3}} \searrow$		

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là các điểm trên AD và BC thỏa $\overline{AM} = 2\overline{MD}$ và $\overline{BN} = 2\overline{NC}$.

Biết rằng $\overline{MN} = x\overline{AB} + y\overline{DC}$, khi đó $x - y$ bằng

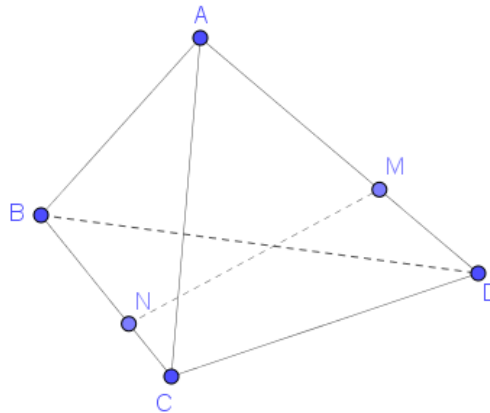
A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải



Ta có: $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CN}$$

Cộng vế theo vế ta có: $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$, suy ra chọn **B**.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(1;2;3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{343}{6}$.

B. $\frac{343}{18}$.

C. $\frac{343}{12}$.

D. $\frac{343}{36}$.

Lời giải

$$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c).$$

$$\overrightarrow{SA} = (a-1; -2; -3); \overrightarrow{SB} = (-1; b-2; -3); \overrightarrow{SC} = (-1; -2; c-3).$$

Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=14 \\ 2b+3c=14 \\ a+3c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=\frac{7}{2} \\ c=\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } SA, SB, SC \text{ đôi một vuông góc, nên: } V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{343}{36}.$$

Câu 4. Đo quãng đường (km) từ nhà tới nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy ghi lại như sau:

3 5 4 5 6 4 7 8 10 11 11 10 12 13 15 12 14 17 16 12 18 19 20 20 21 23 24 24 25
26 27 28 30 31 32 32 33 35 34 35

Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là $[0;6)$.

Số trung bình và số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm lần lượt là

A. $\bar{x} = 18,75; M_e = 18$.

B. $\bar{x} = 18; M_e = 18,75$.

C. $\bar{x} = M_e = 18$.

D. $\bar{x} = M_e = 18,75$.

Lời giải

Nhóm	Tần số	Giá trị đại diện
$[0;6)$	5	3
$[6;12)$	7	9
$[12;18)$	8	15
$[18;24)$	6	21
$[24;30)$	6	27
$[30;36)$	8	33
	$n = 40$	

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 15 + 6 \cdot 21 + 6 \cdot 27 + 8 \cdot 33}{40} = 18,75$$

Số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $M_e = 12 + \frac{20-12}{8} \cdot 6 = 18(km)$

Câu 5. Cho $\sin 2a = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$. Tính $P = \sin^4 a + \cos^4 a$.

A. $\frac{121}{81}$.

B. $\frac{1}{81}$.

C. $\frac{161}{81}$.

D. $\frac{41}{81}$.

Lời giải

Ta có:

$$P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a)^2 + (\cos^2 a)^2 = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a = \frac{41}{81}.$$

Câu 6. Một lớp không quá 19 học sinh có nhiệm vụ xếp 140 chiếc ghế nhựa thành các chõng. Nhân việc này họ đã nghĩ ra trò chơi “**lực sĩ**”, thể lệ như sau: Mỗi người bốc một lá thăm trong đó có một lá thăm “**lực sĩ**”, người bốc phải thăm “**lực sĩ**” là người duy nhất làm công việc xếp ghế. Những người còn lại, mỗi người lấy một chiếc ghế trong số 140 chiếc nêu trên để ngồi quan sát. Với số ghế còn lại, chàng lực sĩ đã xếp thành các chõng thỏa mãn: Chõng thứ nhất có 1 chiếc ghế, từ chõng thứ hai trở đi mỗi chõng nhiều hơn chõng liền trước 1 chiếc ghế. Tính số chõng ghế mà chàng lực sĩ xếp được.

A. 19.

B. 18.

C. 17.

D. 16.

Lời giải

Giả sử u_n là số ghế của chõng thứ n , m là số học sinh. Điều kiện: $n, m \in \mathbb{Z}^+, m < 20$.

Dễ thấy (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai là $d = 1$.

Ta có $\frac{n(u_1 + u_n)}{2} + (m - 1) = 140$.

Tức là $m = 141 - \frac{n(1+n)}{2}$ (*).

Do $m < 20$ nên ta cần phải có $n^2 + n - 242 > 0$. Kết hợp với n là số nguyên dương, ta tìm được $n \in \{16; 17; 18; \dots\}$.

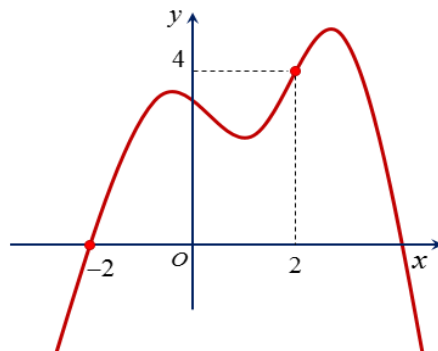
Thử lại:

+ Với $n = 16$, thay vào (*) ta được $m = 5$. Thỏa mãn bài toán.

+ Với $n \geq 17$, thay vào (*) ta được $m < 0$. Không thỏa mãn bài toán.

Tóm lại, số chõng ghế đã xếp được là 16.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2| - |x|$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 4.

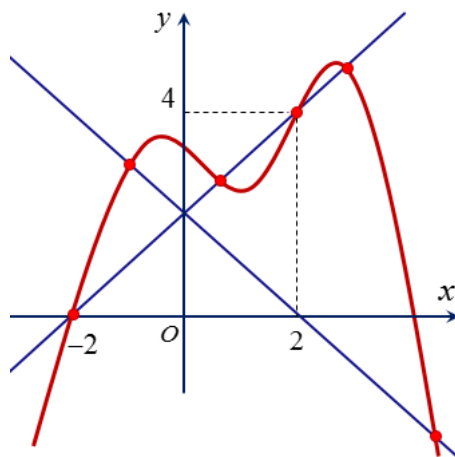
B. 2.

C. 6.

D. 0.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $|f(x) - 2| = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2 = x \\ f(x) - 2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + 2 \\ f(x) = -x + 2 \end{cases}.$



Kết hợp đồ thị ta thấy hệ phương trình có 6 nghiệm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2| - |x|$ cắt trục hoành tại 6 điểm phân biệt.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{3}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Lời giải

Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều

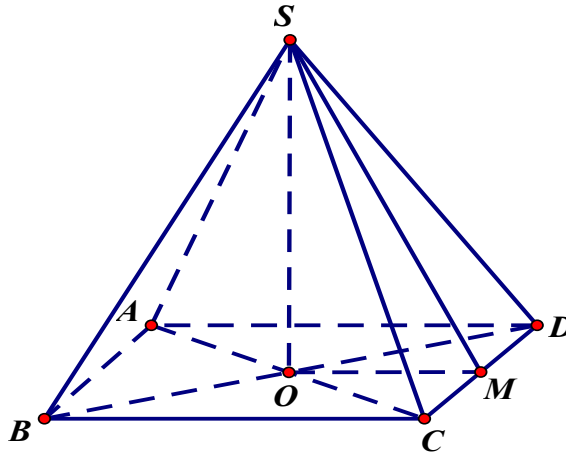
$$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \end{cases}.$$

Do M là trung điểm của CD nên ta có:

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SO} - \overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OS}, \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

Do $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}OC^2 - \frac{1}{2}OD^2 = -OC^2 = -\frac{a^2}{2}$$



- Câu 9.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;6)$. Biết rằng có hai điểm M, N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM, AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45° . Tổng các hoành độ hai điểm M, N tìm được là
- A. 4. **B.** 2. C. 1. D. 5.

Lời giải

Gọi điểm $M(a;0;0), N(b;0;0)$ ($a \neq b$) thì trung điểm I của MN là $I\left(\frac{a+b}{2};0;0\right)$.

Do ΔAMN có $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 45^\circ$ nên ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AI \perp Ox$

Ta có $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{a+b-2}{2};0;-6\right) \Rightarrow \frac{a+b-2}{2} \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow a+b=2$.

- Câu 10.** Khảo sát về chiều cao các mẫu trang trí tượng đã bán của một cửa hàng như sau:

Chiều cao (mm)	[100;200)	[200;300)	[300;400)	[400;500)
Số lượng	35	30	20	15

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần mười).

- A. 206. B. 160,1. **C.** 106,2. D. 260,12.

Lời giải

Ta có:

Cỡ mẫu là $n = 35 + 30 + 20 + 15 = 100$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\bar{x} = \frac{35 \cdot 150 + 30 \cdot 250 + 20 \cdot 350 + 15 \cdot 450}{100} = 265.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S^2 = \frac{1}{100} [35 \cdot 150^2 + 30 \cdot 250^2 + 20 \cdot 350^2 + 15 \cdot 450^2] - 265^2 = 11275.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S = \sqrt{11275} \approx 106,2$.

- Câu 11.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0;2\pi]$ bằng

- A. 0. B. π . C. 2π . **D.** 3π .

Lời giải

Ta có $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \sin x \in [-1; 1]$

Khi đó: $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $-1 \leq k2\pi \leq 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Phương trình trở thành $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}).$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng 3π .

Câu 12. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn phương trình $5^x - 5^{-x} = 2 \cos nx$ có 2024 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $25^x + 25^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx$.

A. 4048.

B. 2024.

C. 4047.

D. 2025.

Lời giải

$$25^x + 25^{-x} = 4 + 2 \cos 2nx \Leftrightarrow 25^x + 25^{-x} - 2.5^x.5^{-x} = 2 + 2 \cos 2nx$$

$$\Leftrightarrow (5^x - 5^{-x})^2 = 4 \cos^2 nx \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 5^{-x} = 2 \cos nx & (1) \\ 5^x - 5^{-x} = -2 \cos nx & (2) \end{cases}$$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $5^x - 5^{-x} = 5^{-x} - 5^x \Leftrightarrow 5^x = 5^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $5^0 - 5^0 = 2 \cos 0 \Leftrightarrow 0 = 2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung.

Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2)

Mà (1) có 2024 nghiệm nên (2) cũng có 2024 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4048 nghiệm.

Câu 13. Biết rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4^2} + \frac{11}{4^3} + \dots + \frac{4n-1}{4^n} \right) = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

A. 20.

B. 21.

C. 22.

D. 23.

Lời giải

Bổ đề: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4^n} = 0$.

Thật vậy, với $n \geq 2$, ta có: $4^n = (1+3)^n \geq C_n^2 3^2 = \frac{9n(n-1)}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{n}{4^n} \leq \frac{2}{9(n-1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4^n} = 0$.

$$\text{Đặt } S_n = \frac{3}{4} + \frac{7}{4^2} + \frac{11}{4^3} + \dots + \frac{4n-1}{4^n}.$$

Ta có:

$$S_n - \frac{1}{4} S_n = \frac{3}{4} + \frac{4}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{4}{4^n} - \frac{4n-1}{4^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} S_n = -\frac{1}{4} + \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

Mặt khác:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}.$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

$$\lim \frac{4n-1}{4^{n+1}} = \lim \frac{n}{4^n} - \lim \frac{1}{4^{n+1}} = 0.$$

Do đó:

$$\lim \frac{3}{4} S_n = \lim \left(-\frac{1}{4} \right) + \lim \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) - \lim \frac{4n-1}{4^{n+1}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \lim S_n = -\frac{1}{4} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lim S_n = \frac{13}{9}.$$

Câu 14. Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

A. $\frac{397}{1728}.$

B. $\frac{1385}{1728}.$

C. $\frac{1331}{1728}.$

D. $\frac{1603}{1728}.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $\Omega = \{(x_i; y_i) : x_i = \overline{1, \dots, 6}, y_i \in \{S; N\}, i = 1, 2, 3\}$ là biến cố xuất hiện trong 3 lần gieo, với $(x_i; y_i)$ lượt gieo thứ i con súc sắc xuất hiện mặt x_i chấm, đồng xu xuất hiện mặt y_i với $x_i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $y_i \in \{S; N\}$.

Khi gieo 3 lần, con súc sắc và đồng xu xuất hiện mặt bất kì ta có: gieo lần 1 (lần 2 hoặc lần 3) có 6.2 số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = (6.2)^3 = 1728$. Gọi A là biến cố trong 3 lượt gieo ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp. Khi đó biến cố A xảy ra các khả năng như sau:

TH1: Gọi biến cố A_1 chỉ có một lần gieo kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp thì A_1 có số phần tử là $n(A_1) = 11^2 \cdot 3 = 363$ (do biến cố $(1; S)$ xuất hiện ở một trong 3 lần gieo có $C_3^1 = 3$ khả năng xảy ra, hai lần gieo còn lại không xuất hiện biến cố đó mỗi lần còn 11 khả năng xảy ra).

TH2: Gọi biến cố A_2 có 2 lần gieo kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp thì A_2 có số phần tử là $n(A_2) = 3 \cdot 11 = 33$ (do 2 trong 3 lần gieo xuất hiện biến cố $(1; S)$ có $C_3^2 = 3$ khả năng, lần gieo còn lại không xuất hiện biến cố đó có 11 khả năng xảy ra).

TH3: Gọi biến cố A_3 cả 3 lần gieo kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp thì A_3 có số phần tử là $n(A_3) = 1$.

$$\text{Do đó } n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 363 + 33 + 1 = 397.$$

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{397}{1728}.$$

- Câu 15.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3}{3x^2 + x + 2}$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB luôn đi qua điểm $E(1; 2)$. Khi đó
- A.** $m < -10$. **B.** $m \in (-10; 0)$. **C.** $m \in (0; 8)$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

Chọn B

+) Tập xác định $D = R$.

$$+) \text{ Đạo hàm } y' = \frac{(1+6m)x^2 - 14x - 4m - 3}{(3x^2 + x + 2)^2} = \frac{g(x)}{(3x^2 + x + 2)^2}.$$

+) Hàm số có 2 điểm cực trị $A, B \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow g(x) = (1+6m)x^2 - 14x - 4m - 3 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = 24m^2 + 22m + 52 > 0 \\ 1+6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{6}.$$

$$+) \text{ Tung độ điểm cực trị thỏa mãn } y_1 = \frac{u(x_1)}{v(x_1)}.$$

$$\text{Mà } y'(x_1) = 0 \Leftrightarrow u'(x_1) \cdot v(x_1) - v'(x_1) \cdot u(x_1) = 0 \Rightarrow \frac{u(x_1)}{v(x_1)} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)}.$$

$$\text{Khi đó } y_1 = \frac{2x_1 - 2m}{6x_1 + 1}; y_2 = \frac{2x_2 - 2m}{6x_2 + 1}.$$

$$\text{Ta dùng kỹ thuật thêm bớt như sau: Tìm } a \text{ sao cho } y_1 = \frac{2x_1 - 2m + a \cdot g(x_1)}{6x_1 + 1} = px_1 + q.$$

$$\text{Chọn sao cho tử số nhận nghiệm } x = -\frac{1}{6}, \text{ ta được } a = -\frac{12}{23}.$$

$$\text{Từ đó ta có } y_1 = \frac{2x_1 - 2m - \frac{12}{23} \cdot g(x_1)}{6x_1 + 1} = -\frac{2}{23}(6m+1)x_1 + \frac{2}{23}m + \frac{36}{23},$$

$$\text{Tương tự } y_2 = \frac{2x_2 - 2m - \frac{12}{23} \cdot g(x_2)}{6x_2 + 1} = -\frac{2}{23}(6m+1)x_2 + \frac{2}{23}m + \frac{36}{23}.$$

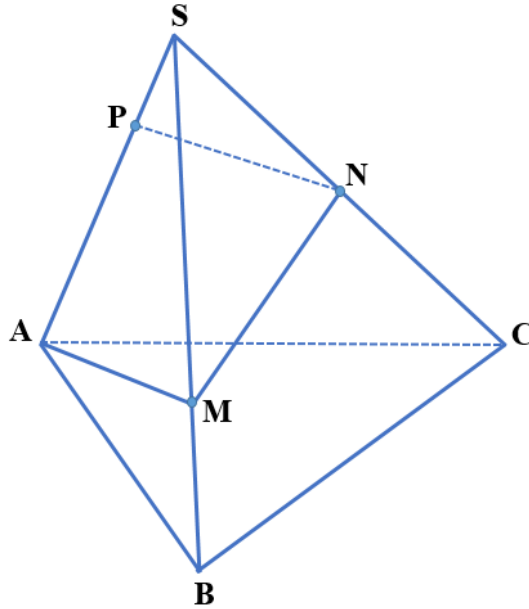
Do đó đường thẳng d đi qua 2 điểm cực trị A, B có phương trình là

$$d: y = -\frac{2}{23}(6m+1)x + \frac{2}{23}m + \frac{36}{23}.$$

$$\text{Mà } E(1; 2) \in d \Rightarrow m = -\frac{6}{5} \text{ (thỏa mãn).}$$

- Câu 16 .** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $SA = a$. Diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2}{4}$. Gọi P là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SP}$. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = AM + MN + NP$ bằng
- A. $\frac{a\sqrt{8}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D. $\frac{a\sqrt{10}}{3}$.**

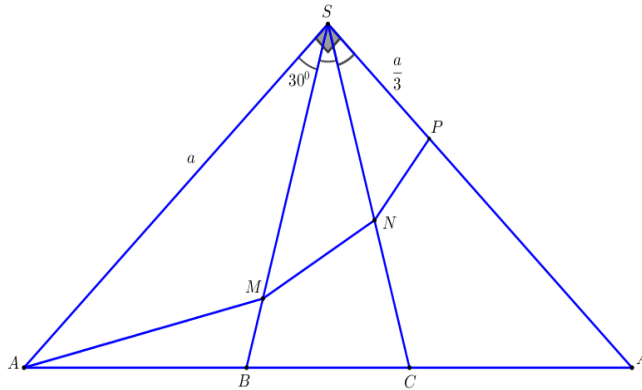
Lời giải



Ta có diện tích tam giác SAB là:

$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot \sin \widehat{ASB} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin \widehat{ASB} \Leftrightarrow \sin \widehat{ASB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ.$$

Ta trải các mặt bên của hình chóp trên cùng một mặt phẳng.



Khi đó $AM + MN + NP \geq AP$.

Dấu bằng xảy ra khi A, M, N, P thẳng hàng.

Mà $\widehat{ASB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ASP} = 90^\circ$.

Xét tam giác vuông ASP có $AP = \sqrt{SA^2 + SP^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $(AM + MN + NP)$ bằng $\frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Câu 17. Cho $A(1; 2; 0); B(3; -1; 2); C(1; 2; 2); D(3; -1; 1); M \in (Oxy)$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2 - \frac{1}{4}MD^4.$$

A. 5.

B. $4\sqrt{2}$.

C. 6.

D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

+) Gọi $I(x_I; y_I; z_I)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, (1).

$$+) (1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + 2x_B - x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{2} \\ z_I = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1 + 2 \cdot 3 - 1}{2} = 3 \\ y_I = \frac{2 + 2 \cdot (-1) - 2}{2} = -1 \\ z_I = \frac{0 + 2 \cdot 2 - 2}{2} = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow I(3; -1; 1)$. Suy ra $I \equiv D$.

+) Ta có $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2 - \frac{1}{4}MD^4$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - \frac{1}{4}MI^4 = 2MI^2 - \frac{1}{4}MI^4 + (IA^2 + 2IB^2 - IC^2).$$

+) $\overrightarrow{AI} = (2; -3; 1); \overrightarrow{BI} = (0; 0; -1); \overrightarrow{CI} = (2; -3; -1)$. Suy ra $IA^2 + 2IB^2 - IC^2 = 14 + 2 - 14 = 2$

+) Đặt $MI^2 = x$. Ta có $T = 2x - \frac{1}{4}x^2 + 2$.

+) Gọi H là hình chiếu của I trên (Oxy) . Ta có $MI \geq IH = 1, \forall M \in (Oxy)$.

+) Xét hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2$, với $x \in [1; +\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Bảng biến thiên:

x	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{15}{4}$	6	$-\infty$

Vậy $\max T = 6$, khi $x = 4$, hay $MI = 2$ và $M \in (Oxy)$.

Câu 18. Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x^2 + y^2 \geq 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $mx + 3y + 3m - 12 = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán?

A. 5.

B. 6.

C. 11.

D. 10.

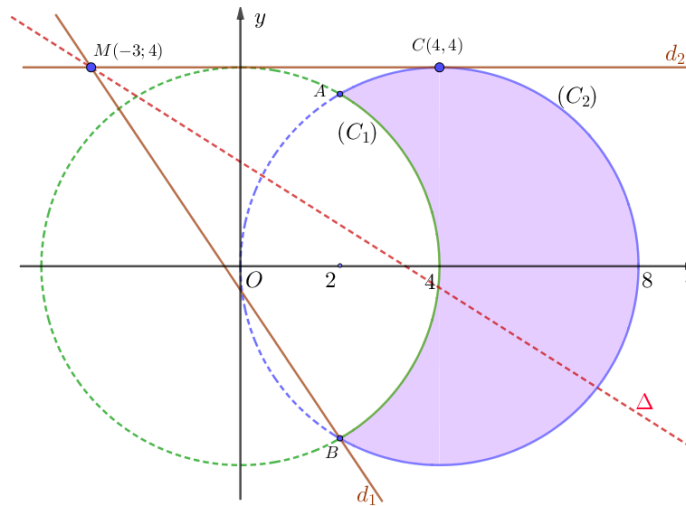
Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 16$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trên hay phía ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 16$.

Do $(x; y) = (0; 0)$ không thỏa mãn điều kiện đề bài nên $x^2 + 2y^2 + 1 > 1$.

Khi đó $\log_{x^2+2y^2+1}(y^2 + 8x + 1) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 1 \leq y^2 + 8x + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x \leq 0$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trong hoặc trên đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 - 8x = 0$.

Vậy tập hợp bộ số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là các điểm nằm trong miền tô đậm.



Nhận xét:

Đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm phân biệt $A(2; 2\sqrt{3}), B(2; -2\sqrt{3})$;

Đường thẳng $\Delta: mx + 3y + 3m - 12 = 0$ luôn đi qua điểm cố định $M(-3; 4)$ và có hệ số góc

$$k_{\Delta} = -\frac{m}{3}.$$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm M và B suy ra $\overrightarrow{MB} = (5; -2\sqrt{3} - 4)$ nên hệ số góc của

đường thẳng $d_1: k_{d_1} = \frac{-2\sqrt{3} - 4}{5}$; d_2 là tiếp tuyến của đường tròn (C_2) đi qua $M(-3; 4)$ và tiếp

xúc với (C_2) tại điểm $C(4; 4)$ nên hệ số góc của đường thẳng $d_2: k_{d_2} = 0$.

$$\text{Để tồn tại ít nhất một cặp } (x; y) \text{ thì } k_{d_1} \leq k_{\Delta} \leq k_{d_2} \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{3} - 4}{5} \leq \frac{-m}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{12 + 6\sqrt{3}}{5}.$$

Do m là số nguyên nên $m \in \{0;1;2;3;4\}$.

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 4a$, $BC = 3\sqrt{2}a$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^\circ$. Sin góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

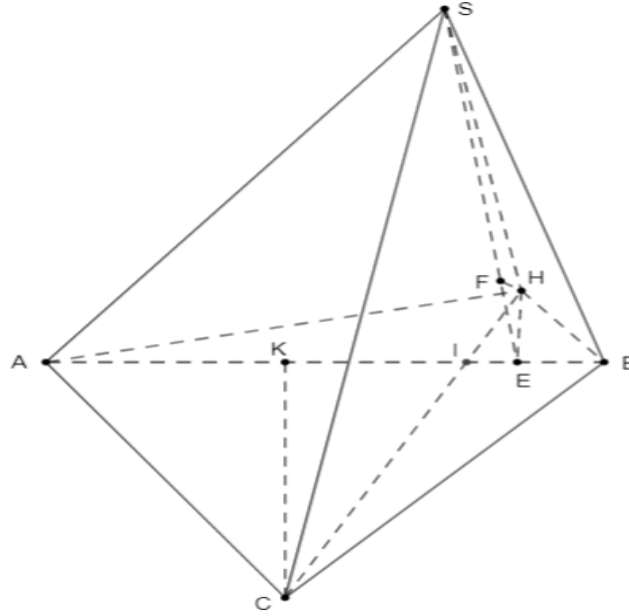
A. $\frac{4\sqrt{7}a^3}{7}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $\sqrt{2}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AC$ mà $SA \perp AC$
 $\Rightarrow AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp HA$

Tương tự, ta có $HB \perp BC$ nên $AHBC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính HC .

Xét $\triangle ABC$ có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = (4a)^2 + (3\sqrt{2}a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 3\sqrt{2}a \cdot \cos 45^\circ = 10a^2.$$

$$\text{Hạ } CK \perp AB \Rightarrow \triangle KCB \text{ vuông cân tại } K \Rightarrow CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = 3a.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK = \frac{1}{2} 4a \cdot 3a = 6a^2.$$

Do $AHBC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính HC nên ta có:

$$HC = 2R = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{\sqrt{10}a}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{5}a.$$

$$\text{Do } \triangle HBC \text{ vuông tại } B \Rightarrow HB^2 = HC^2 - BC^2 = (2\sqrt{5}a)^2 - (3\sqrt{2}a)^2 = 2a^2 \Rightarrow HB = \sqrt{2}a.$$

$$\text{Kẻ } HE \perp AB \Rightarrow \triangle HEB \text{ vuông cân tại } E \Rightarrow HE = \frac{HB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = a.$$

$$\text{Gọi } I = HC \cap AB \Rightarrow I = HC \cap (SAB).$$

$$\Rightarrow \frac{d_{(C,(SAB))}}{d_{(H,(SAB))}} = \frac{IC}{IH} = \frac{CK}{HE} = \frac{3a}{a} = 3.$$

$$\text{Ta có: } \sin((SAB), (SBC)) = \frac{d_{(C,(SAB))}}{d_{(C,SB)}} = \frac{d_{(C,(SAB))}}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow d_{(C,(SAB))} = 3\sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3a}{2}.$$

$$\Rightarrow d_{(H,(SAB))} = \frac{d_{(C,(SAB))}}{3} = \frac{\frac{3a}{2}}{3} = \frac{a}{2}.$$

Hạ $HF \perp SE (F \in SE)$

$$\text{Do } \begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp HE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow HF = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HF^2} - \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow HS^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 6a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Câu 20 . Có hai rổ bóng riêng biệt chỉ chứa hai loại bóng Đỏ và Xanh. Biết tổng số bóng của hai rổ là 24 và rổ nào cũng chứa cả hai màu. Lấy ngẫu nhiên mỗi rổ một quả bóng thì xác suất để được cả hai quả bóng đều màu Đỏ là $\frac{4}{15}$. Hỏi xác suất để được cả hai quả đều màu Xanh có thể bằng:

A. $\frac{2}{9}$.

B. $\frac{5}{18}$.

C. $\frac{11}{15}$.

D. $\frac{7}{15}$.

Lời giải

Gọi số bóng ở hai rổ lần lượt là a, b ($a, b \in \mathbb{N}, a \geq 2, b \geq 2$).

Gọi số bóng Đỏ ở hai rổ lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}, 1 \leq x < a, 1 \leq y < b$).

Lấy ngẫu nhiên mỗi rổ một quả bóng thì xác suất để được cả hai quả bóng đều màu Đỏ là $\frac{4}{15}$ nên

$$\text{ta có: } \frac{xy}{ab} = \frac{4}{15}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} a + b = 24 & (1) \\ a \cdot b = 15k (k \in \mathbb{N}^*) & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta thấy a hoặc b chia hết cho 3 và từ (1) ta có $(a + b)$ chia hết cho 3 nên suy ra cả a và b chia hết cho 3 (*).

Từ (2) ta thấy a hoặc b chia hết cho 5 nên kết hợp (*) ta suy ra a hoặc b chia hết cho 15.

Kết hợp với (1) ta suy ra $a = 15, b = 9$ (hoặc ngược lại).

$$\text{Vì } \frac{xy}{ab} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \frac{xy}{15.9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow xy = 36.$$

Ta có 3 trường hợp xảy ra:

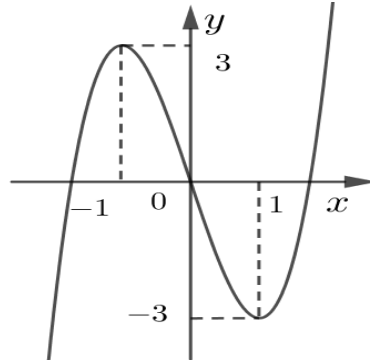
Trường hợp 1: $x = 12, y = 3$ thì xác suất lấy hai quả đều màu xanh là: $\frac{3.6}{15.9} = \frac{2}{15}$ (loại).

Trường hợp 2: $x = 6, y = 6$ thì xác suất lấy hai quả đều màu xanh là: $\frac{9.3}{15.9} = \frac{1}{5}$ (loại).

Trường hợp 3: $x = 9, y = 4$ thì xác suất lấy hai quả đều màu xanh là: $\frac{6.5}{15.9} = \frac{2}{9}$ (nhận).

PHẦN II (7.2đ). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a) , b) , c) , d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (**Chọn đúng 1 ý được 0,12 điểm; đúng 2 ý được 0,3 điểm; đúng 3 ý được 0,6 điểm; đúng 4 ý được 1,2 điểm**)

Câu 1. Cho hàm số $y = h(x) = f'(x)$ là hàm số đa thức bậc ba và có đồ thị như hình sau:



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $h(3) = 18$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos x\right)$ bằng 3.

c) Hàm số $g(x) = f(x^3 + 1) + \frac{3}{2}x^6 + 3x^3 + 2025$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

d) Nếu $f(0) = 0$ thì số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x^4) - x^2|$ là 5.

Lời giải

a) Sai.

Do $h(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = \pm 1$ nên $h(x)$ có dạng $h(x) = k(x^3 - 3x)$. Mà

$$h(1) = -3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } h(x) = \frac{3}{2}(x^3 - 3x) \Rightarrow h(3) = 27.$$

b) Sai.

$$\text{Ta có: } u = \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos x = \frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ nên suy ra } u \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\text{Vậy } y = h\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\cos x\right) = h(u) \text{ với } u \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

Từ đồ thị suy ra $\max_{\left[-\frac{1}{2}; 1\right]} h(u) = h\left(-\frac{1}{2}\right) < 3$.

c) Đúng.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3 + 1) + 9x^5 + 9x^2 = 3x^2 [f'(x^3 + 1) + 3(x^3 + 1)]$.

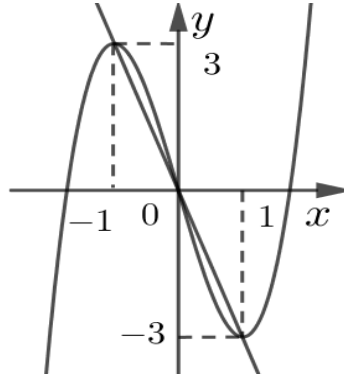
Xét: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 [f'(x^3 + 1) + 3(x^3 + 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ f'(x^3 + 1) + 3(x^3 + 1) = 0 \end{cases}$.

Với $x^2 = 0$ là nghiệm kép.

Nên xét: $f'(x^3 + 1) + 3(x^3 + 1) = 0$

Đặt: $x^3 + 1 = t \Rightarrow f'(t) + 3t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -3t$.

Vẽ đường thẳng: $y = -3t$.



Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = -3t$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(t)$ tại 3 điểm: $(-1; 3), (0; 0), (1; -3)$.

Khi đó: $f'(t) = -3t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Do đó: $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(t) + 3t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ 0 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 < -1 \\ 0 < x^3 + 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt[3]{2} \\ -1 < x < 0 \end{cases}$.

Do đó trên khoảng $(-1; 0)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến.

d) Đúng.

Xét hàm số $p(x) = f(x^4) - x^2$

$\Rightarrow p'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 2x$

Cho $p'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 f'(x^4) - 2x = 0 \Leftrightarrow 4x^3 \left(f'(x^4) - \frac{1}{x^2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ f'(x^4) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^4) = \frac{1}{x^2} (1) \end{cases}$$

Giải (1): Đặt $t = x^4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{t}}; (1) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$

Khi vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $y = f'(t)$ thì hai đồ thị này cắt nhau tại một điểm phân biệt tại góc phần tư thứ 1, gọi giao điểm này là

$$t_1 > 0 \Rightarrow x^4 = t_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{t_1} \\ x_2 = -\sqrt[4]{t_1} \end{cases}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{t_1}$		0		$\sqrt[4]{t_1}$	$+\infty$	
$p'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$p(x)$	$+\infty$				0			$+\infty$

The graph of $p(x)$ is a W-shaped curve. It starts at $+\infty$ for $x \rightarrow -\infty$, decreases to a local minimum at $x = -\sqrt[4]{t_1}$, increases to a local maximum at $x = 0$, decreases to another local minimum at $x = \sqrt[4]{t_1}$, and finally increases to $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. Arrows on the curve segments indicate this direction of travel.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $p(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, và có 2 cực trị không nằm trên trục hoành, do đó phương trình $y = |p(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$.

a) Điểm $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

b) Khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $OD = \sqrt{5}$.

c) Điểm $H(a;b;c)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC . Khi đó $3a + 6b + 9c = 6$.

d) Biết điểm $M(x;y;z)$ để biểu thức $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $4x - 2y + z = -5$.

Lời giải

a) **Sai.**

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{0+1-1}{3}; \frac{0+1+0}{3}; \frac{-1+0+1}{3}\right) \text{ hay } G\left(0; \frac{1}{3}; 0\right)$$

b) **Đúng.**

Gọi $D(x;y;z)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 - x \\ 1 = 0 - y \\ 1 = 1 - z \end{cases} \Rightarrow D(2; -1; 0) \Rightarrow OD = \sqrt{5}.$$

c) **Đúng.**

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; -1; 1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC .

Suy ra $\overrightarrow{BH} = (x+1; y-1; z)$.

$\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$, do đó $x+1=2t; y-1=-t; z=t$, suy ra $H(2t-1; -t+1; t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (2t-1; -t+1; t+1)$.

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2.(2t-1) - (-t+1) + t+1 = 0 \Leftrightarrow 6t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $H(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ nên $3a+6b+9c=6$.

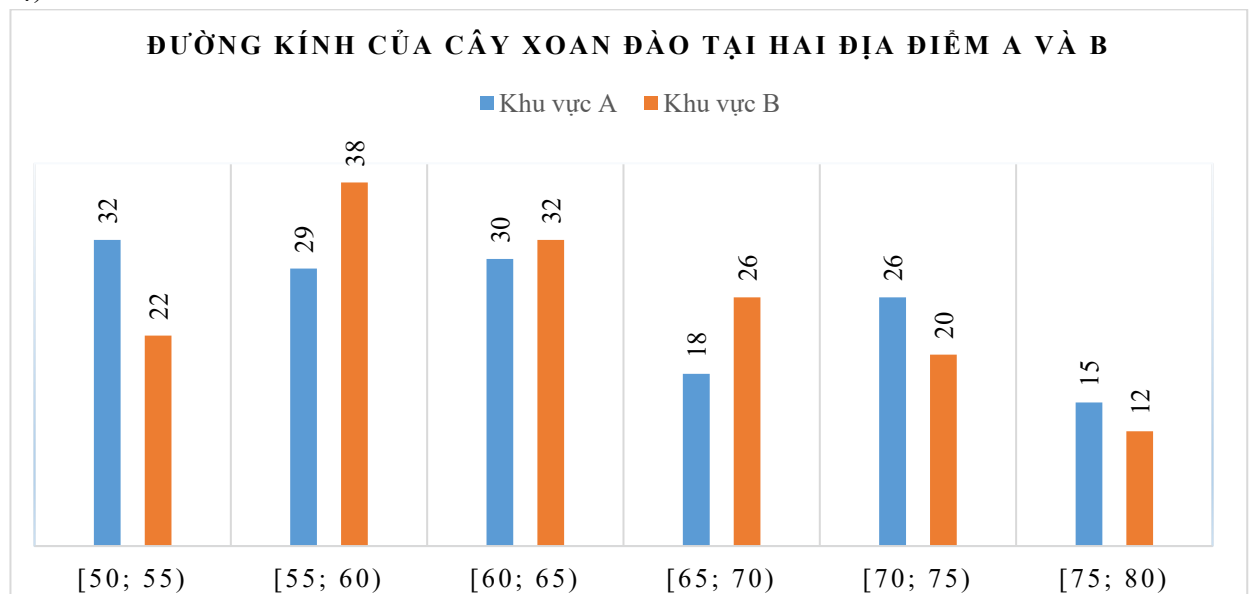
d) Đúng.

$$\begin{aligned} M(x; y; z) &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x; y; z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] \\ &\quad - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 5 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1$, khi đó $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Vậy $P = 4x - 2y + z = -3 - 1 - 1 = -5$.

Câu 3. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra đường kính thân của một số cây xoan đào 8 năm tuổi (đơn vị: cm) của một giống cây xoan đào ở hai địa điểm A và B; (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B bằng nhau.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B lớn hơn khu vực A;
- c) Tổng phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B là 126.
- d) Dựa theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì các cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A có đường kính đồng đều hơn khu vực B.

Lời giải

Ta có bảng sau

Đường kính (cm)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)	[70;75)	[75;80)
Giá trị đại diện	52,5	57,5	62,5	67,5	72,5	77,5
Khu vực A	32	29	30	18	26	15
Khu vực B	22	38	32	26	20	12

a) Đúng

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A là $80 - 50 = 30$ (cm).

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B là $80 - 50 = 30$ (cm).

Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B bằng nhau.

b) Sai

Cỡ mẫu $n = 150$

Gọi $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{150}$ là mẫu số liệu gốc gồm 150 cây xoan đào ở khu vực A.

Ta có $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{32} \in [50; 55)$; $x_{33}; \dots; x_{61} \in [55; 60)$; $x_{62}; \dots; x_{91} \in [60; 65)$; $x_{92}; \dots; x_{109} \in [65; 70)$; $x_{110}; \dots; x_{135} \in [70; 75)$; $x_{136}; \dots; x_{150} \in [75; 80)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{38} \in [55; 60)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 55 + \frac{\frac{150}{4} - 32}{29} (60 - 55) = \frac{3245}{58}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{113} \in [70; 75)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 70 + \frac{\frac{3 \cdot 150}{4} - 109}{26} (75 - 70) = \frac{3675}{52}$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A là

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \frac{3675}{52} - \frac{3245}{58} \approx 15$$

Gọi $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{150}$ là mẫu số liệu gốc gồm 150 cây xoan đào ở khu vực B;

Ta có $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{22} \in [50; 55); \quad x_{23}; \dots; x_{60} \in [55; 60); \quad x_{61}; \dots; x_{92} \in [60; 65); \quad x_{93}; \dots; x_{118} \in [65; 70);$
 $x_{119}; \dots; x_{128} \in [70; 75); \quad x_{129}; \dots; x_{150} \in [75; 80)$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{38} \in [55; 60)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 55 + \frac{\frac{150}{4} - 22}{38 - 22} (60 - 55) = \frac{4335}{76}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{113} \in [65; 70)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 65 + \frac{\frac{3 \cdot 150}{4} - 92}{26 - 92} (70 - 65) = \frac{3585}{52}$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B là

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = \frac{3585}{52} - \frac{4335}{76} = \frac{2940}{247} \approx 12$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B nhỏ hơn khu vực A.

c) Sai

Xét mẫu số liệu của khu vực A:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{52,5 \cdot 32 + 57,5 \cdot 29 + 62,5 \cdot 30 + 67,5 \cdot 18 + 72,5 \cdot 26 + 77,5 \cdot 15}{150} = \frac{1897}{30}$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{150} (52,5^2 \cdot 32 + 57,5^2 \cdot 29 + 62,5^2 \cdot 30 + 67,5^2 \cdot 18 + 72,5^2 \cdot 26 + 77,5^2 \cdot 15) - \left(\frac{1897}{30} \right)^2 = \frac{15404}{225}$$

Xét mẫu số liệu của khu vực B:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{52,5 \cdot 22 + 57,5 \cdot 38 + 62,5 \cdot 32 + 67,5 \cdot 26 + 72,5 \cdot 20 + 77,5 \cdot 12}{150} = \frac{379}{6}$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{150} (52,5^2 \cdot 22 + 57,5^2 \cdot 38 + 62,5^2 \cdot 32 + 67,5^2 \cdot 26 + 72,5^2 \cdot 20 + 77,5^2 \cdot 12) - \left(\frac{379}{6} \right)^2 = \frac{2024}{36}$$

Tổng phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về đường kính của cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực A và B là $\frac{2024}{36} + \frac{15404}{225} \approx 125$

d) Sai

Xét mẫu số liệu của khu vực A:

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1 = \sqrt{\frac{15404}{225}} \approx 8$$

Xét mẫu số liệu của khu vực B:

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2 = \sqrt{\frac{2024}{36}} \approx 7$$

Do $S_2 < S_1$ nên nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì các cây xoan đào 8 năm tuổi ở khu vực B có đường kính đồng đều hơn khu vực A.

Câu 4. Cho phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ (*).

a) Điều kiện xác định của phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Khi $m = 0$ thì tích các nghiệm của phương trình bằng 4.

c) Khi $m = 1$ thì phương trình có bốn nghiệm.

d) Có đúng 4 giá trị của tham số m để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng

Vì $\begin{cases} x^2 - 2x + 3 > 0 \\ 2|x-m| + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Sai

Khi $m = 0$ ta có phương trình

$$\begin{aligned} 3^{x^2-2x+1-2|x|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x|+2) &\Leftrightarrow \frac{3^{x^2-2x+1}}{3^{2|x|}} = \frac{\ln(2|x|+2)}{\ln(x^2-2x+3)} \\ &\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x|+2} \cdot \ln(2|x|+2) \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (1) suy ra

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x| + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2x \\ x^2 - 2x + 1 = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2x \\ x^2 - 2x + 1 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$$

c) Sai

$$\text{Khi } m = 1, \text{ ta có phương trình } 3^{x^2-2x+3-(2|x-1|+2)} = \frac{\ln(2|x-1|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}.$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-1|+2} \cdot \ln(2|x-1|+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ |x-1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

d) Sai

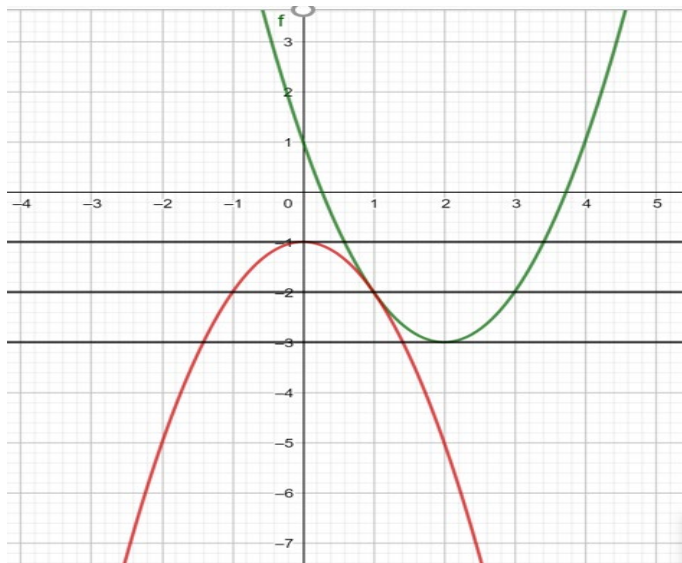
$$\text{Phương trình (*) tương đương } 3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}.$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2).$$

Xét hàm $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x - m| + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x - m| \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = x^2 - 4x + 1 \\ -2m = -x^2 - 1 \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường thẳng $y = -2m$ và 2 đồ thị $y = x^2 - 4x + 1$ và $y = -x^2 - 1$



Từ đồ thị suy ra có phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} -2m = -3 \\ -2m = -2 \\ -2m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}, m = 1, m = \frac{1}{2}$

Vậy có 3 giá trị m thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O , $SA \perp (ABCD)$

a) $AC \perp SB$.

b) Biết $SA = 2a$, $AB = a$ và I là trung điểm của SD . Khi đó cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AIC) và (SBC) bằng $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

c) Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng 3. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất bằng $27\sqrt{3}$.

d) Biết $SA = 2$, $SB = 3$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm J của SG cắt các cạnh SA , SB , SD lần lượt tại M , N , P . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} \text{ bằng } \frac{18}{11}.$$

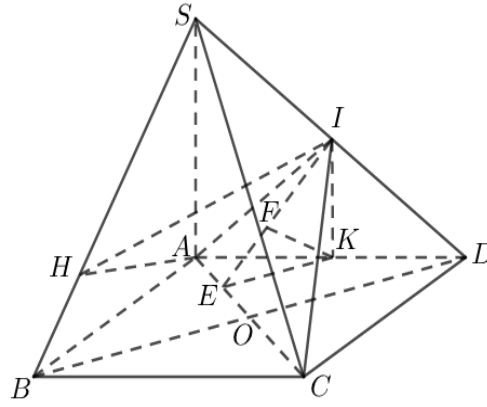
Lời giải

a) Sai

Giả sử $AC \perp SB$. Mà $AC \perp BD$.

Do đó $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO$ (vô lý).

b) Sai



Do $\widehat{SAD} = \widehat{SOD} = 90^\circ$ nên I là trung điểm của SD thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AOD$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SB thì $AH \perp (SBC)$ và $AH = \frac{AS \cdot SB}{\sqrt{AS^2 + SB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $\left(\widehat{(ACI), (SBC)} \right) = 90^\circ - \left(\widehat{(ACI), AH} \right)$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sin \left(\widehat{(ACI), AH} \right) = \frac{d(H, (ACI))}{AH} = \frac{d(D, (ACI))}{AH}.$$

Gọi K là trung điểm của AD thì $IK \perp (ABCD)$ và $IK = a$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của K lên AC, IE thì $KF \perp (ACI)$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KE^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{16}{BD^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow KF = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{d(D, (ACI))}{AH} = \frac{2d(K, (ACI))}{AH} = \frac{2 \cdot KF}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

c) Sai

Đặt $AB = AD = x$; $SA = y$. Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}x^2y$.

Vì AB, AC, AS đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{d^2[C, (SBD)]} = \frac{1}{d^2[A, (SBD)]} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{x^4y^2}}.$$

$$\text{Suy ra } x^2y \geq 81\sqrt{3} \longrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}x^2y \geq 27\sqrt{3}.$$

d) Đúng

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABD \longrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$$

$$\longrightarrow \frac{SG}{SJ} \cdot \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{3} \left(\frac{SA}{SM} \overrightarrow{SM} + \frac{SB}{SN} \overrightarrow{SN} + \frac{SD}{SP} \overrightarrow{SP} \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{6} \left(\frac{SA}{SM} \overrightarrow{SM} + \frac{SB}{SN} \overrightarrow{SN} + \frac{SD}{SP} \overrightarrow{SP} \right).$$

$$\text{Do } J, M, N, P \text{ đồng phẳng nên } \frac{1}{6} \left(\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP} = 6.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có

$$\left(\frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}\right)(SA^2 + SB^2 + SD^2) \geq \left(\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SP}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } T \geq \frac{36}{SA^2 + SB^2 + SD^2} = \frac{18}{11}.$$

Câu 6. Một hộp đựng 100 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 100. Chọn từ hộp ra bốn thẻ.

a) Xác suất của biến cố A : “Chọn được bốn thẻ đều ghi số chẵn” là $P(A) = \frac{49}{198}$.

b) Xác suất của biến cố B : “Chọn được bốn thẻ trong đó có ít nhất 2 thẻ ghi số lẻ” là $P(B) = \frac{1}{3}$.

c) Xác suất của biến cố C “Tổng các số ghi trên 4 thẻ là một số chẵn” là $P(C) = \frac{1601}{3201}$.

d) Xác suất của biến D “Tổng lập phương của bốn số chia hết cho 4” là 0,28 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Chọn từ hộp ra bốn thẻ, không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega) = C_{100}^4$.

Trong 100 thẻ có 50 thẻ ghi số chẵn và 50 thẻ ghi số lẻ.

a) Sai

Ta có $n(A) = C_{50}^4$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{50}^4}{C_{100}^4} = \frac{188}{3201}$. Vậy a) **sai**.

b) Sai

Để biến cố B xảy ra ta làm phần bù: Có 2 TH: có 1 số lẻ và không có số lẻ nào.

Ta có $n(B) = C_{100}^4 - C_{50}^3 \cdot C_{50}^1 - C_{50}^4$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{n(B)}{C_{100}^4} = \frac{2213}{3201}$. Vậy b) **sai**.

c) Đúng

Để biến cố C xảy ra có 3 TH sau:

TH1: cả 4 số chẵn, TH2: 2 số chẵn, 2 số lẻ, TH3: cả 4 số lẻ

Xác suất của biến cố C là $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{C_{50}^4 + C_{50}^2 \cdot C_{50}^2 + C_{50}^4}{C_{100}^4} = \frac{1601}{3201}$.

d) Đúng

Nhận xét:

Nếu $n = 4k$ thì $n^3 : 4$, $n = 4k + 1$ thì n^3 chia 4 dư 1, $n = 4k + 2$ thì n^3 chia hết cho 4, $n = 4k + 3$ thì n^3 chia 4 dư 3 ($n, k \in \mathbb{N}^*$).

Trong 100 thẻ có 50 thẻ chia 4 dư 0 hoặc 2, số thẻ chia 4 dư 1 là 25, chia 4 dư 3 là 25.

Xác suất cần tính là: $P(D) = \frac{C_{50}^4 + C_{25}^4 + C_{25}^2 \cdot C_{25}^2 + C_{25}^2 \cdot 25 \cdot 25}{C_{100}^4} \approx 0,28$

PHẦN III (4,8đ). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 (trả lời đúng 1 câu được 0,8đ)

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Biết rằng trên (C) có những điểm mà tiếp tuyến của đồ thị tại mỗi điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{5}{2}$ lần bán kính đường tròn nội tiếp (I là giao điểm 2 đường tiệm cận). Tính tổng hoành độ của tất cả những điểm đó?

Lời giải

Trả lời: -4

Tiếp tuyến tại điểm bất kỳ $M(x_o, y_o) \in (C)$ bất kỳ có dạng $\Delta: y = \frac{3x}{(x_o+1)^2} + \frac{x_o^2 - 4x_o - 2}{(x_o+1)^2}$.

Giao điểm hai tiệm cận là $I(-1; 1)$.

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $A\left(-1; \frac{x_o-5}{x_o+1}\right)$ và

$A(2x_o+1; 1)$.

Khi đó $IA = \frac{6}{|x_o+1|}$, $IB = 2|x_o+1|$, $AB = 2\sqrt{(x_o+1)^2 + \frac{9}{(x_o+1)^2}}$.

Diện tích tam giác IAB là

$$S = pr = \frac{IA \cdot IB \cdot AB}{4R} \Leftrightarrow 4pRr = IA \cdot IB \cdot AB \Leftrightarrow \frac{8}{5}pR^2 = 12AB \Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{AB^2}{4} \cdot p = 3AB \Leftrightarrow AB \cdot p = 30.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_o+1)^2 + \frac{9}{(x_o+1)^2}} \left(\frac{3}{|x_o+1|} + |x_o+1| + \sqrt{(x_o+1)^2 + \frac{9}{(x_o+1)^2}} \right) = 15$$

Đặt $t = |x_o+1| + \frac{3}{|x_o+1|}$, $t \geq 2\sqrt{3}$, phương trình trên trở thành

$$\sqrt{t^2 - 6}(t + \sqrt{t^2 - 6}) = 15 \Leftrightarrow 6\sqrt{t^2 - 6} = 15(t - \sqrt{t^2 - 6}) \Leftrightarrow 7\sqrt{t^2 - 6} = 5t \Leftrightarrow t = \frac{7}{2}$$

Giải phương trình $\frac{3}{|x_o+1|} + |x_o+1| = \frac{7}{2}$ ta được các nghiệm $x_o = 1, x_o = -3, x_o = \frac{1}{2}, x_o = -\frac{5}{2}$.

Suy ra có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $M_1\left(1; -\frac{1}{2}\right), M_2\left(-3; \frac{5}{2}\right), M_3\left(\frac{1}{2}; -1\right), M_4\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$.

Tổng hoành độ của 4 điểm là -4 .

Câu 2: Mỗi lượt, ta gieo một con xúc xắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất hai lượt gieo được kết quả con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm và đồng xu xuất hiện mặt sấp (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,07

Gọi $\Omega = \{(x_i; y_i) : x_i = \overline{1, \dots, 6}, y_i \in \{S; N\}, i = 1, 2, 3\}$ là biến cố xuất hiện trong 3 lần gieo, với $(x_i; y_i)$ lượt gieo thứ i con xúc xắc xuất hiện mặt x_i chấm, đồng xu xuất hiện mặt y_i với

$x_i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $y_i \in \{S; N\}$.

Khi gieo 3 lần, con súc sắc và đồng xu xuất hiện mặt bất kì ta có: gieo lần 1 (lần 2 hoặc lần 3) có 6.2 số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = (6.2)^3 = 1728$.

Gọi A là biến cố “Trong 3 lượt gieo ít nhất hai lượt gieo được kết quả con súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm và đồng xu xuất hiện mặt sấp”.

TH1: Gieo được 1 lần xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm và đồng xu xuất hiện mặt sấp có xác suất là: $2.C_3^1 \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{10}{12}\right)^2$

TH2: Không gieo được cái nào có xác suất là: $\left(\frac{10}{12}\right)^3$

Vậy xác suất cần tính là: $1 - 2.C_3^1 \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{10}{12}\right)^2 - \left(\frac{10}{12}\right)^3 = \frac{2}{27} \approx 0,07$.

Câu 3. Cho phương trình $\ln(11-x) - \log(x^2 - 4x - m) - x + m = 0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thực $x \in [2; 8]$?

Lời giải

Trả lời: 13

Điều kiện: $x^2 - 4x - m > 0 \Leftrightarrow m < x^2 - 4x \Rightarrow m < 32$.

Xét hàm số $f(x) = \ln(11-x) - \log(x^2 - 4x - m) - x + m$, ta có:

* **TH1**: $x^2 - 4x - m > 0, \forall x \in [2; 8] \Leftrightarrow m < -4$.

$$f'(x) = -\frac{1}{11-x} - \frac{2x-4}{(x^2-4x-m)\ln 10} - 1 < 0, \forall x \in [2; 8].$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $[2; 8]$.

Khi đó: PT $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $[2; 8]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(2) \geq 0 \\ f(8) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln 3 - \log(-m-4) + m - 2 \geq 0 \\ \ln 3 - \log(-m+32) + m - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

(vì với $m \leq -5$ thì $2\ln 3 - \log(-m-4) + m - 2 < 0$).

* **TH2**: $-4 \leq m < 32$.

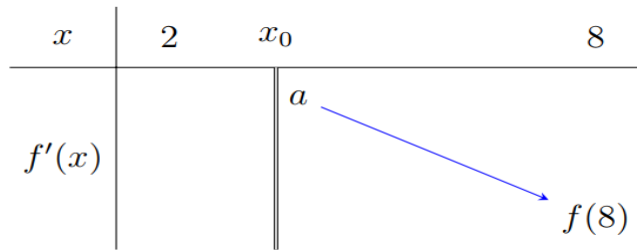
Khi đó: $x^2 - 4x - m > 0 \Leftrightarrow x > x_0$, với $x_0 = 2 + \sqrt{m+4}$.

Xét $f(x)$ trên nửa khoảng $(x_0; 8]$, ta có:

$$f'(x) = -\frac{1}{11-x} - \frac{2x-4}{(x^2-4x-m)\ln 10} - 1 < 0, \forall x \in (x_0; 8]$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $(x_0; 8]$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:



Với $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a > 0$ và $f(8) = \ln 3 - \log(-m + 32) + m - 8$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm trên nửa khoảng $(x_0; 8]$ khi $f(8) \leq 0$.

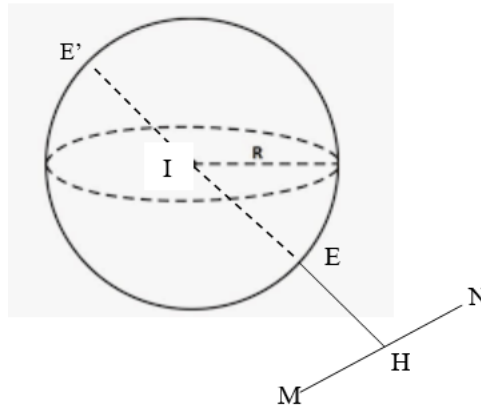
Ta lại có: $g(m) = \ln 3 - \log(-m + 32) + m - 8$ đồng biến trên $[-4; 32]$; $g(8) < 0$ và $g(9) > 0$.

Do đó, từ $g(m) \leq 0$ và $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-4; -3; \dots; 7; 8\}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên các trục là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm $I(1; 2; 2)$ biết rằng bán kính phủ sóng của trạm là 3 km . Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4; -4; 2)$ và $N(6; 0; 6)$. Gọi $E(a; b; c)$ là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm sao cho tổng khoảng cách từ E đến vị trí M và N lớn nhất. Tính $T = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 4



Xét mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 2)$, bán kính $R = 3$. Ta có $IM = IN = 3\sqrt{3} > R$ nên cả hai điểm M, N đều nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi H là trung điểm của MN suy ra $H(5; -2; 4)$ và

$$EH^2 = \frac{EM^2 + EN^2}{2} - \frac{MN^2}{4}.$$

$$\text{Ta có } (EM + EN)^2 \leq 2(EM^2 + EN^2) = 2\left(2EH^2 + \frac{MN^2}{2}\right) = 4EH^2 + MN^2.$$

Khi đó $(EM + EN)$ lớn nhất khi EH lớn nhất. Điều kiện cần để EH lớn nhất là E là giao điểm của IH với mặt cầu (S)

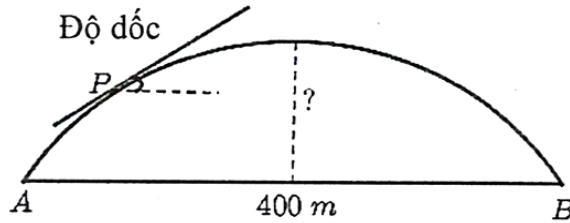
Ta có $\overrightarrow{IH} = (4; -4; 2)$. Vì $\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IH}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{IH} = (2k; -2k; k), k < 0$

Suy ra $E(1 + 2k; 2 - 2k; 2 + k)$

Lại do $IE = R = 3$ nên $(2t)^2 + (-2t)^2 + t^2 = 9 \Rightarrow t = -1$.

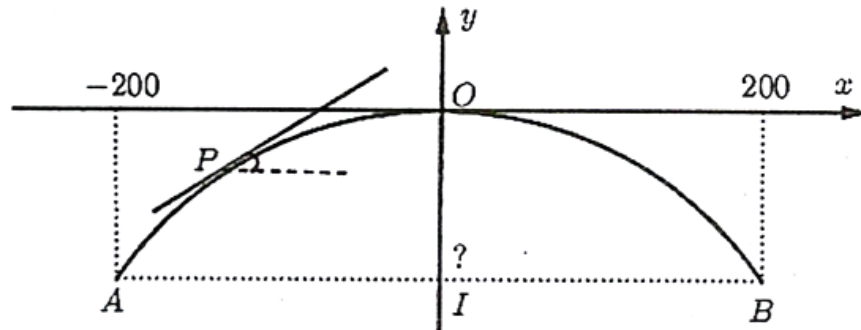
Suy ra $E(-1; 4; 1)$. Vậy $T = a + b + c = 4$.

- Câu 5.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m . Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Chiều cao lớn nhất giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phân chục)?



Lời giải

Trả lời: 17,6



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương).

Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol bằng $k = y'(x_0) = -2ax_0, -200 \leq x_0 \leq 200$.

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu (độ dốc dương) là $|k| = 2a|x| \leq 400a$.

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° nên ta có:

$$400a \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow a \leq \frac{4,408174518}{10000}.$$

Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là đoạn OI , cũng chính là độ lớn của tung độ điểm B khi a đạt giá trị lớn nhất.

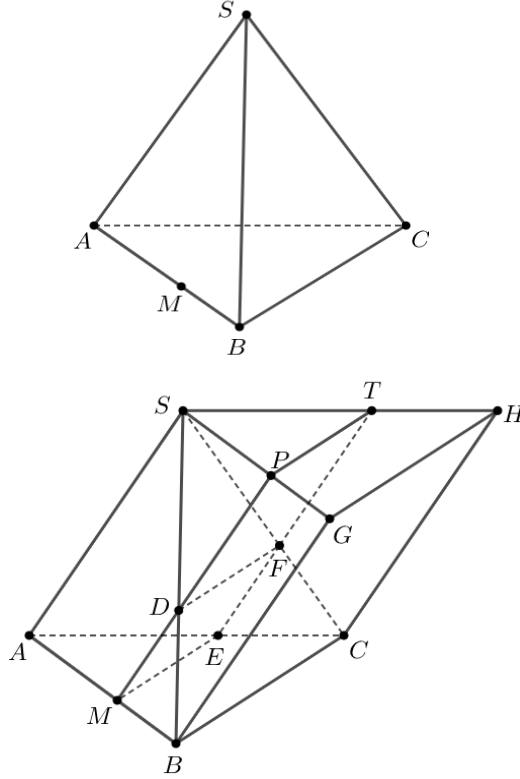
$$\text{Do đó, } OI = |-a \cdot 200^2| = 17,6(m).$$

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $17,6\text{ m}$.

- Câu 6.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng 3. Gọi M là điểm thay đổi trên cạnh AB , (P) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SA và BC , (H) là thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) . Khi M di chuyển đến vị trí để (H) là hình thoi thì (P) chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện, tính thể tích V của khối đa diện chứa đỉnh A .

Lời giải

Trả lời: 1,04



Trong (SAB) : vẽ $MD \parallel SA$ với $D \in SB$. Trong (ABC) : vẽ $ME \parallel BC$ với $E \in AC$.

Trong (SAC) : vẽ $EF \parallel SA$ với $F \in SC$.

Khi đó thiết diện tạo bởi (P) với khối chóp $S.ABC$ là hình bình hành $MDFE$.

Hình bình hành $MDFE$ là hình thoi khi $MD = ME$.

$$\text{Đặt } x = BM \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{MD}{SA} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{MD}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow MD = \frac{3x}{2}.$$

$$\text{Đồng thời ta có } \frac{MB}{AB} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2-x}{2} \Rightarrow \frac{ME}{BC} = \frac{2-x}{2} \Rightarrow \frac{ME}{2} = \frac{2-x}{2} \Rightarrow ME = 2-x.$$

$$\text{Mà } MD = ME \Rightarrow \frac{3x}{2} = 2-x \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{2}{5}.$$

Ta cần tính V_{SAMDFE} . Dựng hình lăng trụ $ABC.SGH$ như hình vẽ.

Trong $(SABG)$: Gọi $P = MD \cap SG$. Trong $(SACH)$: gọi $T = EF \cap SH$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{AME.SPT}}{V_{LT}} = \frac{S_{AME}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow V_{AME.SPT} = \frac{9}{25} V_{LT}.$$

Đồng thời ta có:

$$\frac{V_{SAMDFE}}{V_{AME.SPT}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AS}{AS} + \frac{MD}{MP} + \frac{EF}{ET} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{5} \Rightarrow V_{SDFPT} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{25} V_{LT} = \frac{27}{125} V_{LT}.$$

$$\text{Lại có } V_{LT} = 3V_{S.ABC} \Rightarrow V_{SAMDFE} = \frac{81}{125} V_{S.ABC}.$$

$$\text{Mà ta có } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(S; (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{(3)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{3},$$

$$\text{Vậy nên } V_{SAMDPE} = \frac{27\sqrt{23}}{125} \approx 1,04.$$

-----**HẾT**-----

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>