

CHƯƠNG VIII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: hai đường thẳng vuông góc; đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; góc giữa đường thẳng và mặt phẳng; góc nhị diện; hai mặt phẳng vuông góc; khoảng cách trong không gian; một số hình khối trong không gian.

BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Trong Hình 1, hai đường thẳng a, b gợi lên hình ảnh hai đường thẳng vuông góc trong không gian.



Hình 1

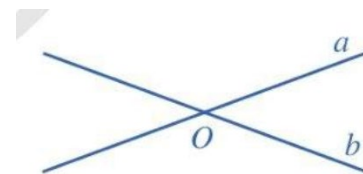
Trong không gian, thế nào là hai đường thẳng vuông góc với nhau ?

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Hoạt động 1. Trong không gian cho 2 đường thẳng a, b

- Nếu a cắt b nhau tại điểm O (Hình 2) thì góc giữa hai đường thẳng a, b xác định như thế nào?
- Nếu $a // b$ thì góc giữa hai đường thẳng a, b bằng bao nhiêu độ?
- Nếu a trùng b nhau thì góc giữa hai đường thẳng a, b bằng bao nhiêu độ?



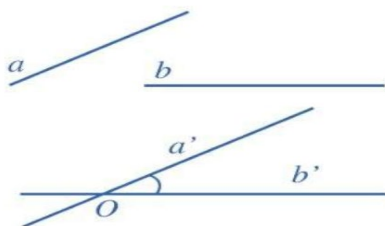
Hình 2

Lời giải

- Nếu hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O , thì góc giữa hai đường thẳng đó được xác định là góc tạo bởi hai đường thẳng a và b .
- Nếu hai đường thẳng a và b là song song ($a // b$), tức là chúng không cắt nhau, thì góc giữa hai đường thẳng này bằng 0° .
- Nếu hai đường thẳng a và b trùng nhau, tức là chúng hoàn toàn trùng nhau và không có điểm cắt nào, thì góc giữa hai đường thẳng này không xác định. Trong trường hợp này, ta thường nói rằng hai đường thẳng này là đồng quy.

Dựa trên góc giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng, ta có thể định nghĩa góc giữa hai đường thẳng trong không gian như sau:

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b . Kí hiệu (a, b) hoặc $\widehat{(a, b)}$.



Hình 3

Nhận xét:

- Góc giữa hai đường thẳng a, b không phụ thuộc vào vị trí điểm O (Hình 3). Thông thường, khi ta tìm góc giữa hai đường thẳng a, b , ta chọn O thuộc a hoặc chọn O thuộc b .
- Góc giữa hai đường thẳng a, b bằng góc giữa hai đường thẳng b, a tức là $(a, b) = (b, a)$.
- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90° .
- Nếu $a \parallel b$ thì $(a, c) = (b, c)$ với mọi đường thẳng c trong không gian.

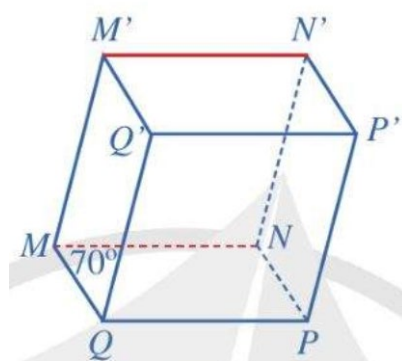
Ví dụ 1: Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$ có góc giữa hai đường thẳng MN và MQ bằng 70° (Hình 4).

a) Góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP bằng góc giữa hai đường thẳng:

- A. MN và MP
B. MN và MQ
C. MP và NP
D. NN' và NP

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP .

Lời giải

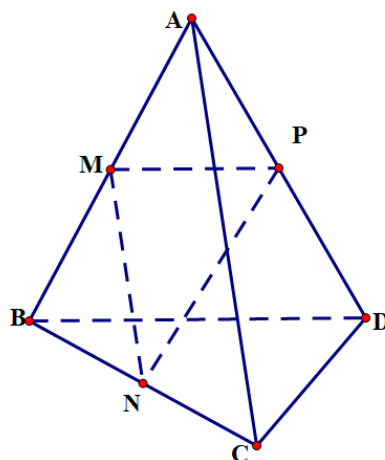


Hình 4

- a) Vì $M'N' \parallel MN$, $NP \parallel MQ$ nên góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP bằng góc giữa hai đường thẳng MN và MQ . Chọn phương án B.
- b) Vì góc giữa hai đường thẳng MN và MQ bằng 70° nên góc giữa hai đường thẳng $M'N'$ và NP bằng 70° .

Luyện tập 1. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, DA . Biết tam giác MNP đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD .

Lời giải



Vì $\triangle MNP$ đều $\Rightarrow \widehat{NMP} = 60^\circ$

Xét $\triangle ABC$ có: M là trung điểm của AB ; N là trung điểm của BC .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABC .

$\Rightarrow MN \parallel AC$.

Xét $\triangle ABD$ có: M là trung điểm của AB ; P là trung điểm của AD .

$\Rightarrow MP$ là đường trung bình của tam giác ABD

$\Rightarrow MN \parallel AC$

$$\Rightarrow (\widehat{AC, BD}) = (\widehat{MN, MP}) = \widehat{NMP} = 60^\circ$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng 60° .

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Hoạt động 2. Trong Hình 1 ở phần mở đầu, hai đường thẳng a, b gọi lên hình ảnh hai đường thẳng vuông góc. Góc giữa a và b bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Góc giữa a và b bằng 90° .

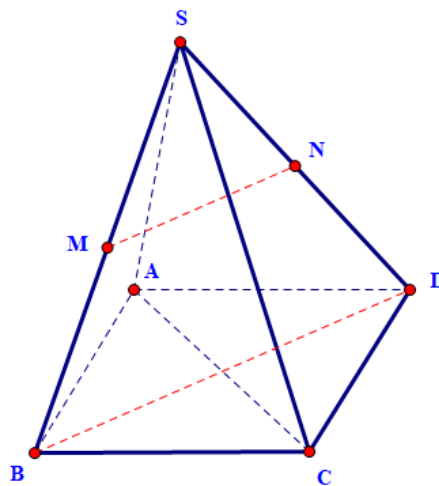
Hai đường thẳng được gọi là *vuông góc* với nhau khi giữa chúng bằng 90° .

Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta kí hiệu $a \perp b$.

Nhận xét: Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng còn lại.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SD (Hình 5). Chứng minh rằng $AC \perp MN$.

Lời giải

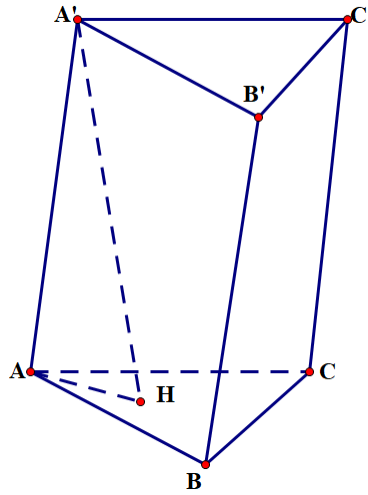


Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD nên $MN \parallel BD$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ các kết quả trên, ta có $AC \perp MN$.

Luyện tập 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng $AH \perp B'C'$.

Lời giải



Vì AH là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Mặt khác $BC \parallel B'C'$.

Từ đó suy ra $AH \perp B'C'$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

- Lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
- Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
- Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

Lời giải

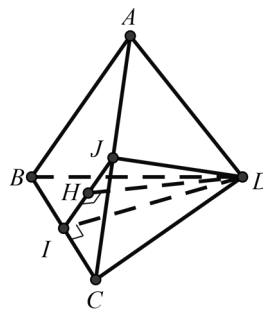
Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là a .

Gọi J là trung điểm của AC.

Ta có: $IJ \parallel AB \Rightarrow (AB, DI) = (IJ, DI) = \widehat{DIJ}$

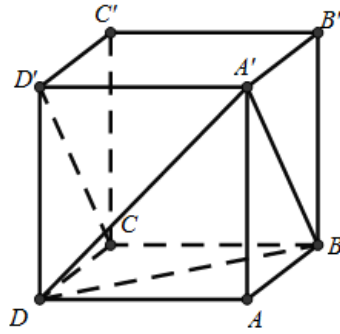
Kẻ $HD \perp IJ, (H \in IJ)$

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{DIJ} = \frac{IH}{DI} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD'.

Lời giải



Do $BA' \parallel CD'$ nên góc giữa BD và CD' là góc giữa BD và BA'

Mà $\triangle A'BD$ là tam giác đều nên góc giữa BD và BA' là 60° .

Vậy góc giữa BD và CD' là 60° .

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD . Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AC ta có: $IM = IN = a$

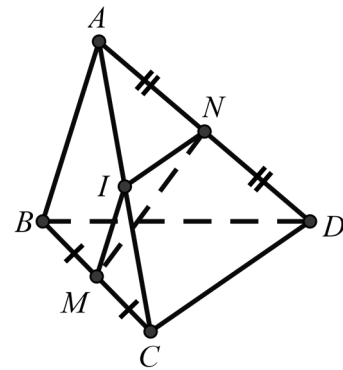
Áp dụng định lí côsin trong $\triangle IMN$:

$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2IM \cdot IN \cos \widehat{MIN}$$

$$3a^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \widehat{MIN} \Rightarrow \cos \widehat{MIN} = -\frac{1}{2}$$

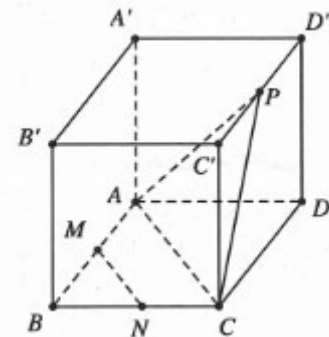
Suy ra: $\widehat{MIN} = 120^\circ$

Vậy: $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{IM, IN}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

Lời giải



Để thấy MN là đường trung bình trong tam giác ABC nên $MN \parallel AC \Rightarrow (\widehat{MN; AP}) = (\widehat{AC; AP})$.

$$\text{Lại có } AC = a\sqrt{2}, CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

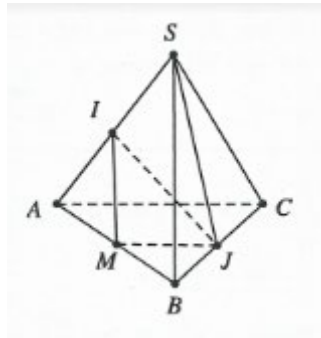
$$AP = \sqrt{A'P^2 + AA'^2} = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2 + AA'^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Do đó } \cos \widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - CP^2}{2 \cdot AP \cdot AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45^\circ = (\widehat{MN; CP}).$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC . Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB .

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB thì MI, MJ lần lượt là đường trung bình của tam giác ASB và ABC .

$$\text{Ta có: } MI = MJ = \frac{a}{2}$$

$$\text{Mặt khác } JA = JS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tam giác } JSA \text{ cân tại } J \Rightarrow JI \perp SA$$

$$\text{Khi đó } IJ = \sqrt{SJ^2 - SI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MI^2 + MJ^2 = IJ^2 \text{ nên tam giác } MIJ \text{ vuông cân tại } M$$

$$\Rightarrow (\widehat{IJ; SB}) = (\widehat{IJ; IM}) = 45^\circ$$

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian

1. Phương pháp

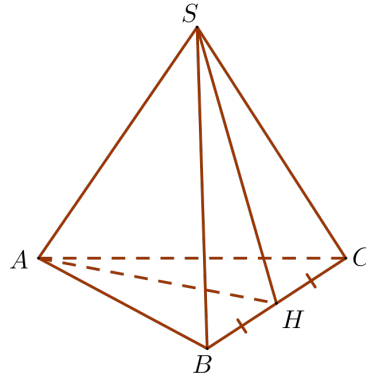
Cách 1: Dùng định nghĩa: $a \perp b \Leftrightarrow (\widehat{a, b}) = 90^\circ$

Cách 2: Dùng định lí: $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Chứng minh SA vuông góc với BC .

Lời giải



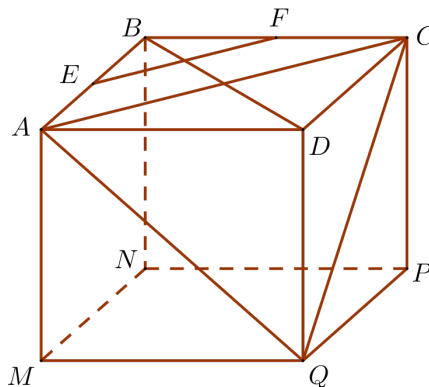
Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\Delta SAC = \Delta SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC , ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$ nên $SA \perp BC \Rightarrow (SA, BC) = 90^\circ$

Vậy $SA \perp BC$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.
- Tính góc giữa EF và AQ .

Lời giải



- Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

Ta thấy: EF là đường trung bình của ΔABC
 $\Rightarrow EF \parallel AC$.

Mà: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp AA' \end{cases}$ nên $EF \perp BD, EF \perp AM$

- Tính góc giữa EF và AQ .

Ta có: $EF \parallel AC \Rightarrow (EF, AQ) = (AC, AQ) = \widehat{CAQ}$.

Nhận thấy: $AC = AQ = CQ = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \Delta ACQ$ đều $\widehat{CAQ} = 60^\circ$.

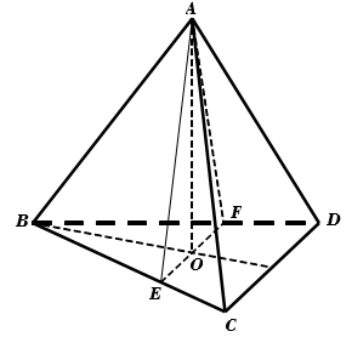
$\Rightarrow (EF, AQ) = \widehat{CAQ} = 60^\circ$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

Lời giải

- Qua O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC tại E và cắt BD tại F .
 - Ta cần chứng minh $AO \perp EF$. Ta có $\widehat{AOE} = (\widehat{AO, CD})$.
 - Vì $EF // CD$ nên BEF là tam giác đều nên $BE = BF$ và $OE = OF$.
- (1)



- Xét hai tam giác ABE và ABF , ta có

$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ BE = BF \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} \end{cases} \text{ nên } \triangle ABE = \triangle ABF \text{ (c-g-c)}. \text{ Suy ra } AE = AF. \text{ (2)}$$

- Từ (1) và (2), suy ra tam giác AEF cân tại A có AO là trung tuyến nên cũng là đường cao.
- Do đó $\widehat{AOE} = 90^\circ$. Vậy $AO \perp CD$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Hình 6 gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.

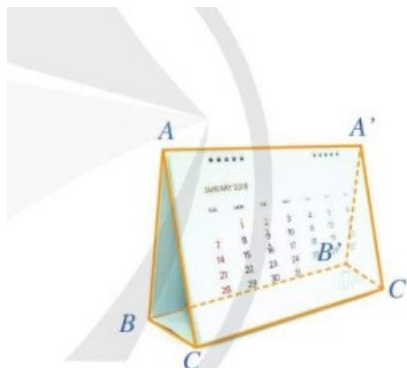


Hình 6

Lời giải

Trong hình 6 có các cặp đường thẳng vuông góc lần lượt là: $a \perp c$, $c \perp b$, $c \perp d$, $a \perp b$, $b \perp d$.

Bài 2. Trong hình 7 cho $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ là các hình chữ nhật. Chứng minh rằng $AC \perp CC'$, $AA' \perp BC$.



Hình 7
(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải

Ta có $AB \perp BB'$, mặt khác $BB' // CC' \Rightarrow AA' \perp BC$.

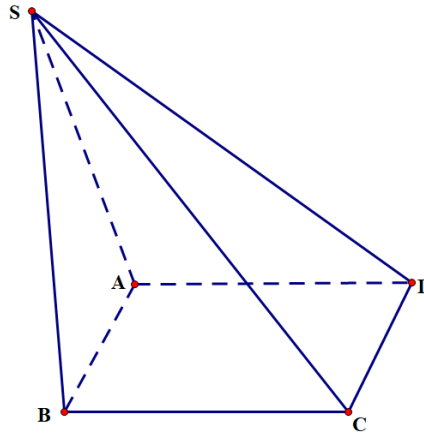
Ta có: $BB' \perp BC$ mà $BB' // AA' \Rightarrow AA' \perp BC$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\widehat{SAB} = 100^\circ$ (Hình 8). Tính góc giữa hai đường thẳng:

a) SA và AB ;

b) SA và CD .

Lời giải



a) $\widehat{(SA, AB)} = \widehat{SAB} = 100^\circ$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

$\Rightarrow \widehat{(SA, CD)} = \widehat{(SA, AB)} = \widehat{SAB} = 100^\circ$.

Bài 4. Bạn Hoa nói rằng: “Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b vuông góc với nhau”. Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải

Bạn Hoa nói sai. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b song song với nhau.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
- B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
- C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
- D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D

Vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90° .

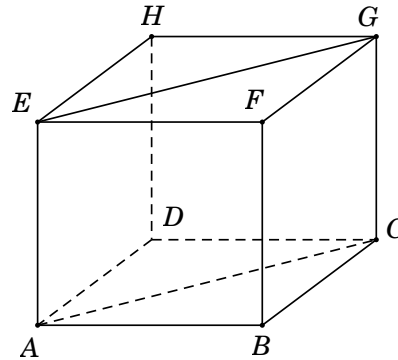
B. 60° .

C. 45° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45° .

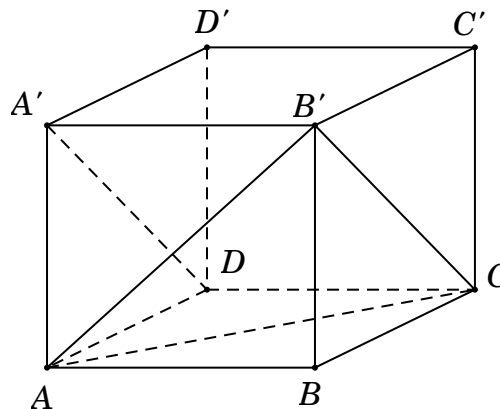
B. 90° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA} = 60^\circ$.

Lại có, DA' song song CB' nên $(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$.

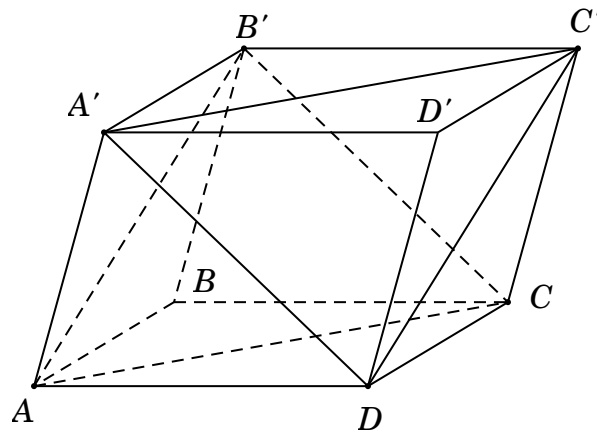
B. $\widehat{DA'C'}$.

C. $\widehat{BB'D}$.

D. $\widehat{BDB'}$.

Lời giải

Chọn B



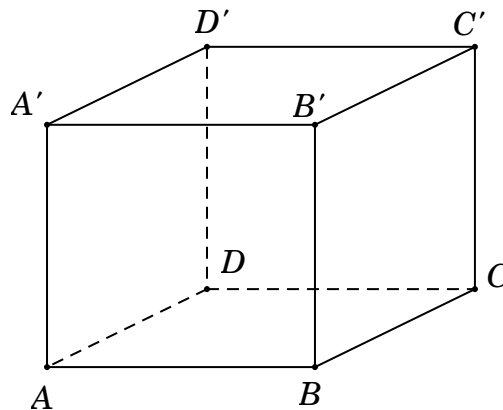
Ta có $AC \parallel A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên
 $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

- A.** Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90° . **B.** Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60° .
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45° . **D.** Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90° .

Lời giải

Chọn B



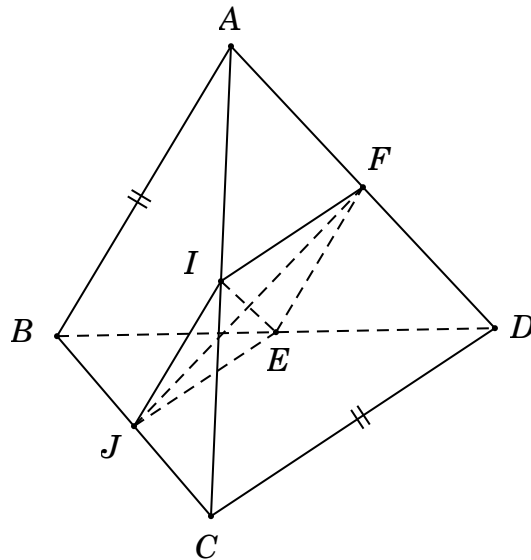
Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90^\circ$. Khẳng định B sai.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 90° .

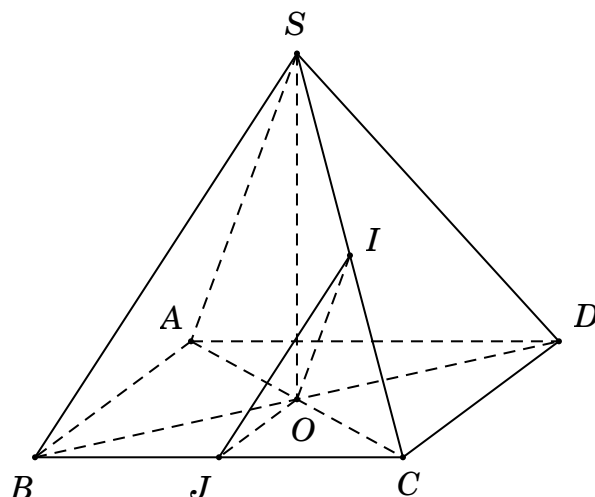
B. 45° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của $\triangle BCD$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}.$$

Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.

$$\text{Xét tam giác } IOJ, \text{ có } \begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ \text{ đều.}$$

Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60^\circ$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a .

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\triangle CBD = \triangle SBD$ ($c - c - c$).

Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.

Xét tam giác SAC , ta có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.

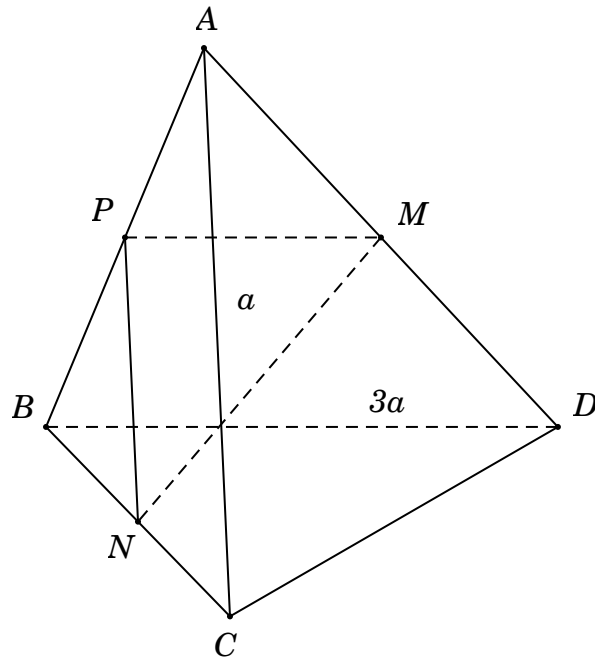
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy). Vậy $SA \perp SC$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

- A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. C. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của $AB \Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle ABC$ và

$$\triangle ABD. \text{ Suy ra } \begin{cases} PN = \frac{1}{2} AC = \frac{a}{2} \\ PM = \frac{1}{2} BD = \frac{3a}{2} \end{cases}$$

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow PN \perp PM$ hay tam giác $\triangle PMN$ vuông tại P

$$\text{Do đó } MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD . Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang.

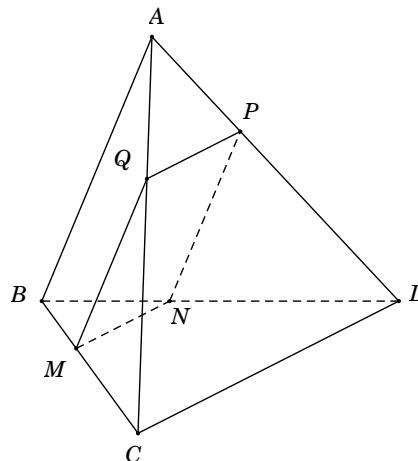
B. Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật.

D. Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$$

Tương tự ta có $MN // CD$, $NP // AB$, $QP // CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN \perp MQ$ (do $AB \perp CD$).

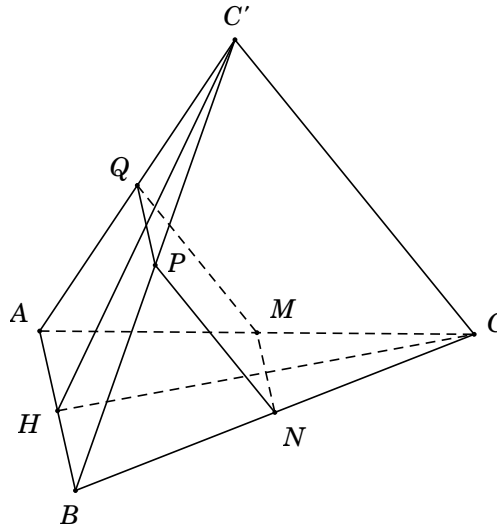
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 12: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

- A.** Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$

$$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \frac{1}{2} AB \\ PQ // AB // MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

Gọi H là trung điểm của AB . Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \Rightarrow PQ \perp PN \\ AB \perp CC' \end{cases}$$

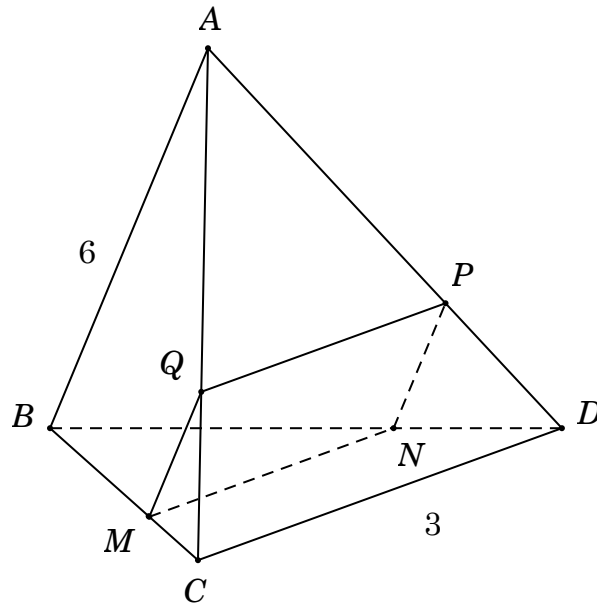
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q . Diện tích $MNPQ$ bằng:

- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$

Tương tự ta có $MN // CD, NP // AB, QP // CD.$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $(\widehat{AB;CD}) = (\widehat{QM;NP}) = 60^\circ$. Suy ra $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ$.

Ta có $\triangle CMQ \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MQ}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2.$

$\triangle AQN \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{QN}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow QN = 2.$

Vậy $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

A. 5.

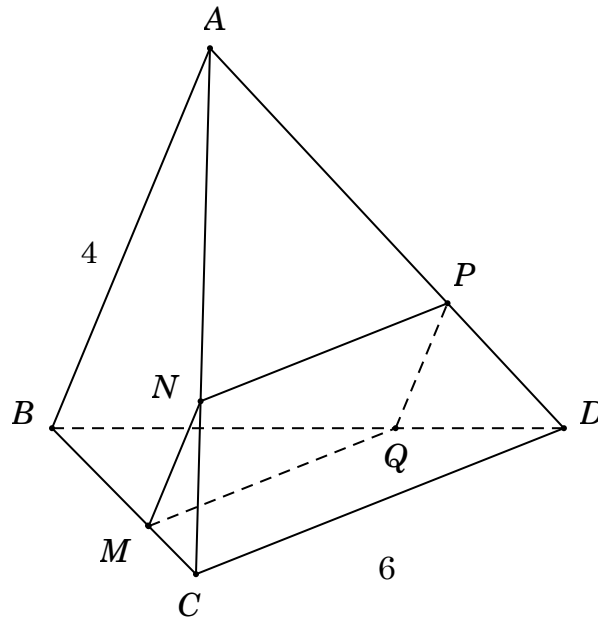
B. 6.

C. $\frac{17}{3}.$

D. $\frac{16}{3}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow MN // AB.$

Tương tự ta có $MQ // CD$, $NP // CD$, $QP // AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $(\widehat{AB; CD}) = (\widehat{MN; MQ}) = \widehat{NMQ} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\triangle CMN \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{4}{3};$

$\triangle ANP \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{NP}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow NP = 4.$

Vậy $S_{MNPQ} = MN.NP = \frac{16}{3}.$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC$ ($0 < x < 1$). Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9.

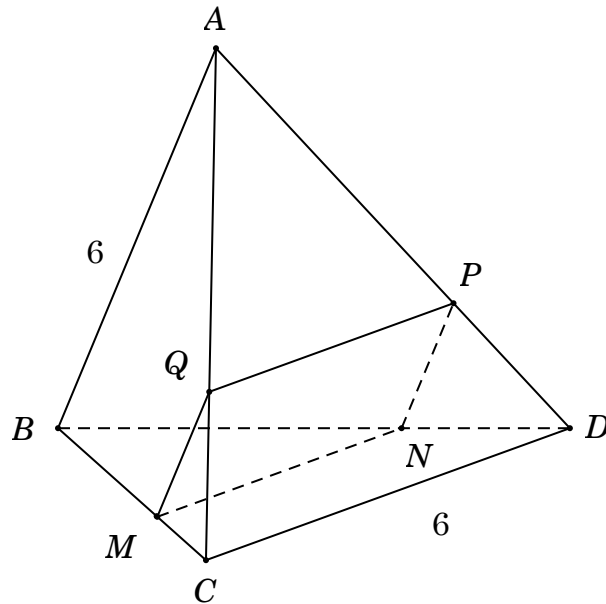
B. 11.

C. 10.

D. 8.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ // NP // AB \\ MN // PQ // CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ // AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x \cdot AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x \cdot BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN // CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x) \cdot CD = 6(1-x)$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 6(1-x) \cdot 6x = 36x \cdot (1-x) \leq 36 \left(\frac{x+1-x}{2} \right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC .

BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẶNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Trong Hình 9, cột gỗ thẳng đứng và sàn nhà nằm ngang gợi nên hình ảnh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Vấn đề: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng được hiểu như thế nào?



(Nguồn: <https://www.shutterstock.com>)

Hình 9

I. ĐỊNH NGHĨA

HĐ1. Hình 10 mô tả một người thợ xây đang thả dây dọi vuông góc với nền nhà. Coi dây dọi như đường thẳng d và nền nhà như mặt phẳng (P) , khi đó Hình 10 gợi nên hình ảnh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) . Người thợ xây đặt chiếc thước thẳng ở một vị trí tùy ý trên nền nhà. Coi chiếc thước thẳng đó là đường thẳng a trong mặt phẳng (P) , nêu dự đoán về mối liên hệ giữa đường thẳng d và đường thẳng a .

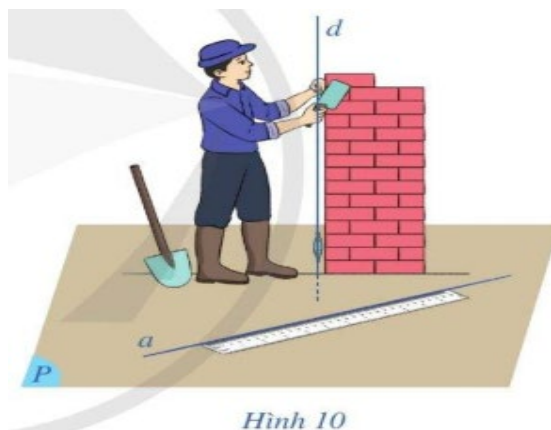
Lời giải

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

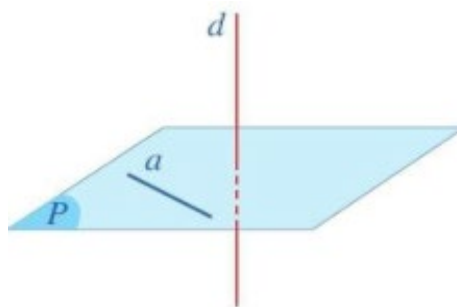
Vấn đề: Đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P) .

Ta có định nghĩa sau (Hình 11):

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng a trong mặt phẳng (P) , kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp d$.



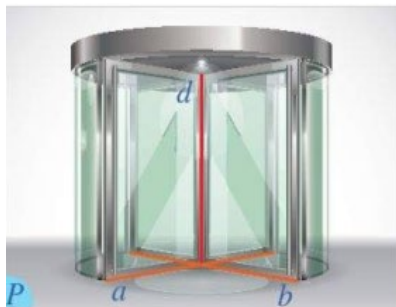
Hình 10



Hình 11

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẶNG

HĐ2. Hình 12 mô tả cửa tròn xoay, ở đó trục cửa và hai mép cửa gợi nên hình ảnh các đường thẳng a, b, d ; sàn nhà coi như mặt phẳng (P) chứa a và b . Hỏi đường thẳng d có vuông góc với mặt phẳng (P) hay không?



Hình 12

Lời giải

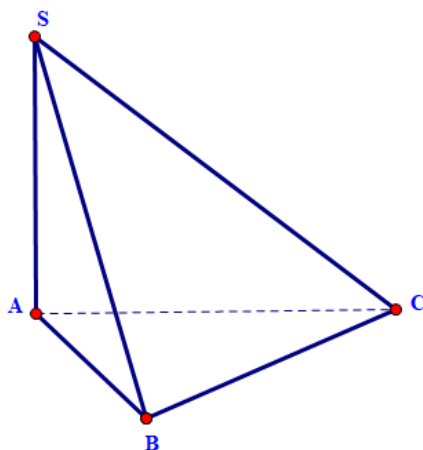
Đường thẳng d có vuông góc với mặt phẳng (P) .

Ta thừa nhận định lý sau:

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp AB, SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SA \perp (ABC)$ và $SA \perp BC$

Lời giải (Hình 13)



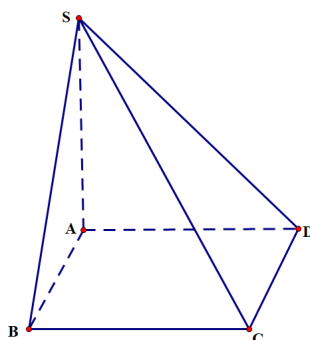
Ta có AB và AC là hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (ABC) và $SA \perp AB, SA \perp AC$.

Suy ra $SA \perp (ABC)$.

Mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

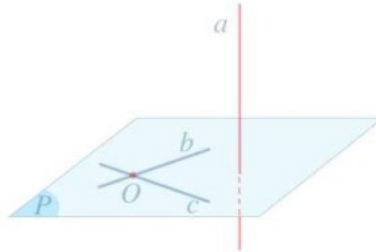
Mà $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$.

Xét $mp(SAC)$ có $SA \cap AC = \{A\}$, $SA \perp BD$, $AC \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

III. TÍNH CHẤT

HĐ3. Cho điểm O và đường thẳng a . Gọi b, c là hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua điểm O và cùng vuông góc với đường thẳng a (Hình 14)



Hình 14

a) Mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng b, c có vuông góc với đường thẳng a hay không?

b) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a ?

Lời giải

a) Mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng b, c có vuông góc với đường thẳng a .

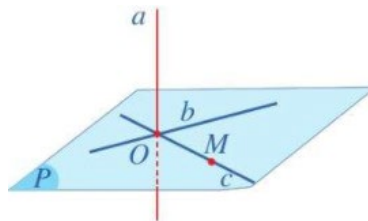
b) Có một mặt phẳng đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a .

Tính chất 1

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Ví dụ 2: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt (P) tại O sao cho $a \perp (P)$. Giả sử b là đường thẳng đi qua điểm O và $b \perp a$. Chứng minh rằng $b \subset (P)$.

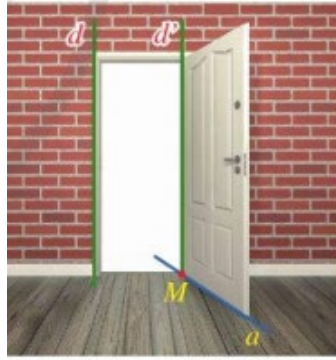
Lời giải



Hình 15

Ta lấy điểm M trong mặt phẳng (P) , M khác O (Hình 15). Nếu $M \in b$ thì $b \subset (P)$. Xét $M \notin b$. Gọi c là đường thẳng đi qua O, M và (Q) là mặt phẳng đi qua b, c . Do $a \perp b$, $a \perp c$ nên $a \perp (Q)$. Qua điểm O có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng a , suy ra hai mặt phẳng đó trùng nhau theo **Tính chất 1**. Vậy $b \subset (P)$.

Luyện tập 2. Hình 17 mô tả một cửa gỗ có dạng hình chữ nhật, ở đó nẹp cửa và mép dưới cửa lần lượt gọi lên hình ảnh hai đường thẳng d và a . Điểm M là vị trí giao giữa mép gắn bản lề và mép dưới của cửa. Hãy giải thích tại sao khi quay cánh cửa, mép dưới cửa là đường thẳng a luôn nằm trên mặt phẳng đi qua điểm M cố định và vuông góc với đường thẳng d .



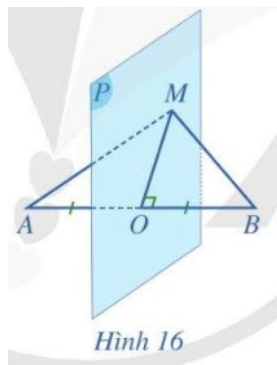
Hình 17

Lời giải

Vì sàn nhà là một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d . Mà đường thẳng a luôn nằm trên mặt phẳng đó nên đường thẳng d luôn vuông góc với đường thẳng a .

Ví dụ 3: Cho đoạn thẳng AB cố định. Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nếu (P) đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $(P) \perp AB$. Chứng minh rằng nếu điểm M trong không gian thỏa mãn $MA = MB$ thì $M \in (P)$.

Lời giải (Hình 16)



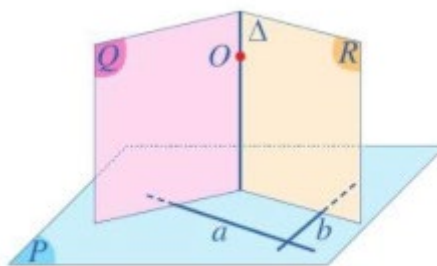
Hình 16

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Nếu M trùng O thì $M \in (P)$.

Nếu M khác O thì tam giác MAB cân tại M , suy ra $OM \perp AB$. Theo Ví dụ 2, ta có $OM \subset (P)$, suy ra M thuộc (P) .

HĐ4: Cho mặt phẳng (P) và điểm O . Gọi a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P) sao cho a và b không đi qua O . Lấy hai mặt phẳng $(Q), (R)$ lần lượt đi qua O và vuông góc với a, b (Hình 18).



Hình 18

a) Giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(Q), (R)$ có vuông góc với mặt phẳng (P) hay không?

b) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua O và vuông góc với (P) ?

Lời giải

a) Giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(Q), (R)$ có vuông góc với mặt phẳng (P) .

b) Có duy nhất một đường thẳng đi qua và vuông góc với (P) .

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

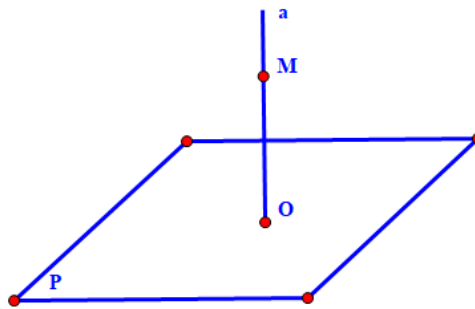
Ví dụ 4. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C thoả mãn $(P) \perp AB, (P) \perp BC$. Chứng minh rằng $(P) \perp AC$.

Lời giải

Vì hai đường thẳng AB, BC cùng đi qua điểm B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên hai đường thẳng này trùng nhau. Suy ra A, B, C là ba điểm thẳng hàng và $(P) \perp AC$.

Luyện tập 3. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt nhau tại điểm $O, a \perp (P)$. Giả sử điểm M thoả mãn $OM \perp (P)$. Chứng minh rằng $M \in a$.

Lời giải



Vì chỉ có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Nếu $a \perp (P), OM \perp (P) \Rightarrow M \in a$.

IV. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

HĐ5. Trong Hình 19, hai thanh sắt và bản phẳng để ngồi gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) .

Quan sát Hình 19 và cho biết :

- Nếu hai đường thẳng a và b song song với nhau và mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) có vuông góc với đường thẳng b hay không;
- Nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì chúng có song song với nhau hay không.



Hình 19

Lời giải

a) Nếu hai đường thẳng a và b song song với nhau và mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) có vuông góc với đường thẳng b .

b) Nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì chúng có song song với nhau.

Tính chất 3

- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

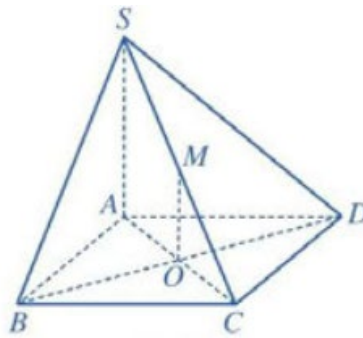
Lời giải

Vì hai đường thẳng AD, AN cắt nhau trong mặt phẳng (ADN) , $AB \perp AD, AB \perp AN$ nên $AB \perp (ADN)$. Do hai đường thẳng BC, BM cắt nhau trong mặt phẳng (BCM) , $AB \perp BC, AB \perp BM$ nên $AB \perp (BCM)$.

Vì hai mặt phẳng $(ADN), (BCM)$ cùng vuông góc với AB nên $(ADN) \parallel (BCM)$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O . Gọi M là trung điểm của SC (Hình 20). Chứng minh rằng $OM \perp (ABCD)$.

Lời giải



Hình 20

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$. Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM \parallel SA$. Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $OM \perp (ABCD)$.

Luyện tập 4. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại điểm O . Lấy các điểm A, B thuộc d và khác ; các điểm A', B' thuộc (P) thoả mãn $AA' \perp (P), BB' \perp (P)$. Chứng minh rằng $\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}$.

Lời giải

Theo đề bài ta có $AA' \perp (P), BB' \perp (P)$ nên theo tính chất 3 ta có $AA' \parallel BB'$.

Xét tam giác OAA' có $BB' \parallel AA'$, theo hệ quả của định lý Talet ta có: $\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}$.

HĐ6. Trong Hình 21, hai mặt sàn của nhà cao tầng và cột trụ bê tông gợi nên hình ảnh của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ phân biệt và đường thẳng a .

Quan sát Hình 21 và cho biết:

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a có vuông góc với mặt phẳng (Q) hay không;
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng a thì chúng có vuông góc với nhau hay không.



Hình 21

Lời giải

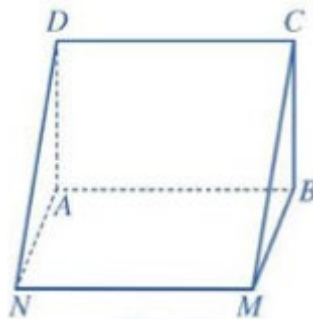
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a có vuông góc với mặt phẳng (Q) .
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng a thì chúng có vuông góc với nhau.

Tính chất 4

- Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 6: Giả sử $ABCD$ và $ABMN$ là hai hình chữ nhật không cùng nằm trong một mặt phẳng (Hình 22). Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

Lời giải



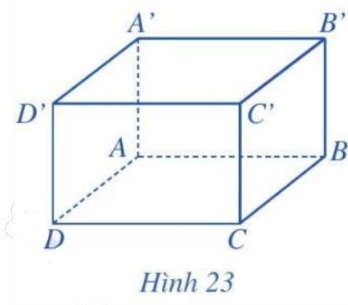
Hình 22

Vì hai đường thẳng AD, AN cắt nhau trong mặt phẳng (ADN) , $AB \perp AD, AB \perp AN$ nên $AB \perp (ADN)$. Do hai đường thẳng BC, BM cắt nhau trong mặt phẳng (BCM) , $AB \perp BC, AB \perp BM$ nên $AB \perp (BCM)$.

Vì hai mặt phẳng (ADN) , (BCM) cùng vuông góc với AB nên $(ADN) \parallel (BCM)$.

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh $AA' \perp (A'B'C'D')$.

Lời giải



Hình 23

Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ và $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$ nên $AA' \perp (A'B'C'D')$.

Luyện tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) khác mặt phẳng (ABC) , vuông góc với đường thẳng SA và lần lượt cắt các đường thẳng SB, SC tại B', C' . Chứng minh rằng $B'C' \parallel BC$.

Lời giải

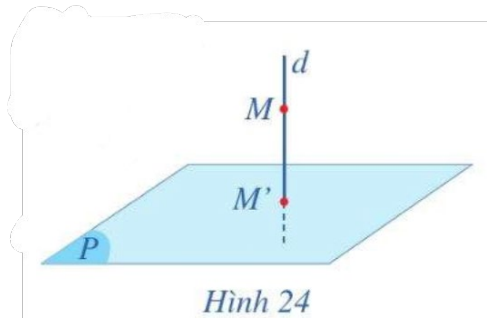
Vì $SA \perp (ABC)$ và $SA \perp (AB'C')$ nên $(ABC) \parallel (AB'C')$.

Mà $BC \subset (ABC)$, $B'C' \subset (AB'C') \Rightarrow B'C' \parallel BC$.

V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

HĐ 7. Cho mặt phẳng (P) . Xét một điểm M tùy ý trong không gian.

- Có bao nhiêu đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) ?
- Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại bao nhiêu giao điểm?



Hình 24

Lời giải

- Có một đường thẳng d đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một giao điểm.

Gọi M' là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (Hình 24). Điểm M' được gọi là hình chiếu vuông góc (hay *hình chiếu*) của điểm M lên mặt phẳng (P) .

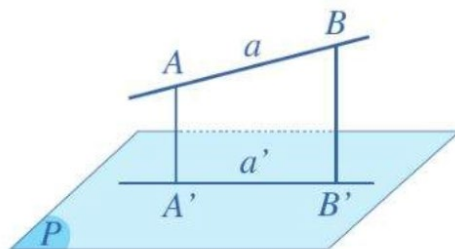
Cho mặt phẳng (P) . Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu vuông góc M' của điểm đó lên mặt phẳng (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)* .

Nhận xét: Vì phép chiếu vuông góc là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song (khi phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu) nên phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

Ví dụ 8. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a . Xác định hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) .

Lời giải

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì hình chiếu của a trên mặt phẳng (P) là một điểm, điểm đó là giao điểm của a và (P) .
- Để tìm hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) trong trường hợp đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) , ta có thể làm như sau (Hình 25):



Hình 25

Bước 1. Chọn hai điểm thích hợp A, B trên đường thẳng a .

Bước 2. Xác định lần lượt hình chiếu A', B' của hai điểm A, B trên mặt phẳng (P) .

Khi đó, đường thẳng a' đi qua hai điểm A', B' chính là hình chiếu của a trên mặt phẳng (P) .

Lưu ý rằng khi đường thẳng a cắt (P) thì ta thường chọn điểm A là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Luyện tập 6. Cho mặt phẳng (P) và đoạn thẳng AB . Xác định hình chiếu của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) .

Lời giải

Để xác định hình chiếu của đoạn thẳng AB lên mặt phẳng (P) , ta cần thực hiện các bước sau đây:

Bước 1: Vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và đi qua điểm A hoặc B . Gọi đường thẳng này là d .

Bước 2: Kẻ đường thẳng cắt đoạn AB tại một điểm C .

Bước 3: Vẽ đường thẳng vuông góc với (P) và đi qua điểm C . Gọi đường thẳng này là d' .

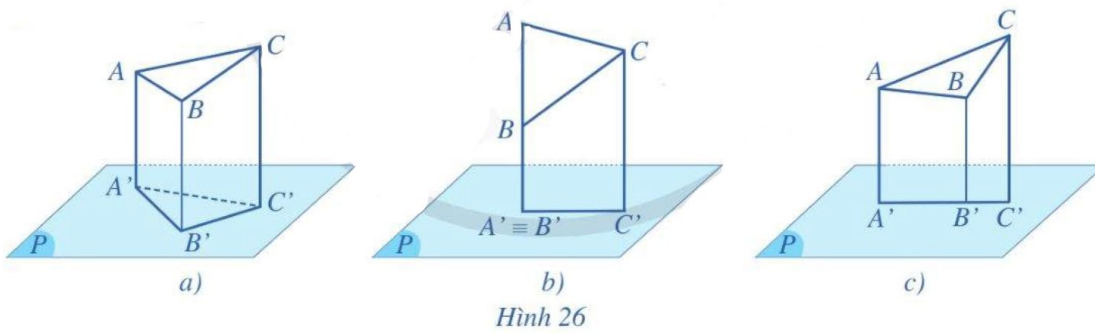
Bước 4: Tìm giao điểm giữa (P) và d' , ký hiệu là E .

Bước 5: Kết quả là đoạn thẳng AE hoặc BE là hình chiếu của đoạn thẳng AB lên mặt phẳng (P) .

Lưu ý rằng, nếu đoạn thẳng AB nằm hoàn toàn trên mặt phẳng (P) , thì hình chiếu của nó trùng với đoạn thẳng AB . Nếu không, thì hình chiếu của nó sẽ là một đoạn thẳng khác, có chiều dài khác với đoạn thẳng AB .

Ví dụ 9. Cho mặt phẳng (P) và tam giác ABC . Xác định hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) .

Lời giải



Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của ba điểm A, B, C trên mặt phẳng (P) .

Khi đó các trường hợp sau xảy ra:

a) **Trường hợp 1:** Ba điểm A', B', C' không thẳng hàng. Khi đó, hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$ (Hình 26a).

b) **Trường hợp 2:** Trong ba điểm A', B', C' có hai điểm trùng nhau.

Chẳng hạn, điểm A' trùng với điểm B' . Khi đó, hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là đoạn thẳng $A'C'$ (Hình 26b).

VI. ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

HĐ8. Trong Hình 27, mặt sàn gọi nên hình ảnh mặt phẳng (P) , đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng a' là hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) , đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) . Quan sát Hình 27 và cho biết:



- Nếu đường thẳng d vuông góc với hình chiếu a' thì đường thẳng d có vuông góc với a hay không;
- Ngược lại, nếu đường thẳng d vuông góc với a thì đường thẳng d có vuông góc với hình chiếu a' hay không.

Lời giải

- Nếu đường thẳng d vuông góc với hình chiếu a' thì đường thẳng d có vuông góc với a .
- Ngược lại, nếu đường thẳng d vuông góc với a thì đường thẳng d có vuông góc với hình chiếu a' .

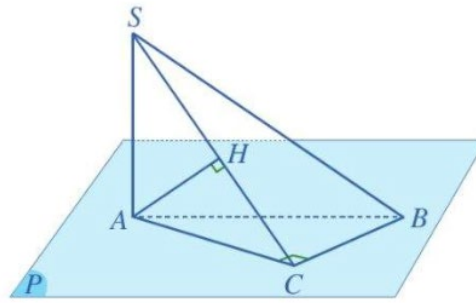
Ta có định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) . Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P) .

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A , ta lấy điểm S (S khác A).

- a) Chứng minh rằng tam giác SBC vuông tại C .
b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh rằng $AH \perp (SBC)$.

Lời giải. (Hình 29)



Hình 29

- a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC) . Mà $BC \perp AC$ nên theo định lý ba đường vuông góc ta có $BC \perp SC$. Vậy tam giác SBC vuông tại C .
b) Ta có BC vuông góc với hai đường thẳng SA và AC cắt nhau trong mặt phẳng (SAC) nên $BC \perp (SAC)$, mà AH nằm trong mặt phẳng (SAC) nên BC vuông góc với AH . Vì AH vuông góc với hai đường thẳng SC và BC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .
- d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (P) .

2. Ví dụ

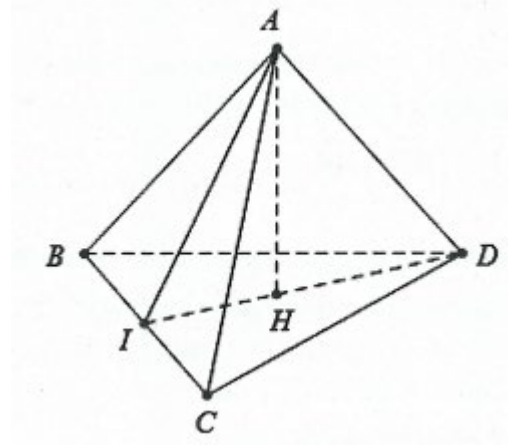
Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC . Điểm I là trung điểm của cạnh BC .

- a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.
b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$

Lời giải

a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao).
Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.
Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.
Do đó $AH \perp (BCD)$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

- Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.
- Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.
- Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.
- Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$.
Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \parallel BD$.

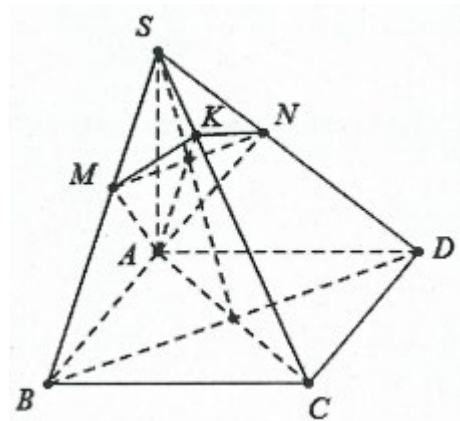
d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD .

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.



c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$.

Mặt khác $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH \perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD .

b) Gọi $E = DH \cap BC$, do $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AE$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AE ta có:

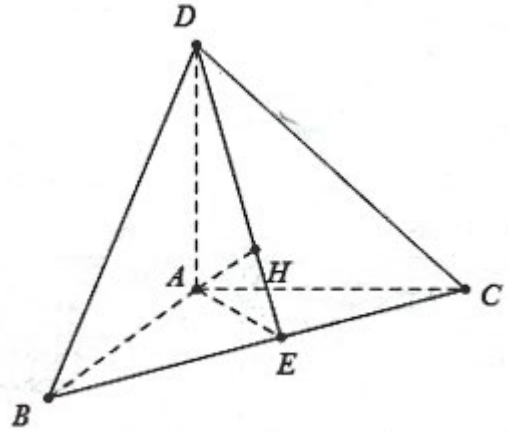
$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Lại có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB = x$; $AC = y$ và $AD = z$. Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \frac{x^2}{BC \cdot BD} > 0 \Rightarrow \widehat{CBD} < 90^\circ$$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BDC} < 90^\circ \\ \widehat{BCD} < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Giả sử $AH \perp BC$ tại M .

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M .

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$

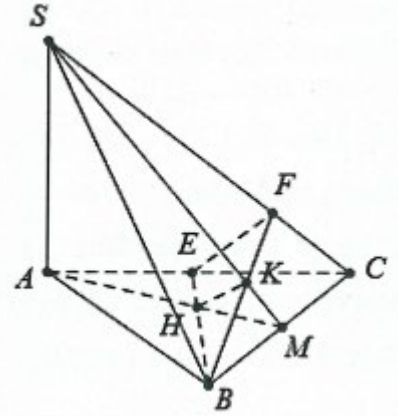
Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$, mặt khác

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SBC)$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$.

Lời giải

a) Do $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao suy ra $SO \perp AC$.

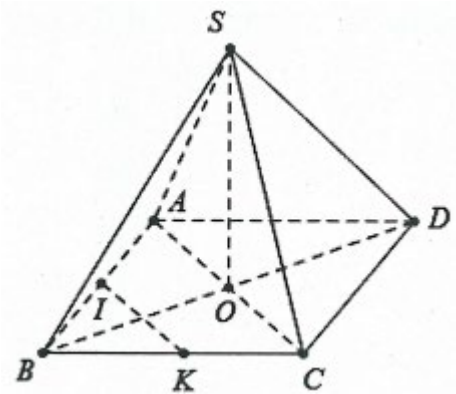
Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$.

IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK \parallel AC$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ , suy ra tam giác SIJ vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.

c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ , chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải

a) Ta có: ΔSAB đều cạnh a nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tứ giác $IBCI$ là hình chữ nhật nên $IJ = BC = a$.

ΔSCD là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S .

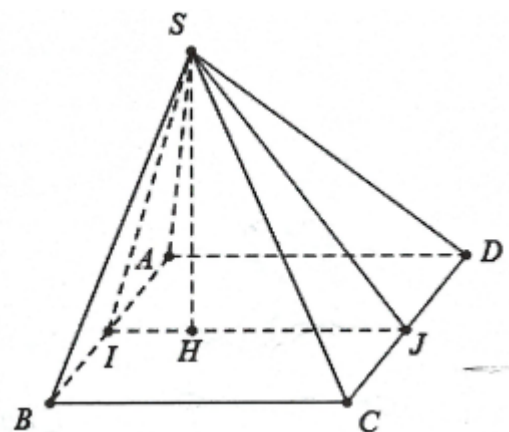
b) Do ΔSCD cân tại S nên $SJ \perp CD$

Do $AB \parallel CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$



Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$, chứng minh $MN \perp (ABC)$.

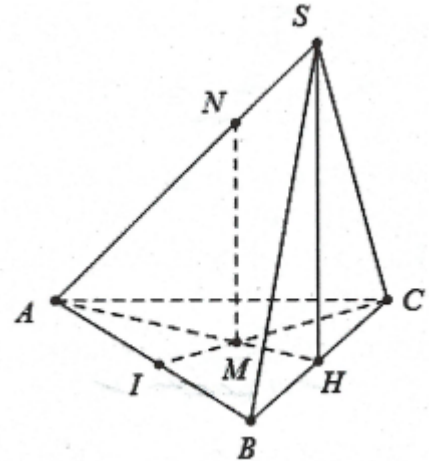
Lời giải

Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow M = AH \cap CI$.

Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \parallel SH$.

Mặt khác $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

1. Phương pháp giải:

- Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.
- Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Lời giải

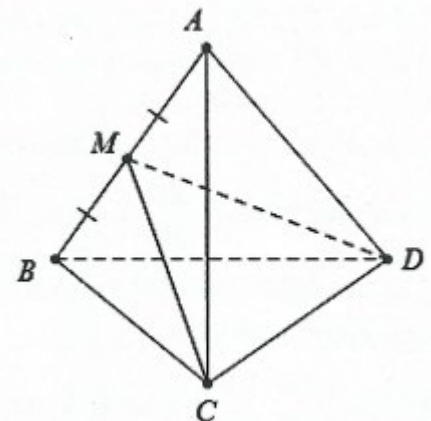
Gọi M là trung điểm của AB .

Tứ diện $ABCD$ đều nên $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ là các tam giác đều suy

ra $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$.

Do đó $AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.



Ví dụ 2. Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với

$$AD = CD = \frac{AB}{2}.$$

- a) Gọi I là trung điểm của đoạn AB , chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.
- b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải

a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a .

Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.

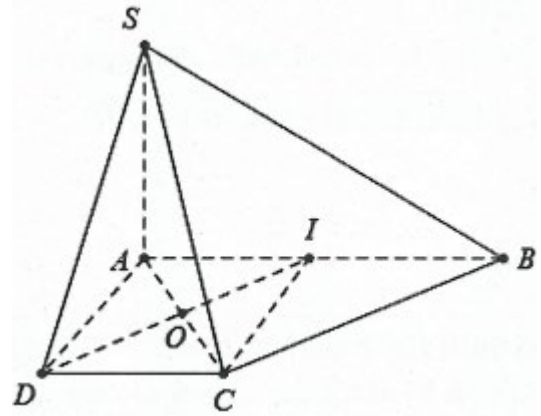
b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại S .

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên

ΔSCD vuông tại D .

Xét ΔACD có trung tuyến $CI = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại C .



Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng:

$AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải

a) Do ΔABC là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.

b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \parallel B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

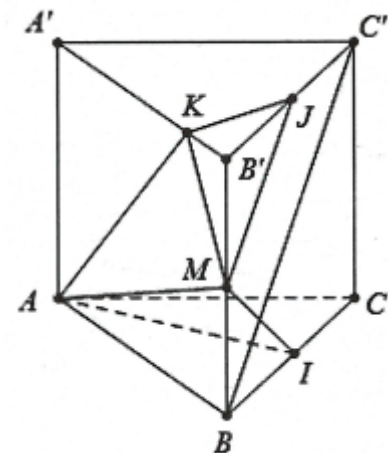
c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{AMK} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MK$.

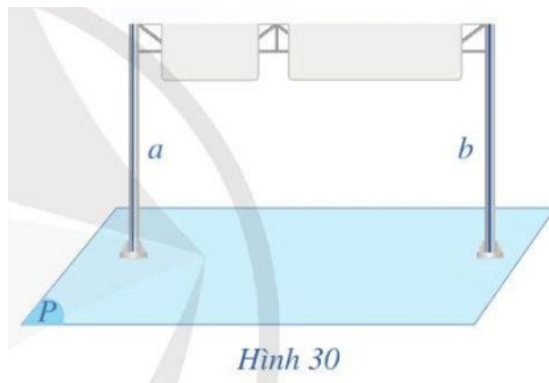
Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$.

Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát Hình 30 (hai cột của biển báo, mặt đường), cho biết hình đó gợi nên tính chất nào về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 30

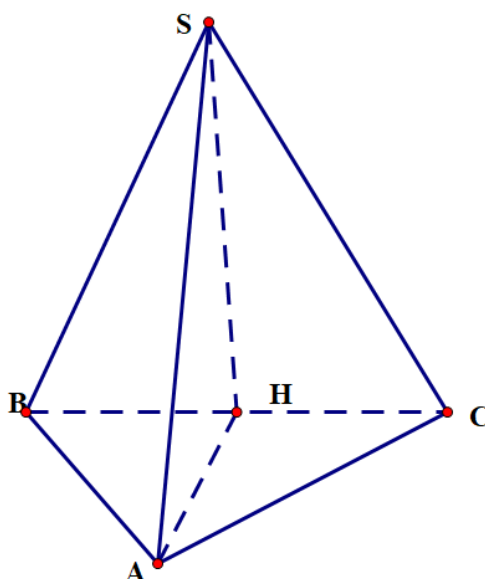
Lời giải

- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) .

- Xác định hình chiếu của các đường thẳng SA, SB, SC trên mặt phẳng (ABC) .
- Giả sử $BC \perp SA, CA \perp SB$. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC và $AB \perp SC$.

Lời giải



a) Để xác định hình chiếu của các đường thẳng SA, SB, SC trên mặt phẳng (ABC) , ta có thể vẽ đường thẳng vuông góc từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) , kết hợp với việc vẽ các đường thẳng từ A, B, C vuông góc với mặt phẳng (ABC) để tìm hình chiếu của các đường thẳng đó. Hình chiếu của SA, SB, SC lần lượt là AD, BE, CF .

b) Vì $BC \perp SA$ và $CA \perp SB$, nên BC và CA lần lượt là các đường vuông góc với SA và SB . Do đó, ta có:

- $SA \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC$ và $SK \perp AB$ (trong đó H và K lần lượt là hình chiếu của S xuống BC và AB)
- $SB \perp (ABC) \Rightarrow SJ \perp AC$ và $SL \perp AB$ (trong đó J và L lần lượt là hình chiếu của S xuống AC và AB)

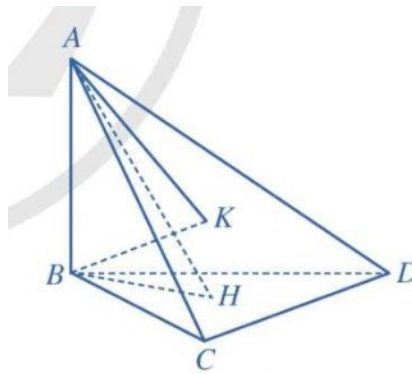
- $SC \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AB$ và $SN \perp AC$ (trong đó M và N lần lượt là hình chiếu của S xuống AB và AC)

Khi đó, ta thấy rằng tam giác ABC có ba đường cao HN , KM và LJ , nên H là trực tâm của tam giác ABC (vì trực tâm là điểm giao điểm của ba đường cao của tam giác).

Bên cạnh đó, ta có $AB \perp SL$ (vì AB vuông góc với mặt phẳng (ABC) , SL vuông góc với AB), và từ đó suy ra $AB \perp SC$ (vì SL là hình chiếu của SC xuống AB). Vậy $AB \perp SC$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD (hình 31). Chứng minh rằng:

- $CD \perp (ABH)$;
- $CD \perp (ABK)$;
- Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.



Hình 31

Lời giải

a) Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$ (1)

Có H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABH)$

b) Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$ (1)

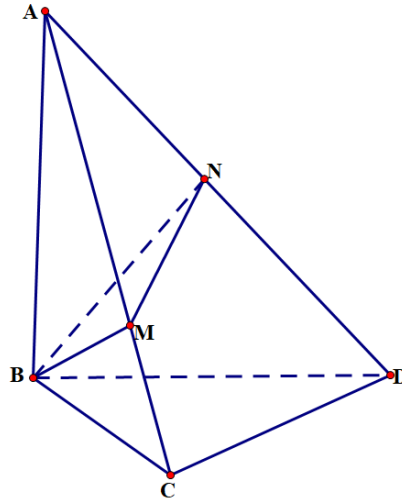
Có K là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow AK \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABK)$

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD), BC \perp CD$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và AD . Chứng minh rằng:

- $CD \perp BM$;
- $BM \perp MN$.

Lời giải



a) Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$

Mà $CD \perp BC \Rightarrow CD \perp (ABC)$

Lại có $BM \in (ABC) \Rightarrow CD \perp BM$

b) Ta có $\left. \begin{array}{l} BM \perp CD \\ BM \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp (ACD)$

Mà $MN \in (ACD) \Rightarrow BM \perp MN$

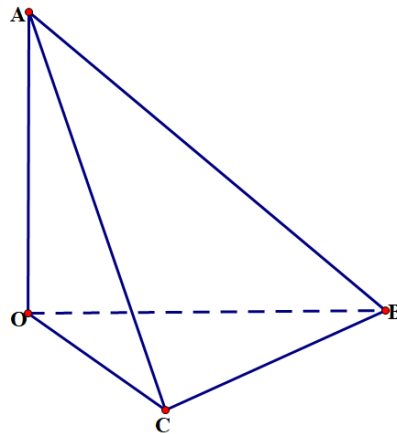
Bài 5. Cho hình chóp $O.ABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp OA$;

b) $CA \perp OB$;

c) $AB \perp OC$.

Lời giải



a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

Mà $BC \in (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

b) Ta có $\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OB \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OB \perp (OAC)$

Mà $CA \in (OAC) \Rightarrow CA \perp OB$

c) Ta có $\left. \begin{array}{l} OC \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OC \perp (OAB)$

Mà $AB \in (OAB) \Rightarrow AB \perp OC$

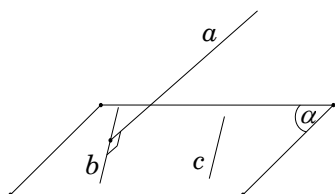
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
- B.** Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .
- C.** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
- D.** Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề **C** sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α) . Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α) .

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P) , đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

- A.** vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P) .
- B.** vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P) .
- C.** vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P) .
- D.** vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P) .

Lời giải

Chọn D

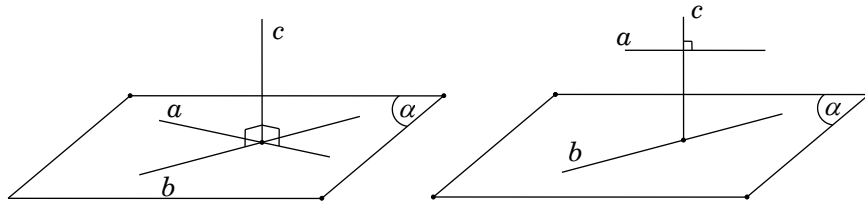
Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P) . (Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- B.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
- C.** Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
- D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



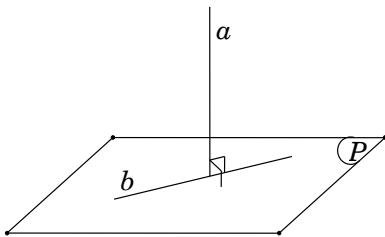
Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A.** Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$. **B.** Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$. **D.** Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P) .

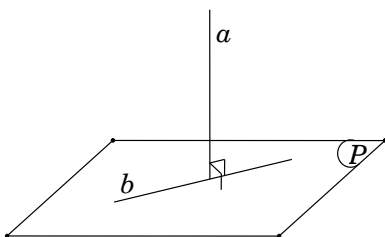
Câu 5: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) . Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A.** Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **B.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.
C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

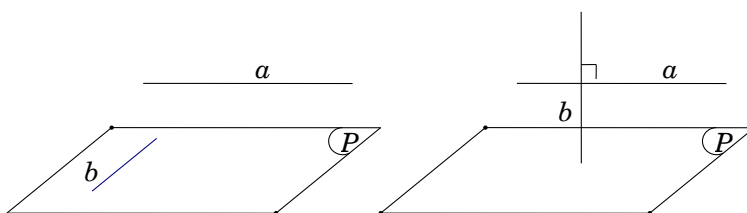
Lời giải

Chọn B

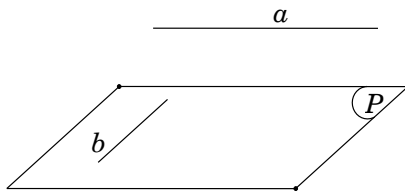
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P) .



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P) .



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P) .



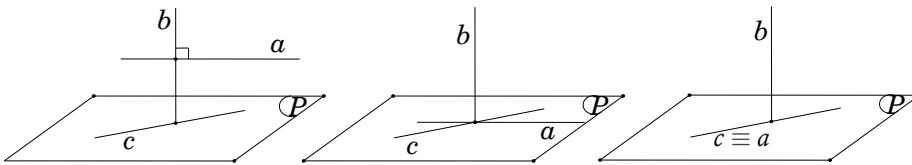
Câu 6: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A.** Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.
- B.** Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.
- C.** Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
- D.** Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c) .

Lời giải

Chọn D

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c .

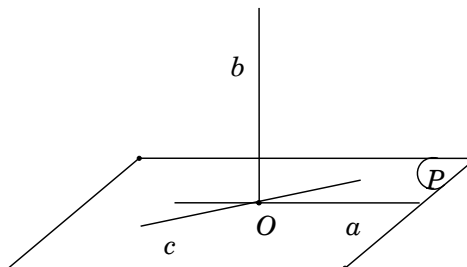


Câu 7: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A.** Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
- B.** Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.
- C.** Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- D.** Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

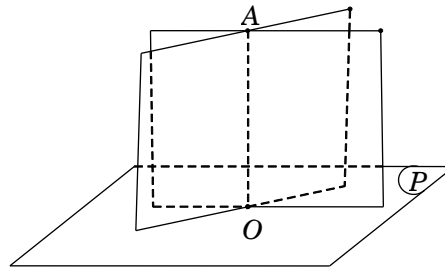
Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

- B.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- D.** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

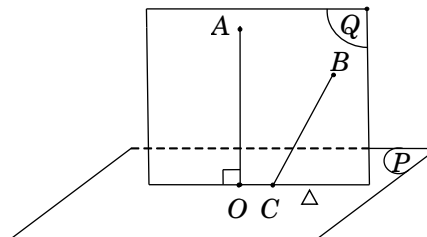
Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

- A.** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- C.** Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β) .
- D.** Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ) .

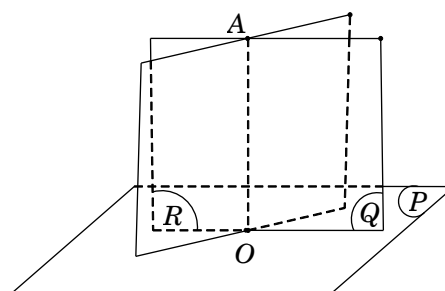
Lời giải

Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A.** Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.
- B.** Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P) .
- C.** Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .
- D.** Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b .

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q) .

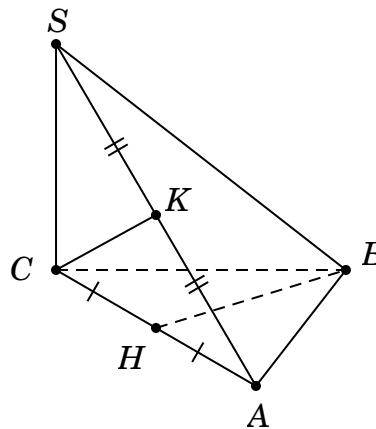
Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b .

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào dưới đây sai?

- A.** $CH \perp AK$.
- B.** $CH \perp SB$.
- C.** $CH \perp SA$.
- D.** $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB , tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB) \Rightarrow CH$ vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK .

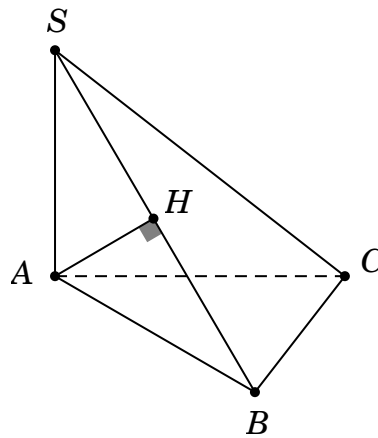
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB . Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A.** $SA \perp BC$.
- B.** $AH \perp BC$.
- C.** $AH \perp AC$.
- D.** $AH \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B , có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

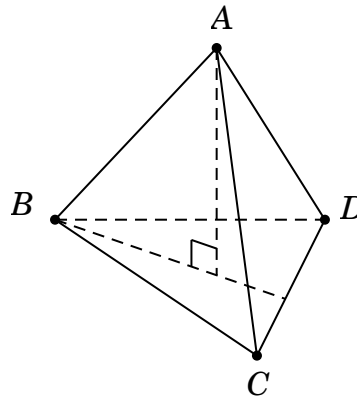
Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $CD \perp BD$. B. $AC = BD$. C. $AB = CD$. D. $AB \perp CD$.

Lời giải

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp(BCD)$ suy ra $AH \perp CD$. (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD$. (2)

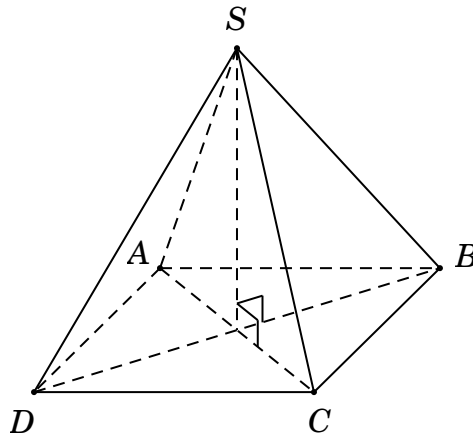
Từ (1),(2) suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $AB \perp (SAC)$. B. $CD \perp AC$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp (SBD)$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SC \Rightarrow \triangle SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC$.

Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SA \perp BD$.

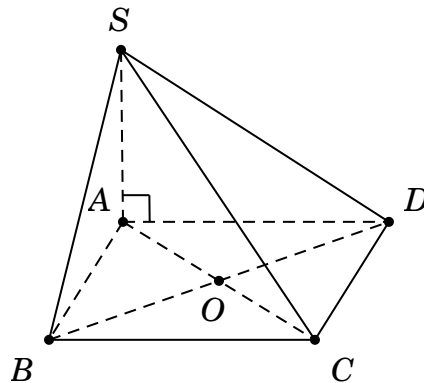
B. $SC \perp BD$.

C. $SO \perp BD$.

D. $AD \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với $mp(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$.

Và AD, SC là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $IO \perp (ABCD)$.

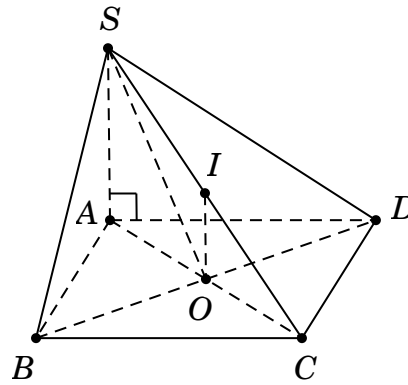
B. $BC \perp SB$.

C. Tam giác SCD vuông ở D .

D. (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD .

Lời giải

Chọn D



Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC suy ra OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OI \parallel SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$.

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} (SA \perp (ABCD)) \Rightarrow CD \perp SD$.

Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \longrightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB . Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $CE \perp (SAB)$.

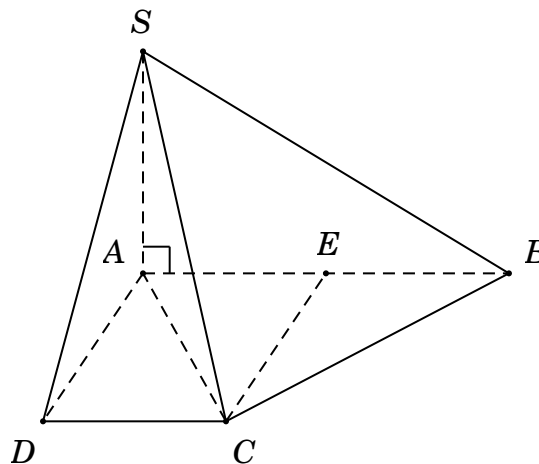
B. $CB \perp (SAC)$.

C. Tam giác SDC vuông tại D .

D. $CE \perp (SDC)$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} (\text{do } SA \perp ABCD) \Rightarrow CE \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE = AD = a \Rightarrow CE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$. Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên suy ra $CB \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó C đúng.

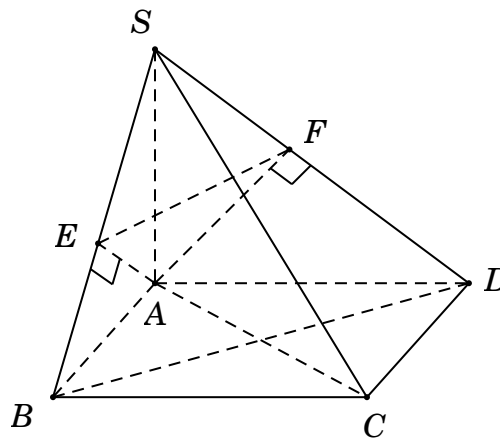
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

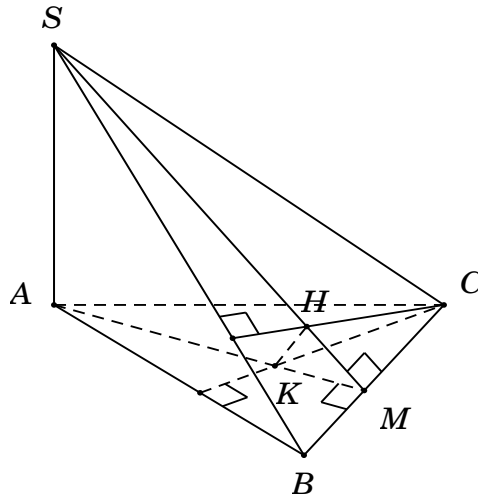
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 19: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** $BC \perp (SAH)$. **B.** $SB \perp (CHK)$. **C.** $HK \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



● Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.

● Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

● Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

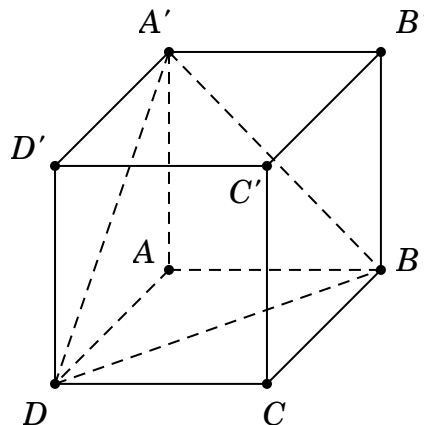
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ ($AA' \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là sai?

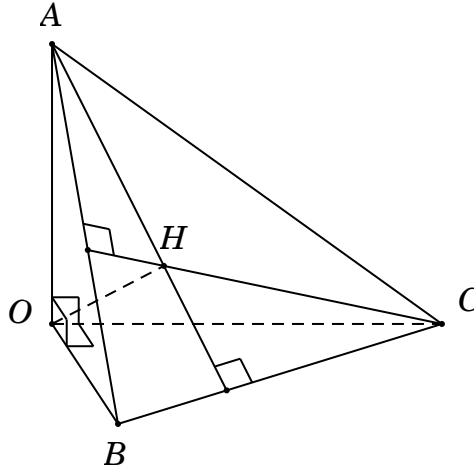
A. $OA \perp BC$.

B. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm $\triangle ABC$. **D.** $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải

Chọn D



• $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. Do đó A đúng. (1)

• Gọi $I = AH \cap BC$.

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI$.

Tam giác vuông BOC , ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Tam giác vuông AOI , ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Do đó B đúng.

• Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$. (3)

Gọi $J = BH \cap AC$. Chứng minh tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$. Do đó C đúng.

Vậy D là đáp án sai.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

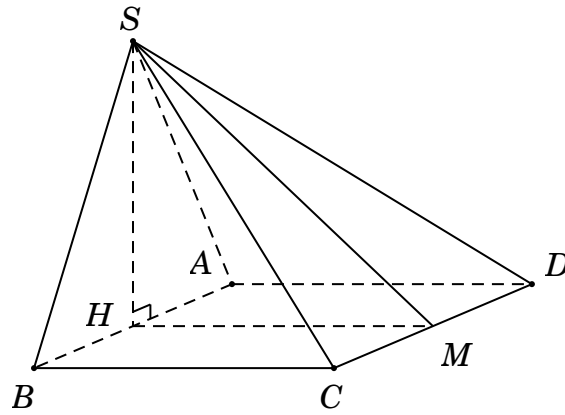
B. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $S = a^2\sqrt{3}$.

D. $S = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Suy ra:

- $SH \subset (\alpha)$.
- $SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB$ ($M \in CD$) $\Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H .

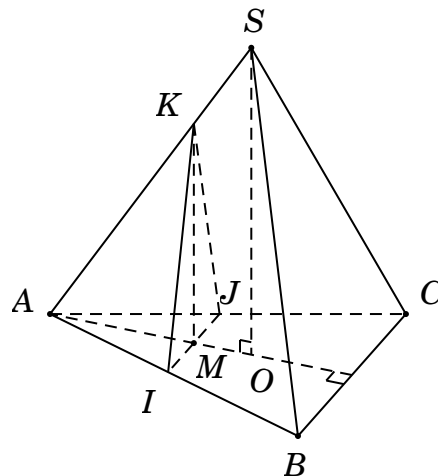
Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$. Vậy $S_{\Delta SHM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \neq A; M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

- A. $S = 2a^2$. B. $S = 2x^2$. C. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. D. $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Khi đó thiết diện là tam giác KIJ .

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK$.

Trong tam giác ABC , ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO , ta có $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

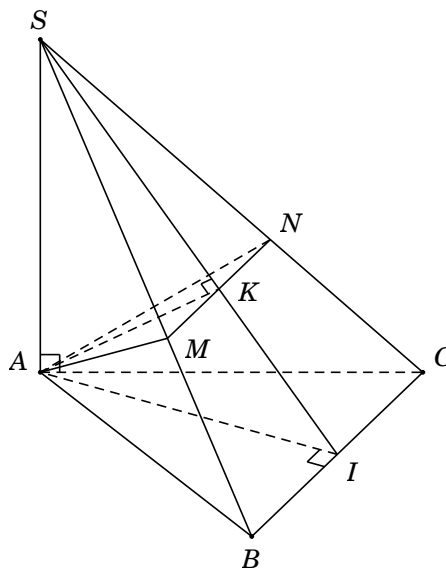
B. $S_{\Delta AMN} = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$.

C. $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{21}}{7}$.

D. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI$ ($K \in SI$).

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB , SC lần lượt tại M , N .

Khi đó thiết diện là tam giác AMN .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK$.

Tam giác vuông SAI , có $AK = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC , có $\frac{MN}{BC} = \frac{SK}{SI} = \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7} \Rightarrow MN = \frac{4a}{7}$.

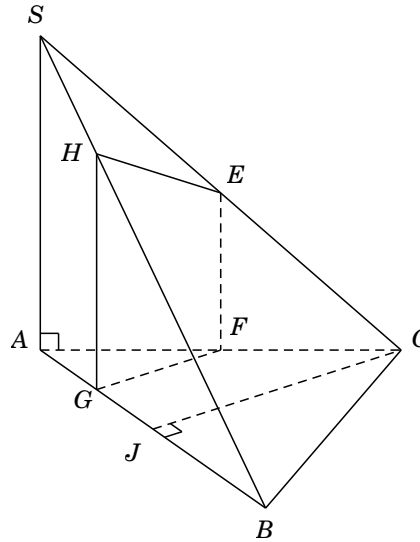
Vậy $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AK \cdot MN = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

- A. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. B. $S_{EFGH} = \frac{a^2\sqrt{7}}{32}$. C. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. D. $S_{EFGH} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AC , suy ra $EF \parallel SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AG .

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)

Trong $\triangle SAB$ kẻ $GH \parallel SA$ ($H \in SB$), suy ra $GH \perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH).FG$.

Ta có $EF = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$; $FG = \frac{1}{2}CJ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{GH}{SA} = \frac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \frac{3a}{4}$.

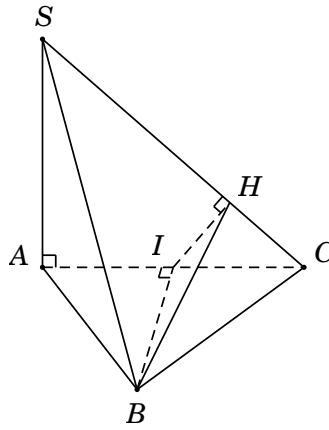
Vậy $S_{EFGH} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

- A. $S_{\triangle BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{10}$. B. $S_{\triangle BIH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. C. $S_{\triangle BIH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. D. $S_{\triangle BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC , suy ra $BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)

Kẻ $IH \perp SC$ ($H \in SC$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH .

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên $\triangle IBH$ vuông tại I .

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS , suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI \cdot SA}{CS} = \frac{CI \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle IBH} = \frac{1}{2} BI \cdot IH = \frac{a^2 \sqrt{15}}{20}.$$

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b . Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC . Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C .

A. $a > b\sqrt{2}$.

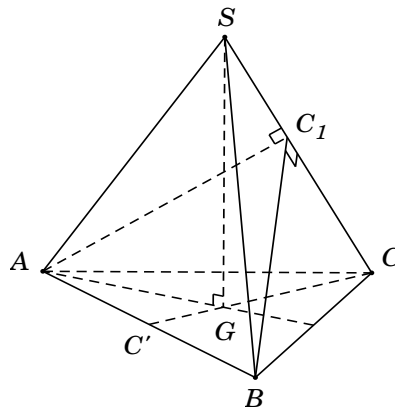
B. $a > b\sqrt{3}$.

C. $a < b\sqrt{2}$.

D. $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB . Suy ra C, C', G thẳng hàng.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC. \quad (1)$$

Trong tam giác SAC , kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC .

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^\circ$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \rightarrow a < b\sqrt{2}.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10.

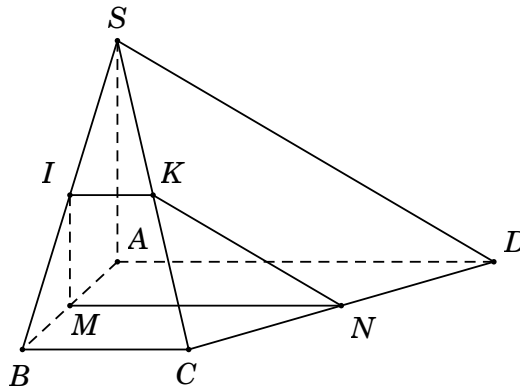
B. 20.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) \parallel SA$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M .

Ta có:

$$MI \text{ là đường trung bình của tam giác } SAB \Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3.$$

$$IK \text{ là đường trung bình của tam giác } SBC \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3.$$

$$MN \text{ là đường trung bình của hình thang } ABCD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7.$$

$$\text{Vậy } S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2} \cdot MI = 15.$$

Câu 29: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O , đường cao AA' ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' ($M \neq A'$; $M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA' . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJE} = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

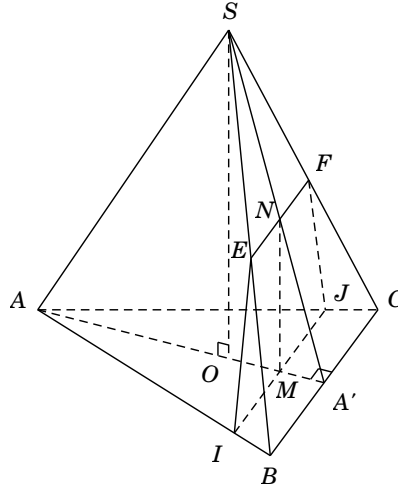
B. $S_{IJE} = 2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

C. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$.

D. $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MN \parallel SO$ với $N \in SA'$.

Qua N kẻ $EF \parallel BC$ với $E \in SB, F \in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJE} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$.

Tam giác ABC , có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SBC , có $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA'} = \frac{OM}{OA'} \Rightarrow EF = \frac{OM \cdot BC}{OA'} = 2(x\sqrt{3} - a)$.

Tam giác SOA' , có $\frac{MN}{SO} = \frac{MA'}{OA'} \Rightarrow MN = \frac{SO \cdot MA'}{OA'} = 2(3a - 2x\sqrt{3})$.

Vậy $S_{IJE} = \frac{2}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(3a - 2x\sqrt{3}) = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2)$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{7}$.

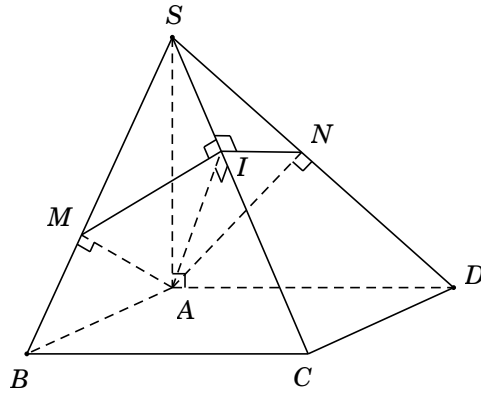
B. $S_{AMIN} = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

C. $S_{AMIN} = \frac{6a^2\sqrt{6}}{35}$.

D. $S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC , kẻ $AI \perp SC$ ($I \in SC$).

Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M .

Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N .

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

Do đó $S_{AMIN} = S_{\triangle AMI} + S_{\triangle ANI} = \frac{1}{2} AM \cdot MI + \frac{1}{2} AN \cdot NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$$AM = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}; AI = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2}; AN = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Suy ra } MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5} \text{ và } NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{7}.$$

$$\text{Vậy } S_{AMIN} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{5} + \frac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{7} \right) = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}.$$

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB' . Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân.

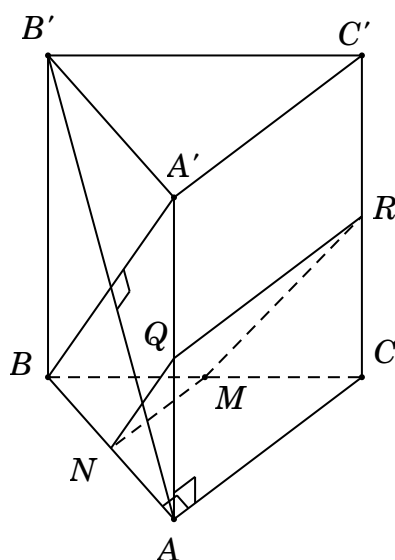
B. Hình thang vuông.

C. Tam giác.

D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.

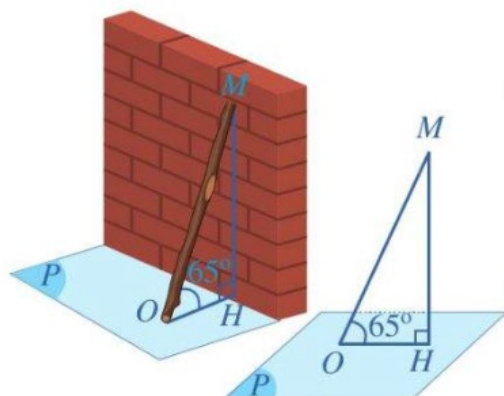
Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

BÀI 3. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Hình 32 biểu diễn một chiếc gậy dựa vào tường. Bạn Hoa nói góc nghiêng giữa chiếc gậy và mặt đất bằng 65° . Góc nghiêng giữa chiếc gậy và mặt đất được hiểu như thế nào?



Hình 32

I. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

HD1. Quan sát Hình 32 và cho biết:

- Hình chiếu của đường thẳng MO trên mặt phẳng (P) là đường thẳng nào;
- Góc giữa đường thẳng MO và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (P) là góc nào.

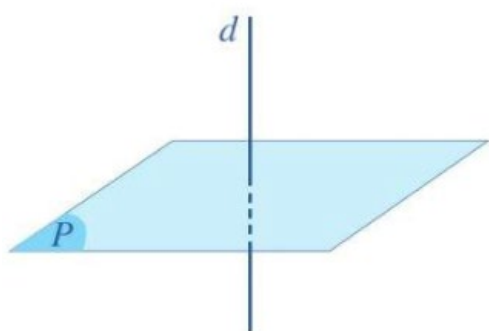
Lời giải

- Hình chiếu của đường thẳng MO trên mặt phẳng (P) là OH .
- Góc giữa đường thẳng MO và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (P) là $\widehat{MOH}$.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) , ta có định nghĩa sau:

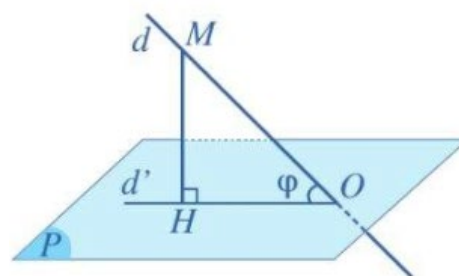
- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90° .
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P) .

d vuông góc với (P)

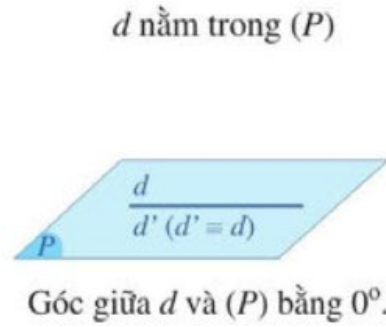
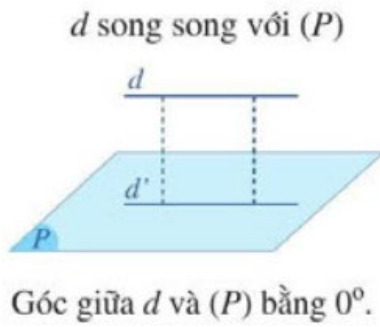


Góc giữa d và (P) bằng 90° .

d cắt (P) nhưng không vuông góc với (P)



Góc giữa d và (P) bằng góc MOH .

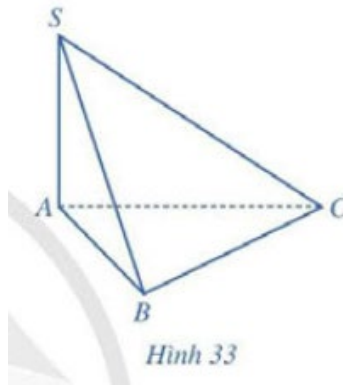


Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0° đến 90° .

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ (Hình 33).

- Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) theo đơn vị độ.
- Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) theo đơn vị độ, biết $SA = \sqrt{3}AB$.

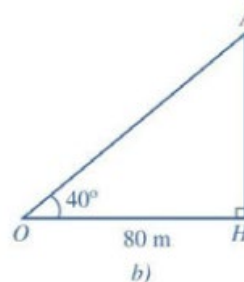
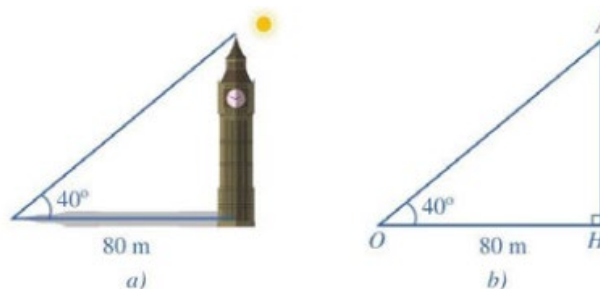
Lời giải



- Vì $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 90° .
- Vì $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB trên (ABC) . Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SBA}$. Xét tam giác vuông SBA . Vì $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3}$ nên $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

Ví dụ 2. Bài toán đo chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp.

Để ước lượng chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp, người ta đo góc giữa tia nắng chiếu qua đỉnh tháp và mặt đất, từ đó ước lượng được chiều cao của tháp. Giả sử khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 40° , chiều dài của bóng tháp là $80m$ (Hình 34a). Tính chiều cao của tháp theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 34

Lời giải

Xét Hình 34b, độ dài AH chỉ chiều cao của tháp, độ dài OH chỉ chiều cao của bóng tháp, độ lớn của góc AOH chỉ số đo góc giữa tia nắng và mặt đất. Vì tam giác OAH vuông tại H nên $AH = OH \cdot \tan \widehat{AOH} = 80 \cdot \tan 40^\circ \approx 67,1(m)$

Luyện tập 1. Giả sử ở những giây đầu tiên sau khi cất cánh, máy bay chuyển động theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc 20° và có tốc độ 200 km/h . Tính độ cao của máy bay so với mặt đất theo đơn vị mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Để giải bài toán này, ta sử dụng công thức tính độ cao của một vật chuyển động theo đường thẳng với vận tốc ban đầu và gia tốc: $h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

Để tìm vận tốc ban đầu và gia tốc của máy bay, ta cần áp dụng kiến thức về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Trong trường hợp này, góc giữa đường thẳng của máy bay và mặt đất là 20° . Ta có thể sử dụng hệ thức sau để tính vận tốc ban đầu của máy bay theo đường thẳng:

$$\sin(20^\circ) = \frac{v_0}{200} \Rightarrow v_0 = 200 \cdot \sin(20^\circ) \approx 68,4 \text{ m/s}$$

Gia tốc của máy bay trong trường hợp này là gia tốc tự do $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (giả sử không có lực cản khí). Vì máy bay đang chuyển động theo đường thẳng, nên gia tốc của nó chỉ có hướng lên trên, bằng giá trị của gia tốc tự do.

Sau 2 giây kể từ khi máy bay cất cánh, thời gian đã trôi qua là $t = 2$ giây. Áp dụng công thức trên, ta tính được độ cao của máy bay so với mặt đất như sau: $h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \approx 88 \text{ m}$

II. GÓC NHỊ DIỆN

1. KHÁI NIỆM

Một đường thẳng nằm trong một mặt phẳng chia mặt phẳng đó thành hai phần, mỗi phần được gọi là một nửa mặt phẳng và đường thẳng đó được gọi là bờ của mỗi nửa mặt phẳng này.



Quan sát hình ảnh một quyển sổ được mở ra (Hình 35), mỗi trang sổ gợi nên hình ảnh của một nửa mặt phẳng. Nêu đặc điểm của hai nửa mặt phẳng đó.



Hình 35

Hai nửa mặt phẳng đó có chung bờ là đường thẳng đi qua gáy sổ. Hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng có chung bờ đó là góc nhị diện.



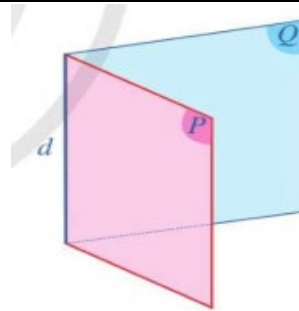
Lời giải

Đặc điểm của hai mặt phẳng đó : Hai nửa mặt phẳng có chung bờ

Ta có khái niệm sau:

Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ

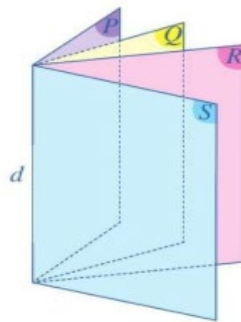
Trong Hình 36, ta có góc nhị diện gồm hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) có chung bờ là đường thẳng d , kí hiệu $[P, d, Q]$. Đường thẳng d gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng (P) và (Q) là một mặt của góc nhị diện.



Hình 36

Chú ý: Góc nhị diện còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N lần lượt là các điểm thuộc các nửa mặt phẳng (P) và (Q) nhưng không thuộc đường thẳng d .

Ví dụ 3: Trong không gian cho bốn nửa mặt phẳng $(P), (Q), (R), (S)$ cắt nhau theo giao tuyến d (Hình 37). Hãy chỉ ra ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d .



Hình 37

Lời giải

Ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d , hai mặt lần lượt là: (P) và (Q) ; (Q) và (R) ; (R) và (S) .

Luyện tập 2. Trong không gian cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau theo giao tuyến d . Hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ tạo nên bao nhiêu góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d ?

Lời giải

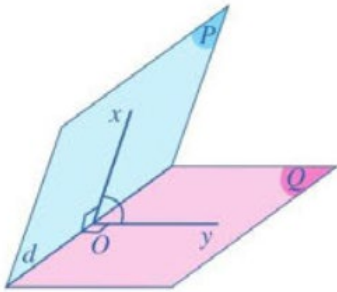
Số góc nhị diện mà hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ tạo ra bằng số điểm trên đường thẳng d .

2. Số đo của góc nhị diện

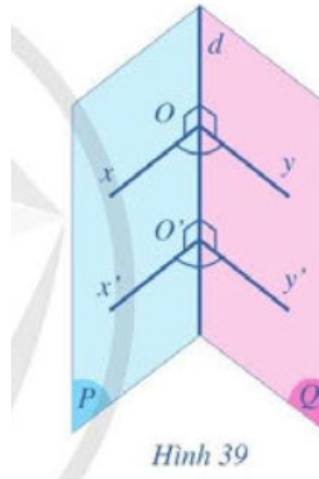
HD 3. Cho góc nhị diện có hai mặt là hai nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ và cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d .

Qua một điểm O trên đường thẳng d , ta kẻ hai tia Ox, Oy lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ và cùng vuông góc với đường thẳng d . Góc xOy gọi là *góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện đã cho (Hình 38)

Giả sử góc $x'O'y'$ cũng là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho với O' khác O (Hình 39).
Hãy so sánh số đo của hai góc xOy và $x'O'y'$.



Hình 38



Hình 39

Lời giải

Số đo hai góc bằng nhau

Nhận xét:

- Số đo góc phẳng nhị diện xOy không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trên cạnh nhị diện và được gọi là số đo của góc nhị diện đã cho.
- Số đo của góc nhị diện từ 0° đến 180° . Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

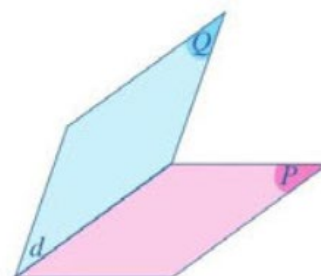
Trong không gian, cho góc nhị diện.

- Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là *góc phẳng nhị diện* của góc nhị diện đã cho.
- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.
- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 4: Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát Hình 40 và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



a)



b)

Hình 40

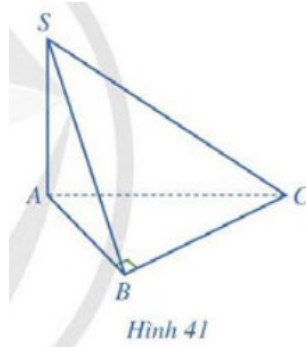
Lời giải

Giả sử nửa mặt phẳng (P) (minh hoạ mặt phẳng nằm ngang) và nửa mặt phẳng (Q) (minh hoạ mái nhà) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình 40b). Khi đó góc nhị diện có cạnh là đường thẳng d , hai mặt lần lượt là (P) và (Q) phản ánh độ dốc của mái. Độ dốc đó cũng được phản ánh bởi góc phẳng nhị diện xOy của góc nhị diện trên (Hình 40a).

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ (Hình 41). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$

b) $[A, BC, S]$.



Lời giải

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$. Do đó, góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$ bằng 45° .

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Như vậy BC vuông góc với hai đường thẳng AB và SB , suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, S]$.

Trong tam giác vuông SAB , ta có:

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

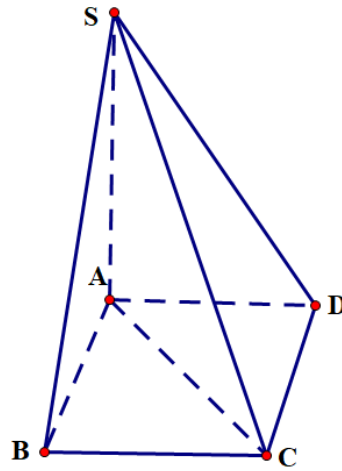
Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$ bằng 60° .

Luyện tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Tính số đo theo đơn vị độ của góc nhị diện:

a) $[B, SA, D]$;

b) $[B, SA, C]$.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow AD \perp AB \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AC vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAC}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, C]$

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = BC = a, \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BAC$ vuông cân tại B

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

1. Phương pháp

Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC) .

Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) .

$$\text{Vậy } \widehat{(SA; (ABC))} = \widehat{(SA; HA)} = \widehat{SAH}.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC.

a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .

b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABC)}) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

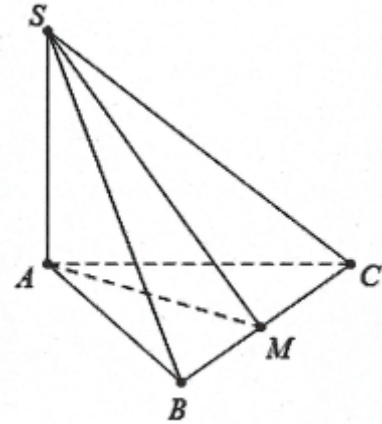
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; (\widehat{SC; (ABC)}) = \widehat{SCA}$.

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SM; (ABC)}) = \widehat{SMA} = \varphi$.

$$\text{Ta có: } AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \varphi = \frac{AM}{SM} = \frac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\sqrt{133}}{19}.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a; AD = a$. Tam giác (SAB) đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

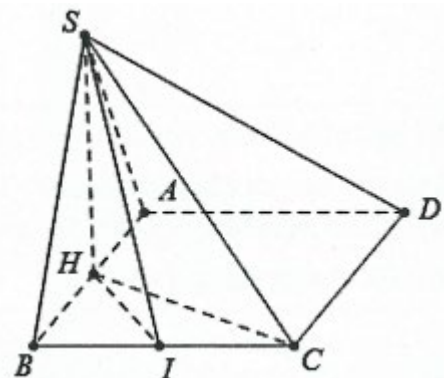
$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABCD)}) = \widehat{SBH} = 60^\circ$

$$(\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCH} \text{ và } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{b) Ta có: } HI = \sqrt{HB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } (\widehat{SI; (ABCD)}) = \widehat{SIH} \text{ và } \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{SI} = a\sqrt{3} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 45° .

a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC, SD và mặt đáy (ABCD).

b) Gọi I là trung điểm của CD, tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng (ABCD).

Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABCD)}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan 45^\circ = a$

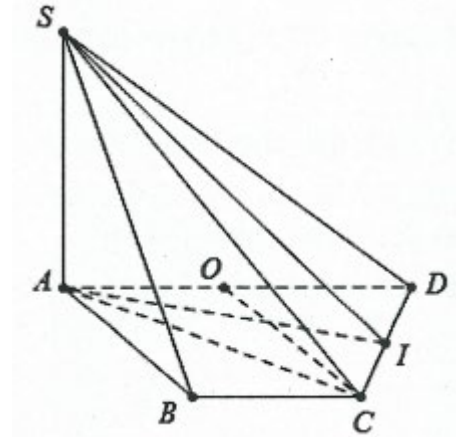
$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos(\widehat{SC; (ABC)}) = \cos \widehat{SCA}$

$$= \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos(\widehat{SD; (ABCD)}) = \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

b) Ta có: $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$

Do đó $\tan(\widehat{SI; (ABCD)}) = \tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$



Dạng 2: Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao

1. Phương pháp

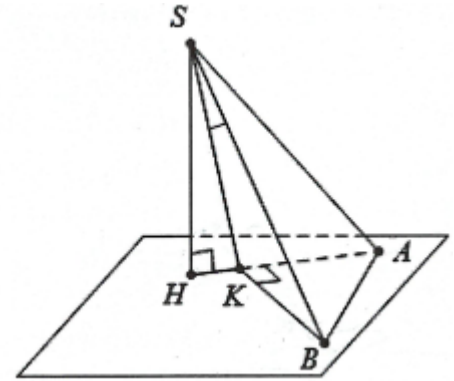
Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA) với

$(SHA) \perp (ABH).$

Dựng $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA).$

Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH).

Vậy $(\widehat{SB; (SAH)}) = (\widehat{SB; SK}) = \widehat{BSK}.$



2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB); SC và mặt phẳng (SAD).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a \end{cases}$$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow (\widehat{SC; (SAB)}) = \widehat{CSB}$.

$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{CSB} = \frac{SB}{SC} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Tương tự $CD \perp (SAD) \Rightarrow (\widehat{SC; (SAD)}) = \widehat{CSD}$ và $\cos \widehat{CSD} = \frac{SD}{SC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Ta có: $AC \perp BD$ tại O. Khi đó $OA = OC, OB = OD$.

Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh a.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Suy ra $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

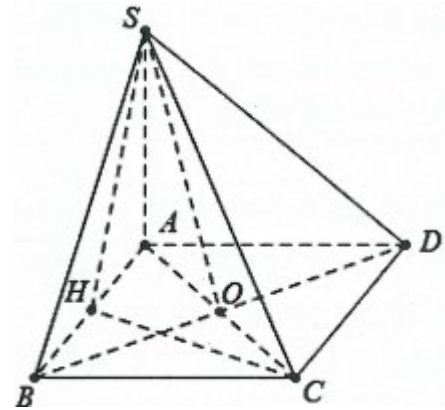
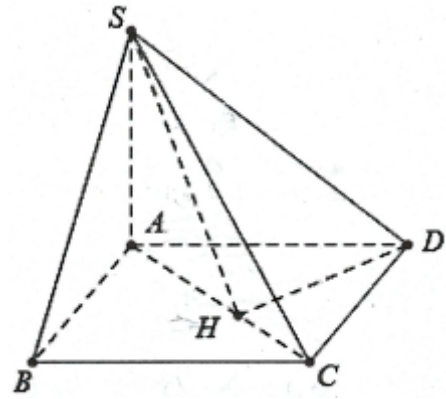
Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow (\widehat{SC; (SAB)}) = \widehat{CSH}$.

Do $\triangle ABC$ đều cạnh a nên H là trung điểm của AB.

Ta có: $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{CSH} = \frac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan \widehat{CSH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SD; (SAC)}) = \widehat{DSO}$ và $\tan \widehat{DSO} = \frac{OD}{SO}$.



Trong đó $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{DSO} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB = 3, AD = 6$ và $SH = 2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD). b) SB và mặt phẳng (SHC).

Lời giải

a) Ta có: $AH = 1, HB = 2 \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow (\widehat{SA; (SHD)}) = \widehat{ASE}$

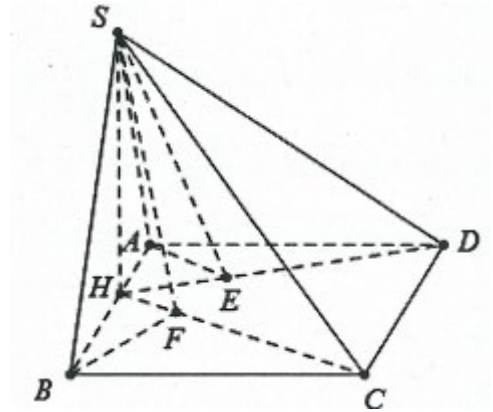
Mặt khác $AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{6}{\sqrt{37}}$

Suy ra $\tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{6}{\sqrt{185}}$.

b) Dựng $BF \perp HC \Rightarrow BF \perp (SHC)$.

Khi đó $(\widehat{SB; (SHC)}) = \widehat{BSF}$, $BF = \frac{BH \cdot BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ta có: $\tan(\widehat{SB; (SHC)}) = \tan \widehat{BSF} = \frac{BF}{SB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.



Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABCD) trùng với tâm O của hình chữ nhật ABCD, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng ($A'BD$).

Lời giải

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow OA = 2a = OC$.

Do $A'O \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{A'O; (ABCD)}) = \widehat{A'AO} = 60^\circ$.

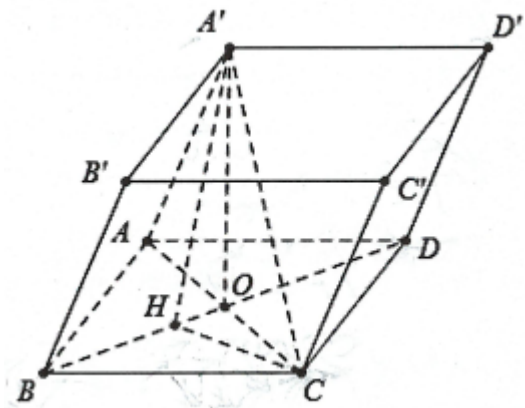
$\Rightarrow A'O = OA \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

Dựng $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (A'BD)$

$\Rightarrow (\widehat{A'C; (A'BD)}) = \widehat{CA'H}$.

Ta có: $CH = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = a\sqrt{3}$,

$A'C = \sqrt{OA'^2 + OC^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.



$$\text{Suy ra } \cos \widehat{CA'H} = \frac{A'H}{A'C} = \frac{\sqrt{A'C^2 - HC^2}}{A'C} = \frac{\sqrt{16a^2 - 3a^2}}{4a} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

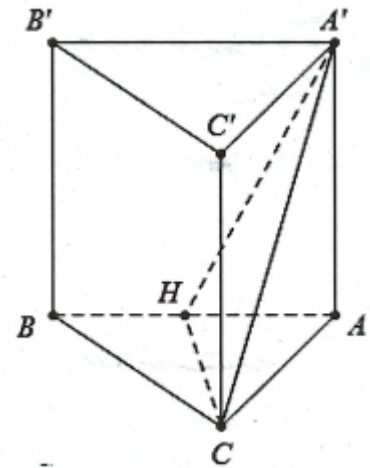
$$\text{Dựng } CH \perp AB \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow (\widehat{A'C; (ABB'A')}) = \widehat{CA'H}.$$

$$\text{Lại có: } A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \tan \widehat{CA'H} = \frac{CH}{A'H} = 1 \Rightarrow \widehat{CA'H} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy } (\widehat{A'C; (ABB'A')}) = \widehat{CA'H} = 45^\circ.$$



Dạng 3: Góc giữa đường cao và mặt bên

1. Phương pháp

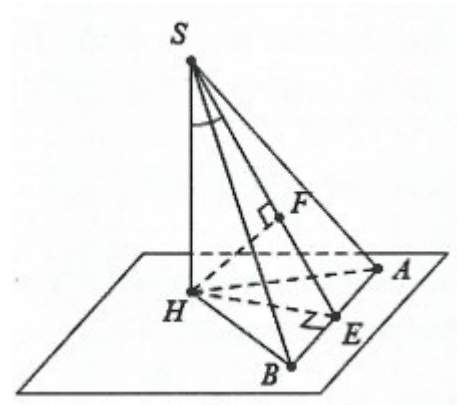
Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB) .

Dựng $HE \perp AB, HF \perp SE$.

Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.

Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB) .

$$\text{Vậy } (\widehat{SH; (SAB)}) = (\widehat{HF; SF}) = \widehat{HSF}.$$



2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.

Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

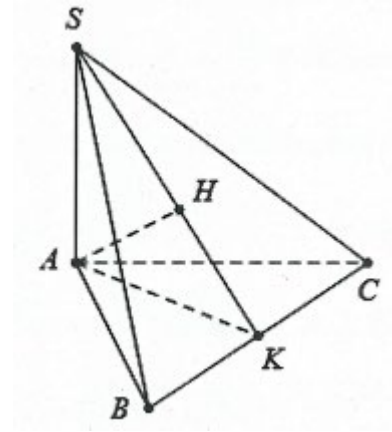
Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{(SA; (SBC))} = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $\widehat{ASK} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{(SA; (SBC))} = 45^\circ$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$.

Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SBD)$ và (SCD) .

Lời giải

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC) .

Khi đó: $\widehat{(SA; (SBC))} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha$.

Do đó $\tan \alpha = \frac{AB}{SA} = \frac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $\widehat{(SA; (SCD))} = \widehat{ASD} = \beta$ và $\tan \beta = \frac{AD}{SA} = 1$.

Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AF$.

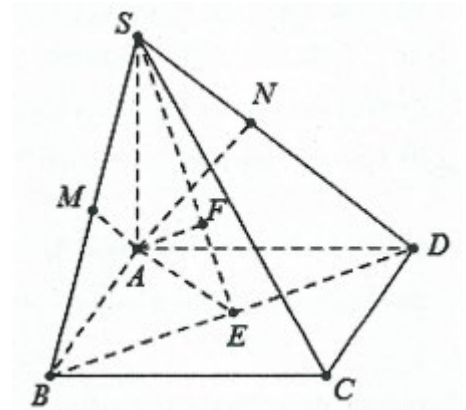
Mặt khác $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBD) \Rightarrow \widehat{(SA; (SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Khi đó $\tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA}$, trong đó $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SCD)$ và (SBD) .

Lời giải

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Suy ra $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

Dựng $AM \perp SB$, có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) .

Suy ra: $\widehat{(SA; (SBC))} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan \widehat{ASB} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a $\Rightarrow CI = \frac{AD}{2} = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C. Khi đó

$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Dựng $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{(SA; (SCD))} = \widehat{ASN} = \widehat{ASC}$. Ta có: $\tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SA; (SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Mặt khác $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{30}}{15}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính tan góc tạo bởi SA và (SBC) .

b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD) .

Lời giải:

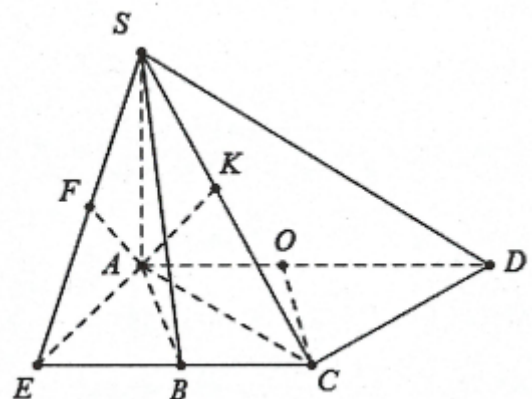
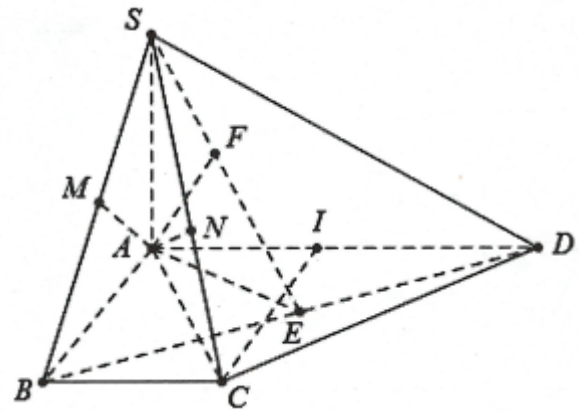
a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB; (ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AE \perp BC, AF \perp SE \Rightarrow \widehat{(SA; (SBC))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 60^\circ$.



Mặt khác $AE = AB \sin \widehat{ABE} = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan(\widehat{SA; (SBC)}) = \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{2}$.

b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $(\widehat{SA; (SCD)}) = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

Ta có: $\tan \varphi = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$. Vậy $(\widehat{SA; (SCD)}) = 45^\circ$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB , đường cao $B'H = \frac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

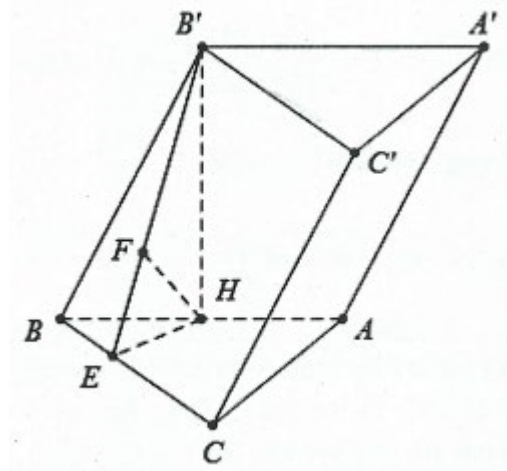
Lời giải

Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra

$BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC') \Rightarrow (\widehat{B'H; (BCC'B')}) = \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB \sin \widehat{HBE} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos \widehat{HB'E} = \frac{B'H}{B'E} = \frac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Loại 4: Góc giữa cạnh bên và mặt bên (Nâng cao)

Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng (SAB) . Đặt $(\widehat{SC; (SAB)}) = \varphi (0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$.

Ta có công thức: $\sin \varphi = \frac{d(C; (SAB))}{SC}$.

Từ đó suy ra các giá trị $\cos \varphi$ hoặc $\tan \varphi$ nếu đề bài yêu cầu.

Dạng 4: Tính góc dựa vào khoảng cách

Để hiểu được nội dung này các bạn phải nắm được kiến thức về khoảng cách, nếu chưa rõ thì sau khi học xong khoảng cách quay lại nghiên cứu nội dung này nhé!

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = 2a, AB = a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SB tạo với đáy một góc 30° . Tính sin góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SBC) . b) SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AD ta có: $SH \perp AD$

Lại có: $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $HA = a; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB; (ABCD))} = \widehat{SBH} = 30^\circ$

Suy ra $SH = HB \tan 30^\circ = a$.

a) Do $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.

Do vậy $d(A; (SBC)) = d(H; (SBC))$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HF \perp SE \end{cases}$ ta có: $BC \perp HF$ từ đó suy ra $HF \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(H; (SBC)) = HF = d(A; (SBC))$. Ta có: $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = a\sqrt{2} = SD$.

Mặt khác: $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin \widehat{(SA; (SBC))} = \frac{d(A; (SBC))}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Dựng $HN \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHN)$, dựng $HI \perp SN \Rightarrow HI \perp (SAC)$

Do $\frac{DA}{HA} = 2 = \frac{d(D; (SAC))}{d(H; (SAC))} \Rightarrow d(D; (SAC)) = 2d(H; (SAC)) = 2HI$

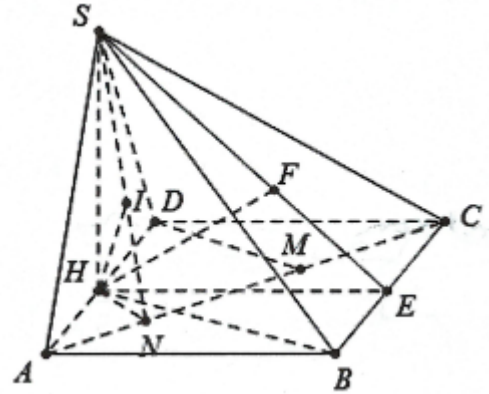
Dựng $DM \perp AC \Rightarrow DM = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow HN = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HI = \frac{HN \cdot SH}{\sqrt{HN^2 + SH^2}} = \frac{a}{2} \Rightarrow d(D; (SAC)) = a$.

Ta có: $\sin \widehat{(SD; (SAC))} = \frac{d(D; (SAC))}{SD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a\sqrt{3}; AD = a$, tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Gọi O là trung điểm của BD ta có: $SO \perp BC$ mặt khác



$$(SBD) \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp (ABC)$$

$$\text{Ta có: } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SO = \frac{1}{2}BD = a.$$

$$\text{Dựng } OE \perp BC, OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC).$$

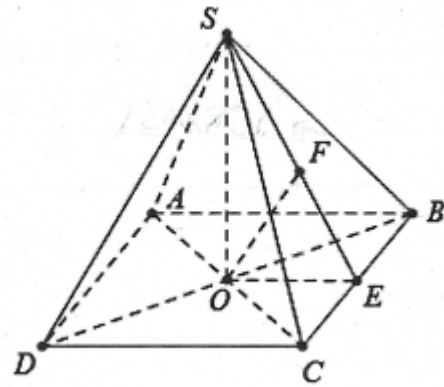
$$d(D; (SBC)) = 2d(O; (SBC)) = 2HF$$

$$\text{Ta có: } HE = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow OF = \frac{SH.OE}{\sqrt{SH^2 + OE^2}} = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Suy ra } d(A; (SBC)) = \frac{2a\sqrt{21}}{7}. \text{ Mặt khác } SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } \sin(\widehat{SA; (SBC)}) = \frac{d(A; (SBC))}{SA} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$



Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a; AC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của BC. Biết $A'H = a\sqrt{2}$. Tính cosin góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải

Dựng $HE \perp AC$ và $HF \perp A'E$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp HE \end{cases} \Rightarrow AC \perp HF \Rightarrow HF \perp (AA'C).$$

$$\text{Khi đó } d(H; (AA'C)) = HF.$$

$$\text{Lại có } BC = 2HC \text{ nên } d(B; (AA'C)) = 2d(H; (AA'C)).$$

Mặt khác ME là đường trung bình trong tam giác ABC nên

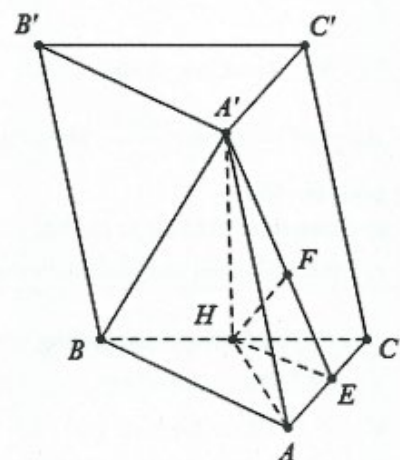
$$ME = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } HF = \frac{HE.A'M}{\sqrt{HE^2 + A'M^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } d(B; (AA'C)) = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

$$\text{Lại có } A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = a\sqrt{3}.$$

Suy ra



$$\sin(\widehat{A'B; (A'AC)}) = \sin \varphi = \frac{d(B; (A'AC))}{BA'} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{57}}{9}.$$

Dạng 5: Xác định và tính số đo của góc phẳng nhị diện

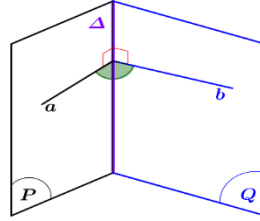
1. phương pháp:

+ Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$.

Bước 2: Tìm $a \subset (P): a \perp \Delta$ và $b \subset (Q): b \perp \Delta$.

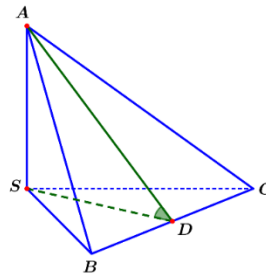
Bước 3: Kết luận $[P, \Delta, Q]$



2. Ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Tính $\cos \alpha$?

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC .

Suy ra $SD \perp BC$ (vì tam giác SBC cân tại S).

$$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC.$$

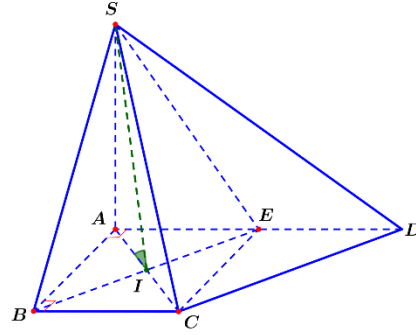
Và $SD \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SD \perp BC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SDA} = \alpha.$$

$$\text{Xét } \triangle SAD \text{ vuông tại } S, \text{ ta có: } \cos \alpha = \cos \widehat{SDA} = \frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AD = 2a, AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

Lời giải



Nhận xét: $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a .

Gọi $I = AC \cap BE$.

Ta có: $\begin{cases} BE \perp AI \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAI) \Rightarrow BE \perp SI$.

Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABE) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases} \Rightarrow [S, BE, A] = \widehat{SIA}$

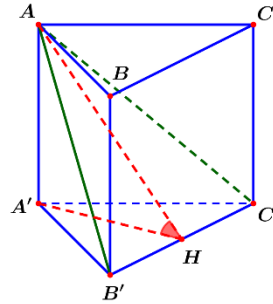
Xét $\triangle SIA$ vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{IA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ.$$

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ ?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh $B'C'$. Suy ra $A'H \perp B'C'$.



Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'AH) \Rightarrow B'C' \perp AH$.

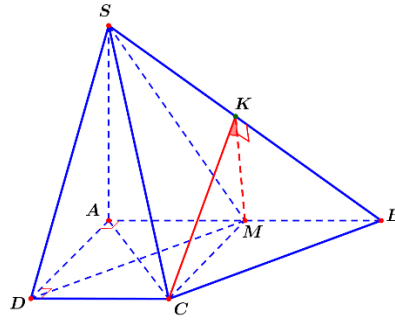
$\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}$.

Xét $\triangle A'AH$ vuông tại A , ta có:

$$\tan \widehat{A'HA} = \frac{AA'}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'HA} = \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C, SB, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAB) , từ M kẻ $MK \perp SB$ tại K .

Khi đó: $\begin{cases} SB \perp MK \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMK) \Rightarrow SB \perp CK$.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ MK \perp SB \\ CK \perp SB \end{cases} \Rightarrow [C, SB, A] = \widehat{CKM}$.

$\triangle BKM \sim \triangle BAS$ nên $\frac{KM}{SA} = \frac{BM}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow KM = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle CKM$ vuông tại M , ta có:

$$\tan \widehat{CKM} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CKM} = 60^\circ.$$

Ví dụ 5. $S.ABC$ có cạnh đáy $3a$, cạnh bên $2a$. Tính số đo nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC thì

$mp(SAM) \perp BC$ từ đó $\widehat{SMA}$ là góc

phẳng nhị diện $[S, BC, A]$

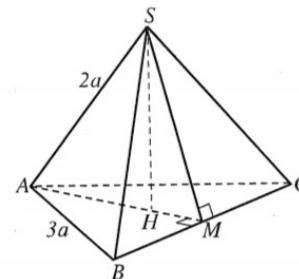
Ta có $AM = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$, từ đó $HM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = 4a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}, \text{ từ đó } SM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Số đo nhị diện $[S, BC, A]$ là φ được xác định bởi

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}, 0^\circ < \varphi < 180^\circ.$$



Ví dụ 6. Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P) . Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P) . Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

- a. Tính độ dài BC;
b. Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

Lời giải

a. Vì $MA \perp mp(P)$ nên $\widehat{MBA}$ và $\widehat{MCA}$

là góc giữa MB và MC với mp (P).

Theo giả thiết. $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^\circ$.

Từ đó $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

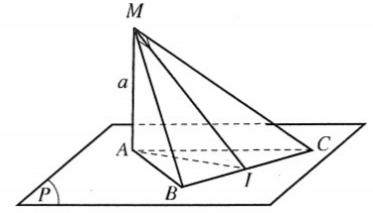
Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp mp(MIA)$,

Từ đó $\widehat{MIA}$ là góc phẳng nhị diện $[M, BC, A]$.

Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$. $\sin \varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Vậy góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng 45° .

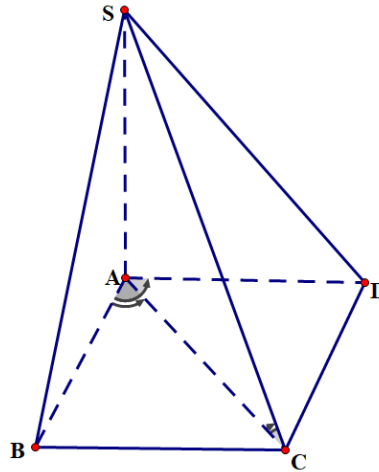


C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

- a) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.
b) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.
c) Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AC vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAC}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, C]$

Do ABCD là hình thoi $\Rightarrow AB = BC = a$

Mà $AC = a$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$

Do ABCD là hình thoi $\Rightarrow AD = DC = a$

Mà $AC = a$

$\Rightarrow$ Tam giác ADC đều $\Rightarrow \widehat{DAC} = 60^\circ$

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC} + \widehat{BAC} = 120^\circ$$

c) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) là : $\widehat{SCA}$

Xét tam giác SCA vuông tại A

$$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1$$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$$

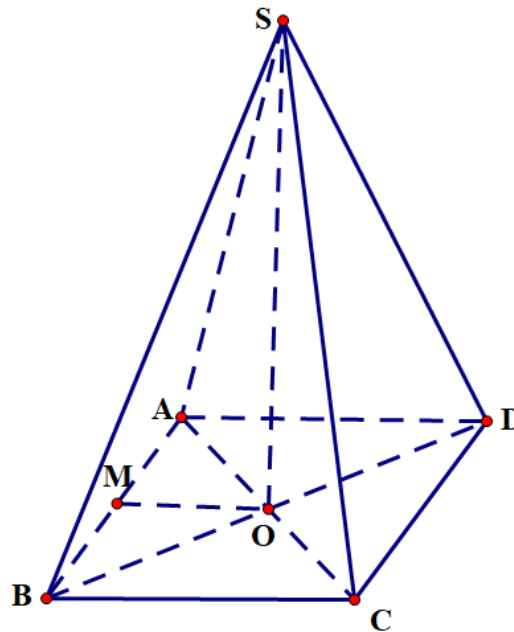
Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O , $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều.

a) Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $AC \perp (SBD)$. Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

c) Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính số đo của góc nhị diện $[M, SO, D]$.

Lời giải



$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}$$

Tam giác SAC là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ$

$$\Rightarrow (SA, (ABCD)) = 60^\circ$$

b) ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC$$

$$\Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$$\Rightarrow (SA, (SBD)) = (SA, SO) = \widehat{ASO} = \frac{1}{2} \widehat{ASC} = 30^\circ$$

$$c) SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp MO, SO \perp DO$$

$$\Rightarrow \widehat{MOD} \text{ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện } [M, SO, D]$$

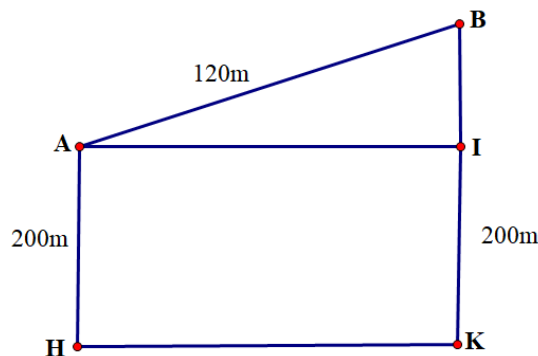
$$\text{Có } ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$$

$$\text{Tam giác } AMO \text{ vuông cân tại } M = \widehat{AOM} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{AOM} + \widehat{AOD} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Bài 3. Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100%, tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là 200m và 220m so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120m. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải



Mô hình hoá như hình vẽ, với AB là chiều dài con dốc, AH là độ cao của điểm A so với mặt nước biển, BK là độ cao của điểm B so với mặt nước biển, BI là chiều cao của con dốc, độ lớn của góc $\widehat{BAI}$ chỉ độ dốc.

Ta có: $AH = 200, BK = 220, AB = 120$.

$AHKB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IK = AH = 200 \Rightarrow BI = BK - IK = 220 - 200 = 20$

Vì tam giác ABI vuông tại I nên ta có:

$$\sin \widehat{ABI} = \frac{BI}{AB} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \widehat{ABI} \approx 9,59^\circ \text{ tương ứng với } 10,66\%$$

Vậy độ dốc của con dốc đó là 10,66%.

Bài 4. Trong hình 42, máy tính xách tay đang mở gọi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính theo đơn vị độ, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.



Hình 42

Lời giải

Gọi d là đường thẳng chứa bản lề của máy tính.

$$d \perp AB, d \perp AC$$

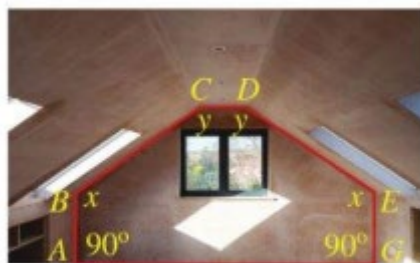
Vậy $\widehat{BAC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện cần tính.

Xét $\triangle ABC$ có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{30^2 + 30^2 - (30\sqrt{3})^2}{2 \cdot 30 \cdot 30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$$

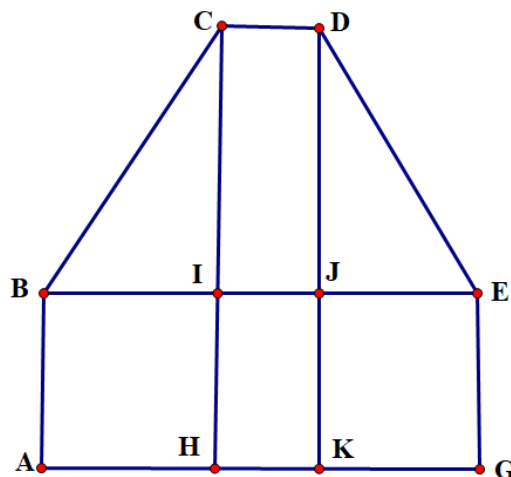
Vậy độ mở của màn hình máy tính bằng 120° .

Bài 5. Trong hình 43, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2\text{ m}$, $BC = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x$, $\widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là 4 m , $AG = 12\text{ m}$, $CD = 1\text{ m}$. Tìm x , y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

Lời giải



Kẻ $CH \perp AG (H \in AG), DK \perp AG (K \in AG)$

Gọi $I = BE \cap CH, J = BE \cap DK$.

$ABEG$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BE = AB = 12$

$CDKH, CDJI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = IJ = CD = 1$

$ABIH, EGKJ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH = JK = AB = 2$

$$AH = GK = BI = EJ = \frac{AG - HK}{2} = \frac{12 - 1}{2} = 5,5$$

$$CH = d(C, AG) = 4 \Rightarrow CI = CH - IH = 4 - 2 = 2$$

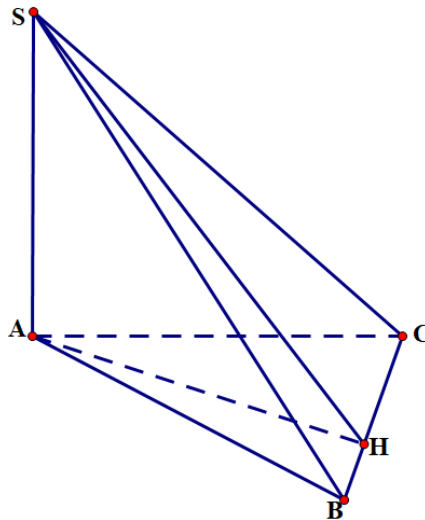
$$\Delta BCI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} \Rightarrow \widehat{CBI} \approx 19,98^\circ$$

$$\Rightarrow x = \widehat{ABI} + \widehat{CBI} = 90^\circ + 19,98^\circ = 110,0^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - x = 180^\circ - 110,0^\circ = 70,0^\circ$$

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi α là số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của hai tam giác ABC và SBC bằng $\cos \alpha$.

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

Vậy $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, S]$

$$\Rightarrow \widehat{SHA} = \alpha$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH, S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SH$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH}{\frac{1}{2} BC \cdot SH} = \frac{AH}{SH} = \cos \widehat{SHA} = \cos \alpha$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\widehat{SCB}$.

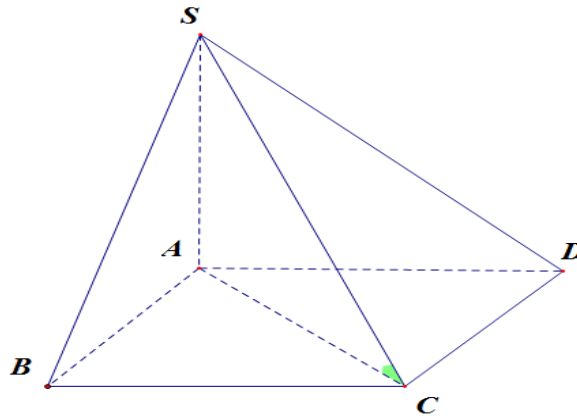
B. $\widehat{CAS}$.

C. $\widehat{SCA}$.

D. $\widehat{ASC}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Câu 2: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng chiều cao. Tính góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

A. 30° .

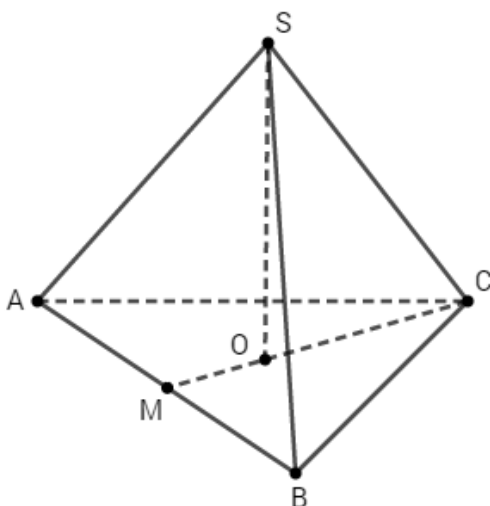
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi O trọng tâm của tam giác đều ABC . Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

$$SO \perp (ABC) \Rightarrow CO \text{ là hình chiếu của } SC \text{ trên } (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SC, (ABC)} \right) = \left(\widehat{SC, OC} \right).$$

$$\Delta SCO \text{ vuông tại } O \Rightarrow \widehat{SCO} < 90^\circ \Rightarrow \left(\widehat{SC, OC} \right) = \widehat{SCO}.$$

$$\text{Đặt } AB = SO = a. \text{ Gọi } M \text{ là trung điểm } AB \text{ thì } CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CO = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \widehat{SCO} = \frac{SO}{OC} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCO} = 60^\circ \Rightarrow \left(\widehat{SC, (ABC)} \right) = 60^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$?

A. 30° .

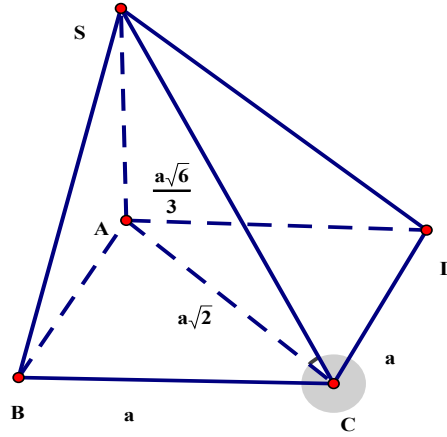
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



$$AC = a\sqrt{2},$$

AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$

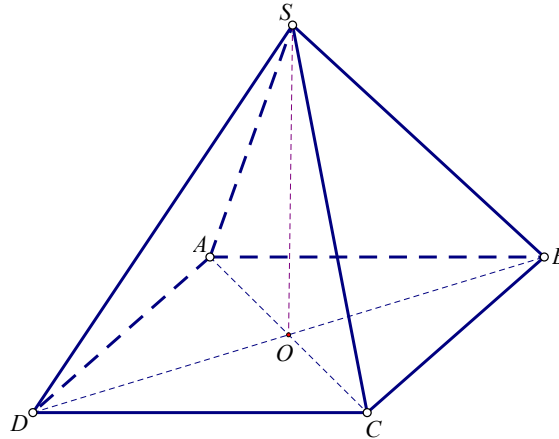
$$\Delta SAC : \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} : (a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Hai mặt phẳng $(SAC), (SBD)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

- A. (SB, SO) . B. (SB, BD) . C. (SB, SA) . D. (SO, BD) .

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $(SAC) \cap (SBD) = SO$

Vì $(SAC), (SBD)$ cùng vuông góc với đáy nên $SO \perp (ABCD)$.

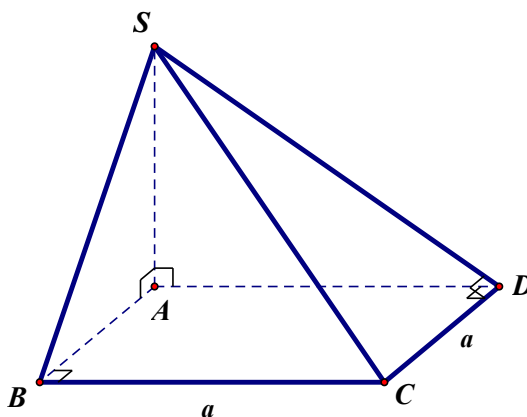
Góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$ là góc giữa SB và BD .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{SCA}$. B. $\widehat{CSA}$. C. $\widehat{SCD}$. D. $\widehat{CSD}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SC \cap (SAD) = \{S\}$

Mặt khác:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \\ AD \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD), \text{ tức là } D \text{ là hình chiếu vuông góc của } C \text{ lên } (SAD)$$

Từ, suy ra SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD) .

Vậy góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSD}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .

A. 45^0

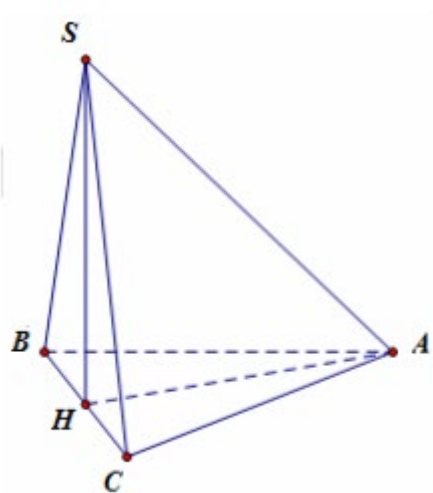
B. 75^0

C. 60^0

D. 30^0

Lời giải

Chọn A



Hai tam giác SBC, ABC là tam giác đều cạnh a , suy ra $SH = HA \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân
 $\Rightarrow \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SAH} = 45^\circ$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30°

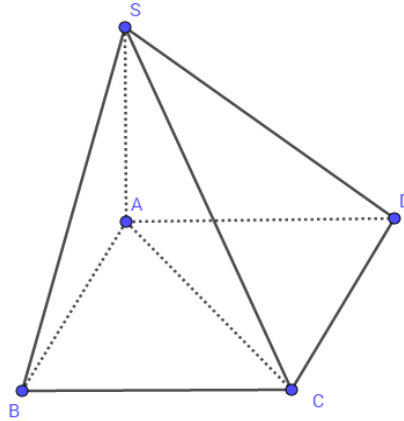
B. 60°

C. 75°

D. 45°

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC = a\sqrt{2}$

Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{SCA} = 30^\circ$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 45°

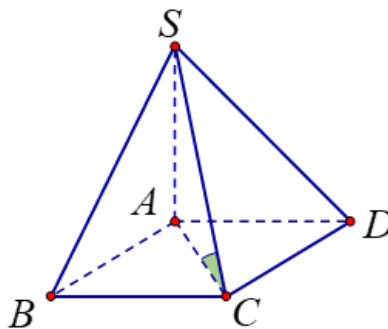
B. 30°

C. 60°

D. 75°

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{(SC; AC)} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Câu 9: Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , chiều cao $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt đáy

là

A. 60°

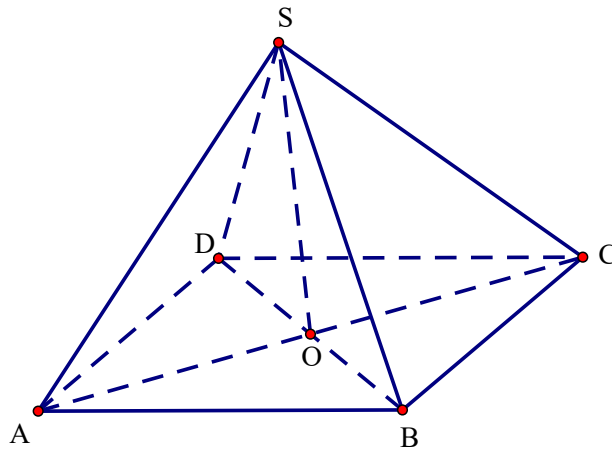
B. 15°

C. 45°

D. 30°

Lời giải

Chọn C



Gọi SO là đường cao của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Do đó góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}$.

Ta có $SO = h = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $OB = \frac{BD}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Tam giác vuông SBO tại O có $SO = OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$ nên cân tại O .

Suy ra $\widehat{SBO} = 45^\circ$

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC)

A. 45° .

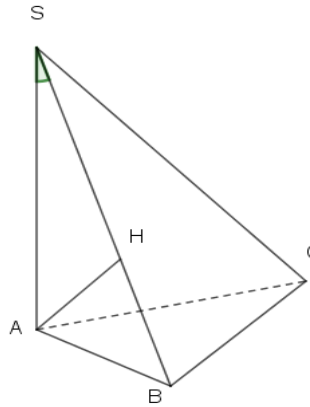
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Do tam giác ABC vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBC)$

Gọi H là hình chiếu của A lên SB khi đó $AH \perp (SBC)$ và SH là hình chiếu của AH lên mặt phẳng (SBC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\widehat{ASH}$

Trong tam giác vuông SAB $\sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ góc cần tìm là 30° .

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng:

A. 45°

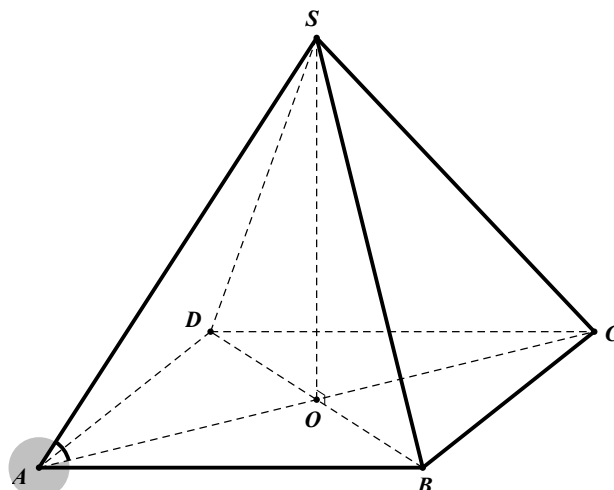
B. 75°

C. 30°

D. 60°

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SO \perp (ABCD)$

Do đó: $\left[\widehat{SA, (ABCD)} \right] = \widehat{SAO}$

Xét $\triangle SAO$ vuông tại O :

$\cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Suy ra: $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng?

A. 60° .

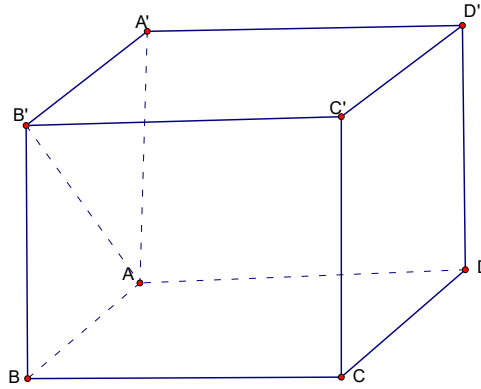
B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Góc giữa AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{B'AB} = 45^\circ$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = 2\sqrt{3}$.

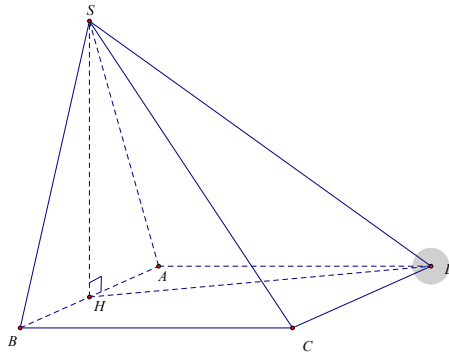
B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

D. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó, $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SD, (ABCD))} = \widehat{SDH} = \alpha$.

Ta có:

$$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

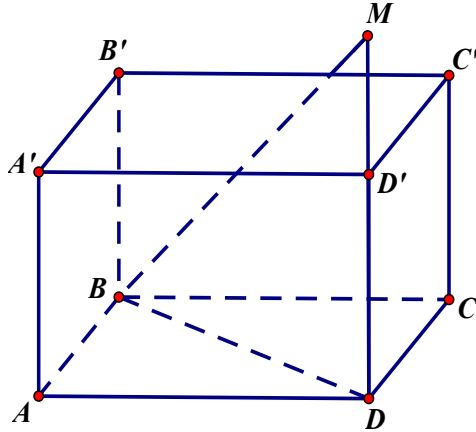
$$DH = \sqrt{AD^2 + HA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Suy ra, } \tan \alpha = \frac{SH}{DH} = \sqrt{3}.$$

- Câu 14:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là
- A. 30° B. 45° C. 75° D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Ta có BM cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại B .

$DM \perp (ABCD)$ tại D .

Suy ra $\widehat{(BM, (ABCD))} = \widehat{(BM, BD)} = \widehat{MBD}$.

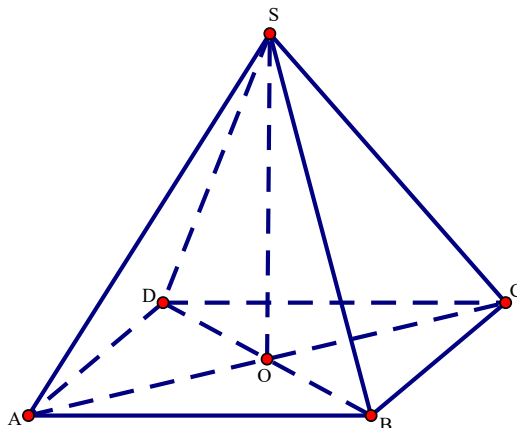
Xét tam giác DBM vuông tại D , ta có

$$\tan \widehat{MBD} = \frac{DM}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{(BM, (ABCD))} = 60^\circ.$$

- Câu 15:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng
- A. 45° B. 75° C. 30° D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra AO là hình chiếu của AS trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow (\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA; AO}) = \widehat{SAO}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA : $\cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 60° .

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là điểm nằm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

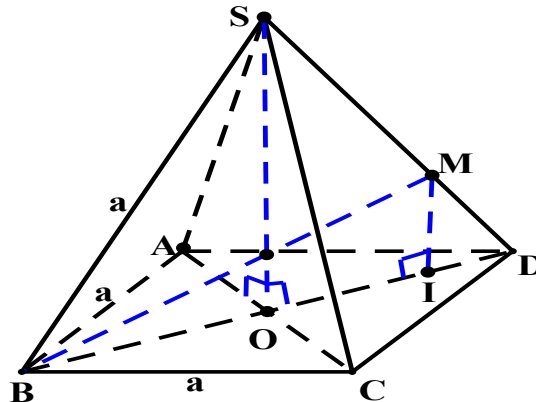
B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Xét $\triangle SAO$ vuông tại O có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MI \perp BD$ tại I . Suy ra: $MI \parallel SO$ nên $MI \perp (ABCD)$.

Vậy góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{MBI}$.

Ta có: $MI = \frac{1}{3}SO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$; $BI = \frac{5}{6}BD = \frac{5\sqrt{2}a}{6}$.

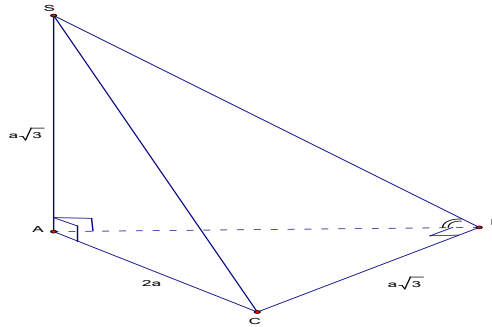
Xét $\triangle MBI$ vuông tại I ta có: $\tan \widehat{MBI} = \frac{MI}{BI} = \frac{1}{5}$.

Vậy giá trị tan của góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\frac{1}{5}$.

- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng
- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C



+ Ta có: $(SB, (ABC)) = (SB, BA) = \widehat{SBA} = \varphi$

+ Tính: $\tan \varphi = \frac{SA}{AB}$.

+ Tính: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2} = a$.

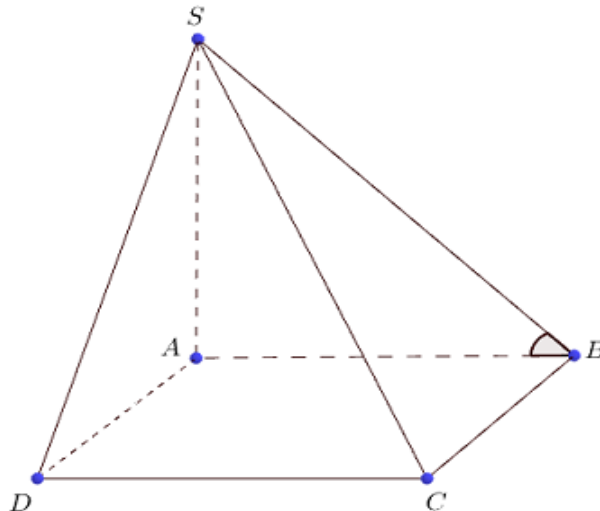
Suy ra: $\tan \varphi = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60° .

- Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng
- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mặt khác, theo giả thiết $AB \perp BC$. Do đó $BC \perp (SAB)$ nên $SB \perp BC$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° .

Câu 19: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính $\tan$ của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

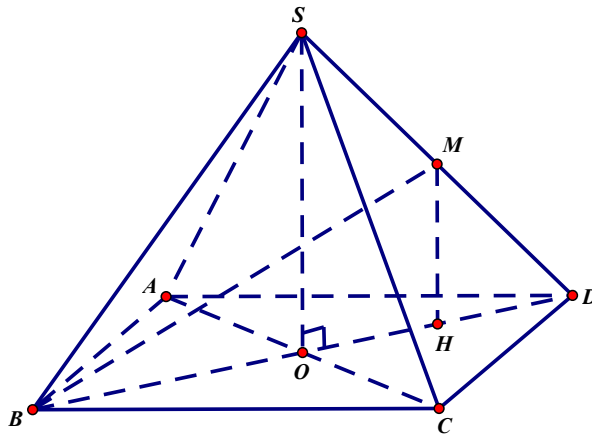
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong tam giác SOD dựng $MH \parallel SO, H \in OD$ ta có $MH \perp (ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

$$\text{Ta có } MH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}2a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc

A. $\widehat{ASO}$.

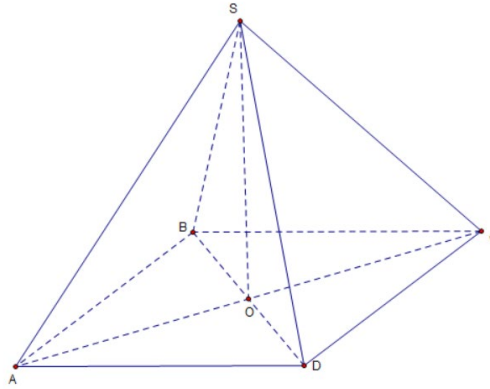
B. $\widehat{SAO}$.

C. $\widehat{SAC}$.

D. $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AO$

$ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow BD \perp AO$

Từ và, suy ra $AO \perp (SBD)$.

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$.

Câu 21: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

A. 45° .

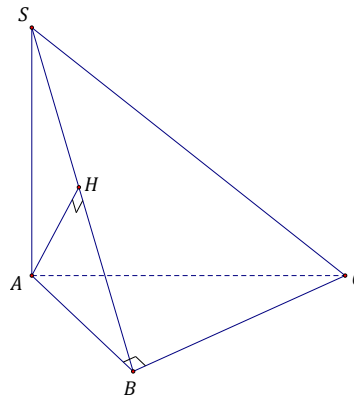
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

Tam giác ABC vuông ở $B \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAB vuông ở $A \Rightarrow \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

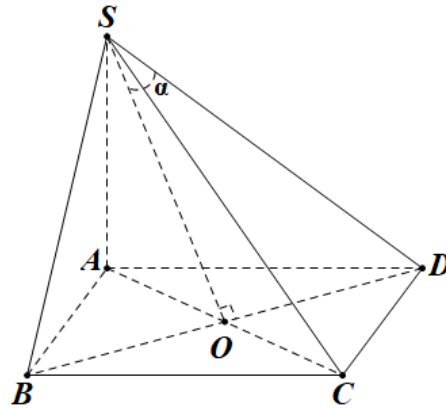
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(SAC) \Rightarrow \widehat{(SD; (SAC))} = \widehat{(SD; SO)} = \widehat{DSO} = \alpha$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A : $SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O : có $SD = 2a$, $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

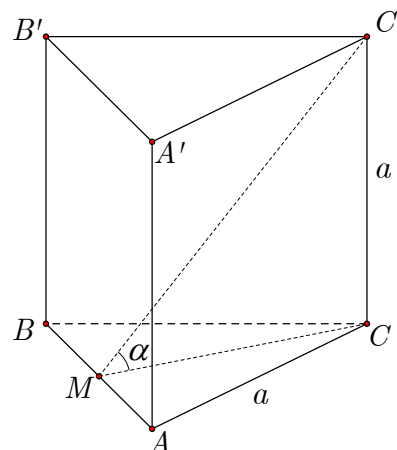
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MC là hình chiếu của MC' trên mặt phẳng (ABC) .

Do đó góc giữa đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi hai đường thẳng MC' và MC . Đó là góc $\alpha = \widehat{CMC'}$.

Ta có, CM là đường cao của tam giác đều ABC cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác CMC' , ta có $\tan \alpha = \tan \widehat{CMC'} = \frac{CC'}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) .

A. $\frac{1}{2}$.

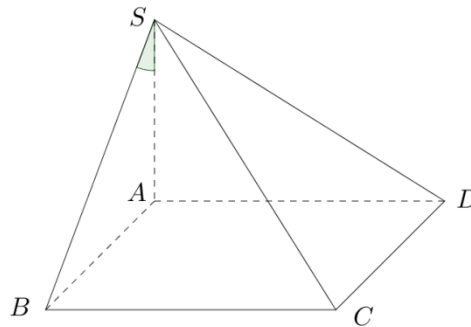
B. 1.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$

Do hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc giữa hai đường thẳng SB và SA .

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\cos \widehat{BSA} = \frac{SA}{SB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

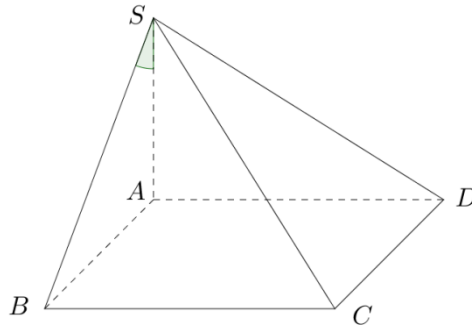
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) .

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$

Do hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc giữa hai đường thẳng SB và SA .

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}.$$

$$\cos \widehat{BSA} = \frac{SA}{SB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

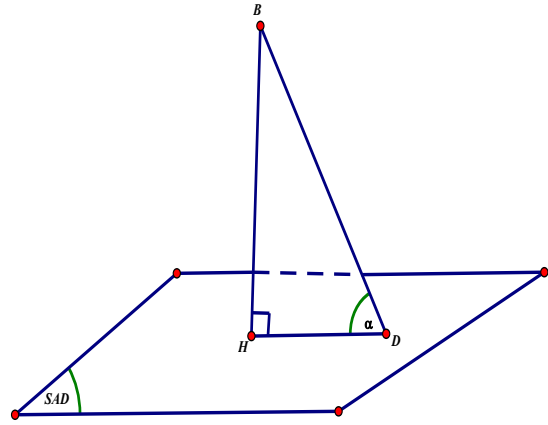
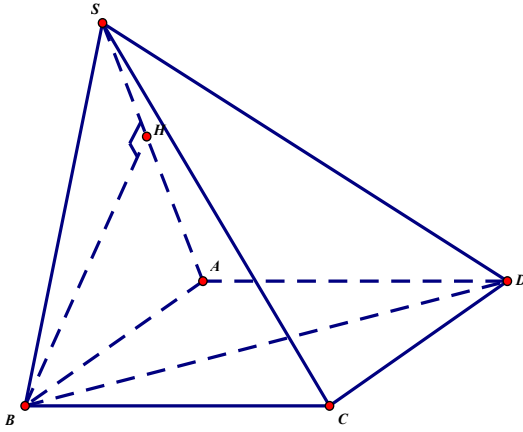
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD) . Tính $\sin \alpha$?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\sin(BD, (SAD)) = \sin \alpha = \frac{BH}{BD}$

$ABCD$ là hình vuông cạnh a , suy ra $BD = a\sqrt{2}$

Kẻ BH vuông góc SA (H thuộc SA), BH vuông góc AD suy ra BH vuông góc (SAD) .

Tam giác SAD đều cạnh a , đường cao $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Từ, và suy ra $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = a$. Tính góc (SB, ABC)

A. 90°

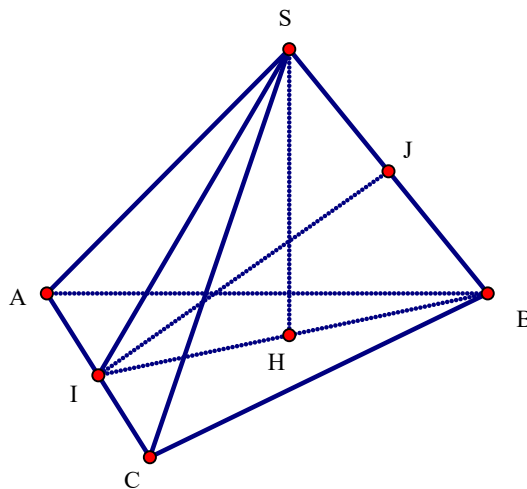
B. 45°

C. 30°

D. 60°

Lời giải

Chọn B



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, SB , H là điểm chiếu của S lên IB

Có $SA = SC$. Suy ra $\triangle SAC$ cân tại S, Suy ra $SI \perp AC$

Có $SA = SC$, $BA = BC$, BC chung. Suy ra $\triangle SAB = \triangle SCB$. Suy ra $JA = JC$.

Suy ra $\triangle JAC$ cân tại J, I là trung điểm AC. Suy ra $IJ \perp AC$

Có $AC \perp SI$; $AC \perp IJ$. Suy ra $AC \perp (SIB)$

Suy ra $(ABC) \perp (SIB)$, Có $(ABC) \cap (SIB) = IB$, $SH \perp IB$. Suy ra $SH \perp (ABC)$

Suy ra BH là hình chiếu của SB lên (ABC)

Suy ra $(SB, (ABC)) = \widehat{SBI}$

$$\text{Có } SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, IB = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \frac{a}{2}, SB = a\sqrt{2}$$

$$\text{Có } \cos \widehat{SBI} = \frac{SB^2 + IB^2 - SI^2}{2SB \cdot IB} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } \widehat{SBI} = 45^\circ.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

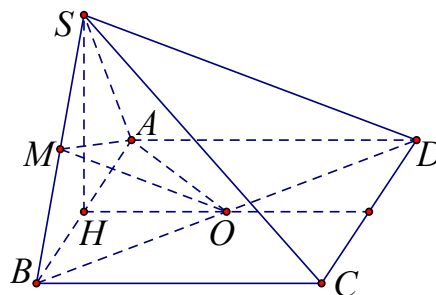
B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB ; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO \parallel SD$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$.

Xét tam giác AMO , có:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a;$$

$$MO = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HA^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = a.$$

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

$$\Rightarrow \sin \widehat{AMO} = \frac{d(O; AM)}{OM} = \frac{\sqrt{MO^2 - \frac{AM^2}{4}}}{OM} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{SD; (SBC)}) = \sin \widehat{AMO} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

Câu 29: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$; $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC , H là hình chiếu vuông góc của K trên SA . Tính cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (BKH) .

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

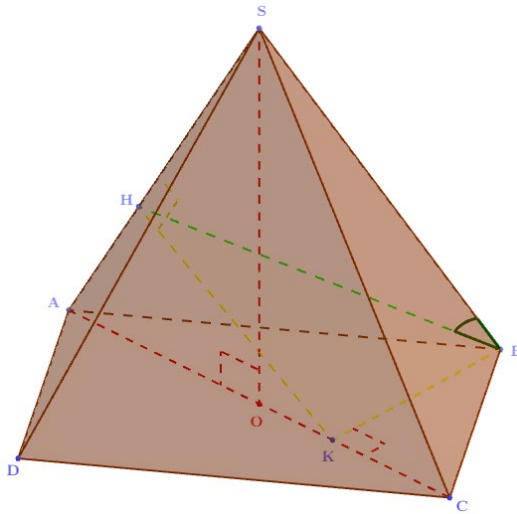
B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{\sqrt{8}}{5}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $BD = AC = a\sqrt{3}$; $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow BK = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$AK = \frac{2}{3}AC = \frac{2a}{\sqrt{3}}; BE = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}BK \text{ nên } K \text{ là trọng tâm của tam giác } BCD.$$

+ Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (BKH) \Rightarrow \widehat{SB, (BKH)} = \widehat{SBH}$.

+ Ta có $\Delta SOA \sim \Delta KHA (S = K) \Rightarrow KH.SA = SO.KA \Leftrightarrow KH = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

$$\text{Vậy } \cos \widehat{SBH} = \frac{BH}{SB} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$ với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

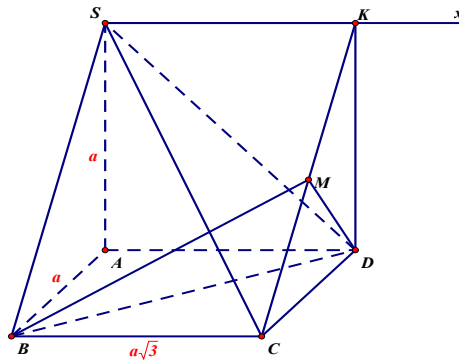
B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $Sx \parallel BC$, dựng $K \in Sx$ sao cho $SK = BC$.

Trong (KDC) , kẻ $DM \perp KC \Rightarrow DM \perp (SBCK) \Rightarrow MB$ là hình chiếu vuông góc của DB lên $(SBCK)$. Khi đó: $\widehat{BD, (SBC)} = \widehat{BD, (SBCK)} = \widehat{MBD}$.

$$\text{Ta có: } \sin \widehat{MBD} = \frac{DM}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , CH vuông góc với AB tại H , I là trung điểm của đoạn HC . Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB , O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

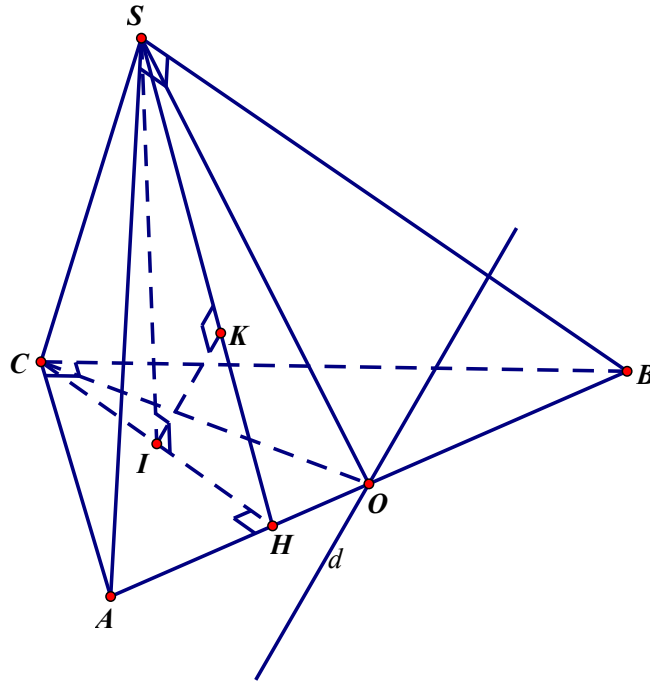
B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Do $\widehat{ASB} = 90^\circ$ nên tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ nằm trên đường thẳng d đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $d \perp (SAB)$. (1)

Trong mặt phẳng (SCH) kẻ $IK \perp SH$ tại K .

Theo giả thiết $SI \perp (ABC)$ suy ra $SI \perp AB$. Từ $SI \perp AB$ và $AB \perp CH$ suy ra $AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp IK$.

Từ $IK \perp SH$ và $AB \perp IK$ ta có $IK \perp (SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $IK \parallel d$. Bởi vậy $(\widehat{OO';(ABC)}) = (\widehat{d;(ABC)}) = (\widehat{IK;(ABC)})$.

Vì $(SCH) \perp (ABC)$ nên IH là hình chiếu vuông góc của IK trên mặt phẳng (ABC) . Bởi vậy $(\widehat{IK;(ABC)}) = (\widehat{IK,IH}) = \widehat{HIK} = \widehat{HSI}$.

Do tam giác ABC vuông tại C và SAB vuông tại S nên $CO = SO = \frac{AB}{2}$.

Xét hai tam giác vuông CHO và SHO có $CO = SO$, cạnh OH chung nên $\Delta CHO = \Delta SHO$ (c.g.c), bởi vậy $CH = SH$.

Xét tam giác SIH vuông tại I có $IH = \frac{CH}{2} = \frac{SH}{2}$, ta có $\sin \widehat{HSI} = \frac{IH}{SH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HSI} = 30^\circ$.

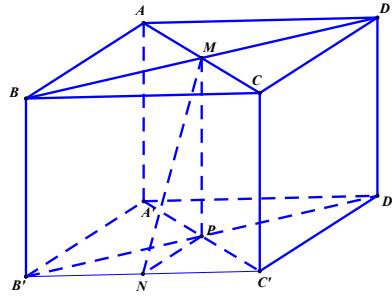
Vậy $(\widehat{OO';(ABC)}) = 30^\circ$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = a > 0$. Gọi P là trung điểm của cạnh $A'C' \Rightarrow MP \perp (A'B'C'D')$.

Suy ra $\alpha = (MN, (A'B'C'D')) = \widehat{MNP}$.

Xét tam giác vuông MNP ta có $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \widehat{MNP} = \frac{MP}{MN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 33: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = \sqrt{5}a$, $AB = a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

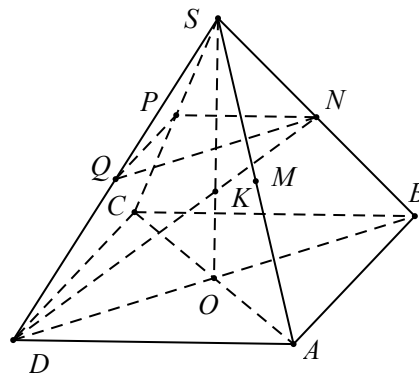
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD nên mặt phẳng $(ABCD)$ song song mặt phẳng (MNP) suy ra góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MNP) cũng là góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Có $K = SO \cap DN$. Do $S.ABCD$ hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của đường thẳng DN trên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng DO nên

$$(\widehat{DN, (ABCD)}) = (\widehat{DN, DO}).$$

Xét tam giác vuông SOA có $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $SA = \sqrt{5}a \Rightarrow SO = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Mà K là trọng tâm tam giác $SBD \Rightarrow OK = \frac{1}{3}SO = \frac{\sqrt{2}a}{2} = OD \Rightarrow \Delta OKD$ vuông cân tại O hay $\widehat{KDO} = 45^\circ$.

Hay $\widehat{(DN, (MPQ))} = 45^\circ \Rightarrow \cos(\widehat{DN, (MPQ)}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$

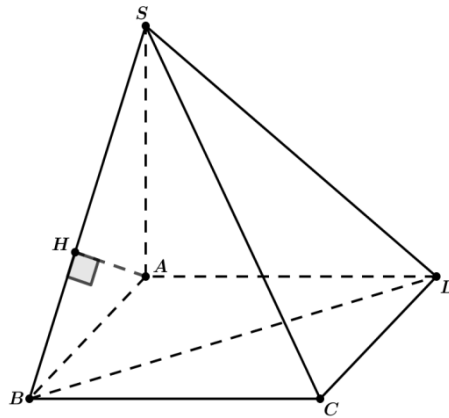
B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Lời giải

Chọn C

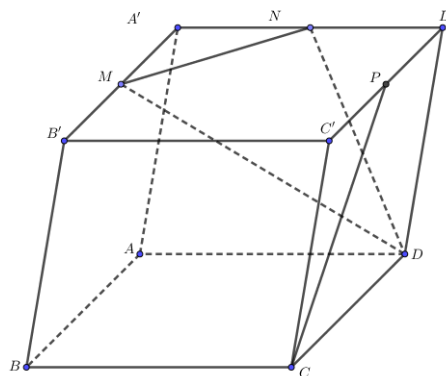


$ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = 2a$, ta có $AD \parallel (SBC)$ nên suy ra $d[D, (SBC)] = d[A, (SBC)] = AH$ với $AH \perp SB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB suy ra $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{vậy } \sin \widehat{BD, (SBC)} = \frac{d[D, (SBC)]}{BD} = \frac{d[A, (SBC)]}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 35: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng



- A.** 60° .

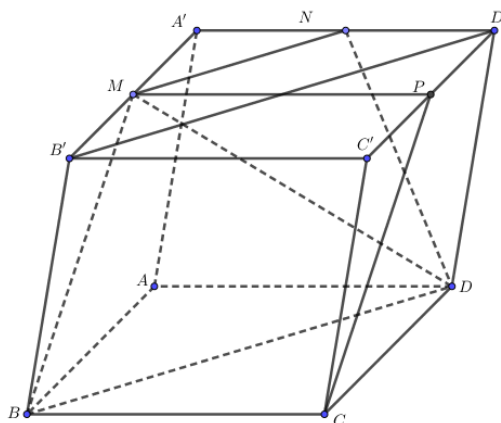
- B.** 30° .

- C.** 0° .

- D.** 45° .

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác $A'B'D'$ có:

M là trung điểm của $A'B'$ và N là trung điểm của $A'D'$

nên MN là đường trung bình của tam giác $A'B'D'$

Suy ra $MN \parallel B'D'$, mà $B'D' \parallel BD$ nên $MN \parallel BD \Rightarrow M, N, B, D$ đồng phẳng.

Ta có $\begin{cases} MP // B'C' \\ BC // B'C' \end{cases} \Rightarrow MP // BC$ nên tứ giác $MPCB$ là hình bình hành $\Rightarrow CP // BM$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} CP // BM \\ BM \subset (BMND) \end{cases} \Rightarrow CP // (BMND) \Rightarrow CP // (MND).$$

Do đó $(CP, (MND)) = 0^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là

- ### A. $\widehat{SBA}$.

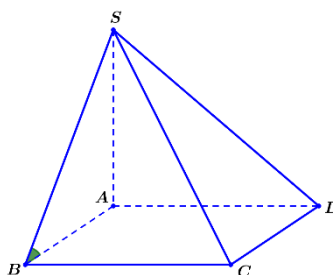
- ### B. $\widehat{SCA}$.

- C.** $\widehat{ASC}$.

- #### D. $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SBA}.$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = \frac{3a}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

A. 60° .

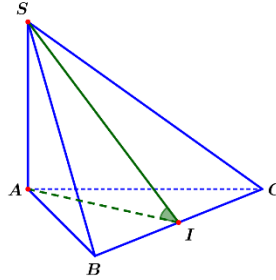
B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$ (vì ABC là tam giác đều).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIA}.$$

Mà $\triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ$.

Câu 38: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao hình chóp bằng $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng

A. 60° .

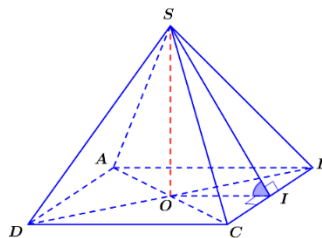
B. 75° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của BC .

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Và $SC = SB$ nên tam giác SBC cân tại $S \Rightarrow SI \perp BC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp SI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIO}$$

Ta có: OI là đường trung bình tam giác ABC nên $OI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$.

Xét $\triangle SIO$ vuông tại O , ta có: $\tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = 30^\circ$.

Vậy số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 30° .

Câu 39: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[O, BC, A]$.

A. 60° .

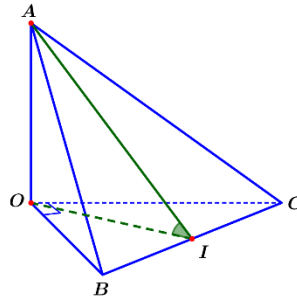
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$

Khi đó: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow [O, BC, A] = \widehat{OIA}$.

Và $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle OAI$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^\circ$.

Vậy $[O, BC, A] = 30^\circ$.

Câu 40: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính cosin của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

A. $\frac{1}{2}$.

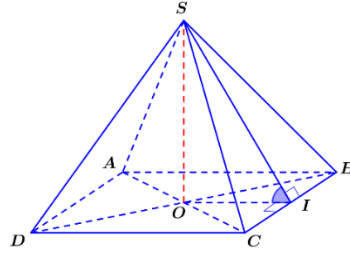
B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I trung điểm của BC .

Khi đó: $SO \perp (ABCD)$ và $SI \perp BC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIO}.$$

$$\text{Và } \triangle SCD \text{ đều cạnh } a \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SOI \text{ vuông tại } O, \text{ ta có: } \cos \widehat{SIO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 41: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$ bằng 30° . Tính độ dài cạnh AA'

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

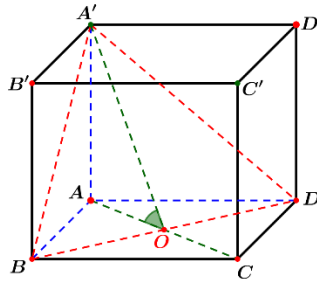
B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'O.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (A'BD) \cap (ABD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow [A', BD, A] = \widehat{A'OA} = 30^\circ.$$

$$\text{Xét } \triangle A'AO \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan \widehat{A'OA} = \frac{AA'}{AO} \Rightarrow AA' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$, $\triangle SAD$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\varphi = 60^\circ$.

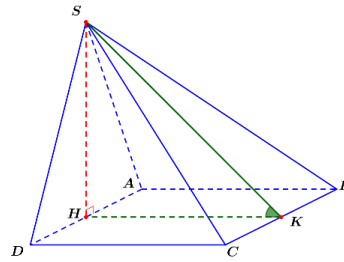
B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, BC .

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $HK \perp BC$.

Khi đó: $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp SK$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ HK \perp BC \\ SK \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SKH} = \varphi$.

Xét $\triangle SHK$ vuông tại H , ta có:

$$\tan \varphi = \tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là

A. 90° .

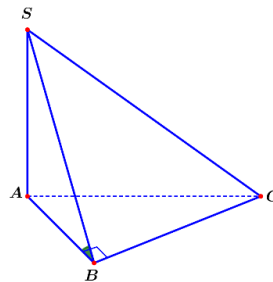
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SBA}$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

A. 30° .

B. 75° .

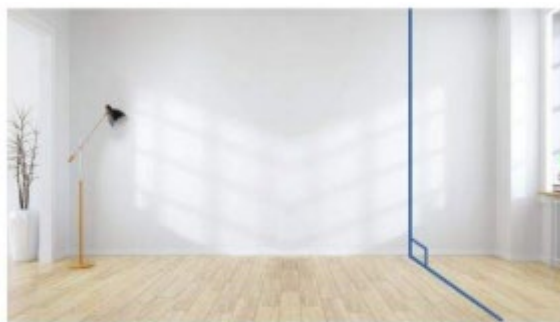
C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

BÀI 4: HAI MẶT PHẶNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM



Hình 44

Để công trình xây dựng được an toàn và bền vững, người ta thường xây tường nhà vuông góc với nền nhà. (Hình 44).

Hình ảnh tường nhà vuông góc với nền nhà gợi nên khái niệm nào trong hình học?

I. ĐỊNH NGHĨA

HD1: Hai vách ngăn tủ trong Hình 45 gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và tạo nên bốn góc nhị diện, Các góc nhị diện đó có phần là những góc nhị diện vuông hay không?



Hình 45

Lời giải

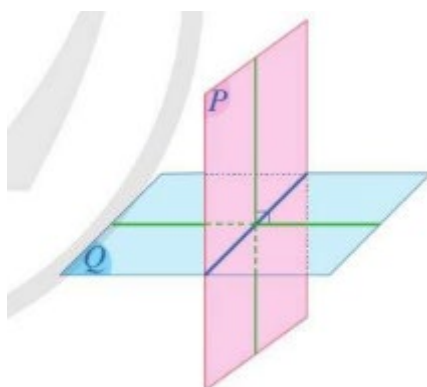
Các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông

Nhận xét: Hai mặt phẳng cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó vuông thì các góc nhị diện còn lại cùng vuông.

Ta có định nghĩa sau

Hai mặt phẳng cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng đã cho gọi là **vuông góc với nhau**.

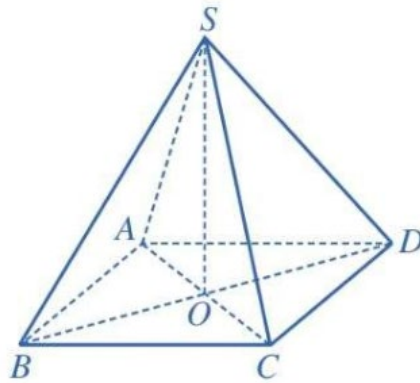
Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, ta kí hiệu $(P) \perp (Q)$ hoặc $(Q) \perp (P)$ (Hình 46).



Hình 46

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại O và $SO \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



Hình 47

Ta thấy: Góc $\widehat{AOB}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SO, B]$. Do $OA \perp OB$ nên $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Vì vậy góc nhị diện $[A, SO, B]$ là góc nhị diện vuông. Hai mặt phẳng (SAC) , (SBD) cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện, trong đó góc nhị diện $[A, SO, B]$ là góc nhị diện vuông nên $(SAC) \perp (SBD)$.

Luyện tập 1: Nêu ví dụ trong thực tiễn minh hoạ hình ảnh hai mặt phẳng vuông góc.

Lời giải

Trong thực tiễn minh hoạ hình ảnh hai mặt phẳng vuông góc:

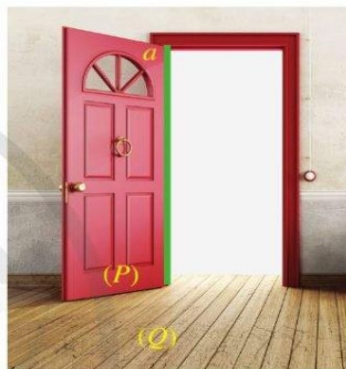
Kệ tủ, Tường và sàn nhà

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC



Nền nhà, cánh cửa và mép cánh cửa ở Hình 48 gợi nên hình ảnh mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) và đường thẳng a nằm trên mặt phẳng (P) . Quan sát Hình 48 và cho biết:

- Vị trí tương đối của đường thẳng a và mặt phẳng (Q) ;
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) có vuông góc với nhau không.



Hình 48

Lời giải

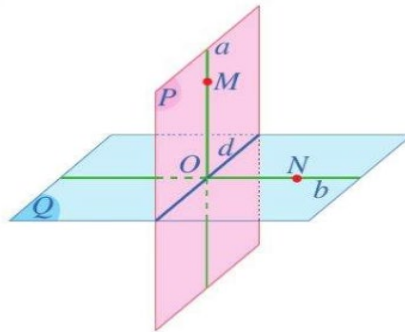
- Đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q)
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) có vuông góc với nhau

Định lý 1

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Chứng minh

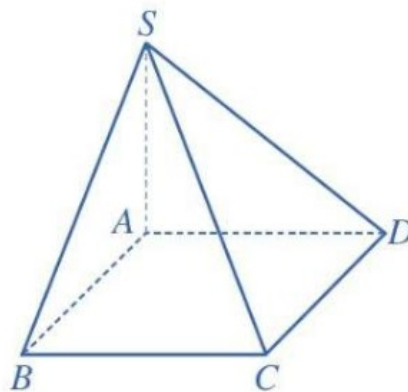
Giả sử có hai mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn $a \subset (P)$ và $a \perp (Q)$. Gọi O là giao điểm của a và (Q) . Do hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng chứa O nên hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến d đi qua O . Trong mặt phẳng (Q) , qua O kẻ đường thẳng b vuông góc với d . Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc đường thẳng a, b (Hình 49). Ta thấy đường thẳng d vuông góc với hai tia OM, ON , suy ra góc $\widehat{MON}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, d, N]$. Do $a \perp (Q)$, $ON \subset (Q)$ nên $a \perp ON$, suy ra $\widehat{MON} = 90^\circ$. Vì thế, góc nhị diện $[M, d, N]$ là góc nhị diện vuông hay $(P) \perp (Q)$.



Hình 49

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình 50). Chứng minh rằng:

- a) $(SAB) \perp (ABCD)$
- b) $(SAB) \perp (SAD)$.



Hình 50

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD)$, $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABCD)$.

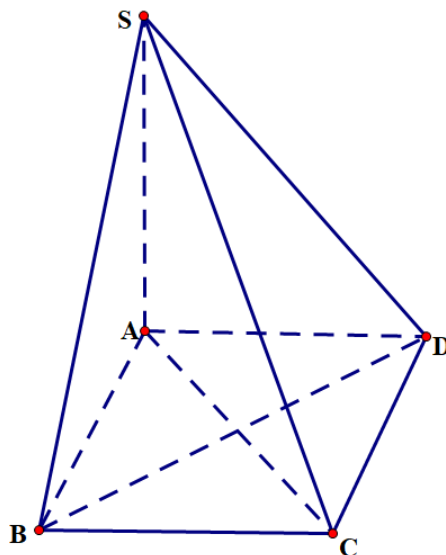
b) Vì $SA \perp (ABCD)$, $AB \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AB$.

Do AB vuông góc với hai đường thẳng SA và AD cắt nhau trong mặt phẳng (SAD) nên $AB \perp (SAD)$.

Ta có: $AB \perp (SAD)$, $AB \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SAD)$.

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (1)

Có $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BD \perp (SAC)$

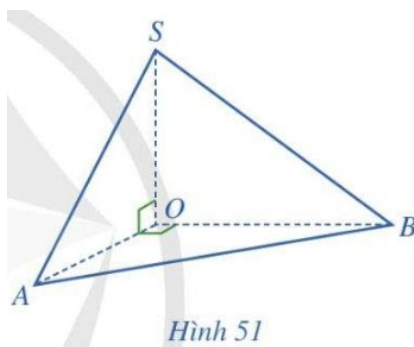
mà $BD \subset (SBD)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$

III. TÍNH CHẤT



Cho hình chóp $S.OAB$ thỏa mãn $(AOS) \perp (AOB)$, $\widehat{AOS} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ (Hình 51).



- Giao tuyến của hai mặt phẳng (AOS) và (AOB) là đường thẳng nào?
- SO có vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (AOS) và (AOB) hay không?
- SO có vuông góc với mặt phẳng (AOB) hay không?

Lời giải

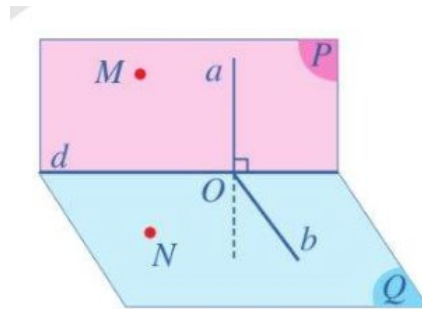
- Giao tuyến của hai mặt phẳng (AOS) và (AOB) là đường thẳng AO
- SO có vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (AOS) và (AOB)
- SO có vuông góc với mặt phẳng (AOB)

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

Định lý 2

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chứng minh



Hình 52

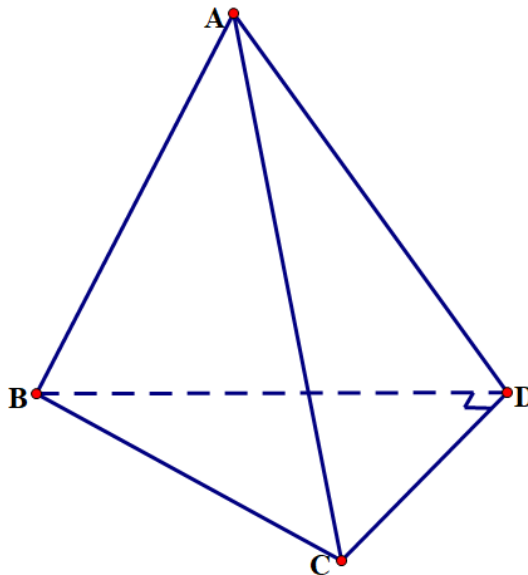
Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d . Cho đường thẳng $a \subset (P)$ sao cho $a \perp d$. Gọi O là giao điểm của a và d .

Lấy hai điểm M, N lần lượt trên hai mặt phẳng (P) , (Q) sao cho M, N không thuộc đường thẳng d .

Gọi góc aOb là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, d, N]$ (Hình 52). Do góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông nên $\widehat{aOb} = 90^\circ$, tức là $a \perp Ob$. Đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (Q) là d và Ob nên $a \perp (Q)$.

Luyện tập 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ABD) \perp (BCD)$ và $CD \perp BD$. Chứng minh rằng tam giác ACD vuông.

Lời giải



$$\text{Vì } (ABD) \perp (BCD) \Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp AB$$

$$\text{mà } BD \perp CD$$

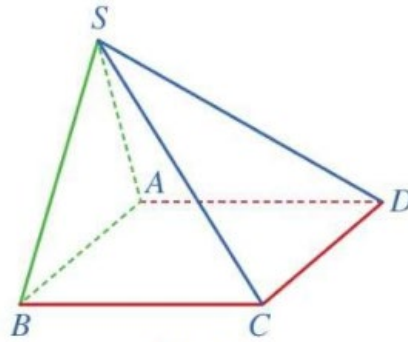
$$\Rightarrow CD \perp (ABD)$$

$$\Rightarrow CD \perp AD$$

Vậy tam giác ACD vuông tại D

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình 53). Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$

Lời giải



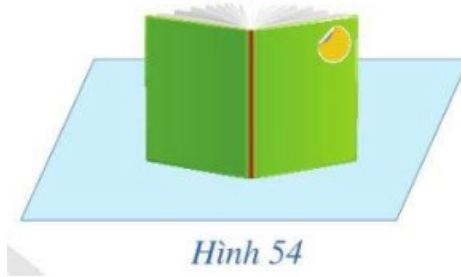
Hình 53

Do $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $BC \subset (ABCD)$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$.

Ta có $BC \subset (SBC)$ và $BC \perp (SAB)$, suy ra $(SBC) \perp (SAB)$.



Trong Hình 54, hai bìa của cuốn sách gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng vuông góc với mặt bàn. Hãy dự đoán xem gáy sách có vuông góc với mặt bàn hay không.



Hình 54

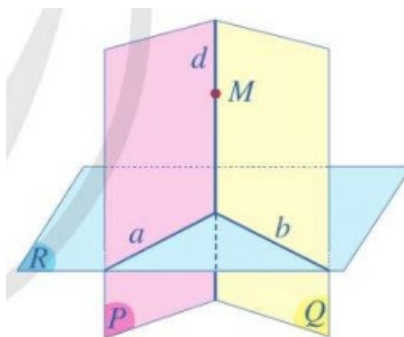
Lời giải

Gáy sách có vuông góc với mặt bàn

Định lý 3

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Chứng minh



Hình 55

Giả sử hai mặt phẳng (P) , (Q) cắt nhau theo giao tuyến d ; (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) . Gọi a , b lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (R) với hai mặt phẳng (P) , (Q) . Xét điểm M thuộc đường thẳng d (Hình 55).

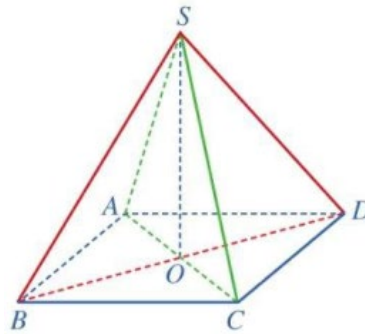
Trong mặt phẳng (P) , gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a . Theo Định lý 2, ta có: $d_1 \perp (R)$.

Trong mặt phẳng (Q) , gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng b . Theo Định lý 2, ta có: $d_2 \perp (R)$. Suy ra d_1 trùng d_2 nên hai đường thẳng đó cùng nằm trên cả hai mặt phẳng (P) và (Q) . Cho nên d_1, d_2 và d trùng nhau. Vậy $d \perp (R)$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a với tâm O , $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (Hình 56).

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.



Hình 56

Lời giải

a) Ta có $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD) = SO$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Do $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SAO .

Vì tam giác SAO vuông tại O có $SO = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác SAO vuông cân tại O . Suy ra

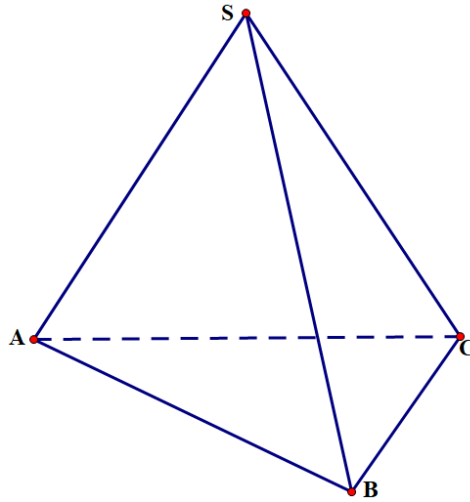
$\widehat{SAO} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45° .

Luyện tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp SB$, $SB \perp SC$, $SC \perp SA$.

Chứng minh rằng:

- $(SAB) \perp (SBC)$;
- $(SBC) \perp (SCA)$;
- $(SCA) \perp (SAB)$.

Lời giải



a) Có $SA \perp SB, SC \perp SA \Rightarrow SA \perp (SBC)$

$$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC) (1)$$

b) Có $SA \perp SB, SB \perp SC \Rightarrow SB \perp (SAC)$

$$\Rightarrow (SBC) \perp (SCA) (2)$$

c) Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SCA) \perp (SAB)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° .

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC . Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.

c) Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAC)$.

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Dựng $OH \perp SC$

Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Suy ra $SC \perp (DHB)$.

Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Tam giác ABD đều cạnh a nên

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Dựng } AK \perp SC \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow \triangle DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB} = 90^\circ$.

Do đó $(SCD) \perp (SBC)$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Mặt khác } \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do } \tan \widehat{CAD} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AIM} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BM \text{ tại } I.$$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$

Do đó $BM \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$.

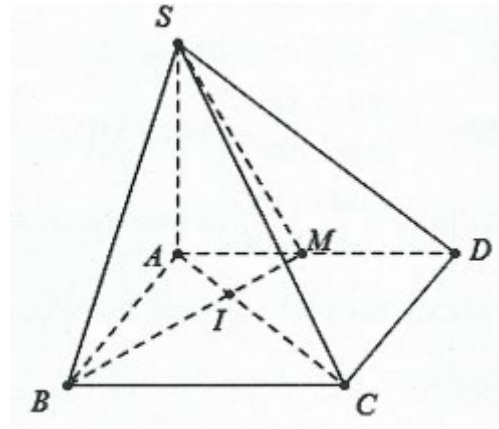
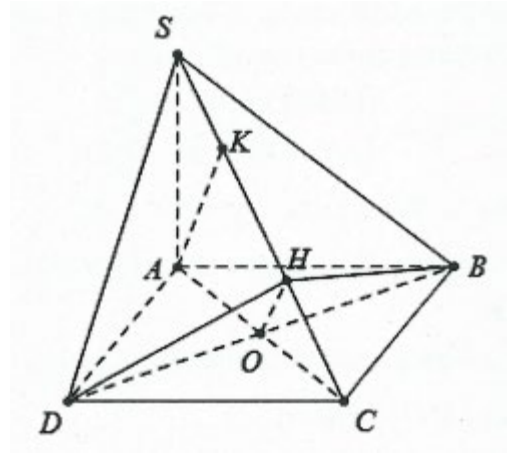
Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SA = SB = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh tam giác SBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$; $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Do $\triangle SAB$ cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

b) Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$.

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD \perp (SAB)$ suy ra $(SAD) \perp (SAB)$.

Mặt khác: $SA^2 + SB^2 = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SA \perp SB$.

Lại có:

$$AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB \Rightarrow SB \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD).$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD .

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $AM \perp BP$ và $(SBP) \perp (AMN)$.

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AD .

Do $\triangle SAD$ cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AD$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ AD = (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SH \perp AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD).$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} MN \parallel SC \\ AN \parallel HC \end{cases} \Rightarrow (AMN) \parallel (SHC).$$

$$\text{Để thấy } \tan \widehat{BPC} = 2; \tan \widehat{HCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BPC} + \widehat{HCD} = 90^\circ \Rightarrow HC \perp BP.$$

$$\text{Mặt khác } SH \perp BP \Rightarrow BP \perp (SHC)$$

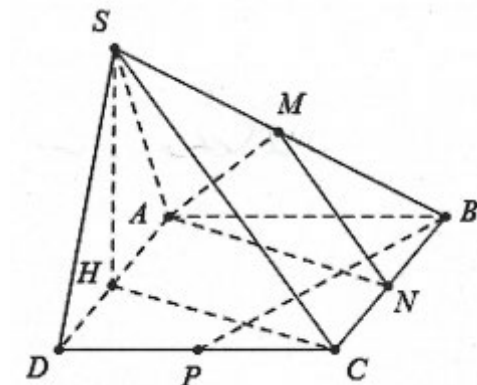
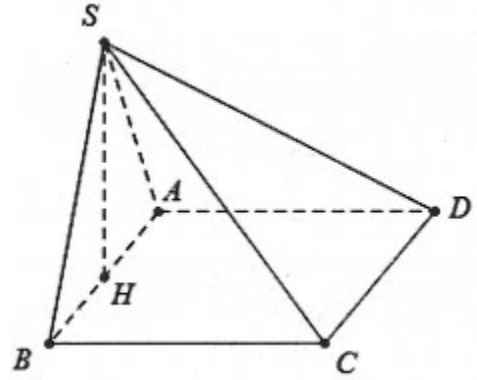
$$\text{Mà } (AMN) \parallel (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} (SBP) \perp (AMN) \\ BP \perp AM \end{cases}.$$

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$.

c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD . Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC)$; $(AEF) \perp (SAC)$.



Lời giải

a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB)$.

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Mặt khác: $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF$.

Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC)$.

Dễ thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF \parallel BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC)$.

Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH , AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với (AHK) .

Lời giải

a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

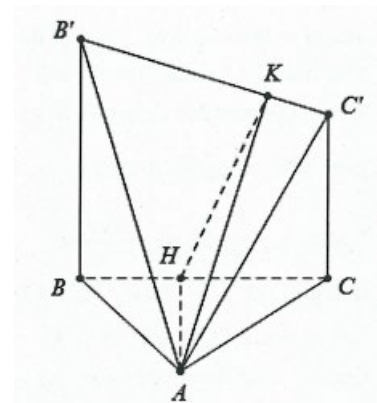
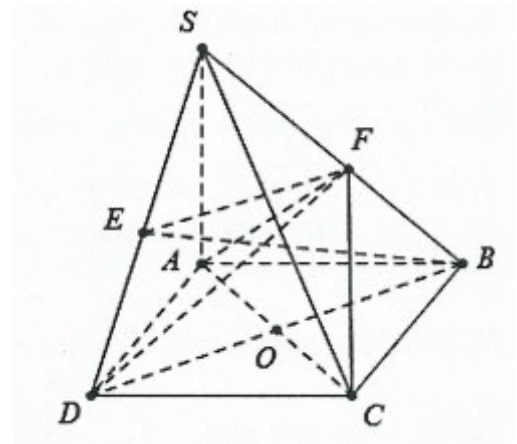
Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$.

b) Do $AH \perp BC$, $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$.

Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$.



Dạng 2: Góc giữa mặt bên và mặt đáy

1. Phương pháp giải:

Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.

Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow \widehat{((SAB); (ABC))} = \widehat{SEH}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AD \tan 60^\circ = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow \widehat{((SBC); (ABC))} = \widehat{SBA}$

Mặt khác $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $\cos \widehat{((SBC); (ABC))} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

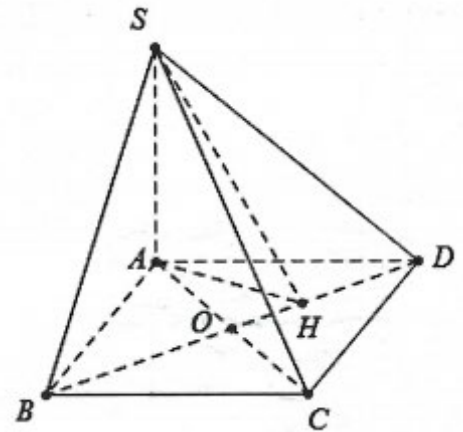
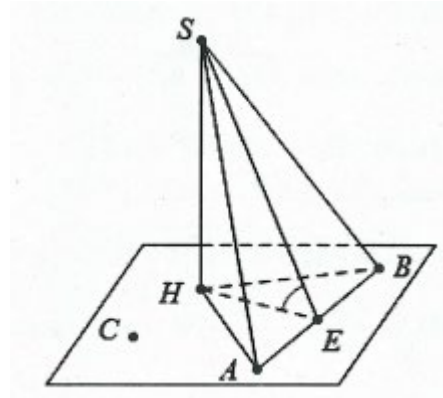
b) Dựng $AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow \widehat{((SBD); (ABCD))} = \widehat{SHA}$.

Lại có: $AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan \widehat{((SBD); (ABCD))} = \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° . Tính góc $\widehat{((SBC); (ABC))}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC , do tam giác SAC cân nên ta có: $SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Khi đó: $(\widehat{SB; (ABC)}) = \widehat{SBH} = 60^\circ$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC = a$.

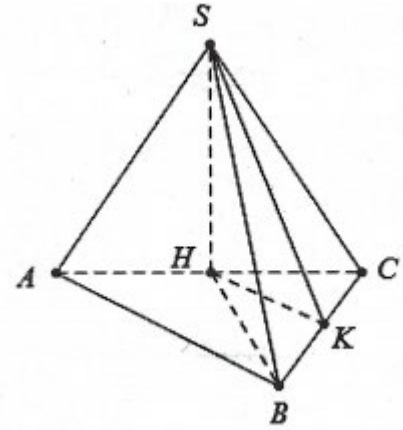
Khi đó: $SH = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK)$.

$\Rightarrow \widehat{SKH} = (\widehat{(SBC); (ABC)})$, trong đó ta có:

$$HK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{SKH} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $(\widehat{(SBC); (ABC)}) = \varphi$ với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB .

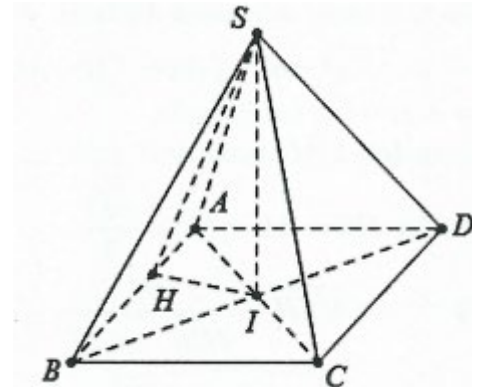
Ta có: $\begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI)$.

Do đó $\varphi = (\widehat{SH; IH}) = \widehat{SHI}$.

Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh $2a$ nên

$$IA = a \Rightarrow IH = IA \sin \widehat{IAB} = IA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \tan \varphi = \frac{SI}{IH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA).$

Khi đó: $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh

$a \Rightarrow CI = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C .

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA).$

Do đó $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$ và $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Dựng $AE \perp BD$, lại có $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow \widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SEA}.$

Ta có: $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{SEA} = \frac{SA}{AE} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC) .

Lời giải

Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H \perp (ABC)$

Do đó $\widehat{A'CH} = 60^\circ$. Lại có: $CH = AC \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$

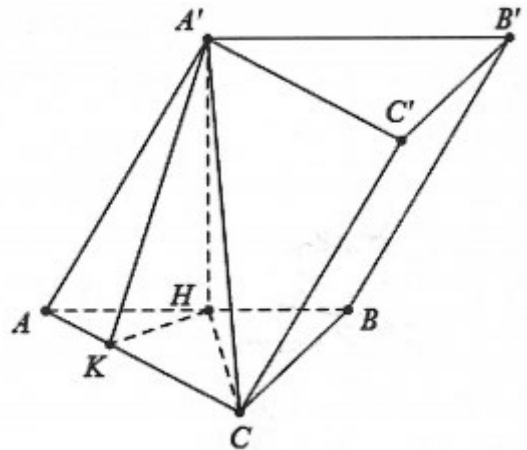
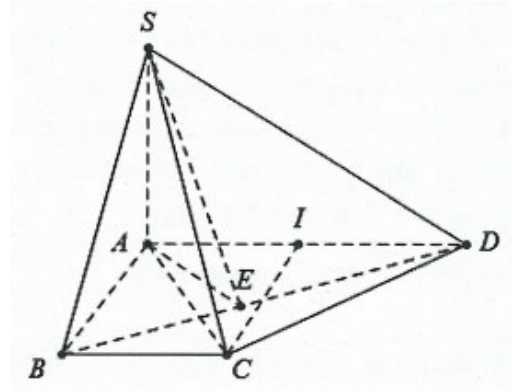
$\Rightarrow A'H = CH \tan 60^\circ = 3a.$

Dựng $HK \perp AC$ ta có $A'H \perp AC \Rightarrow (A'HK) \perp AC$

Khi đó $HK = HA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ta có: $\cos \widehat{A'KH} = \frac{HK}{\sqrt{HK^2 + A'H^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} > 0.$

Do vậy $\cos \widehat{((A'AC);(ABC))} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$



Dạng 3: Góc giữa hai mặt bên

1. Phương pháp giải:

Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC) .

Cách 1: Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

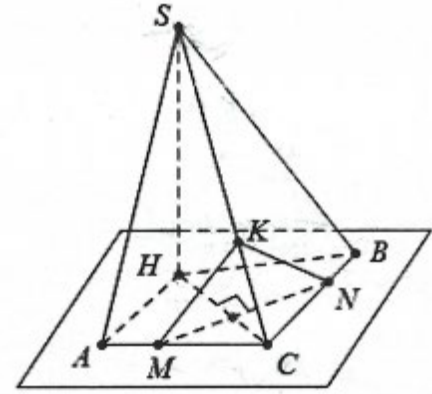
Cách 2: Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC , dựng $MN \perp HC$.

Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN)$

$$\Rightarrow \widehat{((SAC);(SBC))} = \widehat{(MK,KN)}.$$



2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

Lời giải

Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Dựng $HK \perp SC \Rightarrow (HKB) \perp SC$

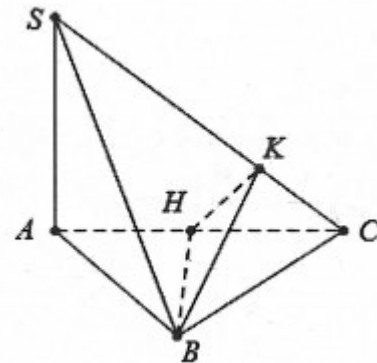
$$\Rightarrow \widehat{((SBC);(SAC))} = \widehat{HKB}.$$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

$$\text{Khi đó } \sin \widehat{KCH} = \frac{HK}{HC} = \frac{SA}{SC} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Mặt khác: } BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{HKB} = \frac{BH}{HK} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \widehat{HKB} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD) .

b) (SAD) và (SCD) .

Lời giải

a) Nhận xét $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Dựng $BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED)$.

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại A suy ra

$$\widehat{ECO} = 45^\circ. \text{ Khi đó } OE = OC \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Lại có: } OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{BEO} = \frac{OB}{OE} = \sqrt{6}.$$

Do $\widehat{BED} = 2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy

$$\text{tính CASIO ta tính được } \cos \widehat{BED} = \frac{-5}{7}$$

$$\text{Cách khác: Ta có: } BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{BED} = \frac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2 \cdot EB \cdot ED} = \frac{-5}{7}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{(SBC);(SCD)}) = \frac{5}{7}.$$

$$\text{b) Dựng } CM \perp AD \text{ ta có: } \begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD.$$

Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \triangle SAD$ vuông cân tại A suy ra

$$\widehat{SDM} = 45^\circ. \text{ Do đó } MK = MD \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

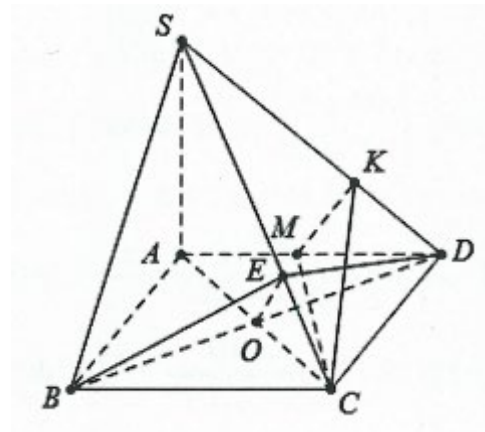
$$\text{Suy ra } \tan \widehat{MKC} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{MKC} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(SCD);(SAD)}) = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AD = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 45° . Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Lời giải

Do $AD = 2a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$



Ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Suy ra $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$

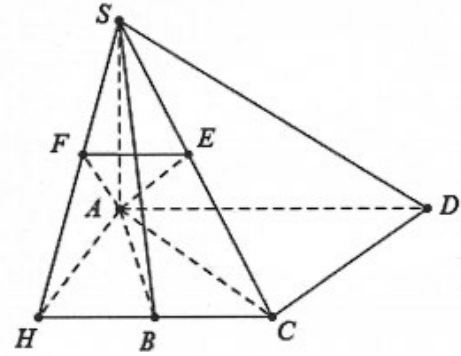
$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Dựng $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SCD)$

Dựng $\begin{cases} AH \perp BC \\ AF \perp SH \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF .

Ta có: $AE = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; $AH = AC \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AF = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp FE$. Do đó $\cos \widehat{FAE} = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Lời giải

Do $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Do đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$; $AC = 2a$

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $DE \perp AC$ ($E \in BC$) tại I , mặt khác $DE \perp SA$

$\Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp SC$.

Dựng $IH \perp SC \Rightarrow SC \perp (EHD)$. Ta có: $DI = DC \sin \widehat{ICD}$

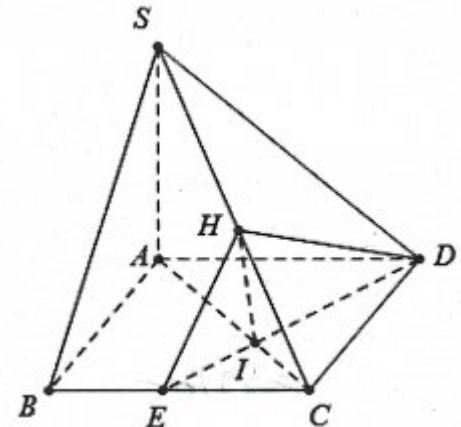
trong đó $\tan \widehat{ICD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ICD} = 60^\circ$.

Suy ra $DI = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $DE = \frac{DC^2}{DI} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow IE = DE - DI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow CI = \sqrt{EI \cdot DI} = \frac{a}{2}$; $\sin \widehat{ICH} = \frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow IH = IC \sin \widehat{IHC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Suy ra $EH = \sqrt{EI^2 + IH^2} = \frac{2a}{\sqrt{21}}$; $ED = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Do đó $\cos \widehat{EHD} = \frac{EH^2 + HD^2 - ED^2}{2 \cdot EH \cdot HD} = \frac{-\sqrt{2}}{4} < 0 \Rightarrow \cos \widehat{((SBC);(SCD))} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

Kẻ $BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID).$

Vậy $\widehat{((SBC);(SCD))} = \widehat{(BI;ID)} = 60^\circ.$

Để thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ \widehat{BIO} = \frac{1}{2} \widehat{BID}. \end{cases}$

▪ **Trường hợp 1:** $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^\circ.$

Ta có:

$$\tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 30^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (vô lý).}$$

▪ **Trường hợp 2:** $\widehat{BID} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ.$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 60^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Mặt khác: } \sin \widehat{ICO} = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \widehat{ICO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC \tan \widehat{ICO} = a.$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB . Do đó $\widehat{ABD} = 90^\circ.$

Gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD).$

Do $\begin{cases} AI \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI.$

Dựng $BK \perp SI \Rightarrow SI \perp (BKD).$

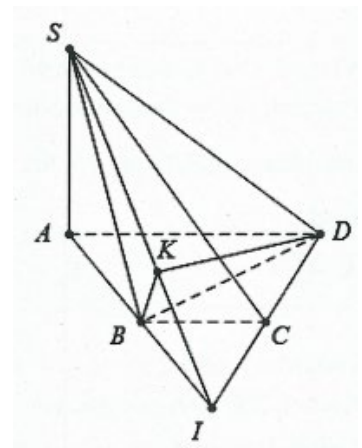
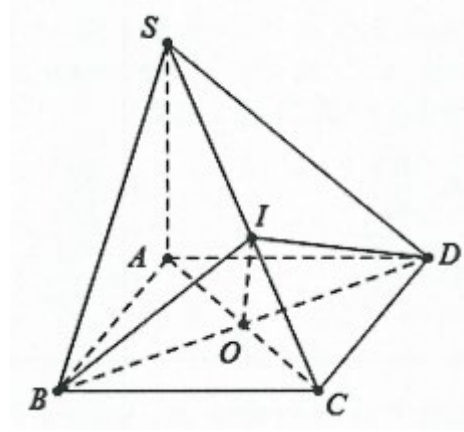
Khi đó $\widehat{((SAB);(SCD))} = \widehat{(BK,KD)} = \widehat{BKD}.$

Do $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp BK \Rightarrow \Delta KBD$ vuông tại B có

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}.$$

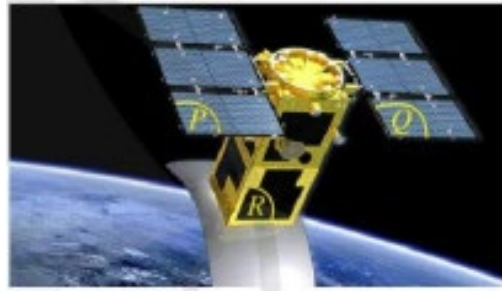
Do $\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong tam giác $AID \Rightarrow AB = BI$ và $AI = 2a$

$$\Rightarrow BK = \frac{1}{2} d(A; SI) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \widehat{BKD} = \frac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$$



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) ở Hình 57, chỉ ra hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy sử dụng kí hiệu để viết những kết quả đó.



Hình ảnh mô phỏng vệ tinh LOTUSat-1
(Nguồn: JICA Việt Nam)
Hình 57

Lời giải

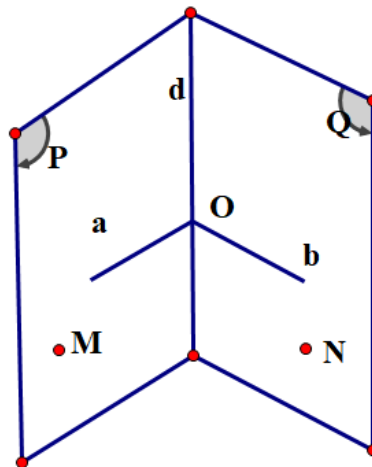
Hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau là :

$$(P) \perp (R)$$

$$(Q) \perp (R)$$

Bài 2. Chứng minh định lí sau: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải



Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau. Ta cần chứng minh tồn tại một đường thẳng $a \subset (P)$ sao cho $a \perp (Q)$.

Gọi $d = (P) \cap (Q)$. Lấy $M \in (P), N \in (Q)$ sao cho $M, N \notin d$.

Gọi góc $\widehat{aOb}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[M, d, N]$.

Vì $(P) \perp (Q)$ nên góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông. Vậy $\widehat{aOb} = 90^\circ \Rightarrow a \perp b$.

Mà $a \perp d$

$$\Rightarrow a \perp (Q)$$

Bài 3. Chứng minh các định lí sau:

- a) Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó thì vuông góc với mặt phẳng còn lại;
 b) Nếu hai mặt phẳng (phân biệt) cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Lời giải

a) Giả sử có hai mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba. Khi đó, các mặt phẳng này sẽ tạo thành một hình hộp chữ nhật. Giả sử chúng không song song với nhau, tức là cắt nhau theo một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng thứ ba. Khi đó, ta có thể kết nối hai điểm thuộc hai mặt phẳng vuông góc này và kết quả là ta sẽ thu được một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng thứ ba, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Vì vậy, hai mặt phẳng này phải song song với nhau hoặc cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

b) Giả sử có hai mặt phẳng song song và một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng đó. Khi đó, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó sẽ song song với mặt phẳng còn lại. Điều này có thể được chứng minh như sau: Ta chọn một điểm bất kỳ trên mặt phẳng đó, và sau đó kết nối điểm đó với một điểm bất kỳ trên mặt phẳng còn lại. Khi đó, ta thu được một đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó và cắt mặt phẳng còn lại theo một giao tuyến. Vì hai mặt phẳng song song nên đường thẳng này sẽ song song với mặt phẳng còn lại, và do đó đường thẳng này cũng sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại. Vậy mặt phẳng ban đầu cũng phải vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Bài 4. Cho một đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng đó và vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Lời giải

Giả sử đường thẳng đó là d và mặt phẳng cho trước là P . Gọi A là một điểm trên đường thẳng d . Theo định nghĩa, ta có thể vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng P và đi qua điểm A , gọi đường thẳng đó là d' . Vì d' và P vuông góc với nhau nên chúng tạo thành một góc vuông tại A .

Để chứng minh tồn tại mặt phẳng vuông góc với P và chứa đường thẳng d , ta chỉ cần chứng minh rằng mặt phẳng chứa d' cũng vuông góc với P . Điều này tương đương với việc chứng minh rằng đường thẳng d nằm trên mặt phẳng chứa d' và vuông góc với mặt phẳng P .

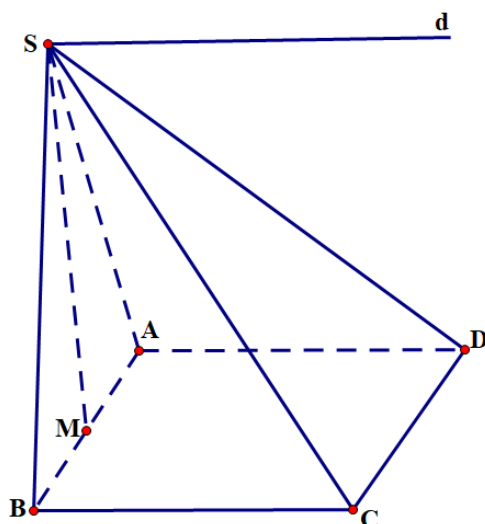
Giả sử tồn tại một mặt phẳng khác Q cũng vuông góc với mặt phẳng P và chứa đường thẳng d . Vì d nằm trên Q , nên d' cũng nằm trên Q , vì nó là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng P và qua điểm A trên d . Như vậy, d' và Q cùng chứa đường thẳng d , do đó chúng trùng nhau, suy ra Q cũng chứa d' . Tức là mặt phẳng Q trùng với mặt phẳng chứa d' , và vì thế mặt phẳng Q cũng vuông góc với P .

Vậy, ta đã chứng minh được rằng tồn tại duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng P và chứa đường thẳng d .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông cân tại S . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng:

- a) $SM \perp (ABCD)$; b) $AD \perp (SAB)$; c) $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$

Có $(SAB) \perp (ABCD)$ giao tuyến AB

$SM \perp (ABCD)$

b) Có $ABCD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AD \perp AB$

Có $SM \perp (ABCD) \Rightarrow AD \perp SM$

$\Rightarrow AD \perp (SAB)$

c) Do $AD \subset (SAD)$, từ ý b $\Rightarrow AD \perp SA$

$SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp BC, SM \perp AD$

$\Rightarrow$ Giao tuyến (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua s và song song với BC

$\Rightarrow SM \perp d; d \perp SA; SA \perp SB$

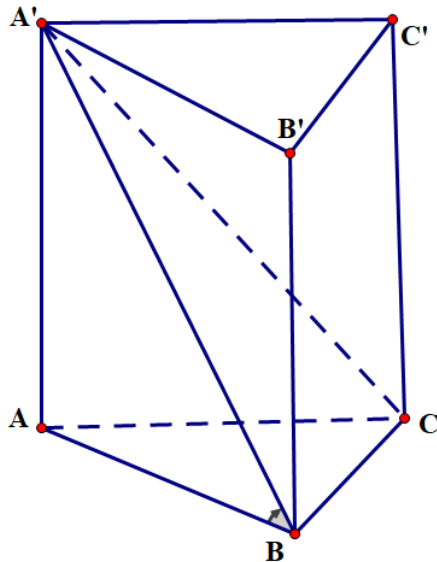
$\Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$

Bài 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a , hai mặt phẳng $(A'AB)$ và $(A'AC)$ cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh rằng $AA' \perp (ABC)$.

b) Tính số đo góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



a)

$$(A'AB) \perp (ABC), (A'AC) \perp (ABC)$$

$$(A'AB) \cap (A'AC) = A'A$$

$$\Rightarrow A'A \perp (ABC)$$

b) $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$

$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là: $\widehat{A'BA}$

Xét tam giác $A'BA$ vuông tại A có các cạnh bằng a

$$\Rightarrow \widehat{A'BA} = 45^\circ$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) . Do $(P) \parallel (Q) \Rightarrow d \perp (Q)$.

Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d . Mà $\begin{cases} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (Q) \end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d . Do đó có vô số mặt phẳng qua M , vuông góc với (P) và (Q) .

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c .

C sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a, b) chứa b nhưng không vuông góc với a .

D sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) \parallel b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) \parallel a$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- B.** Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- C.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D.** Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

B sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d . Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d .
- B.** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R) .
- C.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- D.** Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d .

C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

D sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- C.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

A sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B, C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

B sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

D sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P) . Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) .

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q) .

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) .

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn B

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(P) \supset a$, $(P) \parallel b$ và $(Q) \supset b$, $(Q) \parallel a$ thì $(P) \parallel (Q)$.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) .

- B.** Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q) \equiv (R)$.
- C.** Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.
- D.** Cả 3 mệnh đề trên đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

- A.** Đáy là đa giác đều.
- B.** Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
- C.** Các cạnh bên là những đường cao.
- D.** Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải

Chọn D

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
- B.** Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.
- C.** Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
- D.** Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải

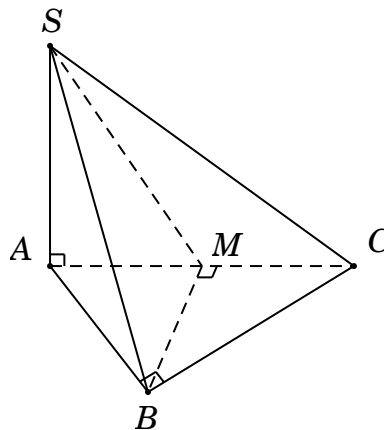
Chọn B

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$. Do đó A đúng.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó C đúng.

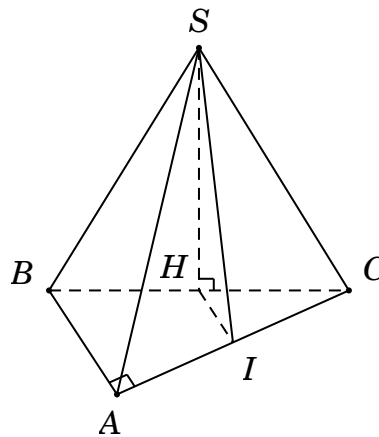
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 12: Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A . Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $SH \perp AB$. **B.** $HI \perp AB$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $(SHI) \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn C



Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$. Do đó A đúng.

Ta có HI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$. Do đó D đúng.

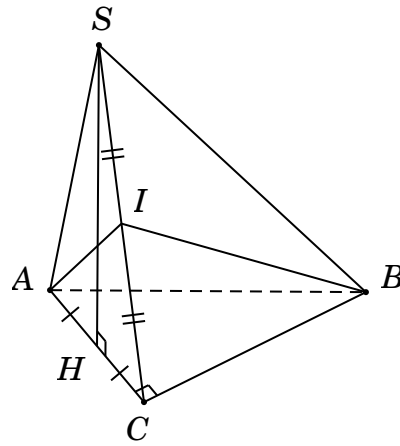
Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $AI \perp SC$. **B.** $(SBC) \perp (SAC)$. **C.** $AI \perp BC$. **D.** $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$. Do đó A đúng.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$. Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$.

Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$. Do đó C đúng.

Từ mệnh đề A và C suy ra mệnh đề D đúng.

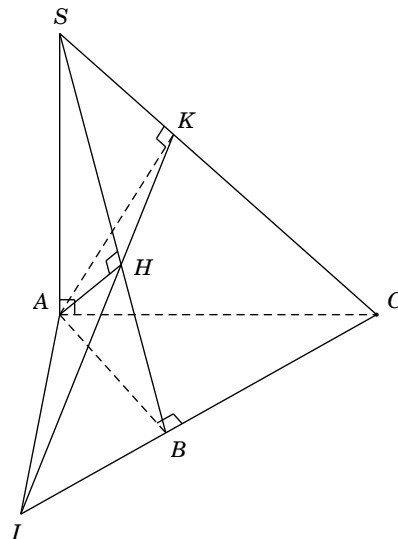
Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp AH$. B. $(AHK) \perp (SBC)$. C. $SC \perp AI$. D. Tam giác IAC đều.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó A đúng.

Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$. Do đó C đúng.

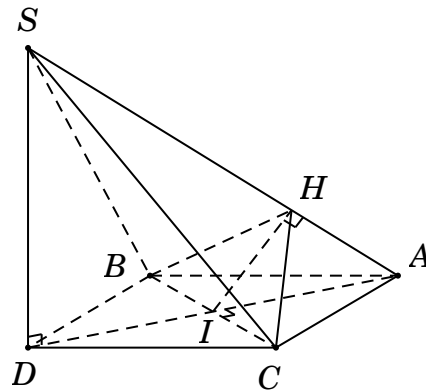
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC ; kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SA \perp BH$. B. $(SDB) \perp (SDC)$. C. $(SAB) \perp (SAC)$. D. $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó A đúng.

Tính được $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\triangle AHI \sim \triangle ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI \cdot SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^\circ$ hay $BH \perp HC$. Do đó D đúng.

Từ mệnh đề A và D suy ra mệnh đề C đúng.

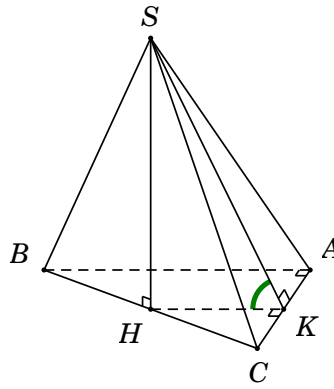
Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\tan \varphi = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Do đó $\widehat{(SAC), (ABC)} = \widehat{(SK, HK)} = \widehat{SKH}$.

Tam giác vuông ABC , có $AB = BC \cdot \cos \widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$.

Tam giác vuông SHK , có $\tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30^\circ$.

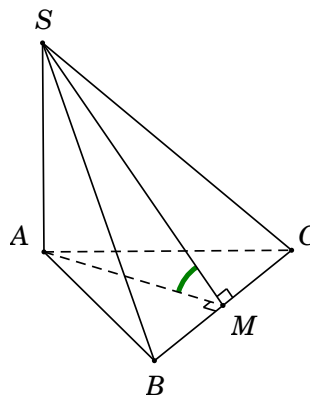
B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $\widehat{(SBC), (ABC)} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA}$.

Tam giác ABC đều cạnh a , suy ra trung tuyến $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SAM , có $\sin \widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Gọi Q là trung điểm BC , suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ$.

Do đó $\widehat{(SBC), (ABCD)} = \widehat{SQ, OQ} = \widehat{SQO}$.

Tam giác vuông SOQ , có $\tan \widehat{SQO} = \frac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° .

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{5}$.

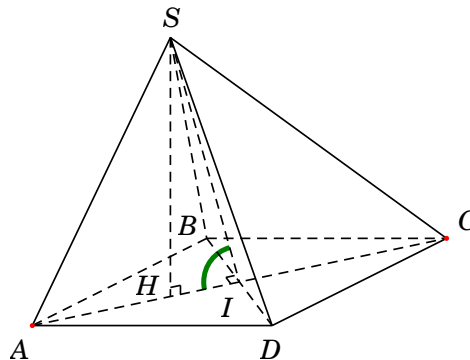
B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\varphi = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

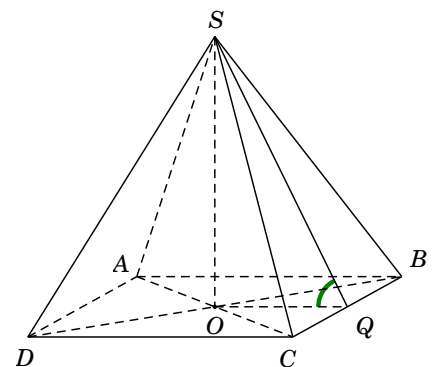


Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a .

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam giác đều ABD .

Suy ra $HI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.



Do đó $\widehat{(SBD)}, \widehat{(ABCD)} = \widehat{SI}, \widehat{AI} = \widehat{SIH}$.

Trong tam vuông SHI , có $\tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{HI} = \sqrt{5}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

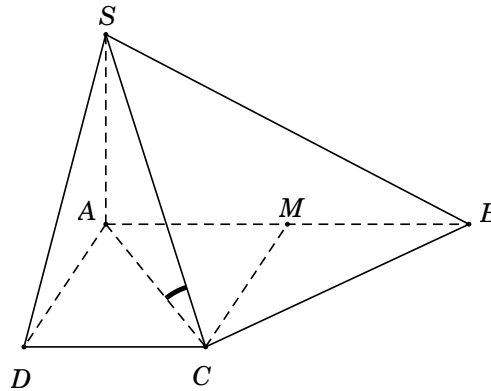
B. $\varphi = 45^\circ$.

C. $\varphi = 60^\circ$.

D. $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow ADCM$ là hình vuông $CM = AD = a = \frac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C .

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Do đó $\widehat{(SBC)}, \widehat{(ABCD)} = \widehat{SC}, \widehat{AC} = \widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90^\circ$.

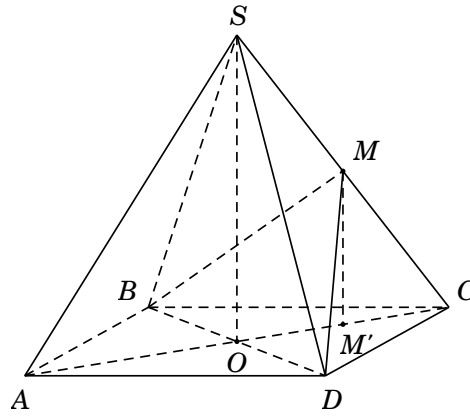
B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 45^\circ$.

D. $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos \varphi \cdot S_{\Delta MBD}$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \frac{BD \cdot MO}{BD \cdot M'O} = \frac{MO}{M'O} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 22: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

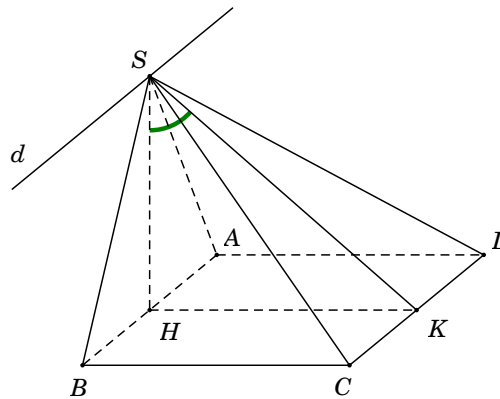
B. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB .

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \widehat{(SAB), (SCD)} = \widehat{SH, SK} = \widehat{HSK}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHK, \text{ có } \tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{6}$.

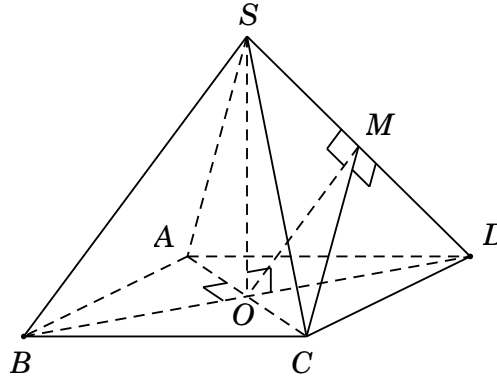
B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD . Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD$.

Do đó $(SBD), (SCD) = \overline{OM}, \overline{CM}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

Tam giác vuông MOC , có $\tan \widehat{CMO} = \frac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

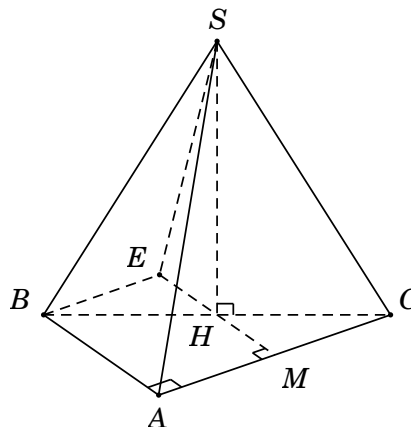
B. $\cot \varphi = \sqrt{7}$.

C. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

D. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC . Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo giả thiết, ta có $SH \perp (ABC)$.

Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $\widehat{SB, AC} = \widehat{SB, Bx}$.

Kẻ $HE \perp Bx$ tại E , cắt AC tại M .

Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE = AM = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \\ HE = HM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} Bx \perp HE \\ Bx \perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SHE) \Rightarrow Bx \perp SE$.

Tam giác vuông SEB , có $\cot \widehat{SBE} = \frac{BE}{SE} = \frac{AM}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Gọi H là trung điểm AB . Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

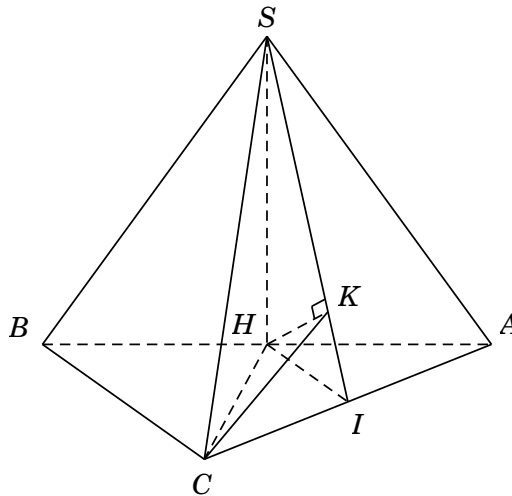
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \longrightarrow HI \parallel BC \xrightarrow{BC \perp AC} HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI$ ($K \in SI$). (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC .

Xét tam giác CHK vuông tại K , có $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Do đó $\cos \widehat{CHK} = \frac{HK}{CH} = \frac{2}{3}$.

Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết " $\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(\alpha), (\beta)} = \widehat{d_1, d_2}$ ". Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$.

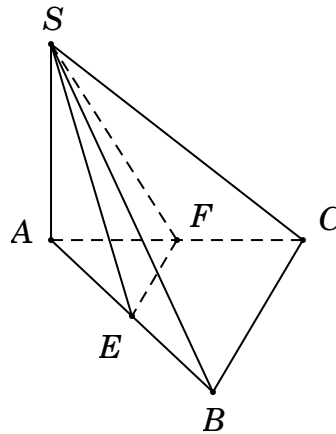
B. $\widehat{BSF}$.

C. $\widehat{BSE}$.

D. $\widehat{CSE}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (d) là đường thẳng đi qua S và song song với EF .

Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF \parallel BC$.

Khi đó $(d) \parallel EF \parallel BC \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = (d)$ (1).

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \quad (SA \perp (ABC))$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} (d) \perp SE \\ (d) \perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SEF), (SBC)} = \widehat{(SE, SB)} = \widehat{BSE}$.

Câu 27: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

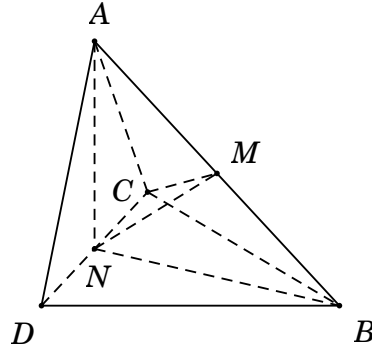
B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$.

Tam giác ABC cân tại C , có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB$.

Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$.

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$.

Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$.

Suy ra $2(a^2 - x^2) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

A. $x = \frac{3a}{2}$.

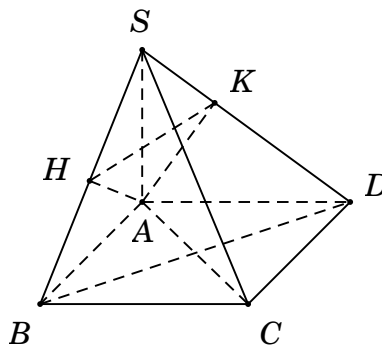
B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = a$.

D. $x = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Từ A kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$).

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD ($K \in SD$), tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK} = 60^\circ$.

Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^\circ$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S , có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

Vì $HK \parallel BD$ suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$.

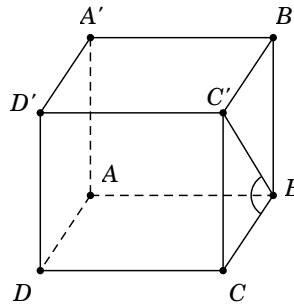
B. $3a$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.

Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$ suy ra $\widehat{(ABC'); (ABCD)} = \widehat{(BC'; BC)} = \widehat{C'BC} = 60^\circ$.

Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C , có $\tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^\circ \cdot a = a\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

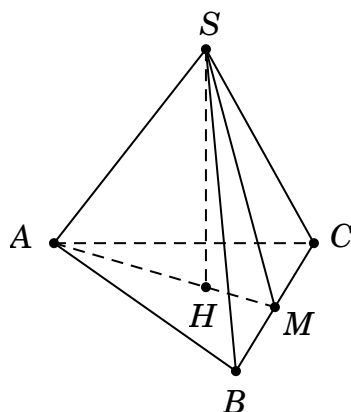
B. $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $SH = \frac{a}{2}$.

D. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA = SB = SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi M là trung điểm của BC , ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{(SM;AM)} = \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Tam giác ABC đều có $AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác AHM vuông tại H , có $\tan \widehat{SMA} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2}$.

Vậy độ dài đường cao $SH = \frac{a}{2}$.

BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Hình 58 mô tả cách đo chiều cao của một người khi kiểm tra sức khoẻ. Coi mặt bàn sắt người đó đứng lên là mặt phẳng (P) , mặt bàn sắt áp vào đầu người đó là mặt phẳng (Q) song song với (P) .



Chiều cao của người đó gợi nên khái niệm nào trong hình học liên quan đến hai mặt phẳng song song (P) và (Q) ?

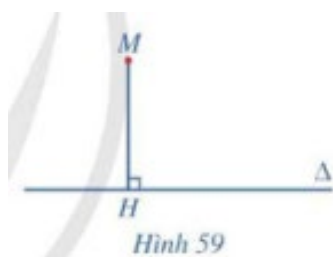


Hình 58

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Ta đã biết khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mặt phẳng. Trong không gian, khái niệm khoảng cách đó được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Cho đường thẳng Δ và điểm M không thuộc Δ . Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ . Độ dài đoạn thẳng MH gọi là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , kí hiệu $d(M, \Delta)$.



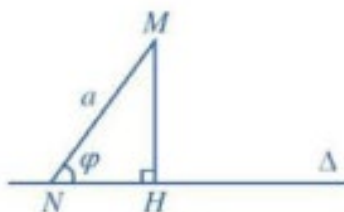
Hình 59

Trong Hình 59, ta có $d(M, \Delta) = MH$.

Chú ý: Khi điểm M thuộc đường thẳng Δ thì $d(M, \Delta) = 0$.

Ví dụ 1: Cho đoạn thẳng MN có độ dài a và đường thẳng Δ đi qua N thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính khoảng cách từ M đến Δ theo a, φ .

Lời giải



Hình 60

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ . Khi đó

$d(M, \Delta) = MH$. Vì góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ nên $\widehat{MNH} = \varphi$.

Suy ra $MH = MN, \sin \varphi = a \sin \varphi$. Vậy $d(M, \Delta) = a \sin \varphi$.

II. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẶNG



Khi lắp thiết bị cho nhà bạn Nam, bác thợ khoan tường tại vị trí M trên tường có độ cao so với nền nhà là $MH = 80$ cm. Quan sát Hình 61, nền nhà gọi nên mặt phẳng (P) , cho biết độ dài đoạn thẳng MH gọi nên khái niệm gì trong hình học liên quan đến điểm M và mặt phẳng (P) .



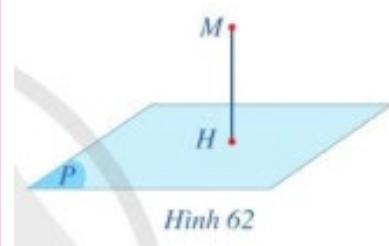
Hình 61

Lời giải

Độ dài đoạn thẳng MH gọi nên khái niệm khoảng cách trong hình học liên quan đến điểm M và mặt phẳng (P) .

Nhận xét: Độ dài đoạn thẳng MH gọi nên khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Ta có định nghĩa sau (Hình 62):

Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) . Độ dài đoạn thẳng MH gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$.



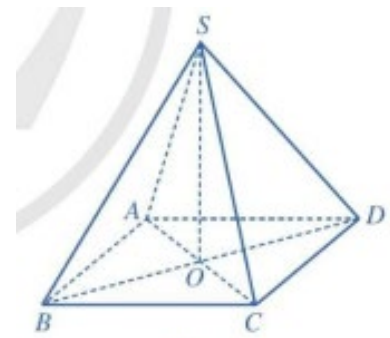
Hình 62

Chú ý: Khi điểm M thuộc mặt phẳng (P) thì $d(M, (P)) = 0$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$.

Tính:

- Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$;
- Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .



Hình 63

Lời giải(Hình 63)

a) Ta có: $O \in (ABCD)$, $SO \perp (ABCD)$.

Suy ra khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $SO = a$.

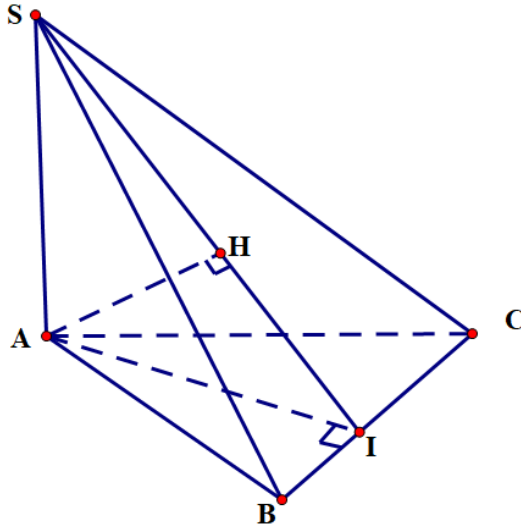
b) Do $SO \perp (ABCD)$, $BO \subset (ABCD)$ nên $SO \perp BO$.

Vì Bo vuông góc với hai đường thẳng AC và SO cắt nhau trong (SAC) nên $BO \perp (SAC)$. Do

$O \in (SAC)$, $BO \perp (SAC)$ nên khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Luyện tập 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AI \perp BC$ ($I \in BC$), $AH \perp SI$ ($H \in SI$). Chứng minh rằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH .

Lời giải



Có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Có $AI \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAI)$

$\Rightarrow BC \perp AH$

mà $AH \perp SI$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH

III. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

HD 2: Trong Hình 64, hai mép của con đường gọi nên hình ảnh hai đường thẳng song song Δ và Δ' . Xét điểm A trên đường thẳng Δ .

a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ' có phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên đường thẳng Δ hay không? Vì sao?

b) Khoảng cách đó gọi nên khái niệm gì trong hình học liên quan đến hai đường thẳng song song Δ và Δ' ?



Hình 64

Lời giải

a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ' không phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên đường

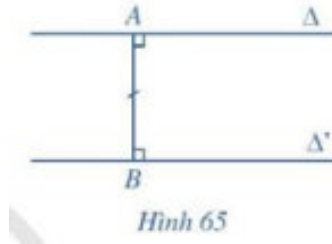
thẳng Δ

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia

Ta có định nghĩa sau:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ , Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta, \Delta')$.

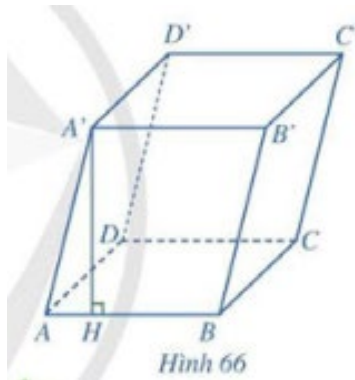
Trong Hình 65, ta có $d(\Delta, \Delta') = AB$ với $A \in \Delta, B \in \Delta', AB \perp \Delta, AB \perp \Delta'$ và $\Delta // \Delta'$.



Hình 65

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' = a$, góc giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$

Lời giải



Hình 66

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên AB . Do $AB // A'B'$ nên $d(AB, A'B') = A'H$

Vì $AA' // DD'$ nên góc giữa đường thẳng AB và AA' bằng góc giữa đường thẳng AB và DD' . Suy ra $\widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông HAA' có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, A'B') = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Luyện tập 2. Người ta dựng các cột đèn vuông góc với mặt đường, trong đó mỗi cột đèn gọi nên hình ảnh một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai chân cột đèn liên tiếp đo được là 5 m. Tại sao có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là 5 m ?

Lời giải

Giả sử ta có hai cột đèn liên tiếp và gọi chúng lần lượt là cột A và cột B . Khi các cột đèn được dựng thẳng đứng và vuông góc với mặt đường, thì đường thẳng mà cột A gọi lên và đường thẳng mà cột B gọi lên là song song nhau, tức là chúng không giao nhau.

Khi đó, ta có thể vẽ một đường thẳng qua hai chân của cột A và B , và khoảng cách giữa hai chân cột đèn liên tiếp chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng này. Vì hai đường thẳng này là song song nhau, nên khoảng cách giữa chúng là không đổi, và do đó ta có thể xác định khoảng cách giữa hai cột đèn liên tiếp là 5 m.

IV. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

HD 3. Trong Hình 67, thanh gỗ dọc phía trên các cột và mặt đường hành lang gọi nên hình ảnh đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) song song với nhau, chiều cao của chiếc cột có đỉnh cột A là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) .

- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) có phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên đường thẳng Δ hay không? Vì sao?
- Khoảng cách đó gọi nên khái niệm nào trong hình học liên quan đến đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) ?



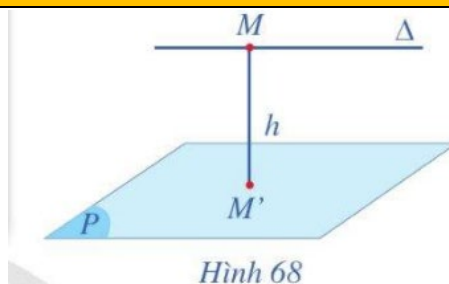
Hình 67

Lời giải

- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) không phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên đường thẳng Δ .
- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng đó là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.

Ta có định nghĩa sau :

Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) . Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) , kí hiệu là $d(\Delta, (P))$

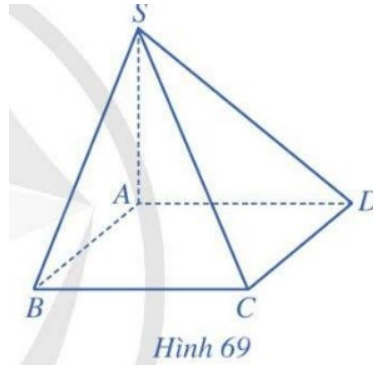


Hình 68

Trong Hình 68, ta có : $d(\Delta, (P)) = MM' = h$, trong đó $M \in \Delta$, $M' \in (P)$, $MM' \perp (P)$ và $\Delta \parallel (P)$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $CD \parallel (SAB)$ và tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải (Hình 69)



Do $CD \parallel AB$, $AB \subset (SAB)$, $CD \not\subset (SAB)$ nên $CD \parallel (SAB)$.

Vì $D \in CD$ nên $d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$.

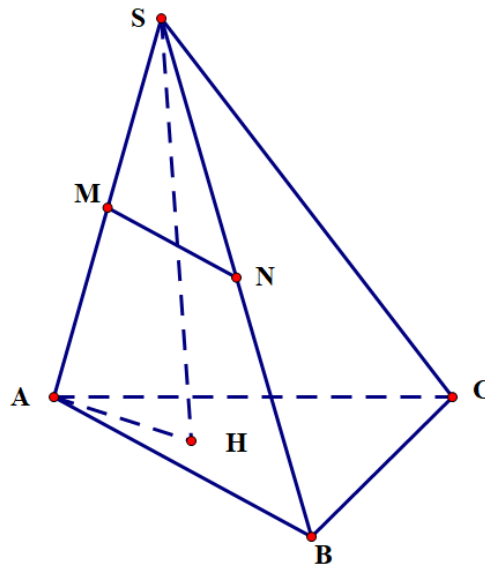
Do $SA \perp (ABCD)$, $DA \subset (ABCD)$ nên $SA \perp DA$.

Vì DA vuông góc với hai đường thẳng AB, SA cắt nhau trong (SAB) nên $DA \perp (SAB)$.

Do đó $d(D, (SAB)) = DA = a$. Vậy $d(CD, (SAB)) = a$.

Luyện tập 3. cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là 60° . Gọi M, N là trung điểm của cạnh SA và SB . Chứng minh $MN \parallel (ABC)$ và tính $d(MN, (ABC))$.

Lời giải



a) M, N là trung điểm của cạnh SA và $SB \Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác SAB

$$MN \parallel AB, AB \subset (ABC)$$

$$\Rightarrow MN \parallel (ABC)$$

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là: $\widehat{SAH}$ và $=60^\circ$

Xét tam giác SAH vuông tại H

$$\cos 60^\circ = \frac{SH}{SA}$$

$$SH = \frac{a}{2}$$

$$d(MN, (ABC)) = d(M, (ABC))$$

Vì SM cắt (ABC) tại A và $SA = 2MA$ nên $d(M, (ABC)) = \frac{1}{2}SH = \frac{a}{4}$.

V. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

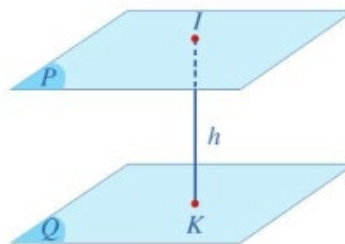
HĐ 4. a) Trong hình 70, sàn nhà và trần nhà của căn phòng gợi nên hình ảnh của hai mặt phẳng song song

$(P), (Q)$. Chiều cao của căn phòng là $3m$. Chiều cao đó gợi nên khái niệm gì trong hình học liên quan đến hai mặt phẳng song song $(P), (Q)$?



Hình 70

b) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Xét điểm I tùy ý trong mặt phẳng (P) , lấy K là hình chiếu của I trên (Q) (Hình 71). Khoảng cách IK từ điểm I đến mặt phẳng (Q) có phụ thuộc vào vị trí của điểm I trong mặt phẳng (P) hay không? Vì sao?



Hình 71

Lời giải

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

b) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Xét điểm I tùy ý trong mặt phẳng (P) , lấy K là hình chiếu của I trên (Q) (Hình 71). Khoảng cách IK từ điểm I đến mặt phẳng (Q) không phụ thuộc vào vị trí của điểm I trong mặt phẳng (P)

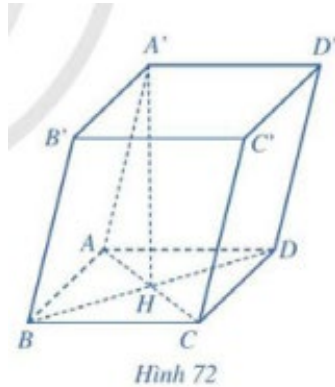
Ta có định nghĩa sau:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(P), (Q)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $d((P), (Q))$.

Trong Hình 71, ta có: $d((P), (Q)) = IK = h$ với $I \in (P), K \in (Q), IK \perp (P), IK \perp (Q)$ và $(P) // (Q)$.

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và đáy là hình vuông. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của AC và BD . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

Lời giải



Vì H là trung điểm của AC nên $AH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $A'H \perp AH$.

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H có:

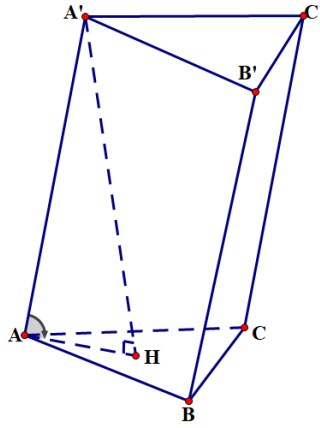
$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Suy ra $A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng $A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Luyện tập 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng a . Góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và

Lời giải



Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A' xuống $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H

$$\sin 60^\circ = \frac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Do $A'H \perp (ABC)$ và $AH \subset (ABC)$ nên $A'H \perp AH$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ bằng $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

VI. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

HD 5. Trong Hình 73, khuôn cửa phía trên và mép cánh cửa phía dưới gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b chéo nhau, hai bản lề của cánh cửa nằm trên đường thẳng c .

Quan sát Hình 73 và cho biết đường thẳng c có vừa cắt, vừa vuông góc với cả hai đường thẳng a và b hay không.



Hình 73

Lời giải

Đường thẳng c có vừa cắt, vừa vuông góc với cả hai đường thẳng a và b

Ta thừa nhận kết quả sau: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Khi đó, có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a và b .

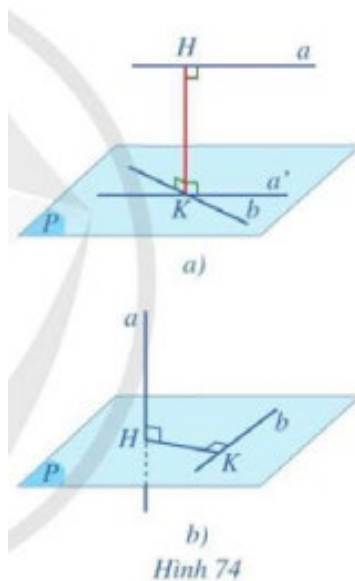
Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

- Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a và b được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

Nhận xét: Gọi mặt phẳng chứa b và song song với a là (P) , hình chiếu của a trên (P) là a' , giao điểm của a' và b là K . Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b (Hình 74a). Ngoài ra, ta cũng có $d(a, b) = d(a, (P))$.

Khi $a \perp b$, ta có thể làm như sau: Gọi mặt phẳng đi qua b và vuông góc với a là (P) , giao điểm của a và (P) là H , hình chiếu của H trên b là K . Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b (Hình 74b).

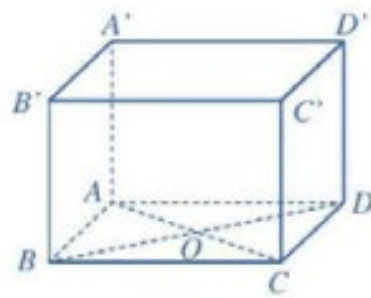


Hình 74

Ví dụ 6: Cho lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, O là giao điểm của AC và BD , $AA' = a$, AA' vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Tính:

a) $d(AC, A'B')$;

b) $d(CC', BD)$.



Hình 75

Lời giải

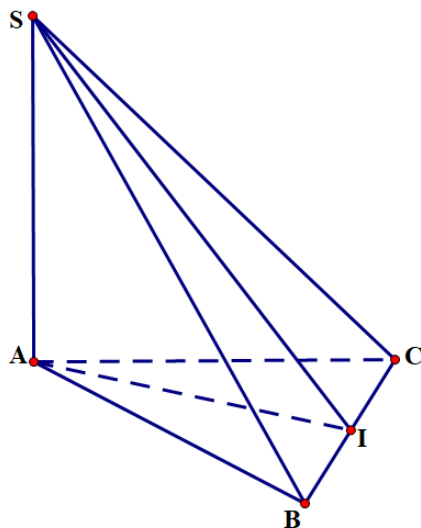
a) Vì AA' vuông góc với cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên $AA' \perp AC, AA' \perp A'B'$. Suy ra đoạn thẳng AA' là đoạn vuông góc chung của AC và $A'B'$.

Vậy $d(AC, A'B') = AA' = a$.

b) Vì CC' vuông góc với $(ABCD)$ nên $CC' \perp OC$. Do đáy $ABCD$ là hình vuông có O là giao điểm của AC và BD nên $BD \perp OC$. Suy ra đoạn thẳng OC là đoạn vuông góc chung của CC' và BD .

Vậy $d(CC', BD) = OC = a\sqrt{2}$.

Luyện tập 5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$. Tính $d(SA, BC)$.

Lời giải

Vẽ AI trong đó I là trung điểm của BC

Vì tam giác ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$

Vì $SA \perp (ABC) = SA \perp AI$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

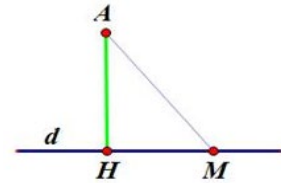
$$\Rightarrow d(SA, BC) = AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Phương pháp:

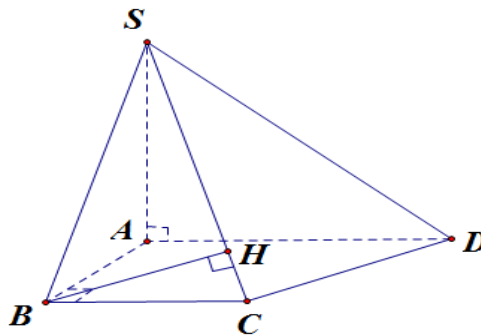
- ①. Xác định hình chiếu H của A trên d
- ②. Khi đó ta có: $d(A, d) = AH$
- ③. Tính độ dài AH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác.



2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC , đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC

Lời giải



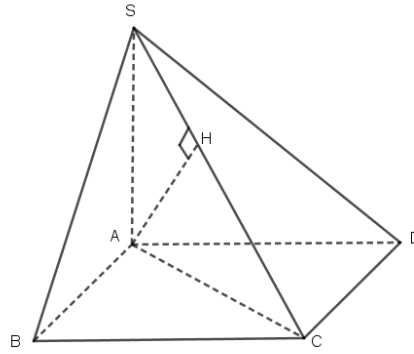
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC \text{ vuông tại } B.$

Trong ΔSBC dựng đường cao $BH \Rightarrow d(B; SC) = BH.$

$$SB = 2a; \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{BS \cdot BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC .

Lời giải



+) Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$.

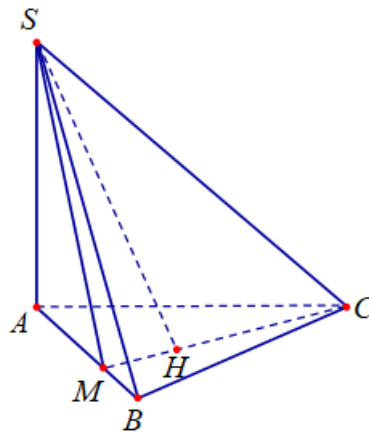
+) Kẻ $AH \perp SC$, suy ra $d(A; SC) = AH$.

+) Ta có tam giác ASC vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{2a^2} \quad AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = AC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \frac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM .

Lời giải



Ta có $CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$, $SM = \sqrt{4a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{10}}{3}$, $SC = a\sqrt{6}$.

Đặt $p = \frac{SM + MC + SC}{2}$.

Diện tích tam giác SMC : $S_{\Delta SMC} = \sqrt{p(p-SM)(p-CM)(p-SC)} = \frac{a^2\sqrt{11}}{3}$

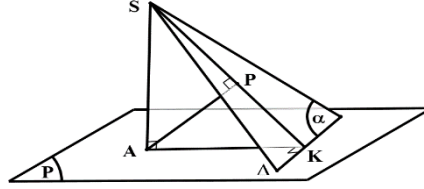
Suy ra khoảng cách từ S đến CM : $SH = \frac{2S_{\Delta SMC}}{CM} = \frac{a\sqrt{110}}{5}$.

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp:

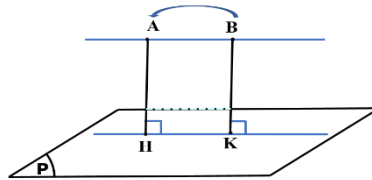
- ☑ Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α) .

①. A là chân đường cao, tức là $A \equiv H$.



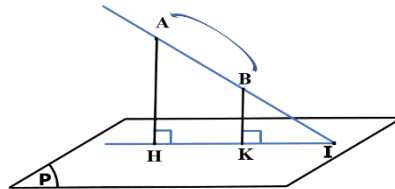
- ♦. Dựng $AK \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp (SAK) \Rightarrow (\alpha) \perp (SAK)$ và $(\alpha) \cap (SAK) = SK$.
- ♦. Dựng $AP \perp SK \Rightarrow AP \perp (\alpha) \Rightarrow d(A, (\alpha)) = AP$.

②. Dựng đường thẳng $AB \parallel (P)$.



- ♦. Khi đó ta có: $d(B, (P)) = d(A, (P))$.

③. Đường thẳng AB cắt (P) tại I :

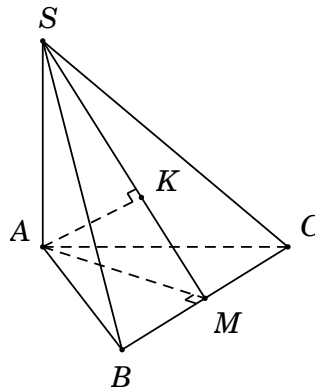


- ♦. Khi đó ta có: $\frac{d(B, (P))}{d(A, (P))} = \frac{BK}{AH} = \frac{BI}{AI}$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC , suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM , suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK$. (2)

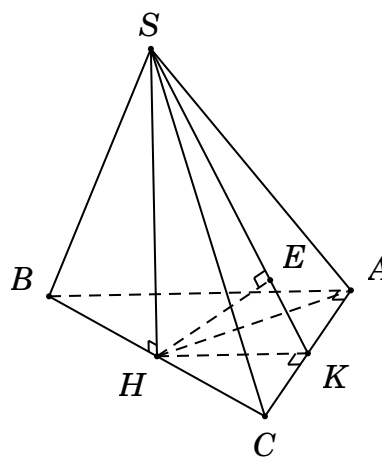
Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d[A, (SBC)] = AK$.

Trong $\triangle SAM$, có $AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d[A, (SBC)] = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

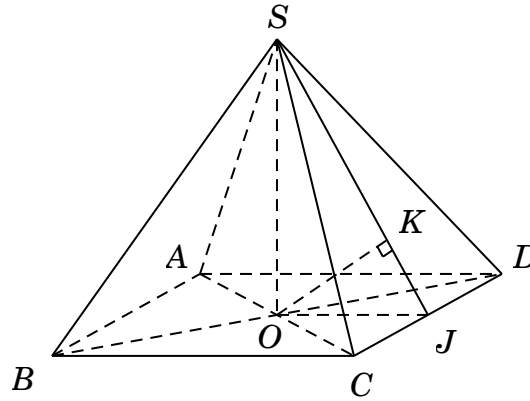
Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ ($E \in SK$).

$$\text{Khi đó } d[B, (SAC)] = 2d[H, (SAC)] = 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $d[A, (SCD)] = 2d[O, (SCD)]$.

Gọi J là trung điểm CD , suy ra $OJ \perp CD$.

Gọi K là hình chiếu của O trên SJ , suy ra $OK \perp SJ$.

$$\text{Khi đó } d[O, (SCD)] = OK = \frac{SO \cdot OJ}{\sqrt{SO^2 + OJ^2}} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}.$$

$$\text{Vậy } d[A, (SCD)] = 2OK = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC có $AB = 3a, BC = 2a, \widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

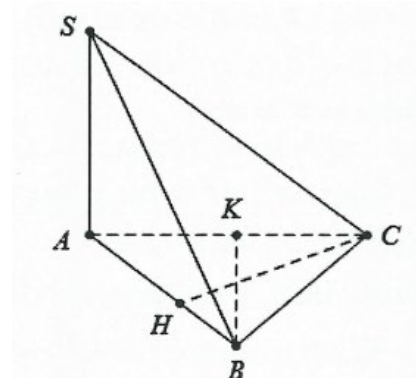
a) Dựng $CH \perp AB$ ta có: $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Do đó

$$d(C; (SAB)) = CH = CB \sin \widehat{ABH} = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

b) Dựng $CK \perp AC \Rightarrow CK \perp (SAC)$.

$$\text{Ta có: } d(B; (SAC)) = CH = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{AB \cdot BC \sin \widehat{ABC}}{AC}$$



Trong đó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cos \hat{B}$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{7} \Rightarrow d(B; (SAC)) = \frac{3a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB .

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SHD) .

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) .

Lời giải

a) Do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có: } HA = HD = \frac{a}{2}.$$

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dựng

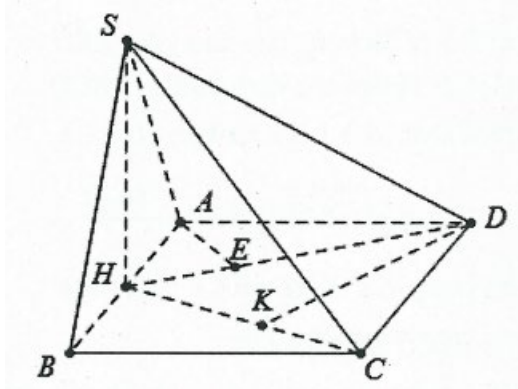
$$AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow d(A; (SHD)) = AE.$$

$$\text{Mặt khác } AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

b) Dựng $DK \perp CH \Rightarrow d(D; (SHC)) = DK$.

$$\text{Ta có: } CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}, S_{HCD} = \frac{1}{2} CD \cdot d(H; CD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } d(D; (SHC)) = \frac{2S_{HCD}}{CH} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 3a, AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

a) Dựng $CE \perp AD \Rightarrow CE \perp (SAD)$.

Khi đó $d(C; (SAD)) = CE$, do $ABCE$ là hình vuông cạnh $2a$ nên

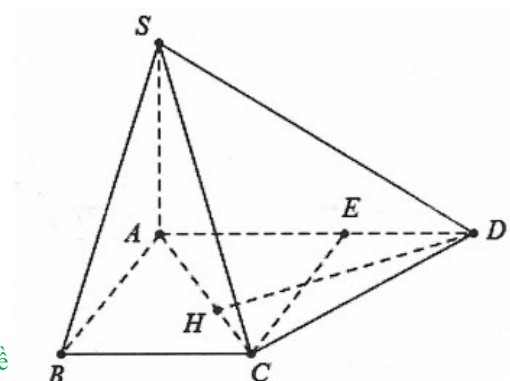
$$CE = AE = 2a \Rightarrow d(C; (SAD)) = 2a.$$

b) Dựng $DH \perp AC \Rightarrow DH \perp (SAC)$.

Khi đó $d(D; (SAC)) = DH$.

Ta có: $ABCE$ là hình vuông nên $\widehat{CAD} = 45^\circ$

$$\text{Do đó } DH = AD \sin 45^\circ = 3a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$



Dạng 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp:

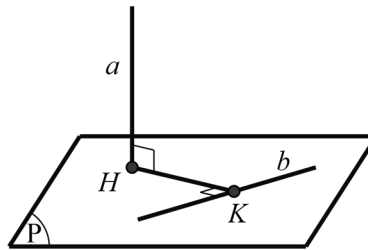
Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- **Cách 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b. Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.
- **Cách 2:** Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.
- **Cách 3:** Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

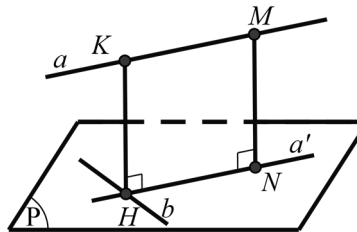
• **Cách 1:** Khi $a \perp b$

- + Dựng một (P) $\supset b$, (P) $\perp a$ tại H.
- + Trong (P) dựng HK $\perp b$ tại K.
- + Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b.



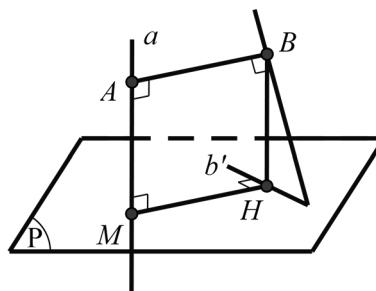
• **Cách 2:**

- + Dựng (P) $\supset b$, (P) $\parallel a$.
- + Dựng $a' = h_{(P)}(a)$, bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a.
- + Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK \parallel MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung.



• **Cách 3:**

- + Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M.
- + Dựng hình chiếu b' của b trên (P).
- + Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b'.
- + Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B.
- + Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC .

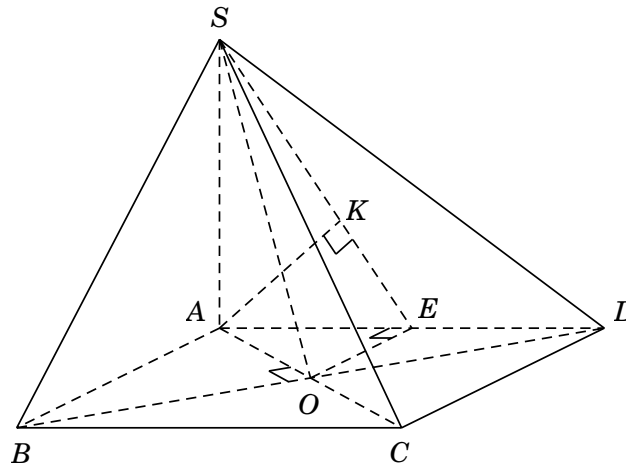
Lời giải

Ta có $d[AD, SC] = d[AD, (SBC)] = d[A, (SBC)]$.

$$\text{Kẻ } AK \perp SB. \text{ Khi đó } d[A, (SBC)] = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO .

Lời giải



Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ ($c - g - c$), suy ra $SB = SD$.

Lại có $\widehat{SBD} = 60^\circ$, suy ra $\triangle SBD$ đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB , có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Gọi E là trung điểm AD , suy ra $OE \parallel AB$ và $AE \perp OE$.

Do đó $d[AB, SO] = d[AB, (SOE)] = d[A, (SOE)]$.

Kẻ $AK \perp SE$.

$$\text{Khi đó } d[A, (SOE)] = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

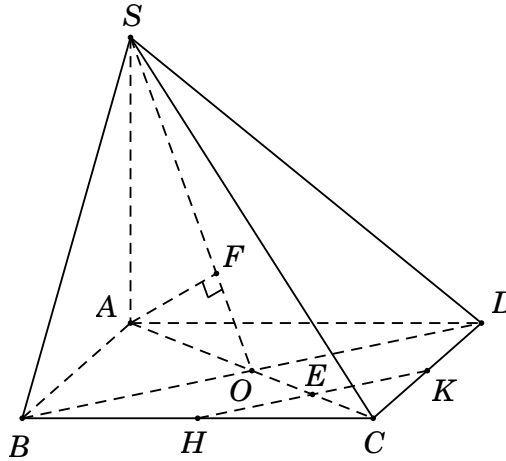
Lời giải

Ta có $BD \perp (SAC)$. Kẻ $OK \perp SA$.

$$\text{Khi đó } d[SA, BD] = \frac{SO \cdot OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD .

Lời giải



Gọi $E = HK \cap AC$.

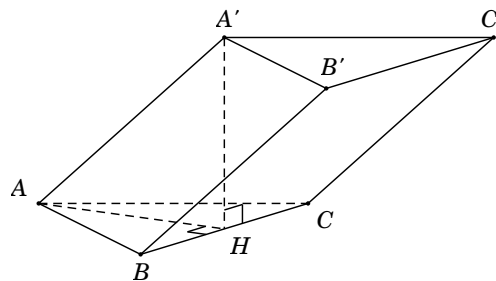
Do $HK \parallel BD$ nên $d[HK, SD] = d[HK, (SBD)] = d[E, (SBD)] = \frac{1}{2} d[A, (SBD)]$.

Kẻ $AF \perp SO$. Khi đó $d[A, (SBD)] = AF = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{2a}{3}$.

Vậy $d[HK, SD] = \frac{1}{2} AF = \frac{a}{3}$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

Lời giải



Do $BB' \parallel AA'$ nên $d[BB', A'H] = d[BB', (AA'H)] = d[B, (AA'H)]$.

Ta có $\begin{cases} BH \perp AH \\ BH \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AA'H)$ nên $d[B, (AA'H)] = BH = \frac{BC}{2} = a$.

$$\text{Vậy } d[BB', A'H] = a.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Hình 76 gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Cột gỗ cao 4,2 m. Khoảng cách giữa (P) và (Q) là bao nhiêu mét?



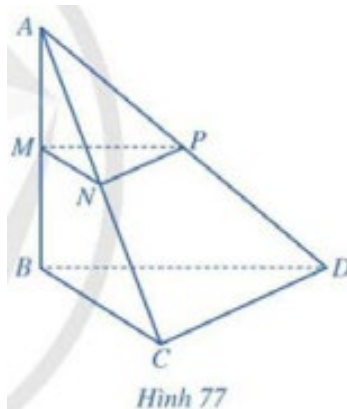
Hình 76

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau nên khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng khoảng cách cột gỗ. Vậy khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng 4,2 m.

Bài 2. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = a, BC = b, BD = c$, $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD (Hình 77).

- Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB .
- Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .



Hình 77

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Có } \widehat{ABC} &= 90^\circ \\ \Rightarrow AB &\perp BC \Rightarrow d(C, AB) = BC = b \end{aligned}$$

$$\text{b) Có } AB \perp BC, AB \perp BD$$

$$\Rightarrow AB \perp (BCD)$$

$$\Rightarrow AB \perp CD$$

$$\text{mà } BC \perp CD \left(\text{vì } \widehat{BCD} = 90^\circ \right)$$

$$\Rightarrow CD \perp (ABC)$$

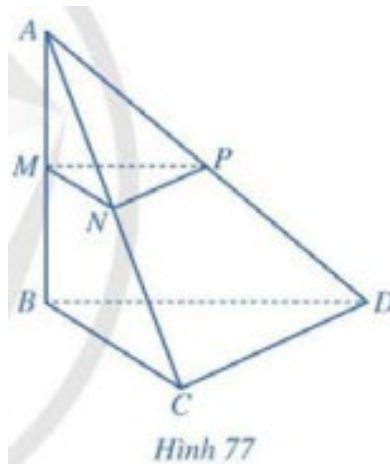
$$\Rightarrow d(D, (ABC)) = CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$c) AB \perp BC, BC \perp CD \Rightarrow d(AB, CD) = BC = b$$

Bài 3. Với giả thiết ở Bài tập 2, hãy:

- Chứng minh rằng $MN \parallel C$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BC .
- Chứng minh rằng $MP \parallel (BCD)$. Tính khoảng cách từ đường thẳng MP đến mặt phẳng (BCD) .
- Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (BCD)$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) .

Lời giải



Hình 77

- M là trung điểm của AB
 N là trung điểm của AC
 $\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABC
 $\Rightarrow MN \parallel BC$

$$AB \perp BC \Rightarrow MB \perp BC \Rightarrow d(MN, BC) = MB = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$$

- M là trung điểm của AB
 P là trung điểm của AD
 $\Rightarrow MP$ là đường trung bình của tam giác ABD

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow MP \parallel BD \\ BD \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow MP \parallel (BCD)$$

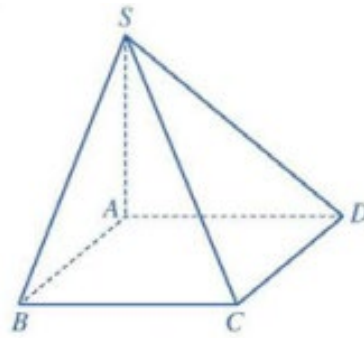
$$AB \perp (BCD) \Rightarrow MB \perp (BCD) \Rightarrow d(MP, (BCD)) = d(M, (BCD)) = MB = \frac{a}{2}$$

$$c) \Rightarrow d((MNP), (BCD)) = d(M, (BCD)) = MB = \frac{a}{2}$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ (Hình 78).

- Tính khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng CD .

- b) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) .
 c) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .



Hình 78

Lời giải

a) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AD \perp CD$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

$\Rightarrow d(S, CD) = SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

b) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp AD$

$\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow d(D, (SAB)) = AD = a$

c) Kẻ $AH \perp SD (H \in SD)$.

$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

$\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AH

$\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Baif 5. Với giả thiết ở Bài tập 4, hãy:

- a) Chứng minh rằng $BC \parallel (SAD)$ và tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) .
 b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC

Lời giải

Do $AD \parallel BC$ nên $d[D, (SBC)] = d[A, (SBC)]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB , suy ra $AK \perp SB$.

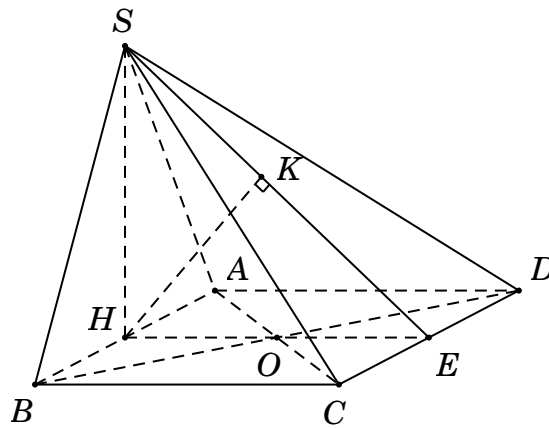
$$\text{Khi } d[A, (SBC)] = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD) .

- A.** $d = 1$. **B.** $d = \sqrt{2}$. **C.** $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$. Do đó $SH \perp (ABCD)$.

Do $AH \parallel CD$ nên $d[A, (SCD)] = d[H, (SCD)]$.

Gọi E là trung điểm CD ; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE .

$$\text{Khi đó } d[H, (SCD)] = HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } d[A, (SCD)] = HK = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

- A.** $d = a$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d = a\sqrt{3}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Do $AB \parallel CD$ nên $d[B, (SCD)] = d[A, (SCD)]$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E .

Khi đó $d[A, (SCD)] = AE$.

Tam giác vuông SAD , có $AE = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d[B, (SCD)] = AE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{285}}{19}$.

B. $d = \frac{\sqrt{285}}{38}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{285}}{38}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d[O, (SBC)] = \frac{1}{2} d[A, (SBC)]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB , suy ra $AK \perp SB$.

Khi đó $d[A, (SBC)] = AK$.

Tam giác vuông SAB , có $AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{285}}{19}$.

Vậy $d[O, (SBC)] = \frac{1}{2} AK = \frac{a\sqrt{285}}{38}$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{a}{4}$.

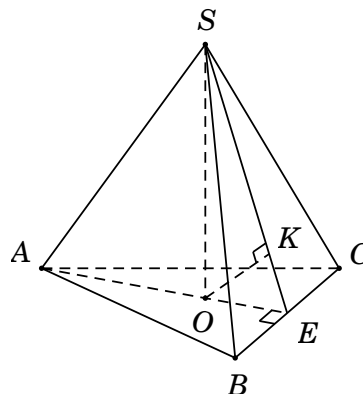
B. $d = \frac{3a}{4}$.

C. $d = \frac{3}{4}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC .

Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $d[A, (SBC)] = 3d[O, (SBC)]$.

Gọi E là trung điểm BC ; Kẻ $OK \perp SE$.

Khi đó $d[O, (SBC)] = OK$.

Tính được $SO = \frac{a}{2}$ và $OE = \frac{1}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông SOE , có $OK = \frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \frac{a}{4}$.

Vậy $d[A, (SBC)] = 3OK = \frac{3a}{4}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $d = a$.

D. $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$, suy ra $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ nên $d[D, (SBC)] = d[A, (SBC)]$.

Kẻ $AK \perp SB$. Khi đó $d[A, (SBC)] = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d[D, (SBC)] = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = \frac{1}{2}$.

B. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$ và $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm BC , kẻ $OK \perp SM$. Khi đó $d[O, (SBC)] = OK$.

Tam giác vuông SOM , có $OK = \frac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

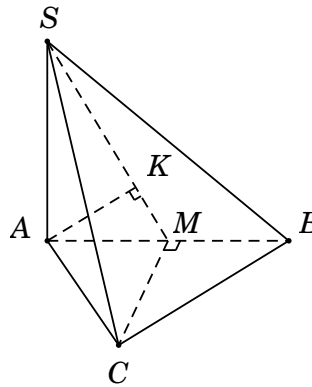
$$\text{Vậy } d[O, (SBC)] = OK = \frac{\sqrt{42}}{14}.$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC) .

- A. $d = a\sqrt{3}$. B. $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$. C. $d = a$. D. $d = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$ và $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Do M là trung điểm của cạnh AB nên $d[B, (SMC)] = d[A, (SMC)]$.

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $d[A, (SMC)] = AK$.

Tam giác vuông SAM , có $AK = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d[B, (SMC)] = AK = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a$, $BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $d = a\sqrt{5}$. D. $d = a$.

Lời giải

Chọn A

Gọi O là trung điểm AC , suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $d[M, (SBD)] = \frac{1}{2} d[C, (SBD)]$.

$$\text{Kẻ } CE \perp BD. \text{ Khi đó } d[C, (SBD)] = CE = \frac{CB \cdot CD}{\sqrt{CB^2 + CD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d[M, (SBD)] = \frac{1}{2}CE = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC . Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD) .

- A.** $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } d[E, (SAD)] = \frac{1}{2}d[C, (SAD)].$$

Gọi M là trung điểm AD , suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM \perp AD$.

$$\text{Do } \begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \text{ nên } d[C, (SAD)] = CM = AB = a\sqrt{3}.$$

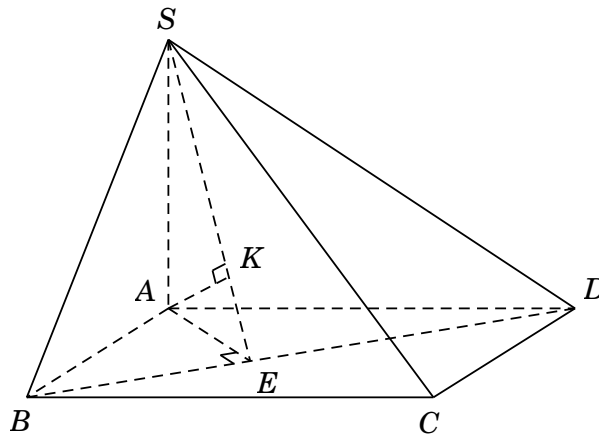
$$\text{Vậy } d[E, (SAD)] = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a .

- A.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Xác định } 60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA} \text{ và } SA = AD \cdot \tan \widehat{SDA} = 2a\sqrt{3}.$$

Ta có $d[C, (SBD)] = d[A, (SBD)]$.

Kẻ $AE \perp BD$ và kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d[A, (SBD)] = AK$.

Tam giác vuông BAD , có $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAE , có $AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d[C, (SBD)] = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{2}{3}$.

B. $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $d = \frac{2a}{3}$.

D. $d = 1$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $AE \perp BD$, kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d[A, (SBD)] = AK$.

Tam giác vuông ABD , có $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE , có $AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{2}{3}$.

Vậy $d[A, (SBD)] = AK = \frac{2}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30° . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

A. $d = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

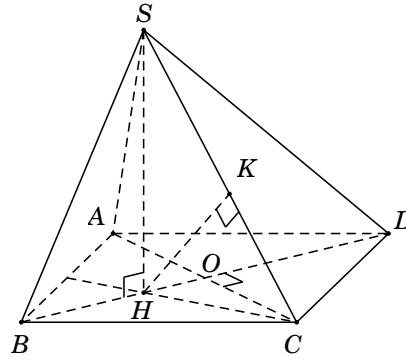
B. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $d = a$.

D. $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $30^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$ và $SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{2a}{3}$.

Ta có $d[B, (SCD)] = \frac{BD}{HD} \cdot d[H, (SCD)] = \frac{3}{2} \cdot d[H, (SCD)]$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $d[H, (SCD)] = HK$.

Tam giác vuông SHC , có $HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $d[B, (SCD)] = \frac{3}{2} HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

B. $d = a\sqrt{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $d = 2a$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AD , suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM = MA = \frac{AD}{2}$ nên tam giác ACD vuông tại C .

Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó $d[A, (SCD)] = AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN) .

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

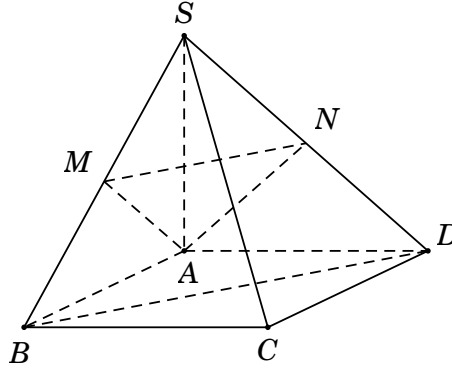
B. $d = 2a$.

C. $d = \frac{3a}{2}$.

D. $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối chóp $V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SA = \frac{2a^3}{3}$.

Vì $S_{\triangle SMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle SBD}$ nên $V_{A.SMN} = \frac{1}{4} V_{A.SBD} = \frac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được $AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AN = a\sqrt{2}, MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\triangle AMN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d[S, (AMN)] = \frac{3V_{S.AMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA') .

A. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $d = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

D. $d = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI \perp BD$.

Kẻ $AK \perp A'I$. Khi đó $d[A, (BDA')] = AK = \frac{AA' \cdot AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD' .

A. $d = a\sqrt{2}$.

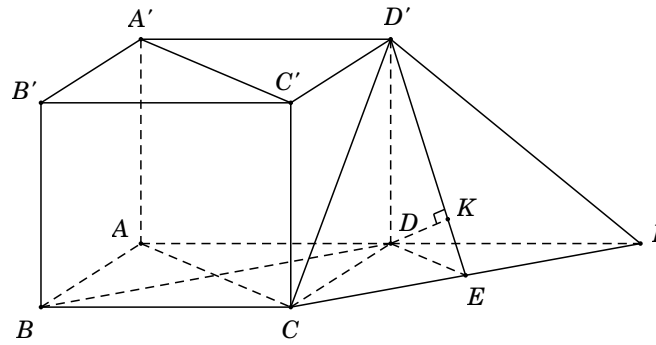
B. $d = 2a$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D , suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $d[BD, CD'] = d[BD, (CD'I)] = d[D, (CD'I)]$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E , kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $d[D, (CD'I)] = DK$.

Xét tam giác IAC , ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \frac{1}{2}AC = a$.

Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \frac{D'D \cdot DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO . Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB .

A. $d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$.

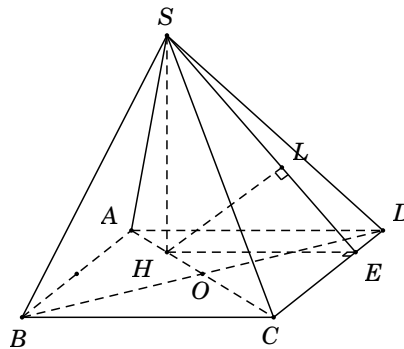
B. $d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

C. $d = 2a$.

D. $d = 4a$.

Lời giải

Chọn A



Do $AB \parallel CD$ nên $d[SD, AB] = d[AB, (SCD)] = d[A, (SCD)] = \frac{4}{3}d[H, (SCD)]$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$.

Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$, $HE = \frac{3}{4}AD = 3a$.

$$\text{Khi đó } d[H, (SCD)] = HL = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

$$\text{Vậy } d[SD, AB] = \frac{4}{3}HL = \frac{4a\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .

A. $d = 3\sqrt{5}$.

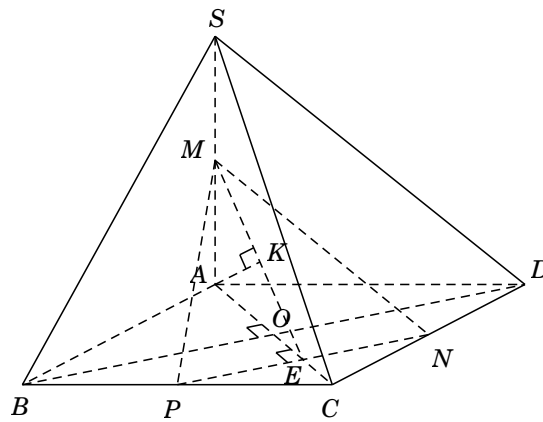
B. $d = \sqrt{5}$.

C. $d = 5$.

D. $d = 10$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$ nên $BD \parallel (MNP)$.

$$\text{Do đó } d[BD, MN] = d[BD, (MNP)] = d[O, (MNP)] = \frac{1}{3}d[A, (MNP)].$$

Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $d[A, (MNP)] = AK$.

$$\text{Tính được } SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow MA = 5\sqrt{3}; AE = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác vuông } MAE, \text{ có } AK = \frac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } d[BD, MN] = \frac{1}{3}AK = \sqrt{5}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC , tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM .

A. $d = a\sqrt{3}$.

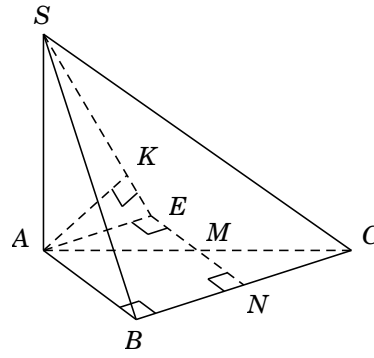
B. $d = 5a\sqrt{3}$.

C. $d = \frac{5a}{2}$.

D. $d = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải

Chọn D



Xác định $60^\circ = \widehat{SC, (ABC)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$ và $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = 5a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm BC , suy ra $MN \parallel AB$.

Lấy điểm E đối xứng với N qua M , suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.

Do đó $d[AB, SM] = d[AB, (SME)] = d[A, (SME)]$.

Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d[A, (SME)] = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

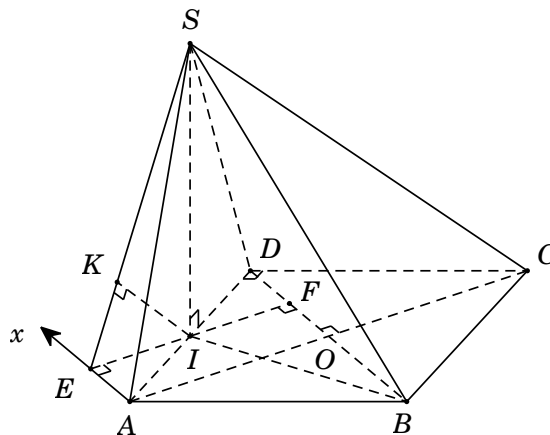
B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

D. $d = a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AD nên suy ra $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Kẻ $Ax \parallel BD$. Do đó $d[BD, SA] = d[BD, (SAx)] = d[D, (SAx)] = 2d[I, (SAx)]$.

Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d[I, (SAx)] = IK$.

Gọi F là hình chiếu của I trên BD , ta có $IE = IF = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE , có $IK = \frac{SI \cdot IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Vậy $d[BD, SA] = 2IK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB .

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

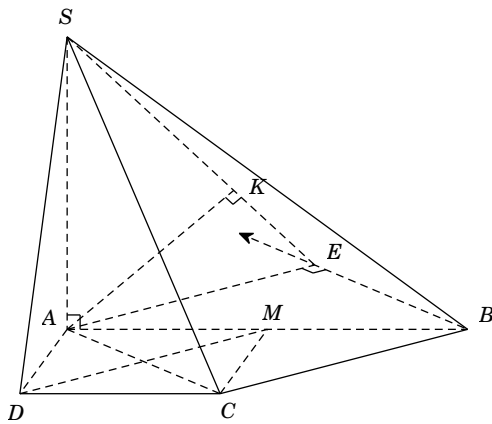
B. $d = 2a$.

C. $d = a\sqrt{2}$.

D. $d = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$ và $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB , suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.

Xét tam giác ACB , ta có trung tuyến $CM = a = \frac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C .

Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC \parallel BE$.

Do đó $d[AC, SB] = d[AC, (SBE)] = d[A, (SBE)]$. Kẻ $AK \perp SE$.

Khi đó $d[A, (SBE)] = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 23: Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a .

A. $d = \frac{3a}{2}$.

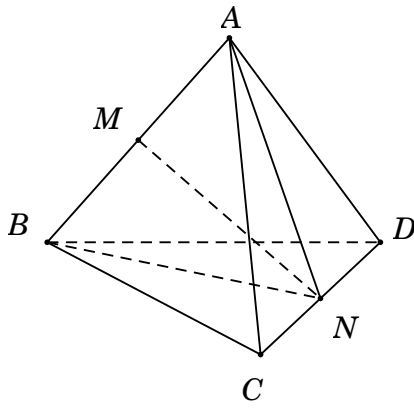
B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $d = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle ABN \text{ cân tại } N \Rightarrow MN \perp AB. \quad (2)$$

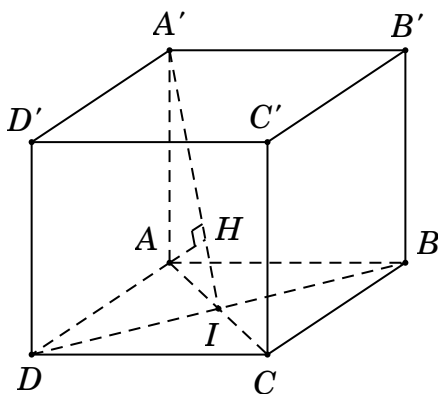
$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } d[AB, CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

- A.** Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.
- B.** Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.
- C.** Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.
- D.** Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

- **Xét A** Gọi $I = BD \cap AC$ và H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng $A'I$

Dễ dàng chứng minh được $d(A, (A'BD)) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \longrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy A sai.

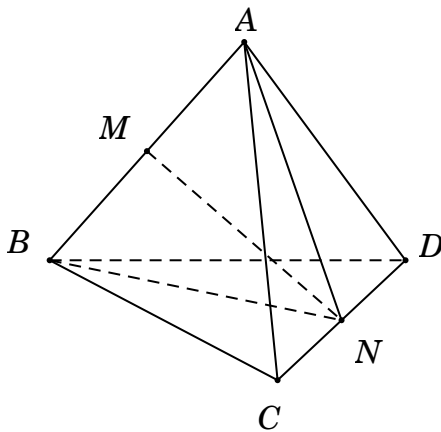
- **Xét B** Đường chéo hình lập phương $AC' = a\sqrt{3}$. Vậy B đúng.
- **Xét C** Ta có $AD \perp (CDD'C') \longrightarrow d(A, (CDD'C')) = AD = a$. Vậy C sai.
- **Xét D** Ta có $AB \perp (BCC'B') \longrightarrow d(A, (BCC'B')) = AB = a$. Vậy D sai.

Câu 25: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN. \quad (1)$

Ta có $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB. \quad (2)$

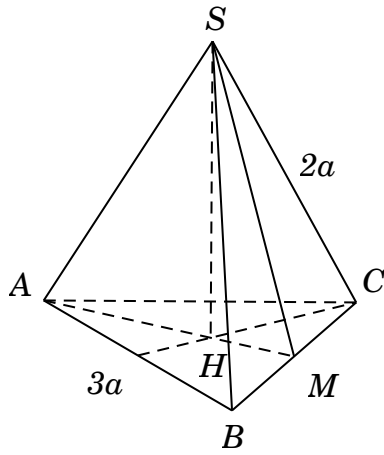
Từ (1) và (2), suy ra $d[AB, CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy là

- A. $1,5a$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC và H là trọng tâm tam giác ABC .

Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S, (ABC)) = SH$.

Ta có $AM = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{2}{3}AM = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$.

Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai?

A. $BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

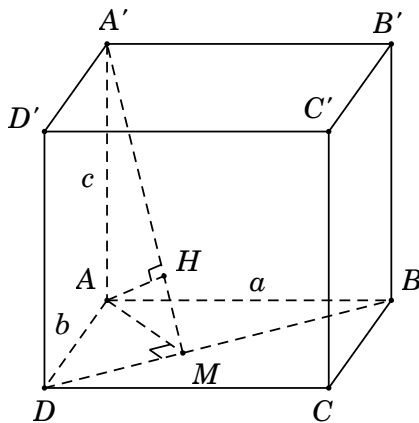
B. $d(AB, CC') = b$.

C. $d(BB', DD') = \sqrt{a^2 + b^2}$.

D. $d(A, (A'BD)) = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

Chọn D



Xét các đáp án:

• **Xét A** Ta có $BD' = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Vậy A đúng.

• **Xét B** Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp CC' \end{cases} \longrightarrow d(AB, CC') = BC = b$. Vậy B đúng.

- **Xét C** Ta có $BB' \parallel DD' \longrightarrow d(BB', DD') = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy C đúng.
- **Xét D** Gọi M là hình chiếu của A trên AB , H là hình chiếu của A trên AM . Dễ dàng chứng minh được $AH \perp (A'BD) \longrightarrow d(A, (A'BD)) = AH$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{c^2} \longrightarrow AH = \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}}. \text{ Vậy D sai.}$$

BÀI 6. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH KHỐI

Hình 79

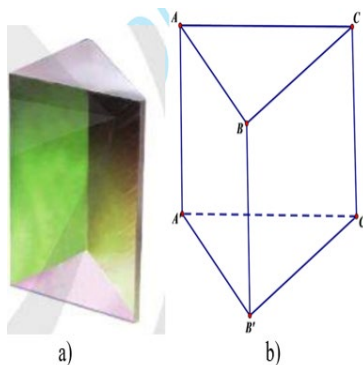
(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Ở lớp 7, ta đã làm quen với hình lăng trụ đứng tam giác và hình lăng trụ đứng tứ giác, tức là những hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác hoặc tứ giác.

Hình lăng trụ đứng với đáy là đa giác, đặc biệt là đa giác đều, có tính chất gì (Hình 79)?

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**I. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỀU**

HD 1. Cho hình lăng trụ tam giác có các mặt bên là hình chữ nhật ở Hình 80a, 80b. Hãy cho biết mỗi cạnh của lăng trụ có góc vuông với các mặt đáy hay không.



Hình 80

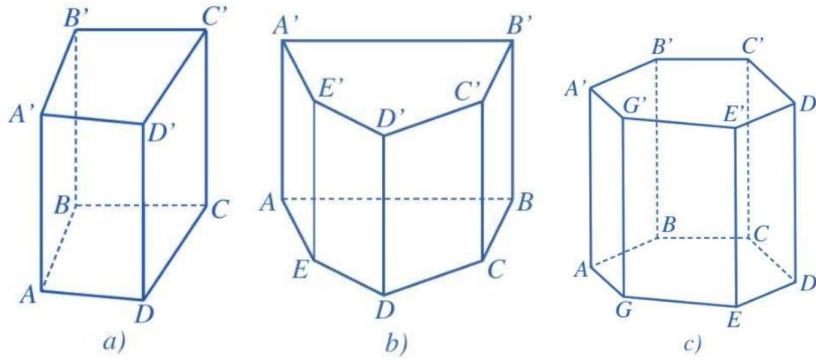
Lời giải

Mỗi cạnh bên của hình lăng trụ đó có vuông góc với các mặt đáy

Ta có các định nghĩa sau:

- Hình lăng trụ có cạnh góc với mặt đáy được gọi là *hình lăng trụ đứng*.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều gọi là *hình lăng trụ đều*.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng*.

Chú ý: Khi đáy của hình lăng trụ đứng các lần lượt là tứ giác, ngũ giác, lục giác, ta gọi hình lăng trụ đứng đó lần lượt là hình lăng trụ đứng tứ giác (Hình 81a), hình lăng trụ đứng ngũ giác (Hình 81b), hình lăng trụ đứng lục giác (Hình 81c).



Hình 81

Nhận xét

- Mỗi mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật, mặt phẳng chứa nó vuông góc với mặt đáy.
- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình chữ nhật.
Nếu mỗi mặt của hình hộp là hình chữ nhật thì hình hộp đó là hình hộp chữ nhật.
Độ dài các đường chéo của hình hộp chữ nhật là bằng nhau.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình vuông.
Nếu các mặt của hình hộp chữ nhật có diện tích bằng nhau thì hình hộp chữ nhật đó là hình lập phương.

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ (Hình 82). Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải

Do $C'C \perp (ABCD)$ nên $C'C \perp AC$. Theo định lí

Pythagore, trong tam giác vuông ACC' ta có:

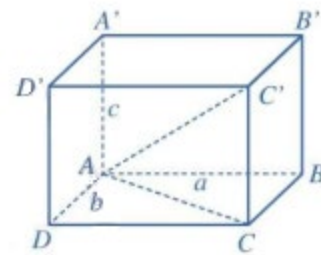
$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = AC^2 + c^2.$$

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABC ta

$$\text{có: } AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật

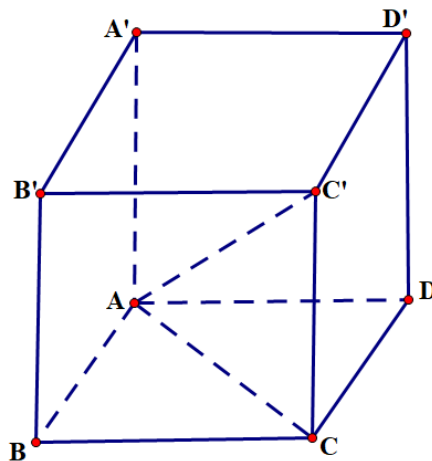
$$ABCD.A'B'C'D' \text{ là } d = AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Hình 82

1 Cho hình lập phương có cạnh bằng a . Tính độ dài đường chéo của hình lập phương đó.

Lời giải



Khi xét hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh a . Áp dụng định lý Pitago ta sẽ tính được: Đường chéo của 1 mặt $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \text{Đường chéo của hình lập phương } AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{3}$$

II. HÌNH CHÓP ĐỀU. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU



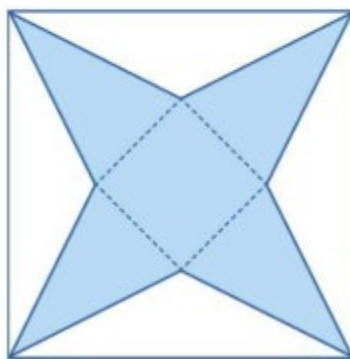
Để tạo mô hình một tháp chuông ở Hình 83a từ một tấm bìa hình vuông, bạn Dũng cắt bỏ phần màu trắng gồm bốn tam giác cân bằng nhau có đáy là các cạnh của tấm bìa (Hình 83b) rồi gấp lại phần màu xanh để tạo thành một hình chóp tứ giác. Quan sát Hình 83a, 83b và cho biết:

- Đáy của hình chóp mà bạn Dũng tạo ra là tứ giác có tính chất gì;
- Các cạnh bên của hình chóp đó có bằng nhau hay không?



(Nguồn: <https://www.shutterstock.com>)

a)



b)

Hình 83

Lời giải

- Đáy của hình chóp mà bạn Dũng tạo ra là đa giác
- Các cạnh bên của hình chóp đó có bằng nhau

Nhận xét: Hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau là hình chóp tứ giác đều. Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý

- Khi đáy của hình chóp đều lần lượt là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, lục giác đều, ta gọi hình chóp đều đó lần lượt là hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều, hình chóp ngũ giác đều, hình chóp lục giác đều.
- Hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy là tứ diện đều. Có nhiều vật thể trong thực tiễn, trong khoa học – kĩ thuật xuất hiện ở dạng tứ diện đều. Chẳng hạn: Trong hóa học có mô hình tứ diện đều về lai hóa orbital. Bốn orbital lai hóa sp^3 có các trục đối xứng tạo với nhau một góc khoảng $109^\circ 28'$ và hướng về bốn đỉnh của một hình tứ diện đều. Sự lai hóa này được gọi là lai hóa sp^3 hay lai hóa tứ diện (Hình 84).



Hình 84

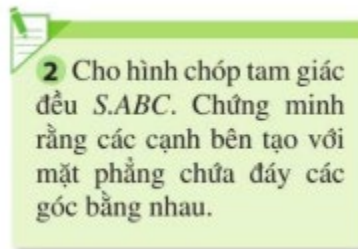
Bảo tàng Louvre ở thủ đô Paris (Pháp) là một trong những bảo tàng nổi tiếng nhất thế giới. Hình 85 là ảnh chụp kim tự tháp kính ở bảo tàng Louvre, kim tự tháp kính đó có dạng hình chóp tứ giác đều.



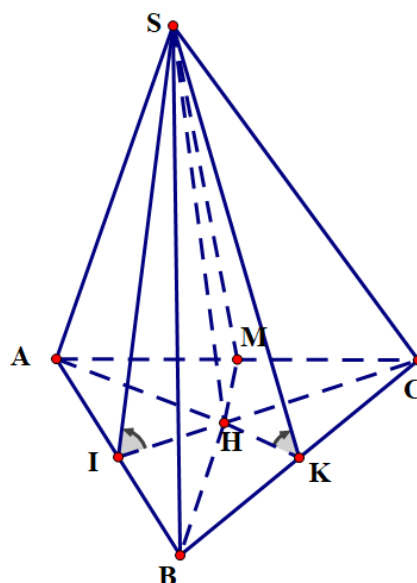
(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 85

Ta đã biết rằng đối với một hình chóp bất kì, đoạn thẳng nối đỉnh với hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp đó; hình chiếu của đỉnh trên mặt đáy gọi là *chân đường cao* của hình chóp đó; độ dài đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp đó.



Lời giải



Gọi I,K,M lần lượt là TĐ của AB,BC,CA

S.ABC là hình chóp đều

$$\Rightarrow SI \perp AB, SK \perp BC, SM \perp CA$$

S.ABC là hình chóp đều

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow SA = SB = SC.$$

Do đó khi ta vẽ $SH \perp (ABC)$

$$\Rightarrow H \text{ là trọng tâm của } \Delta ABC \text{ đều và có } AH \perp BC.$$

$$((SAB);(ABC)) = \widehat{SIH}; ((SBC);(ABC)) = \widehat{SKH}; ((SAC);(ABC)) = \widehat{SMH}$$

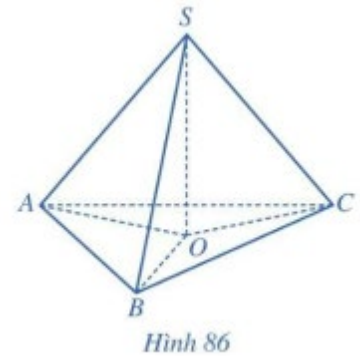
$$\Rightarrow \widehat{SIH} = \widehat{SKH} = \widehat{SMH} \text{ do}$$

$$\Delta SIH = \Delta SKH = \Delta SMH \text{ (cgc)}$$

Ví dụ 2. Gọi điểm O là chân đường cao của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ (Hình 86). Chứng minh rằng điểm O cách đều ba điểm A, B, C .

Lời giải

Do $SO \perp (ABC)$ nên $SO \perp OA, SO \perp OB, SO \perp OC$. Xét ba tam giác vuông SOA, SOB, SOC ta có: SO chung, $SA = SB = SC$, suy ra các tam giác vuông đó bằng nhau. Do đó $OA = OB = OC$. Vậy điểm O cách đều ba điểm A, B, C tức là chân đường cao của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC .

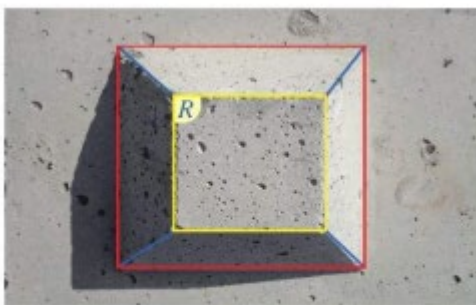


Trong trường hợp tổng quát, ta có tính chất sau:

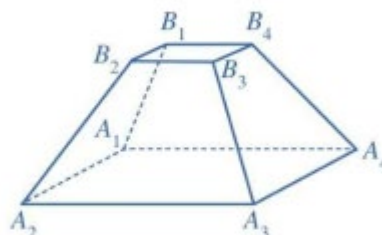
Chân đường cao của hình chóp đều là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.



Khối bê tông ở Hình 87a gợi lên hình ảnh một hình chóp bị cắt đi bởi mặt phẳng (R) song song với đáy. Hình 87b là hình biểu diễn của khối bê tông ở Hình 87a. Hãy dự đoán về mối quan hệ giữa các đường thẳng chứa các cạnh $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$.



a)



b)

Hình 87

Lời giải

$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ là các cạnh bên

Nhận xét: Hình 87b gợi lên hình ảnh của *hình chóp cắt tứ giác đều*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hình chóp đều $S.A_1A_2A_3 \dots A_n$. Mặt phẳng (P) song song với đáy của hình chóp và cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ lần lượt tại $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Phần của hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và $(A_1A_2A_3 \dots A_n)$ được gọi là hình chóp cắt đều $A_1A_2 \dots A_n \cdot B_1B_2 \dots B_n$.

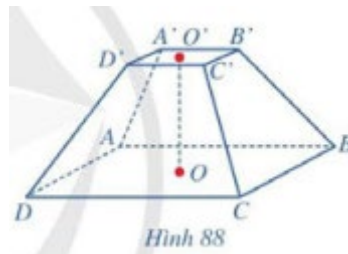
Trong hình chóp cắt đều $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$, ta gọi:

- Các đa giác $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ lần lượt là đáy lớn, đáy nhỏ;
- Các tứ giác $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ là các mặt bên;
- Các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ là các cạnh bên;
- Các cạnh của hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ là các cạnh đáy;
- Đoạn thẳng nối tâm của hai đáy là đường cao; độ dài đường cao là chiều cao.

Tùy theo đáy là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, ..., ta có hình chóp cắt tam giác đều, hình chóp cắt tứ giác đều, hình chóp cắt ngũ giác đều, ...

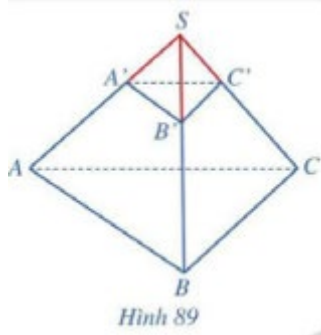
Nhận xét

- Hai đáy của hình chóp cắt đều nằm trên hai mặt phẳng song song và có các cạnh tương ứng song song: đồng thời hai đáy đó là các đa giác đều có cùng số cạnh;
- Mỗi mặt bên của hình chóp cắt đều là một hình thang cân;
- Các đường thẳng chứa cạnh bên của hình chóp cắt đều cùng đi qua một điểm;
- Đường cao của hình chóp cắt đều thì vuông góc với hai đáy của hình chóp cắt đều đó (chẳng hạn, đoạn thẳng OO' trong Hình 88).



Ví dụ 3: Cho hình chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ trong đó tam giác $A'B'C'$ là đáy nhỏ và $\widehat{A'AB} = 60^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BB' .

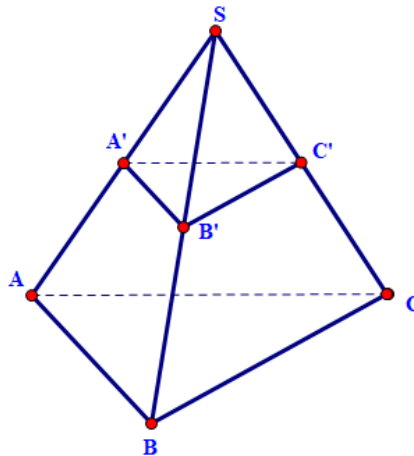
Lời giải



Gọi S là giao điểm của ba đường thẳng AA', BB', CC' . Vì hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SA = SB$. Tam giác SAB cân tại S và $\widehat{SAB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và BB' bằng 60° .

Luyện tập 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, SC . Chứng minh rằng phần hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ là hình chóp cắt đều.

Lời giải



Chứng minh $(A'B'C') \parallel (ABC)$

Theo đề bài A', B', C' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, SC nên suy ra $A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, A'C' \parallel AC$ (theo tính chất đường trung bình trong tam giác).

$\Rightarrow (A'B'C') \parallel (ABC)$.

$\Rightarrow$ Phần hình chóp đã cho giới hạn bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ là hình chóp cắt đều (theo định nghĩa).

III. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH KHỐI

Phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (kể cả hình lăng trụ ấy) được gọi là *khối lăng trụ*. Ta định nghĩa tương tự các khối sau: khối hộp, khối chóp, khối chóp cắt đều.

Đỉnh, cạnh, mặt của các khối lăng trụ, khối hộp, khối chóp, khối chóp cắt đều là đỉnh, cạnh, mặt của các hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp, hình chóp cắt đều tương ứng.

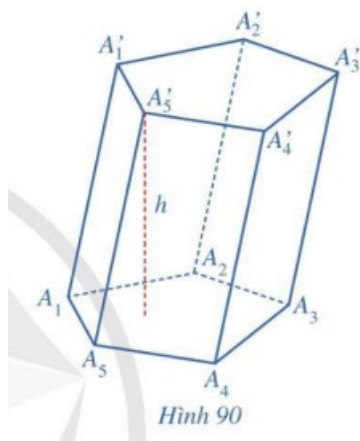
1. Thể tích của khối lăng trụ

Hãy nêu lại công thức tính thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác, khối lăng trụ đứng tứ giác.

Lời giải

Thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao

Cho hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n \cdot A'_1A'_2 \dots A'_n$ (Hình 90). Ta gọi chiều cao của hình lăng trụ đó là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(A_1A_2 \dots A_n)$ và $(A'_1A'_2 \dots A'_n)$.



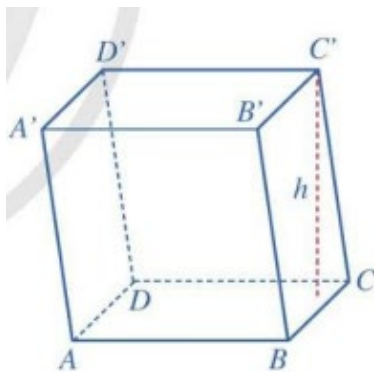
Người ta có thể chứng minh được định lí sau:

Thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

Cụ thể, ta có: $V = S.h$, trong đó V là thể tích của khối lăng trụ, S là diện tích của đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ.

Nhận xét

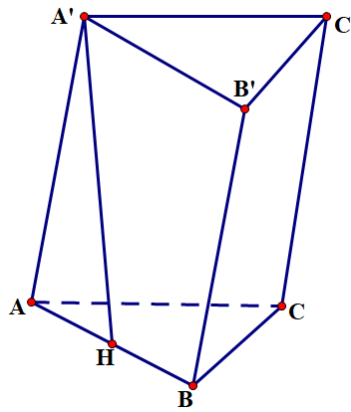
- Do chiều cao của khối lăng trụ đứng bằng độ dài cạnh bên nên thể tích của khối lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với độ dài cạnh bên.
- Vì khối hộp là khối lăng trụ có đáy là hình bình hành nên thể tích của khối hộp bằng diện tích đáy nhân với chiều cao (Hình 91).
- Thể tích của khối hộp chữ nhật với ba kích thước: chiều dài a , chiều rộng b , chiều cao c , là: $V = abc$.
- Thể tích của khối lập phương cạnh a là: $V = a^3$.



Hình 91

Luyện tập 4. Tính thể tích của khối $ABC.A'B'C'$ biết tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

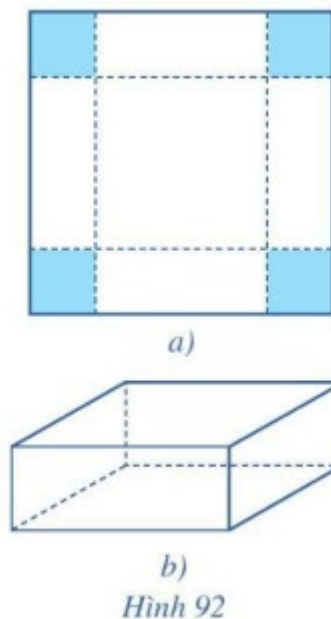
$$AH = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$$

$$\Delta AA'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$V_{ABC \cdot A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{3a^3}{8}$$

Ví dụ 4. Từ một tấm bìa hình vuông (Hình 92) và người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng 6 cm, rồi gập tấm bìa lại để được một chiếc hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật (Hình 92b). Tính cạnh của tấm bìa ban đầu, biết rằng thể tích của chiếc hộp bằng 600cm^3 .



Hình 92

Lời giải

Giả sử tấm bìa ban đầu có cạnh $x(\text{cm})(x > 12)$. Khi đó:

Đáy của chiếc hộp là hình vuông cạnh $x-12(\text{cm})$ nên diện tích của đáy chiếc hộp là $(x-12)^2 (\text{cm}^2)$.

Mà chiều cao của chiếc hộp là 6cm , suy ra thể tích của chiếc hộp bằng $(x-12)^2 \cdot 6 (\text{cm}^3)$.

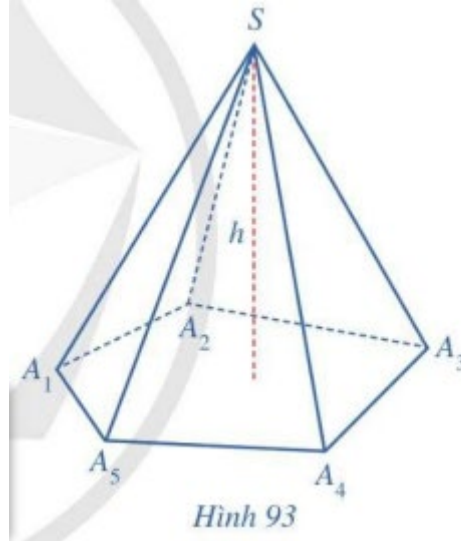
Theo đề bài, thể tích của chiếc hộp bằng 600cm^3 nên $(x-12)^2 \cdot 6 = 600 \Leftrightarrow (x-12)^2 = 100$

Với $x > 12$ ta có: $x-12=10 \Leftrightarrow x=22(\text{cm})$.

2. Thể tích của khối chóp và khối chóp cắt đều

a) Thể tích của khối chóp

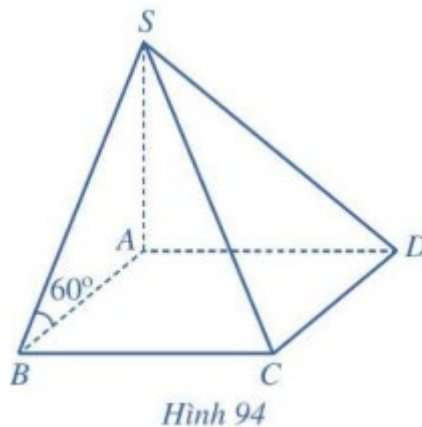
Ta gọi chiều cao của khối chóp là chiều cao của hình chóp tương ứng (Hình 93).



Thể tích của khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao.

Cụ thể, ta có: $V = \frac{1}{3}S.h$, trong đó V là thể tích của khối chóp, S là diện tích của đáy và h là chiều cao của khối chóp.

Ví dụ 5. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Biết đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° (Hình 94).



Lời giải

Do $SA \perp (ABCD)$ và BA chứa trong $(ABCD)$ nên $SA \perp AB$.

Suy ra $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA}$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SBA}$.

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

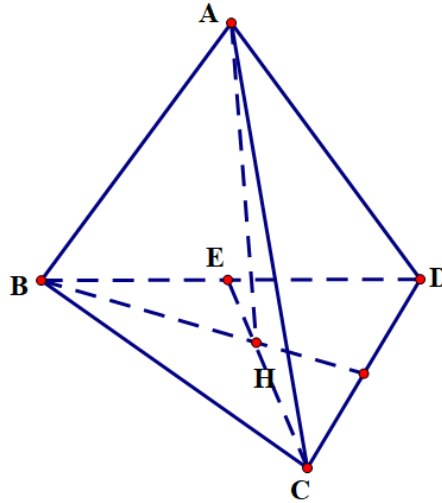
Từ đó, ta có $SA = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Mặt khác, do diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$ nên thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Luyện tập 5. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Chứng minh rằng thể tích của khối tứ diện đó bằng $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



Kẻ đường cao CE của tam giác $BCD = CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trọng tâm của tam giác $BCD \Rightarrow AH$ là đường cao của tứ diện $ABCD$

$$\Rightarrow CH = \frac{2}{3} CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

Thể tích tứ diện đều $ABCD$ là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

b. Thể tích của khối chóp cắt đều

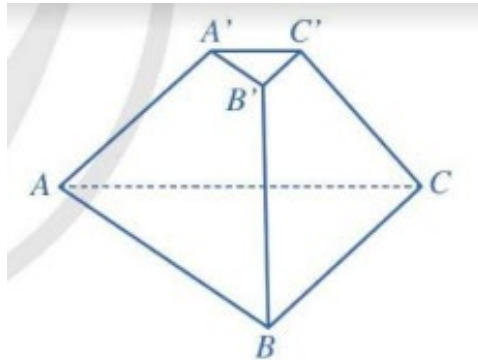
Ta gọi chiều cao của khối chóp cắt đều là chiều cao của hình chóp cắt đều tương ứng.

Người ta chứng minh được định lý sau:

Thể tích của khối chóp cắt đều được tính theo công thức:

$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$, trong đó h là chiều cao và S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai đáy của khối chóp cắt đều.

Ví dụ 6: Cho khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$ (Hình 95).



Hình 95

Tính thể tích của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$.

Giải

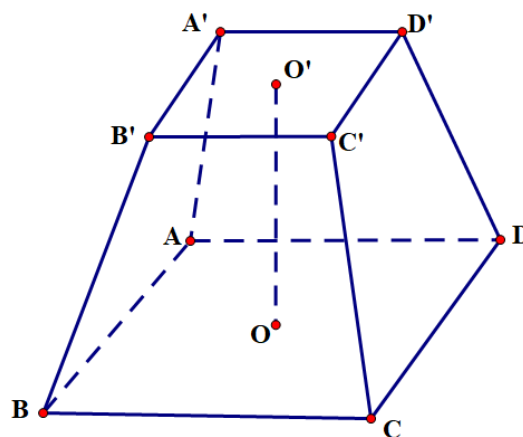
Diện tích tam giác đều ABC là $S_1 = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}.4a.4a.\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}a^2$.

Diện tích tam giác đều $A'B'C'$ là: $S_2 = \frac{1}{2}.A'B'.A'C'.\sin \widehat{B'A'C'} = \frac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Thể tích khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ là: $V = \frac{1}{3}.3a\left(4\sqrt{3}a^2 + \sqrt{4\sqrt{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4}} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right) = \frac{21\sqrt{3}a^3}{4}$.

Luyện tập 6: Một thùng đựng rác có dạng khối chóp cắt tứ giác đều với hai cạnh đáy lần lượt là 2 dm và 3 dm, chiều cao bằng 4 dm. Tính thể tích của thùng đựng rác.

Lời giải



Diện tích $ABCD$ là $S_1 = 3^2 = 9dm^2$.

Diện tích $A'B'C'D'$ là: $S_2 = 2^2 = 4dm^2$.

Thể tích khối chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V = \frac{1}{3}.4\left(9 + \sqrt{9.4} + 4\right) = \frac{76}{3}dm^3$.

Vậy thể tích của thùng đựng rác là: $\frac{76}{3} dm^3$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O , $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$, ($a > 0$) và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện theo a .

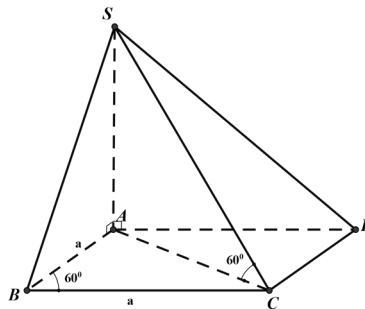
Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} a(a\sqrt{3}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } V = \frac{1}{3} S_{OBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \right) (a\sqrt{3}) = \frac{a^3}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh SA vuông góc với đáy và SC tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a bằng

Lời giải



$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

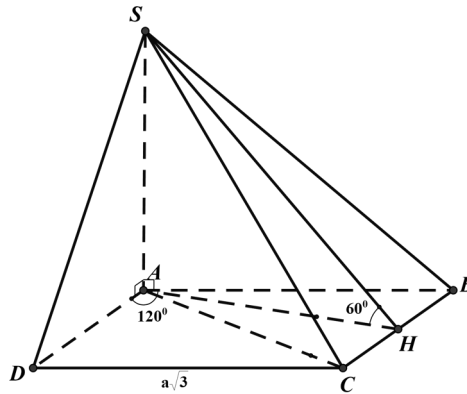
Ta có $\triangle ABC$ đều nên $AC = a$.

$$SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



Tam giác SAH vuông tại A:

$$SA = AH. \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

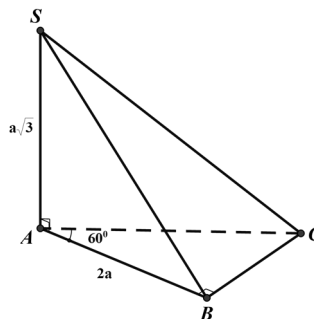
$$\text{Suy ra: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA. S_{ABCD} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp S.ABC theo a bằng

Lời giải

Xét tam giác ABC có:

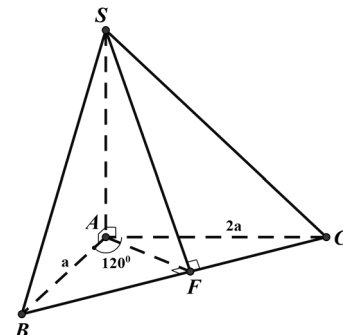
$$\begin{aligned} BC &= AB. \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3} \\ \Rightarrow S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB. AC = 2a^2 \sqrt{3} \\ \Rightarrow V_{SABC} &= \frac{1}{3} S_{ABC}. SA = 2a^3. \end{aligned}$$



Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với đáy và $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp S.ABC bằng

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB. AC. \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \\ BC &= a\sqrt{7}; AF = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7}; SA = \frac{3a\sqrt{7}}{7} \\ V_{SABC} &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}. SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{7} = \frac{a^3 \sqrt{21}}{14} \end{aligned}$$



Dạng 2 : Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Để xác định đường cao hình chóp ta vận dụng định lí sau

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta).$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B $BA = 3a, BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp S.ABC

Lời giải

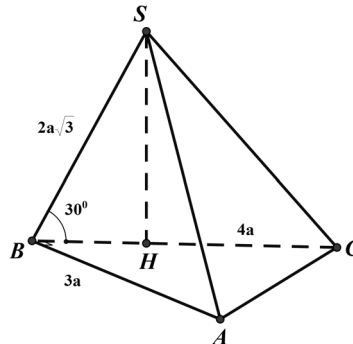
Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = 6a^2$$

Trong tam giác vuông SBH:

$$SH = SB \cdot \sin \widehat{SBC} = a\sqrt{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = 2a^3 \sqrt{3}.$$



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Thể tích khối chóp S.ABCD

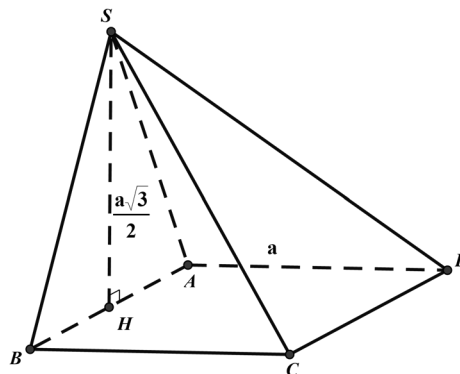
Lời giải

Ta có:

$$S_{ABCD} = a^2$$

Tam giác SAB đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có

$BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp S.ABC bằng

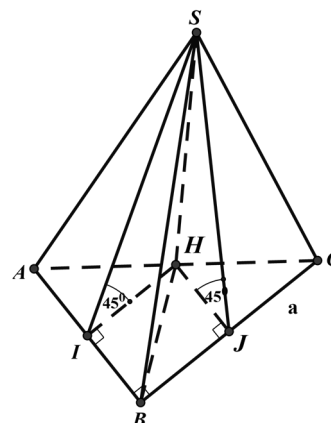
Lời giải

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC^2 = \frac{1}{2} a^2.$

Tam giác SHI vuông cân tại H nên

$$SH = HI = \frac{a}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{12}$



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh a , tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Lời giải

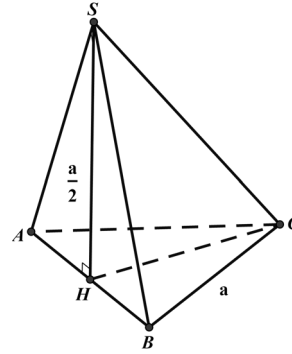
Ta có tam giác ABC đều cạnh

bằng a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAB vuông cân tại S và

có $AB = a$ nên $SH = \frac{a}{2}$

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$



Dạng 3: Khối chóp đều

1. Phương pháp

1. Một số lưu ý

- a) *Định nghĩa:* Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- b) *Kết quả:* Trong hình chóp đều:
- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
 - Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
 - Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Chú ý:

- ❖ Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.
- ❖ Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.
- ❖ Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Lời giải

Tam giác ABC đều cạnh a nên

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

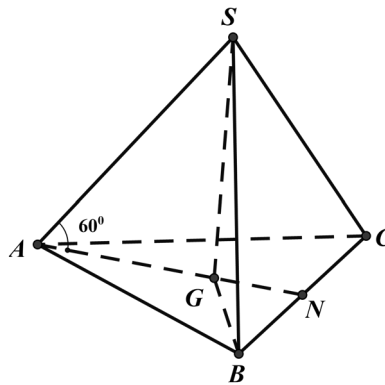
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$AG = \frac{2}{3} AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác SAG có

$$SG = AG \cdot \tan 60^\circ = a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có diện tích là 16cm^2 , diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}\text{cm}^2$. Tính chiều cao của hình chóp $S.ABCD$

Lời giải

Ta có $S_{ABCD} = 16\text{cm}^2 \Rightarrow CD = 4\text{cm}$

$$S_{SCD} = 8\sqrt{3}\text{cm}^2 = S_{SAB}$$

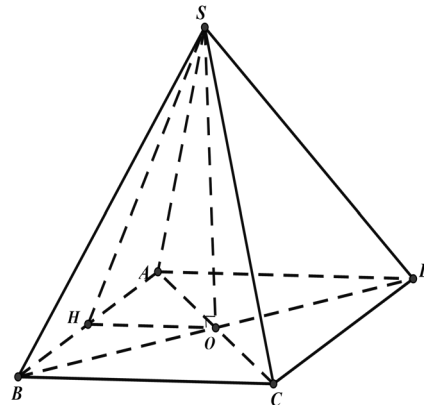
$$\Rightarrow \frac{1}{2} SH \cdot AB = 8\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow SH = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

Xét $\triangle SOH$ vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2}$$

$$= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2}\text{cm} = 2\sqrt{11}\text{cm}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy góc 60° .
Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Lời giải

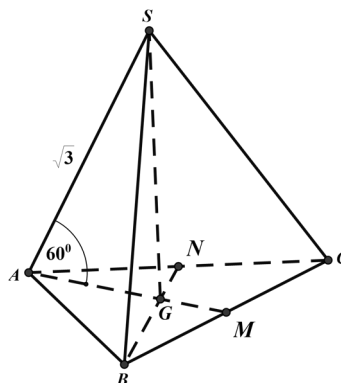
Xét $\triangle SGA$ vuông tại G có :

$$SG = SA \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2};$$

$$AG = SA \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{2} AG = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$



$$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}} AM = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{32}.$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích chóp đều S.ABC bằng

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều nên

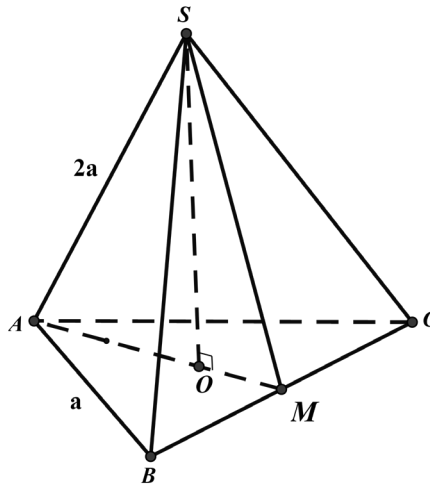
$$AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông SOA

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3 \sqrt{11}}{12}.$$



Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$$

$$\text{Ta có: } AC = 2a\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$

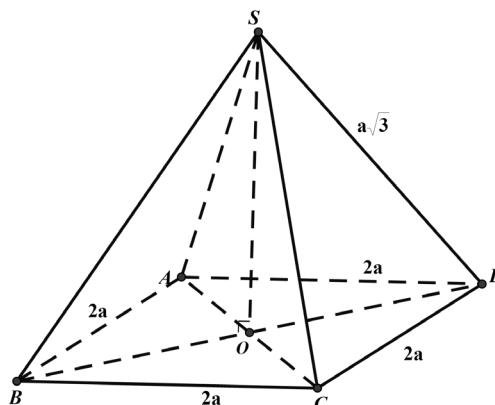
$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

Δ SAO vuông tại O có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$$

Thể tích khối chóp S.ABCD:

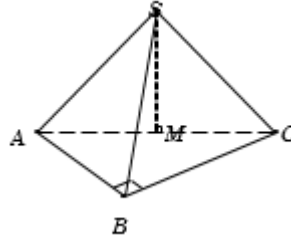
$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a = \frac{4a^3}{3} \end{aligned}$$



Dạng 4: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AC . Theo giả thiết, ta có $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$.

Tam giác vuông ABC , có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SMA , có

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

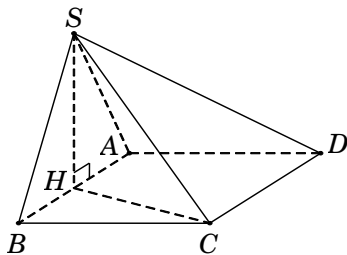
Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SM = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB , góc giữa SC và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC . Do đó $30^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH , có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

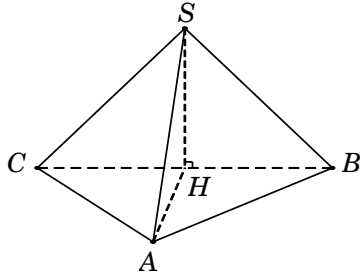
Tam giác vuông SHC , có $SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 1$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{15}}{18}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Vì $SH \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA . Do đó $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SHA , có $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

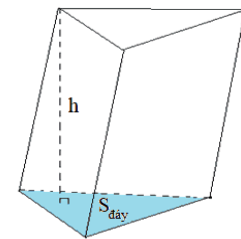
$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Dạng 5. Thể tích lăng trụ đứng, lăng trụ đều

Công thức tính thể tích lăng trụ

- Thể tích khối lăng trụ: $V = S_{\text{đáy}} \cdot h$
- $S_{\text{đáy}}$: Diện tích mặt đáy.
- h : Chiều cao của khối chóp.

Chú ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.



$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

Công thức tính thể tích khối Lập phương

- Thể tích khối lập phương: $V = a^3$

Chú ý: Thể tích khối lập phương bằng tích 3 kích thước của nó.

Công thức tính thể tích khối hộp chữ nhật

- Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a \cdot b \cdot c$

Chú ý: Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích 3 kích thước của nó.

Ví dụ 1: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

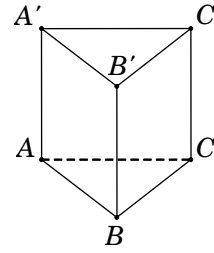
Lời giải

Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a .

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h = AA' = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Ví dụ 2: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

Lời giải

Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

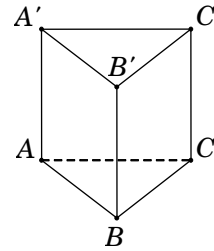
Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq} = 3.S_{ABB'A'}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.AB) \Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.a) \Rightarrow AA' = a.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$



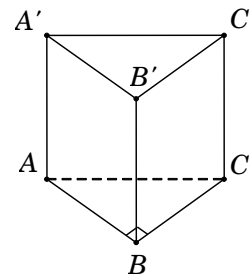
Ví dụ 3: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại B ,

$$\text{suy ra } BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } V = S_{\triangle ABC}.BB' = \frac{a^3}{2}.$$



Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.AA' = a^3\sqrt{15}.$$

Ví dụ 5: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

Lời giải

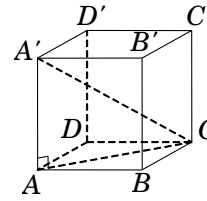
Đặt cạnh của khối lập phương là x ($x > 0$).

Suy ra $CC' = x$; $AC = x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC' , có

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a.$$

Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$.



Dạng 6. Thể tích lăng trụ xiên

Ví dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$,

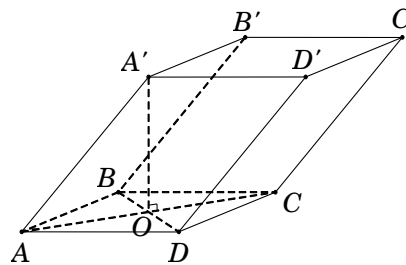
suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông $A'OA$, có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$$

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = 4a^3\sqrt{2}$.



Ví dụ 2: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

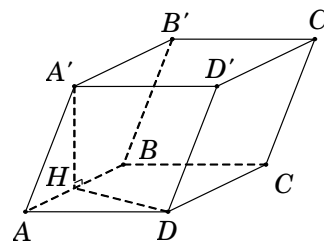
Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có

$$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

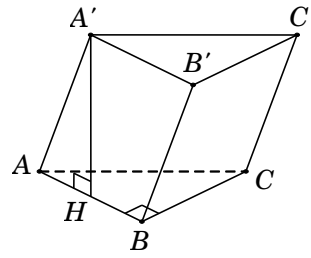
Tam giác vuông $A'HA$, có

$$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = a^2.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$



Ví dụ 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45° . Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH = \sqrt{3}$. Vì $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH . Do đó

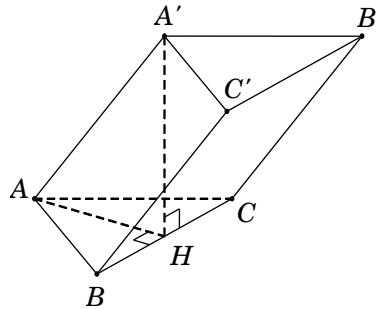
$$45^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{A'AH}.$$

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H = HA = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 3.$$



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát và cho biết chiếc đèn treo ở Hình 96a, trạm khảo sát trắc địa ở Hình 96b có dạng hình gì.



Hình 96

Lời giải

Hình 96a có dạng hình khối lăng trụ

Hình 96b có dạng hình khối chóp cụt đều

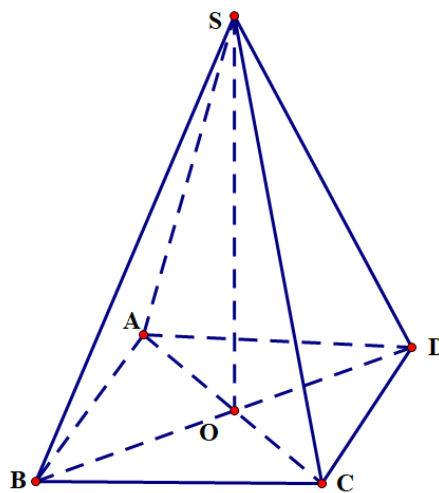
Bài 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a .

a) Chứng minh rằng các tam giác ASC và BSD là tam giác vuông cân.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD , chứng minh rằng đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Lời giải



a) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Xét $\triangle ASC$ có: $SA^2 + SC^2 = 2a^2 = AC^2, SA = SC$

Vậy tam giác ASC là tam giác vuông cân tại S .

Xét $\triangle BSD$ có: $SB^2 + SD^2 = 2a^2 = BD^2, SB = SD$

Vậy tam giác BSD là tam giác vuông cân tại S .

b) $\triangle ASC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO \perp AC$

$\triangle BSD$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

c) $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}$

ΔASC vuông cân tại $S \Rightarrow \widehat{SAO} = 45^\circ$

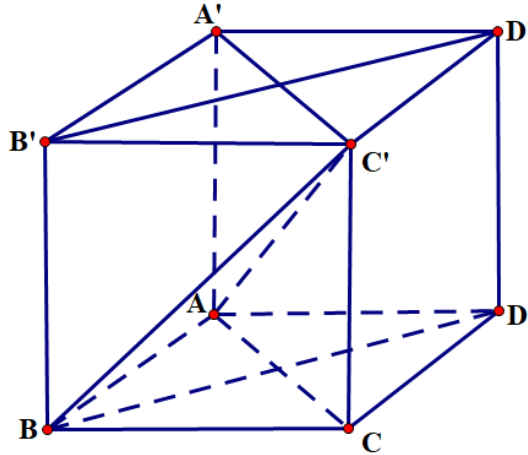
Vậy $(SA, (ABCD)) = 45^\circ$.

Bài 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

Lời giải



a) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AC$

$\Rightarrow AC \perp (BDD'B')$
 $AC \subset (ACC'A') \Rightarrow (ACC'A') \perp (BDD'B')$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \parallel CD$

$CDD'C'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CD \parallel C'D'$

$\Rightarrow AB \parallel C'D' \Rightarrow d(AB, C'D') = d(B, C'D')$

$A'B'C'D'$ là hình vuông $\Rightarrow C'D' \perp B'C'$

$CDD'C'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow C'D' \perp CC'$

$\Rightarrow C'D' \perp (BCC'B') \Rightarrow C'D' \perp BC' \Rightarrow d(B, C'D') = BC'$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

$CC' \perp (ABCD) \Rightarrow (AC', (ABCD)) = (AC', AC) = \widehat{CAC'} = 60^\circ$

$\Rightarrow CC' = AC \cdot \tan \widehat{CAC'} = a\sqrt{6}$

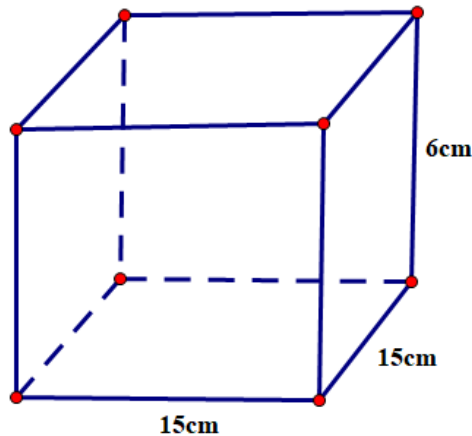
$\Delta BCC'$ vuông tại $C \Rightarrow BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{7}$

$$\Delta BCC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow BC'^2 = \sqrt{BC^2 + CC^2} = a\sqrt{7}$$

$$\text{Vậy } d(AB, C'D') = a\sqrt{7}.$$

Bài 4. Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là 15 cm, 15 cm và 6 cm. Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

Lời giải



Thể tích của chiếc bánh chưng đó là: $V = 15 \cdot 15 \cdot 6 = 1350 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Bài 5. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao 10 cm và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 12 cm. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là 3 g/cm^3 .

Lời giải

Diện tích đáy của miếng phomat là:

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{2} = 36\sqrt{6}$$

Thể tích của miếng phomat là: $36\sqrt{6} \cdot 10 \approx 882 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy khối lượng của miếng phomat là: $882 \cdot 3 = 2646 \text{ (g)}$

Bài 6. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a .



Hình 97

Lời giải

Mô hình hoá đèn đá muối bằng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của đáy.

$$\Delta SAC \text{ cân tại } S \Rightarrow SO \perp AC$$

$$\Delta SBD \text{ cân tại } S \Rightarrow SO \perp BD$$

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

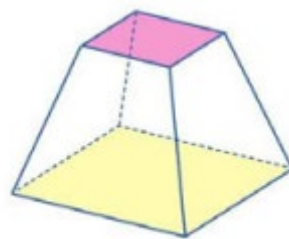
$$\Delta SAO \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = a^2$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Bài 7. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 98). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng / m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.

Lời giải



Hình 98

Theo đề bài, ta có $AB = 5, A'B' = 2, CC' = 3$

Có $ABCD$ là hình vuông

$$\Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Có $A'B'C'D'$ là hình vuông

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow C'O' = \frac{1}{2}A'C' = \sqrt{2}$$

Kẻ $CH \perp OC$

$\Rightarrow OHC'O'$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OH = O'C' = \sqrt{2}, OO' = C'H = CH = OC - OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Có tam giác } CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OO' = C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là } S = AB^2 = 5^2 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích đáy bé là } S' = A'B'^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$$

Thể tích hình chóp cắt là

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là: } \frac{39\sqrt{2}}{2} \cdot 1470000 \approx 40538432 \text{ (đồng)}$$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $V = a^3\sqrt{2}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 40$.

B. $V = 192$.

C. $V = 32$.

D. $V = 24$.

Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC , có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$

$$\longrightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \longrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 24.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = 32.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{6}$.

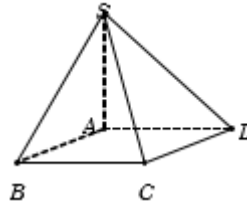
B. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

C. $V = 2a^3\sqrt{15}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA \perp (ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2a^3 \sqrt{15}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

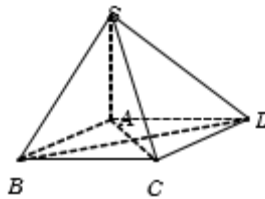
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

C. $V = a^3 \sqrt{3}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đường chéo hình vuông $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC , ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3$.

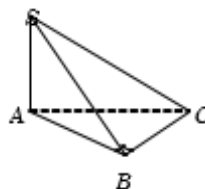
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{a^3}{3}$.

D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác vuông $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = 2a$.

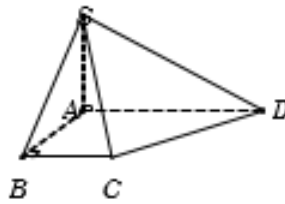
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A.** $V = 1$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{1}{3}$. **D.** $V = 2$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \left(\frac{AD + BC}{2} \right) \cdot AB = \frac{3}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = 2$.

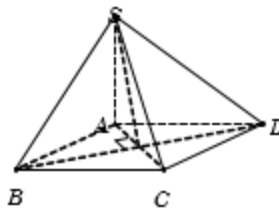
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = 1$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A.** $V = a^3$. **B.** $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD \longrightarrow SB = SD$.

Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD} = 60^\circ$.

Do đó $\triangle SBD$ đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

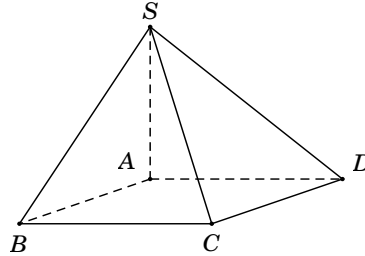
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AC = 5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 6\sqrt{2}a^3$. B. $V = 4\sqrt{2}a^3$. C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}a$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB .

Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2\sqrt{6}a^2$.

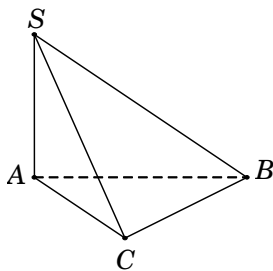
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABC)$ nên ta có

$60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} . SA = \frac{a^3}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$.

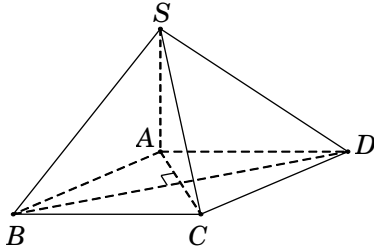
B. $V = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V = \frac{a^3}{2}$.

D. $V = a^3$.

Lời giải

Chọn C



Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

Tam giác vuông SAD , có $SA = AD . \tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\triangle BAD} = AB . AD . \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SA = \frac{a^3}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi I là trung điểm của BC , SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$.

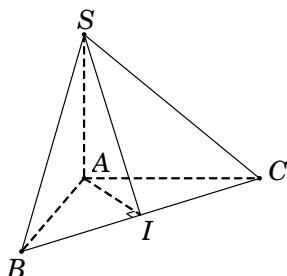
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3}{2}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI . Do đó $60^\circ = \widehat{SI, (ABC)} = \widehat{SI, AI} = \widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A , suy ra trung tuyến $AI = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI , có $SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$.

B. $V = a^3$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

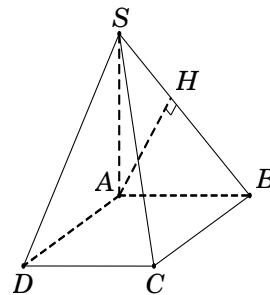
Gọi H là hình chiếu của A trên $SB \Rightarrow AH \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A, (SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A , có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.



Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$.

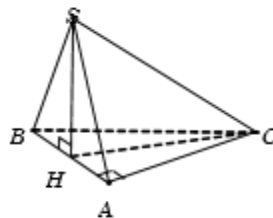
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$.

C. $V = \frac{2a^3 \sqrt{6}}{12}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $SH \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB = a$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC , có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{12}$.

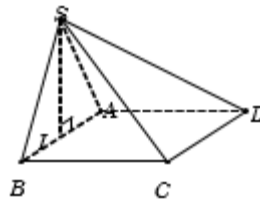
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}$.

C. $V = 2a^3$.

D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB . Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SIA , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$, $AB = SA = a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$.

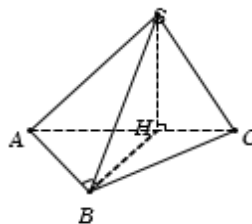
B. $V = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V = a^3$.

D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $SH \perp AC$. Do $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$.

Trong tam giác vuông SAC , ta có

$$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = a\sqrt{3}, \quad SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{4}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH = 2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$.

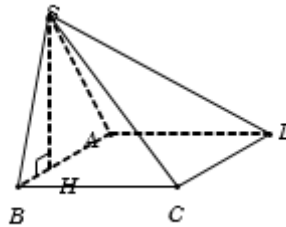
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông SAB , ta có $SA^2 = AH \cdot AB = \frac{2}{3} AB \cdot AB = \frac{2}{3} a^2$;

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

B. $V = \sqrt{6}$.

C. $V = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $SH \perp BC$. Vì $(SBC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$. Do đó $60^\circ = \widehat{SD, (SBC)} = \widehat{SD, SC} = \widehat{DSC}$.

Từ $DC \perp (SBC) \longrightarrow DC \perp SC$.

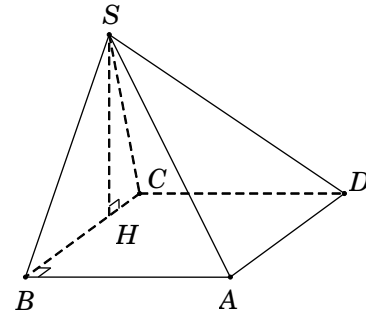
Tam giác vuông SCD , có $SC = \frac{DC}{\tan \widehat{DSC}} = 1$.

Tam giác vuông SBC , có

$$SH = \frac{SB \cdot SC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - SC^2} \cdot SC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{13} a^3}{12}$.

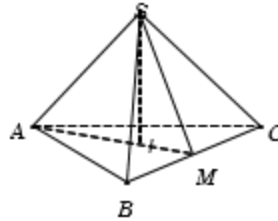
B. $V = \frac{\sqrt{11} a^3}{12}$.

C. $V = \frac{\sqrt{11} a^3}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{11} a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Tam giác } SAI \text{ vuông tại } I, \text{ có } SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SI = \frac{\sqrt{11} a^3}{12}.$$

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$.

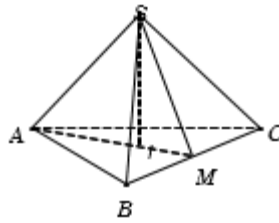
B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I , có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 20: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

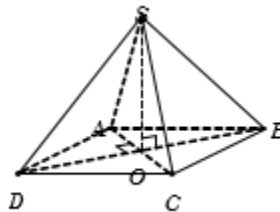
B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB , có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 21: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $V = \frac{a^3}{8}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O = AE \cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.

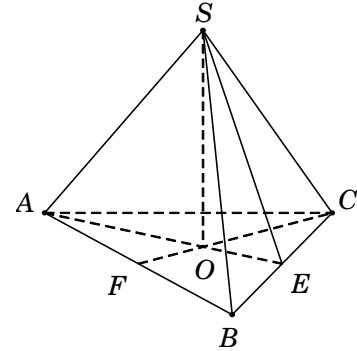
Khi đó $60^\circ = (\widehat{SBC}), (\widehat{ABC}) = \widehat{SE}, \widehat{OE} = \widehat{SEO}$.

Tam giác vuông SOE , có

$$SO = OE \cdot \tan \widehat{SEO} = \frac{AE}{3} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S , $SB = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 2a^3$.

B. $V = 4a^3$.

C. $V = 6a^3$.

D. $V = 12a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta chọn (SBC) làm mặt đáy $\longrightarrow$ chiều cao khối chóp là $d[A, (SBC)] = 3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SB^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} S_{\Delta SBC} \cdot d[A, (SBC)] = 2a^3$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h \longrightarrow h = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$.

B. $V = 14a^3$.

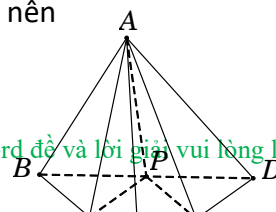
C. $V = \frac{28}{3}a^3$.

D. $V = 7a^3$.

Lời giải

Chọn D

Do AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên



$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot 6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3.$$

$$\text{Để thấy } S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{\triangle BCD}.$$

$$\text{Suy ra } V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3.$$

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V = 3$.

B. $V = 4$.

C. $V = 6$.

D. $V = 5$.

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\triangle GBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle DBC}$.

$$\text{Suy ra } V_{A.GBC} = \frac{1}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

Câu 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 4a^3\sqrt{5}$.

B. $V = a^3\sqrt{15}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

D. $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = a^3\sqrt{15}.$$

Câu 27: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = a^3$.

B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$.

C. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A

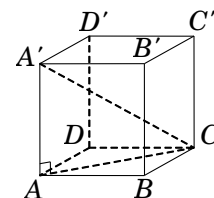
Đặt cạnh của khối lập phương là x ($x > 0$).

$$\text{Suy ra } CC' = x; AC = x\sqrt{2}.$$

Tam giác vuông ACC' , có

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lập phương } V = a^3.$$



Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a , biết $A'B = 3a$.

A. $V = \frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$.

B. $V = 4\sqrt{5}a^3$.

C. $V = 2\sqrt{5}a^3$.

D. $V = 12a^3$.

Lời giải

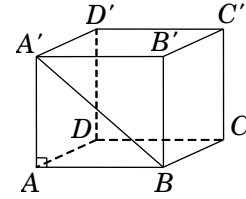
Chọn B

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp AB$.

Xét tam giác vuông $A'AB$, ta có $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'A = 4\sqrt{5}a^3$.



Câu 29: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

- A.** $V = a^3\sqrt{10}$. **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Trong tam giác vuông ABB' , có $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{2}$.

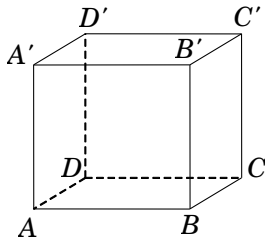
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 30: Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2 , 20cm^2 , 32cm^2 . Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

- A.** $V = 80\text{cm}^3$. **B.** $V = 160\text{cm}^3$. **C.** $V = 40\text{cm}^3$. **D.** $V = 64\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\text{Theo bài ra, ta có } \begin{cases} S_{ABCD} = 10\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'} = 20\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'} = 30\text{cm}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \cdot AD = 10 \\ AB \cdot AA' = 20 \\ AA' \cdot AD = 32 \end{cases}$$

Nhân vế theo vế, ta được $(AA' \cdot AB \cdot AD)^2 = 6400 \Rightarrow AA' \cdot AB \cdot AD = 80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = 80\text{cm}^3$.

Câu 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác đều $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 32: Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

- A.** $V = 6a^3$. **B.** $V = \frac{5a^3}{2}$. **C.** $V = 4a^3$. **D.** $V = 3a^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{A.BCB'C'} = \frac{3}{2} \cdot 2a^3 = 3a^3$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45° . Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $V = 3$. **B.** $V = 1$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH = \sqrt{3}$.

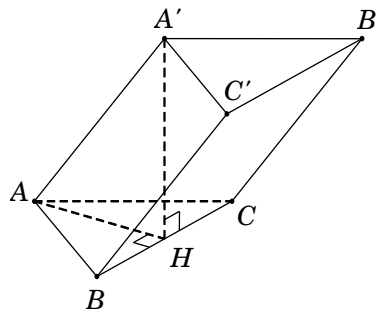
Vì $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của

AA' trên mặt đáy (ABC) là AH . Do đó

$45^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{A'AH}$. Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H = HA = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$.

Vậy $V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = 3$.



Câu 34: Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S = 10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

- A.** $V = 100\text{cm}^3$. **B.** $V = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. **C.** $V = 50\text{cm}^3$. **D.** $V = 100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC .

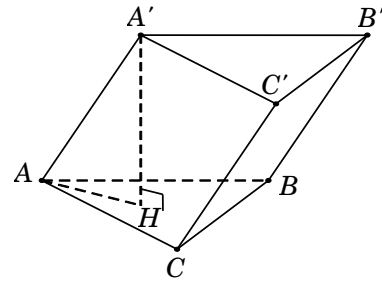
Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) . Do đó

$$60^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{A'AH}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H , có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 50\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$



Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a . Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

A. $V = 8a^3$.

B. $V = 2\sqrt{2}a^3$.

C. $V = 3\sqrt{3}a^3$.

D. $V = 27a^3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt cạnh hình lập phương là x .

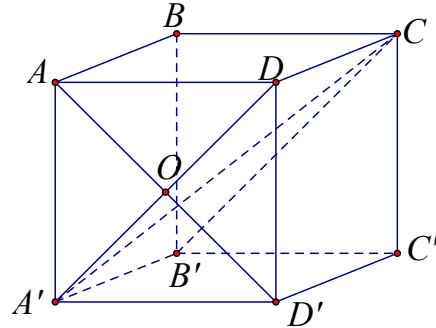
Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

Ta có: $A'C \subset (DCB'A') // C'D'$ nên

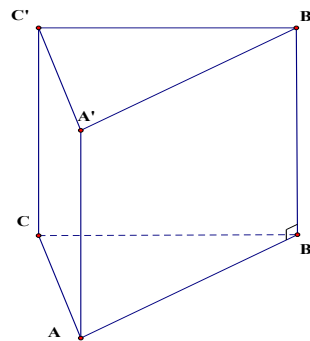
$$\begin{aligned} d(C'D'; A'C) &= d(C'D'; (DCB'A')) \\ &= d(D'; (DCB'A')) = D'O = \frac{x\sqrt{2}}{2} = a. \end{aligned}$$

Do đó, $x = a\sqrt{2}$. Thể tích khối lập phương là:

$$V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3.$$



Câu 36: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Thể tích khối lăng trụ bằng



A. $\frac{9\sqrt{15}a^3}{20}$.

B. $\frac{3\sqrt{15}a^3}{20}$.

C. $\frac{3\sqrt{15}a^3}{10}$.

D. $\frac{9\sqrt{15}a^3}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $2x$ là cạnh của tam giác đều, Gọi O, K lần lượt là trung điểm của AB, BC

Kẻ $CK \perp C'O$

Ta có $CH \perp C'O$ và $CH \perp AB$ nên $CH \perp (ABC')$ và

$$d(C, (ABC')) = CH = a$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CO^2} \text{ hay } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{3x^2} \quad (1)$$

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác ABC' lên mặt phẳng $(BCC'B')$ là tam giác KBC'

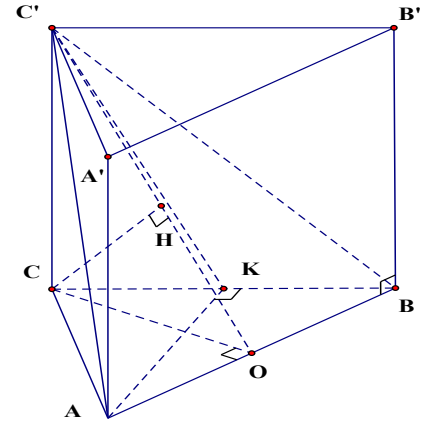
$$\text{Do đó } \frac{S_{\triangle KBC'}}{S_{\triangle ABC'}} = \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle KBC'} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot CC' \text{ và } S_{\triangle ABC'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot C'O = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{CC'^2 + CO^2} = x \sqrt{CC'^2 + 3x^2}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{2} \cdot x \cdot CC' = \frac{1}{3} x \sqrt{CC'^2 + 3x^2} \Leftrightarrow 3CC' = 2\sqrt{CC'^2 + 3x^2} \Leftrightarrow 5CC'^2 = 12x^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{4}{5CC'^2} \Leftrightarrow 5CC'^2 = 9a^2 \Leftrightarrow CC' = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy thể tích khối lăng trụ là } V = S_{ABC} \cdot CC' = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{15}a^3}{20}.$$



Câu 37: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi K, J lần lượt là trung điểm của AB, BC .

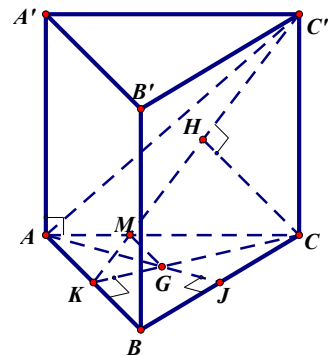
Gọi x là độ dài cạnh AB .

$$AJ = CK = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $CH \perp (ABC') \Rightarrow d(C, (ABC')) = CH = a$.

Mặt khác $AJ \perp (BCC'B')$.

Nên $\left((ABC'), (BCC'B') \right) = \left(\widehat{CH, AJ} \right) = \alpha = \left(\widehat{CH, AG} \right) (\cos \alpha = \sin \varphi).$



$$\text{Ta có } \sin \varphi = \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MG = \frac{AG}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \frac{AJ}{\sqrt{3.2}} = \frac{x\sqrt{3}}{2.3\sqrt{3}} = \frac{x}{6}.$$

$$\frac{HC}{3} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{a}{3} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = 2a \text{ mà } d(C, (ABC')) = CH = a.$$

$$\Rightarrow CC' = \frac{CH.CK}{\sqrt{CK^2 - CH^2}} = \frac{a \frac{2a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ vậy } V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.CC' = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 38: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 6$.

B. $V = 8$.

C. $V = 12$.

D. $V = 10$.

Lời giải

Chọn B

Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp (AA'C'C)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA'$

$$\Rightarrow ((AA'C'C), (AA'B'B)) = \widehat{BHI}.$$

Theo giả thiết ta có $AC = 3$

$$\Rightarrow BI = \frac{AB.BC}{AC} = \sqrt{2}.$$

Xét tam giác vuông BIH có $\tan \widehat{BHI} = \frac{BI}{IH}$

$$\Leftrightarrow IH = \frac{BI}{\tan \widehat{BHI}} \Leftrightarrow IH = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Xét tam giác vuông ABC có $AI.AC = AB^2 \Rightarrow AI = \frac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm của AA' , do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM \parallel IH$.

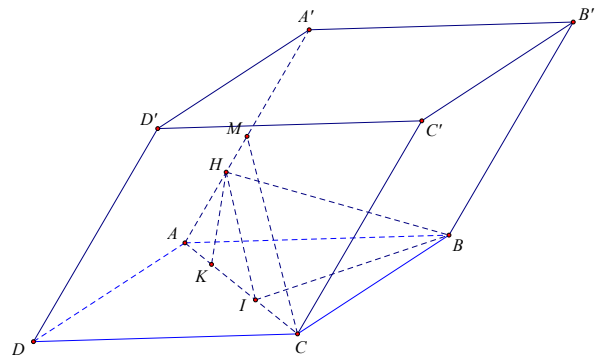
$$\text{Do } \frac{AI}{AC} = \frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{3}.$$

Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ

$$ABCD.A'B'C'D' \text{ là } h = 3HK = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.h = \sqrt{6}\sqrt{3} \frac{4\sqrt{2}}{3} = 8$.

Câu 39: Khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?



A. $V = 24\sqrt{3}$. **B.** $V = 8\sqrt{3}$. **C.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều nên lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

Gọi H là trung điểm của BC , K là hình chiếu của H lên $A'H$.

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$$

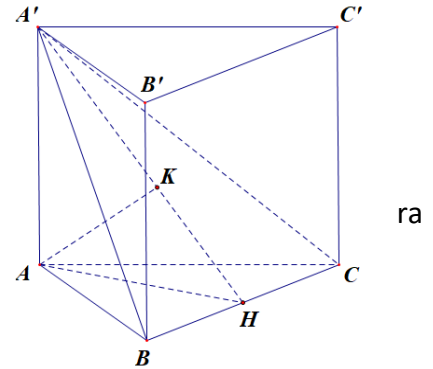
Mà

$$AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AK = 3.$$

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy

$$\widehat{A'HA} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có } AH = \frac{AK}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH \cdot \tan 60^\circ = 6 \\ AB = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \end{cases}$$



Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot AA' = 4\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}$.

Câu 40: Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A . Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

A. $V = 24\sqrt{3}$. **B.** $V = 8\sqrt{3}$. **C.** $V = 72$. **D.** $V = 24$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H hình chiếu của A lên BC , K là hình chiếu của H lên $A'H$.

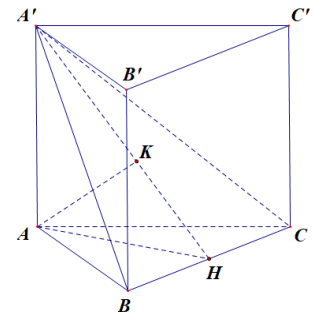
$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$$

$$\text{Mà } AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AK = 3.$$

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra

$$\widehat{A'HA} = 60^\circ. \text{ Ta có } AH = \frac{AK}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH \cdot \tan 60^\circ = 6 \\ BC = 2AH = 4\sqrt{3}; AB = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6})^2 \cdot 6 = 72$.



Câu 41: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường

thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G \perp BC$; $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (MAA')$

Kẻ $MI \perp AA'$;

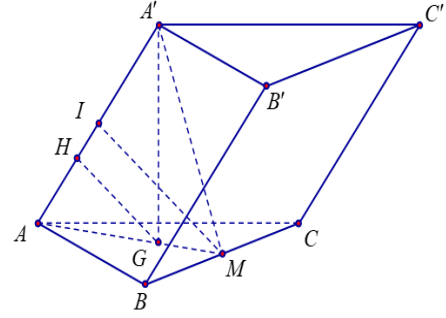
$BC \perp IM$ nên $d(AA'; BC) = IM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $GH \perp AA'$,

Ta có $\frac{AG}{AM} = \frac{GH}{IM} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow GH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow A'G = \frac{AG \cdot HG}{\sqrt{AG^2 - HG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}}} = \frac{a}{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



Câu 42: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và mặt phẳng (ACD') bằng 60° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của D lên AD' .

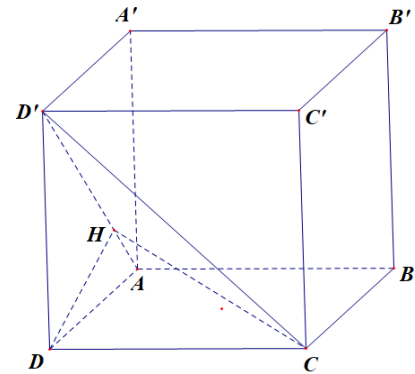
Ta có

$$AD' \perp (DHC) \Rightarrow \widehat{((ADD'A'), (ACD'))} = \widehat{DHC} = 60^\circ.$$

$$\text{Có } DH = CD \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DD'^2} + \frac{1}{DA^2} \Rightarrow DD' = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối hộp là } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}.$$



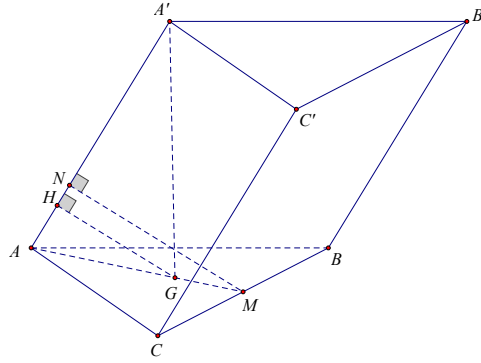
Câu 43: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường

thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, M là trung điểm của $BC \Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Trong $(AA'M)$ dựng $MN \perp AA'$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MN$.

$$\Rightarrow d(AA', BC) = MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi H là hình chiếu của G lên AA' .

$$\text{Ta có: } GH \parallel MN \Rightarrow \frac{GH}{MN} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH = \frac{2}{3}MN = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G , ta có:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GA'^2} \Rightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{GA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{27}{3a^2} \Rightarrow GA' = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối lăng trụ là: } V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBD) là 45° .

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V . Tỉ số $\frac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 0,25.

B. 0,5.

C. 0,75.

D. 1,5.

Lời giải

Chọn C

Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của A trên SB
 $\Rightarrow AH \perp SB$.

Dễ thấy $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Do đó: $SB \perp (AHD) \Rightarrow SB \perp HD$.

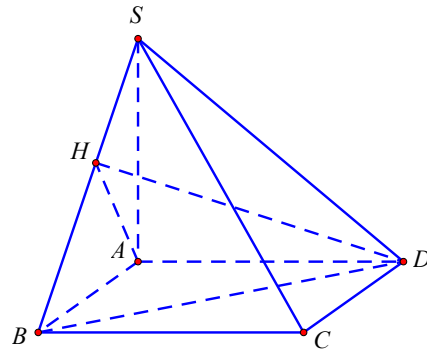
Khi đó ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \cap (SBD) = SB \\ AH \perp SB; HD \perp SB \\ AH \subset (SAB); HD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow ((SAB); (SBD)) = \widehat{AHD} = 45^\circ.$$

Hay $\triangle AHD$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AD = a$.

$$\triangle SAB \text{ vuông tại } A: \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow SA = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Suy ra } V = V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot 2a^2 = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}}. \text{ Vậy } \frac{V}{a^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0,77.$$



Câu 45: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB = 2a, SA$ vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{8a^3}{3}$.

B. $V = \frac{9a^3}{8}$.

C. $V = 8a^3$.

D. $V = \frac{27a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại $A, AB = 2a$, nên

$$BC = 2\sqrt{2}a$$

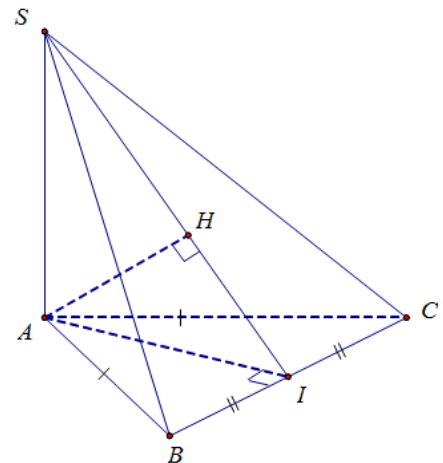
Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI).$$

Gọi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\Rightarrow AH = \frac{4a}{3}. \text{ Ta có}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{AI^2 \cdot AH^2}{AI^2 - AH^2}} = 4a.$$



$$\text{Mặt khác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a = 2a^2. \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot 4a = \frac{8a^3}{3}.$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. a^3 .

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $3a^3$.

D. $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SD = h$, ta có

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3}a$$

$$\text{Suy ra } SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{h^2 + 3a^2}$$

$$\text{Ta có } d(B; (SAC)) = d(D; (SAC))$$

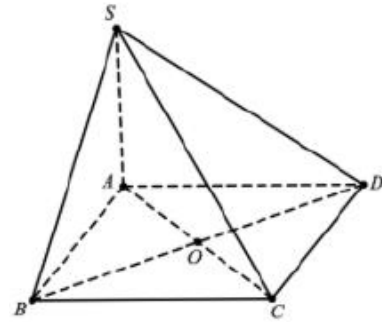
và

$$\frac{1}{d^2(D; (SAC))} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{d^2(D; AC)} = \frac{1}{h^2} + \frac{AC^2}{4S_{DAC}^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(D; (SAC)) = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 7h^2}} \quad (\text{Do } AC^2 = 7a^2; S_{DAC} = \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{Do đó } \sin(SB; (SAC)) = \frac{d(B; (SAC))}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2 + 7h^2}}}{\sqrt{h^2 + 3a^2}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow h = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = a^3$$



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

Câu 1: Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a .

a. Góc giữa hai đường thẳng MN và $M'P'$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

b. Gọi α là số đo góc giữa đường thẳng $M'P$ và mặt phẳng $(MNPQ)$. Giá trị $\tan \alpha$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

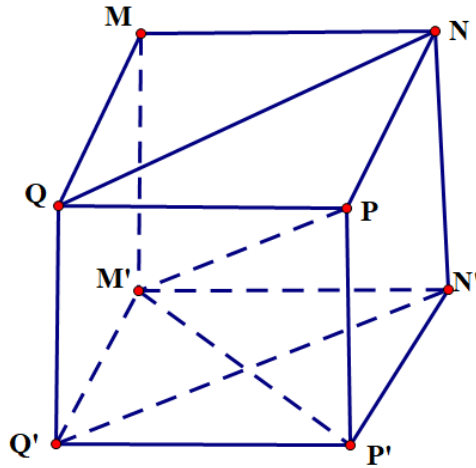
c. Số đo của góc nhị diện $[N, MM', P]$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

d. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(NQ'Q'N')$ bằng:

- A. a . B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải



a) Có $M'P' \parallel MP$

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng $M'P'$ và MN bằng góc giữa đường thẳng MP và MN là $\widehat{NMP} = 45^\circ$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

b) Có $MM' \perp (MNPQ)$

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng $M'P$ và $(MNPQ)$ là $\widehat{MPM'}$

$$MP = \sqrt{MN^2 + NP^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{MPM'} = \frac{MM'}{MP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Chọn D

c) $MM' \perp (MNPQ) \Rightarrow MM' \perp MN, MM' \perp MP$

$$\Rightarrow \widehat{NMP} = 45^\circ$$

Chọn B

d) Gọi $O = MP \cap NQ$

$MNPQ$ là hình vuông $\Rightarrow MO \perp NQ$

$NN' \perp (MNPQ) \Rightarrow NN' \perp MO$

$$\Rightarrow d(M, (NQQ'N')) = MO = \frac{1}{2}MP = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Chọn B

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ có $MN = 2a$, $MQ = 3a$, $MM' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và $M'N'$ bằng:

A. $2a$.

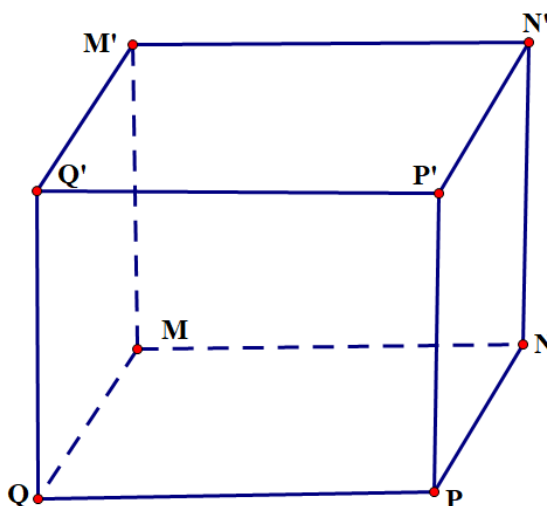
B. $3a$.

C. $4a$.

D. $5a$.

Lời giải

Chọn C



$NN' \perp (MNPQ) \Rightarrow NN' \perp NP$

$NN' \perp (M'N'P'Q') \Rightarrow NN' \perp M'N'$

$\Rightarrow d(NP, M'N') = NN' = MM' = 4a$

Câu 3: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $3a$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng:

A. a^3 .

B. $3a^3$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $9a^3$.

Lời giải

Chọn B

Có $V = a^2 \cdot 3a = 3a^3$

Thể tích của khối lăng trụ đó bằng $3a^3$

Câu 4: Cho khối chóp diện tích đáy là a^2 và chiều cao là $3a$. Thể tích của khối chóp bằng:

- A. a^3 . B. $3a^3$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $9a^3$.

Lời giải

Chọn A

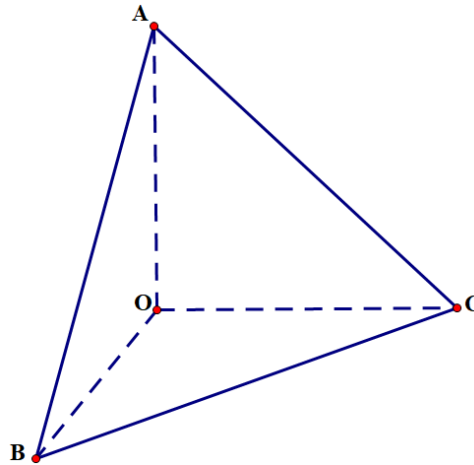
Thể tích của khối chóp bằng: $\frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a^2 = a^3$

Câu 5: Cho tứ diện $OABC$ thỏa mãn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. abc . B. $\frac{abc}{2}$. C. $\frac{abc}{3}$. D. $\frac{abc}{6}$.

Lời giải

Chọn D



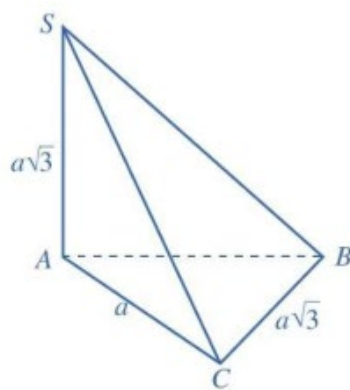
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp OB \\ \widehat{COA} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} bc, h = OA = a$$

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta OBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \cdot a = \frac{abc}{6}$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC \perp BC$, $SA = BC = a\sqrt{3}$, $AC = a$ (Hình 99).

- Tính góc giữa hai đường thẳng SA và BC .
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) .
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.
- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .
- Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.



Hình 99

Lời giải

$$\text{a) } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow (SA, BC) = 90^\circ.$$

$$\text{b) } SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } (SC, (ABC)) = 60^\circ.$$

$$\text{c) } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AC$$

$$\text{Vậy } \widehat{BAC} \text{ là góc nhị diện } [B, SA, C].$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } C \Rightarrow \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

d)

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$AC \perp BC$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BC = a\sqrt{3}$$

$$\text{e) } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC, AC \perp BC$$

$$\Rightarrow d(SA, BC) = AC = a$$

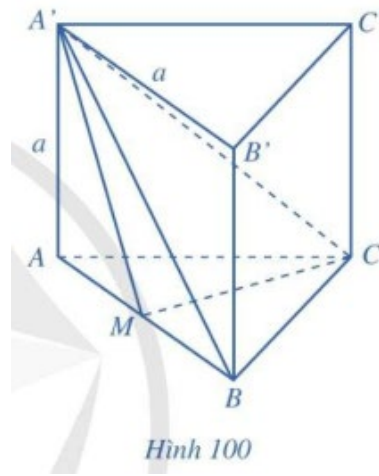
$$\text{g) } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$h = SA = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$$

- Câu 7:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB (Hình 100).
- Tính góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.
 - Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) . Hình 99
 - Tính số đo của góc nhị diện $[B, CC', M]$.
 - Chứng minh rằng $CC' \parallel (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.
 - Chứng minh rằng $CM \perp (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và $A'M$.
 - Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối chóp $A'.MBC$.

Lời giải



Hình 100

a) $BCC'B'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \parallel B'C'$

$$\Rightarrow (AB, B'C') = (AB, BC) = \widehat{ABC} = 60^\circ.$$

b)

$$\Delta AA'B \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{ABA'} = \frac{AA'}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{ABA'} = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } (A'B, (ABC)) = 45^\circ.$$

c) $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp BC, CC' \perp CM$

Vậy $\widehat{BCM}$ là góc nhị diện $[B, CC', M]$.

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow \widehat{BCM} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

d) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CM \perp AB.$$

$$\Rightarrow CM \perp (ABB'A')$$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} CC' \parallel AA' \\ AA' \subset (ABB'A') \end{array} \right\} \Rightarrow CC' \parallel (ABB'A')$$

$$\Rightarrow d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{e) } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CM \perp AB.$$

$$\Rightarrow CM \perp (ABB'A') \Rightarrow CM \perp A'M$$

$$CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp CM$$

$$\Rightarrow d(CC', A'M) = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{g) } S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = AA' = a$$

$$\Rightarrow V_{ABC \cdot A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, h = AA' = a$$

$$\Rightarrow V_{A' \cdot MBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta MBC} \cdot AA' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Câu 8: Hình 101 là hình chụp đền Kukulcan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XIII. Phần thân của đền, không bao gồm ngói đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là 55,3 m, chiều cao là 24 m, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng 47° .

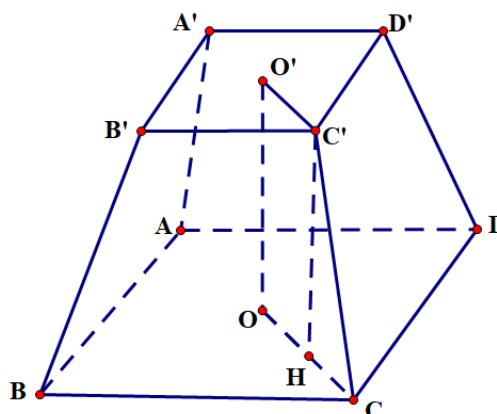


(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 101

Tính thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải



Mô hình hoá phần thân của đền bằng cụt chóp tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy. Vậy $AB = 55,3; OO' = 24; (\angle C'C', (ABCD)) = 47^\circ$.

$ABCD$ là hình vuông

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 55,3\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2} AC = 27,65\sqrt{2}$$

$$\text{Kẻ } C'H \perp OC (H \in OC) \Rightarrow C'H \parallel OO' \Rightarrow C'H \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow (\angle C'C', (ABCD)) = (\angle C'C', CH) = \widehat{HCC'} = 47^\circ$$

$$OHC'O' \text{ là hình chữ nhật } \Rightarrow OO' = C'H = 24, CH = O'C'$$

$$\triangle CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow CH = \frac{C'H}{\tan \widehat{HCC'}} = \frac{24}{\tan 47^\circ} \approx 22,38$$

$$O'C' = OH = CO - CH \approx 16,72 \Rightarrow A'C' = 2O'C' = 33,44$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông } \Rightarrow A'B' = \frac{A'C'}{\sqrt{2}} \approx 23,65$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 55,3^2 = 3058,09 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích đáy bé là: $S' = A'B'^2 = 23,65^2 = 545,2225 \text{ (m}^2\text{)}$

Thể tích hình chóp cụt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 24(3058,09 + \sqrt{3058,09 \cdot 545,2225} + 545,2225) \approx 39156,53 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vậy thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó là $39156,53 \text{ (m}^3\text{)}$

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ .

Câu 2: Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $a \perp (P)$ và $b // (P)$ thì $a \perp b$.
B. Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c .
C. Nếu $a // b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
D. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // c$.

Lời giải

Chọn D

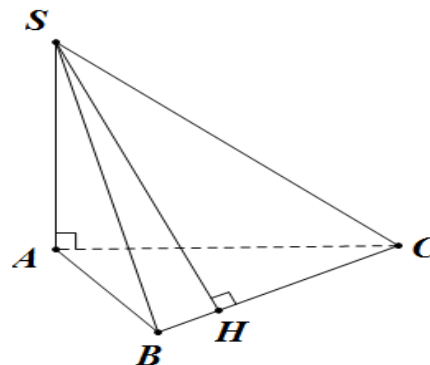
Sai vì a và c có thể không đồng phẳng.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định đúng.

- A. $BC \perp SC$. B. $BC \perp AH$. C. $BC \perp AB$. D. $BC \perp AC$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'A$.

A. 90° .

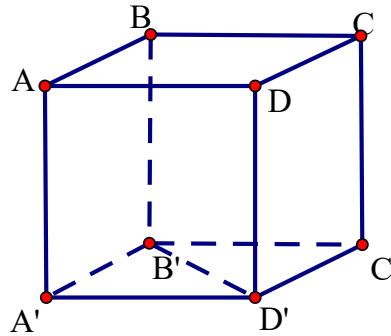
B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên cạnh $AA' \perp (A'B'C'D')$ và $B'D' \in (A'B'C'D')$

Nên $AA' \perp B'D' \Rightarrow \angle(AA', B'D') = 90^\circ$.

Câu 5: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
- C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

Đáp án C sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 6: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM \perp SC$.

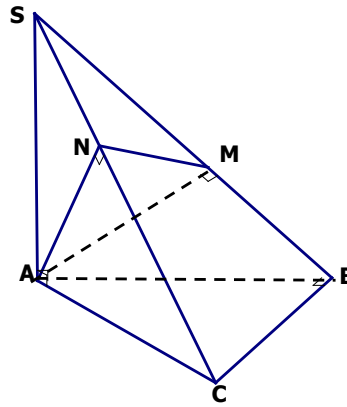
B. $AM \perp MN$.

C. $AN \perp SB$.

D. $SA \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Vậy $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$

Vì $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ MN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MN \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow \text{Đáp án D đúng.}$

Vậy C sai.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90° .

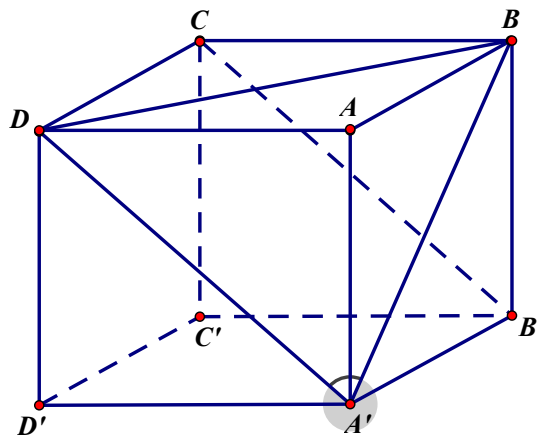
B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow \widehat{(A'B; B'C)} = \widehat{(A'B; A'D)} = \widehat{DA'B}$.

Xét $\triangle DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\triangle DA'B$ là tam giác đều.

Vậy $\widehat{DA'B} = 60^\circ$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. 45° .

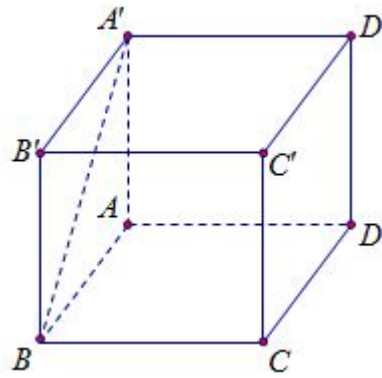
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Có $CD \parallel AB \Rightarrow (BA', CD) = (BA', BA) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

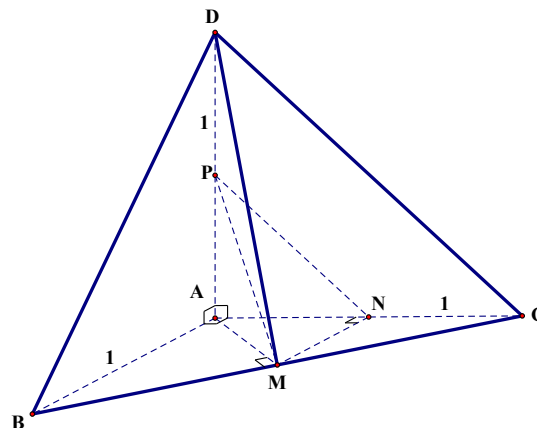
D. 90° .

Lời giải

Chọn D

CÁCH 1. Vì $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.

CÁCH 2.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD .

Trong $\triangle ABC$, có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \end{cases}$

Trong $\triangle ACD$, có $\begin{cases} NP \parallel CD \\ NP = \frac{1}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Trong $\triangle AMP$, có $MP = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

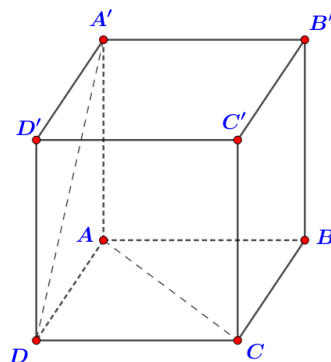
Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB; CD) = (MN; NP) = \widehat{MNP}$

Áp dụng định lý Cosin cho $\triangle MNP$, có

$$\cos \widehat{MNP} = \frac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2NP.NM} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$$

Hay $(AB; CD) = 90^\circ$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. 45° .

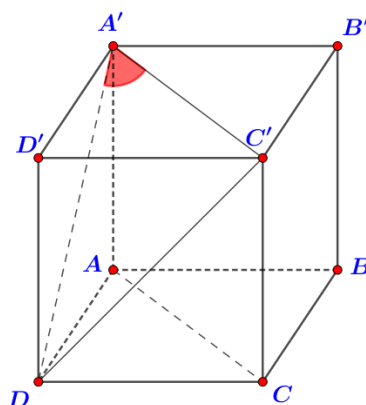
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $(\widehat{AC, A'D}) = (\widehat{A'C', A'D}) = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$.

Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

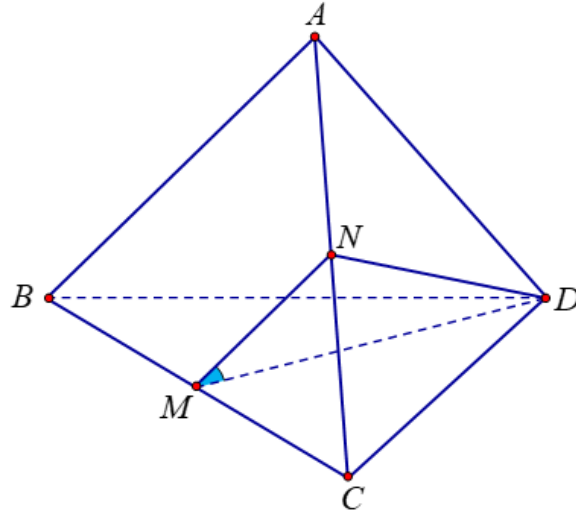
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC và a là độ dài cạnh tứ diện đều.

Ta có $MN \parallel AB \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM) = \widehat{DMN}$.

Tam giác DMN có $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $\cos \widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2 \cdot DM \cdot MN}$.

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{DMN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H, K lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $BH = 3HA, AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC .

A. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$.

B. $\frac{18}{5\sqrt{39}}$.

C. $\frac{36}{5\sqrt{39}}$.

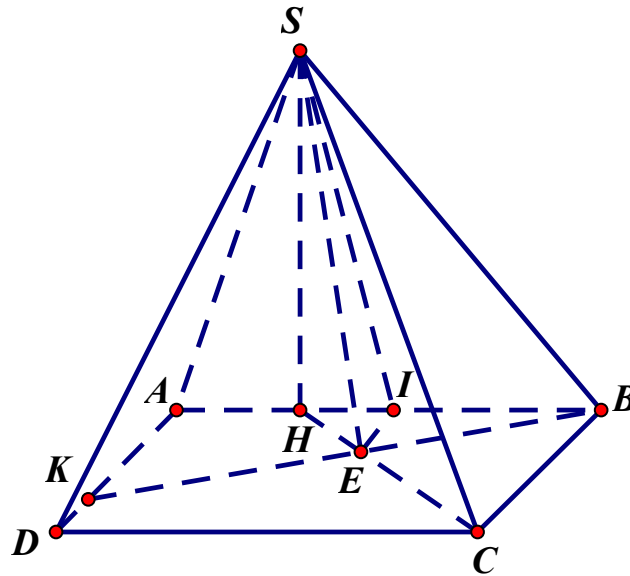
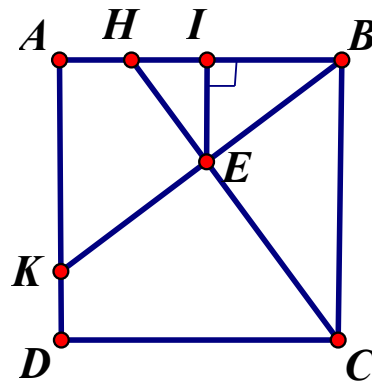
D. $\frac{9}{5\sqrt{39}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\triangle ABD = \triangle BCH$.

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ.$$



Ta có: $\cos(SE; BC) = \cos(SE; EI) = |\cos \widehat{SEI}|$, $SH = BH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HB} \Rightarrow HE = \frac{HB^2}{HC} = \frac{9a}{5}, \quad SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{81a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{39}}{5}.$$

$$\frac{HE}{HB} = \frac{HI}{HE} \Rightarrow HI = \frac{HE^2}{HB} = \frac{27a}{25}, \quad SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{27a}{25}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{651}}{25}.$$

$$\frac{EI}{BC} = \frac{HI}{HB} = \frac{9}{25} \Rightarrow EI = \frac{36a}{25}.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

$$\cos \widehat{SEI} = \frac{SE^2 + EI^2 - SI^2}{2 \cdot SE \cdot EI} = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2 + \left(\frac{36a}{25}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2 \cdot \frac{2a\sqrt{39}}{5} \cdot \frac{36a}{25}} = \frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào ĐÚNG?

- A.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau
- B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau
- C.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau
- D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

Lời giải

Chọn B

Câu **A** sai vì có thể hai đường thẳng chéo nhau.

Câu **C** sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Câu **D** sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 14: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai.

A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

D. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 15: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Lời giải

Chọn B

Hiển nhiên **B** đúng.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, **A** sai.

Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b . Do đó, **C** sai.

Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, **D** sai.

Câu 16: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song

Lời giải

Chọn A

Theo lý thuyết.

Câu 17: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. H là trung điểm của AC .

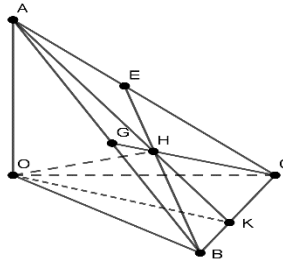
B. H là trọng tâm tam giác ABC .

C. H là trung điểm của BC .

D. H là trực tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OK \perp BC$; $OH \perp AK$.

Ta có: $\begin{cases} OK \perp BC \\ OA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAK) \Rightarrow BC \perp OH$.

$\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp AK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow H$ là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) .

$AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC .

Câu 18: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi H là hình chiếu của A trên SB , trong các khẳng định sau:

(1): $AH \perp SC$.

(2): $BC \perp (SAB)$.

(3): $SC \perp AB$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1.

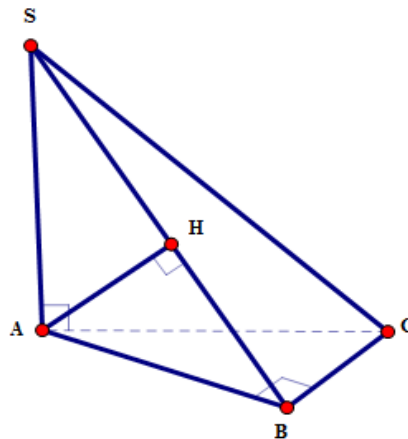
B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp SA$, $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$.

Và $(SBC) \perp (SAB)$, $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp SC$

Vậy có hai khẳng định đúng.

Câu 19: Cho tứ diện $SABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC .

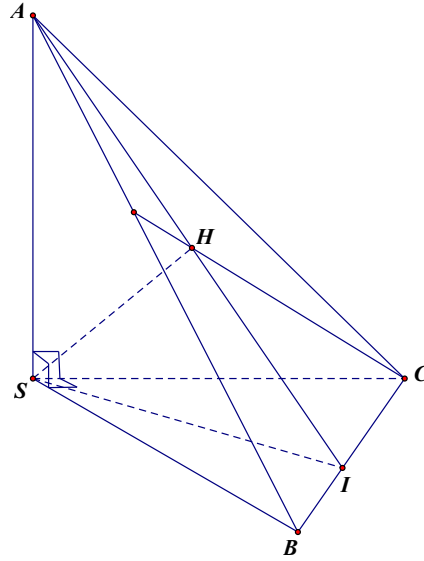
B. trọng tâm tam giác ABC .

C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

D. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (SBC).$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1).$$

Tương tự, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (SAB).$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp SC \\ AB \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp CH \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AH \perp (SCD)$.

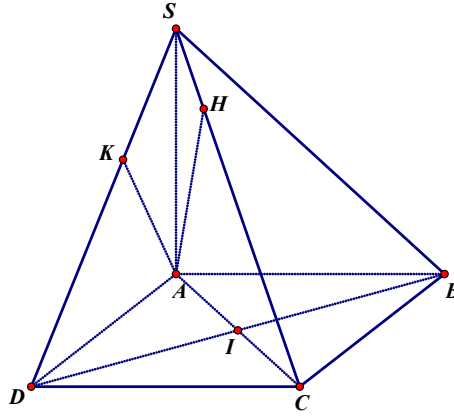
B. $BD \perp (SAC)$.

C. $AK \perp (SCD)$.

D. $BC \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Có } \left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK.$$

$$\text{Có } \left. \begin{array}{l} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp (SCD).$$

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. 45° .

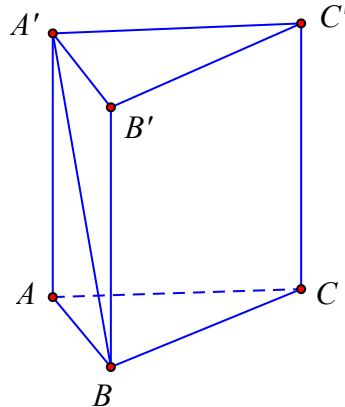
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'B' \Rightarrow A'B' \perp BB'$ (1)

Bài ra có $AB \perp BC \Rightarrow A'B' \perp B'C'$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow A'B' \perp (BCC'B') \Rightarrow \widehat{(A'B; (BCC'B'))} = \widehat{A'BB'}$

$$\Rightarrow \tan \widehat{(A'B; (BCC'B'))} = \tan \widehat{A'BB'} = \frac{A'B'}{BB'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{(A'B; (BCC'B'))} = 30^\circ.$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

A. 45° .

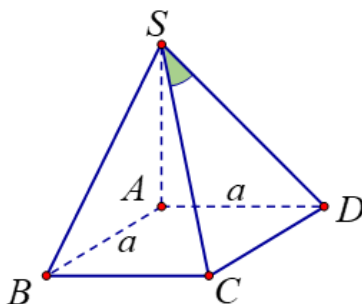
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .

Vậy góc giữa **đường thẳng** SC và **mặt phẳng** (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90^\circ$; $CB = a$; $SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan \widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB} = 30^\circ$.

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

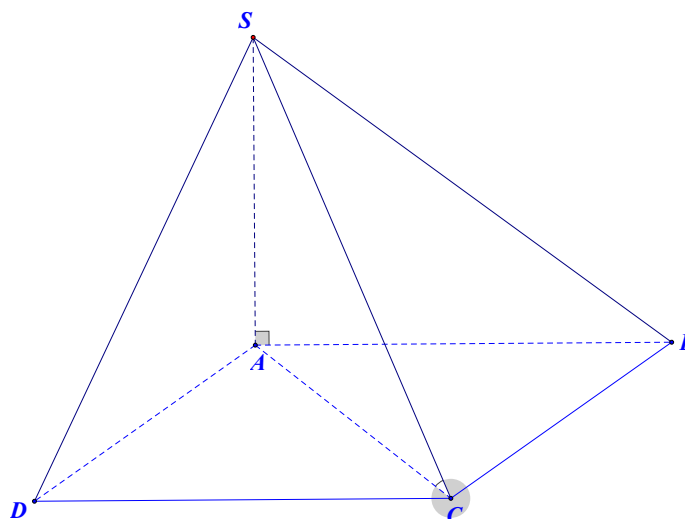
$$\text{Xét tam giác vuông } SAO: \cos 60^\circ = \frac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \frac{AO}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 60° B. 120° C. 30° D. 90°

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60°

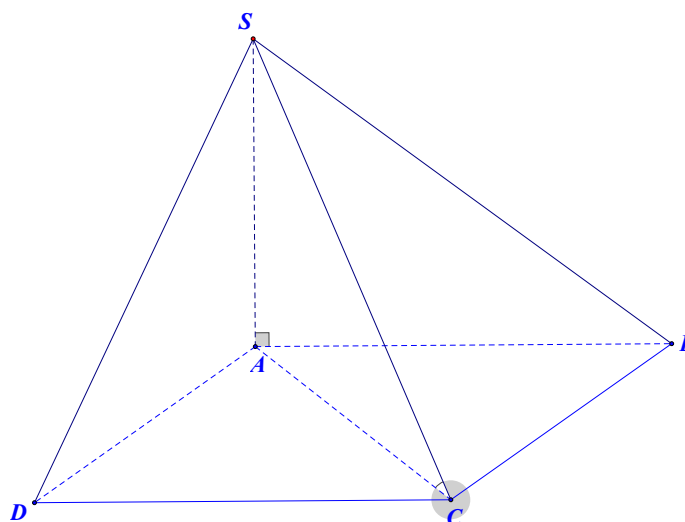
B. 120°

C. 30°

D. 90°

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

Câu 26: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60°

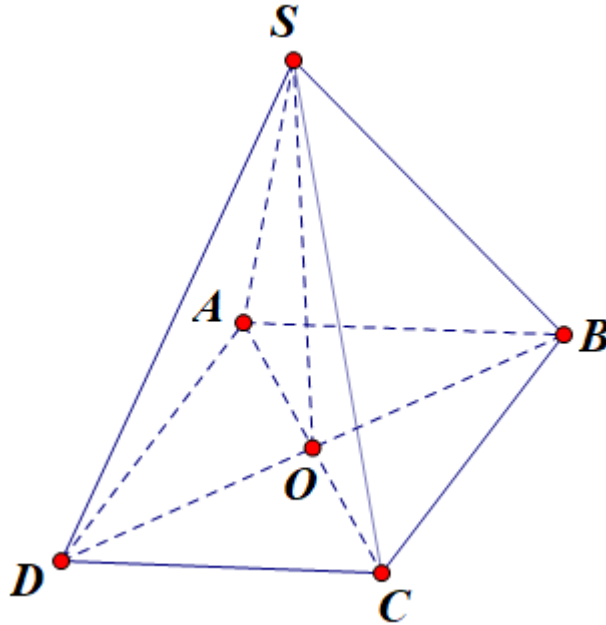
B. 75°

C. 30°

D. 45°

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều và $OD = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan \widehat{SDO} = \frac{SO}{DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{SDO} = 30^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là trung điểm BM . **Khẳng định nào sau đây đúng?**

A. $BC \perp (SAB)$

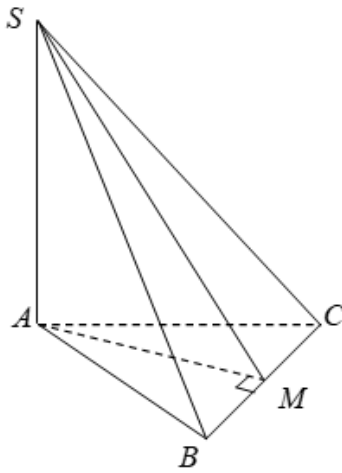
B. $BC \perp (SAM)$

C. $BC \perp (SAC)$

D. $BC \perp (SAJ)$

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$.

Theo giả thiết tam giác ABC là tam giác cân tại A và M là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp AM$.

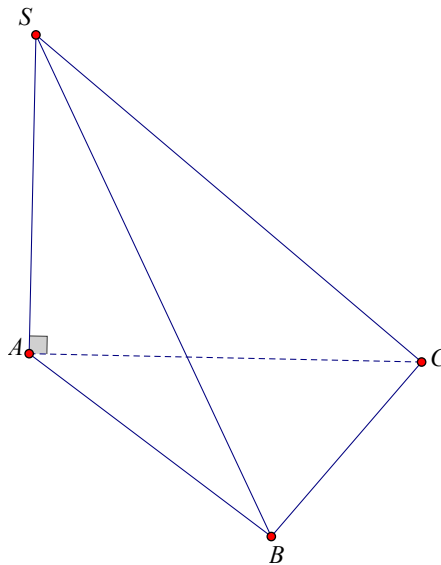
Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , kết luận nào sau đây sai?

A. $(SAC) \perp (SBC)$. **B.** $(SAB) \perp (ABC)$. **C.** $(SAC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB), (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB), (SAC) \perp (ABC) \Rightarrow \text{B, C đúng.}$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB); BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC) \Rightarrow \text{D đúng.}$

Câu 29: Cho a, b, c là các đường thẳng. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a , mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

B. Cho $a \perp b, a \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa b và vuông góc với a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .

D. Cho a, b . Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a, c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\beta) \perp a \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \perp (\alpha).$$

Câu 30: Trong các khẳng định sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp có đáy là tam giác đều là hình chóp đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải

Chọn A

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Ba mặt phẳng $(ABC), (ABD), (ACD)$ đôi một vuông góc.

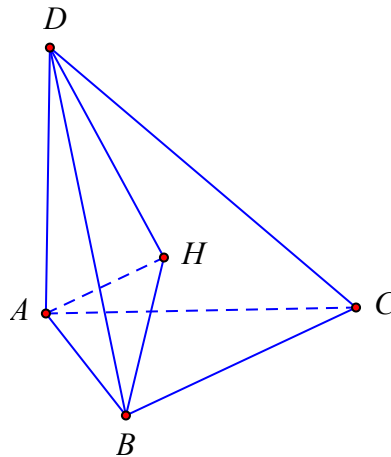
B. Tam giác BCD vuông.

C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD .

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Lời giải

Chọn B



$$\square \text{ Ta có } \begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp AC \end{cases} \Rightarrow DA \perp (ABC).$$

$$\text{Mà } DA \subset (ABD) \Rightarrow (ABD) \perp (ABC).$$

Tương tự $(ACD) \perp (ABC), (ACD) \perp (ABD)$ do đó A đúng.

$\square$ Nếu $\triangle BCD$ vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$ mà $BC \perp DA \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$, điều này không thể xảy ra vì $AB \perp AC$ nên B sai.

□ Kẽ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$ (1)

Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) ta được C đúng.

□ Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.

Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, do đó D đúng.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = a$, $AC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC)

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

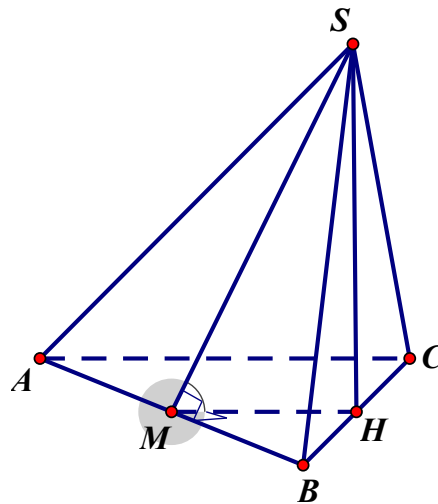
C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên hình chiếu của S trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy ABC . Nhận xét H là trung điểm BC .



Gọi M là trung điểm AB , nhận xét $AB \perp (SMH)$ nên góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) là góc $\widehat{SMH}$.

Xét tam giác SBH có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Xét tam giác } SMH \text{ có } \tan \widehat{M} = \frac{SH}{MH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{M} = 60^\circ.$$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

A. 30° .

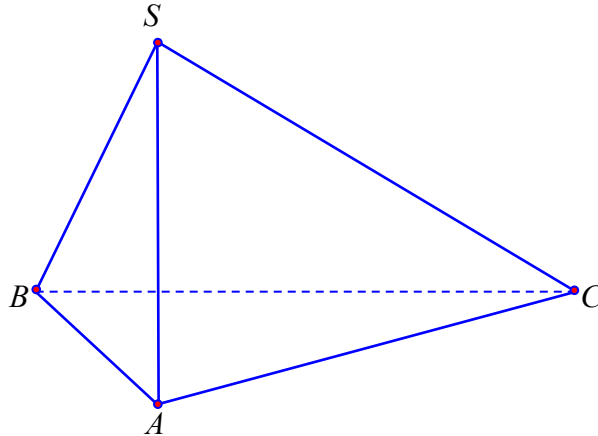
B. 150° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

$$\text{ta có: } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB), (SAC)} \right) = \left(\widehat{AB, AC} \right) = \widehat{BAC}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } \left(\widehat{(SAB), (SAC)} \right) = 120^\circ.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IO .

B. IA .

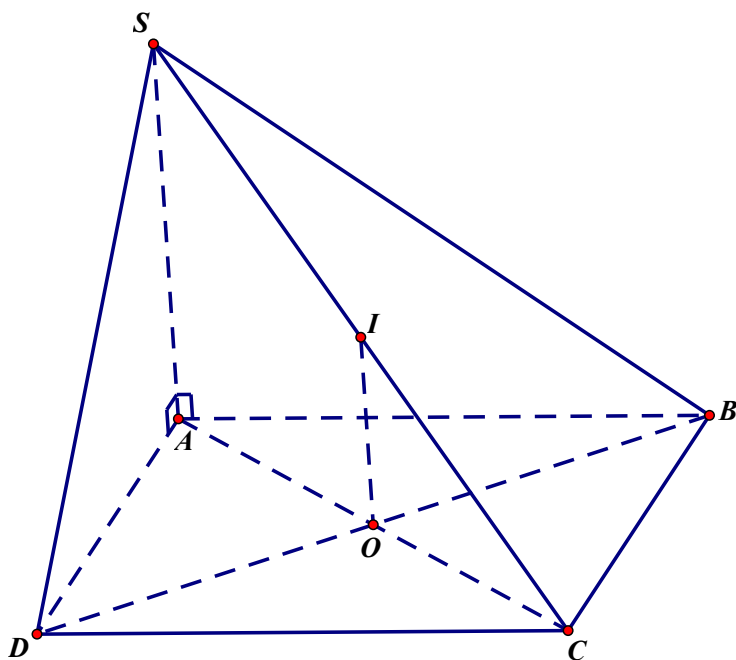
C. IC .

D. IB .

Lời giải

Chọn A

Do I là trung điểm của SC và O là trung điểm AC nên $IO \parallel SA$. Do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO .

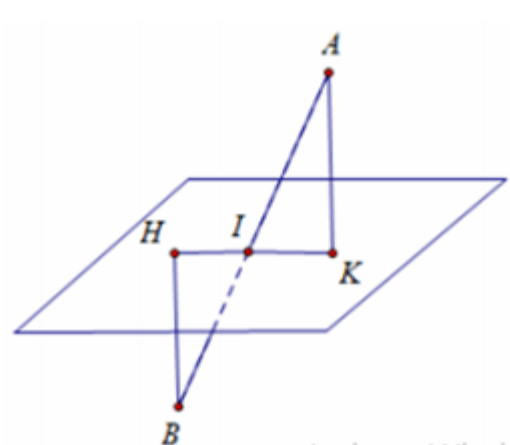


Câu 35: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B không nằm trong (P) . Đặt $d_1 = (A, (P))$ và $d_2 = (B, (P))$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. $\frac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi AB song song với (P) .
- B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P) .
- C. Nếu $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ thì đoạn thẳng AB cắt (P) .
- D. Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $AK \perp (P); BH \perp (P)$

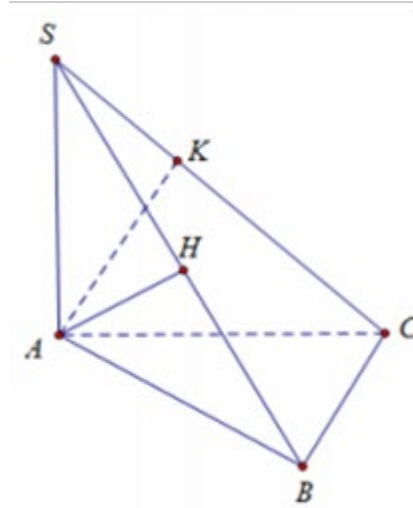
Khi đó theo định lý Talet ta có: $\frac{IA}{IB} = \frac{AK}{BH} = \frac{d_1}{d_2}$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $d(A, (SBC)) = AH$ B. $d(A, (SBC)) = AK$
 C. $d(C, (SAB)) = BC$ D. $d(S, (ABC)) = SA$

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = BC.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$$

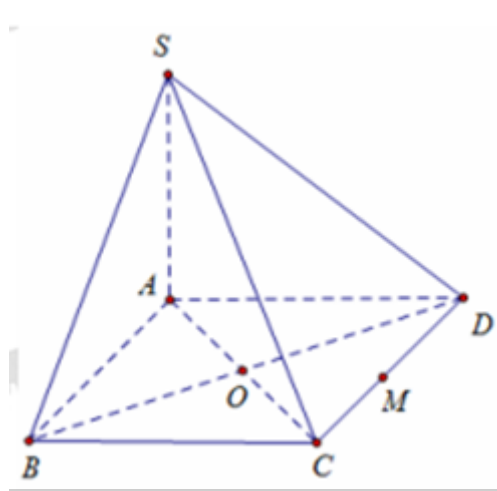
$$\text{Mặt khác } SA \perp (ABC) \Rightarrow d(S, (ABC)) = SA.$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) nhận giá trị nào sau đây?

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. a C. $a\sqrt{2}$ D. $2a$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AB // CD \Rightarrow d(M, (SAB)) = d(D, (SAB))$

Mặt khác $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

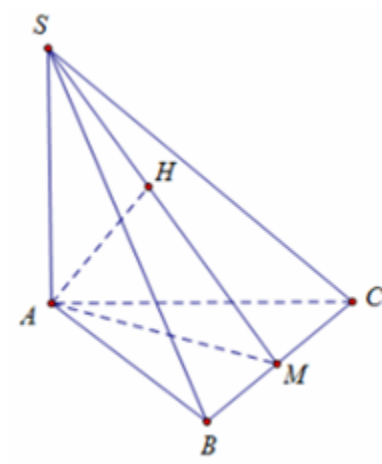
Do vậy $d(M, (SAB)) = AD = a$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi M là trung điểm của BC , khi đó khoảng cách từ A đến đường thẳng SM bằng:

- A. $a\sqrt{2}$ B. $a\sqrt{3}$ C. $a\sqrt{6}$ D. $a\sqrt{11}$

Lời giải

Chọn A



Dựng $AH \perp SM \Rightarrow d(A, SM) = AH; AM = \frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác SAM vuông tại A ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

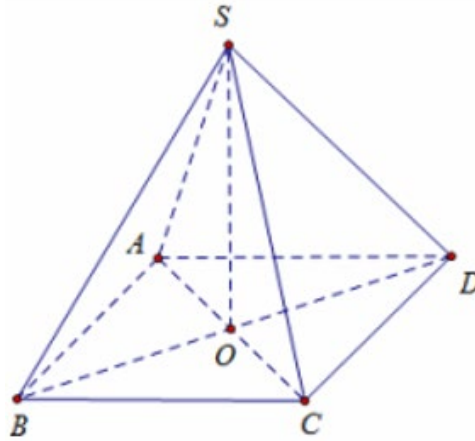
Do đó $d = a\sqrt{2}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AA' = a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' :

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } d(AB', CC') = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) = d(C, (AB)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , biết $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

- A. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB), \text{ kẻ } AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng:

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2a}{5}$ C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{a}{5}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Kẻ } BH \perp AC (H \in AC) \text{ mà } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BH$$

$$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Khi đó khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng:

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } h = d(S, (ABC)) \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC .

- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $AH \perp SC$, khi đó $d(A; SC) = AH$.

$ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều nên $AC = a$.

Trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $OH \perp SC$, khi đó $d(O; SC) = OH$. Ta có: $\Delta SAC \sim \Delta OHC$ nên:

$$\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{OC}{SC} \cdot SA.$$

$$\text{Mà: } OC = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}.$$

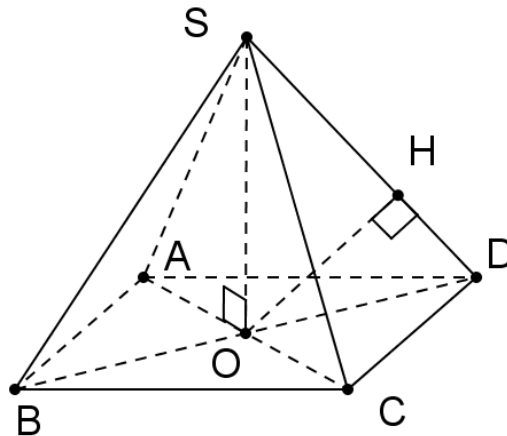
$$\text{Vậy } OH = \frac{OC}{SC} \cdot SA = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 45: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α . Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

- A. $a\sqrt{2} \cot \alpha$. B. $a\sqrt{2} \tan \alpha$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$.

Lời giải

Chọn D



$SO \perp (ABCD)$, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Kẻ $OH \perp SD$, khi đó $d(O; SD) = OH$, $\alpha = \widehat{SDO}$.

$$\text{Ta có: } OH = OD \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \alpha.$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:

- A. $a\sqrt{2}$. B. $2a$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$, khi đó $d(B; SC) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB \cdot BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a.$$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông cạnh $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD) .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

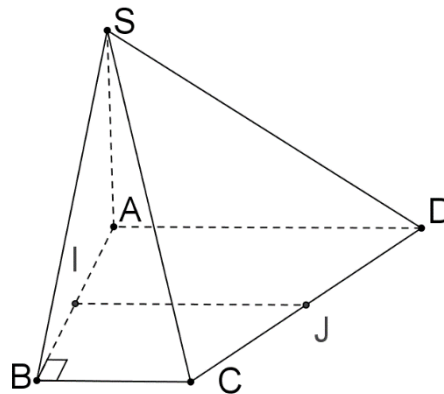
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: Vì $IJ \parallel AD$ nên $IJ \parallel (SAD) \Rightarrow d(IJ; (SAD)) = d(I; (SAD)) = IA = \frac{a}{2}$.

Câu 48: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB . Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:

A. $\frac{a}{2}$.

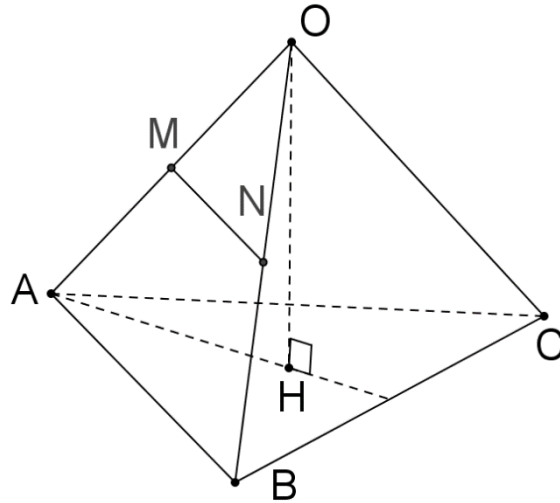
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Vì M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB nên $MN \parallel AB$ $MN \parallel (ABC)$.

$$\text{Ta có: } d(MN; (ABC)) = d(M; (ABC)) = \frac{1}{2}OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC .

A. $\frac{3a}{4}$.

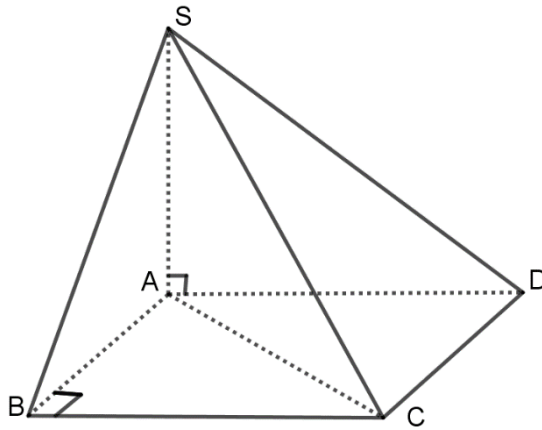
B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC \parallel (SAD)$

$$\Rightarrow d(BC; SD) = d(BC; (SAD)) = d(B; (SAD)).$$

$$\text{Mà } \begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow d(B; (SAD)) = AB.$$

$$\text{Ta có: } AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = \sqrt{3}a.$$

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(BB'; AC) = d(BB'; (ACC' A')) = \frac{1}{2} DB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d(AA'; BD') = d(AA'; (DBB'D')) = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AD, DC, A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

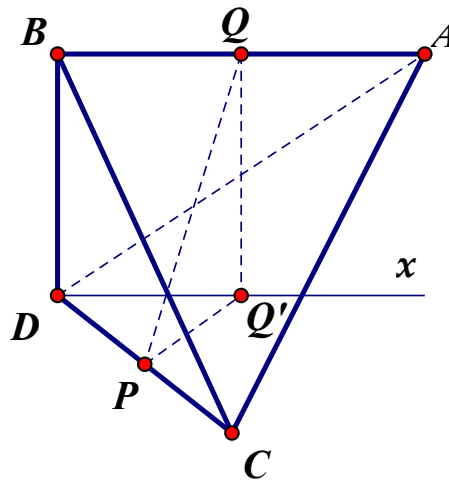
Chọn D

Ta có: $(MNP) // (ACA') \Rightarrow d((MNP); (ACA')) = d(P; (ACA')) = \frac{1}{2}OD' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

B. TỰ LUẬN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có BD vuông góc với AB và CD . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của CD và AB thỏa mãn $BD:CD:PQ:AB=3:4:5:6$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Tính $\cos \varphi$

Lời giải



Do $BD:CD:PQ:AB=3:4:5:6$ nên ta chọn
$$\begin{cases} BD=3 \\ CD=4 \\ PQ=5 \\ AB=6 \end{cases}$$

Đựng $Dx // AB \Rightarrow Dx \perp BD \Leftrightarrow BD \perp (CDx)$

Gọi Q' là hình chiếu của Q lên $Dx \Rightarrow QQ' \perp PQ'$

$\Rightarrow \varphi = (AB; CD) = (Dx; DC)$

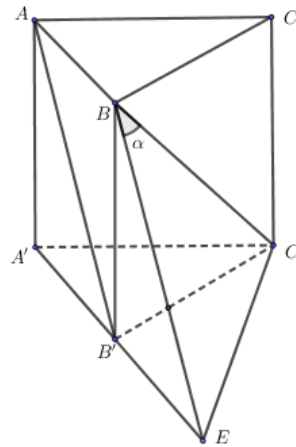
Ta có $PQ' = \sqrt{PQ^2 - QQ'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Xét $\triangle DPQ'$: $\cos \widehat{PDQ'} = \frac{DP^2 + DQ'^2 - PQ'^2}{2DP \cdot DQ'} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos \varphi = \cos(180^\circ - \widehat{PDQ'}) = -\cos \widehat{PDQ'} = \frac{1}{4}$

Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng của A' qua B' .

Ta có $AB \parallel B'E$ và $AB = B'E = a$ suy ra $ABEB'$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow AB' \parallel BE \Rightarrow (\widehat{AB', BC'}) = (\widehat{BE, BC'}) = \widehat{EBC'}.$$

Xét tam giác $BB'E$ có $BB' \perp B'E \Rightarrow \triangle BB'E$ vuông tại B' .

$$\Rightarrow BE = \sqrt{BB'^2 + B'E^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác $BB'C'$ có $BB' \perp B'C' \Rightarrow \triangle BB'C'$ vuông tại B' .

$$\Rightarrow BC' = \sqrt{BB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác $A'C'E$ có $C'B' = A'B' = B'E = \frac{1}{2} A'E$.

$$\Rightarrow \triangle A'C'E \text{ vuông tại } C' \Rightarrow C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Suy ra tam giác BEC' có $BE = C'E = BC' = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle BEC'$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow \widehat{EBC'} = 60^\circ \Rightarrow (\widehat{AB', BC'}) = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa đường thẳng AB' và BC' bằng 60° .

Câu 3: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G , cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc 30° . Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SG \perp (ABC)$ do đó góc giữa SA tạo với đáy (ABC) là góc $\widehat{SAG}$ nên $\widehat{SAG} = 30^\circ$.

Gọi D sao cho $ABCD$ là hình bình hành do $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông. Khi đó góc giữa SA và BC là góc giữa SA và AD .

Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$AG = CG = \frac{2}{3} CM = \frac{2}{3} \sqrt{CB^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}; DG = \frac{2}{3} DB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}. \text{ Tam giác } SAG \text{ vuông tại}$$

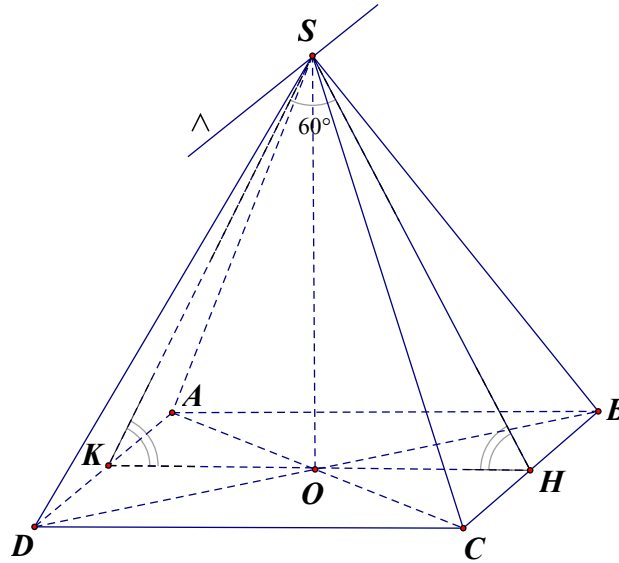
G có $SG = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{9}$ và $SA = \frac{AG}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{15}}{9}$. Tam giác SGD vuông tại G ta có

$$SD^2 = SG^2 + GD^2 = \frac{29}{27}a^2. \text{ Tam giác } SAD \text{ có } \cos \widehat{SAD} = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA \cdot AD} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{SA, BC}) = |\cos \widehat{SAD}| = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều, biết hai mặt bên đối diện diện diện tạo với nhau góc 60° , tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

Lời giải



Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm S và song song AD và $BC \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = \Delta$.

Gọi H và K lần lượt là trung điểm cạnh BC và AD , do ΔSBC và ΔSAD cân đỉnh S nên:

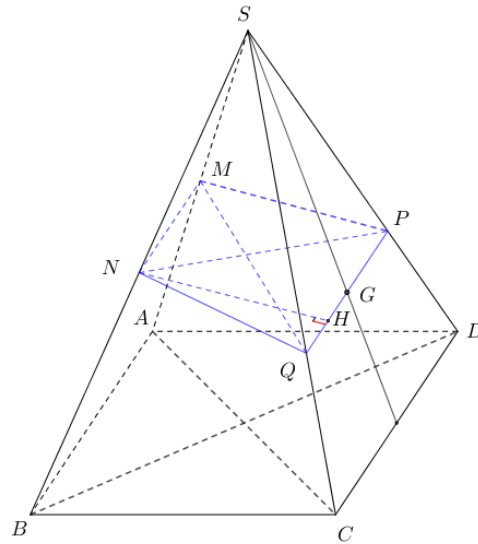
$$\left. \begin{array}{l} SH \perp BC \Rightarrow SH \perp \Delta \\ SK \perp AD \Rightarrow SK \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{HSK} = (\widehat{(SBC), (SAD)}) = 60^\circ$$

Mặt khác: $\Delta SBC = \Delta SAD \Rightarrow SK = SH$

Từ và $\Rightarrow \Delta SHK$ đều $\Rightarrow \widehat{SHK} = \widehat{SKH} = 60^\circ \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = 60^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng $12a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB và G là trọng tâm tam giác SCD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MNG) .

Lời giải



Qua G kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC , SD lần lượt tại Q , P .

Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MNG) là hình thang cân $NMPQ$.

$$\text{Ta có } MN = \frac{1}{2}AB = 6a, PQ = \frac{2}{3}CD = 8a.$$

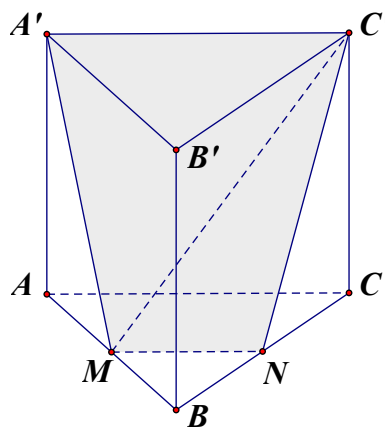
$$NQ = 2\sqrt{13}a.$$

$$NH = \sqrt{NQ^2 - QH^2} = \sqrt{51}a.$$

$$\text{Vậy } S_{NMPQ} = \frac{NM + PQ}{2} \times NH = 7\sqrt{51}a^2.$$

Câu 6: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AB . Tính diện tích thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$.

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ đều cạnh a .

Gọi N là trung điểm BC suy ra $MN \parallel AC \parallel A'C'$ và $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$.

Vì $MN \parallel A'C'$ nên A', C', M, N đồng phẳng do đó thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là hình thang cân $NMA'C'$.

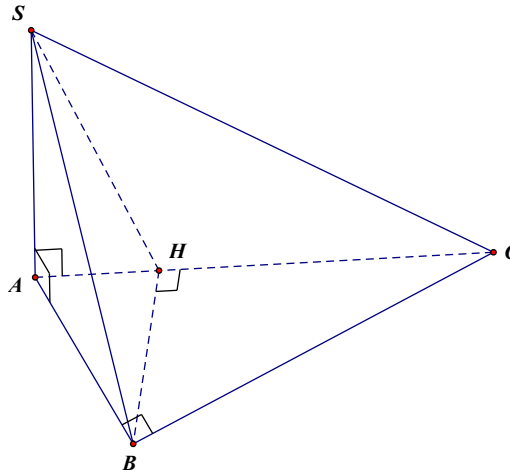
Lại có $C'N = A'M = \sqrt{A'A^2 + AM^2} = \frac{3}{2}a$ nên đường cao của hình thang cân $NMA'C'$ là

$$h = \sqrt{A'M^2 - \left(\frac{A'C' - MN}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{4}a$$

$$\text{Do đó diện tích thiết diện là } S = \frac{1}{2}(A'C' + MN).h = \frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\cos \varphi$

Lời giải



$$+) \text{ Có } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$+) \text{ Kẻ } BH \perp AC \text{ tại } H \Rightarrow BH \perp (SAC)$$

$$+) \text{ Trong tam giác } ABC \text{ có } CH.CA = CB^2 \Rightarrow CH = \frac{CB^2}{CA} = \frac{3a}{2}.$$

$$+) \Rightarrow S_{\Delta SHC} = \frac{1}{2}SA.CH = \frac{1}{2}.2a.\frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$+) \text{ Theo giả thiết } \begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp BA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{1}{2}.a\sqrt{5}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{15}}{2}.$$

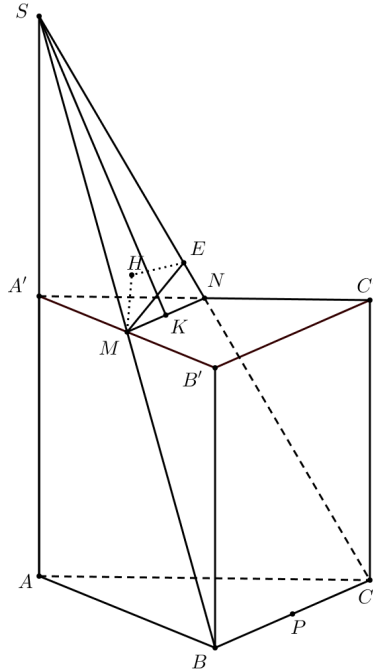
$$+) \Delta SHC \text{ là hình chiếu của } \Delta SBC \text{ trên mặt phẳng } (SAC).$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SHC} = S_{\Delta SBC} \cdot \cos \varphi \quad (\varphi = \widehat{((SAC); (SBC))})$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{a^2\sqrt{15}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 8: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}, BB' = 2$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của $A'B', A'C'$ và BC . Nếu gọi α là độ lớn của góc của hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') thì $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Dễ thấy (MNP) chính là $(MNCB)$ và (ACC') chính là $(ACC'A')$; giao tuyến của (MNP) và $(ACC'A')$ là (CP) .

Dễ chứng minh được theo định lý Talet là AA', MB, NC đồng quy tại một điểm S .

Hạ $ME \perp SC$, $MH \perp (ACC'A')$ khi đó $\alpha = \widehat{MEH}$. $\sin \alpha = \frac{MH}{ME}$.

Gọi $AB = a; AA' = b$

$$\text{Có } MH = d(M; (ACC'A')) = \frac{1}{2} d(B'; (ACC'A')) = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Có } SM = SN = MB = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{7}; \quad MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} = \sqrt{3}$$

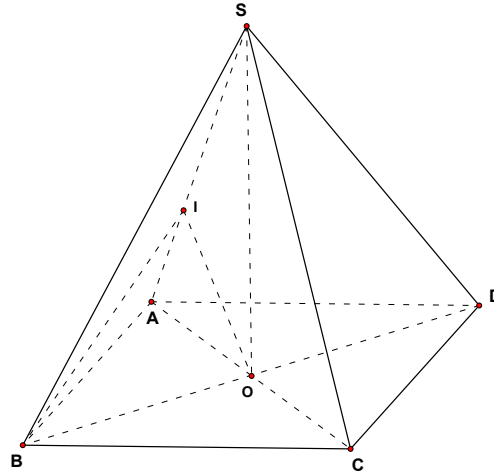
$$K \text{ là trung điểm } MN \text{ thì } SK = \sqrt{SM^2 - MK^2} = \sqrt{7 - \frac{3}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Xét tam giác } SMN \text{ thì } ME \cdot SN = SK \cdot MN \text{ nên } ME = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{21}}{14}$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{3}{2} : \frac{5\sqrt{21}}{14} = \frac{7\sqrt{3}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ hay } \cos \alpha = \frac{2}{5}.$$

Câu 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$. Gọi α là góc của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAB) . Tính $\cos \alpha$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. $SA = (SAC) \cap (SAB)$, $BO \perp (SAC)$.

Kẻ $OI \perp SA \Rightarrow \alpha = \widehat{((SAC), (SAB))} = \widehat{BIO}$.

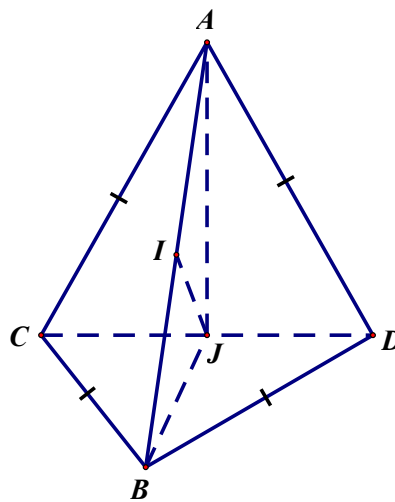
$$OA = OB = \frac{BD}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; \quad SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}.$$

$$OI = \frac{SO \cdot OA}{SA} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad BI = \sqrt{OB^2 + OI^2} = \sqrt{2 + \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{OI}{BI} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 10: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc nhau.

Lời giải



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD . Vì J là trung điểm CD và $AC = AD$ nên $AJ \perp CD$. Do $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp (BCD)$.

Ta thấy $\triangle AJD$ vuông tại J nên $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Mặt khác $AC = AD = BC = BD = a$ nên $\triangle AJB$ vuông cân tại J .

Suy ra: $AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

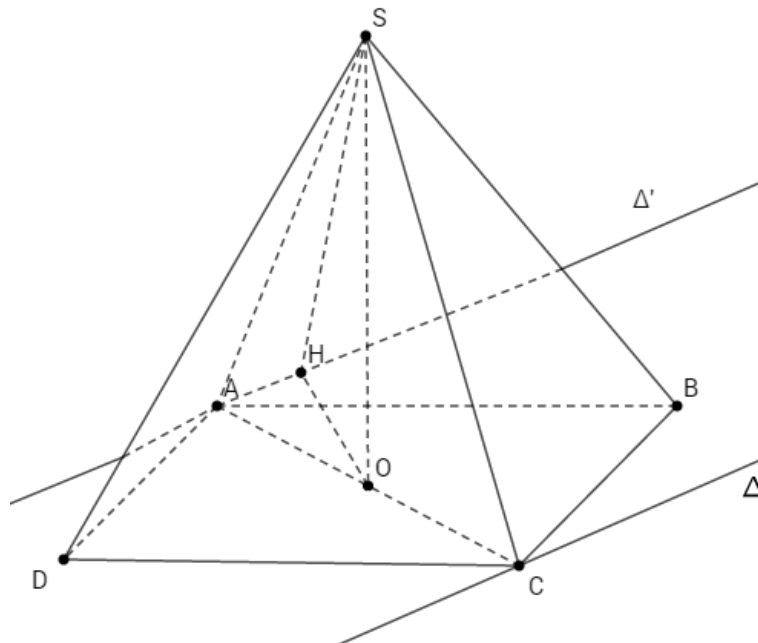
Do $IA = IB$, ΔAIB vuông tại J nên $IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

Vì CI và DI vuông góc với AB nên $(ABC) \perp (ABD)$ suy ra $\widehat{CID} = 90^\circ$.

Ta có $IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C , (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA), (\Delta))$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua A và song song với (Δ) . Hạ $OH \perp (\Delta')$ ($H \in (\Delta')$). Do O là trung điểm của AC và $(\Delta) \parallel (\Delta')$ nên $d(O, (\Delta')) = d(O, (\Delta))$ hay $OH = \frac{a\sqrt{14}}{6}$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $AH \perp OH$ và $AH \perp SO$ nên, suy ra $AH \perp SH$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông AHO ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$, suy ra

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2} = \frac{a}{3}.$$

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông SAO ta có $SA^2 = OA^2 + SO^2$, suy ra

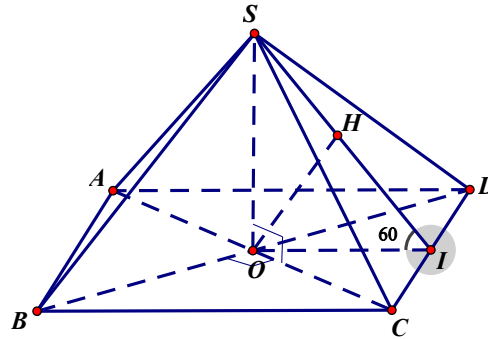
$$SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2}.$$

$$\text{Do } (\Delta) // (\Delta') \text{ nên } \cos((SA), (\Delta)) = \cos((SA), (\Delta')) = \cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}.$$

Câu 12: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải

* Ta có: $\frac{d(B; (SCD))}{d(O; (SCD))} = \frac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow d(B; (SCD)) = 2.d(O; (SCD)) = 2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD) .



* Gọi I là trung điểm của CD ta có:

$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = (OI; SI) = \widehat{SIO} = 60^\circ.$$

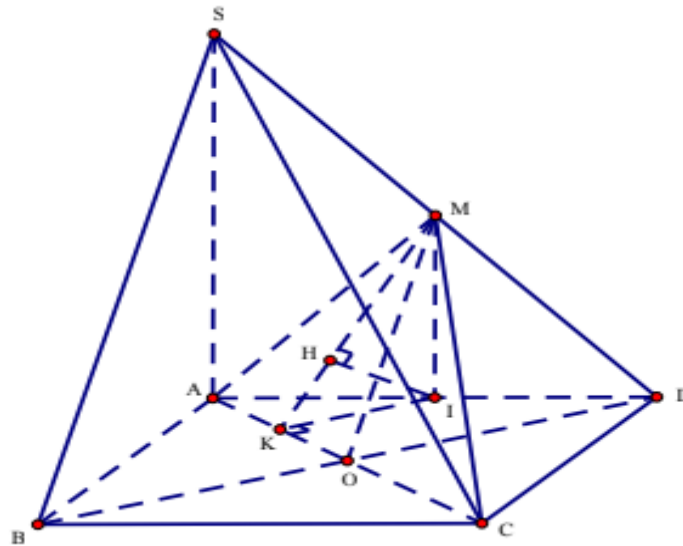
Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Xét } \triangle SOI, \text{ ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(B; (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM)

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông. Ta có: $MO \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (ACM)$
 $\Rightarrow d(SB, (ACM)) = d(B, (ACM)) = d(D, (ACM))$

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \\ d(D, (ACM)) = 2d(I, (ACM)) \end{cases}$

Trong $(ABCD)$ kẻ $IK \perp AC$ tại K

Trong (MIK) kẻ $IH \perp MK$ tại H

Ta có: $AC \perp MI, AC \perp IK \Rightarrow AC \perp (MIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)

Từ (1) & (2) $\Rightarrow IH \perp (ACM) \Rightarrow d(I, (ACM)) = IH$

Trong tam giác MIK ta có: $IH = \frac{IM \cdot IK}{\sqrt{IM^2 + IK^2}}$

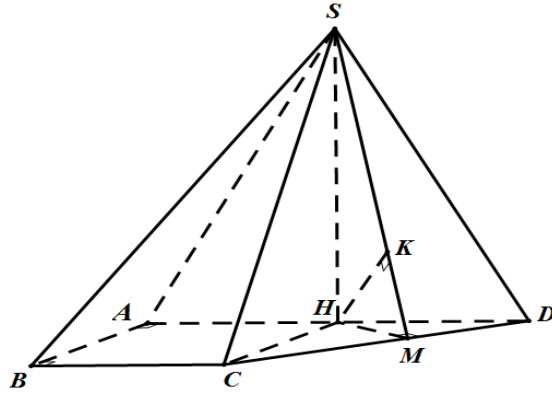
$$\text{Biết } MI = \frac{SA}{2} = a, IK = \frac{OD}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a}{3}$$

$$\text{Vậy: } d(SB, (ACM)) = \frac{2a}{3}$$

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$.

Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD , K là hình chiếu của H lên SM

Tam giác HCD vuông tại H có $CD = a\sqrt{2}$ và $HM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

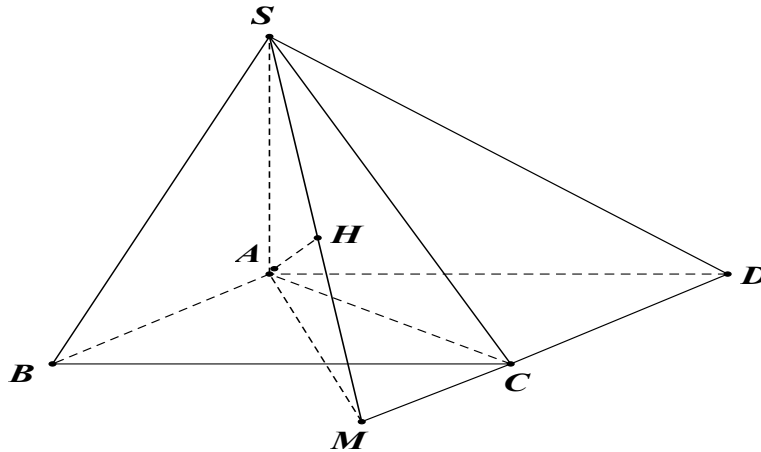
Ta có $BH \parallel CD \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$

Tam giác SHM vuông tại H có $HK = \frac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến (SCD) bằng?

Lời giải



Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Kẻ $MA \perp CD (M \in CD)$, kẻ $AH \perp SM \Rightarrow SH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = SH$.

$$SA = a; AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{S_{ABCD}}{CD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

