

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

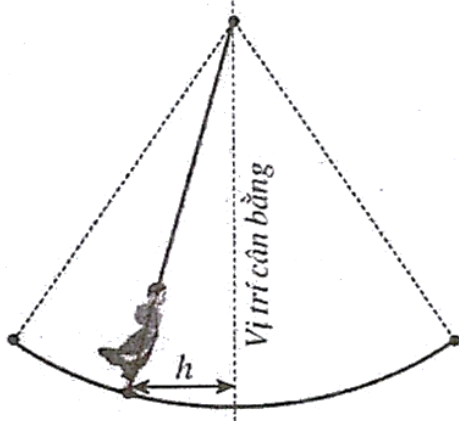
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn, gồm 12 câu, tổng 3,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án. (Mỗi câu đúng 0,25 điểm)

Câu 1. Khi đó các phương trình $(2), (3), (4)$ có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó. Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x-1) + 2025$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[0;1]$ bằng
A. 2031. B. 2022. C. 2028. D. 2024.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x > (7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x+1}$ là
A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 3. Chuồng gà thứ nhất có 9 con mái và 1 con trống. Chuồng gà thứ hai có 1 con mái và 5 con trống. Từ mỗi chuồng ta bắt ngẫu nhiên ra một con đem bán. Các con gà còn lại được dồn vào một chuồng thứ ba. Nếu ta lại bắt ngẫu nhiên một con gà nữa từ chuồng này ra thì xác suất bắt được con gà trống là bao nhiêu?
A. $\frac{38}{105}$. B. $\frac{19}{105}$. C. $\frac{37}{420}$. D. $\frac{37}{210}$.

Câu 4. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng mấy lần?



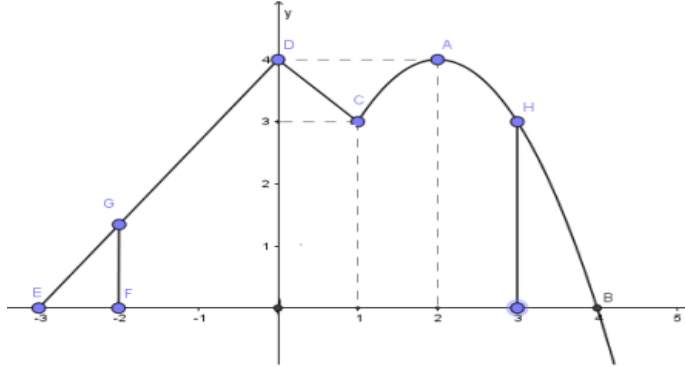
A. 6. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 5. Cho tam giác MNP biết $M(-6;3)$ và N, P là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $\Delta_1: x - y + 9 = 0$, $\Delta_2: 2x + y + 1 = 0$. Gọi $Q(2; -1)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{NQ} = 3\overrightarrow{NP}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP ?

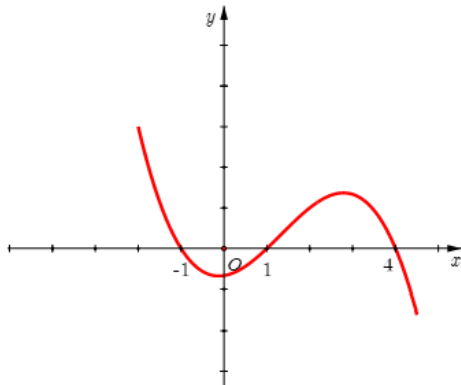
A. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$. B. $(x+4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$.
C. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 2$. D. $(x+6)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{2}$.

- Câu 6.** Lớp 12A₁ có 45 học sinh gồm 23 bạn nữ và 22 bạn nam, trong đó bạn Việt (nam) làm lớp trưởng. Sắp xếp học sinh để chụp ảnh kỉ yếu trong đó có 21 bạn đứng hàng trước trong đó có bạn Việt đứng ở chính giữa và 24 bạn đứng hàng sau. Số cách sắp xếp là
- A. $A_{45}^{20} \cdot 24!$. B. $C_{45}^{21} \cdot 24!$. C. $C_{45}^{20} \cdot 24!$. D. $A_{44}^{20} \cdot 24!$.

- Câu 7.** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$ như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tính $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$.



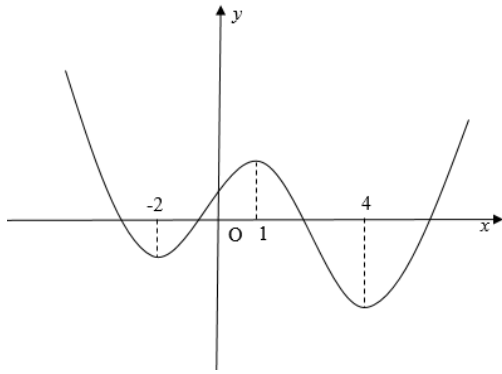
- A. $I = \frac{53}{3}$. B. $I = \frac{97}{6}$. C. $I = \frac{43}{2}$. D. $I = \frac{95}{6}$.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng



- A. $(-2; -1)$. B. $(0; 2)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- Câu 9.** Một quả bóng cao su từ độ cao 15(m) so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng hai phần năm độ cao lần rơi ngay trước đó. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng:
- A. 35(m). B. 50(m). C. 30(m). D. 25(m).

- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD , biết hai mặt phẳng (SBI) , (SCI) cùng vuông góc với đáy và $SI = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) , $(ABCD)$.
- A. 60° . B. 30° . C. 36° . D. 45° .

- Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 12. Phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có điểm biểu diễn các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ trên đường tròn lượng giác là một đa giác. Tính diện tích đa giác đó.

- A. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{3+2\sqrt{3}}{8}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai, gồm 4 câu, tổng 4,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một mô hình kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 12 cm và chiều cao bằng 16 cm . Hãy cho biết tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- a) $AB \parallel (SCD)$.
b) Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt SC tại N . Thể tích của khối chóp $S.ABNM$ bằng $426,67\text{ cm}^3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
c) Góc nhị diện $[S, BC, D]$ có độ lớn bằng $69^\circ 26'$ (kết quả làm tròn đến phút).
d) Khoảng cách giữa AD và mặt phẳng (SBC) bằng $11,23\text{ cm}$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

- a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ bằng $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.
b) Điểm $x = -1$ là một điểm cực tiểu của hàm số.
c) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, chỉ ra mệnh đề đúng, mệnh đề sai.

- a) $\int_0^2 (3x^2 - 2e^x) dx = 6 - 2e^2$.
b) Nước chảy từ đáy của một bồn chứa với tốc độ $k(t) = 250 - 6t$ (lít/phút), trong đó $0 \leq t \leq 45$. Lượng nước chảy ra khỏi bồn chứa trong 10 phút đầu tiên bằng 2200 (lít).
c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \cot^2 x) dx = a - \frac{b}{c}\sqrt{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}, c \neq 0$ và $\frac{b}{c}$ tối giản thì $a + b + c = 9$.
d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos^2 x - \sin x \cos x| dx = a + b\pi - c\sqrt{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thì $a - c + b = \frac{5}{6}$.

Câu 3. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 27 người thích chơi bóng bàn, 25 người thích chơi cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để người đó thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông không vượt quá 100% .
b) Xác suất để người đó thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng bàn ít nhất là 25% .
c) Xác suất để người đó không thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông ít nhất là 2,5% .
d) Xác suất để người đó không thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông nhiều nhất là 25%

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn, gồm 6 câu, tổng 3,0 điểm (mỗi câu 0,5 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

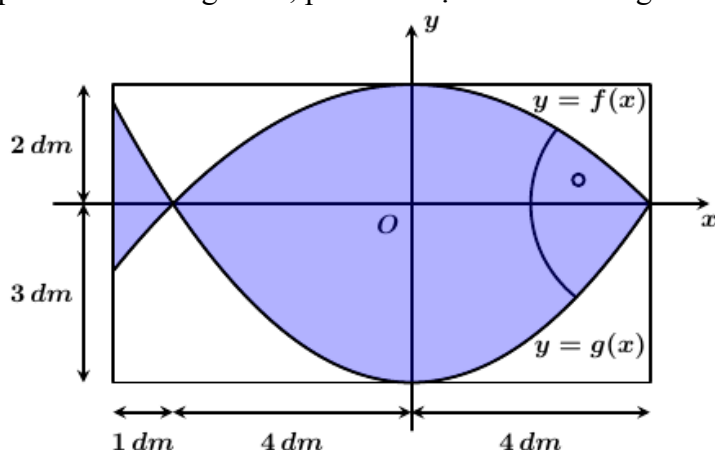
Câu 1. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen; hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi, giả sử viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I (làm tròn 2 chữ số thập phân).

Câu 2. Một công ty, trong một tháng cần sản xuất ít nhất 12 viên kim cương to và 9 viên kim cương nhỏ. Từ một tấn các bon loại 1 (giá 100 triệu đồng) có thể chiết xuất được 5 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ, từ một tấn Cacbon loại 2 (giá 40 triệu đồng) có thể chiết xuất được 2 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ. Mỗi viên kim cương to giá 20 triệu đồng, mỗi viên kim cương nhỏ giá 10 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng công ty lãi được nhiều nhất bao nhiêu triệu đồng? Biết mỗi tháng chỉ sử dụng tối đa 4 tấn Cacbon mỗi loại và tổng số tiền mua Cacbon không vượt quá 500 triệu đồng.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho AB là ngắn nhất. Khi đó độ dài đoạn thẳng AB^2 bằng bao nhiêu ?

Câu 4. Một khách sạn có 60 phòng. Chủ khách sạn nhận thấy nếu cho thuê mỗi phòng với giá 500.000 đồng/ ngày thì tất cả các phòng đều được thuê hết và cứ tăng giá thêm 50.000 đồng một phòng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi chủ khách sạn nên cho thuê mỗi phòng với giá bao nhiêu tiền một ngày để tổng doanh thu một ngày là lớn nhất?

Câu 5. Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật có chiều dài 9 dm và chiều rộng 5 dm, người ta thiết kế một logo hình con cá. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét), sau đó logo được sơn màu xanh với chi phí 20 000 đồng/ dm^2 ; phần còn lại sơn màu trắng với chi phí 10 000 đồng/ dm^2 .



Số tiền cần dùng để trang trí bảng gỗ trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Lấy $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $K = a + b + c$ là

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.D	3.A	4.D	5.A	6.D	7.B	8.C	9.A	10.A	11.A	12.A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.
a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ
b) Đ	b) S	b) Đ	b) S
c) S	c) S	c) Đ	c) S
d) S	d) Đ	d) S	d) S

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	0,84	222	27	1000	730	5

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn, gồm 12 câu, tổng 3,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án. (Mỗi câu đúng 0,25 điểm)

Câu 1. Khi đó các phương trình (2), (3), (4) có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó. Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x - 1) + 2025$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng
A. 2031. **B.** 2022. **C.** 2028. **D.** 2024.

Lời giải

Ta có: $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;1]} [f(3x - 1) + 2025] = 2025 + \max_{[0;1]} f(3x - 1)$.

Đặt $t = 3x - 1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên R . Mà $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Suy ra: $\max_{[0;1]} f(3x - 1) = \max_{[-1;2]} f(t) = 3$.

Suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = 2025 + 3 = 2028$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^x > (7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x+1}$ là
A. $(\frac{1}{2}; 2)$. **B.** $(\frac{1}{2}; +\infty)$. **C.** $(-2; \frac{1}{2})$. **D.** $(-\infty; \frac{1}{2})$.

Lời giải

Chọn D

$(2 - \sqrt{3})^x > (7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{x+1} \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{2-x} > (2 + \sqrt{3})^{x+1} \Leftrightarrow 2 - x > x + 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Câu 3. Chuồng gà thứ nhất có 9 con mái và 1 con trống. Chuồng gà thứ hai có 1 con mái và 5 con trống. Từ mỗi chuồng ta bắt ngẫu nhiên ra một con đem bán. Các con gà còn lại được dồn vào một chuồng thứ ba. Nếu ta lại bắt ngẫu nhiên một con gà nữa từ chuồng này ra thì xác suất bắt được con gà trống là bao nhiêu?

A. $\frac{38}{105}$. **B.** $\frac{19}{105}$. **C.** $\frac{37}{420}$. **D.** $\frac{37}{210}$.

Lời giải

Gọi A_1 là biến cố “Bắt được con trống ở chuồng gà thứ nhất”

Gọi B_1 là biến cố “Bắt được con mái ở chuồng gà thứ nhất”

Gọi A_2 là biến cố “Bắt được con trống ở chuồng gà thứ hai”

Gọi B_2 là biến cố “Bắt được con mái ở chuồng gà thứ hai”

Gọi H là biến cố “Bắt được con gà trống ở chuồng thứ ba”

Ta có $P(A_1) = \frac{1}{10}$; $P(B_1) = \frac{9}{10}$; $P(A_2) = \frac{5}{6}$; $P(B_2) = \frac{1}{6}$

Xác suất bắt được 2 con trống từ hai chuồng thứ nhất và chuồng thứ hai là $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{12}$ (việc bắt gà ở mỗi chuồng là độc lập với nhau)

Xác suất bắt được 2 con mái từ hai chuồng thứ nhất và chuồng thứ hai là

$P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{20}$ (việc bắt gà ở mỗi chuồng là độc lập với nhau)

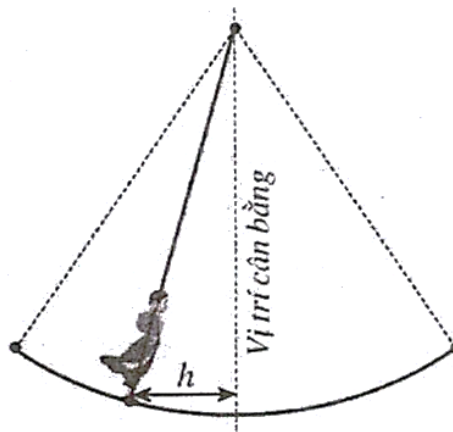
Xác suất bắt được 1 con mái và một con gà trống từ chuồng thứ nhất và chuồng thứ hai là

$$P(A_1 B_2) + P(B_1 A_2) = 1 - P(B_1 B_2) - P(A_1 A_2) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{3}{20} = \frac{23}{30}$$

Xác suất để bắt được con gà trống từ chuồng thứ ba là

$$P(H) = P(HA_1 A_2) + P(HB_1 B_2) + P(HA_1 B_2) + P(HA_2 B_1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{1}{12} + \frac{6}{14} \cdot \frac{3}{20} + \frac{5}{14} \cdot \frac{23}{30} = \frac{38}{105}.$$

Câu 4. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng mấy lần?



A. 6.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 5. Cho tam giác MNP biết $M(-6; 3)$ và N, P là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $\Delta_1: x - y + 9 = 0$, $\Delta_2: 2x + y + 1 = 0$. Gọi $Q(2; -1)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{NQ} = 3\overrightarrow{NP}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP ?

A. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

B. $(x + 4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$.

C. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 2$.

D. $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = \frac{5}{2}$.

Lời giải

$N \in \Delta_1: x - y + 9 = 0 \Rightarrow N(x_N; x_N + 9); P \in \Delta_2: 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow P(x_P; -2x_P - 1)$.

Mà $\overrightarrow{NQ} = 3\overrightarrow{NP} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x_N = 3(x_P - x_N) \\ -1 - y_N = 3(y_P - y_N) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_N - 3x_P = -2 \\ 2x_N + 6x_P = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -4 \\ x_P = -2 \end{cases}$

Với $x_N = -4 \Rightarrow y_N = 5 \Rightarrow N(-4; 5); x_P = -2 \Rightarrow y_P = 3 \Rightarrow P(-2; 3)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (2; 2) \\ \overrightarrow{NP} = (2; -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{NP}$ hay ΔMNP vuông tại N .

Gọi E là trung điểm $MP \Rightarrow E(-4; 3)$.

Suy ra, đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có tâm $E(-4; 3)$ và bán kính $R = \frac{MP}{2} = 2$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP : $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Câu 6. Lớp 12A₁ có 45 học sinh gồm 23 bạn nữ và 22 bạn nam, trong đó bạn Việt (nam) làm lớp trưởng. Sắp xếp học sinh để chụp ảnh kỉ yếu trong đó có 21 bạn đứng hàng trước trong đó có bạn Việt đứng ở chính giữa và 24 bạn đứng hàng sau. Số cách sắp xếp là

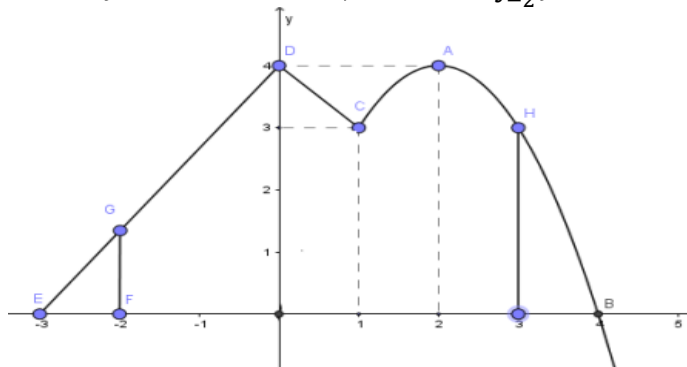
A. $A_{45}^{20} \cdot 24!$.

B. $C_{45}^{21} \cdot 24!$.

C. $C_{45}^{20} \cdot 24!$.

D. $A_{44}^{20} \cdot 24!$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$ như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tính $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$.



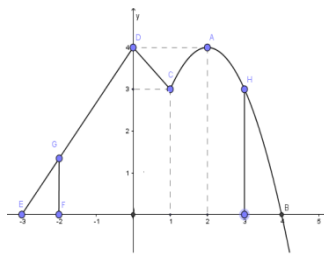
A. $I = \frac{53}{3}$.

B. $I = \frac{97}{6}$.

C. $I = \frac{43}{2}$.

D. $I = \frac{95}{6}$.

Lời giải



Ta có $I = \int_{-2}^3 f(x)dx$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ_1 , Δ_2 , Parabol (P), $x = -2$, $x = 3$.

Với Δ_1 qua $E(-3; 0)$, $D(0; 4)$ nên có pt: $y = \frac{4}{3}x + 4$; Δ_2 qua $D(0; 4)$, $C(1; 3)$ nên có phương trình:

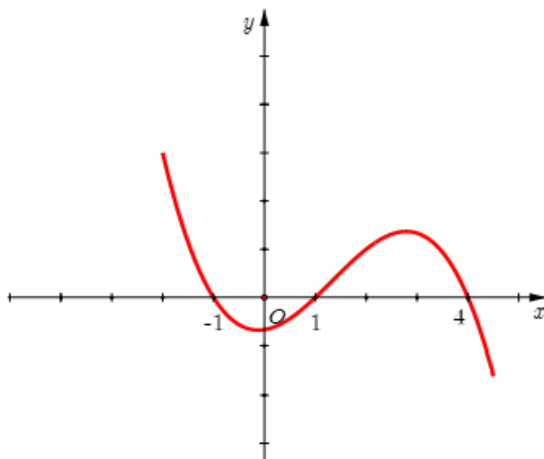
$$y = -x + 4; (P): y = ax^2 + bx + c \text{ qua } C(1; 3) \text{ và có đỉnh } A(2; 4) \text{ nên } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-2}^3 f(x)dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{4}{3}x + 4\right) dx + \int_0^1 (-x + 4)dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x)dx = \frac{97}{6}.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng



A. $(-2; -1)$.

B. $(0; 2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 9. Một quả bóng cao su từ độ cao 15 (m) so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng hai phần năm độ cao lần rơi ngay trước đó. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng:

A. 35 (m).

B. 50 (m).

C. 30 (m).

D. 25 (m).

Lời giải

Chọn A

Ta có quãng đường bóng bay bằng tổng quãng đường bóng nảy lên và quãng đường bóng rơi xuống. Vì mỗi lần bóng nảy lên bằng $\frac{2}{5}$ lần nảy trước nên ta có tổng quãng đường bóng nảy lên là

$$S_1 = 15 \cdot \frac{2}{5} + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ và công bội $q = \frac{2}{5}$.

$$\text{Suy ra } S_1 = 15 \cdot \frac{2}{5} + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots = \frac{6}{1 - \frac{2}{5}} = 10.$$

Tổng quãng đường bóng rơi xuống bằng khoảng cách độ cao ban đầu và tổng quãng đường bóng nảy lên nên là $S_2 = 15 + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 15$ và công bội $q = \frac{2}{5}$.

$$\text{Suy ra } S_2 = 15 + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + \dots = \frac{15}{1 - \frac{2}{5}} = 25.$$

Vậy tổng quãng đường bóng bay là $S_1 + S_2 = 10 + 25 = 35$ (m).

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD , biết hai mặt phẳng (SBI) , (SCI) cùng vuông góc với đáy và $SI = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) , $(ABCD)$.

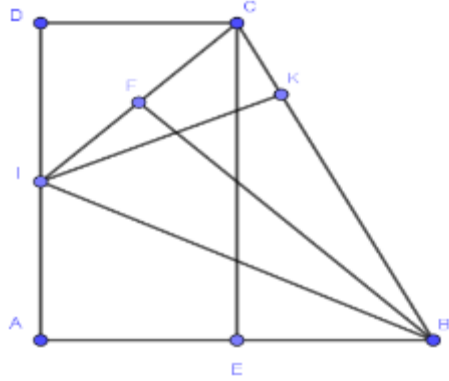
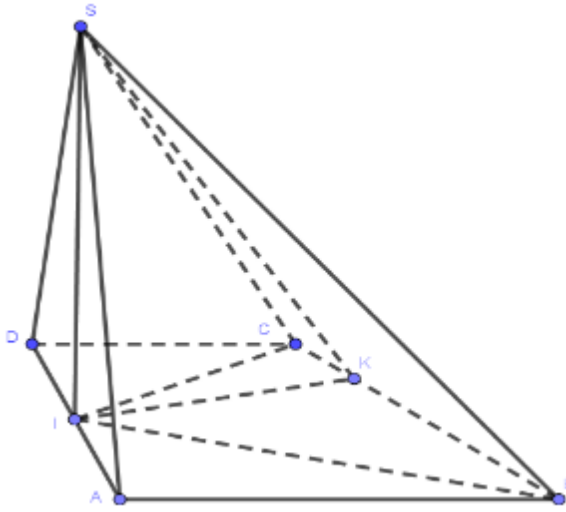
A. 60° .

B. 30° .

C. 36° .

D. 45° .

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AB .

Đặt $\alpha = ((SBC), (ABCD)) \Leftrightarrow \alpha = ((SBC), (IBC))$.

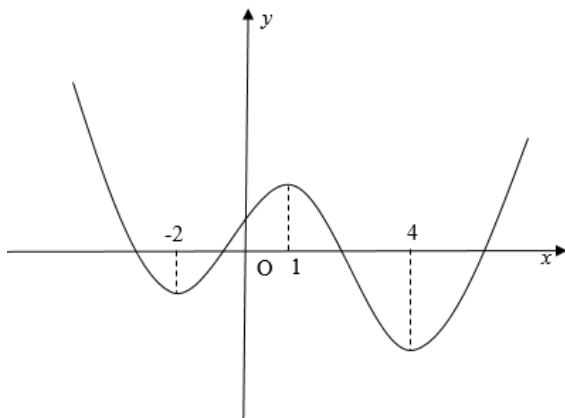
Ta có $CE = 2a, EB = a \Rightarrow BC = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$

Ta có $S_{\triangle IBC} = S_{ABCD} - (S_{\triangle ICD} + S_{\triangle IAB}) = 3a^2 - \left(\frac{a^2}{2} + a^2\right) = \frac{3a^2}{2}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} BC \cdot IK = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} a\sqrt{5} \cdot IK = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow IK = \frac{3a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{SI}{IK} = \frac{\frac{3a\sqrt{15}}{5}}{\frac{3a}{\sqrt{5}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2+2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

A1.Q1.T0

Lời giải

Ta có $g'(x) = (e^x - x - 1)f'\left(e^x - \frac{x^2+2x}{2}\right)$

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - x - 1)f'\left(e^x - \frac{x^2+2x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 \\ f'\left(e^x - \frac{x^2+2x}{2}\right) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 & (1) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = -2 & (2) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = 1 & (3) \\ e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} = 4 & (4) \end{cases}$$

Ta xét $u(x) = e^x - x - 1$; $v(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}$

Ta có $u'(x) = e^x - 1$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy $u(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và phương trình (1) có nghiệm kép

Xét hàm số $v(x) = e^x - \frac{x^2 + 2x}{2} \Rightarrow v'(x) = e^x - x - 1$

Ta có $v'(x) = e^x - x - 1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v'(x)$	$+$	0	$+$
$v(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Câu 12. Phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có điểm biểu diễn các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ trên đường tròn lượng giác là một đa giác. Tính diện tích đa giác đó.

A. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{3+2\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Ta có $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

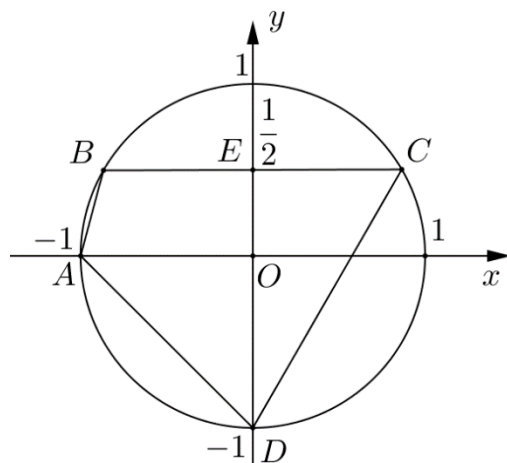
$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2x - \frac{3\pi}{4} + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \pi - m2\pi \end{cases}, (k, m \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm $x = \pi - m2\pi$ có một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ là $x = \pi$.

Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \in (0; 2\pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \pi$ và $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ta có điểm biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác như sau:



Các nghiệm $x = \pi, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$ lần lượt được biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi các điểm A, B, C, D .

Diện tích tứ giác $ABCD$ là $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{ECD} + S_{ABEO}$

$$\text{với } S_{AOD} = \frac{1}{2} OA \cdot OD = \frac{1}{2}; \quad S_{ECD} = \frac{1}{2} EC \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}; \quad S_{ABEO} = \frac{BE+OA}{2} \cdot OE = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{ECD} + S_{ABEO} = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{2+\sqrt{3}}{8} = \frac{3+2\sqrt{3}}{4}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai, gồm 4 câu, tổng 4,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một mô hình kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 12 cm và chiều cao bằng 16 cm . Hãy cho biết tính đúng, sai của các mệnh đề sau

a) $AB \parallel (SCD)$.

b) Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt SC tại N . Thể tích của khối chóp $S.ABNM$ bằng $426,67\text{ cm}^3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

c) Góc nhị diện $[S, BC, D]$ có độ lớn bằng $69^\circ 26'$ (kết quả làm tròn đến phút).

d) Khoảng cách giữa AD và mặt phẳng (SBC) bằng $11,23\text{ cm}$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $(-\frac{4}{3}; 0)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$.

a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ bằng $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

b) Điểm $x = -1$ là một điểm cực tiểu của hàm số.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $[-2; -\frac{5}{4}]$.

L giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$. Mệnh đề đúng.

b) Vì trên khoảng $(-\frac{4}{3}; 0)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $a > 0$. Mệnh đề sai.

c) Ta có $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

Theo trên, hàm số đạt cực đại tại $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2$.

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (đều là các nghiệm đơn)}$$

Mệnh đề sai.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $[-2; -\frac{5}{4}]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (đều là các nghiệm đơn).}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$				CD		$+\infty$
				CT		CT	

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Mệnh đề đúng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, chỉ ra mệnh đề đúng, mệnh đề sai.

a) $\int_0^2 (3x^2 - 2e^x) dx = 6 - 2e^2$.

b) Nước chảy từ đáy của một bồn chứa với tốc độ $k(t) = 250 - 6t$ (lít/phút), trong đó $0 \leq t \leq 45$. Lượng nước chảy ra khỏi bồn chứa trong 10 phút đầu tiên bằng 2200 (lít).

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \cot^2 x) dx = a - \frac{b}{c}\sqrt{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}, c \neq 0$ và $\frac{b}{c}$ tối giản thì $a + b + c = 9$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos^2 x - \sin x \cos x| dx = a + b\pi - c\sqrt{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thì $a - c + b = \frac{5}{6}$.

Lời giải

(a). SAI

$$\int_0^2 (3x^2 - 2e^x) dx = 3 \int_0^2 x^2 dx - 2 \int_0^2 e^x dx = x^3 \Big|_0^2 - 2e^x \Big|_0^2 = 8 - (2e^2 - 2) = 10 - 2e^2.$$

(b). ĐÚNG

Lượng nước chảy ra khỏi bồn chứa trong 10 phút đầu tiên là

$$V = \int_0^{10} k(t) dt = \int_0^{10} (250 - 6t) dt = (250t - 3t^2) \Big|_0^{10} = 2200 \text{ (lít)}.$$

(c). ĐÚNG

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \cot^2 x) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - \frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= (\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}. \text{ Do đó } a + b + c = 9. \end{aligned}$$

(d). SAI

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos^2 x - \sin x \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (|\cos x| \cdot |\cos x - \sin x|) dx$$

Ta có $\cos x > 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ và phương trình $\cos x - \sin x = 0$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ trên đoạn

$$\left[0; \frac{\pi}{3}\right].$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{3}} (|\cos x| \cdot |\cos x - \sin x|) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x \cdot (\cos x - \sin x)] dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\cos x \cdot (\cos x - \sin x)] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin x \cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 x - \sin x \cos x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x - \sin 2x) dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ((1 + \cos 2x - \sin 2x)) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{5}{8} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

Do đó $a = \frac{5}{8}, b = \frac{1}{12}, c = \frac{1}{8} \Rightarrow a - c + b = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Câu 4. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 27 người thích chơi bóng bàn, 25 người thích chơi cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để người đó thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông không vượt quá 100%.
b) Xác suất để người đó thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng bàn ít nhất là 25%.
c) Xác suất để người đó không thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông ít nhất là 2,5%.
d) Xác suất để người đó không thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông nhiều nhất là 25%.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Người đó thích chơi bóng bàn"; B là biến cố: "Người đó thích chơi cầu lông".
Theo bài ra ta có: $n(A) = 27, n(B) = 25$.

Gọi $x = n(\overline{AB}), y = n(AB), z = n(\overline{AB}), t = n(\overline{AB})$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ y + z = 25 \\ x + y + z + t = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - t = 12 \\ x + y = 27 \\ y + z = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \leq y \leq 25 \\ 0 \leq t \leq 25 - 12 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12}{40} \leq P(AB) \leq \frac{25}{40} \\ 0 \leq P(\overline{AB}) \leq \frac{13}{40} \end{cases} \text{Biến cố}$$

đối của biến cố $A \cup B$: "Người đó thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông" là biến cố $\overline{AB}$: "Người đó không thích chơi cầu lông và bóng bàn".

Ta có: $P(A) = \frac{27}{40}; P(B) = \frac{25}{40}$. Vậy $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{AB}) \leq 1$.

Vậy **(a) ĐÚNG**.

Ta cần tính $P(A \cdot B)$.

$$\text{Ta có: } P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{27}{40} + \frac{25}{40} - [1 - P(\overline{AB})] = \frac{12}{40} + P(\overline{AB}) \geq \frac{12}{40} = 30\%.$$

Vậy **(b) SAI**. Ta cần tính $P(\overline{AB})$.

$$\text{Ta có: } P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = P(AB) - \frac{12}{40} \geq 0.$$

Vậy **(c) SAI**. Ta cần tính $P(\overline{AB})$.

$$\text{Ta có: } P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = P(AB) - \frac{12}{40} \leq \frac{25}{40} - \frac{12}{40} = \frac{13}{40} = 32,5\%$$

Vậy **(d) SAI**.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn, gồm 6 câu, tổng 3,0 điểm (mỗi câu 0,5 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen; hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai

viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi, giả sử viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I (làm tròn 2 chữ số thập phân).

<key=0,84>

Lời giải

Trả lời: 0,84

Xét các biến cố

A: “Viên bi lấy ra là viên màu trắng”.

B_1 : “2 viên bi lấy ra từ hộp I có màu trắng”.

B_2 : “2 viên bi lấy ra từ hộp I có màu đen”.

B_3 : “2 viên bi lấy ra từ hộp I có cả hai màu đen trắng”.

Ta có

$$P(B_1) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}; P(B_2) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}; P(B_3) = \frac{C_5^1 \cdot C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{9}.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{C_6^2}{C_{12}^2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{C_7^2}{C_{12}^2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{191}{594}$$

Từ yêu cầu, ta cần tìm $P(B_1|A) + P(B_3|A)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$P(B_1|A) + P(B_3|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} + \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{14}{33} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{191}{594}} + \frac{\frac{7}{22} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{191}{594}} = \frac{161}{191} \approx 0,84.$$

Câu 2.

Một công ty, trong một tháng cần sản xuất ít nhất 12 viên kim cương to và 9 viên kim cương nhỏ. Từ một tấn các bon loại 1 (giá 100 triệu đồng) có thể chiết xuất được 5 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ, từ một tấn Cacbon loại 2 (giá 40 triệu đồng) có thể chiết xuất được 2 viên kim cương to và 3 viên kim cương nhỏ. Mỗi viên kim cương to giá 20 triệu đồng, mỗi viên kim cương to giá 10 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng công ty lãi được nhiều nhất bao nhiêu triệu đồng? Biết mỗi tháng chỉ sử dụng tối đa 4 tấn Cacbon mỗi loại và tổng số tiền mua Cacbon không vượt quá 500 triệu đồng.

<key=222>

Lời giải

Trả lời: 222 tr

Gọi x, y (tấn) lần lượt là số tấn Cacbon loại 1 và loại 2 sử dụng mỗi tháng,

Số viên kim cương loại to là $5x + 2y$

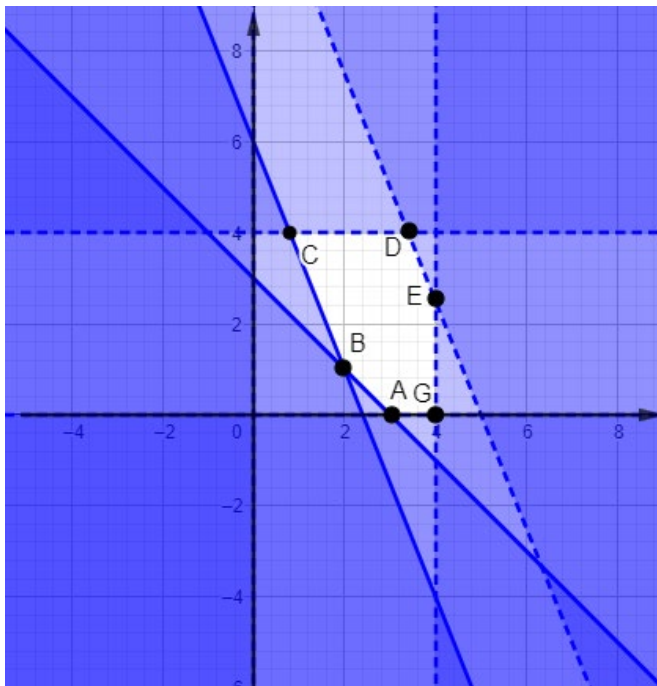
Số viên kim cương loại nhỏ là $3x + 3y$

Tổng số tiền mua Cacbon là $100x + 40y$

Số tiền thu vào từ bán kim cương là $20(5x + 2y) + 10(3x + 3y) = 130x + 70y$

Số tiền lãi mỗi tháng là $f(x; y) = 30x + 30y$

$$\text{Ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 4 \\ 100x + 40y \leq 500 \\ 5x + 2y \geq 12 \\ 3x + 3y \geq 9 \end{cases}$$



Miền nghiệm của bất phương trình là ngũ giác $ABCDEG$, trong đó tọa độ các đỉnh là $A(3; 0)$, $B(2; 1)$, $C(\frac{4}{5}; 4)$, $D(\frac{17}{5}; 4)$, $E(4; \frac{5}{2})$, $G(4; 0)$

Tại điểm $D(\frac{17}{5}; 4)$ ta có $f(\frac{17}{5}; 4) = 222$ là giá trị lớn nhất, vậy mỗi tháng công ty lãi nhất là 222 triệu

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho AB là ngắn nhất. Khi đó độ dài đoạn thẳng AB^2 bằng bao nhiêu?

<key=27>

Lời giải

Do d cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B ta có $A(-1+u; -2+2u; u)$, $B(2+2v; 1+v; 1+v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3+2v-u; 3+v-2u; 1+v-u)$$

$$\text{Có } (P): x + y - 2z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1; 1; -2).$$

Đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow 3+2v-u+3+v-2u-2-2v+2u=0 \Leftrightarrow u=v+4.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (v-1; -v-5; -3)$$

$$\Rightarrow AB^2 = (v-1)^2 + (-v-5)^2 + 9 = 2v^2 + 8v + 35 \geq 27 \forall v \in \mathbb{R}; AB^2 = 27 \text{ khi } v = -2.$$

Suy ra AB là ngắn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi $v = -2, u = 2$.

Câu 4. Một khách sạn có 60 phòng. Chủ khách sạn nhận thấy nếu cho thuê mỗi phòng với giá 500.000 đồng/ ngày thì tất cả các phòng đều được thuê hết và cứ tăng giá thêm 50.000 đồng một phòng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi chủ khách sạn nên cho thuê mỗi phòng với giá bao nhiêu tiền một ngày để tổng doanh thu một ngày là lớn nhất?

<key=1000>

Lời giải

Gọi giá tiền mà chủ khách sạn cho thuê một phòng là x (nghìn đồng). ($500 \leq x$)

Vì cứ tăng giá thêm 50.000 đồng một phòng thì có thêm 2 phòng trống nên số phòng được thuê là:

$$60 - \frac{x-500}{50} \cdot 2 = 80 - \frac{x}{25} \text{ (phòng)}.$$

Khi đó tổng doanh thu tương ứng trong 1 ngày là: $x\left(80 - \frac{x}{25}\right) = 80x - \frac{x^2}{25}$ (nghìn đồng).

Đặt $f(x) = 80x - \frac{x^2}{25}$. Ta có:

$$f'(x) = 80 - \frac{2x}{25} = 0 \Leftrightarrow x = 1000.$$

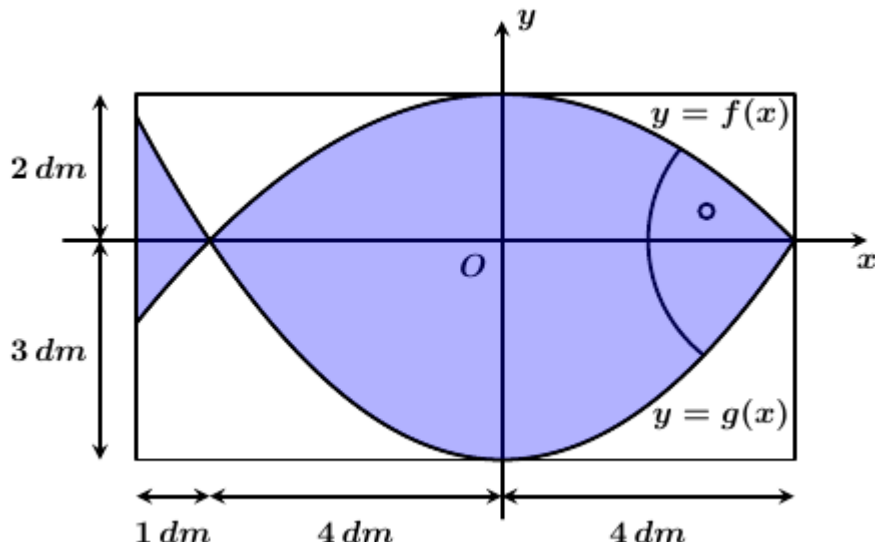
Vì $f(x)$ là tam thức bậc hai có hệ số cao nhất âm nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1000$.

Vậy để tổng doanh thu là lớn nhất thì chủ khách sạn nên cho thuê phòng với giá 1000 (nghìn đồng) một ngày (tức 1 triệu đồng một ngày).

Câu trả lời là: 1000 nghìn đồng.

Câu 5.

Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật có chiều dài 9 dm và chiều rộng 5 dm, người ta thiết kế một logo hình con cá. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét), sau đó logo được sơn màu xanh với chi phí 20 000 đồng/ dm^2 ; phần còn lại sơn màu trắng với chi phí 10 000 đồng/ dm^2 .



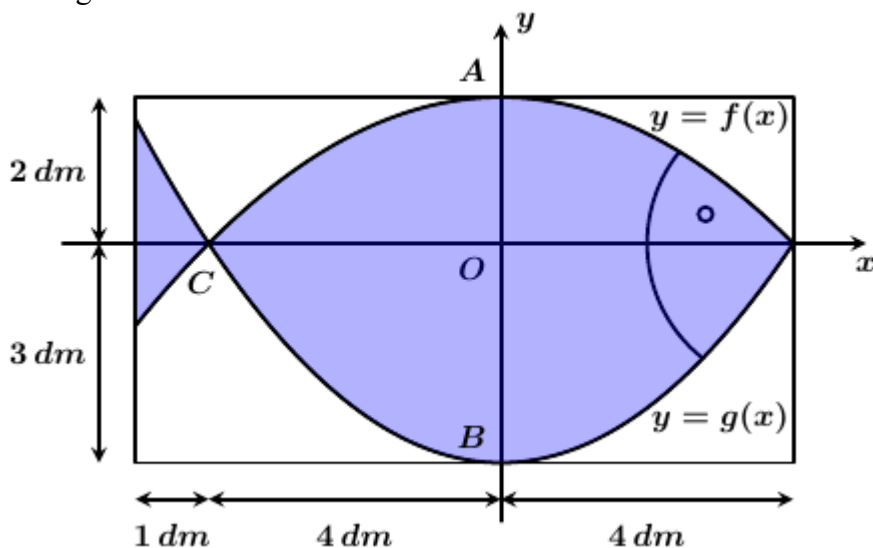
Số tiền cần dùng để trang trí bảng gỗ trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)

<key=730>

Lời giải

Đáp án: 730 nghìn đồng.

Phân giải chi tiết



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

+ Parabol $y = f(x)$ có đỉnh là $A(0; 2)$ nên $y = f(x) = ax^2 + 2$

Mặt khác, $C(-4; 0)$ thuộc parabol $y = f(x)$ nên $y = f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$

+ Parabol $y = g(x)$ có đỉnh là $B(0; -3)$ nên $y = g(x) = bx^2 - 3$

Mặt khác, $C(-4;0)$ thuộc parabol $y = g(x)$ nên $y = g(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$

+ Diện tích logo hình con cá là: $S_1 = \int_{-5}^4 |f(x) - g(x)| dx = \frac{1345}{48} (dm^2)$

+ Diện tích phần được sơn màu trắng là: $S_2 = 9.5 - S_1 = \frac{815}{48} (dm^2)$

+ Chi phí để trang trí là: $20\,000.S_1 + 10\,000.S_2 \approx 730\,000$ (đồng).

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Lấy $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giá trị của biểu thức $K = a + b + c$ là

<key=-5>

Lời giải

Đáp án: -5

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$.

Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot (-1) - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 > R$. Suy ra mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung. Từ đó, điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách nhỏ nhất hoặc lớn nhất tới mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng qua I và vuông góc với (P) .

Trước hết ta lập phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P) .

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

Vì $d \perp (P)$ nên nhận $\vec{n} = (2; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương.

Từ đó d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ với $(t \in \mathbb{R})$.

Ta tìm giao điểm của d và (S) . Xét hệ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ (1 + 2t)^2 + (-2 - t)^2 + (-1 + 2t)^2 - 2(1 + 2t) + 4(-2 - t) + 2(-1 + 2t) - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ 9t^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 3 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$. Suy ra có hai giao điểm là $A(3; -3; 1)$ và $B(-1; -1; -3)$.

Ta có: $d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - (-3) + 2 \cdot 1 - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1$; $d(B, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - (-1) + 2 \cdot (-3) - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 7$.

Suy ra $M \equiv B(-1; -1; -3)$. Từ đó $a = -1$; $b = -1$; $c = -3$.

Vậy $K = -5$.

----- HẾT -----

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>