

ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC

TÀI LIỆU LUYỆN THI 2026 – 2027



PHẦN II

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC NỀN TẢNG 11

Hệ thống toàn diện kiến thức trọng tâm lớp 11
Phương pháp giải nhanh và tư duy logic ĐGNL mới nhất
Kho câu hỏi thực chiến phân hóa theo ma trận đề thi

GV: TRẦN BA SAO

MỤC LỤC

PHẦN II: TRỌNG TÂM KIẾN THỨC NỀN TẢNG 11

CHUYÊN ĐỀ 1: LƯỢNG GIÁC	Trang 1
1. Các công thức lượng giác	1
2. Nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản	5
3. Các bài toán thực tế lượng giác	10
CHUYÊN ĐỀ 2: CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN	Trang 16
1. Cấp số cộng	16
2. Cấp số nhân	21
3. Cấp số nhân lùi vô hạn	25
4. Bài toán thực tế ứng dụng	28
CHUYÊN ĐỀ 3: GIỚI HẠN	Trang 34
1. Tính giới hạn dãy số	34
2. Tính giới hạn hàm số	38
3. Hàm số liên tục	42
4. Quy tắc L'Hôpital	45
5. Các bài toán nâng cao chứa tham số	47
CHUYÊN ĐỀ 4: HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT	Trang 52
1. Công thức lũy thừa - logarit	52
2. Phương trình mũ và logarit	57
3. Bất phương trình mũ và logarit	62
CHUYÊN ĐỀ 5: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN	Trang 69
Giải bằng phương pháp thông thường và tọa độ hóa	69
CHUYÊN ĐỀ 6: THỐNG KÊ VÀ PHÂN TÍCH SỐ LIỆU	Trang 81
1. Phân biệt thống kê ghép nhóm và không ghép nhóm	81
2. Xử lý dạng toán phân tích số liệu	82
CHUYÊN ĐỀ 7: ĐẠO HÀM	Trang 93
1. Các công thức đạo hàm	93
2. Phương trình tiếp tuyến và ứng dụng vật lí của đạo hàm	97
3. Phương trình vi phân	101

CHUYÊN ĐỀ 1: LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

💡 Hệ thống công thức lượng giác nền tảng

- Công thức cơ bản:**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right); \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi).$$

- Hệ thức mở rộng:** $\tan x \cdot \cot x = 1; \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$

- Công thức cộng:**

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b; \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

- Công thức nhân đôi:**

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

- Công thức biến đổi tích thành tổng:**

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]; \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)];$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)].$$

- Công thức biến đổi tổng thành tích:**

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}; \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2};$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}; \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

👉 Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác

Cho $\sin x = \frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính giá trị của $\tan 2x$ và $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

.....

.....

.....

👉 Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

Rút gọn biểu thức lượng giác sau: $A = \frac{\sin 2x - \sin x}{1 - \cos x + \cos 2x}.$

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Chứng minh đẳng thức

Chứng minh đẳng thức lượng giác: $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ (với điều kiện biểu thức có nghĩa).

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tính giá trị qua biến trung gian

Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$.

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Công thức lượng giác

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Giá trị của $\sin x$ bằng

- A. $\frac{5}{13}$. B. $-\frac{5}{13}$. C. $\frac{1}{13}$. D. $-\frac{1}{13}$.

Câu 2: Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. B. $\sin(x + \pi) = \sin x$.
C. $\cos(\pi - x) = -\cos x$. D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $M = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ta được

- A. 0. B. $2 \sin x$. C. $\sqrt{2} \cos x$. D. $-\sqrt{2} \sin x$.

Câu 4: Cho $\tan x = 3$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ bằng

- A. 2. B. 1. C. -2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 5: Biểu thức $P = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ bằng biểu thức nào dưới đây?

- A. $\cos x$. B. $\sin 3x$. C. $\cos 3x$. D. $\sin x$.

Câu 6: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 1] Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$.
Tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác có thể vuông hoặc cân.

Câu 7: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Cho $\tan x = a$.

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{4 + 6 \cos^2 x}{3 \sin^2 x + 1}$.

- A. $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$. B. $\frac{4a^2 + 6}{3a^2 + 1}$. C. $\frac{4a^2 + 10}{4a^2 + 1}$. D. $\frac{a^2}{2}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho $\cos x = \frac{1}{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$.

.....
.....
.....

Bài 2: Cho $\tan x = -2$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin x \cos x}$.

.....
.....
.....

Bài 3: Rút gọn biểu thức: $C = \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sin 2x + 2 \sin x}$.

.....
.....
.....

Bài 4: Rút gọn biểu thức: $D = \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

.....
.....
.....
.....

Bài 5: Chứng minh đẳng thức: $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$.

.....

.....

.....

.....

Bài 6: Chứng minh đẳng thức: $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

.....

.....

.....

.....

Bài 7: Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \sin 2x$ và $F = \sin^3 x + \cos^3 x$.

.....

.....

.....

.....

Bài 8: Rút gọn biểu thức: $G = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} - \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 9: Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$H = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

.....

.....

.....

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	2. B	3. A	4. A	5. A	6. B	7. C
------	------	------	------	------	------	------

DẠNG 2. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Hệ thống công thức nghiệm

Ký hiệu $\square$ đại diện cho giá trị góc (đơn vị radian hoặc độ) tìm được trực tiếp từ máy tính cầm tay khi bấm các phím chức năng giải ngược góc tương ứng (SHIFT SIN, SHIFT COS, SHIFT TAN).

$$\bullet \sin x = m \iff \begin{cases} x = \square + k2\pi \\ x = \pi - \square + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{với } \square \text{ thỏa mãn } \sin \square = m.$$

$$\bullet \cos x = m \iff x = \pm \square + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{với } \square \text{ thỏa mãn } \cos \square = m.$$

$$\bullet \tan x = m \iff x = \square + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{với } \square \text{ thỏa mãn } \tan \square = m.$$

$$\bullet \cot x = m \iff x = \square + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{với } \square \text{ thỏa mãn } \cot \square = m.$$

• Các trường hợp đặc biệt tại điểm ngọn đường tròn:

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi$$

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos x = 1 \iff x = k2\pi$$

$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos x = -1 \iff x = \pi + k2\pi$$

Ví dụ 5. Dạng phương trình cơ bản $\sin x = a, \cos x = a$

$$\text{Giải phương trình } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Dạng phương trình đặc biệt và mẫu góc độ

$$\text{Giải phương trình } \cos(3x + 15^\circ) = 0.$$

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Dạng hoán đổi hàm $\sin a = \cos b, \tan a = \cot b$

Giải phương trình $\sin 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Dạng nâng cao - Đặt nhân tử chung

Giải phương trình $\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9. Dạng nâng cao - Biến đổi bậc hai

Giải phương trình $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Phương trình lượng giác

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

B. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

D. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$. B. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$. C. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\}$.

Câu 3: Phương trình $\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 4: Nghiệm của phương trình $\sin 2x = \sin x$ là

A. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$.

B. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

C. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

D. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$.

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình $\cos^2 x = 1$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 6: Phương trình $\tan x \cdot \cot x = 1$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 7: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ bằng

A. π .

B. 2π .

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. 3π .

Câu 8: Phương trình $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x$ là

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 10: Phương trình $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ có họ nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.
 B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.
 C. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 11: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$?

- A. 4. B. 2. C. 6. D. 3.

Câu 12: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Số nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x \cdot (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1$ thuộc $[0; 2\pi]$ là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 0.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Giải phương trình: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

.....

Bài 2: Giải phương trình: $\cos(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

.....

Bài 3: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ trên khoảng $(-\pi; \pi)$.

.....

Bài 4: Giải phương trình hoán đổi hệ số hàm: $\sin 4x + \cos x = 0$.

.....

Bài 5: Giải phương trình: $\cos 2x - \cos x = 0$.

.....

Bài 6: Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ: $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$.

.....

.....

.....

Bài 7: Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình: $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 8: Giải phương trình điều kiện: $\tan 3x \cdot \cot 2x = 1$.

.....

.....

.....

Bài 9: Tìm nghiệm nguyên (đơn vị độ) của phương trình $\cos(2x - 10^\circ) = \frac{1}{2}$ thuộc khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$.

.....

.....

.....

.....

Bài 10: Giải phương trình nâng cao: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

.....

.....

.....

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	2. C	3. B	4. A	5. B	6. C
7. B	8. A	9. A	10. B	11. A	12. D

DẠNG 3. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 10. Ứng dụng chuyển động vòng quay

Một cabin của vòng quay Ferris có bán kính 40 m quay đều quanh trục. Tâm của vòng quay cách mặt đất 45 m. Chiều cao $h(t)$ (mét) của cabin tính theo thời gian t (giây) tính từ vị trí thấp nhất được cho bởi công thức $h(t) = 45 - 40 \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right)$. Hỏi trong một vòng quay đầu tiên, tại thời điểm nào cabin ở độ cao 65 m?

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11. Ứng dụng mô hình hóa khí hậu

Nhiệt độ trung bình ngày T ($^{\circ}\text{C}$) tại một thành phố được mô phỏng theo công thức $T = 25 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right)$, với t là số tháng trong năm ($1 \leq t \leq 12$). Tháng nào trong năm thành phố có nhiệt độ trung bình là 28°C ?

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Ứng dụng dao động của mực nước bến tàu

Độ sâu $d(t)$ (mét) của mực nước ở một cảng biển được tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày bởi công thức $d(t) = 10 + 6 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$. Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 13m để cập cảng an toàn. Tìm các thời điểm trong ngày (từ 0 giờ đến 24 giờ) tàu có thể vào cảng.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13. Ứng dụng dòng điện xoay chiều

Cường độ dòng điện chạy qua một mạch điện có biểu thức $i(t) = 4 \cos \left(100\pi t - \frac{\pi}{3} \right)$ (A), với t tính bằng giây. Xác định thời điểm đầu tiên kể từ $t = 0$ dòng điện triệt tiêu ($i = 0$).

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Bài tập rèn luyện tại lớp - Ứng dụng thực tế

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Chiều cao của mực nước thủy triều (mét) tại một bến tàu sau t giờ tính từ nửa đêm được cho bởi công thức $h(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) + 6$. Mực nước cao nhất đạt giá trị là bao nhiêu?

- A. 3 m. B. 6 m. C. 9 m. D. 12 m.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox theo phương trình li độ $x = 5 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi}{3} \right)$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Thời điểm đầu tiên vật đi qua vị trí cân bằng ($x = 0$) là

- A. $\frac{1}{12}$ s. B. $\frac{5}{12}$ s. C. $\frac{1}{6}$ s. D. $\frac{1}{4}$ s.

Câu 3: Huyết áp của một người biến thiên theo thời gian được cho bởi công thức $p(t) = 100 + 20 \sin(160\pi t)$ (mmHg), với t tính bằng phút. Chu kỳ đập của tim người này bằng bao nhiêu phần của giây?

- A. 0,75 s. B. 1 s. C. 0,6 s. D. 1,2 s.

Câu 4: Cường độ dòng điện xoay chiều tuân theo quy luật $i(t) = 2 \cos \left(100\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$ (A). Trong giây đầu tiên ($0 \leq t \leq 1$), dòng điện đạt giá trị bằng 0 bao nhiêu lần?

- A. 50 lần. B. 100 lần. C. 200 lần. D. 25 lần.

Câu 5: Một âm thanh tạo ra áp suất không khí biến thiên $P(t) = 0,8 \sin(440\pi t)$ (Pa). Số lần áp suất đạt giá trị cực đại trong mỗi giây là

- A. 220 lần. B. 440 lần. C. 880 lần. D. 110 lần.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Một chiếc đồng hồ có kim phút dài 10 cm. Trục kim đặt ở gốc tọa độ O . Viết công thức tung độ $y(t)$ của đầu mút kim phút theo thời gian t (phút) nếu mốc $t = 0$ bắt đầu lúc đúng 12 giờ trưa.

.....

Bài 2: Một con lắc dao động thẳng đứng với phương trình li độ $y = 4 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm). Xác định các thời điểm vật ở vị trí cao nhất ($y = 4$ cm) trong 5 giây đầu tiên.

.....

Bài 3: Cường độ ánh sáng mặt trời R tại một vùng đất được tính bằng công thức $R = 400 + 120 \cos\left(\frac{\pi(t-6)}{6}\right)$ (W/m^2) với t là số giờ tính từ nửa đêm. Tìm khoảng thời gian trong ngày ($0 \leq t \leq 24$) mà cường độ ánh sáng lớn hơn hoặc bằng $460 W/m^2$.

.....

Bài 4: Áp suất không khí P (mmHg) tại một trạm khí tượng biến thiên theo ngày được biểu diễn bởi $P(d) = 760 + 15 \cos\left(\frac{2\pi(d-30)}{365}\right)$ với d là ngày thứ mấy trong năm. Hãy tính xem áp suất đạt giá trị thấp nhất vào ngày thứ mấy của năm?

.....

Bài 5: Một sợi dây dài tạo ra sóng hình sin lan truyền dọc sợi dây. Phương trình sóng tại điểm đầu dây là $u = 3 \sin(4\pi t)$ (cm). Một điểm cách đầu dây một khoảng có phương trình là $u_M = 3 \sin\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$. Tìm thời điểm đầu tiên điểm M đạt li độ cực đại.

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. C	2. B	3. A	4. B	5. A
------	------	------	------	------

BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\sin x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 2x$.

- A. $\frac{7}{9}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $-\frac{7}{9}$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin 2x - 4$ bằng

- A. -1 . B. -7 . C. 3 . D. 7 .

Câu 4: Biến đổi biểu thức $P = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ về dạng tích ta được:

- A. $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. B. $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
C. $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. D. $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Câu 5: Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$.

- A. $\frac{8}{5}$. B. $\frac{6}{5}$. C. 2 . D. $\frac{4}{5}$.

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ là

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 0 .

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\cos 2x = \cos x$ là

- A. $x = k2\pi$. B. $x = \frac{k2\pi}{3}$.
C. $x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{k2\pi}{3}$. D. $x = k\pi$.

Câu 8: Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = -\frac{2}{3}$. B. $\cos x = \pi$.
C. $\tan x = 100$. D. $\cot x = -0,1$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\tan \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 10: Tập nghiệm của phương trình $\sin x \cdot (\cos x + 2) = 0$ là

- A. $\{k2\pi\}$. B. $\{k\pi\}$. C. $\emptyset$. D. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

Câu 11: Bánh xe nước đường kính 4 m quay đều. Khoảng cách h (m) từ chiếc gàu đến mặt nước tuân theo $h(t) = 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right)$ (t tính bằng giây). Gàu đạt vị trí cao nhất lần đầu tiên tại:

- A. 5 s. B. 10 s. C. 2,5 s. D. 15 s.

Câu 12: Phương trình $2\cos^2 x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên nửa khoảng $[0; \pi)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 13: Rút gọn biểu thức $S = \sin(x + y) \cos y - \cos(x + y) \sin y$ được kết quả là

- A. $\sin(x + 2y)$. B. $\cos x$. C. $\sin x$. D. $\cos(x + 2y)$.

Câu 14: Biểu thức $\cos^4 x - \sin^4 x$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\cos 2x$. B. $\sin 2x$. C. 1. D. $\cos 4x$.

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\cot x = \sqrt{3}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\cos 2\alpha$ và $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 2: Rút gọn biểu thức lượng giác: $A = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

Bài 3: Chứng minh đẳng thức lượng giác: $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.

Bài 4: Giải phương trình lượng giác sau: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài 5: Giải phương trình lượng giác sau: $\tan(2x + 15^\circ) = \sqrt{3}$.

Bài 6: Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình: $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 7: Giải phương trình chứa tích: $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}$.

Bài 8: Giải phương trình tích bằng phương pháp đặt nhân tử chung: $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$.

Bài 9: Giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Bài 10: Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình: $\cos 3x = \cos x$.

Bài 11: Giải phương trình biến đổi hàm bổ sung: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$.

Bài 12: Mức nước h (m) ở kênh đào được mô tả bởi $h = 2,5 + 1,5 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ với t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Xác định thời điểm từ 0 đến 24 giờ mức nước đạt đỉnh cao nhất.

Bài 13: Một con lắc đơn chuyển động tạo góc lệch $\alpha(t) = 0,08 \cos(2\pi t)$ (rad) theo thời gian t (giây). Tìm thời điểm thứ 3 con lắc đi qua vị trí cân bằng tính từ lúc $t = 0$.

Bài 14: Một piston di chuyển trong xi lanh có khoảng cách tính bằng $x = 12 + 8 \sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm). Xác định thời điểm khoảng cách x đạt giá trị nhỏ nhất lần đầu tiên kể từ $t = 0$.

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh đẳng thức lượng giác hình học:

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{b}{a+c}.$$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. A	2. B	3. A	4. A	5. A	6. B	7. C	8. B
9. A	10. B	11. A	12. B	13. C	14. A	15. B	

CHUYÊN ĐỀ 2: CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

DẠNG 1. CẤP SỐ CỘNG

Tóm tắt kiến thức cốt lõi về Cấp số cộng

- Định nghĩa: $u_{n+1} = u_n + d$ (d : công sai, $n \in \mathbb{N}^*$).
- Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ ($n \geq 1$).
- Tính chất số hạng trung bình: $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ ($k \geq 2$).
- Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}$.

Ví dụ 1. Tìm công sai và số hạng tổng quát

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và số hạng thứ hai $u_2 = 7$.

- Tìm công sai d và viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Số 2027 có phải là một số hạng của cấp số cộng này không?

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Chứng minh một dãy số là một cấp số cộng

Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 2$ là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d .

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình tìm các yếu tố cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 16 \\ u_3 + u_6 = 22 \end{cases}$$

Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d . Từ đó tính tổng của 30 số hạng đầu tiên S_{30} .

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tìm tham số để ba số lập thành cấp số cộng

Tìm các giá trị của tham số x để ba số $x - 1$; $x + 3$; $3x + 1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Cấp số cộng

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $u_2 = 2$. Công sai d của cấp số cộng bằng

- A. $d = 5$. B. $d = -5$. C. $d = 1$. D. $d = -1$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng bằng

- A. $u_{10} = -28$. B. $u_{10} = -25$. C. $u_{10} = -27$. D. $u_{10} = -30$.

Câu 3: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

- A. $u_n = 2n + 1$. B. $u_n = 4 - 3n$.
C. $u_n = n^2 - 1$. D. $u_n = \frac{n+2}{3}$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và công sai $d = 4$. Biết $u_n = 81$, giá trị của n là

- A. $n = 19$. B. $n = 20$. C. $n = 21$. D. $n = 22$.

Câu 5: Cho ba số $-2; x; 10$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Giá trị của x bằng

- A. $x = 4$. B. $x = 6$. C. $x = 8$. D. $x = 3$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3n - 1$. Tính tổng 20 số hạng đầu tiên S_{20} .

- A. $S_{20} = 610$. B. $S_{20} = 590$. C. $S_{20} = 1220$. D. $S_{20} = 620$.

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$. Số hạng đầu u_1 bằng

- A. $u_1 = 1$. B. $u_1 = 2$. C. $u_1 = 3$. D. $u_1 = 4$.

Câu 8: Một cấp số cộng (u_n) có tổng 10 số hạng đầu tiên $S_{10} = 145$ và công sai $d = 3$. Số hạng đầu u_1 là

- A. $u_1 = 1$. B. $u_1 = 2$. C. $u_1 = -1$. D. $u_1 = 0$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của m để ba số $m; 2m - 1; 4m + 2$ lập thành một cấp số cộng.

- A. $m = -4$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

Câu 10: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_5 = 14$ và $u_3 + u_6 = 18$. Công sai d của dãy số này bằng

- A. $d = 2$. B. $d = 3$. C. $d = 1$. D. $d = 4$.

Câu 11: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Cho cấp số cộng có số hạng đầu bằng 1 và tổng 100 số hạng đầu tiên bằng 24850. Công sai của cấp số cộng trên là

- A. 7. B. 10. C. 15. D. 5.

Câu 12: (Sử dụng dữ liệu câu 11) Tính tổng $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}$.

- A. $\frac{4}{23}$. B. $\frac{49}{246}$. C. $\frac{9}{246}$. D. 123.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 4n$. Chứng minh dãy số là một cấp số cộng và tìm tổng 50 số hạng đầu tiên.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2: Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 + u_7 = 22 \\ u_3 + u_5 = 22 \end{cases}$

.....

.....

.....

Bài 3: Giữa hai số 4 và 28, hãy chèn thêm 5 số nữa để được một cấp số cộng có 7 số hạng. Xác định 5 số cần chèn đó.

.....

.....

.....

Bài 4: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn hệ điều kiện phức tạp: $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm u_1 và d .

.....

.....

.....

.....

Bài 5: Cho cấp số cộng có $u_5 + u_9 + u_{13} + u_{17} = 80$. Hãy tính tổng của 21 số hạng đầu tiên S_{21} của cấp số cộng này.

.....

.....

.....

Bài 6: Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_5 = 30$ và $S_{10} = 110$. Hãy tìm số hạng đầu u_1 và công sai d .

.....

.....

.....

Bài 7: Tìm giá trị của tham số m để phương trình bậc ba sau đây: $x^3 - 6x^2 + 11x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

.....

Bài 8: Tính tổng tất cả các số tự nhiên có hai chữ số và chia hết cho 3.

.....

Bài 9: Cho một tam giác vuông có độ dài ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng tỉ số giữa các cạnh của tam giác vuông này tuân theo tỉ lệ vàng thức tế là $3 : 4 : 5$.

.....

Bài 10: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + n$. Khảo sát xem dãy số này có phải là một cấp số cộng hay không? Tìm số hạng tổng quát u_n .

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. A	2. B	3. C	4. B	5. A	6. A	7. A	8. A	9. A	10. A	11. D	12. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------

DẠNG 2. CẤP SỐ NHÂN

Tóm tắt kiến thức cốt lõi về Cấp số nhân

- **Định nghĩa:** $u_{n+1} = u_n \cdot q$ (q : công bội, $n \in \mathbb{N}^*$).
- **Số hạng tổng quát:** $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ ($n \geq 1$).
- **Tính chất số hạng trung bình:** $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ ($k \geq 2$).
- **Tổng n số hạng đầu tiên:** $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$ ($q \neq 1$).

Ví dụ 5. Xác định các yếu tố cơ bản của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và số hạng thứ hai $u_2 = -6$.

- Tìm công bội q và số hạng tổng quát của cấp số nhân.
- Số -486 là số hạng thứ mấy của dãy số?

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình bằng phương pháp lập tỉ số

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$$

Xác định số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân này.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Tìm tham số để dãy số lập thành cấp số nhân

Tìm các giá trị thực của tham số x để ba số x ; $x + 2$; $x + 6$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Cấp số nhân

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$. Công bội q của cấp số nhân bằng

- A. $q = 2$. B. $q = 3$. C. $q = \frac{1}{2}$. D. $q = -2$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2$ và công bội $q = -3$. Số hạng thứ 4 của cấp số nhân bằng

- A. $u_4 = 54$. B. $u_4 = -54$. C. $u_4 = 18$. D. $u_4 = -162$.

Câu 3: Dãy số nào sau đây là một cấp số nhân?

- A. $u_n = 2n$. B. $u_n = 3^n$.
C. $u_n = n^3$. D. $u_n = 3n + 1$.

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 4 \cdot 5^{n-1}$. Số hạng đầu u_1 và công bội q bằng

- A. $u_1 = 4, q = 5$. B. $u_1 = 20, q = 5$.
C. $u_1 = 4, q = 1$. D. $u_1 = 1, q = 4$.

Câu 5: Cho ba số dương 2; y ; 32 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của y là

- A. $y = 8$. B. $y = 17$. C. $y = 16$. D. $y = 64$.

Câu 6: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và $q = 2$. Tổng 10 số hạng đầu tiên S_{10} bằng

- A. $S_{10} = 1023$. B. $S_{10} = 1024$. C. $S_{10} = 511$. D. $S_{10} = 2047$.

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_4 = 24$. Công bội q của cấp số nhân bằng

- A. $q = 2$. B. $q = -2$. C. $q = 8$. D. $q = 4$.

Câu 8: Biết rằng cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Số hạng $u_n = -\frac{1}{64}$ là số hạng thứ mấy?

- A. Thứ 6. B. Thứ 7. C. Thứ 5. D. Thứ 8.

Câu 9: Tìm các giá trị của x biết $x - 1$; x ; $x + 2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Công bội q của dãy số bằng

- A. $q = 2$. B. $q = 3$. C. $q = 4$. D. $q = 1$.

Câu 11: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Cho u_n là một cấp số nhân vô hạn với công bội dương có $u_6 = \frac{1}{8}, \frac{u_5 - u_1}{u_3 - u_1} = \frac{5}{4}$.

Tổng u_1 và công bội của cấp số nhân trên là

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{5}{4}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5 \cdot 2^n$. Chứng minh dãy số này là cấp số nhân. Xác định u_1, q và tổng S_8 .

.....

Bài 2: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$

.....

Bài 3: Giữa hai số 3 và 48, hãy chèn thêm 3 số thực dương nữa để tạo thành một cấp số nhân gồm 5 số hạng.

.....

Bài 4: Tìm ba số lập thành một cấp số nhân tăng dần, biết rằng tổng của ba số bằng 26 và tích của chúng bằng 216.

.....

Bài 5: Một tam giác có ba góc theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Tìm số đo ba góc của tam giác đó theo đơn vị độ.

.....

Bài 6: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình sau đây: $x^3 - 7x^2 + mx - 8 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân.

Bài 7: Tính tổng gồm 10 chữ số sau đây: $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{10 \text{ chữ số } 9}$.

Bài 8: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng có tổng bằng 15. Nếu ta cộng thêm lần lượt 1, 4, 19 vào ba số đó thì được một cấp số nhân mới. Tìm ba số a, b, c .

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. A	2. A	3. B	4. A	5. A	6. A	7. A	8. B	9. A	10. A	11. A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------

DẠNG 3. CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN



Công thức: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$. Tổng vô hạn các số hạng của cấp số nhân đó được tính bằng:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{u_1}{1-q}$$

Ví dụ 8. Tính tổng của dãy số đan dấu

Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau đây:

$$S = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \dots + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$$

.....

.....

.....

Ví dụ 9. Ứng dụng biến đổi số thập phân vô hạn tuần hoàn

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,212121\dots$ dưới dạng một phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 10.

Cho một hình vuông cạnh a . Người ta nối trung điểm các cạnh để tạo thành một hình vuông thứ hai, tiếp tục như thế với hình vuông thứ ba, thứ tư... Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: CSN lùi vô hạn

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = -2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ bằng

- A. $S = -4$. B. $S = -1$. C. $S = -2$. D. $S = -\frac{4}{3}$.

Câu 2: Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có tổng $S = 12$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$. Số hạng đầu u_1 bằng

- A. $u_1 = 18$. B. $u_1 = 6$. C. $u_1 = 8$. D. $u_1 = 24$.

Câu 3: Giá trị của tổng vô hạn $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 2 + \sqrt{2}$. B. $S = 2 - \sqrt{2}$. C. $S = \sqrt{2} + 1$. D. $S = 2\sqrt{2}$.

Câu 4: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 1,3333\dots$ được biểu diễn bằng phân số tối giản nào sau đây?

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{13}{10}$. C. $\frac{13}{9}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của công bội q để một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 3$ đạt tổng S lớn hơn 6.

- A. $\frac{1}{2} < q < 1$. B. $0 < q < \frac{1}{2}$.
C. $-1 < q < \frac{1}{2}$. D. $-1 < q < 1$.

Câu 6: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Cho u_n là một cấp số nhân vô hạn với công bội dương có $u_6 = \frac{1}{8}$, $\frac{u_5 - u_1}{u_3 - u_1} = \frac{5}{4}$.

Đặt dãy số v_n thỏa mãn $v_n = (u_n)^2$. Tổng các số hạng của dãy số v_n bằng

- A. $\frac{32}{2}$. B. $\frac{64}{3}$. C. 32. D. 64.

Câu 7: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Cho dãy số (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 = 2026 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

Tính $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ là

- A. $S = 3039$. B. $S = 4052$. C. $S = 2026$. D. $S = 1013$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{3^n - 2^n}{5^n}$. Tính tổng vô hạn $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

.....

Bài 2: Tìm công bội q của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng đầu $u_1 = 4$ và tổng của 3 số hạng đầu tiên bằng $\frac{7}{8}$ lần tổng vô hạn của cả dãy số đó.

.....

Bài 3: Giải phương trình chứa tổng vô hạn sau trên tập số thực:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 3 \quad (\text{với } |x| < 1)$$

.....

Bài 4: Cho một tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng a . Người ta vẽ tam giác đều $A_2B_2C_2$ thứ hai bằng cách nối trung điểm các cạnh của tam giác thứ nhất. Quá trình này lặp lại vô hạn lần. Tính tổng chu vi của tất cả các tam giác đều được tạo thành.

.....

Bài 5: Thu gọn biểu thức chứa căn thức vô hạn sau về một số thực: $M = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \dots}}}$

.....

Bài 6: Tính tổng vô hạn sau (Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn): $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. A	2. A	3. A	4. A	5. A	6. B	7. B
------	------	------	------	------	------	------

DẠNG 4. BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG

Phương pháp giải bài toán thực tế ĐGNL

- **Mô hình CSC:** Áp dụng khi đại lượng tăng hoặc giảm một lượng **cố định** sau mỗi chu kỳ thời gian (ví dụ: tiền công tăng thêm đều đặn, số ghế rạp hát, tháp gạch).
- **Mô hình CSN:** Áp dụng khi đại lượng tăng hoặc giảm theo một **tỉ lệ phần trăm cố định**, phân rã cơ học hoặc nhân đôi sinh học (ví dụ: lãi kép ngân hàng, phân bào, khấu hao máy móc).

Ví dụ 11. Ứng dụng Cấp số cộng

Một cơ sở sản xuất gạch mỹ thuật sắp xếp gạch thành một khối tháp tam giác đứng. Hàng trên cùng (hàng thứ nhất) có 1 viên gạch, hàng thứ hai có 3 viên gạch, hàng thứ ba có 5 viên gạch, và cứ thế tiếp tục, mỗi hàng dưới đều nhiều hơn hàng ngay trên nó 2 viên gạch. Hỏi nếu khối tháp có tất cả 40 hàng gạch thì cần tổng cộng bao nhiêu viên gạch để hoàn thành?

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Ứng dụng Cấp số nhân

Một doanh nghiệp mua một chiếc xe tải chuyên dụng với giá ban đầu là 1 tỷ đồng. Sau mỗi năm sử dụng, giá trị chiếc xe tải bị khấu hao giảm đi 10% so với năm liền trước đó. Hỏi sau 6 năm sử dụng, giá trị còn lại của chiếc xe tải là bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Toán thực tế

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một người thợ đào giếng nhận giao kèo: mét đào đầu tiên giá 100 nghìn đồng, kể từ mét thứ hai giá mỗi mét sau tăng thêm 20 nghìn đồng so với mét ngay trước đó. Hỏi nếu đào cái giếng sâu 15 mét thì tổng chi phí trả cho người thợ là bao nhiêu?

- A. 3,6 triệu đồng. B. 3,45 triệu đồng.
C. 3,75 triệu đồng. D. 4,2 triệu đồng.

Câu 2: Dân số của một thành phố năm 2026 là khoảng 2 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi và giữ mức 1,5% một năm. Dự báo dân số thành phố này vào năm 2036 (sau 10 năm) gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 2,32 triệu người. B. 2,15 triệu người.
C. 2,24 triệu người. D. 2,41 triệu người.

Câu 3: Một tờ giấy mỏng có độ dày 0,1 mm. Người ta gấp đôi tờ giấy lại liên tiếp. Hỏi sau 10 lần gấp đôi liên tiếp như vậy, độ dày của xấp giấy thu được bằng bao nhiêu?

- A. 102,4 mm. B. 10,24 mm. C. 51,2 mm. D. 204,8 mm.

Câu 4: Một sinh viên vừa tốt nghiệp nhận việc với mức lương khởi điểm là 10 triệu đồng/tháng. Hợp đồng quy định cứ sau đúng một năm làm việc, mức lương tháng sẽ được tăng thêm cố định là 1,2 triệu đồng. Hỏi vào năm làm việc thứ 5, lương hàng tháng của kỹ sư này là bao nhiêu?

- A. 14,8 triệu đồng. B. 16,0 triệu đồng.
C. 13,6 triệu đồng. D. 15,2 triệu đồng.

Câu 5: Một người đi làm nhận lương với mức ban đầu là 12 triệu đồng/tháng. Kể từ năm thứ hai, mức lương tháng của người đó được tăng thêm 8% so với năm liền trước đó. Hỏi vào năm thứ 4 đi làm, lương tháng của người này đạt bao nhiêu?

- A. 15,116 triệu đồng. B. 14,0 triệu đồng.
C. 16,325 triệu đồng. D. 14,895 triệu đồng.

Câu 6: Một bệnh nhân được tiêm một liều thuốc 100 mg vào máu. Cứ sau mỗi giờ, cơ thể tự đào thải và lượng thuốc giảm đi 20% so với giờ trước đó. Lượng thuốc còn lại trong máu bệnh nhân sau đúng 5 giờ là

- A. 32,77 mg. B. 40,96 mg. C. 26,21 mg. D. 35,84 mg.

Câu 7: Để giảm tiếng ồn, người ta lắp các lớp kính cách âm đặc biệt. Cứ qua một lớp kính, cường độ âm thanh sẽ bị giảm đi 15% so với cường độ trước khi truyền qua lớp kính đó. Nếu lắp 4 lớp kính liên tiếp thì âm thanh giảm đi bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

- A. 47,8%. B. 52,2%. C. 60,0%. D. 40,5%.

Câu 8: Một quần thể virus cúm bùng phát, ban đầu ghi nhận chỉ có 50 ca nhiễm. Biết rằng cứ sau mỗi ngày, số lượng ca nhiễm tăng lên gấp đôi. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì số ca nhiễm vượt quá 50.000 người?

- A. 10 ngày. B. 9 ngày. C. 11 ngày. D. 12 ngày.

Câu 9: Một sân vận động có hàng ghế đầu tiên gồm 30 ghế, các hàng sau mỗi hàng tăng thêm 4 ghế so với hàng trước. Tổng số hàng ghế là 20 hàng. Sân vận động có sức chứa tối đa bao nhiêu người xem?

- A. 1360 người. B. 1420 người. C. 1280 người. D. 1500 người.

Câu 10: Bác Ba gửi tiết kiệm số tiền 200 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 7,2% một năm. Hỏi sau đúng 3 năm gửi và không rút tiền, số tiền lãi bác Ba thu về là bao nhiêu?

- A. 46,31 triệu đồng. B. 43,20 triệu đồng.
C. 45,15 triệu đồng. D. 47,23 triệu đồng.

Câu 11: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 1] Một quả bóng rơi xuống đất theo thanh ngang có độ cao 10m. Mỗi lần quả bóng rơi xuống chạm đất sẽ nảy lên độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Sau 5 lần chạm đất, độ cao của quả bóng là

- A. 1,78. B. 2,37. C. 3,72. D. 4,25.

Câu 12: (Sử dụng dữ liệu câu trên) Tổng quãng đường quả bóng đi được cho đến khi dừng hẳn là

- A. 10. B. 40. C. 70. D. 80.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Một thợ thủ công làm một giàn hoa bằng các thanh gỗ đan chéo xếp hình tam giác đứng. Hàng thấp nhất dưới cùng cần dùng 50 thanh gỗ, hàng kế trên cần ít hơn hàng dưới 2 thanh gỗ. Cứ như thế lên đến đỉnh cao nhất chỉ cần 2 thanh gỗ. Tính tổng số thanh gỗ người thợ phải chuẩn bị.

.....
.....
.....

Bài 2: Một người tích lũy đầu tư bằng cách đầu mỗi tháng gửi cố định vào tài khoản tiết kiệm số tiền 5 triệu đồng, lãi suất ổn định đạt 0,5% một tháng theo hình thức lãi kép kì hạn một tháng. Hỏi sau tròn đúng 1 năm (12 tháng), người đó sở hữu tổng số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?

.....

.....

.....

Bài 3: Một quả bóng cao su đặc được thả rơi tự do từ độ cao 15 m xuống sàn nhà cứng. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy ngược lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó. Giả sử quả bóng chuyển động thẳng đứng vuông góc sàn cho đến khi dừng hẳn, tính tổng quãng đường bóng đã di chuyển.

.....

.....

.....

Bài 4: Một công ty dệt may đặt mục tiêu tăng trưởng sản xuất liên tục: sản lượng năm sau phải tăng thêm 10% so với năm trước. Biết năm đầu tiên công ty sản xuất được 50.000 sản phẩm. Hãy tính tổng số sản phẩm công ty dệt được sau chu kỳ 8 năm liên tiếp.

.....

.....

.....

Bài 5: Một giải đấu cờ vua quốc tế tổ chức theo thể thức loại trực tiếp một trận (thua cuộc bị loại ngay lập tức). Nếu giải đấu có tổng cộng 128 kỳ thủ tham gia thi đấu vòng đầu tiên, hỏi ban tổ chức cần điều hành tất cả bao nhiêu trận đấu để tìm ra nhà vô địch?

.....

.....

.....

Bài 6: Anh Nam mua trả góp một bộ máy tính cao cấp trị giá 30 triệu đồng với lãi suất trả góp là 1% một tháng. Anh Nam thỏa thuận trả đều đặn mỗi tháng một khoản tiền cố định gốc là 2,5 triệu đồng trong vòng 12 tháng cộng thêm phần tiền lãi tính trên dư nợ thực tế của tháng đó. Tính tổng số tiền lãi anh Nam phải trả sau khi tất toán hợp đồng.

.....

.....

.....

Bài 7: Trong phòng thí nghiệm sinh học, một mẫu nuôi cấy vi khuẩn ban đầu có 1200 con. Nghiên cứu chỉ ra cứ sau đúng 3 giờ, số lượng vi khuẩn tăng trưởng nhân

lên gấp 3 lần. Tính tổng số lượng vi khuẩn có trong mẫu sau 24 giờ nuôi cấy liên tục.

.....

.....

.....

Bài 8: Kim tự tháp kính nổi tiếng tại bảo tàng Louvre (Pháp) được dựng bằng các tấm kính hình thoi xếp chồng dạng tháp đứng. Giả sử hàng dưới cùng của mặt bên cần dùng 35 tấm kính, các hàng phía trên tiếp theo mỗi hàng đều giảm đi đúng 2 tấm kính so với hàng dưới trực tiếp cho đến đỉnh trên cùng chỉ có 1 tấm kính. Hỏi một mặt bên của kim tự tháp kính này có bao nhiêu tấm kính?

.....

.....

.....

Bài 9: Một đồng vị phóng xạ y tế có chu kỳ bán rã cố định là 8 ngày (cứ sau 8 ngày khối lượng chất phóng xạ giảm đi một nửa). Ban đầu phòng y học hạt nhân tiếp nhận 200 g chất này. Hỏi sau đúng 40 ngày, khối lượng chất phóng xạ còn lại trong mẫu là bao nhiêu gam?

.....

.....

.....

Bài 10: Một kiến trúc sư thiết kế một cầu thang nghệ thuật nối từ tầng trệt lên lầu có tổng cộng 25 bậc thang gỗ. Bậc thang dưới cùng rộng nhất có chiều dài là 2,2 m. Kể từ bậc thứ hai trở đi, mỗi bậc kế tiếp được thiết kế ngắn bớt đi đúng 4 cm (0,04 m) so với bậc ngay dưới nó nhằm tạo độ vát thẩm mỹ. Tính tổng chiều dài các thanh gỗ cần cắt để lắp ráp đủ 25 bậc thang đó.

.....

.....

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. A	2. A	3. A	4. A	5. A	6. A
7. A	8. A	9. A	10. A	11. B	12. C

BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 4$ và công sai $d = -2$. Tổng 15 số hạng đầu tiên bằng

- A. $S_{15} = -150$. B. $S_{15} = -140$. C. $S_{15} = -135$. D. $S_{15} = -165$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_3 + u_{13} = 40$. Giá trị tổng của hai số hạng $u_6 + u_{10}$ bằng

- A. 40. B. 20. C. 80. D. 30.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của số hạng u_6 là

- A. $u_6 = -96$. B. $u_6 = -48$. C. $u_6 = -192$. D. $u_6 = 96$.

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2$ và $u_3 = 18$. Công bội q của cấp số nhân có thể nhận giá trị:

- A. $q = \pm 3$. B. $q = 3$. C. $q = 9$. D. $q = \pm 9$.

Câu 5: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng số tiền 50 triệu đồng với lãi suất kép 6,5% một năm. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu về cả gốc lẫn lãi lớn hơn 80 triệu đồng?

- A. 8 năm. B. 7 năm. C. 9 năm. D. 6 năm.

Câu 6: Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau 2 tuần lượng bèo chiếm bao nhiêu % diện tích mặt hồ?

- A. 45%. B. 72%. C. 18%. D. 36%.

Câu 7: (Sử dụng dữ liệu câu trên) Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ phủ kín mặt hồ?

- A. $7 \times \log_3 25$. B. $3^{\frac{25}{7}}$. C. $7 \times \frac{24}{3}$. D. $7 \times \log_3 24$.

B. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn hệ thức: $\begin{cases} u_1 + u_6 = 19 \\ u_2 + u_9 = 30 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 ,

công sai d và tìm số hạng thứ 100 của dãy số.

Bài 2. Cho ba số thực dương lập thành một cấp số nhân tăng dần. Biết tổng của ba số này là 35 và tích của chúng là 1000. Hãy xác định ba số đó.

Bài 3. Một cơ sở dệt thảm len thủ công xuất khẩu nhận đơn hàng xếp thảm cuộn dạng hình trụ tròn chồng lên nhau trong kho. Hàng sát đất chứa 24 cuộn, hàng trên ít hơn hàng dưới trực tiếp 1 cuộn. Cứ như thế, hàng trên cùng chứa 5 cuộn thảm. Tính tổng số cuộn thảm len cơ sở này xếp được trong khối tháp thảm.

- | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 1. A | 2. A | 3. A | 4. A | 5. A | 6. D | 7. A |
|------|------|------|------|------|------|------|

CHUYÊN ĐỀ 3: GIỚI HẠN

DẠNG 1. TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ

Trọng tâm lý thuyết và Phương pháp giải

Mặc định quy ước viết $\lim u_n = L$ nghĩa là $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

- **Giới hạn cơ bản:** $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 0$); $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$); $\lim C = C$.
- **Dạng $\frac{\infty}{\infty}$ (Phân thức đại số/mũ):** Rút lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu ra làm nhân tử chung rồi triệt tiêu. *Mẹo nhanh:* So sánh bậc của tử (P) và mẫu (Q):
 - Bậc $P <$ Bậc $Q \Rightarrow \lim = 0$.
 - Bậc $P =$ Bậc $Q \Rightarrow \lim =$ Tỷ số hai hệ số cao nhất.
 - Bậc $P >$ Bậc $Q \Rightarrow \lim = \pm\infty$.
- **Dạng $\infty - \infty$ (Chứa căn thức):** Sử dụng phương pháp nhân liên hợp:

$$\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B} \quad \text{hoặc} \quad \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A^2} + B\sqrt[3]{A} + B^2}$$

Ví dụ 1. Dạng phân thức chứa lũy thừa đa thức và mũ

Tìm các giới hạn sau: a) $L_1 = \lim \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^2 + n}$; b) $L_2 = \lim \frac{4 \cdot 3^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 3 \cdot 5^n}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Dạng vô định chứa căn thức nhân liên hợp

Tính giới hạn dãy số sau: $L = \lim (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - n)$.

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Giới hạn dãy số

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{n+2}$ bằng

- A. 3. B. -2. C. $-\frac{4}{2}$. D. 0.

Câu 2: Giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{n^3 + 4n}$ bằng

- A. $I = 2$. B. $I = 0$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = +\infty$.

Câu 3: Tìm giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 2}{1 - 2n^3}$.

- A. $L = 1$. B. $L = 0$. C. $L = -\frac{1}{2}$. D. $L = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - n}{2n + 3}$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 5: Cho giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 5^n}{2 \cdot 5^{n-1} - 3^n}$. Chọn khẳng định đúng:

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = \frac{5}{2}$. D. $I = 5$.

Câu 6: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$:

- A. $L = 2$. B. $L = 1$. C. $L = 0$. D. $L = +\infty$.

Câu 7: Giá trị của $K = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)$ là

- A. $K = 0$. B. $K = \frac{1}{4}$. C. $K = \frac{1}{2}$. D. $K = 1$.

Câu 8: Tính tổng vô hạn của dãy số $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$:

- A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = 2$. D. $S = 3$.

Câu 9: Giới hạn nào dưới đây có giá trị bằng 0?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{3n + 1}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{n^2 + 3}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n^2 + 1}$.

Câu 10: Tìm giới hạn $I = \lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2 + 3}$:

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{1}{4}$. C. $I = 1$. D. $I = 0$.

II. PHẦN TỰ LUẬN Tính các giới hạn dãy số sau đây:

Bài 1: $A = \lim \frac{(2n+1)(n-3)^2}{3n^3 + n - 1}$.

.....

Bài 2: $B = \lim \frac{\sqrt{9n^2 + 4n} - 2n}{5n + 1}$.

.....

Bài 3: $C = \lim \frac{2 \cdot 7^n - 3 \cdot 4^n}{5 \cdot 7^{n+1} + 2^n}$.

.....

Bài 4: $D = \lim (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + n})$.

.....

Bài 5: $E = \lim (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n)$.

.....

Bài 6: $F = \lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n}$.

.....

Bài 7: $G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{n + 2}.$

.....

.....

.....

Bài 8: $H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! - n!}{(n + 1)! + n!}.$

.....

.....

.....

Bài 9: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right].$

.....

.....

.....

Bài 10: $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5 \cdot 6^n}{2^{n+1} + 6^{n-1}}.$

.....

.....

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. A	2. B	3. C	4. A	5. C	6. B	7. B	8. B	9. D	10. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

III DẠNG 2. TÍNH GIỚI HẠN HÀM SỐ $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty)$

💡 Các dạng vô định và chiến lược khử biến số

Khi tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, nếu gặp các biểu thức không xác định, ta phân loại lý thuyết xử lý như sau:

- **Dạng $\frac{0}{0}$ khi $x \rightarrow x_0$:** Mục tiêu là làm xuất hiện nhân tử chung $(x - x_0)$ ở tử và mẫu để triệt tiêu.
 - *Đa thức:* Phân tích đa thức thành nhân tử bằng hằng đẳng thức hoặc sơ đồ Horner.
 - *Căn thức:* Nhân liên hợp cho tử hoặc mẫu (hoặc cả hai) để làm lộ diện $(x - x_0)$.
- **Dạng $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \rightarrow \pm\infty$:** Chia cả tử và mẫu cho x^k với k là số mũ cao nhất.
- **Lưu ý cực kỳ quan trọng:** Khi rút x^2 ra khỏi căn bậc hai: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{khi } x \rightarrow -\infty \end{cases}$ (Cạm bẫy đổi dấu hay ra trong đề DGNL).
- **Dạng $\infty - \infty$ khi $x \rightarrow \pm\infty$:** Thường chứa căn thức, thực hiện nhân liên hợp đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

🔗 Ví dụ 3. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ bằng phân tích đại số và liên hợp

Tính các giới hạn sau: a) $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$; b) $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x - 1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

🔗 Ví dụ 4. Dạng vô định ở vô cực và bẫy dấu khi tiến về $-\infty$

Tính giới hạn sau: $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - 3x}{x + 2}$.

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Giới hạn hàm số

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Cho $M = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x)$ và $N = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{1 - x}$.
Kết luận nào đúng?

- A. $M = -N$. B. $M = N$. C. $M > N$. D. $M < N$.

Câu 2: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$:

- A. $L = -1$. B. $L = 1$. C. $L = 2$. D. $L = 0$.

Câu 3: Giá trị của $I = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$ bằng

- A. $I = -3$. B. $I = 3$. C. $I = 0$. D. $I = -\frac{3}{2}$.

Câu 4: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$:

- A. $A = \frac{1}{2}$. B. $A = \frac{1}{4}$. C. $A = 1$. D. $A = 4$.

Câu 5: Tính giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{1 - 3x^2}$:

- A. $B = 2$. B. $B = -\frac{2}{3}$. C. $B = 0$. D. $B = +\infty$.

Câu 6: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + 3x}{2x - 1}$:

- A. $L = 2$. B. $L = 1$. C. $L = -1$. D. $L = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ là

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 8: Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{x - 2}$:

- A. $I = 2$. B. $I = -\infty$. C. $I = +\infty$. D. $I = 5$.

Câu 9: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$:

- A. $L = 0$. B. $L = 1$. C. $L = 2$. D. $L = \frac{1}{2}$.

Câu 10: Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x)$:

- A. $K = 2$. B. $K = -2$. C. $K = 0$. D. $K = -\infty$.

Câu 11: Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = M$. Giá trị của M là

- A. $M = 1$. B. $M = 4$. C. $M = 2$. D. $M = 0$.

Câu 12: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{5}$. C. 0 . D. $-\frac{1}{11}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN Tìm các giới hạn hàm số sau:

Bài 1: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

.....

.....

.....

Bài 2: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

.....

.....

.....

Bài 3: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$.

.....

.....

.....

Bài 4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$.

.....

.....

.....

Bài 5: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{3x - 2}.$

.....

.....

.....

Bài 6: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5} + x}{2x + 1}.$

.....

.....

.....

Bài 7: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x).$

.....

.....

.....

Bài 8: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x).$

.....

.....

.....

Bài 9: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}.$

.....

.....

.....

Bài 10: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4}.$

.....

.....

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. B	2. A	3. A	4. B	5. B	6. B	7. B	8. C	9. B	10. B	11. B	12. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------

DẠNG 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bản chất lý thuyết điều kiện liên tục

- Liên tục tại một điểm:** Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Tức là phải thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện: Hàm số xác định tại x_0 ; Tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$; Giới hạn đó bằng giá trị hàm số tại điểm.

- Hàm số chứa nhiều nhánh rẽ giới hạn trái - phải:** Hàm số liên tục tại x_0 khi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- Ứng dụng xét nghiệm phương trình:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số phân nhánh tại điểm

Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 6 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình đại số

Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt trên tập số thực $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Hàm số liên tục

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên từng khoảng xác định của nó.
- C. Hàm số $y = \tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số $y = \sqrt{x}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ A & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm A để hàm số liên tục tại $x = 1$:

- A. $A = 1$.
- B. $A = 2$.
- C. $A = 0$.
- D. $A = -1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ m - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 1$:

- A. $m = 5$.
- B. $m = 3$.
- C. $m = 4$.
- D. $m = 2$.

Câu 4: Hàm số $y = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ gián đoạn tại các điểm nào sau đây?

- A. $x = -2$.
- B. $x = 1; x = 2$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 2$.

Câu 5: Tìm khoảng liên tục lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$:

- A. $\mathbb{R}$.
- B. $[-2; 2]$.
- C. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
- D. $(-2; 2)$.

Câu 6: Cho phương trình $x^5 + x - 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng về nghiệm của phương trình?

- A. Vô nghiệm.
- B. Có ít nhất một nghiệm trên $(0; 1)$.
- C. Có ít nhất một nghiệm trên $(1; 2)$.
- D. Có nghiệm lớn hơn 2.

Câu 7: Định m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$:

- A. $m = \pm\sqrt{2}$.
- B. $m = \pm 2$.
- C. $m = \pm 1$.
- D. $m = 2$.

Câu 8: Hàm số nào sau đây liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{1}{x}$.
- B. $y = \sqrt{x - 1}$.
- C. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.
- D. $y = \tan x$.

Câu 9: Tìm số nghiệm của phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ trên khoảng $(-2; 2)$:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ có $f(a) \cdot f(b) < 0$. Mệnh đề nào chính xác?

- A. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành trên đoạn $[a; b]$.
 B. Đồ thị cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm thuộc $(a; b)$.
 C. Đồ thị cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm thuộc $(a; b)$.
 D. Hàm số đơn điệu trên đoạn $[a; b]$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x = 2$.

Bài 2: Tìm tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 3: Tìm các điểm gián đoạn của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - x}$.

Bài 4: Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

Bài 5: Chứng minh phương trình $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m .

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. C	2. B	3. A	4. B	5. B	6. B	7. C	8. C	9. D	10. C
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

⚡ DẠNG 4. QUY TẮC L'HÔPITAL

💡 Lưu ý cốt lõi khi vận dụng

Quy tắc L'Hôpital chỉ được phép áp dụng khi biểu thức giới hạn rơi vào các dạng vô định kinh điển là $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

💡 Công thức tổng quát

Giả sử ta cần tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ mà khi thế giá trị x_0 vào biểu thức, tử số và mẫu số đồng thời tiến về 0 hoặc $\pm\infty$. Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm xung quanh điểm x_0 , ta luôn có hằng đẳng thức giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

✍ Ví dụ 7. Khử dạng vô định phân thức đa thức

Tính giới hạn sau: $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. Khử dạng vô định chứa biểu thức căn thức

Tính giới hạn sau: $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9. Khử dạng vô định chứa biểu thức lượng giác

Tính giới hạn sau: $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

.....

.....

.....

Luyện tập: Trắc nghiệm quy tắc L'Hôpital

Câu 1: Tính giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ bằng phương pháp đạo hàm:

- A. 32. B. 16. C. 8. D. 4.

Câu 2: Tính giới hạn lượng giác cơ bản sau: $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$:

- A. $K = 1$. B. $K = 3$. C. $K = 0$. D. $K = \frac{1}{3}$.

Câu 3: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Tính giá trị của giới hạn:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

- A. $\cos(xh)$. B. $-\sin(xh)$. C. $-\sin x$. D. $\cos x$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn hàm số $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$ tương đương với:

- A. $\cos^2 x$. B. $\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $-\sin^2 x$. D. $\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 5: Tìm giới hạn ở vô cực $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 5}$.

- A. $I = 0$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = +\infty$.

Câu 6: Tính giới hạn sau đây: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{x}$.

- A. $L = 2$. B. $L = 1$. C. $L = 0$. D. $L = 4$.

Câu 7: Tính giới hạn sau $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x} - 2}{x - 1}$:

- A. $I = \frac{1}{12}$. B. $I = \frac{1}{4}$. C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = 0$.

BẢNG ĐÁP ÁN:

1. A	2. B	3. C	4. B	5. C	6. A	7. A
------	------	------	------	------	------	------

DẠNG 5. CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO (TÌM a, b, m VÀ ĐỊNH GIÁ TRỊ)

Phương pháp xử lý bài toán chứa tham số ẩn số trong giới hạn

Đây là dạng bài điểm nhấn phân hóa cực cao trong cấu trúc bài thi tư duy và ĐGNL.

- Kỹ thuật đồng nhất hệ số khử vô định $\frac{0}{0}$:** Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = L$ (với L hữu hạn) mà $Q(x_0) = 0 \Rightarrow$ Bắt buộc tử số phải thỏa mãn $P(x_0) = 0$. Từ phương trình điều kiện này, lập mối liên hệ giữa các tham số a, b, m , thế ngược lại để giải nghiệm hữu hạn.
- Phương pháp ép điều kiện hệ số bậc vô cực:** Đối với dạng $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{Ax^2 + Bx + C} - (Dx + E)) = L$ hữu hạn, điều kiện tiên quyết là hệ số bậc cao nhất sau liên hợp phải triệt tiêu, nghĩa là $A - D^2 = 0 \Rightarrow D = \sqrt{A}$.

Ví dụ 10. Tìm tham số để giới hạn đạt một giá trị hữu hạn cho trước

Biết rằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 5$. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11. Tìm tham số nâng cao ngăn chặn giới hạn phân kỳ ở vô cực

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - ax)$ là một số hữu hạn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Bài toán nâng cao chứa tham số

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + 4}{x - 2} = b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$:

- A. $P = 4$. B. $P = 2$. C. $P = 0$. D. $P = 6$.

Câu 2: Cho biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-1} = b$. Tính tích số $S = a \cdot b$:

- A. $S = \frac{3}{4}$. B. $S = 3$. C. $S = \frac{1}{4}$. D. $S = 1$.

Câu 3: Tìm giá trị của tham số a để giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 3$:

- A. $a = 3$. B. $a = 6$. C. $a = 12$. D. $a = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2 + 3x + a & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại điểm $x = 0$:

- A. $a = 1$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = 0$. D. $a = 2$.

Câu 5: Biết giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} + 3x) = 2$. Giá trị của tham số a bằng bao nhiêu?

- A. $a = 12$. B. $a = -12$. C. $a = 6$. D. $a = -6$.

Câu 6: Nếu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1}-1}{x} = 2$ thì giá trị của a bằng

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. $a = 4$. D. $a = 8$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^3 - 3x^2 + (m-1)x + 2 = 0$ liên tục có ít nhất một nghiệm thực lớn hơn 2.

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. Không tồn tại m .

Câu 8: Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 2}{x - 1} = 4$. Tính tổng $S = a + b$:

- A. $S = 1$. B. $S = 2$. C. $S = 3$. D. $S = 4$.

Câu 9: Tìm điều kiện liên hệ giữa a và b để giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 2} - \sqrt{x^2 + bx + 1}) = 0$:

- A. $a = b$. B. $a = -b$. C. $a = 2b$. D. $b = 2a$.

Câu 10: Để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a^2}{x - a} & \text{khi } x \neq a \\ 4 & \text{khi } x = a \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = a$ thì giá trị a là

- A. $a = 4$. B. $a = 2$. C. $a = 1$. D. $a = 0$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 4$. Xác định cụ thể các hằng số a và b .

.....

Bài 2: Tìm các giá trị thực của a, b thỏa mãn đẳng thức giới hạn sau:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - bx) = 2$.

.....

Bài 3: Tìm giá trị tham số m để hàm số sau liên tục trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

.....

Bài 4: Xác định các tham số a, b để giới hạn sau đây đạt giá trị bằng $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 1} - \sqrt{1 - bx}}{x} = 2.$$

.....

Bài 5: Cho đa thức $P(x)$ bậc ba thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{(x - 1)^2} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x - 2} = 3$. Tìm giá trị của $P(0)$.

.....

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. A	2. A	3. B	4. B	5. B	6. C	7. A	8. A	9. A	10. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

🏠 BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3-n}$ bằng:

- A. 2. B. -2. C. $\frac{2}{3}$. D. $+\infty$.

Câu 2: Tính giới hạn dãy số vô hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{n+1}$:

- A. $L = 1$. B. $L = 2$. C. $L = 3$. D. $L = 0$.

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ là

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Câu 4: Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$:

- A. $I = \frac{1}{4}$. B. $I = \frac{1}{8}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

Câu 5: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}-2x}{x+5}$:

- A. 1. B. 5. C. -5. D. -1.

Câu 6: Tính giới hạn vô cực $A = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{x-1}$:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. -5.

Câu 7: Xác định điểm gián đoạn của hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$:

- A. $x = 3$. B. $x = -2$.
C. $x = 3$ và $x = -2$. D. Không có điểm gián đoạn.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m^2-2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 3$:

- A. $m = \pm 2$. B. $m = \pm \sqrt{2}$. C. $m = \pm 1$. D. $m = 2$.

Câu 9: Cho biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 6$. Tính tổng hằng số $S = a+b$:

- A. $S = 2$. B. $S = -6$. C. $S = -2$. D. $S = 4$.

Câu 10: Phương trình nào sau đây chắc chắn có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$?

A. $x^3 - 3x + 5 = 0$.

B. $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$.

C. $x^5 + 2x - 1 = 0$.

D. $x^2 - x + 1 = 0$.

Câu 11: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Cho dãy số (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 = 2026 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

Đặt $v_n = \frac{u_n + 1}{3u_n + 2}$. Tính $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{n^2} (v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots + nv_n) \right]$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $+\infty$.

D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BTVN

1. B	2. C	3. A	4. B	5. C	6. A	7. C	8. A	9. C	10. C	11. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Tính giới hạn dãy số bậc phân thức hữu tỉ: $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - n}{3n + 5}$.

Bài 2: Khử vô định chứa căn thức dãy số bằng nhân liên hợp: $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + n})$.

Bài 3: Tính giới hạn hàm số tại điểm: $A = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}$.

Bài 4: Tính giới hạn hàm số chứa căn thức khi x dần tới vô hạn: $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x)$.

Bài 5: Tính giới hạn hàm số tại vô cực: $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x}{x + 1}$.

Bài 6: Xét tính liên tục trên toàn tập xác định của hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

Bài 7: Tìm điều kiện tham số a để hàm số liên tục tại điểm ranh giới cấu trúc $x = 0$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ a^2x + 2a - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

Bài 8: Cho biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$. Tính tổng bình phương hệ số $T = a^2 + b^2$.

Bài 9: Cho giới hạn vô cực chứa tham số ẩn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + ax + 1} - 2x) = -1$. Tìm giá trị thực của tham số a .

CHUYÊN ĐỀ 4: HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

DẠNG 1. CÔNG THỨC LŨY THỪA - LOGARIT

1. Công thức và tính chất của Lũy thừa (Với $a, b > 0; x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} & a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & \bullet (a^x)^y = a^{x \cdot y} & \bullet (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \\ & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} & \bullet a^{-x} = \frac{1}{a^x} & \bullet \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (\text{với } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2) & \bullet \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \end{aligned}$$

Tính chất đơn điệu của lũy thừa: Cho số thực $a > 0$.

- Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$ (hàm số đồng biến).
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$ (hàm số nghịch biến).

2. Định nghĩa và hệ thống công thức Logarit (Điều kiện: $0 < a \neq 1; b, c > 0$)

Định nghĩa gốc: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

Các công thức biến đổi cơ bản:

$$\begin{aligned} & \bullet \log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1 & \bullet a^{\log_a b} = b; \quad \log_a (a^b) = b \\ & \bullet \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c & \bullet \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \\ & \bullet \log_a (b^\alpha) = \alpha \log_a b & \bullet \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b \quad (\beta \neq 0) \end{aligned}$$

Các công thức đổi cơ số (Vũ khí giải phương trình/hệ phương trình):

$$\begin{aligned} & \bullet \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < c \neq 1) & \bullet \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1) \\ & \bullet \text{Công thức đổi chỗ: } a^{\log_b c} = c^{\log_b a} & \bullet \text{Hệ quả chuỗi: } \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \end{aligned}$$

3. Quy tắc tìm Tập xác định của Hàm số Lũy thừa, Mũ và Logarit

1. **Hàm số lũy thừa** $y = [f(x)]^\alpha$: Tập xác định phụ thuộc hoàn toàn vào cấu trúc số mũ α :

- Nếu $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (Nguyên dương): Hàm số xác định khi $f(x)$ xác định.
- Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ (Nguyên âm hoặc bằng 0): Điều kiện là $f(x) \neq 0$.
- Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z}$ (Số thực không nguyên như $\pi, e, \sqrt{2}, \frac{2}{3}$): Điều kiện là $f(x) > 0$.

2. **Hàm số Mũ** $y = a^{f(x)}$ ($0 < a \neq 1$): Hàm số xác định khi và chỉ khi biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. **Hàm số Logarit** $y = \log_{g(x)}[f(x)]$: Xác định khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < g(x) \neq 1 \end{cases}$

Ví dụ 1. Biến đổi rút gọn biểu thức chứa căn thức đơn xen

Rút gọn biểu thức sau với điều kiện số thực $x > 0$: $P = \frac{\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}}}{x^{\frac{5}{12}}}$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số chứa dấu kép phân thức và logarit

Tìm tập xác định D của hàm số sau: $y = \log_3 \left(\frac{x-1}{x+2} \right) + (x^2 - 4x + 3)^{-\sqrt{5}}$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Biến đổi logarit bằng biểu thức liên hợp

Cho số thực x thỏa mãn đẳng thức $(\sqrt{x^2+1} + x)^{2026} = 2026$. Tính giá trị của biểu thức logarit $P = \log_{2026} (\sqrt{x^2+1} - x)$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Giải hệ logarit khác cơ số bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn hệ đẳng thức phương trình: $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(2a + 3b) - 1$. Tính giá trị của tỉ số $S = \frac{a}{b}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Biến đổi lũy thừa tầng chứa ẩn ở cơ số logarit

Cho các số thực $x, y > 1$ thỏa mãn hệ phương trình logarit: $\log_x (y^{5x}) = \log_y (x^{8y}) = 20$.
 Tính giá trị của tích đại số $P = x \cdot y$.

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Công thức hàm số mũ và logarit

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Tập xác định của hàm số $y = (4 - x^2)^{-3}$ là khoảng hoặc tập hợp nào sau đây?

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
 B. $D = (-2; 2)$.
 C. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
 D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 2: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Tìm tập xác định D của hàm số chứa đồng thời căn thức và logarit tự nhiên $y = \frac{1}{\sqrt{4^x - 2}} + \ln(2x^2 - 4)$:

- A. $D = (\sqrt{2}; +\infty)$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}$.
 C. $D = \mathbb{R}$.
 D. $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 3: Cho hai số thực x, y thỏa mãn phương trình đối ngẫu hằng đẳng thức liên hợp $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} + y) = 1$. Giá trị của biểu thức $P = x + y$ bằng:

- A. $P = 1$.
 B. $P = 0$.
 C. $P = -1$.
 D. $P = 2$.

Câu 4: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 1] Cho các số thực $x, y \geq 1$, thỏa mãn hệ đẳng thức $\log_x (y^{5x}) = \log_y (x^{8y}) = 20$. Giá trị của tích đại số xy bằng:

- A. 2.
 B. 4.
 C. 10.
 D. 40.

Câu 5: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Cho các số thực $a > b > c > 1$. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $a^x + c^x = b^x$.
 B. $a^x + b^x = c^x$.
 C. $a^x + b^x + c^x = 1$.
 D. $b^x + c^x = a^x$.

Câu 6: Cho a là số thực dương tùy ý, biểu thức hoán đổi lũy thừa $P = \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}$ được viết dưới dạng số mũ hữu tỉ là

- A. $P = a^{\frac{5}{6}}$. B. $P = a^{\frac{2}{3}}$. C. $P = a^{\frac{1}{3}}$. D. $P = a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 7: Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = -3$. Giá trị của biểu thức logarit tổng hợp $M = \log_a \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^3} \right)$ bằng

- A. $M = 16$. B. $M = 7$. C. $M = -2$. D. $M = 14$.

Câu 8: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$. B. $\log_2 \left(\frac{a+b}{4} \right) = \log_2 a + \log_2 b$.
C. $2\log_2(a+b) = 1 + \log_2 a + \log_2 b$. D. $\log_2(a+b) = 4 + \frac{1}{2}\log_2(ab)$.

Câu 9: Đặt $\ln 2 = a$ và $\ln 3 = b$. Biểu diễn biểu thức logarit $T = \log_4 9$ theo hai tham số a và b ta được kết quả:

- A. $T = \frac{b}{a}$. B. $T = \frac{2b}{a}$. C. $T = \frac{b}{2a}$. D. $T = a \cdot b$.

Câu 10: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 4x + m)$ có tập xác định rộng khắp trên toàn trục số $\mathbb{R}$ là

- A. Vô số. B. 3. C. 4. D. 0.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP LUYỆN TẬP TẠI LỚP (PHẦN 1)

1. A	2. A	3. B	4. C	5. A	6. A	7. A	8. A	9. A	10. A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Tìm tập xác định D của hàm số chứa số mũ thực không nguyên: $y = (x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{2}} + \log_5(x - 1)$.

.....
.....

Bài 2: Cho x, y là các số thực dương biến thiên thỏa mãn phương trình cơ số: $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x + y)$. Hãy tính giá trị chính xác của tỉ số phân thức $k = \frac{x}{y}$.

.....
.....

Bài 3: Không dùng máy tính cầm tay, hãy thực hiện rút gọn biểu thức đại số sau:

$$A = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)} \text{ với } a > 0.$$

.....

Bài 4: Cho dữ kiện logarit $\log_{12} 3 = a$. Hãy biểu diễn giá trị của biểu thức $\log_{24} 18$ hoàn toàn theo biến số a .

.....

.....

Bài 5: Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = \log_2 [mx^2 - 4x + m]$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

.....

.....

Bài 6: Cho phương trình hệ thức lũy thừa $a^{\log_3 7} = 27$ và $b^{\log_7 11} = 49$. Tính giá trị của biểu thức tổng lũy thừa tầng: $S = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11}$.

.....

.....

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + 4b^2 = 12ab$, ta luôn có đẳng thức logarit: $\log(a + 2b) - 2\log 2 = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

.....

.....

Bài 8: Cho hàm số có tính chất đối xứng qua tâm: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Tính tổng tất cả các giá trị của chuỗi số thực: $S = f(-2026) + f(-2025) + \dots + f(2025) + f(2026)$.

.....

.....

Bài 9: Tìm tập xác định D của hàm số sau: $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x - 8)}$.

.....

.....

Bài 10: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn chuỗi tích $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$. Hãy đơn giản hóa biểu thức đại số sau: $P = a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c a} \cdot c^{\log_a b}$.

.....

.....

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

1. Phương trình mũ cơ bản và các phương pháp biến đổi nâng cao

- **Dạng cơ bản:** $a^{f(x)} = b$ (với $0 < a \neq 1$)
 - Nếu $b \leq 0$: Phương trình hoàn toàn vô nghiệm.
 - Nếu $b > 0$: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.
- **Các phương pháp giải quyết lỗi:**
 - **Đưa về cùng cơ số:** $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
 - **Đặt ẩn phụ dạng tam thức bậc hai:** $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$. Đặt $t = a^{f(x)}$ (Điều kiện bắt buộc: $t > 0$).
 - **Logarit hóa hai vế khác cơ số:**
 $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a(b^{g(x)}) = g(x) \cdot \log_a b$.

2. Phương trình logarit và các bất điều kiện xác định

- **Dạng cơ bản:** $\log_a f(x) = b$ (với $0 < a \neq 1$)
 - **Điều kiện bắt buộc:** $f(x) > 0$.
 - **Biến đổi gốc:** $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.
- **Các phương pháp giải quyết lỗi:**
 - **Đưa về cùng cơ số:** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
 - **Đặt ẩn phụ:** $A \cdot \log_a^2 f(x) + B \cdot \log_a f(x) + C = 0$. Đặt $t = \log_a f(x)$ (Không cần điều kiện cho tập giá trị của t).

Ví dụ 6. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số

Giải phương trình mũ sau trên tập số thực: $3^{x^2-x} = 9^{x+2}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Phương trình mũ sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Giải phương trình mũ sau: $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số và bất điều kiện

Giải phương trình logarit sau trên tập số thực: $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

.....

.....

.....

Ví dụ 9. Phương trình logarit đặt ẩn phụ tam thức

Giải phương trình logarit sau: $\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 3 = 0$.

.....

.....

.....

Ví dụ 10. Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1

Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x - 2025m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^y - m \cdot 3^y + (\sqrt{3})^7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 , đồng thời các điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ trên hệ trục tọa độ Oxy thỏa mãn điều kiện vuông góc $OA \perp OB$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11. Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2

Biết hai số thực x, y thỏa mãn phương trình logarit: $1 + \log_2 x + \log_2(x - 2) = \log_2 y$. Hãy tìm mối quan hệ hàm số trực tiếp giữa hai biến x và y .

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Phương trình mũ và logarit

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biết phương trình $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Giá trị của biểu thức tổng $P = x_1 + x_2$ bằng:

- A. 3 B. 9 C. 2 D. 0

Câu 2: Tích tất cả các nghiệm thực phân biệt của phương trình chứa ẩn ở cơ số $\log_x 8 + \log_2 x = 4$ bằng:

- A. 16. B. 4. C. 8. D. 12.

Câu 3: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình mũ $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ bằng

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 0.

Câu 4: Tập nghiệm S của phương trình logarit cơ bản $\log_3(x^2 - x + 3) = 1$ là

- A. $S = \{0; 1\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{0\}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 5: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2 x + \log_2(x - 1) = 1$:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Biết phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giá trị của biểu thức tích tổng hợp $P = x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 4.

Câu 7: Phương trình $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 8: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

- A. $m > 0$. B. $m > 2$. C. $0 < m < 2$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 9: Cho phương trình $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0$. Nếu đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành dạng nào dưới đây?

- A. $t^2 - 3t + 2 = 0$. B. $t^2 + 3t + 2 = 0$.
C. $2t^2 - 3t + 1 = 0$. D. $t^2 - 3t - 2 = 0$.

Câu 10: Cho phương trình lũy thừa cơ bản $3^{2x-1} = 27$. Nghiệm của phương trình này là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = 4$.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP TẠI LỚP (PHẦN 2)

1. A	2. A	3. C	4. A	5. B	6. C	7. B	8. B	9. A	10. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Giải phương trình mũ đưa về cùng cơ số sau trên tập số thực: $2^{x^2-3x+2} = 4^{x-1}$.

.....

.....

.....

Bài 2: Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình: $\log_2[\log_3(x+1)] = 1$.

.....

.....

.....

Bài 3: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x - 6m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^y - m \cdot 3^y + 3\sqrt{3} = 0$ có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 sao cho các điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ trên hệ trục tọa độ thỏa mãn điều kiện hình học $OA \perp OB$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4: Giải phương trình bằng phương pháp logarit hóa hai vế khác cơ số: $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$.

.....

.....

.....

Bài 5: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai đối với logarit $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn hệ thức tích hệ quả: $x_1 \cdot x_2 = 27$.

.....

.....

.....

.....

Bài 6: Giải phương trình mũ: $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x = 6$.

.....

.....

.....

.....

Bài 7: Tìm nghiệm thực của phương trình logarit sau bằng cách đưa về cùng cơ số:
 $\log_2 x + \log_4 (x - 1)^2 = 2$.

.....

.....

.....

.....

Bài 8: Cho phương trình $4^x - (m + 1)2^x + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu ($x_1 < 0 < x_2$).

.....

.....

.....

.....

Bài 9: Sử dụng phương pháp hàm số đơn điệu định tính, hãy giải phương trình sau:
 $3^x + 4^x = 5^x$.

.....

.....

.....

.....

Bài 10: Xác định số nghiệm thực của phương trình: $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

1. Bất phương trình mũ và quy tắc xét chiều cơ số

Cho bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (với $a > 0, a \neq 1$).

- **Trường hợp đồng biến ($a > 1$):** Bất phương trình **giữ nguyên chiều** biến thiên:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

- **Trường hợp nghịch biến ($0 < a < 1$):** Bất phương trình **đảo ngược chiều** biến thiên:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

- **Bất phương trình dạng $a^{f(x)} > b$:**

- Nếu $b \leq 0$: Bất phương trình luôn đúng với mọi x thuộc tập xác định của $f(x)$.
- Nếu $b > 0$ và $a > 1$: $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$.
- Nếu $b > 0$ và $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$.

2. Bất phương trình logarit và bảy điều kiện biên

Cho bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (với $a > 0, a \neq 1$).

- **Cảnh báo sơ phạm:** Học sinh rất dễ quên đặt điều kiện cho biểu thức dưới dấu logarit dương trước khi phá bỏ logarit.
- **Trường hợp đồng biến ($a > 1$):** Giữ nguyên chiều và cài điều kiện cho biểu thức nhỏ hơn:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

- **Trường hợp nghịch biến ($0 < a < 1$):** Đảo ngược chiều và cài điều kiện cho biểu thức nhỏ hơn:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Ví dụ 12. Bất phương trình mũ nghịch biến đưa về cùng cơ số

Giải bất phương trình mũ sau trên tập số thực: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} \geq 4^{x-1}$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13. Bất phương trình logarit chứa bất đẳng thức và nghịch biến

Giải bất phương trình logarit sau: $\log_{0.5}(x^2 - 5x + 6) \geq -1$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14. Đặt ẩn phụ kết hợp định lý Vi-ét cho bất phương trình mũ

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Bất phương trình mũ và logarit

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập nghiệm S của bất phương trình mũ cơ bản $3^{x+1} > 9$ là

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (2; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1)$. D. $S = [1; +\infty)$.

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình mũ chứa cơ số nghịch biến $(0.5)^{x^2-1} \geq 1$:

- A. $S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ B. $S = [-1; 1]$
C. $S = (-1; 1)$ D. $S = \mathbb{R}$

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình logarit đồng biến $\log_2(x - 3) \leq 3$ là khoảng hoặc đoạn nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 11]$. B. $(3; 11)$. C. $(3; 11]$. D. $[3; 11]$.

Câu 4: Giải bất phương trình logarit có cơ số nhỏ hơn 1: $\log_{0.2}(x - 1) > -1$.

- A. $x < 6$. B. $1 < x < 6$. C. $x > 6$. D. $1 < x \leq 6$.

Câu 5: Tìm tập nghiệm của bất phương trình mũ giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$.

- A. $S = [1; 4]$.
 B. $S = [0; 2]$.
 C. $S = (0; 2)$.
 D. $S = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình logarit bậc hai $\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 3 > 0$ là

- A. $S = (0; 3) \cup (27; +\infty)$.
 B. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
 C. $S = (3; 27)$.
 D. $S = (0; 3] \cup [27; +\infty)$.

Câu 7: Bất phương trình đưa về cùng cơ số $\log_2 x + \log_2(x - 2) \leq 3$ có tập nghiệm là

- A. $S = (2; 4]$.
 B. $S = [-2; 4]$.
 C. $S = (0; 4]$.
 D. $S = (2; 4)$.

Câu 8: Số nghiệm nguyên của bất phương trình logarit chứa ẩn trong tam thức $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) \geq -1$ là

- A. 0.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 4.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2(x^2 + 2x + m) \geq 1$ nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$:

- A. $m \geq 3$.
 B. $m > 3$.
 C. $m \leq 3$.
 D. $m \geq 2$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình đổi chiều cơ số lũy thừa $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+4}$ là

- A. $S = [-1; +\infty)$.
 B. $S = (-\infty; -1]$.
 C. $S = [-3; +\infty)$.
 D. $S = (-\infty; -3]$.

Câu 11: [Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Cho bất phương trình $2^x + x \leq y + \log_2 y$ với $x, y \in \mathbb{Z}^+$; $y \leq 15$. Số giá trị x thỏa mãn là

- A. 5.
 B. 4.
 C. 3.
 D. 2.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP TẠI LỚP (PHẦN 3)

1. A	2. B	3. C	4. B	5. B	6. A	7. A	8. C	9. A	10. A	11. C
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Giải bất phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số: $2^{x^2-x} \leq 4^{x+2}$.

.....

Bài 2: Tìm tập nghiệm của bất phương trình logarit nghịch biến sau: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$.

.....

Bài 3: Tìm các nghiệm nguyên của bất phương trình đặt ẩn phụ tam thức mũ: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$.

.....

Bài 4: Giải bất phương trình logarit bậc hai chứa khoảng phân tách nghiệm: $\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 4 > 0$.

.....

Bài 5: Giải bất phương trình mũ chứa hệ thức lượng liên hợp đại số nâng cao: $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x > 4$.

.....

Bài 6: Tìm tập nghiệm xác định của bất phương trình chứa ẩn tại cơ số logarit: $\log_x(x+2) > 1$.

.....

Bài 7: Sử dụng phương pháp logarit hóa hai vế khác cơ số để giải bất phương trình: $2^{x^2-4} \geq 3^{x-2}$.

.....

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình logarit sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$: $\log_3(x^2 + mx + 4) > 1$.

.....

Bài 9: Áp dụng phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số số học để giải bất phương trình: $3^x + 4^x > 5^x$.

.....

Bài 10: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối đan xen điều kiện logarit: $\log_2 |x - 3| \leq 1$.

.....

🏠 BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Cho hai số thực dương a, b tùy ý thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của biểu thức biểu diễn tổng hợp $P = \log_a(a^2 b^3)$:

- A. $P = 8$. B. $P = 5$. C. $P = 6$. D. $P = 7$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số chứa biểu thức logarit trong tam thức $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$:

- A. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $D = (1; 3)$.
C. $D = [1; 3]$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Câu 3: Tính đạo hàm cấp một của hàm số siêu việt $y = \ln(x^2 + 1)$ trên tập xác định:

- A. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$. B. $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$. C. $y' = 2x \ln(x^2 + 1)$ D. $y' = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Câu 4: Tìm tập giá trị T của hàm số mũ cơ bản $y = 2^x$ trên tập số thực $\mathbb{R}$:

- A. $T = (0; +\infty)$. B. $T = \mathbb{R}$. C. $T = [0; +\infty)$. D. $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 5: Nghiệm của phương trình mũ đưa về cùng cơ số $2^{2x-1} = 8$ là

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 4$.

Câu 6: Tập nghiệm S của phương trình logarit biến đổi cơ bản $\log_2(x^2 - x) = 1$ là

- A. $S = \{-1; 2\}$. B. $S = \{1; -2\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{-1\}$.

Câu 7: Tập nghiệm S của bất phương trình mũ chứa cơ số nhỏ hơn một $(0, 3)^x < (0, 3)^2$ là

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = (-\infty; 2]$. D. $S = [2; +\infty)$.

Câu 8: Tập nghiệm S của bất phương trình logarit đồng biến $\log_2(2x - 4) > 2$ là

- A. $S = (4; +\infty)$. B. $S = (2; +\infty)$. C. $S = (2; 4)$. D. $S = [4; +\infty)$.

Câu 9: Cho các số thực dương thỏa mãn $\log_2 3 = a$ và $\log_2 5 = b$. Biểu diễn $\log_2 45$ theo a và b :

- A. $2a + b$. B. $a + 2b$. C. $a^2 b$. D. $a + b^2$.

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình mũ đặt ẩn phụ tam thức $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ bằng

- A. 3. B. 8. C. 6. D. 2.

Câu 11: Tập nghiệm S của bất phương trình logarit nghịch biến bất kỳ điều kiện $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq -2$ là

- A. $S = (1; 5]$. B. $S = [1; 5]$. C. $S = (-\infty; 5]$. D. $S = (1; 5)$.

Câu 12: Đếm số nghiệm nguyên thuộc tập xác định của bất phương trình mũ $(0, 2)^{x^2-3x} > 0,04$:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 13: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% một năm theo hình thức lãi kép kỳ hạn năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền cả gốc lẫn lãi lớn hơn 150 triệu đồng?

- A. 7 năm. B. 6 năm. C. 8 năm. D. 9 năm.

Câu 14: Phương trình bậc hai đối với logarit $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giá trị của tích hình học $P = x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. 8. B. 6. C. 3. D. 4.

Câu 15: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình mũ $(4^x - 2^{x+1}) + m = 0$ có nghiệm thực:

- A. $m \leq 1$. B. $m < 1$. C. $m > 0$. D. $0 < m \leq 1$.

Câu 16: Tập nghiệm S của bất phương trình mũ đặt ẩn phụ tam thức liên tục $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ là

- A. $S = [0; 1]$. B. $S = (0; 1)$. C. $S = [1; 3]$. D. $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Câu 17: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình logarit chứa điều kiện ràng buộc hai vế $\log_3(x^2 - 1) \leq 1$:

- A. $S = [-2; -1) \cup (1; 2]$. B. $S = [-2; 2]$.
C. $S = (1; 2]$. D. $S = [-2; -1)$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình mũ $9^x - 2 \cdot 3^x + m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$:

- A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m > 0$. D. $m < 1$.

Câu 19: Tìm tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức tích biên hữu hạn $x_1 \cdot x_2 = 81$:

- A. $m < \frac{5}{2}$. B. $m > \frac{5}{2}$. C. $m \leq \frac{5}{2}$. D. $m < 2$.

Câu 20: Cho hàm số mũ đặc trưng đối xứng $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tính giá trị tổng chuỗi rời rạc $S = f\left(\frac{1}{2026}\right) + f\left(\frac{2}{2026}\right) + \dots + f\left(\frac{2025}{2026}\right)$:

A. 1012, 5.

B. 2025.

C. 1013.

D. 506, 5.

BẢNG ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP VỀ NHÀ TRẮC NGHIỆM

1. A	2. A	3. A	4. A	5. A	6. A	7. A	8. A	9. A	10. A
11. A	12. A	13. A	14. A	15. A	16. A	17. A	18. A	19. A	20. A

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Rút gọn và tính giá trị chính xác của biểu thức đại số chứa căn thức lũy thừa phối hợp tầng lớp sau:

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)} \quad (\text{với } a > 0).$$

Bài 2: Giải phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình tam thức bậc hai ẩn giấu số hạng: $4^{x^2-x} - 5 \cdot 2^{x^2-x-1} - 1 = 0$.

Bài 3: Giải phương trình logarit bằng cách tách biến đổi tổng thành tích kết hợp nhóm nhân tử chung đại số đặc trưng: $\log_2 x \cdot \log_3 x - 2 \log_2 x - 3 \log_3 x + 6 = 0$.

Bài 4: Giải bất phương trình mũ đồng cấp bậc hai bằng cách chia cho số hạng cơ số biên thích hợp: $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x \leq 0$.

Bài 5: Tìm tập nghiệm xác định của bất phương trình chứa ẩn ở cả cơ số và biểu thức lấy logarit: $\log_{x-1}(x^2 - 4x + 4) \geq 2$.

Bài 6: Giải phương trình siêu việt bằng phương pháp logarit hóa hai vế khác cơ số có chứa biến nghịch đảo ở số mũ: $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

Bài 7: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số (phương pháp hàm số định tính) để giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$: $\log_2(x+1) + x = 3$.

Bài 8: Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 500 cá thể, biết rằng cứ sau mỗi giờ số lượng vi khuẩn tăng lên gấp đôi theo hàm số mũ tăng trưởng. Viết công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn đạt quy mô tối thiểu là 1.000.000 cá thể?

Bài 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình bậc hai đối với logarit $\log_3^2 x - 2m \log_3 x + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thuộc khoảng hở giới hạn $(1; 27)$.

Bài 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình mũ sau có ít nhất một nghiệm thực x thỏa mãn điều kiện toán học: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 2 \leq 0$.

CHUYÊN ĐỀ 5: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

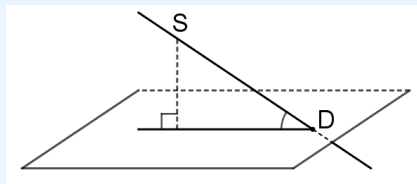
1. Nhận diện nhanh quan hệ vuông góc

Trong các đề thi trắc nghiệm, thay vì trình bày các bước chứng minh vuông góc dài dòng, học sinh cần ghi nhớ các hệ quả sau đây:

- **Đường vuông góc với mặt:** Nếu đường thẳng $d \perp (P)$ thì d vuông góc với **mọi** đường thẳng nằm trong (P) .
- **Mặt bên vuông góc với đáy:** Trong hình chóp, nếu có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao của mặt bên kẻ từ đỉnh S chính là đường cao của khối chóp.
- **Hình chóp đều ($S.ABCD$ hoặc $S.ABC$):** Đường cao luôn hạ từ đỉnh xuống tâm đường tròn ngoại tiếp đáy (tâm O của hình vuông, hình chữ nhật hoặc trọng tâm G của tam giác đều).

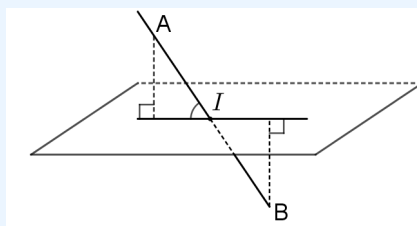
2. Công thức tính góc và khoảng cách

- **Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) :** là góc giữa d và hình chiếu vuông góc d' của nó trên (P) .



$$\sin \varphi = \sin (\widehat{d, (P)}) = \frac{d(S, (P))}{SD} \quad (\text{với } S \in d \text{ và } D = d \cap (P))$$

- **Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) :**



$$\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AI}{BI} \quad (\text{với } I = AB \cap (P))$$

Trong đó, đích đến luôn là chuyển về **Chân đường cao** của khối chóp để tính toán theo hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

3. Phương pháp tọa độ hóa Oxyz

- Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 (có vtcp $\vec{u}_1, \vec{u}_2$):

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

- Góc giữa đường thẳng d (có vtcp $\vec{u}$) và mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}$):

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \quad (\text{với } 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

- Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ (có vtpt $\vec{n}_1, \vec{n}_2$):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (\text{với } 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

- Góc nhị diện $[P, d, Q]$: Là góc tạo bởi hai nửa mặt phẳng. Giá trị góc nhị diện $\theta \in [0^\circ; 180^\circ]$.

– Lưu ý: Nếu ta chọn hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ của hai mặt cùng hướng ra ngoài (hoặc cùng hướng vào trong) hình khối thì góc nhị diện θ thỏa mãn:

$$\cos \theta = -\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

- Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) :

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến đường thẳng Δ (qua A , vtcp $\vec{u}$):

$$d(M, \Delta) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $\Delta_1(M_1, \vec{u}_1)$ và $\Delta_2(M_2, \vec{u}_2)$:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$$

- Diện tích tam giác ABC trong không gian:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$$

- Thể tích khối tứ diện $ABCD$ (ứng dụng tích hỗn tạp):

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$$

Ví dụ 1. Phân biệt góc giữa hai mặt phẳng và góc nhị diện

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- Tính góc φ giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.
- Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.
- Tính góc nhị diện $[S, BD, C]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Khoảng cách cổ điển và kỹ thuật dời điểm

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Biết $SA = a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$.

- Tính khoảng cách từ chân đường cao A đến mặt phẳng (SBC) .
- Gọi M là trung điểm của cạnh AC . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Tọa độ hóa hình hộp chữ nhật

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Bằng phương pháp tọa độ hóa, hãy tính:

- cosin góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'B$ và $B'C$.
- Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(ABCD)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Tọa độ hóa hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

- Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- Tính khoảng cách từ trung điểm H của AB đến mặt phẳng (SCD) .
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Tọa độ hóa hình lăng trụ xiên

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Đỉnh A' có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm O của tam giác ABC . Biết cạnh bên $AA' = a$. Bằng phương pháp tọa độ hóa, hãy tính:

- Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- Góc nhị diện $[B', BC, A]$.
- Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

[illegible]

 LUYỆN TẬP TẠI LỚP

 Luyện tập: Hình học không gian

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$.
Cặp đường thẳng nào sau đây **không** vuông góc với nhau?

- A. BD và SC . B. AB và SD . C. BC và SD . D. AD và SB .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp (SAB)$. B. $AB \perp (SBC)$. C. $SA \perp BC$. D. $AB \perp SA$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. a . D. $\frac{a}{2}$.

Câu 6: Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$ bằng

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $D(0; 4; 0)$ và $A'(0; 0; 3)$. Tọa độ của điểm C' là

- A. $C'(2; 4; 3)$. B. $C'(2; 4; 0)$. C. $C'(0; 4; 3)$. D. $C'(2; 0; 3)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Cosin của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , chiều cao $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối lăng trụ này bằng

- A. $V = \frac{3a^3}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{3a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3}{4}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, một hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tâm đáy trùng với gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$, đỉnh $S(0; 0; 6)$ và một đỉnh đáy là $A(2; 0; 0)$. Khoảng cách từ tâm đáy O đến mặt bên (SAB) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{37}}{37}$. B. $\frac{3\sqrt{37}}{37}$. C. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. D. $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

[Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Dựa vào thông tin sau, trả lời các câu hỏi 11, 12, 13.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

Câu 11: Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12: Góc hợp bởi giữa SC và mặt phẳng đáy xấp xỉ bằng

- A. $57,16^\circ$. B. $24,09^\circ$. C. $37,76^\circ$. D. $32,31^\circ$.

Câu 13: Khoảng cách từ A đến mặt phẳng SBC là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

[Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Dựa vào thông tin sau, trả lời các câu hỏi từ 14 đến 16.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $OB = OC = a$.

Câu 14: Chu vi tam giác ABC bằng

- A. $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})a$. B. $(\sqrt{3} + \sqrt{6})a$.
C. $(\sqrt{2} + \sqrt{6})a$. D. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})a$.

Câu 15: Góc hợp bởi hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) là

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 75° .

Câu 16: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối tứ diện $OABH$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Câu 17: [Trích đề ĐGNL 2024 - đợt 1] Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại B , $AD \perp (ABC)$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $BD = a\sqrt{5}$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	2. B	3. B	4. C	5. A	6. A	7. A	8. B	9. A
10. D	11. A	12. D	13. C	14. C	15. A	16. A	17. D	

II. PHẦN TỰ LUẬN

- Bài 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Hãy tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) .
- Bài 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, và cạnh bên $SC = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- Bài 3:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của CC' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'B$ và DM .
- Bài 4:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) .
- Bài 5:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) .
- Bài 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Hãy thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SB và AC .
- Bài 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác đều và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp và góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng đáy.
- Bài 8:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Hãy tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng phương pháp tọa độ hóa.
- Bài 9:** Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc tại O . Biết $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính góc giữa hai đường thẳng OM và AB .
- Bài 10:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC , cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính thể tích của khối đa diện $S.AB'C'D'$.

🏠 BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** về mối quan hệ vuông góc?

- A. $BC \perp SB$. B. $BC \perp SC$. C. $AB \perp SC$. D. $AC \perp SB$.

Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $AB \perp CD$. B. $AB \perp BC$.
C. $AC \perp BD$. D. Cả A và C đều đúng.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm S đến điểm C bằng

- A. $a\sqrt{5}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 8: Thể tích V của khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và chiều cao $AA' = 3a$ bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $3a^3\sqrt{2}$.

Câu 9: Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ gắn vào hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh 2 đơn vị, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3$ đơn vị. Chọn $A \equiv O(0; 0; 0)$, AB nằm trên tia Ox , AD nằm trên tia Oy , AS nằm trên tia Oz . Tọa độ trọng tâm G của tam giác SBC là

A. $G\left(1; \frac{2}{3}; 1\right)$. B. $G\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$. C. $G(1; 1; 1)$. D. $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Trục tọa độ gắn sao cho $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ có giá trị là α . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Cosin của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'B$ và $B'C$ bằng

A. 0,5. B. 0. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 14: Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh (bao gồm cả cạnh đáy và cạnh bên) đều bằng a là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 16: Trong phương pháp tọa độ hóa, nếu đáy là tam giác đều ABC cạnh a , ta nên chọn gốc tọa độ O trùng với trung điểm H của BC . Khi đó, nếu trục Ox chứa tia HC thì tọa độ của đỉnh A là

A. $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. B. $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$. C. $A\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. D. $A\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = a$, $BC = a$. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SB và AC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. a . D. $\frac{a}{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Cosin của góc nhị diện $[S, BD, A]$ (góc giữa mặt bên (SBD) và mặt đáy $(ABCD)$) là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 19: Tính thể tích khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$:

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Khoảng cách từ điểm A đến đường chéo $B'D$ của hình hộp bằng

- A. $\frac{a\sqrt{14}}{14}$. B. $\frac{3a\sqrt{14}}{14}$. C. $\frac{3a\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$. D. $\frac{6a\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$.

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 1] Dựa vào thông tin dưới đây để trả lời các câu từ 21 đến câu 23

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD , H là trung điểm cạnh AB , N là trung điểm cạnh AD .

Câu 21: Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là

- A. O . B. A . C. H . D. N .

Câu 22: Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $d(D, (SAC)) = d(H, (SAC))$. B. $d(D, (SAC)) = d(B, (SAC))$.
C. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. D. $\frac{a\sqrt{25}}{48}$.

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Dựa vào thông tin sau, trả lời các câu hỏi 24, 25, 26.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ (đáy). Biết $\triangle ABC$ cân tại A , đường trung tuyến $AD = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , góc giữa mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng đáy bằng 30° .

Câu 24: Góc tạo bởi SB và đáy là

- A. $\widehat{ASB}$. B. $\widehat{SBA}$. C. $\widehat{SAB}$. D. $\widehat{SAD}$.

Câu 25: Số đo $\widehat{SCD}$ bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 26: Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. B. $3a^3\sqrt{2}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. A	2. D	3. B	4. A	5. A	6. A	7. A	8. A	9. B	10. A
11. A	12. A	13. A	14. A	15. A	16. A	17. A	18. A	19. A	20. C
21. C	22. A	23. A	24. B	25. B	26. D				

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Chân đường cao xuất phát từ đỉnh S trùng với trung điểm H của cạnh AB . Biết cạnh bên $SC = a\sqrt{2}$. Hãy tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Hãy tính góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng phương pháp hình học cổ điển.

Bài 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Biết thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3$. Hãy tính chiều cao của khối lăng trụ này.

Bài 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Hãy thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp để tìm tọa độ tất cả 8 đỉnh và tính khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BD)$.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Bằng phương pháp tọa độ hóa, hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SB và CD .

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Hãy gắn trục tọa độ (gợi ý lấy gốc tại trung điểm BC hoặc từ đỉnh A) để tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, và góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng 60° . Hãy tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Bài 8: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc tại O . Biết $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Hãy tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

CHUYÊN ĐỀ 6: THỐNG KÊ VÀ PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

1. Phân biệt Thống kê Không ghép nhóm và Ghép nhóm

Để giúp học sinh không bị nhầm lẫn và hiểu rõ bản chất, chúng ta cần phân biệt rõ hai loại hình dữ liệu này:

Tiêu chí so sánh	Thống kê Không ghép nhóm (Lớp 10)	Thống kê Ghép nhóm (Lớp 11)
Bản chất dữ liệu	Dữ liệu rời rạc, các giá trị biến thiên ít, cỡ mẫu thường nhỏ.	Dữ liệu liên tục (chiều cao, thời gian, thu nhập...) hoặc cỡ mẫu rất lớn.
Cách biểu diễn	Mỗi giá trị x_i đi kèm với một tần số n_i cụ thể.	Các giá trị được gom vào các khoảng hoặc nửa khoảng $[u_m; u_{m+1})$.
Tính chính xác	Các số đặc trưng (Trung bình, Trung vị, Mốt) tính ra là "chính xác tuyệt đối".	Các số đặc trưng chỉ mang tính chất "xấp xỉ (ước lượng)" dựa trên giá trị đại diện.
Giá trị đại diện	Chính là giá trị x_i của nhóm.	Là trung điểm của khoảng: $c_m = \frac{u_m + u_{m+1}}{2}$.

2. Hệ thống công thức Thống kê Không ghép nhóm (Lớp 10)

Cho bảng tần số với các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_k$ và tần số tương ứng $n_1, n_2, \dots, n_k$. Tổng số mẫu là $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

- Số trung bình ($\bar{x}$):** $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n}$
- Trung vị (M_e):** Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm.
 - Cỡ mẫu n lẻ: M_e là giá trị đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$.
 - Cỡ mẫu n chẵn: M_e là trung bình cộng của hai giá trị đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$.
- Tứ phân vị (Q_1, Q_2, Q_3):** $Q_2 = M_e$. Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 . Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 .
- Phương sai (s^2) và Độ lệch chuẩn (s):** Đo mức độ phân tán của số liệu.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \Rightarrow s = \sqrt{s^2}$$

3. Hệ thống công thức Thống kê Ghép nhóm (Lớp 11)

Khi tính toán dữ liệu ghép nhóm, mọi công thức đều phải tìm **khoảng chứa chứa đại lượng cần tính** trước.

- **Số trung bình ước lượng ($\bar{x}$):** Tính giá trị đại diện $c_i = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$ cho mỗi nhóm.

$$\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n}$$

- **Trung vị ước lượng (M_e):** Giả sử M_e thuộc nhóm $[u_m; u_{m+1})$ (nhóm đầu tiên có tần số tích lũy $\geq \frac{n}{2}$).

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - (n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1})}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

- **Mốt ước lượng (M_o):** Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ có tần số lớn nhất n_m .

$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

4. Chiến lược xử lý bài toán Phân tích số liệu thực tế (Đọc biểu đồ)

Để giải quyết cụ thể cụm 6 câu hỏi phân tích số liệu trong đề thi, học sinh cần tuân thủ 3 nguyên tắc:

- **Đọc kỹ chú giải và đơn vị:** Lỗi phổ biến nhất là nhầm lẫn đơn vị (ví dụ: triệu người, % hoặc tỉ đồng).
- **Phân biệt tốc độ tăng trưởng và giá trị tuyệt đối:** Biểu đồ đường thể hiện tốc độ (%) khác với biểu đồ cột thể hiện sản lượng cụ thể.
- **Kỹ năng tính toán nhanh:** Tần suất xuất hiện các câu hỏi liên quan đến: Tỷ lệ phần trăm tăng/giảm, trung bình cộng giai đoạn, dự báo xu hướng.

Ví dụ 1. Thống kê không ghép nhóm

Điểm số bài kiểm tra định kỳ môn Toán của một nhóm 10 học sinh được ghi lại như sau: 6; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 9; 10; 10. Hãy tính số trung bình, trung vị, tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu này.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Thống kê ghép nhóm

Khảo sát thời gian tự học tại nhà trong một tuần của 40 học sinh lớp 11 thu được bảng số liệu sau:

Thời gian (giờ)	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)
Số học sinh (n_i)	5	12	18	5

Hãy tính thời gian tự học trung bình ước lượng, Mốt, tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm này.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Phân tích bảng số liệu thực tế

Đề bài: Dựa vào bảng số liệu về Doanh thu và Lợi nhuận sau thuế của Công ty X giai đoạn 2021 - 2024 dưới đây để trả lời cụm 6 câu hỏi trắc nghiệm liên tiếp (Mô phỏng đề thi Đánh giá năng lực):

Năm	2021	2022	2023	2024
Doanh thu (Tỷ đồng)	120	150	180	200
Lợi nhuận sau thuế (Tỷ đồng)	12	18	27	28

1. Doanh thu của công ty năm 2023 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2021?
2. Lợi nhuận sau thuế của công ty năm 2021 giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2024?
3. Biên lợi nhuận (Lợi nhuận / Doanh thu) của công ty đạt giá trị cao nhất vào năm nào?
4. Tốc độ tăng trưởng lợi nhuận của năm nào so với năm trước đó là lớn nhất?
5. Tổng doanh thu của toàn giai đoạn 2021 - 2024 là bao nhiêu tỷ đồng?
6. Nếu doanh thu năm 2025 tăng 10% so với năm 2024, doanh thu dự kiến năm 2025 là bao nhiêu?
7. Lợi nhuận trung bình mỗi năm của công ty trong giai đoạn này là bao nhiêu tỷ đồng?

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Thống kê và phân tích số liệu

I. THỐNG KÊ

Câu 1: Khảo sát số điểm kiểm tra định kỳ môn Toán của một nhóm học sinh, ta thu được bảng tần số sau đây:

Điểm số (x_i)	6	7	8	9
Số học sinh (n_i)	3	4	5	2

Cặp số đặc trưng (Trung vị M_e ; Mốt M_o) của mẫu số liệu này lần lượt là

- A. (7, 5; 8). B. (7; 8). C. (8; 7, 5). D. (7, 5; 7).

Câu 2: Cho bảng phân bố tần số ghi nhận về số lỗi chính tả trong một bài tập làm văn của 11 học sinh trong lớp:

Số lỗi chính tả	4	5	6	7	8
Số học sinh	2	3	3	2	1

Cặp giá trị tứ phân vị thứ nhất Q_1 và thứ ba Q_3 của mẫu số liệu thống kê trên là

- A. (5; 7). B. (4; 7). C. (5; 6). D. (6; 7).

Câu 3: Khảo sát tuổi thọ của một nhóm linh kiện điện tử (đơn vị tính: tháng) chạy thử nghiệm thu được bảng số liệu ghép nhóm:

Tuổi thọ (tháng)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)
Số linh kiện (n_i)	4	8	12	6

Giá trị Mốt ước lượng M_o của mẫu số liệu ghép nhóm này bằng

- A. 24 tháng. B. 25 tháng. C. 22 tháng. D. 26 tháng.

Câu 4: Khi tính toán các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của một mẫu số liệu liên tục được cho dưới dạng ghép nhóm, giá trị nào sau đây được chọn làm đại diện cho nhóm $[a; b)$?

- A. a . B. b . C. $\frac{a+b}{2}$. D. $b-a$.

Câu 5: Khảo sát số giờ ngủ trung bình mỗi đêm của một nhóm sinh viên thu được phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 2,25$. Độ lệch chuẩn s (đo mức độ phân tán) của mẫu số liệu này bằng

- A. 1, 5. B. 2, 25. C. 0, 5. D. 1, 25.

Câu 6: Trong các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của thống kê không ghép nhóm, đại lượng nào có nhược điểm lớn nhất là dễ bị ảnh hưởng và sai lệch bởi các giá trị dị biệt (quá lớn hoặc quá nhỏ)?

- A. Số trung bình. B. Trung vị. C. Mốt. D. Tứ phân vị.

Câu 7: Một doanh nghiệp có doanh thu tháng 1 là 50 triệu đồng, tháng 2 do áp dụng chiến dịch Marketing mới nên doanh thu tăng lên đạt 80 triệu đồng. Hỏi doanh thu tháng 2 đã tăng trưởng bao nhiêu phần trăm so với tháng 1?

- A. 60%. B. 30%. C. 40%. D. 50%.

Câu 8: Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tổng tần số (cỡ mẫu) là $n = 60$. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất Q_1 sẽ là nhóm đầu tiên tính từ trái sang phải có tần số tích lũy đạt giá trị tối thiểu là bao nhiêu?

- A. 15. B. 30. C. 45. D. 10.

Câu 9: Sản lượng xuất khẩu gạo của một tỉnh trong 3 năm liên tiếp lần lượt được ghi nhận là: 2,0; 2,2; 2,42 (triệu tấn). Tốc độ tăng trưởng sản lượng xuất khẩu đều đặn mỗi năm trong giai đoạn này là

- A. 10%. B. 20%. C. 5%. D. 12%.

Câu 10: Điểm số của học sinh lớp 11A có độ lệch chuẩn là $s_1 = 0,4$, điểm số của học sinh lớp 11B có độ lệch chuẩn là $s_2 = 1,6$ (hai lớp có cùng điểm trung bình). Phát biểu nào sau đây phản ánh đúng thực tế?

- A. Học lực lớp 11B đồng đều hơn lớp 11A.
B. Học lực lớp 11A đồng đều hơn lớp 11B.
C. Điểm số lớp 11A phân tán rộng hơn lớp 11B.
D. Hai lớp có độ đồng đều như nhau.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN THỐNG KÊ

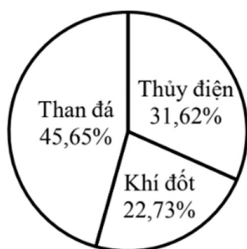
1. A	2. A	3. A	4. C	5. A	6. A	7. A	8. A	9. A	10. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

II. PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

[Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Dựa vào thông tin sau, trả lời các câu hỏi từ 1 đến 3.

Hai biểu đồ dưới đây thể hiện tỷ trọng sản lượng điện sản xuất trong các năm 2005 và 2015.

Tổng sản lượng điện năm 2005



Tổng sản lượng điện năm 2015



Tổng sản lượng điện từ các nguồn trên vào năm 2005 và 2015 lần lượt là 40,7 tỉ kWh và 143,3 tỉ kWh.

Câu 1: Trong giai đoạn 2005-2015, sản lượng điện từ thủy điện năm 2015 đã tăng bao nhiêu phần trăm so với tổng sản lượng điện của năm 2005?

- A. 125,67%. B. 120,54%. C. 97,35%. D. 105,23%.

Câu 2: Trong giai đoạn 2005–2015, sản lượng điện từ nguồn nào tăng nhiều nhất so với tổng sản lượng năm 2005?

- A. Thủy điện. B. Khí đốt.
C. Than đá. D. Chưa đủ thông tin để kết luận.

Câu 3: Tổng sản lượng điện năm 2015 tăng 11,44%, nhưng sản lượng thủy điện lại giảm 4,80% so với năm 2014. Hãy tính tỉ trọng sản lượng thủy điện so với tổng sản lượng điện năm 2014.

- A. 61,01%. B. 48,23%. C. 39,38%. D. 42,88%.

[Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Dựa vào thông tin dưới đây để trả lời các câu hỏi từ 4 đến 6

Bảng số liệu dưới đây thể hiện số lượng sinh viên nhập học tại trường A. Vào năm 2014, số sinh viên ngành Công nghệ Thông tin (CNTT) bằng 80% tổng số sinh viên ngành này của 2 năm trước, trong khi số sinh viên ngành Y sinh tăng 20% so với năm trước.

Ngành/Năm	2012	2013	2014
Sư phạm	150	-	250
CNTT	500	850	-
Kinh tế	250	-	600
Y sinh	225	375	-

Câu 4: Đến cuối học kỳ 1 năm 2012, tỷ lệ sinh viên thôi học của các ngành Sư phạm, CNTT và Y Sinh lần lượt là 8%, 10% và 12%. Riêng ngành Kinh tế không có sinh viên nào thôi học. Tỷ lệ thôi học của toàn trường năm 2012 xấp xỉ bằng bao nhiêu?

- A. 30%. B. 12%. C. 8%. D. 10%.

Câu 5: Năm 2013, số sinh viên ngành Kinh tế nhập học tăng 80% so với năm 2012, và tỉ lệ sinh viên ngành Kinh tế so với toàn trường đạt $\frac{3}{14}$. Vậy, tổng số sinh viên nhập học năm 2013 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2012?

- A. 96,7%. B. 86,7%. C. 76,7%. D. 66,7%.

Câu 6: Tổng số sinh viên nhập học năm 2014 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2012?

- A. 95%. B. 145%. C. 112%. D. 103%.

[Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Dựa vào thông tin sau, trả lời các câu hỏi từ 7 đến 9.

Cho bảng điểm của 5 lớp. Nếu điểm thấp hơn 5 sẽ rớt môn, từ 5 điểm trở lên sẽ qua môn.

Lớp	Dưới 5 điểm	5 – 8 điểm	Trên 8 điểm
1	28	72	24
2	15	68	36
3	18	52	28
4	29	58	47
5	30	60	35

Câu 7: Tổng số sinh viên của 5 lớp có bao nhiêu phần trăm rớt môn?

- A. 18,8%. B. 20%. C. 15,6%. D. 21,2%.

Câu 8: Trong số các sinh viên trên 8 điểm có 20% sinh viên đạt điểm 10. Tỷ lệ sinh viên đạt điểm 10 của 5 lớp là:

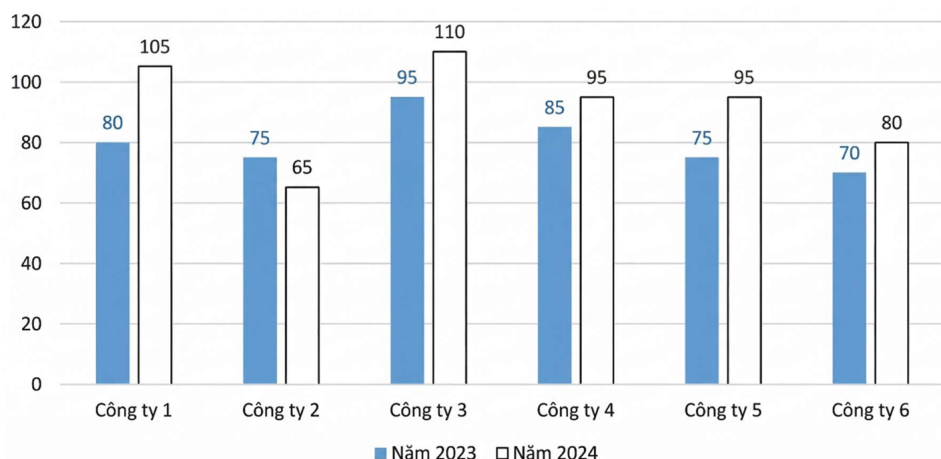
- A. 7,9%. B. 7,16%. C. 5,67%. D. 20%.

Câu 9: Trong lớp mà tỷ lệ sinh viên rớt môn nhiều nhất, 1 số bạn đã phúc khảo và qua môn nên lớp đó không còn là lớp có tỷ lệ rớt môn nhiều nhất. Có ít nhất bao nhiêu bạn tăng điểm và qua môn sau khi phúc khảo?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

[Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Dựa vào thông tin sau, trả lời các câu hỏi từ 10 đến 12.

Số vở bán ra (đơn vị: nghìn cuốn) trong năm 2023 và 2024 của 6 công ty 1, 2, 3, 4, 5, 6 được thống kê như sau:



Câu 10: Tổng số vở (nghìn cuốn) trong 2 năm của các công ty 1, 3, 5 là:

- A. 250. B. 560. C. 310. D. 435.

Câu 11: Tỷ lệ tổng số vở bán trong 2 năm của công ty 2 so với công ty 4 là

- A. 3:5. B. 7:9. C. 4:5. D. 2:3.

Câu 12: Trong năm 2023, giá bán vở của công ty 5 và 6 như nhau. Trong năm 2024, công ty 5 tăng 10%, công ty 6 tăng 15% so với giá năm 2023. Tỷ lệ doanh thu công ty 5 với công ty 6 trong cả 2 năm là:

- A. 113,5%. B. 88%. C. 110,8%. D. 90,3%.

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 1] Dựa vào đoạn thông tin sau trả lời từ câu 13 đến câu 15

Bảng sau thể hiện sản lượng mía của một công ty mía có 6 nông trường M, N, P, Q, R, S.

Nông trường Năm	M	N	P	Q	R	S
2016	150	75	58	48	49	32
2017	137	68	67	61	45	28
2018	160	65	82	59	46	37
2019	168	70	45	75	43	35
2020	180	55	80	67	47	28

Câu 13: Trong giai đoạn 2016-2020, năm nào có tổng sản lượng cao nhất?

- A. 2016. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

Câu 14: Tổng sản lượng của công ty năm 2020 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2016?

- A. 7%. B. 9,1%. C. 10,9%. D. 13,3%.

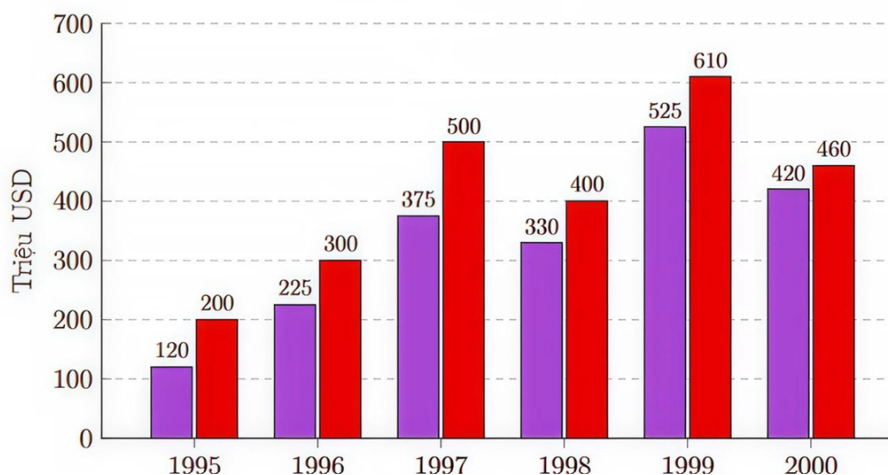
Câu 15: Từ năm 2016 đến 2020, nông trường nào tỷ lệ sản lượng tăng cao nhất?

- A. M. B. S. C. Q. D. P.

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 1] Dựa vào đoạn thông tin sau trả lời từ câu 16 đến câu 18

Biểu đồ dưới đây cho biết giá trị xuất nhập khẩu của công ty X trong giai đoạn từ 1995-2000 (đơn vị: triệu USD).

Biểu đồ giá trị xuất nhập khẩu giai đoạn công ty X 1995-2000
(đơn vị: triệu USD)



Câu 16: Trong các năm 1995, 1996, 1998, 1999, năm nào có độ chênh lệch giữa giá trị xuất khẩu và nhập khẩu lớn nhất?

- A. 1995. B. 1996. C. 1998. D. 1999.

Câu 17: Tổng trị giá xuất khẩu trong năm 1999 xấp xỉ bao nhiêu phần trăm tổng trị giá hàng nhập khẩu trong các năm 1997, 1998 và 1999?

- A. 33%. B. 35%. C. 47,5%. D. 49%.

Câu 18: Trong các năm từ 1996 đến 1999, tổng trị giá xuất - nhập khẩu của năm nào có tỷ lệ phần trăm tăng nhiều nhất so với năm trước đó?

- A. 1996. B. 1997. C. 1998. D. 1999.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

1. C	2. A	3. D	4. C	5. B	6. C	7. B	8. C	9. C	10. B
11. B	12. C	13. D	14. C	15. C	16. D	17. D	18. B		

BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

Câu 1: Để khảo sát mức độ ổn định của một máy gia công tự động, kỹ thuật viên đo đường kính sai lệch của 10 sản phẩm (đơn vị: μm) và lập bảng tần số:

Sai lệch đường kính (x_i)	10	20	30
Số lượng sản phẩm (n_i)	2	6	2

Phương sai s^2 (đo độ phân tán số liệu) của mẫu số liệu trên bằng

- A. 40. B. 20. C. 10. D. 30.

Câu 2: Khảo sát số ngày nghỉ phép trong năm của một nhóm 13 nhân viên tại một công ty, ta thu được bảng số liệu sau:

Số ngày nghỉ phép	0	1	2	3	4
Số nhân viên tương ứng	2	3	4	3	1

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ của mẫu số liệu không ghép nhóm này là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 3: Thời gian chạy cự ly 100m của một nhóm 40 học sinh được ghi lại trong bảng ghép nhóm dưới đây:

Thời gian chạy (giây)	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)
Số học sinh (n_i)	5	11	16	8

Giá trị trung vị ước lượng M_e của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. 9. B. 8,5. C. 9,5. D. 10.

Câu 4: Một cuộc khảo sát về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 40 khách hàng chi trả tại một quán cà phê thu được bảng số liệu:

Số tiền chi trả	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Số lượng khách hàng	6	8	18	8

Tứ phân vị thứ nhất ước lượng Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. 25. B. 24. C. 26. D. 22,5.

Câu 5: Thống kê năng suất lúa (đơn vị: tấn/ha) của 50 hợp tác xã trong một tỉnh được biểu diễn qua bảng ghép nhóm sau:

Năng suất lúa (tấn/ha)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)
Số hợp tác xã	5	20	15	10

Năng suất lúa trung bình ước lượng $\bar{x}$ của toàn tỉnh đạt:

- A. 6,1 tấn/ha. B. 6,2 tấn/ha. C. 6,0 tấn/ha. D. 6,3 tấn/ha.

Câu 6: Người ta tiến hành khảo sát điểm số đánh giá mức độ hài lòng của khách hàng (thang điểm từ 1 đến 5) đối với sản phẩm của hai cơ sở sản xuất Máy A và Máy B thu được bảng số liệu:

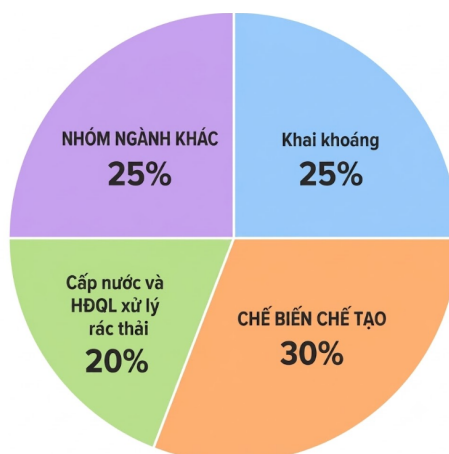
Điểm số đánh giá	1	2	3	4	5
Số khách hàng Máy A	2	5	10	2	1
Số khách hàng Máy B	1	3	12	3	1

Tính toán điểm số đánh giá trung bình và cho biết điểm trung bình của sản phẩm Máy B lớn hơn sản phẩm Máy A là bao nhiêu?

- A. 0,25. B. 0,50. C. 0,15. D. 0,30.

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Dựa vào đoạn thông tin sau trả lời từ câu 7 đến câu 9

Cho biểu đồ:



Câu 7: Số lượng lao động trong chế biến chế tạo chiếm nhiều hơn bao nhiêu % so với khai khoáng?

- A. 15%. B. 10%. C. 5%. D. 20%.

Câu 8: Trong nhóm ngành khác, ngành sản xuất và phân phối điện chiếm 20%. Tỷ lệ người lao động sản xuất & phân phối điện so với người lao động chế biến chế tạo là

- A. 1 : 3. B. 1 : 6. C. 1 : 5. D. 1 : 2.

Câu 9: Trong năm 2015 do lao động ngành khai khoáng chuyển sang nên số lao động chế biến chế tạo tăng 10%. Số lao động ngành khai khoáng giảm bao nhiêu %?

- A. 6%. B. 3%. C. 9%. D. 12%.

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Dựa vào đoạn thông tin sau trả lời từ câu 10 đến câu 12

Cho bảng số liệu tổng hợp:

Năm	Tỷ lệ LN C.ty A (%)	Chi phí C.ty A (tỷ)	Chi phí C.ty B (tỷ)	Tỷ lệ LN C.ty B (%)
2014	16,5	15,4	15,2	20,1
2015	17,2	16,2	17,3	22,1
2016	19,6	18,5	16,3	20,3
2017	20,1	19,3	18,5	25,4
2018	22,3	22,4	20,2	23,3
2019	23,4	24,2	22,1	24,6

Câu 10: Doanh thu của công ty A năm 2014 là

- A. 19,5 tỷ đồng. B. 16,1 tỷ đồng. C. 18,2 tỷ đồng. D. 21,3 tỷ đồng.

Câu 11: Chênh lệch về lợi nhuận giữa công ty A và B năm 2019 là

- A. 215 triệu đồng. B. 182 triệu đồng. C. 153 triệu đồng. D. 100 triệu đồng .

Câu 12: Giai đoạn 2014-2019 chi phí công ty A xấp xỉ bao nhiêu phần trăm so với doanh thu?

- A. 76%. B. 79%. C. 73%. D. 82%.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

1. A	2. A	3. A	4. A	5. A	6. A	7. D	8. B	9. D	10. A	11. B	12. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------

CHUYÊN ĐỀ 7: ĐẠO HÀM

DẠNG 1. CÁC CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

1. Bảng hệ thống công thức đạo hàm đầy đủ

Đạo hàm hàm số sơ cấp	Đạo hàm hàm hợp $u = u(x)$
1. Hàm số đa thức, phân thức, căn thức, mũ	
$(c)' = 0$ (c là hằng số)	—
$(x)' = 1$	$(u)' = u'$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
2. Hàm số lượng giác	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
3. Quy tắc đạo hàm nhanh phân thức	
$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	
$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+(be-cd)}{(dx+e)^2}$	

2. Các quy tắc tính đạo hàm cơ bản

Cho $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm, ta có:

- Đạo hàm của tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- Đạo hàm của tích: $(u \cdot v)' = u'v + uv' \rightarrow$ Mở rộng: $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ (với $k \in \mathbb{R}$).
- Đạo hàm của thương: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (với $v(x) \neq 0$).

Ví dụ 1. Tính đạo hàm hàm hợp bậc cao

Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2 + 3)^5$.

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tính đạo hàm phân thức chứa căn

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Tính đạo hàm

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 2] Cho hàm số $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + m$. Đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 1$ bằng

- A. $9 + m$. B. 9. C. 3. D. $3 + m$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ trên các khoảng xác định.

- A. $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$. B. $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$. C. $y' = \frac{5}{(x+1)^2}$. D. $y' = \frac{-5}{(x+1)^2}$.

Câu 3: Hàm số $y = \sin(2x) - \cos x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

- A. $y' = \cos(2x) - \sin x$. B. $y' = 2 \cos(2x) - \sin x$.
C. $y' = -2 \cos(2x) + \sin x$. D. $y' = 2 \cos(2x) + \sin x$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là

- A. $(-2; +\infty)$. B. $[-2; +\infty)$. C. $(-\infty; -2]$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 5: Tìm đạo hàm của hàm số đa thức hợp $y = (2x^2 - 1)^3$.

- A. $y' = 6x(2x^2 - 1)^2$. B. $y' = 3(2x^2 - 1)^2$.
C. $y' = 12x(2x^2 - 1)^2$. D. $y' = 4x(2x^2 - 1)^2$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số lượng giác phức tạp $y = \tan^2 x$.

- A. $y' = 2 \tan x$. B. $y' = \frac{2 \tan x}{\cos x}$.
C. $y' = \frac{2}{\cos^2 x}$. D. $y' = 2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Khẳng định nào sau đây biểu diễn đúng đạo hàm của hàm số?

- A. $y' = \cos x + x \sin x$. B. $y' = \cos x - x \sin x$.
C. $y' = -\sin x$. D. $y' = \cos x - \sin x$.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ là biểu thức nào?

- A. $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x - 1)^2}$. B. $y' = \frac{x^2 - 2}{(x - 1)^2}$. C. $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. D. $y' = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A. $(1; 3)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $[-3; -1]$. D. Tập rỗng $\emptyset$.
 $(3; +\infty)$.

Câu 10: Tính đạo hàm cấp hai y'' của hàm số $y = \sin x + x^3$.

- A. $-\sin x + 6x$. B. $\cos x + 3x^2$. C. $-\cos x + 6x$. D. $\sin x + 6x$.

II. PHẦN TỰ LUẬN Tính đạo hàm của các hàm số sau đây:

Bài 1: $y = 2x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \sqrt{x} + 7$.

.....
.....

Bài 2: $y = (x^2 - 3x)(x^3 + 2x)$.

.....
.....

Bài 3: $y = \frac{3x - 1}{2x + 5}$.

.....
.....

Bài 4: $y = \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$.

.....

Bài 5: $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$.

.....

Bài 6: $y = x^2 \cdot \sin(3x)$.

.....

Bài 7: $y = \cos \sqrt{x^2 + 1}$.

.....

Bài 8: $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$.

.....

Bài 9: Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$ với $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

.....

Bài 10: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x$. Chứng minh rằng biểu thức $f(x) + f''(x) - 2 \sin^2 x$ là một hằng số độc lập với x .

.....

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B	2. C	3. D	4. B	5. C	6. D	7. B	8. C	9. A	10. A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VÀ ỨNG DỤNG VẬT LÝ CỦA ĐẠO HÀM

💡 Phương trình tiếp tuyến

- Ý nghĩa hình học: Đạo hàm $f'(x_0)$ chính là hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$.
- Công thức phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Trong đó, x_0 là hoành độ tiếp điểm, $y_0 = f(x_0)$ là tung độ tiếp điểm.

- *Mối quan hệ song song - vuông góc:*

Nếu tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b \rightarrow k = f'(x_0) = a$.

Nếu tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b \rightarrow k \cdot a = -1 \rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.

💡 Ứng dụng vật lý của đạo hàm

- Xét một chuyển động có phương trình vị trí phụ thuộc thời gian là $s = s(t)$.
- Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t_0 là đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động: $v(t_0) = s'(t_0)$.
- Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t_0 là đạo hàm cấp một của vận tốc, hoặc đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động: $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

🏠 Ví dụ 3.

Cho hàm số $(C) : y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Dạng 1: Viết PTTT tại điểm có hoành độ cho trước: $x_0 = 3$.

.....

.....

Dạng 2: Viết PTTT tại điểm có tung độ cho trước: $y_0 = 2$.

.....

.....

Dạng 3: Viết PTTT song song với đường thẳng $(d) : y = 9x + 5$.

.....

.....

Dạng 4: Viết PTTT vuông góc với đường thẳng $(\Delta) : y = -\frac{1}{9}x + 2$.

.....

Dạng 5: Viết PTTT biết hệ số góc $k = -3$.

Dạng 6: Viết PTTT đi qua điểm $A(0; 2)$.

Ví dụ 4.

Ví dụ ứng dụng vật lý: Một vật chuyển động thẳng có phương trình quãng đường $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 1$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tính vận tốc của vật tại thời điểm gia tốc bị triệt tiêu.

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập: Viết phương trình tiếp tuyến và ứng dụng vật lý

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

- A. $y = 2x - 3$. B. $y = x - 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = 3x - 4$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị với trục tung là bao nhiêu?

- A. $k = 3$. B. $k = -3$. C. $k = -1$. D. $k = 1$.

Câu 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực đại có hệ số góc bằng

- A. 1. B. -1. C. 2. D. 0.

Câu 4: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ song song với đường thẳng $y = 3x - 2$?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Câu 5: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 4$ là

- A. Không tồn tại tiếp tuyến thỏa mãn. B. $y = -3x + 3$.
C. $y = -3x - 1$. D. $y = -3x + 3$ và $y = -3x + \frac{5}{3}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết nó có hệ số góc $k = 2$.

- A. $y = 2x + 6$. B. $y = 2x - 6$. C. $y = 2x - 2$. D. $y = 2x - 3$.

Câu 7: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ đi qua điểm $A(1; -2)$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 8: Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là

- A. 9 m/s^2 . B. 6 m/s^2 . C. 12 m/s^2 . D. 0 m/s^2 .

Câu 9: Một chuyển động thẳng có phương trình quãng đường $s(t) = -\frac{1}{2}t^4 + 4t^3$ ($t > 0$). Vận tốc lớn nhất mà vật đạt được trong quá trình chuyển động bằng bao nhiêu?

- A. 32 m/s . B. 64 m/s . C. 16 m/s . D. 48 m/s .

Câu 10: [Trích đề ĐGNL 2025 - đợt 1] Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Trên (C) có hai điểm phân biệt và tại đó, tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = x$. Gọi m là tổng hoành độ của hai điểm. Giá trị của m là

- A. -1 . B. -3 . C. -2 . D. 2 .

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 = 2$.

.....

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ $y_0 = 3$.

.....

.....

Bài 3: Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -9x + 1$.

.....

.....

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = 2x - 5$.

.....

Bài 5: Tìm tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = x^4 - 2x^2$ có hệ số góc bằng 0.

.....

Bài 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ đi qua điểm gốc tọa độ $O(0; 0)$.

.....

Bài 7: Một viên đạn được bắn lên trời theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $v_0 = 196$ m/s. Phương trình chuyển động của viên đạn là $s(t) = 196t - 4,9t^2$ (t tính bằng giây). Hỏi sau bao lâu viên đạn đạt độ cao cực đại và độ cao đó bằng bao nhiêu?

.....

Bài 8: Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + 2$. Chứng minh rằng vận tốc của vật luôn không âm với mọi thời điểm $t \geq 0$.

.....

Bài 9: Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tạo thành một tam giác vuông cân.

.....

Bài 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm điểm A thuộc đồ thị sao cho tiếp tuyến tại A cắt đồ thị tại một điểm B khác A thỏa mãn $x_B = 4$.

.....

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. C	2. B	3. D	4. C	5. A	6. B	7. D	8. C	9. B	10. C
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM HỢP CỐT LÕI

Để giải bài toán xác định hàm $f(x)$ qua phương trình vi phân cấp 1 mà không dùng tích phân phức tạp, ta quy về đạo hàm của các hàm số sơ cấp quen thuộc theo bảng sau:

STT	Dạng biểu thức liên hệ	Công thức quy về Đạo hàm hợp
1	$x \cdot f'(x) - f(x)$	$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$
2	$u'(x)f(x) + u(x)f'(x)$	$[u(x) \cdot f(x)]' = u'(x)f(x) + u(x)f'(x)$
3	$f'(x)$ và $\sqrt{f(x)}$	$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
4	$f'(x)$ và $[f(x)]^2$	$\left[-\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
5	$f'(x)$ và $f(x)$	$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
6	$f'(x)$ và $e^{f(x)}$	$[e^{f(x)}]' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

Ví dụ 5. Đưa về Đạo hàm của Thương hoặc Tích

[Trích đề ĐGNL 2026 - đợt 2] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x \cdot f'(x) - f(x) = 2$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = 0$. Tính $f(2)$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Đưa về Đạo hàm của Căn thức

Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(2)$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Đưa về Đạo hàm của Lũy thừa / Nghịch đảo

Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn $f'(x) = 2x \cdot [f(x)]^2$ và $f(0) = -1$. Tính $f(1)$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Đưa về Đạo hàm của Logarit và Hàm Mũ

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot e^{f(x)} = 3x^2 + 1$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Luyện tập:

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x) > 0$ thỏa mãn $f'(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{f(x)}$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 16. B. 64. C. 36. D. 49.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn $f'(x) = -3x^2 \cdot [f(x)]^2$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. -1. D. 1.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x \cdot f'(x) = 2f(x)$ và $f(1) = 3$. Giá trị của $f(3)$ bằng

- A. 9. B. 18. C. 27. D. 12.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2f(x) = 0$ và $f(0) = 3$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $3e^{-2}$. B. $3e^2$. C. e^{-2} . D. $3e$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x^2 + 1)f'(x) + 2x \cdot f(x) = 3x^2$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. $\frac{9}{5}$. B. 2. C. $\frac{8}{5}$. D. 3.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) \cdot e^{f(x)} = \cos x$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. $\ln 2$. B. $\ln 3$. C. 1. D. 0.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x \cdot f'(x) - 2f(x) = x^3$ và $f(1) = 2$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 12. B. 8. C. 10. D. 16.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) > -1$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 2x\sqrt{f(x) + 1}$ và $f(0) = 3$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. 15. B. 16. C. 8. D. 24.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + x \cdot [f(x)]^2 = 0$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot f(x)$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. e^2 . B. e^3 . C. e . D. $2e$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hàm số $f(x) > 0$ thỏa mãn $f'(x) = (6x + 2) \cdot \sqrt{f(x)}$ và $f(0) = 4$. Tìm công thức hàm số $f(x)$.

.....

Bài 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = 3x^2 + 2x$ và $f(1) = 1$. Tính $f(2)$.

.....

Bài 3: Cho hàm số $f(x) > 0$ thỏa mãn $f'(x) = x \cdot f(x) \cdot \ln(f(x))$ và $f(0) = e$. Tính $f(2)$.

.....

DÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

1. B	2. A	3. C	4. A	5. A	6. A	7. A	8. A	9. A	10. A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

🏠 BÀI TẬP VỀ NHÀ TỰ LUYỆN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1: Đạo hàm của hàm số hằng $y = \pi^2 + e$ bằng

- A. 2π . B. 0. C. $2\pi + 1$. D. π .

Câu 2: Hàm số $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ có công thức đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

- A. $y' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. C. $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = \ln x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số căn thức bậc cao hợp $y = \sqrt{2x^3 - 3x + 1}$.

- A. $y' = \frac{6x^2 - 3}{2\sqrt{2x^3 - 3x + 1}}$. B. $y' = \frac{6x^2 - 3}{\sqrt{2x^3 - 3x + 1}}$.
C. $y' = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{2x^3 - 3x + 1}}$. D. $y' = 6x^2 - 3$.

Câu 4: Cho hàm số phân thức bậc nhất $y = \frac{x-2}{2x+1}$. Giá trị của $y'(0)$ bằng

- A. -5. B. 3. C. -3. D. 5.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số lượng giác tích $y = x^2 \cdot \cos x$ là biểu thức:

- A. $y' = 2x \cos x + x^2 \sin x$. B. $y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$.
C. $y' = -2x \sin x$. D. $y' = 2x - \sin x$.

Câu 6: Hàm số $y = \cot(5x)$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{5}{\cos^2(5x)}$. B. $y' = -\frac{1}{\sin^2(5x)}$. C. $y' = -\frac{5}{\sin^2(5x)}$. D. $y' = -5 \tan(5x)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A. $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 8: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos(2x)$.

- A. $y'' = -4 \cos(2x)$. B. $y'' = 4 \cos(2x)$. C. $y'' = -2 \sin(2x)$. D. $y'' = -4 \sin(2x)$.

Câu 9: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là

- A. $k = 3$. B. $k = -3$. C. $k = -1$. D. $k = 5$.

Câu 10: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm có tung độ $y_0 = 2$ và có hoành độ dương là

- A. $y = 9x + 2$. B. $y = 2$. C. $y = 9x - 25$. D. $y = 9x - 27$.

Câu 11: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 4$ song song với đường thẳng $y = x - 5$ có phương trình là

- A. $y = x - 4$. B. $y = x + 4$. C. $y = x + 2$. D. $y = x$.

Câu 12: Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ sao cho tiếp tuyến tại đó đi qua điểm $A(0; 2)$ có hoành độ lớn hơn 0 là

- A. $M(2; 4)$. B. $M(1; 0)$. C. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{8}\right)$. D. $M(3; 20)$.

Câu 13: Một vật chuyển động có phương trình quãng đường $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ s bằng

- A. 18 m/s. B. 24 m/s. C. 6 m/s. D. 12 m/s.

Câu 14: Một hạt chuyển động thẳng có phương trình vị trí $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Hạt này đứng yên tạm thời (vận tốc bằng 0) tại các thời điểm nào?

- A. $t = 1$ s và $t = 3$ s. B. $t = 2$ s và $t = 4$ s.
C. $t = 0$ s. D. Không bao giờ dừng lại.

Câu 15: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Khẳng định nào sau đây diễn đạt đúng liên hệ đạo hàm?

- A. $y \cdot y'' - 1 = 0$. B. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$. C. $y^3 \cdot y'' - 1 = 0$. D. $y \cdot y'' + 1 = 0$.

Câu 16: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ bằng

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Câu 17: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ với $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây bằng bao nhiêu?

- A. 49 m/s. B. 24,5 m/s. C. 9,8 m/s. D. 122,5 m/s.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 12$. Số điểm trên đồ thị mà tại đó tiếp tuyến song song với trục hoành Ox là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x \cdot f'(x) + f(x) = \sin x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng

- A. $\frac{3}{2\pi}$. B. $\frac{1}{\pi}$. C. $\frac{3}{\pi}$. D. $\frac{2}{3\pi}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục trên $\left(-\infty; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ thỏa mãn $f'(x) = 3x^2 \cdot [f(x)]^3$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số phức hợp sau:

$$A(x) = (2x^2 - 3x + 1)^4; \quad B(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

Bài 2: Giải phương trình $f'(x) = 0$ biết rằng $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2026$.

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của nó với trục hoành Ox .

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc đồ thị có tung độ $y_0 = 4$.

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 5x - 3$.

Bài 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{5}x + 2$.

Bài 7: Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 0$.

Bài 8: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ đi qua điểm cực tiểu $A(2; -2)$ nằm ngoài đồ thị.

Bài 9: Một chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình quãng đường $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ ($t \geq 0$, t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tìm vận tốc của vật tại thời điểm gia tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $x \cdot f'(x) + 2f(x) = x^2 \cdot \sqrt{f(x)}$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị của $f(2)$.

BẢNG ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. B	2. C	3. A	4. D	5. B	6. C	7. D	8. A	9. B	10. C
11. D	12. C	13. D	14. A	15. B	16. C	17. A	18. D	19. A	20. A