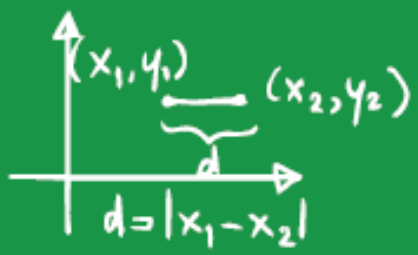
TOÁN THẦY AN

CHUYÊN ĐỀ: KHẢO SÁT HÀM SỐ (QUYỂN 3)

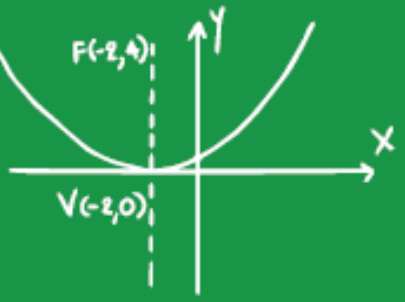
TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Đây là sách của:

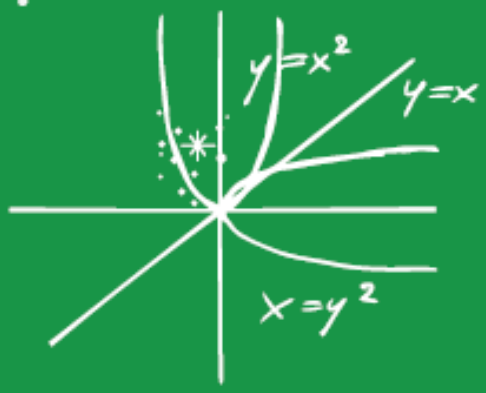


CHUYÊN ĐỀ

KHẢO SÁT HÀM SỐ







TOÁN THẦY AN

Sưu tầm và biên soạn: Tô Quốc An

facebook.com/toanthayan

toanthayan@gmail.com

DĐ: 0988 32 33 71

BÀI TOÁN 21. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$

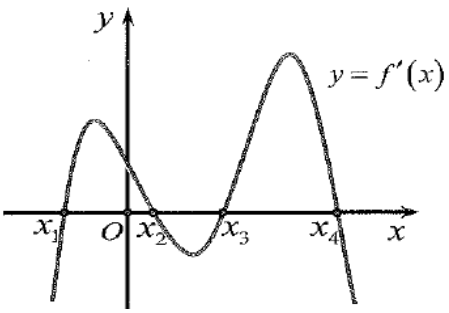
A. LÝ THUYẾT:

Bài toán:

Xác định tính đơn điệu của hàm số dựa vào đồ thị $f'(x)$.

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên D nếu:

Hình vẽ minh họa.



- Đồ thị hàm số $f'(x)$nằm ..... Ox nên $f'(x)\geq 0$.

  Do đó: Hàm số $y=f(x)$..... trên D.

- Đồ thị hàm số $f'(x)$nằm ..... Ox nên $f'(x)<0$.

  Do đó: Hàm số $y=f(x)$..... trên D.

Dựa vào đồ thị:

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm ..... trục hoành trong các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;x_4)$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm ..... trục hoành trong các khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_2;x_3)$ và $(x_4;+\infty)$

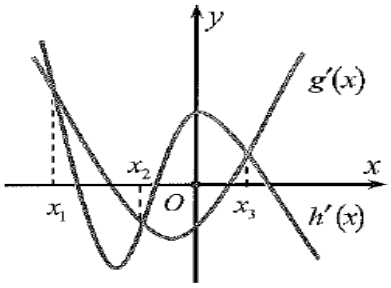
Vậy hàm số $y=f(x)$ ..... trên các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;x_4)$

Hàm số $y=f(x)$..... trên các khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_2;x_3)$ và $(x_4;+\infty)$.

- Hàm số $y=f(x)=h(x)-g(x)$, cho trước các đồ thị $h'(x)$ và $g'(x)$.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ nằm phía trên đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)>0$
  Do đó: Hàm số $y=f(x)$đồng biến trên K.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ nằm phía dưới đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)<0$
  Do đó: Hàm số $y=f(x)$nghịch biến trên K.

Ví dụ: Hàm số $y=f(x)=h(x)-g(x)$có đồ thị $h'(x)$ và $g'(x)$như hình bên dưới

Hình vẽ minh họa.



Đồ thị $h'(x)$ nằm ..... đồ thị $g'(x)$trong các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;x_3)$

Đồ thị $h'(x)$ nằm ..... đồ thị $g'(x)$trong các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;+\infty)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ ..... trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;x_3)$

Hàm số $y=f(x)$..... trên các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;+\infty)$.

Phương pháp chung:

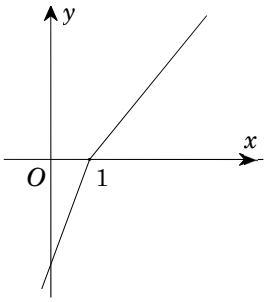
Bước 1: Tìm các giá trị x_0 mà tại đó .....

Bước 2: Lập bảng ..... dựa vào đồ thị $f'(x)$.

Bước 3: Kết luận về tính đơn điệu của hàm số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



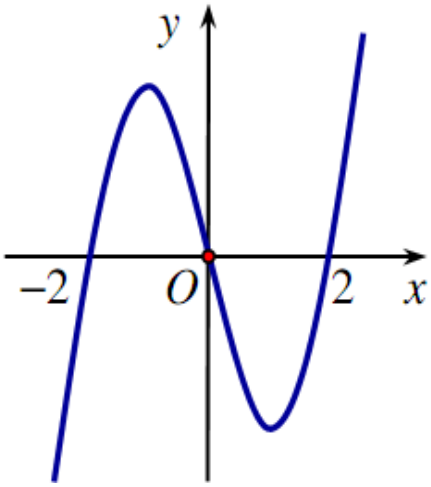
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng :



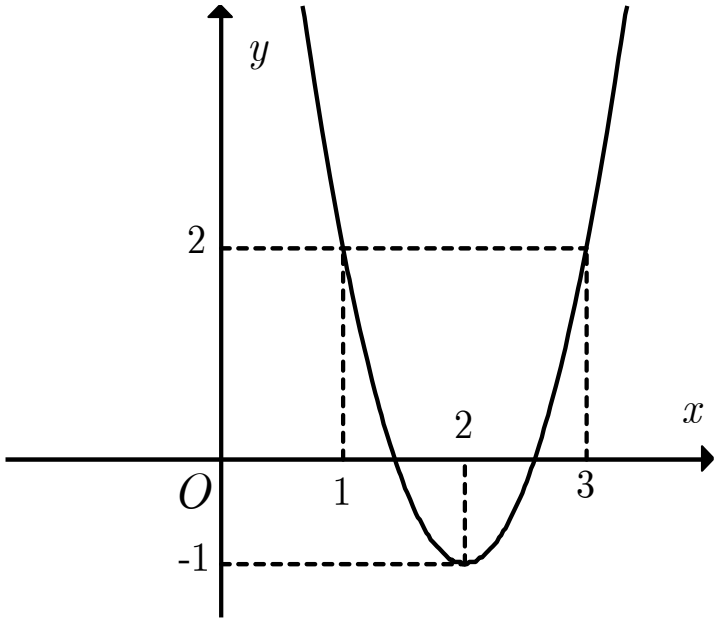
A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

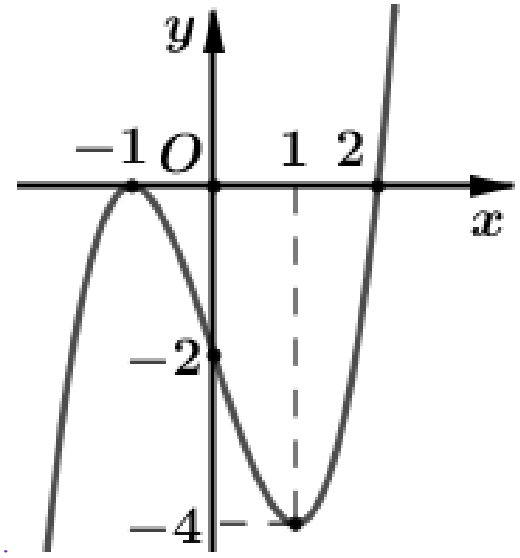
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



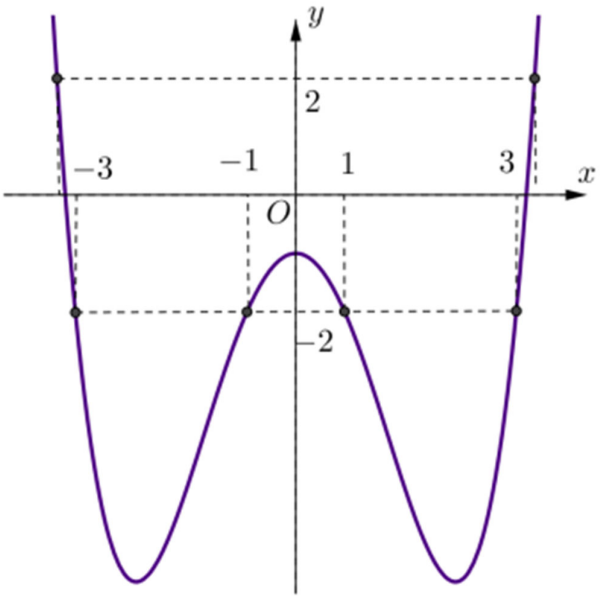
A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

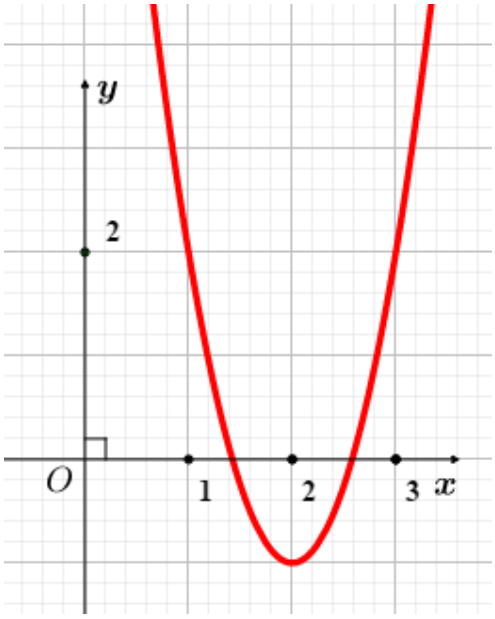
D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có có đạo hàm là hàm số $f'(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-1;1),(3;5)$. **B.** $(-3;-1),(1;3)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

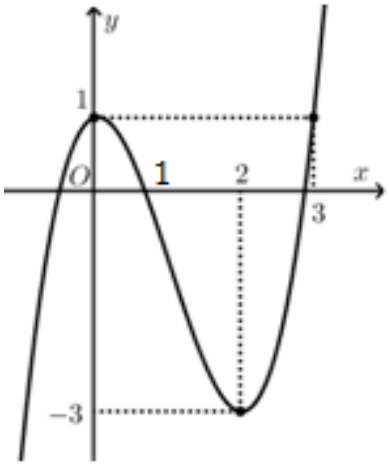
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

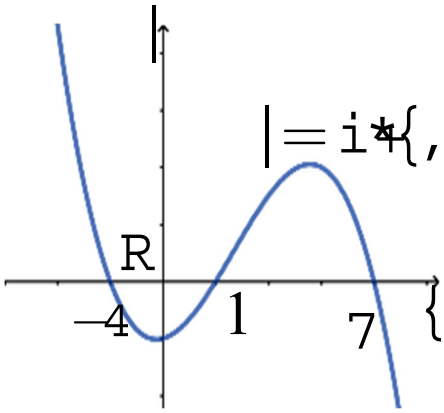
Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Câu 7. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Các giá trị của m để hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



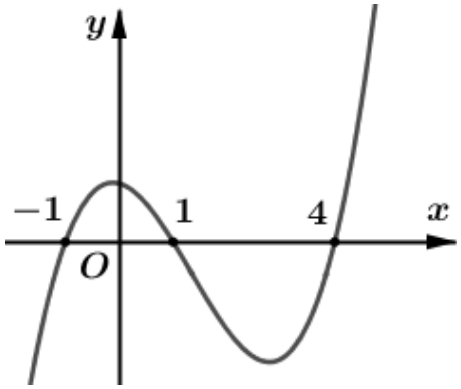
A. $m>4$. **B.** $m\le 4$. **C.** $m\ge 4$. **D.** $0>m>4$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trong khoảng nào?



A. $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{-1}{2};0\right)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;-1)$.

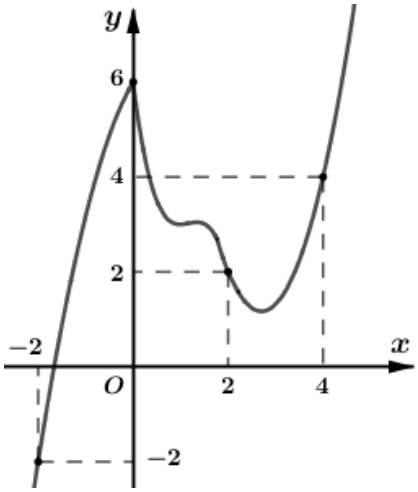
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên



Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$.. **D.** $(4;7)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ

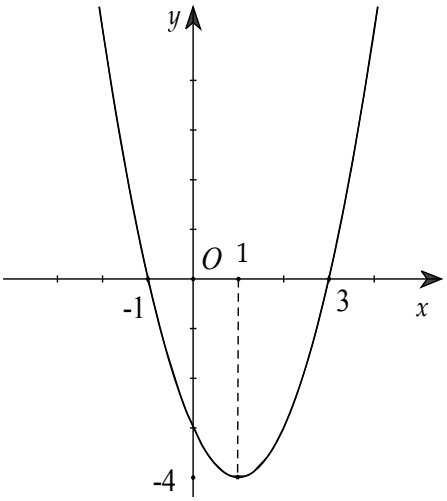


Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



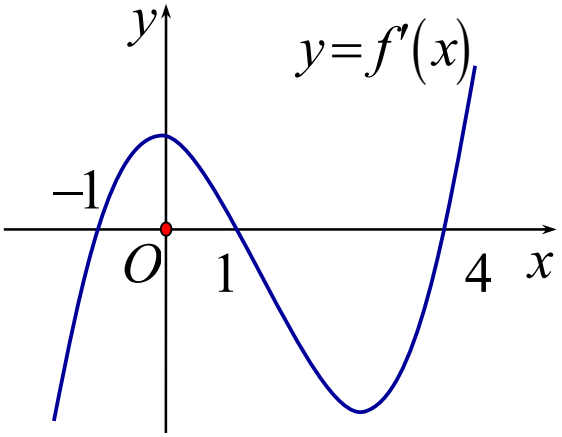
A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

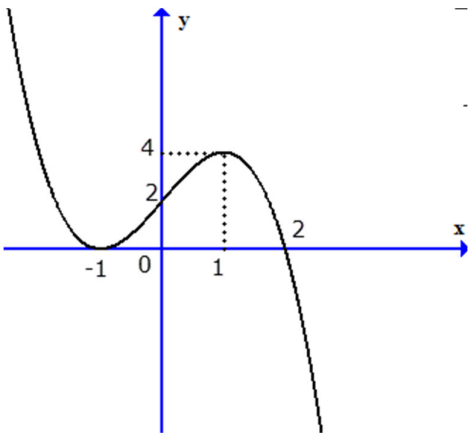
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$..

Câu 2. **(Mức độ 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(3;+\infty)$ và $(-2;1)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

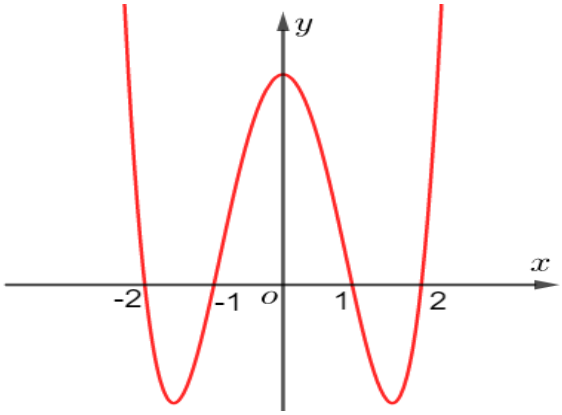
Câu 3. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-1;4)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-1;1)$.

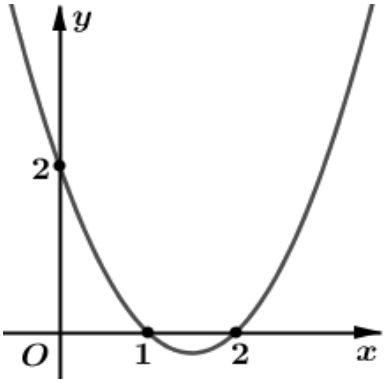
Câu 4. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

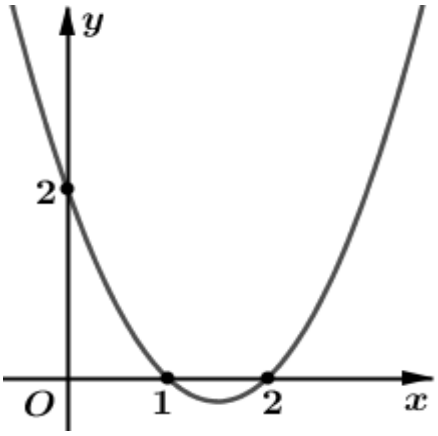
A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng nào?



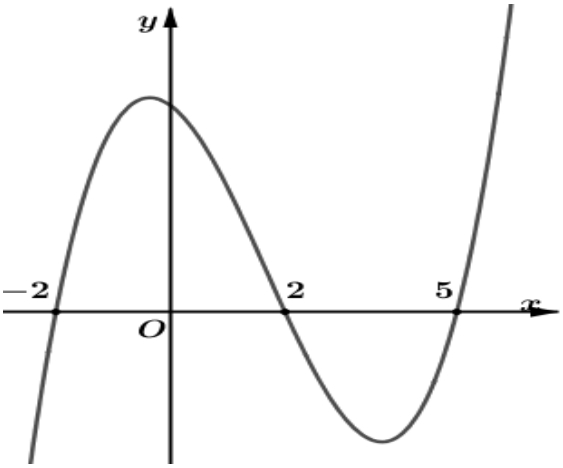
A. $(1;2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào?



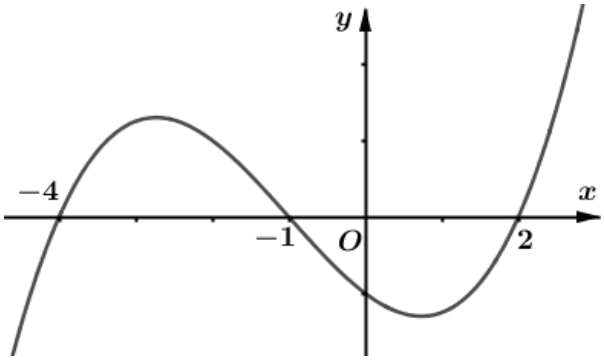
A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(0;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

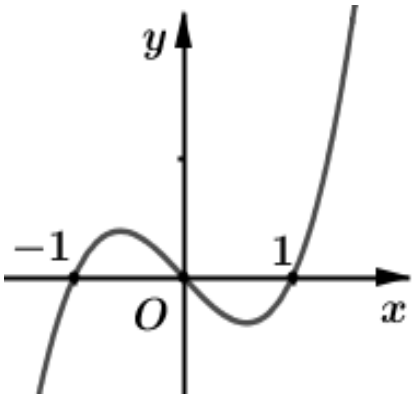
Câu 8. Cho hàm số $y=f'(x)$. có Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

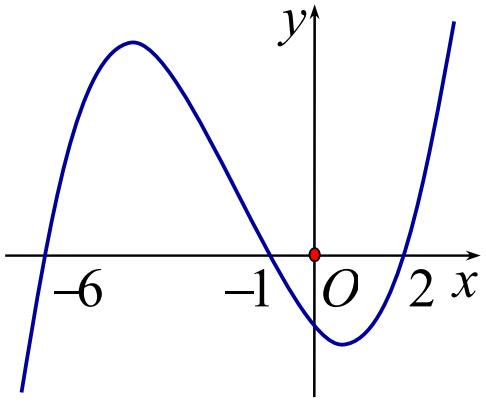
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên



Hàm số $g(x)=f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$..

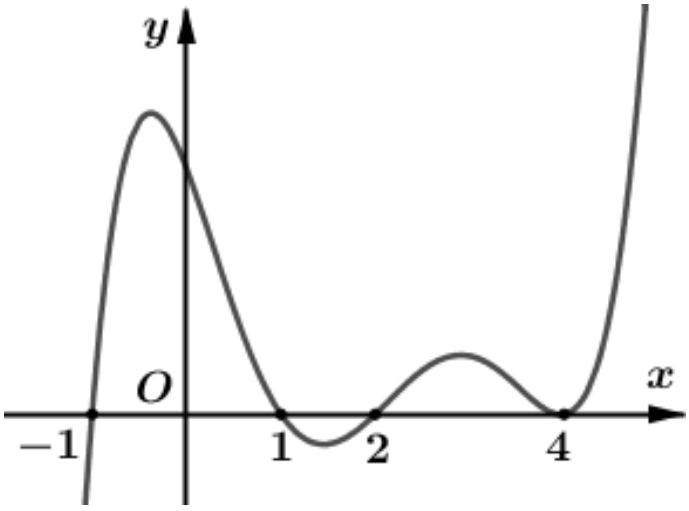
Câu 10. **(Mức độ 3)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

C. $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;-2)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$..

Câu 11. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới :

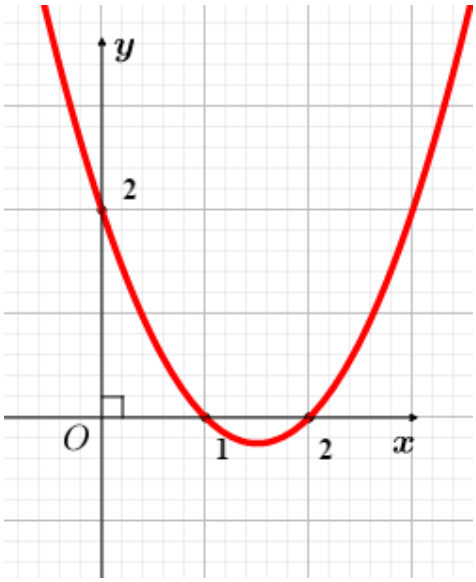


Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-1;0)$.

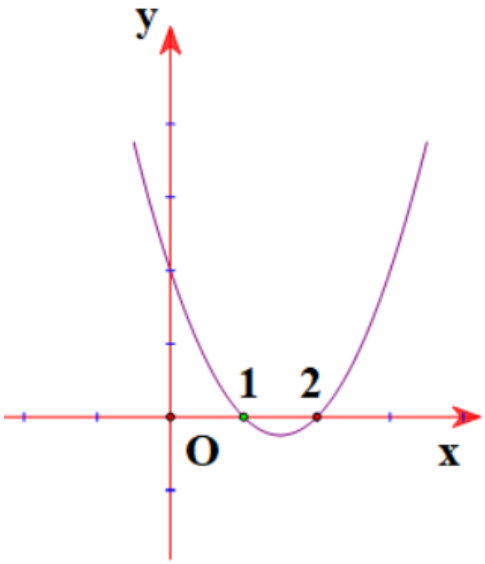
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=2\in(1;+\infty)$, suy ra $1-2x=-3$ $\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}$ $f'(1-2x)=f'(-3)<0$.

Câu 12. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ .Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để hàm số $y=f(x+m)$ nghịch biến trên $(3;4)$.



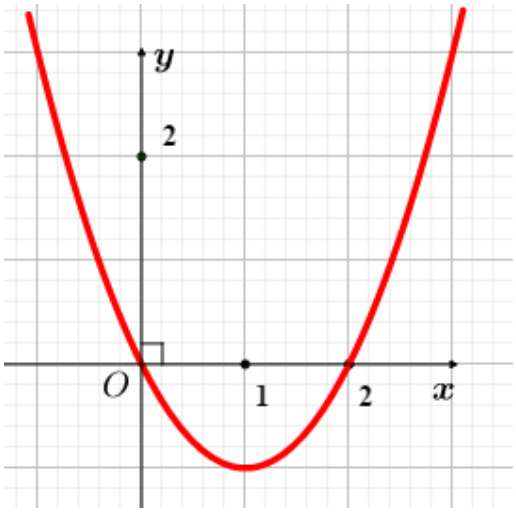
A. $m=3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 13. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



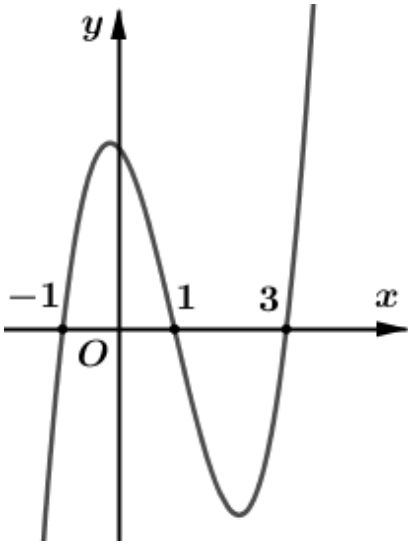
A. $(1-\sqrt{3};1-\sqrt{2})$. **B.** $(-\infty;1-\sqrt{2})$. **C.** $(1-\sqrt{2};1)$. **D.** $(1+\sqrt{2};+\infty)$.

Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1,+\infty)$. **B.** $(-1,0)$. **C.** $(-1,2)$. **D.** $(-\infty,1)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới

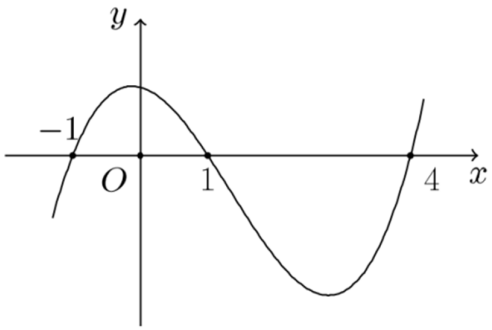


Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)$.. **C.** $\left(1;2\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $\left(2\sqrt{2}-1;+\infty\right)$.

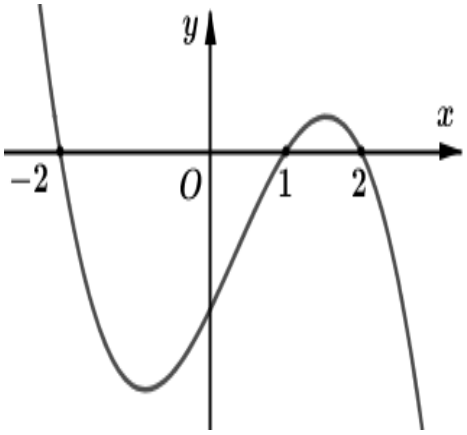
Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau: Ví dụ xét trên khoảng $\left(-1;-1+2\sqrt{2}\right)$ ta chọn $x=0$. Khi đó $g'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\sqrt{2}\right)<0$ vì dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy tại $x=\sqrt{2}\in(1;3)$ thì $f'\left(\sqrt{2}\right)<0$. Các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



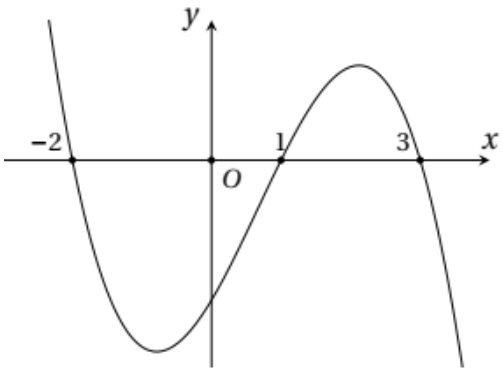
A. $(4;7)$. **B.** $(2;3)$ và $(-1;2)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau:



A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

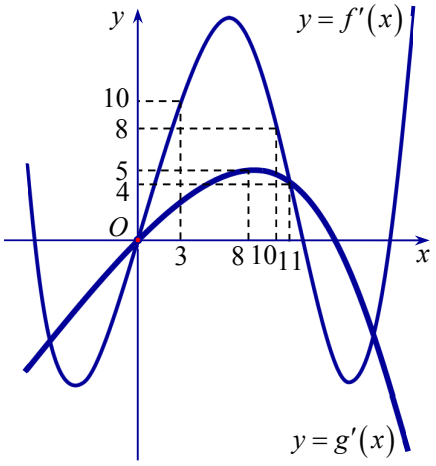
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $g(x)=f(|4-2x|)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};7\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

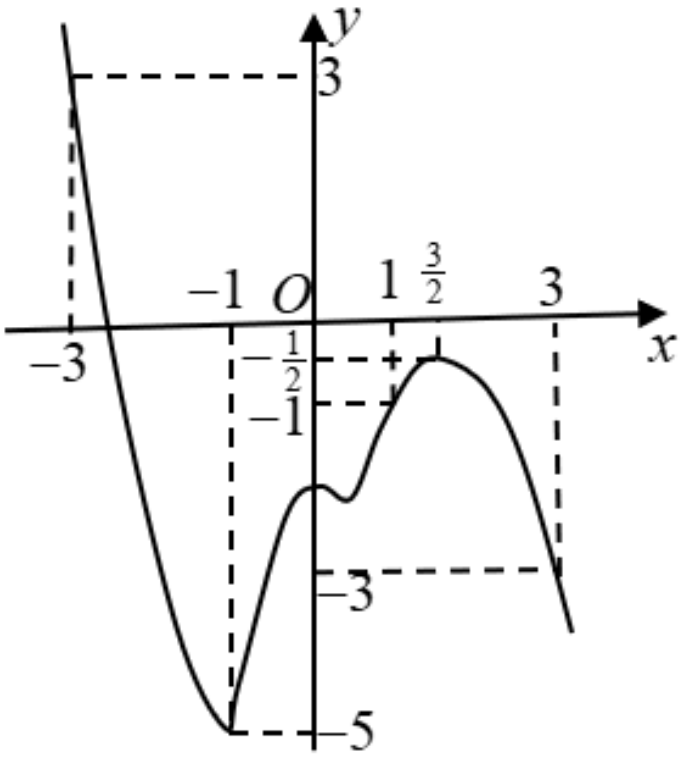
Câu 19. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.



Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\frac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.

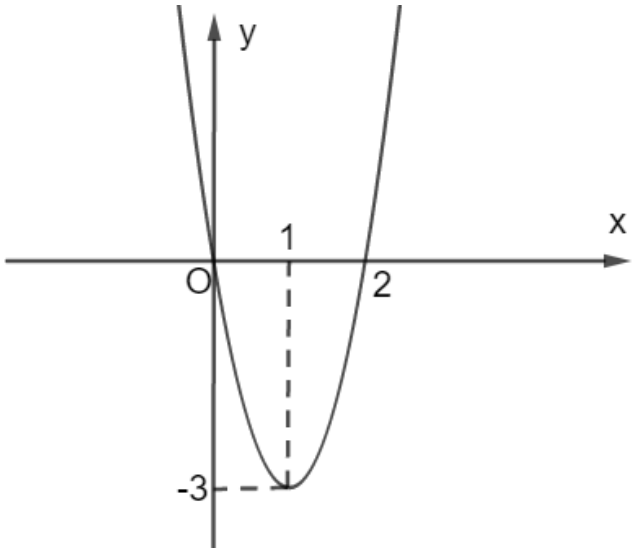


Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

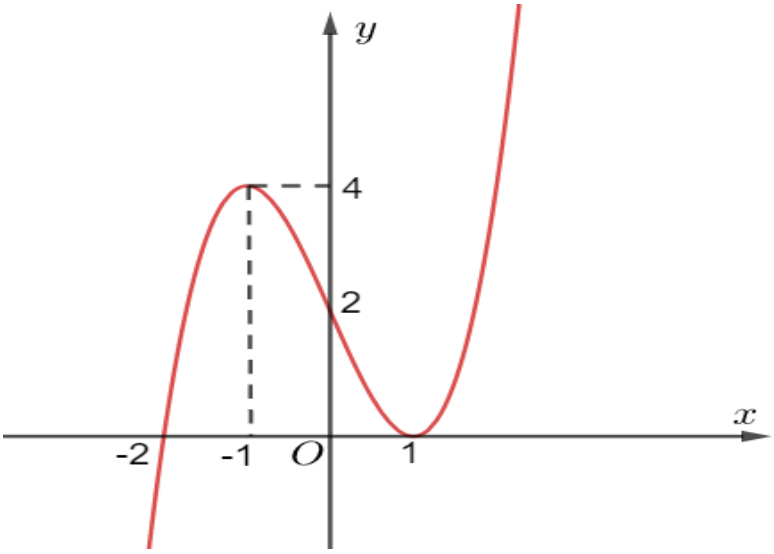
Câu 1. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

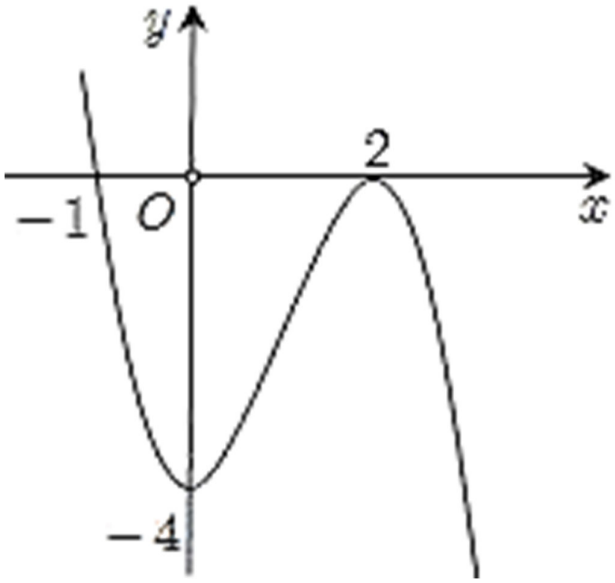
Câu 2. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 3. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



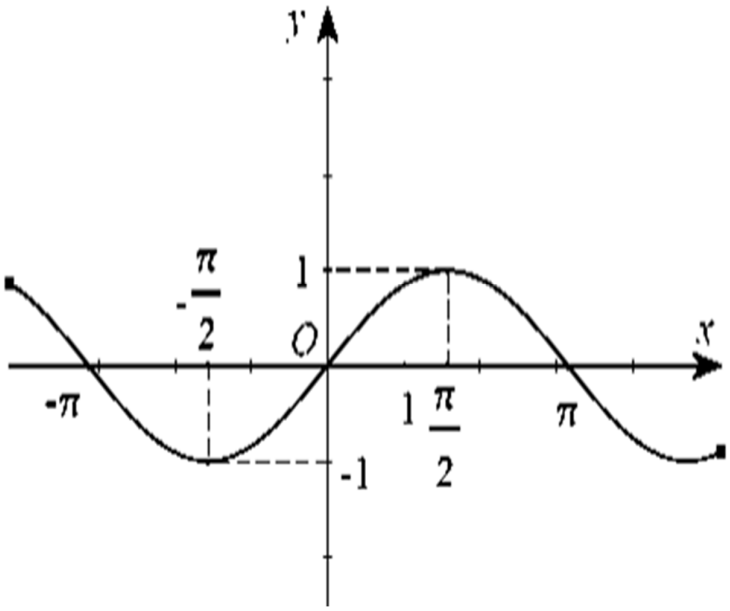
A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây đúng?



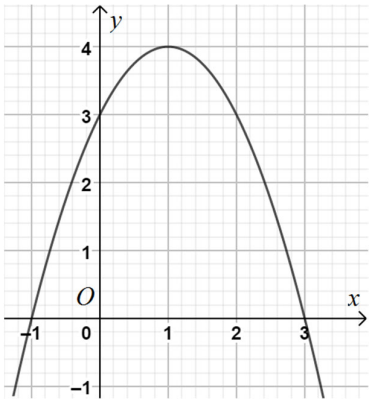
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

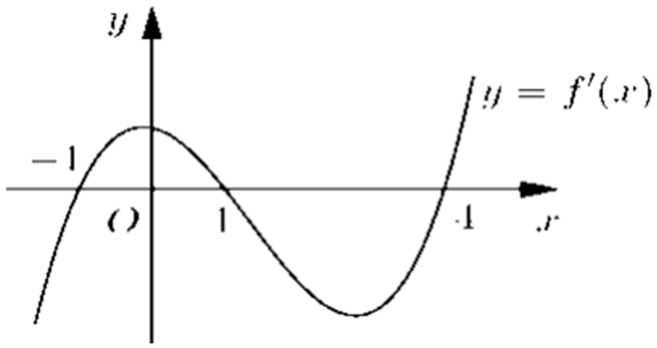
Câu 5. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x+2)+3$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

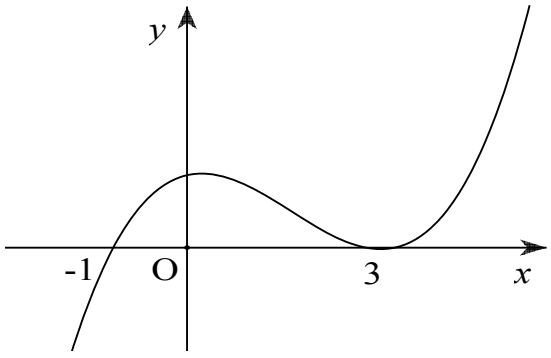
A. $(-1;3)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 6. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Xét hàm số $g(x)=f(3-x^2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

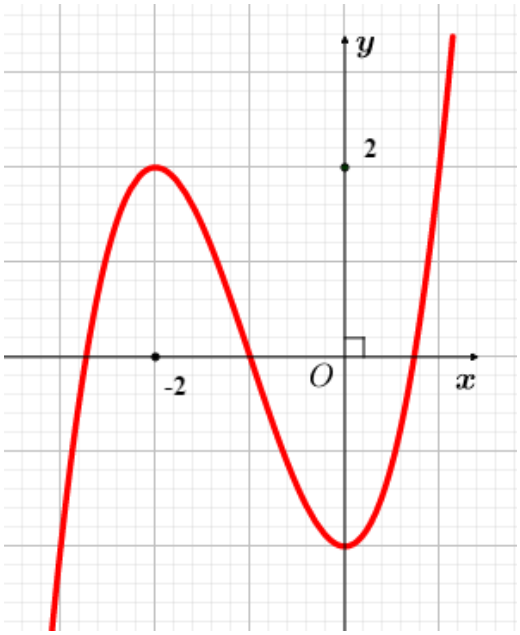
A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;3)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

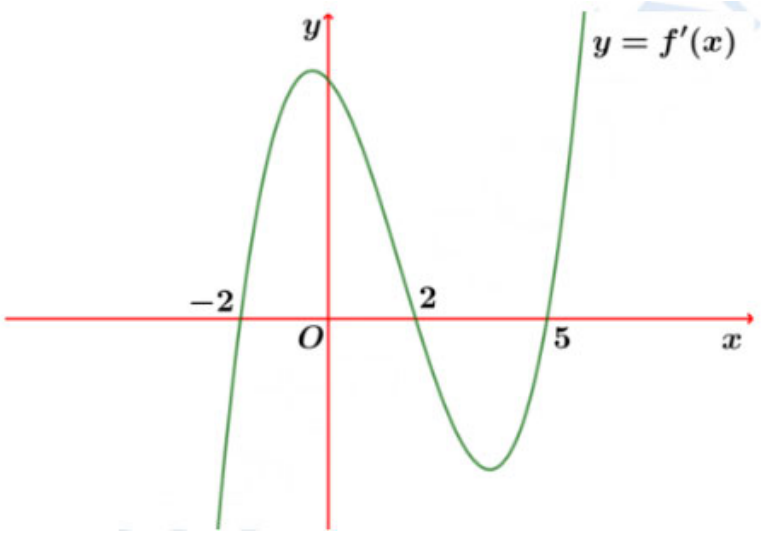
Câu 8. **(Mức độ 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(x)-2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$..

Câu 9. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.

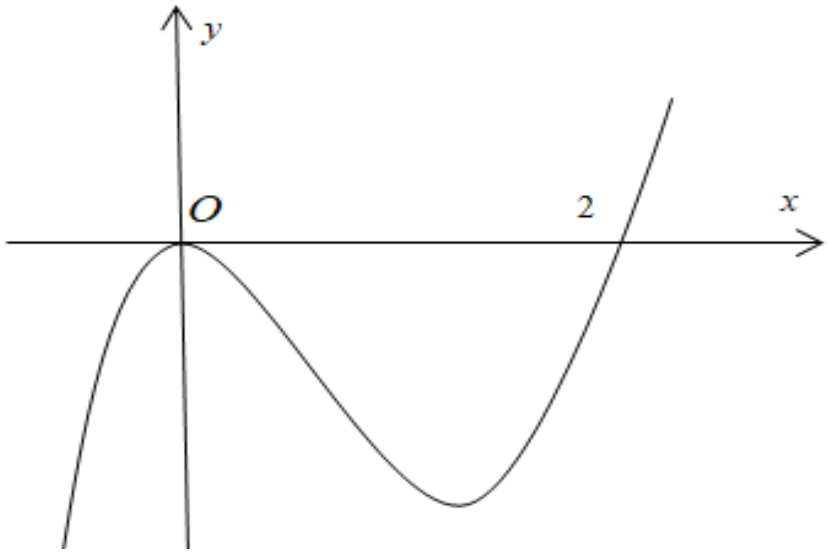


Tìm các khoảng ngịch biến của hàm số $g(x)=f(3-2x)+1$?

A. $(-\infty;-2),\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

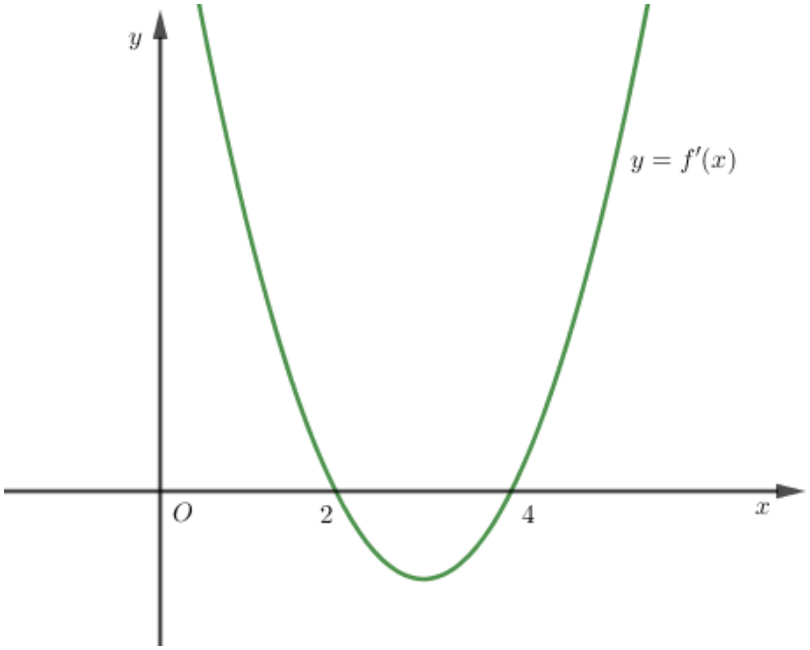
C. $(-\infty;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$..

Câu 10. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(2-x)$?



A. $(0;\infty)$. **B.** $(-5;-1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$..

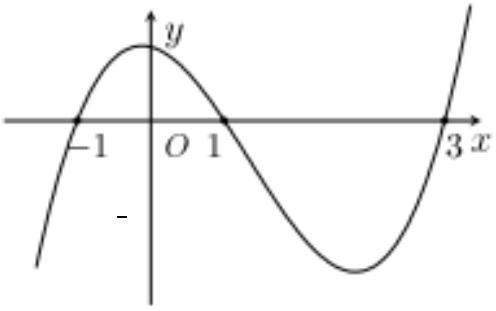
Câu 11. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=g(x)=f\left(1+x^2\right)$?



A. $(-3;-1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

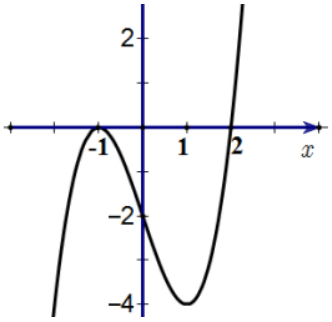
C. $\left(-\sqrt{3};-1\right)$; $(0;1)$; và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $(-3;-2)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$..

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử ?



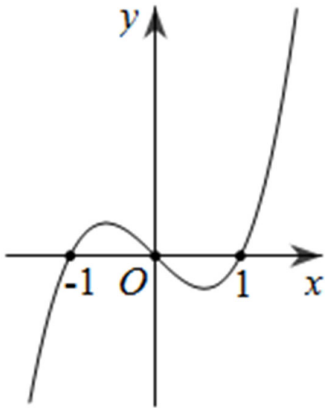
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 14. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

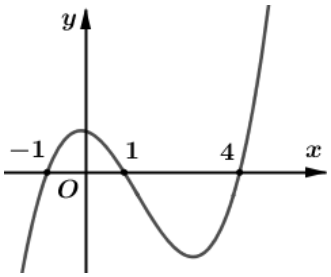


Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x^2-2)$?

A. $(-\infty;-\sqrt{3}),(-\sqrt{2};-1),(0;1)$ và $(\sqrt{2};\sqrt{3})$.. **B.** $(-\infty;-\sqrt{3}),(-1;1)$ và $(\sqrt{2};\sqrt{3})$.

C. $(-\infty;-\sqrt{2}),(-\sqrt{2};-1),(0;1)$ và $(\sqrt{2};\sqrt{3})$.. **D.** $(-\infty;-\sqrt{3}),(-\sqrt{2};-1),(0;1)$ và $(1;\sqrt{3})$..

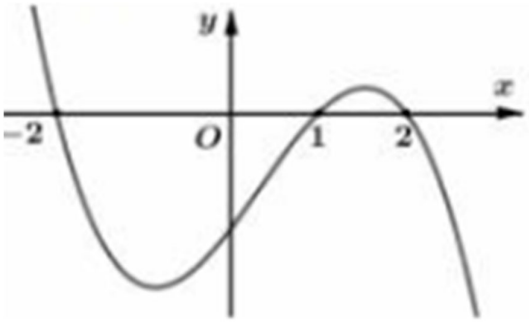
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$.. **B.** $(-1;2)$.. **C.** $(2;3)$.. **D.** $(4;7)$.

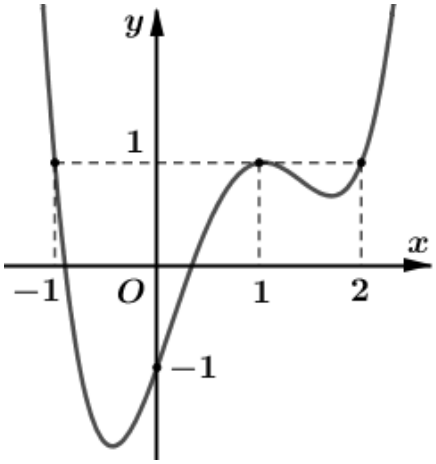
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ, và $f(-2)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=[f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới

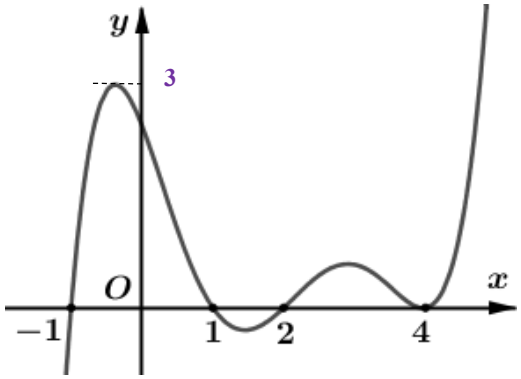


Đặt $g(x)=f(x)-x,$ khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $g(-1)>g(1)>g(2)$. **B.** $g(2)<g(-1)<g(1)$.

C. $g(-1)<g(1)<g(2)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$..

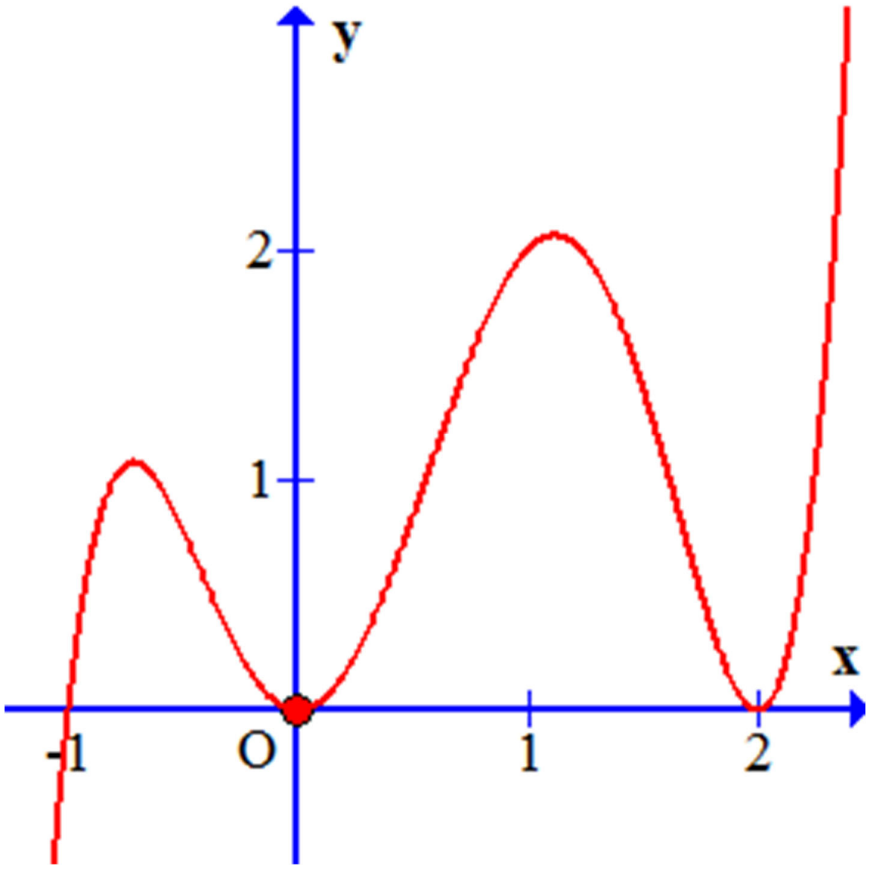
Câu 18. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g(x)=f(x)-(m+1)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. $m\in(-\infty;2)$. **B.** $m\in(-1;1)$. **C.** $m\in[2;+\infty)$. **D.** $m\in(3;+\infty)$.

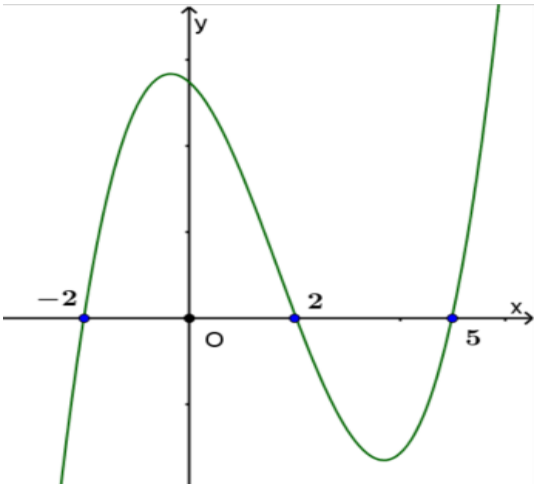
Câu 19. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(|1-x|)$?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

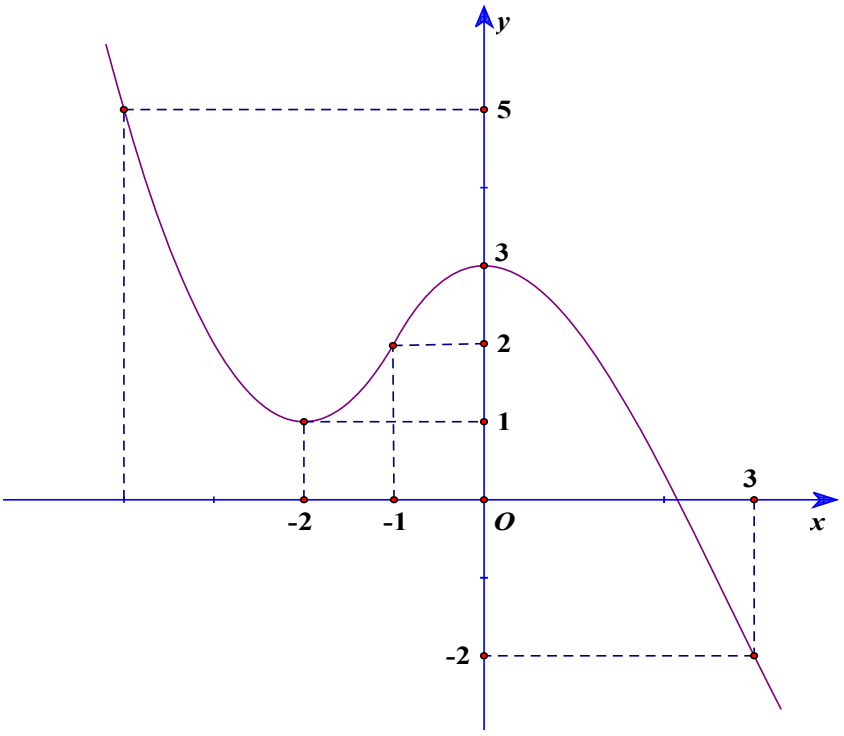
Câu 20. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

A. $\left[\begin{array}{l}1\le m\le 2\\ m\le -4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0\le m\le 2\\ m\le -5\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}0\le m\le 1\\ m\le -4\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-1\le m\le 1\\ m\le -5\end{array}\right.$.

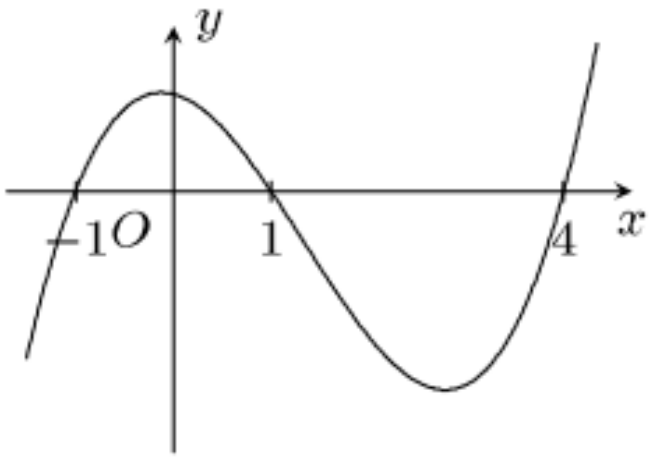
Câu 21. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y=g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

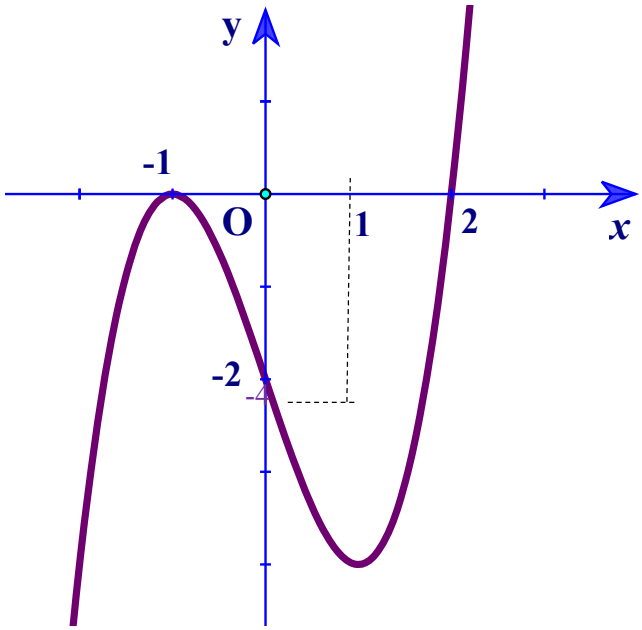
A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

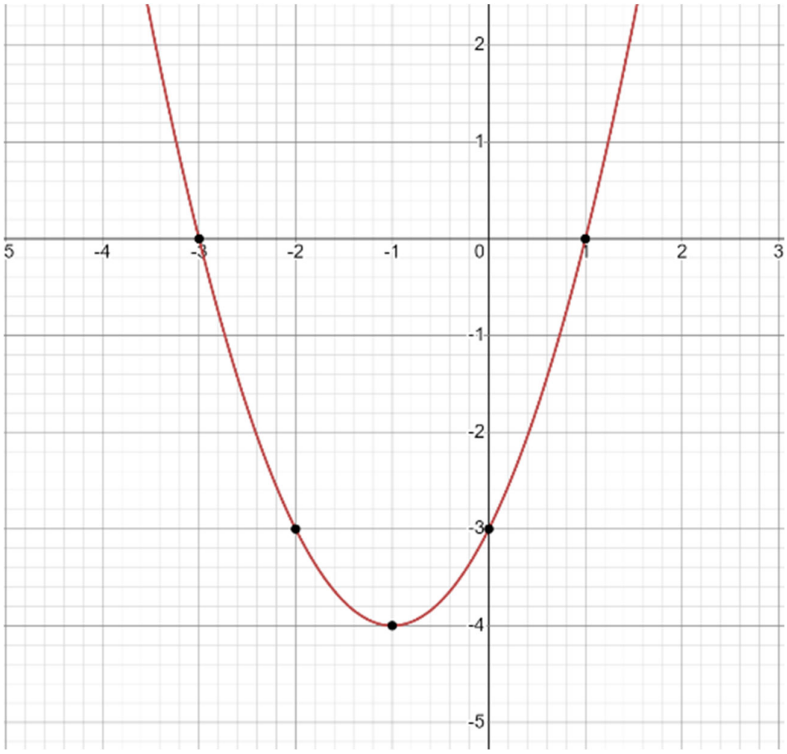
Câu 23. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-(m^2-4m)x$ đồng biến trên $(-1;2)$

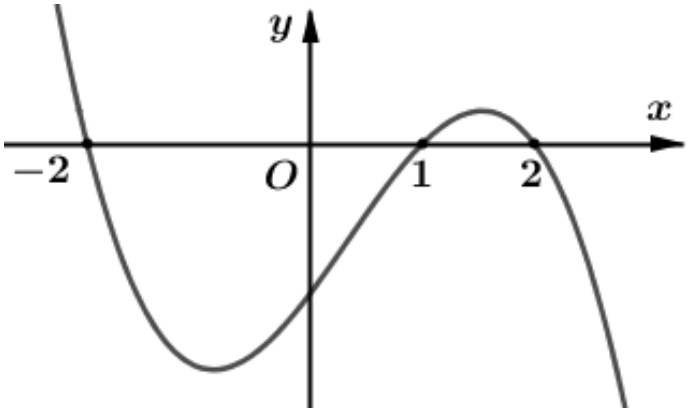
A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $m=2$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in(2;+\infty)$.

Câu 24. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=g(x)=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.



A. $\left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 12 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq 1 \end{array}\right.$. **D.** $-1 \leq m \leq 13$.

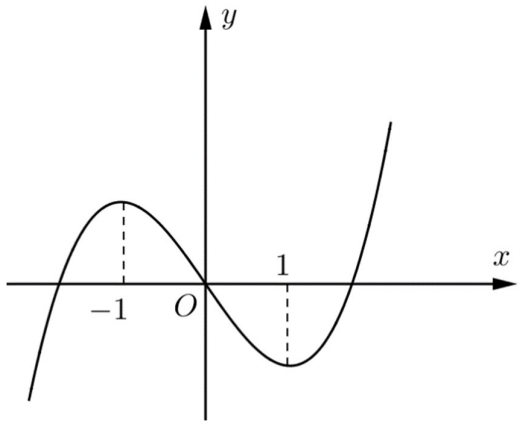
Câu 25. **(Mức độ 4)** Cho hàm số $y = f(x)$.Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$.



Hàm số $g(x) = \left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau? Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3.

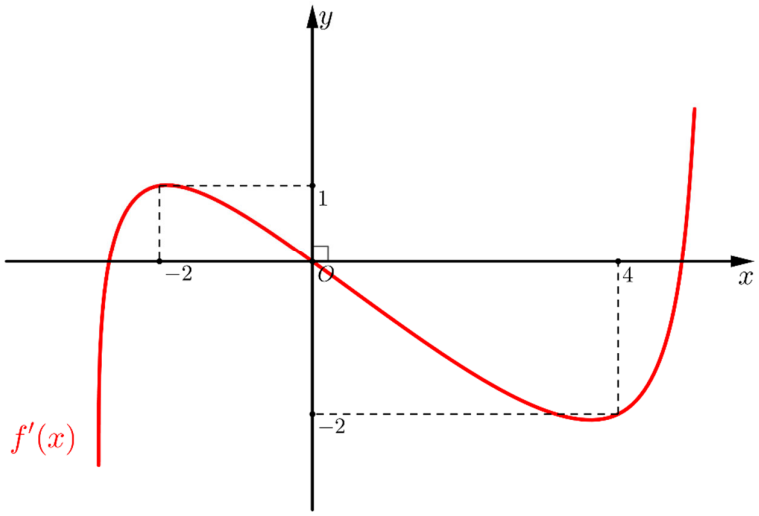
A. $(-\infty;1)$ và $(2;5)$ .. **B.** $(-\infty;1)$ và $(1;5)$ . . **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Câu 26. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = \left|4f(\sin x) + \cos 2x - a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.



A. 3 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 7 .

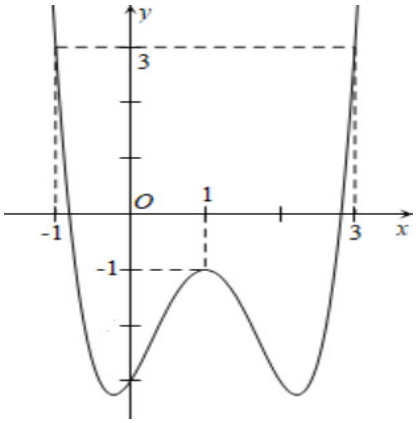
Câu 27. **[Mức độ 4]** Cho hàm đa thức $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ trên đoạn $[-2;4]$?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 28. **(Mức độ 4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



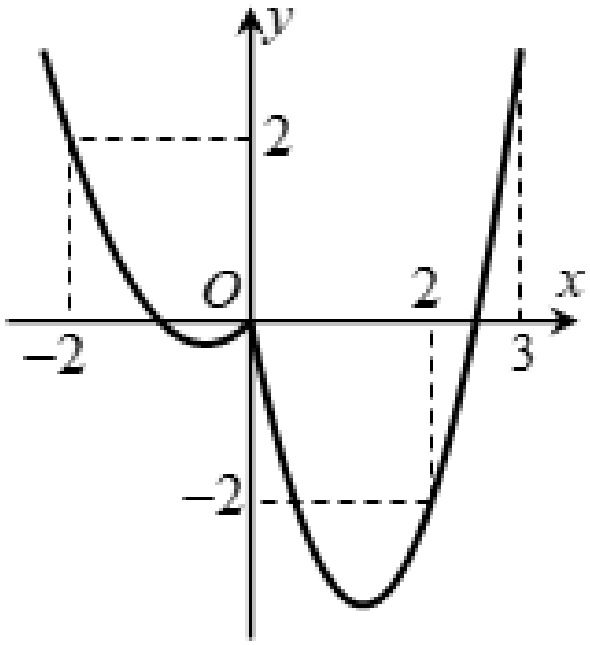
Hàm số $g(x)=f(3x-1)-27x^3+54x^2-27x+4$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;3)$.

C. $(-\infty;0)$ và $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.. **D.** $(-\infty;0)$ và $(4;7)$.

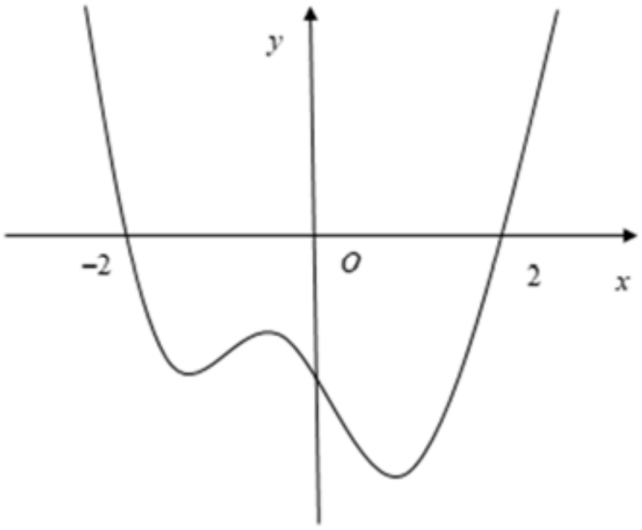
Câu 29. **[Mức độ 4]**Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ và $f(3)=f(0)-\frac{9}{2}$.

Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ nghịch biến trên những khoảng nào trong khoảng $(-2;+\infty)$?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-2;0)$ và $(2;3)$. **D.** $(-\infty;0)$ và $(4;7)$.

Câu 30. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-2)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

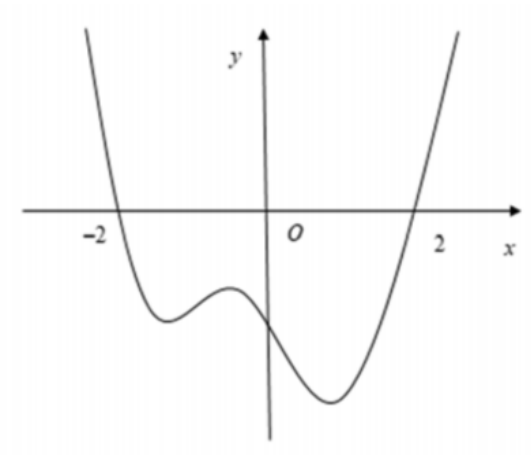
A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\left|f(-2)\right|$.

Câu 31. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$?

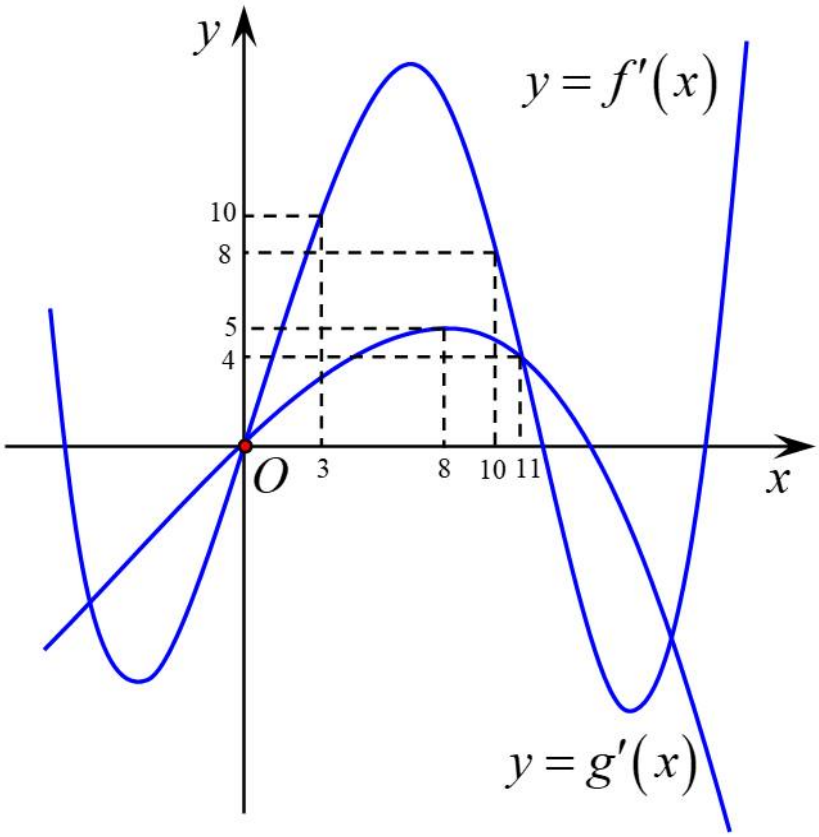
A. $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

B. $(2;3)$.

C. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$..

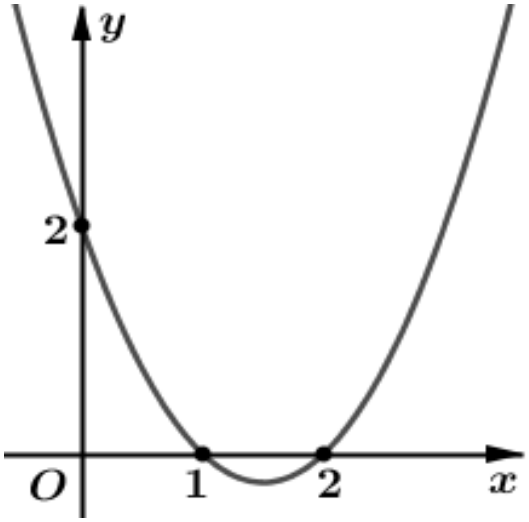
D. $(-\infty;0)$ và $(4;7)$.

Câu 32. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+6)-g\left(2x+\frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **B.** $\left(\frac{21}{5};+\infty\right)$. **C.** $\left(3;\frac{21}{5}\right)$. **D.** $\left(4;\frac{17}{4}\right)$.

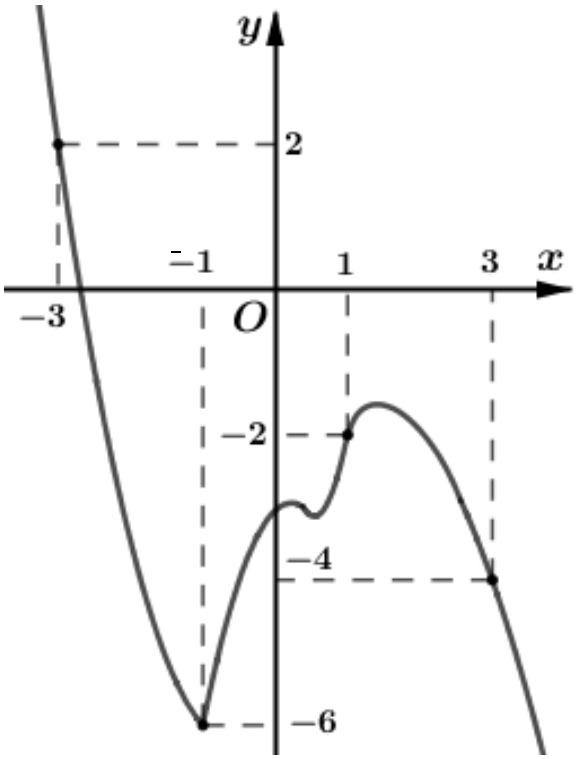
Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

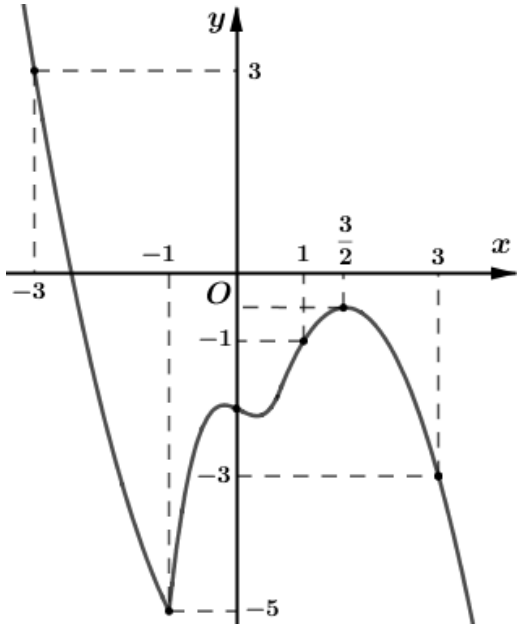
A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 35. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt hàm số $g(x)=f(1+m-x)+\frac{x^2}{2}-x-mx$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;0]$ để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. 2016 . **B.** 2017 . **C.** 2019 . **D.** 2020 .

BÀI TOÁN 21. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$

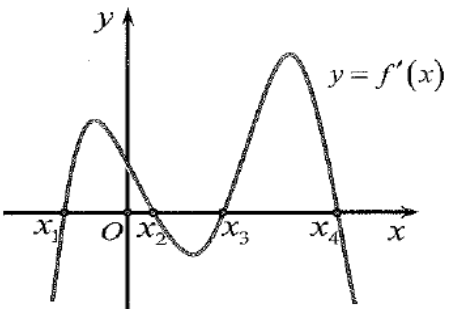
A. LÝ THUYẾT:

Bài toán:

Xác định tính đơn điệu của hàm số dựa vào đồ thị $f'(x)$.

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên D nếu:

Hình vẽ minh họa.



- Đồ thị hàm số $f'(x)$nằm phía trên Ox nên $f'(x)\geq 0$.

  Do đó: Hàm số $y=f(x)$đồng biến trên D.

- Đồ thị hàm số $f'(x)$nằm phía dưới Ox nên $f'(x)<0$.

  Do đó: Hàm số $y=f(x)$nghịch biến trên D.

Dựa vào đồ thị:

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành trong các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;x_4)$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành trong các khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_2;x_3)$ và $(x_4;+\infty)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;x_4)$

Hàm số $y=f(x)$nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_2;x_3)$ và $(x_4;+\infty)$.

- Hàm số $y=f(x)=h(x)-g(x)$, cho trước các đồ thị $h'(x)$ và $g'(x)$.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ nằm phía trên đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)>0$
  Do đó: Hàm số $y=f(x)$đồng biến trên K.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ nằm phía dưới đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)<0$
  Do đó: Hàm số $y=f(x)$nghịch biến trên K.

Ví dụ: Hàm số $y=f(x)=h(x)-g(x)$có đồ thị $h'(x)$ và $g'(x)$như hình bên dưới

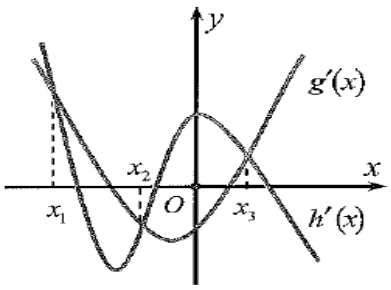
Đồ thị $h'(x)$ nằm phía trên đồ thị $g'(x)$trong các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;x_3)$

Đồ thị $h'(x)$ nằm phía dưới đồ thị $g'(x)$trong các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;+\infty)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;x_3)$

Hàm số $y=f(x)$nghịch biến trên các khoảng $(x_1;x_2)$ và $(x_3;+\infty)$.

Hình vẽ minh họa.



Phương pháp chung:

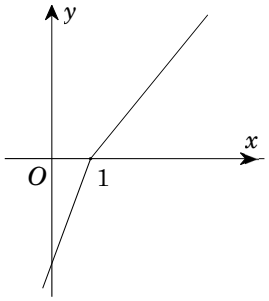
Bước 1: Tìm các giá trị x_0 mà tại đó$f'(x_0)=0$.

Bước 2: Lập bảng xét dấu $f'(x)$ dựa vào đồ thị $f'(x)$.

Bước 3: Kết luận về tính đơn điệu của hàm số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

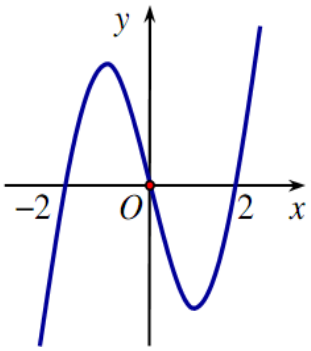
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Chọn B

Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng :



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Lời giải.

Chọn D

Cách 1: Sử dụng bảng biến thiên. Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(x)$

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ đồng biến trên K.

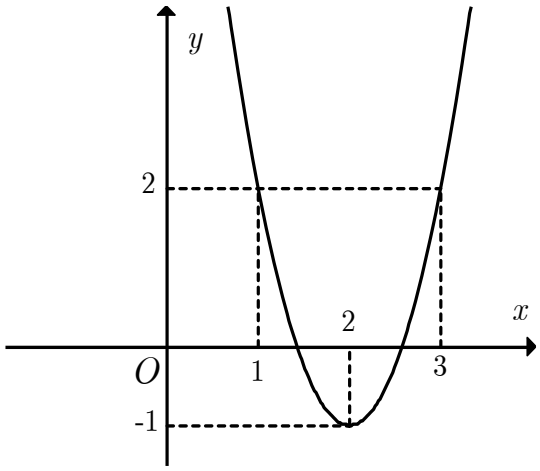
Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành (có thể tiếp xúc)

Thì $f(x)$ nghịch biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

Trên khoảng $(0;\ 2)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn B

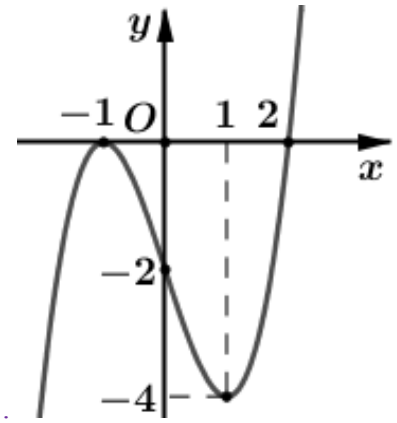
Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2)-2<0,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow f'(x-2)<0,\forall x\in(1;3)$.

Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

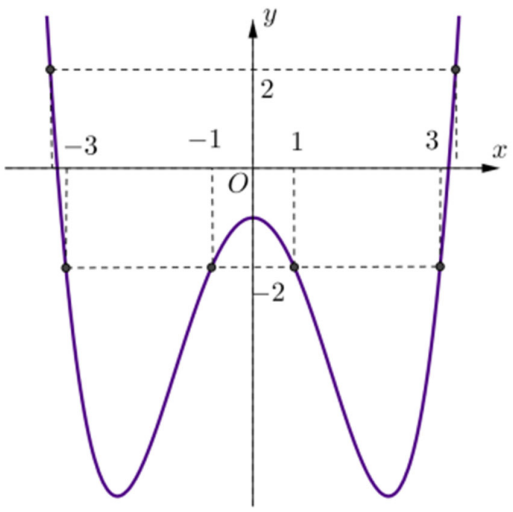
Chọn C

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2-2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ suy ra $f'(x^2-2)>0\Leftrightarrow x^2-2>2\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ và ngược lại.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(2-x^2)$	,	$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có có đạo hàm là hàm số $f'(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-1;1),(3;5)$. **B.** $(-3;-1),(1;3)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

Lời giải.

Chọn A

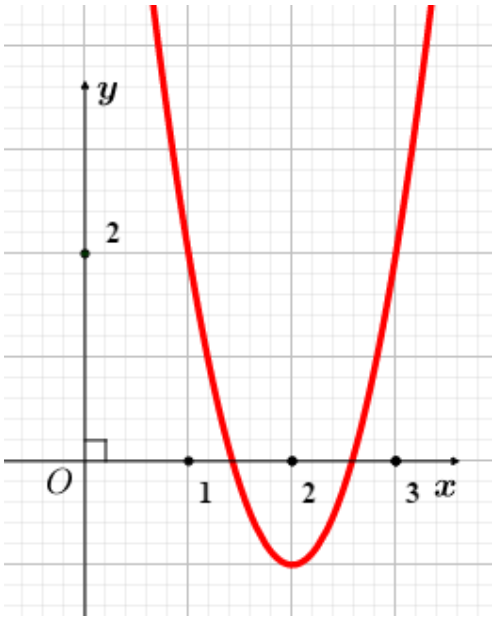
Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$f'(x+2)+2<0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)\Leftrightarrow f'(x+2)<0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;3)$.

Đặt $x^*=x+2$ suy ra: $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)\cup(3;5)$.

Vậy: hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1),(3;5)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn B

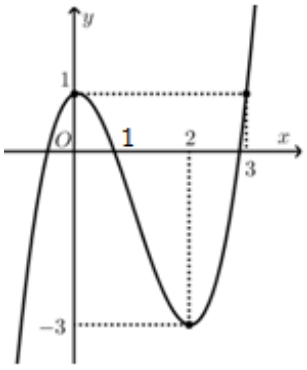
Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2)-2<0,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow f'(x-2)<0,\forall x\in(1;3)$.

Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0,\forall x^*\in(-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Phân tích: Cho biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ sau khi đã tịnh tiến và dựa vào đó để xét sự đồng biến của hàm số $f(x)$.

Câu 7. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Các giá trị của m để hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



A. $m>4$. **B.** $m\le 4$. **C.** $m\ge 4$. **D.** $0>m>4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f(x)+(m-1)x \Rightarrow y'=f'(x)+m-1$.

Hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$

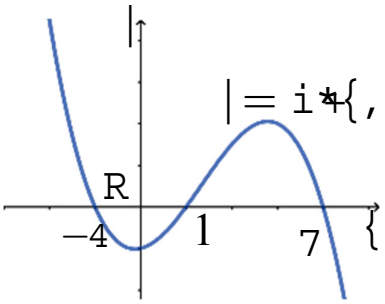
$\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow f'(x)+m-1\geq 0,\forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -m+1\leq f'(x),\forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -m+1\leq \min\limits_{x\in(0;3)} f'(x) \Leftrightarrow -m+1\leq -3 \Leftrightarrow m\geq 4$.

Vậy $m\geq 4$ thì hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trong khoảng nào?



A. $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{-1}{2};0\right)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải.

Chọn B

Đặt $g(x)=f(x^2)$ thì $g'(x)=2x.f'(x^2)$ nên

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1;x=\pm2\end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu của hàm số $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Lưu ý: cách xét dấu $g'(x)$

B1: Xét dấu $f'(x^2)$: ta có $f'(x^2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x^2<4\\x^2<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x^2<4\\x^2<-1\ (\text{loai})\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<|x|<2$

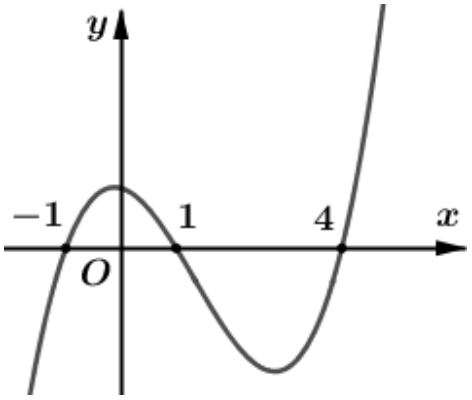
$\Leftrightarrow \begin{cases} |x|<2 \\ |x|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x<-1 \cup x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;-1) \cup (1;2)$

và ngược lại tức là những khoảng còn lại $f'(x^2)<0$.

B2 : xét dấu x (trong trái ngoài cùng).

B3 : lập bảng xét dấu rồi nhân dấu của $f'(x^2)$ và x ta được như bảng trên

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên



Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$.. **D.** $(4;7)$.

Lời giải.

Chọn C

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>4 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$.

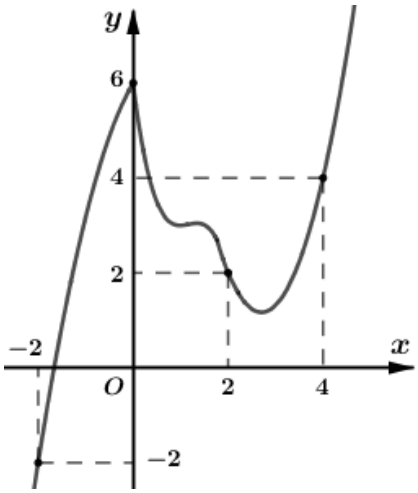
● Với $x>3$ khi đó $g(x)=f(x-3) \longrightarrow g'(x)=f'(x-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x-3<1 \\ x-3>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x>7 \end{array}\right.$

$\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3;4),(7;+\infty)$.

● Với $x<3$ khi đó $g(x)=f(3-x) \longrightarrow g'(x)=-f'(3-x)>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x<-1 \\ 1<3-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \ (\text{loại}) \\ -1<x<2 \end{array}\right. \longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

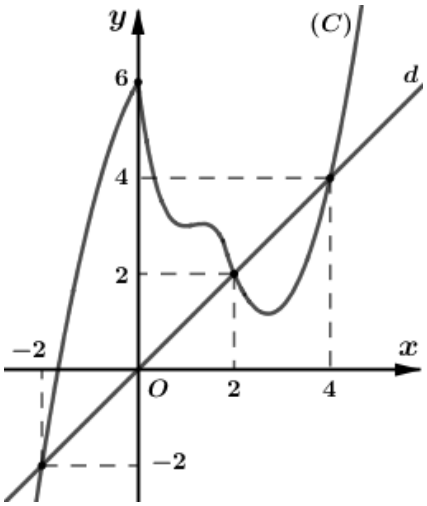
A. $(-2;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x.$

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$ (như hình vẽ bên dưới).

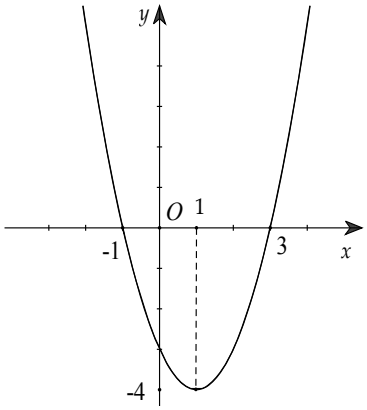


Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên (hoặc ta thấy với $x\in(-2;2)$ thì đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=x$ nên $g'(x)>0$) $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

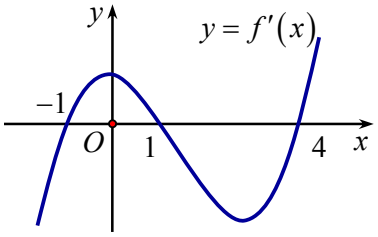
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$..

Lời giải.

Chọn A

Trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 2. **(Mức độ 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(3;+\infty)$ và $(-2;1)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

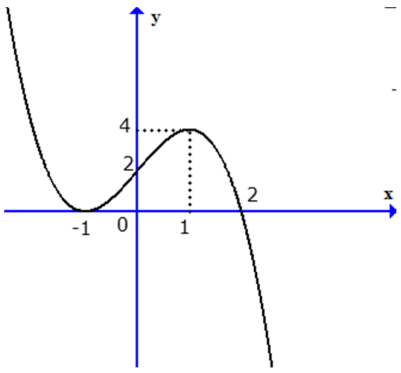
Chọn B

Ta có: $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $\left(f(2-x)\right)'>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ và $(-2;1)$.

Câu 3. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-1;4)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

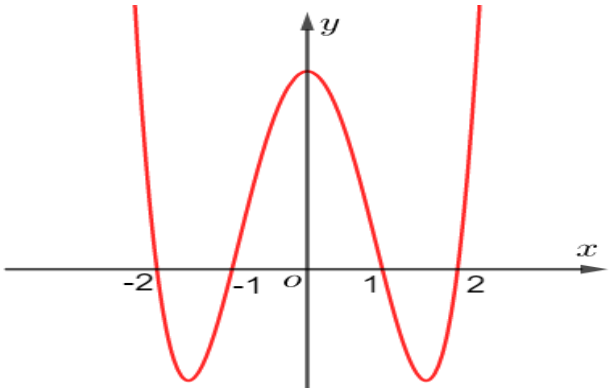
Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Câu 4. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

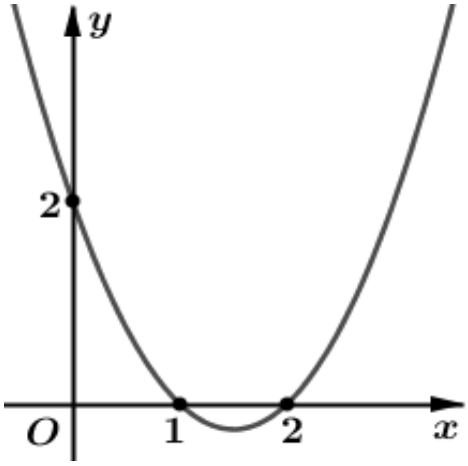
Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng nào?



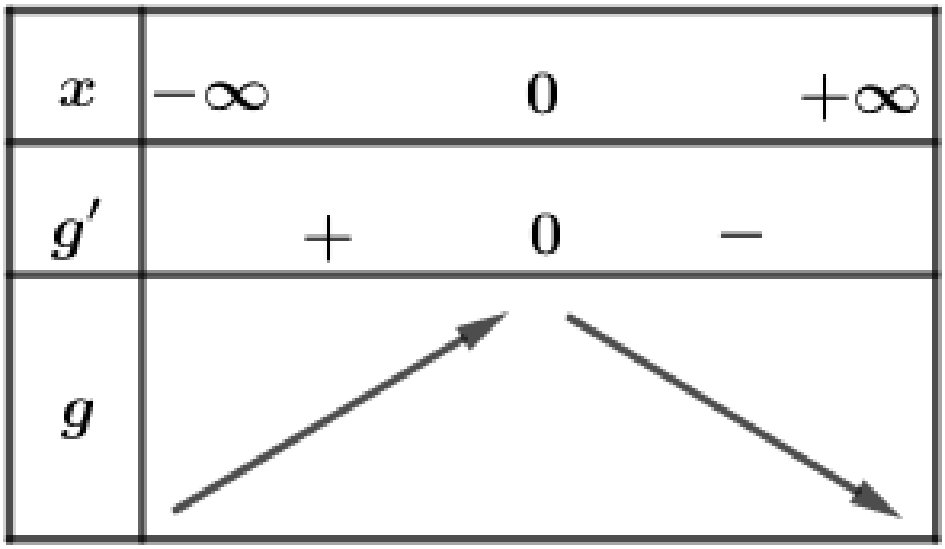
A. $(1;2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

ChọnC

Ta có $g'(x)=-2xf'(1-x^2)$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(1-x^2)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x=0\\1-x^2=1\\1-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$. Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn B

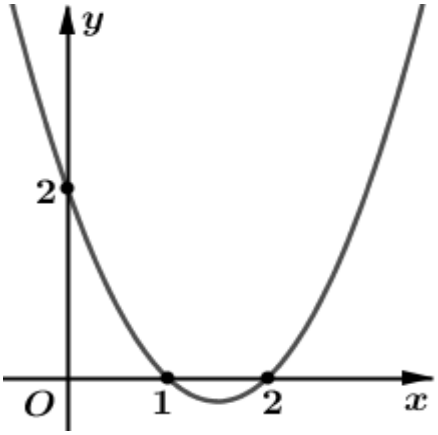
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=1\in(0;+\infty)$.

- $x=1\longrightarrow -2x<0.\ (1)$
- $x=1\to 1-x^2=0\longrightarrow f'(1-x^2)=f'(0)\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(0)=2>0.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(1)<0$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhận thấy nghiệm của $g'(x)=0$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

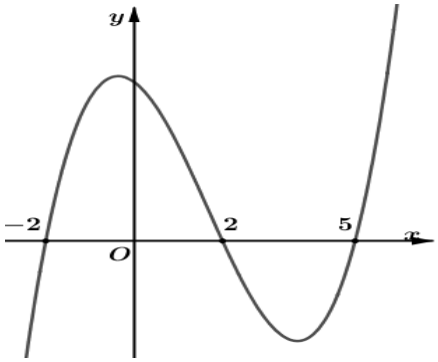
$g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2).$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=1:\text{ vo nghiem}\\ x-x^2=2:\text{ vo nghiem}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(0;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

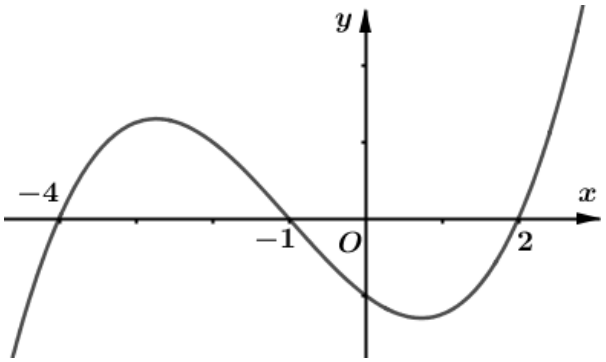
Chọn D

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<2\\ x>5\end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=-2f'(3-2x)$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-2x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<3-2x<2\\ 3-2x>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}.\\ x<-1\end{array}\right.$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f'(x)$. có Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

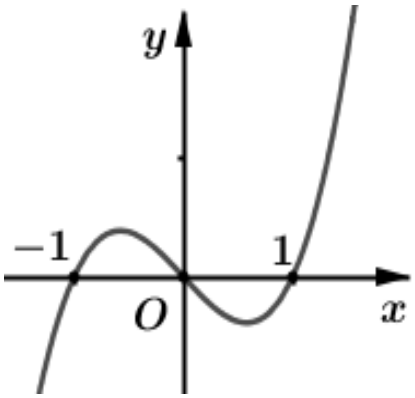
Ta có $x\in\mathbb{R}.\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-5)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-5=-4\\x^2-5=-1\\x^2-5=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\\x=\pm\sqrt{7}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{7}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn C

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên



Hàm số $g(x)=f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$..

Lời giải

Chọn C

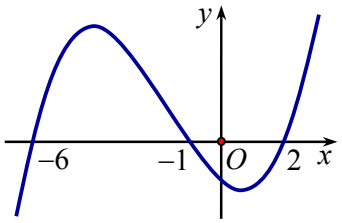
Ta có $g'(x)=3x^2f'(x^3);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'(x^3)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^3=0\\x^3=-1\\x^3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**

Câu 10. **(Mức độ 3)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.

B. $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

C. $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.

D. $(-3;-2)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$..

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có: $y'=-2x.f'(3-x^2)$

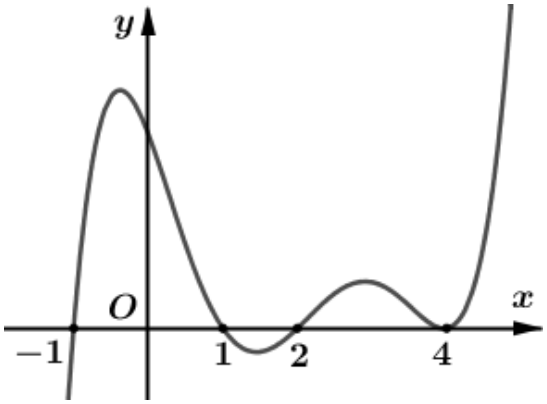
$$y'=0\Leftrightarrow -2x.f'\left(3-x^2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=9\\x^2=4\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\\x=\pm 2\\x=\pm 1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$-2x.f'\left(3-x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 11. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới :



Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<2\end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=-2f'(1-2x)$.

Xét $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(1-2x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x<-1\\1<1-2x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\-\frac{1}{2}<x<0\end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$.

Cách 2. Ta có

$$g'(x)=0\Leftrightarrow -2f'(1-2x)=0\xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}1-2x=-1\\1-2x=1\\1-2x=2\\1-2x=4\,(\text{nghiem kep})\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

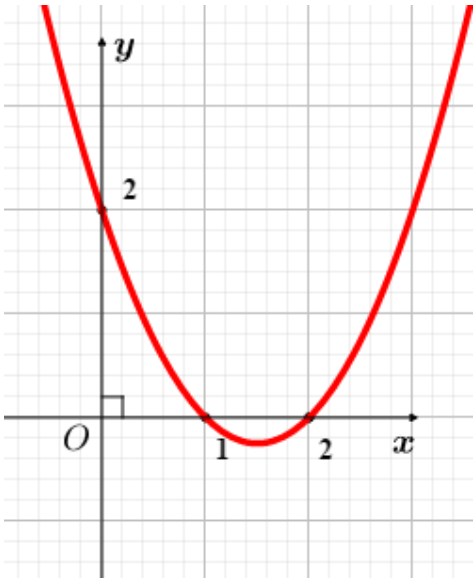
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,5$		$-0,5$		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗			

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn **D**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=2\in(1;+\infty)$, suy ra $1-2x=-3$ $\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}$ $f'(1-2x)=f'(-3)<0$.

Câu 12. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để hàm số $y=f(x+m)$ nghịch biến trên $(3;4)$.



A. $m=3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có: $y'=f'(x+m)$. Vì $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $y'=f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

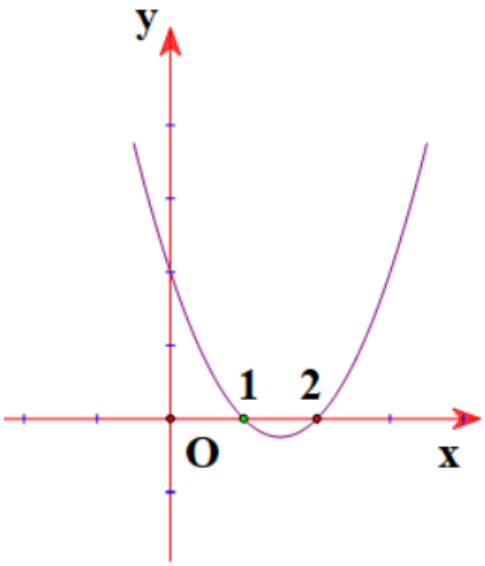
$y'<0\Leftrightarrow f'(x+m)<0\Leftrightarrow 1<x+m<2\Leftrightarrow 1-m<x<2-m$.

Hàm số $y=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\le 3\\4\le 2-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -2\\m\le -2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy với $m=-2$ thì hàm số $y=f(x+m)$ nghịch biến trên $(3;4)$.

Câu 13. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1-\sqrt{3};1-\sqrt{2})$. **B.** $(-\infty;1-\sqrt{2})$. **C.** $(1-\sqrt{2};1)$. **D.** $(1+\sqrt{2};+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị đã cho suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

$g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

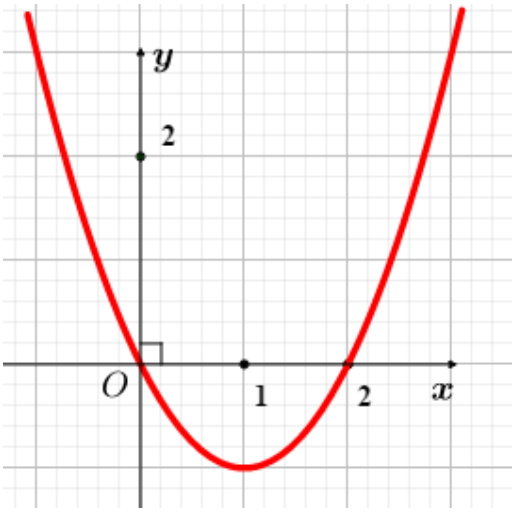
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^2-2x=1\\x^2-2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1-\sqrt{3};1-\sqrt{2})$, $(1;1+\sqrt{2})$ và $(1+\sqrt{3};+\infty)$.

Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1,+\infty)$. **B.** $(-1,0)$. **C.** $(-1,2)$. **D.** $(-\infty,1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=\dfrac{x}{|x|}f'(|x|+1)$.

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{|x|}f'(|x|+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}=0\\ f'(|x|+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}|x|+1=0\\ |x|+1=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}|x|=-1\quad(L)\\ |x|=1\end{array}\right.\end{cases}$.

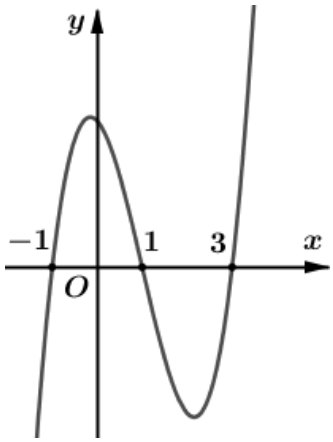
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

Từ bảng biến thiên thì ta có $g(x)=f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1,1)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)$.. **C.** $\left(1;2\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $\left(2\sqrt{2}-1;+\infty\right)$.

Lời giải.

Chọn A

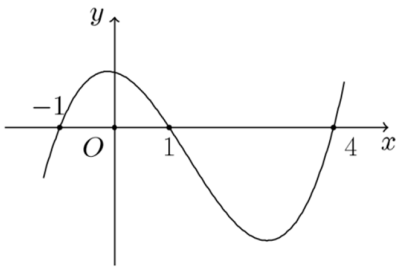
Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x+1=0\\\sqrt{x^2+2x+2}=1\\\sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (\text{nghiem boi ba})\\x=-1-2\sqrt{2}\\x=-1+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên và ta chọn A

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau: Ví dụ xét trên khoảng $\left(-1;-1+2\sqrt{2}\right)$ ta chọn $x=0$. Khi đó $g'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\sqrt{2}\right)<0$ vì dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy tại $x=\sqrt{2}\in(1;3)$ thì $f'\left(\sqrt{2}\right)<0$. Các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(4;7)$. **B.** $(2;3)$ và $(-1;2)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

+ Với $x>3$, ta có $g(x)=f(x-3)\Rightarrow g'(x)=f'(x-3)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)>0$

$$\Leftrightarrow f'(x-3)>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1<x-3<1\\x-3>4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2<x<4\\x>7\end{bmatrix}.$$

Vì $x>3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$ hoặc $(7;+\infty)$.

+ Với $x<3$, ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

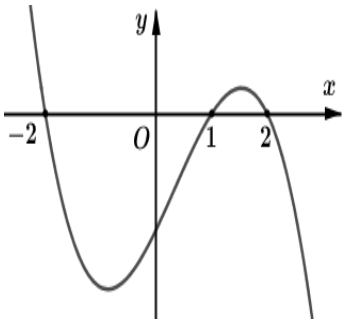
Hàm số $y=g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)>0$

$$\Leftrightarrow f'(3-x)<0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3-x<-1\\1<3-x<4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x>4\\-1<x<2\end{bmatrix}.$$

Vì $x<3$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;2)$, $(3;4)$ và $(7;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau:



A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1;x=\pm 2$; $f(2)=f(-2)=0$.Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

$\Rightarrow f(x)<0;\forall x\neq\pm 2.$

Xét $y=\left(f(x)\right)^2\Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\x=1;x=\pm 2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu :

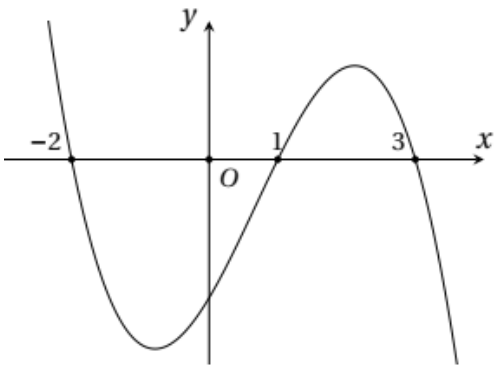
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	
$y=\left[\left(f(x)\right)^2\right]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hoặc Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$. Xét

$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x).f(x)<0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)>0\\f(x)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\1<x<2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(1;2)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hàm số $g(x)=f\left(\left|4-2x\right|\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};7\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $x \le 2$. Khi đó $g(x) = f(4-2x)$.

Ta có $g'(x) = -2f'(4-2x)$, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(4-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-2x < -2 \\ 1 < 4-2x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{array}\right.$

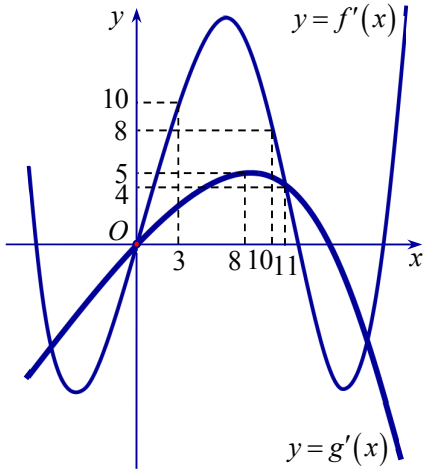
So điều kiện $x \le 2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Trường hợp 2: $x > 2$. Khi đó $g(x) = f(2x-4)$.

Ta có $g'(x) = 2f'(2x-4)$, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-4) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 2x-4 < 1 \\ 2x-4 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < \frac{5}{2} \\ x > \frac{7}{2} \end{array}\right.$

So điều kiện $x > 2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(2;\frac{5}{2}\right);\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Câu 19. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\frac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$.

Lời giải.

Chọn B

Cách 1: Đặt $X = x+4$, $Y = 2x - \frac{3}{2}$. Ta có $h'(x) = f'(X) - 2g'(Y)$.

Để hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến thì $h'(x)\ge 0$

$\Rightarrow f'(X)\ge 2g'(Y)$ với $X,Y\in[3;8]\Rightarrow\begin{cases}3\le x+4\le 8\\ 3\le 2x-\frac{3}{2}\le 8\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 4\\ \frac{9}{2}\le 2x\le\frac{19}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 4\\ \frac{9}{4}\le x\le\frac{19}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{9}{4}\le x\le\frac{19}{4}$. Vì $\left(\frac{9}{4};3\right)\subset\left(\frac{9}{4};\frac{19}{4}\right)$ nên chọn B

Cách 2: Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a\in(8;10)$.

Khi đó ta có

$\begin{cases}f(x+4)>10,\text{khi}\,3<x+4<a\\ g\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5,\text{khi}\,0\le 2x-\frac{3}{2}<11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x+4)>10,\text{khi}-1<x<4\\ g\left(2x-\frac{3}{2}\right)\le 5,\text{khi}\,\frac{3}{4}\le x\le\frac{25}{4}\end{cases}$.

Do đó $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)>0$ khi $\frac{3}{4}\le x<4$.

Cách 3:

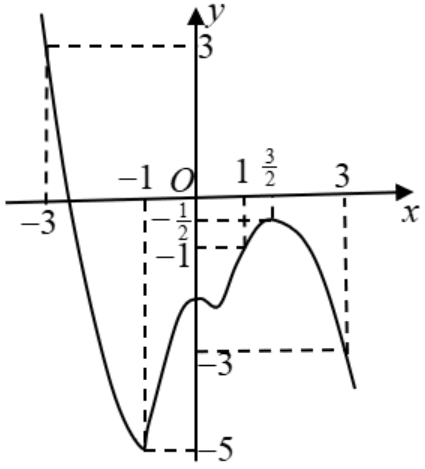
Kiểu đánh giá khác:Ta có $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x\in\left(\frac{9}{4};3\right)$, ta có $\frac{25}{4}<x+4<7$, $f(x+4)>f(3)=10$;

$3<2x-\frac{3}{2}<\frac{9}{2}$, do đó $g\left(2x-\frac{3}{2}\right)<f(8)=5$.

Suy ra $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)>0,\forall x\in\left(\frac{9}{4};3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4};3\right)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải.

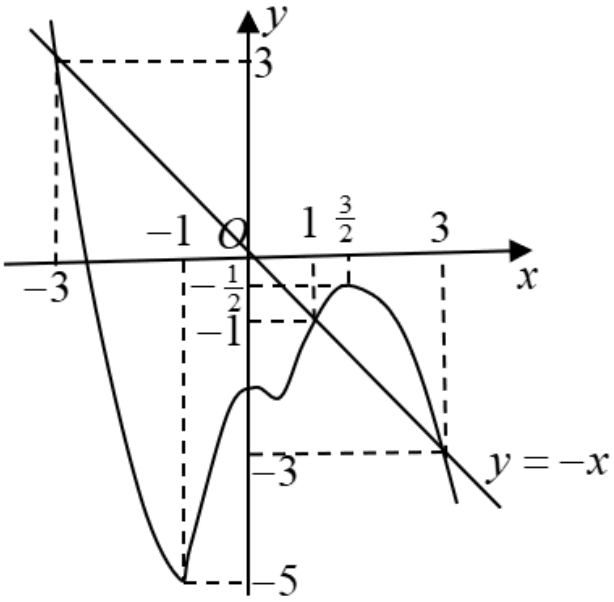
Chọn C

Ta có $g'(x)=-f'(1-x)+x-1.$

Để $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-x)>x-1.$ Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t)>-t.$

Kẻ đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=-1;\ x=3.$

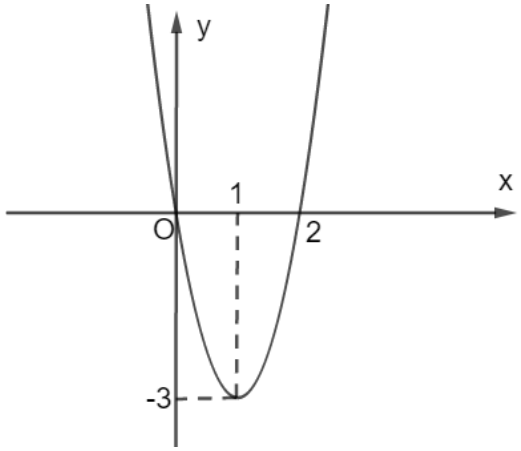
Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình



$$f'(t)>-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-3\\1<t<3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-x<-3\\1<1-x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\-2<x<0\end{array}\right.$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

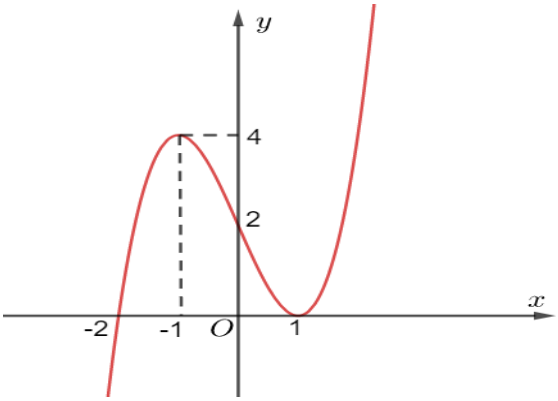
Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 2. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

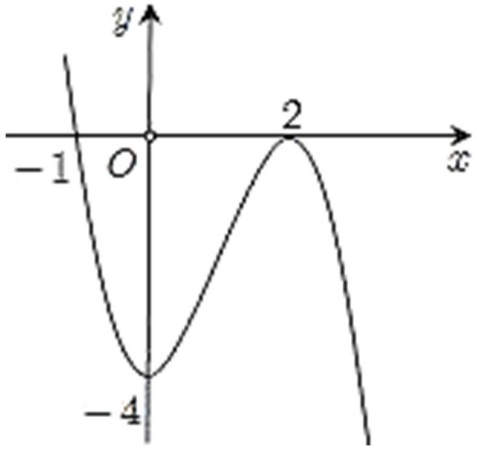
Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Câu 3. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

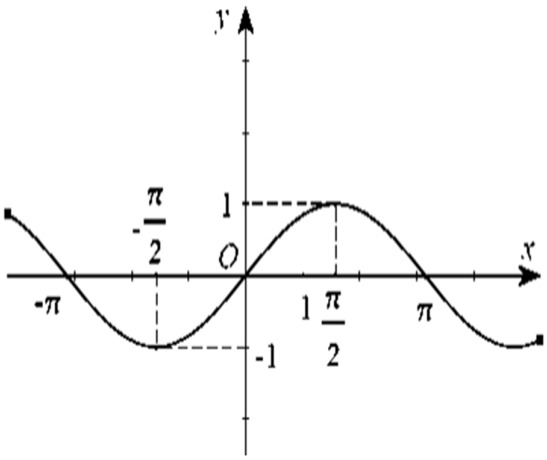
D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty;-1)$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

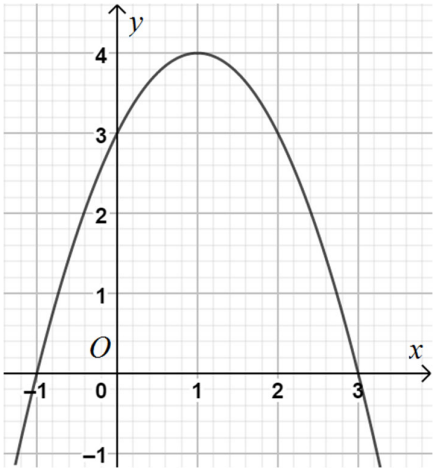
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải.

Chọn D

Trong khoảng $(0;\pi)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 5. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x+2)+3$ như hình vẽ.

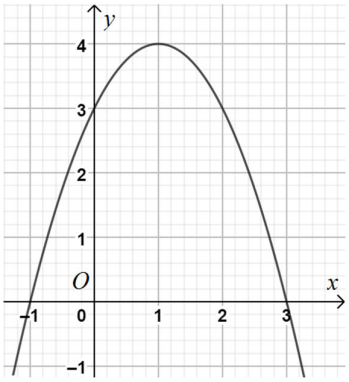


Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;3)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Chọn B



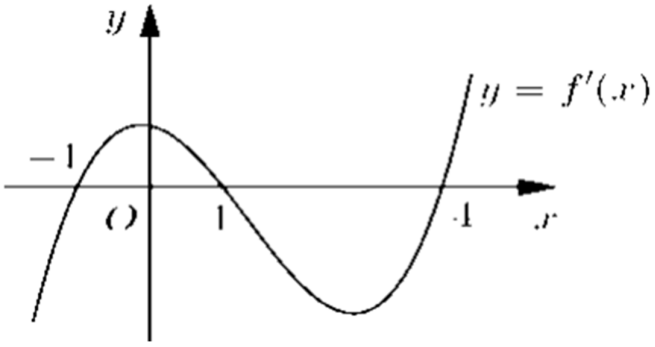
Hàm số đồng biến biến khi $f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x-2+2)+3>3 \ (1)$

Đặt $t=x-2$ thì (1) trở thành: $f'(t+2)+3>3 \Leftrightarrow 0<t<2$ (Dựa vào đồ thị ban đầu).

Từ đó ta có $0<x-2<2 \Leftrightarrow 2<x<4$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 6. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

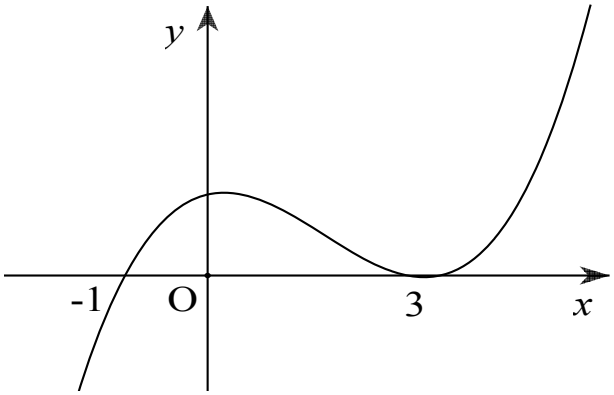
Lời giải.

Chọn D

Ta có: $g'(x)=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Xét hàm số $g(x)=f\left(3-x^2\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;3)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=-2xf'\left(3-x^2\right)$;

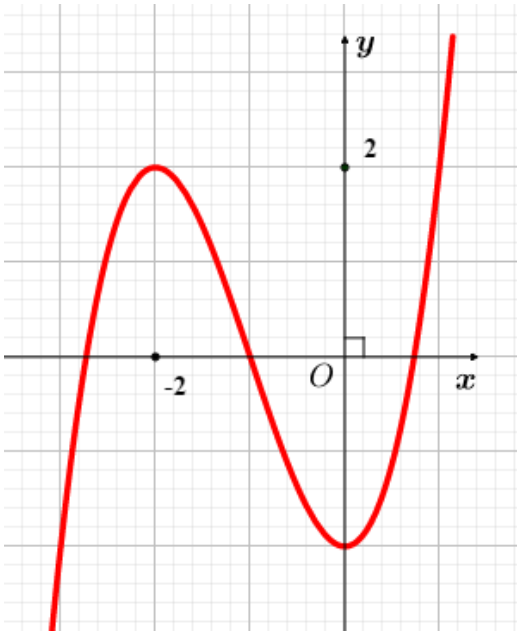
$$f'\left(3-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x^2=-1\\3-x^2=3\ (\text{nghiem kep})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\ (\text{nghiem kep})\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(3-x^2)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 8. **(Mức độ 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(x)-2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$..

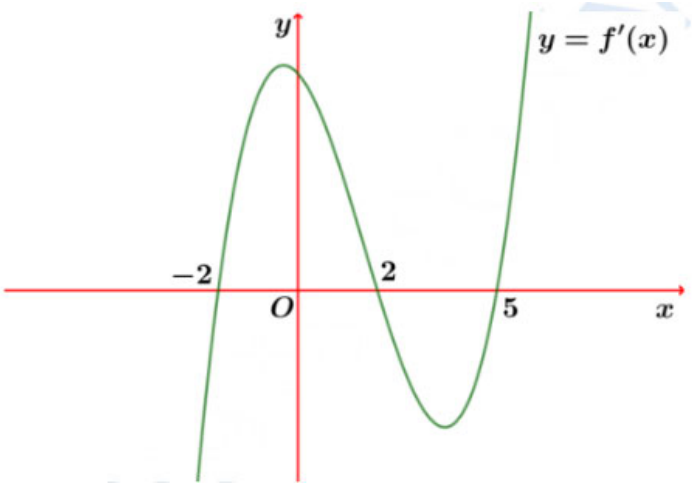
Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=f'(x)-2; y'>0 \Leftrightarrow f'(x)>2$. Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)>2 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 9. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Tìm các khoảng ngịch biến của hàm số $g(x)=f(3-2x)+1$?

A. $(-\infty;-2),\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

C. $(-\infty;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$..

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\x=5\end{array}\right.$

Khi đó $g'(x)=-2f'(3-2x)$

Với $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(3-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x=-2\\3-2x=2\\3-2x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=\frac{1}{2}\\x=-1\end{array}\right.$

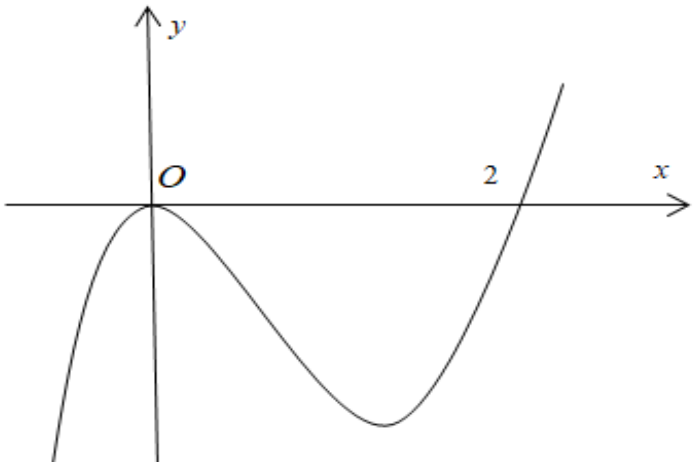
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-1)$	↗	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$g\left(\frac{5}{2}\right)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Câu 10. **[Mức độ 2]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(2-x)$?



A. $(0;\infty)$. **B.** $(-5;-1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$..

Lời giải

Chọn C

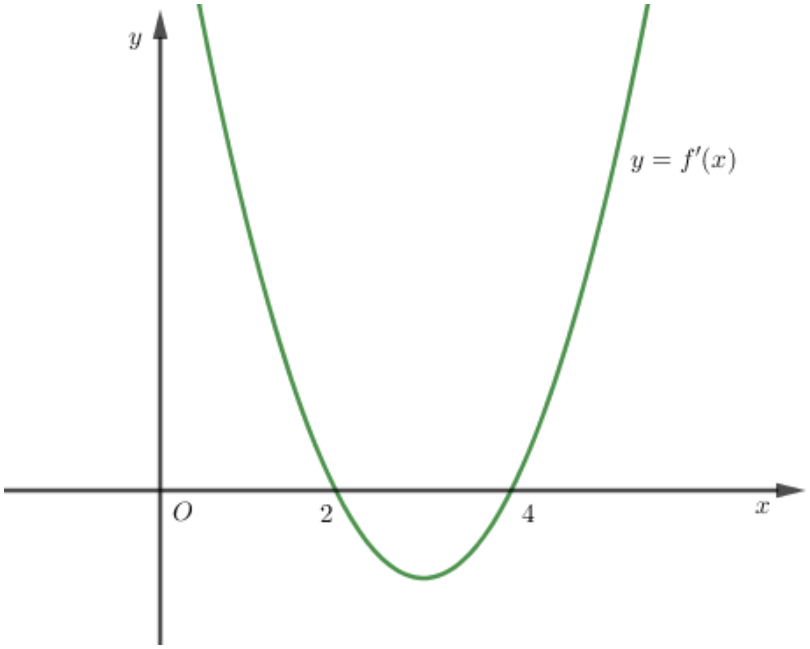
Ta có $g'(x)=-f'(2-x)$.

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(2-x)\le 0$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy $f'(2-x)\le 0 \Leftrightarrow 2-x\le 2 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Vậy hàm số $g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$..

Câu 11. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=g(x)=f(1+x^2)$?



A. $(-3;-1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$; $(-1;0)$; $(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

C. $\left(-\sqrt{3};-1\right)$; $(0;1)$; và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $(-3;-2)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ và $(3;+\infty)$..

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\left[f\left(1+x^2\right)\right]'=2x.f'\left(1+x^2\right)\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\1+x^2=2\\1+x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Mặt khác ta có

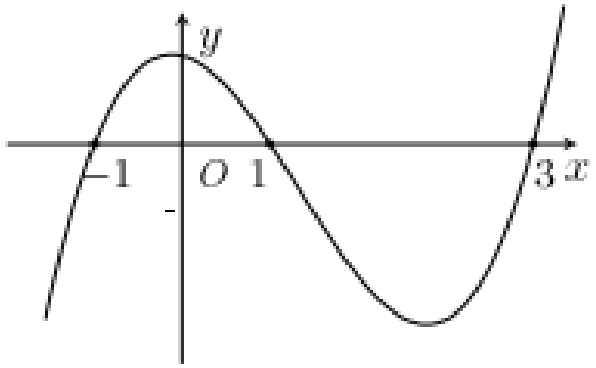
$f'\left(1+x^2\right)<0 \Leftrightarrow 2<1+x^2<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$f'(1+x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Vậy hàm số $y=f\left(1+x^2\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right);(-1;0);\left(1;\sqrt{3}\right)$ và đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right);(0;1);\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử ?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x+m\right)$. Vì $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'\left(x\right)=f'\left(x+m\right)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy

$g'\left(x\right)<0 \Leftrightarrow f'\left(x+m\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m<-1 \\ 1<x+m<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1-m \\ 1-m<x<3-m \end{array}\right.$.

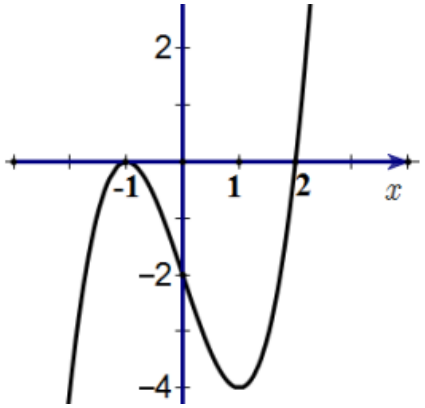
Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le -1-m \\ \begin{cases} 3-m \ge 2 \\ 1-m \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ 0 \le m \le 1 \end{array}\right. .$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên ta có $S=\{-5;-4;-3;0;1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Chọn A

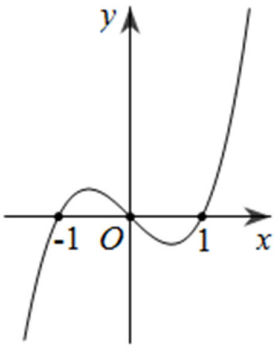
Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x-1)$. Nhận xét: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-1=-1 \\ x^2-2x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=2; x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x		-1		0		1		2		3	
g'(x)	-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+
g(x)	↘		↗		↗		↘		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 14. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$?

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{2};-1\right),(0;1)$ và $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),(-1;1)$ và $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

C. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-1\right),(0;1)$ và $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{2};-1\right),(0;1)$ và $\left(1;\sqrt{3}\right)$..

Lời giải.

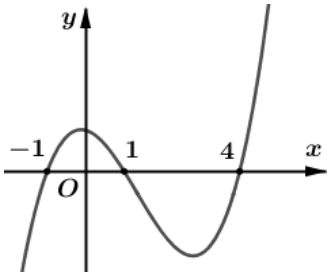
Chọn A

Ta có. $y'=\left(f\left(x^2-2\right)\right)'=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

$$y'<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\f'\left(x^2-2\right)<0\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\f'\left(x^2-2\right)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x^2-2<-1\\0<x^2-2<1\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\\left[\begin{array}{l}-1<x^2-2<0\\x^2-2>1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x^2<1\\2<x^2<3\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\\left[\begin{array}{l}1<x^2<2\\x^2>3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\vee\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\\-\sqrt{2}<x<-1\vee x<-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{2};-1\right),(0;1)$ và $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(|3-x|\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$.. **B.** $(-1;2)$.. **C.** $(2;3)$.. **D.** $(4;7)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x>4\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<4\end{array}\right.$.

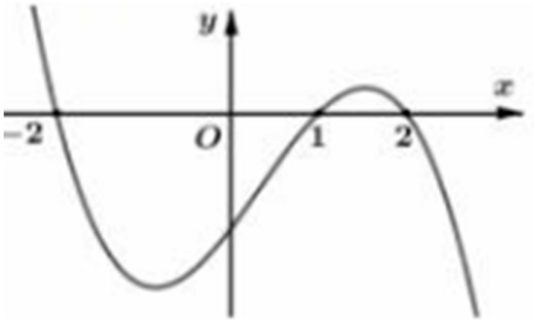
● Với $x>3$ khi đó $g(x)=f(x-3)\longrightarrow g'(x)=f'(x-3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x-3<1\\x-3>4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x>7\end{array}\right.$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3;4),\ (7;+\infty)$.

● Với $x<3$ khi đó $g(x)=f(3-x)\longrightarrow g'(x)=-f'(3-x)>0\Leftrightarrow f'(3-x)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x<-1\\1<3-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\ (loai)\\-1<x<2\end{array}\right.$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$..

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ, và $f(-2)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và $f(-2)=f(2)=0$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

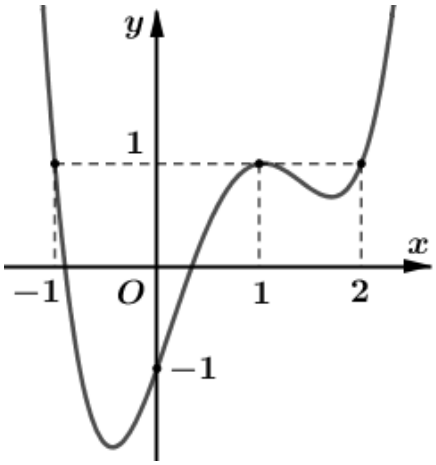
x		-2		1		2	
y'	+	0	−	0	+	0	−
y		0		$f(1)$		0	

$\Rightarrow f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(3-x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2 \Rightarrow g'(x)=-2.f(3-x).f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow f'(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\3-x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<5\\x<1\end{array}\right.$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x)=f(x)-x,$ khẳng định nào sau đây là đúng?

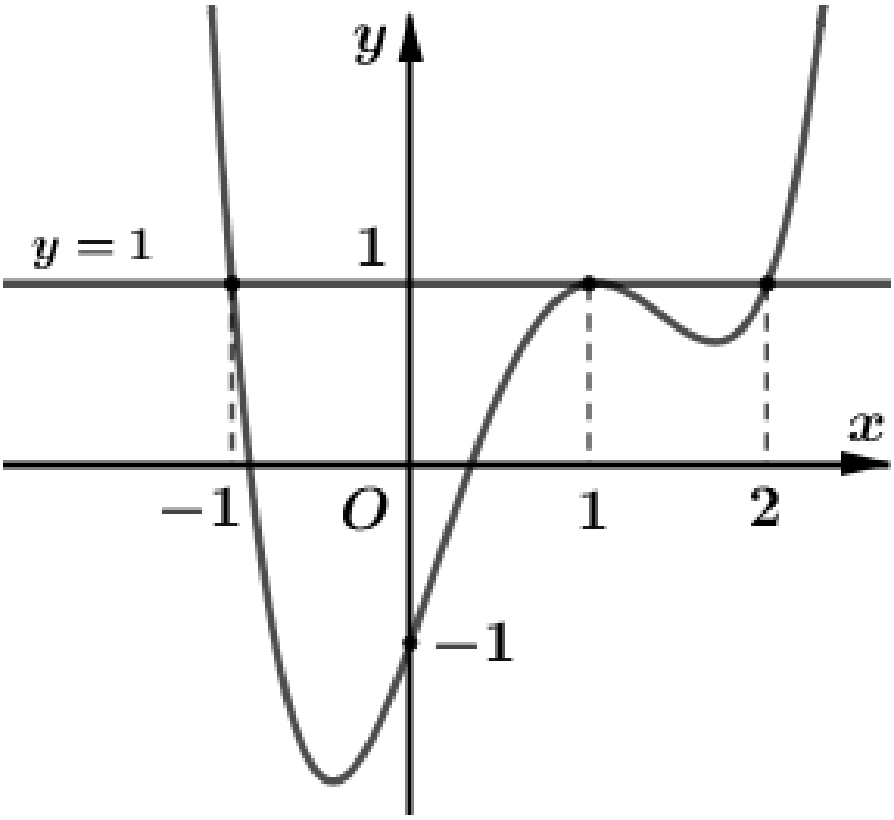
A. $g(-1)>g(1)>g(2)$.
B. $g(2)<g(-1)<g(1)$.
C. $g(-1)<g(1)<g(2)$.
D. $g(1)<g(-1)<g(2)$..

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)-1 \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=1$ (như hình vẽ bên dưới).



x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g		$g(-1)$	↘	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗

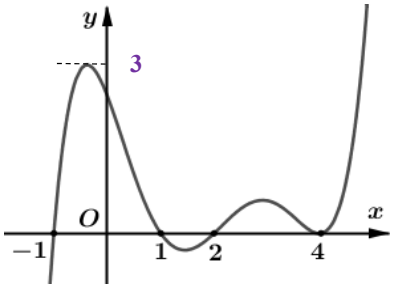
Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên $\longrightarrow g(2)<g(-1)<g(1)$. Chọn C

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y=1$ nên $g'(x)=f'(x)-1$ mang dấu $+$.

Câu 18. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g(x)=f(x)-(m+1)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. $m\in(-\infty;2)$. **B.** $m\in(-1;1)$. **C.** $m\in[2;+\infty)$. **D.** $m\in(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$y=g(x)=f(x)-(m+1)x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-(m+1)$

Hàm số $g(x)=f(x)-(m+1)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

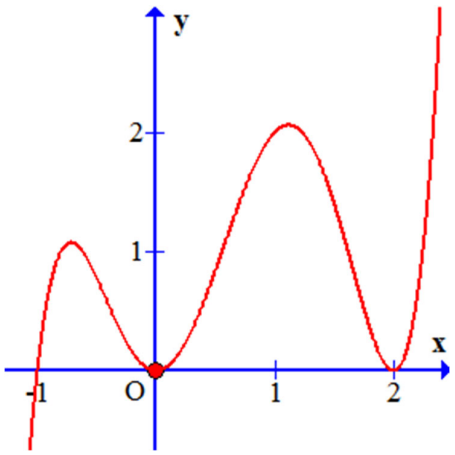
$\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow f'(x)-(m+1)\le 0, \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow m+1\ge f'(x), \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow m+1\ge \max\limits_{x\in(-1;1)} f'(x) \Leftrightarrow m+1\ge 3 \Leftrightarrow m\ge 2$.

Vậy $m\in[2;+\infty)$.

Câu 19. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(|1-x|)$?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có: $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$

+ TH1: $x>1$. Khi đó, $g(x)=f(x-1)$, $g'(x)=f'(x-1)$

Ta có: $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x-1)>0\Leftrightarrow x-1>-1\Leftrightarrow x>0$. Kết hợp $x>1$ ta có $x>1$.

$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x-1)<0\Leftrightarrow x-1<-1\Leftrightarrow x<0$ (Loại).

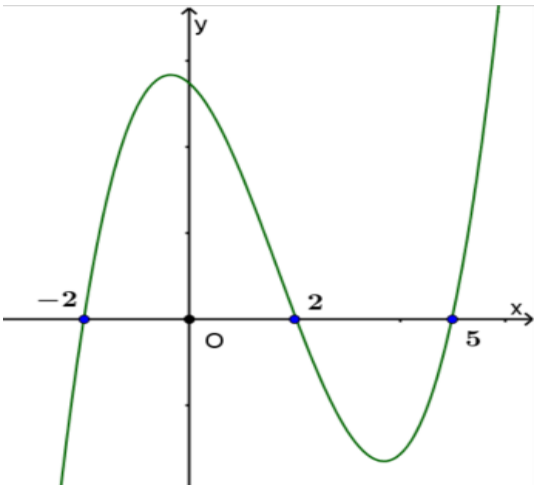
+ TH2: $x<1$. Khi đó, $g(x)=f(1-x)$, $g'(x)=-f'(1-x)$

Ta có: $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow 1-x<-1\Leftrightarrow x>2$ (Loại).

$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-x)>0\Leftrightarrow 1-x>-1\Leftrightarrow x<2$. Kết hợp $x<1$ ta được $x<1$.

Vậy hàm số $g(x)=f(|1-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 20. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

A. $\left[\begin{array}{l}1\le m\le 2\\ m\le -4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0\le m\le 2\\ m\le -5\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}0\le m\le 1\\ m\le -4\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-1\le m\le 1\\ m\le -5\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

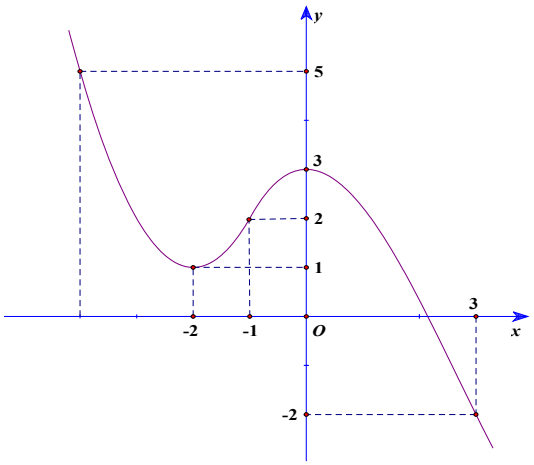
+ Ta có $g'(x)=f'(x-m)$.

+ Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x-m)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x-m\le 2 \\ x-m\ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2+m\le x\le 2+m \\ x\ge 5+m \end{array}\right.$

+ Hàm số x đồng biến trên khoảng $(-2;0) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x-m)\ge 0, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2+m\le 0<2\le 2+m \\ 5+m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le m\le 2 \\ m\le -5 \end{array}\right. . \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le m\le 2 \\ m\le -5 \end{array}\right.$

Câu 21. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y=g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

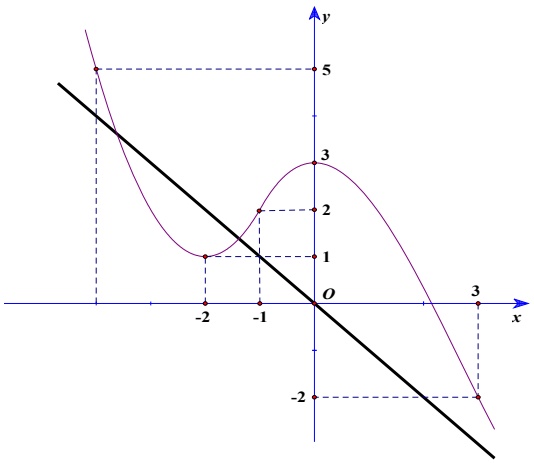
Ta có $g'(x)=-f'(1-x)+x-1$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-x)>x-1$. (*)

Đặt $t=1-x$, $x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in\mathbb{R}$. Khi đó, (*) trở thành $f'(t)>-t$.

Đồ thị hàm số $f'(t)$ là đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ trên.

Vẽ đồ thị hàm số $y=-t$ trên cùng một hệ trục với đồ thị hàm số $f'(t)$ như hình vẽ sau:

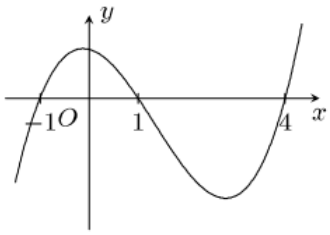


Dựa và đồ thị ta có, với $-1<t<3$ thì đồ thị hàm số $y=f'(t)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-t$ nên $f'(t)>-t$, $\forall t\in(-1;3)$.

Do $t=1-x$ nên với $-2<x<2$ thì $g'(x)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

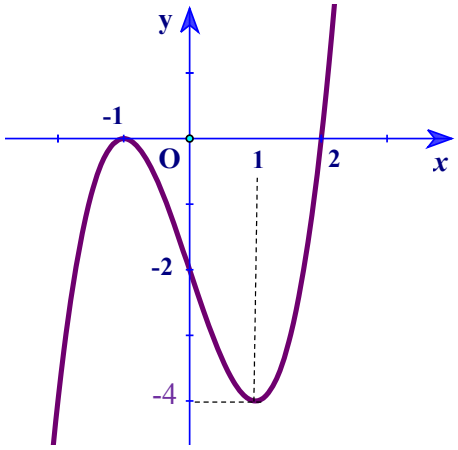
Ta có:

$g'(x)=\left[f(x^2)\right]'=2x.f'(x^2)$.

$$g'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\f'(x^2)<0\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\f'(x^2)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\x^2<-1\vee 1<x^2<4\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\-1<x^2<1\vee x^2>4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2\\x<-2\vee -1<x<0\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f(x^2)$ có ba khoảng nghịch biến.

Câu 23. **[Mức độ 3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-(m^2-4m)x$ đồng biến trên $(-1;2)$

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $m=2$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$g(x)=f(x)-(m^2-4m)x\Rightarrow g'(x)=f'(x)-(m^2-4m)$

Hàm số $g(x)=f(x)-(m^2-4m)x$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$

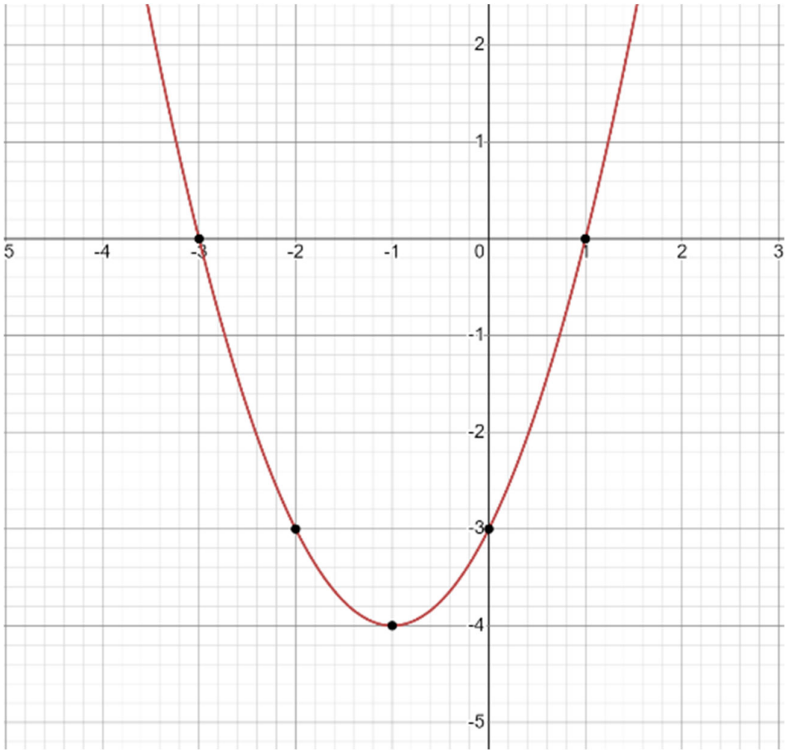
$\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow f'(x)-(m^2-4m)\geq 0,\forall x\in(-1;2)$

$\Leftrightarrow m^2-4m\leq f'(x),\forall x\in(-1;2)$

$\Leftrightarrow m^2-4m\leq \min\limits_{x\in(-1;2)} f'(x)\Leftrightarrow m^2-4m\leq -4\Leftrightarrow (m-2)^2\leq 0\Leftrightarrow m=2$.

Vậy chỉ có duy nhất một giá trị thực $m=2$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 24. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=g(x)=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.



A. $\left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 12 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq 1 \end{array}\right.$. **D.** $-1 \leq m \leq 13$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = \left[f\left(x^2+3x-m\right)\right]' = (2x+3) f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3) f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

+ Với $x \in (0;2)$ thì $2x+3>0, \forall x \in (0;2)$ suy ra $g'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

+ Đặt $t = x^2+3x-m \Rightarrow t' = 2x+3$. Ta có bảng biến thiên

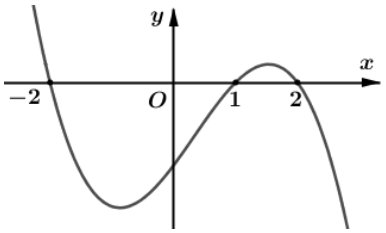
x	0		2
t'		+	
t	$-m$	↗	$10-m$

+ $f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in (-m;10-m)$.

+ Dựa vào đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta thấy: $f'(t)\ge 0,\forall t\in(-m;10-m)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10-m\le -3\\ -m\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\ m\le -1\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\ m\le -1\end{array}\right.$$

Câu 25. **(Mức độ 4)** Cho hàm số $y=f(x)$.Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0.$



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau? Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3.

A. $(-\infty;1)$ và $(2;5)$. **B.** $(-\infty;1)$ và $(1;5)$ . . **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(x)<0\ \ \forall x\ne\pm 2$.

Ta có: $g'(x)=-2f'(3-x).f(3-x)$

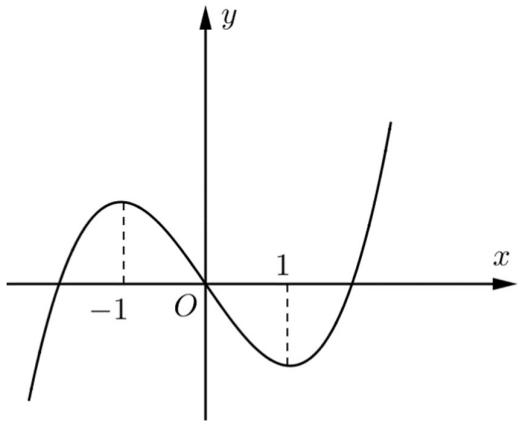
$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x)>0$

Do $f(x)<0\ \forall x\ne\pm 2$ nên $f(3-x)<0\forall x\ne 1$ và $x\ne 5$

$$\Rightarrow g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\ 3-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<5\\ x<1\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$.

Câu 26. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.



A. 3 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 7 .

Lời giải

Chọn A

$y=\left|4f\left(\sin x\right)+\cos 2x-a\right|=\left|4f\left(\sin x\right)+\sin^2 x+1-a\right|$.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow t'=\cos x>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó để hàm số $y=\left|4f\left(\sin x\right)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số $y=\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|$ phải nghịch biến trên $\left(0;1\right)$.

Ta có $y=\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|\to y'=\frac{\left[4f'\left(t\right)-4t\right]\left[4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right]}{\left|4f\left(t\right)-2t^2+1-a\right|}<0$, $\forall t\in\left(0;1\right)$ $(*)$

Với $t\in\left(0;1\right)$ thì đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ nằm phía dưới trục Ox.

$\Rightarrow f'\left(t\right)<0,\forall t\in\left(0;1\right) \Rightarrow 4\left[f'\left(t\right)-t\right]<0,\forall t\in\left(0;1\right)$.

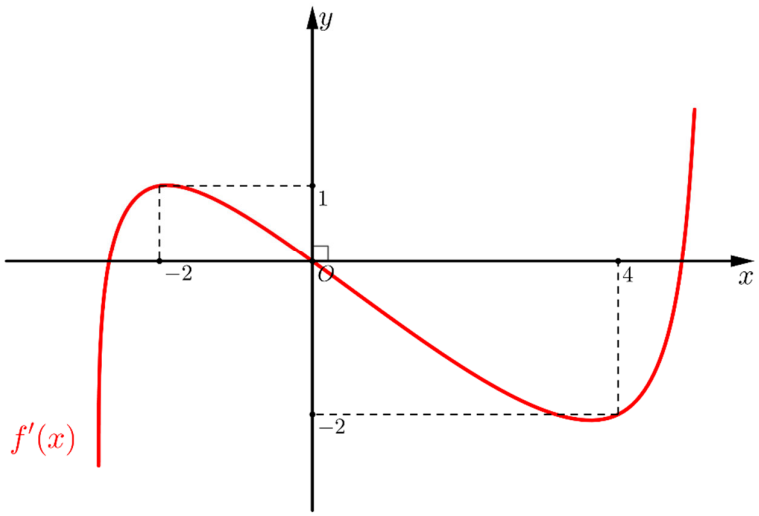
Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 4f\left(t\right)-2t^2+1-a>0,\forall t\in\left(0;1\right) \Leftrightarrow a<4f\left(t\right)-2t^2+1,\forall t\in\left(0;1\right)$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=4f\left(t\right)-2t^2+1$ trên $\left(0;1\right)$.

$\Rightarrow g'\left(t\right)=4f'\left(t\right)-4t<0 \Rightarrow g\left(t\right)>g\left(1\right)=4f\left(1\right)-2.1+1=3,\forall t\in\left(0;1\right)$.

Ta có: $a\le 3<4f\left(t\right)-2t^2+1$ luôn đúng với $\forall t\in\left(0;1\right)$. Vậy $0<a\le 3\Rightarrow a\in\left\{1;2;3\right\}$.

Câu 27. **[Mức độ 4]** Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình bên.



Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ trên đoạn $[-2;4]$?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

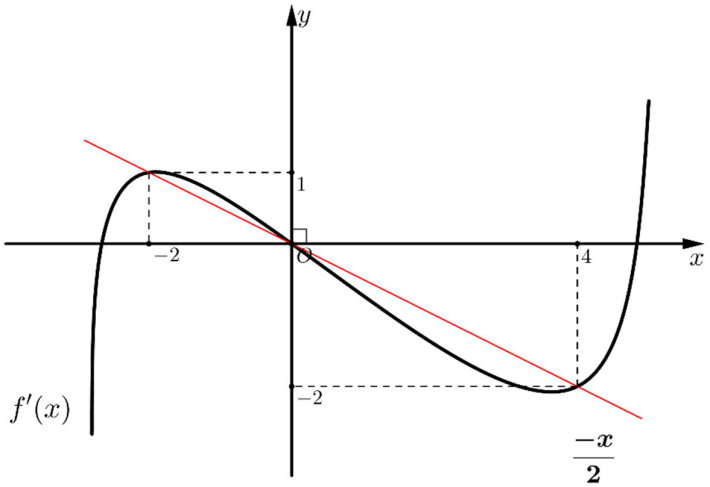
Lời giải.

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x)=4f'(x)+2x \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{-x}{2}$.

Vẽ đường thẳng $y=-\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

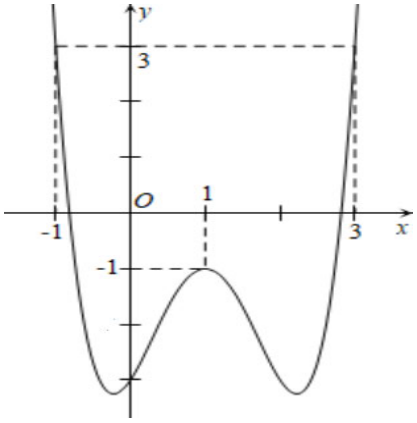
x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	$h(-2)$	↗	0	↘	$h(4)$	↗	$+\infty$

Vì $h(0)=4f(0)=0$. Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-h(-2)$	↗	0	↗	$-h(4)$	↘	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 28. **(Mức độ 4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số $g(x)=f(3x-1)-27x^3+54x^2-27x+4$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;3)$.

C. $(-\infty;0)$ và $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.. **D.** $(-\infty;0)$ và $(4;7)$.

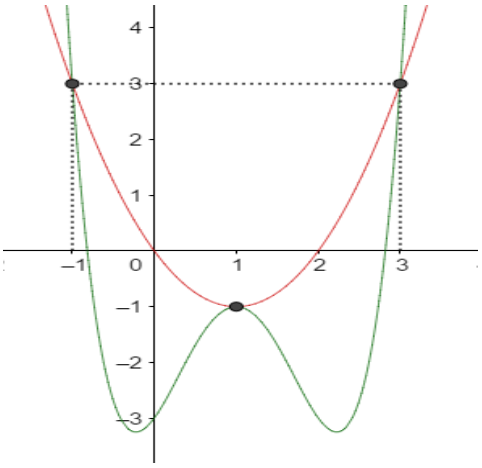
Lời giải.

Chọn C

Ta có: $g(x)=f(3x-1)-(3x-1)^3+3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x)=3\left[f'(3x-1)-(3x-1)^2+2(3x-1)\right]$

Có $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(3x-1)>(3x-1)^2-2(3x-1)$ (1).

Đặt $t=3x-1$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t)>t^2-2t$. Vẽ Parabol $y=x^2-2x$.



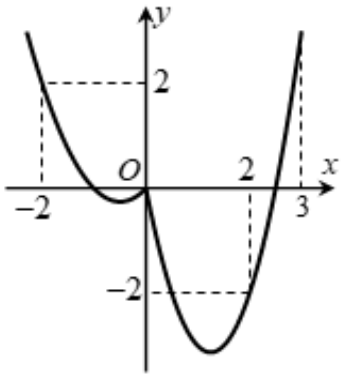
Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Suy ra $f'(t)>t^2-2t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1<-1 \\ 3x-1>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 29. **[Mức độ 4]**Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ và $f(3)=f(0)-\dfrac{9}{2}$.

Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ nghịch biến trên những khoảng nào trong khoảng $(-2;+\infty)$?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-2;0)$ và $(2;3)$. **D.** $(-\infty;0)$ và $(4;7)$.

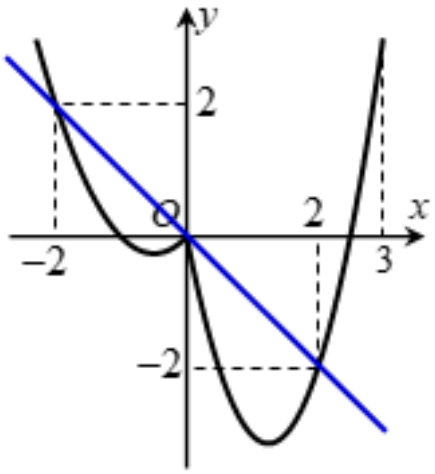
Lời giải.

Chọn C

Đặt $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)$ ta có $g(x)=|h(x)|$.

Khi đó $h'(x)=f'(x)+x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x$.

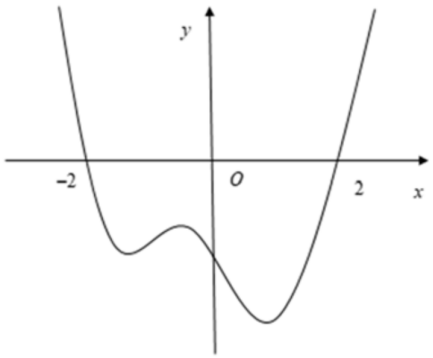
Số nghiệm phương trình $h'(x)=0$ là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$ (Hình vẽ). Từ đó có $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.



Ta có bảng biến thiên của $h(x)$:

Từ bảng biến thiên của $h(x)$ ta thấy hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{2}x^2-f(0)\right|$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;3)$

Câu 30. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-2)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\left|f(-2)\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

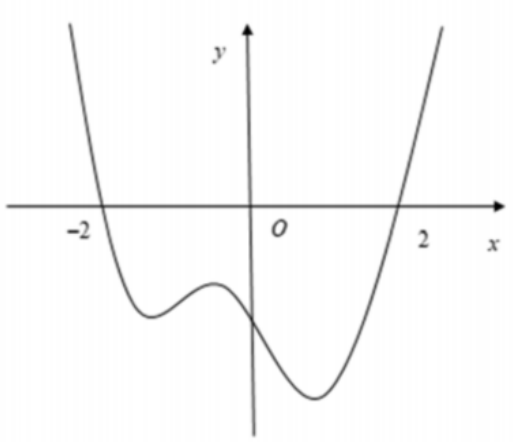
Ta có $f(-2)<0;1-x^2\le 1\Rightarrow f\left(1-x^2\right)<0.\forall x\in\mathbb{R}$

$$t=1-x^2\Rightarrow f'(t)<0\Rightarrow t\in(-2;1)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$$
$$0<f'(t)\Rightarrow t\in(-\infty;-2)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$$

$$g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f^2\left(1-x^2\right)}=\frac{-4xf(t)f'(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g\left(-\sqrt{3}\right)$	↗	$g(0)$	↘	$g\left(\sqrt{3}\right)$	↗	

Câu 31. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$?

A. $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

B. $(2;3)$.

C. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$..

D. $(-\infty;0)$ và $(4;7)$.

Lời giải.

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Vì $f(-2)<0;1-x^2\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên từ bảng biến thiên trên ta có $f\left(1-x^2\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=1-x^2$. Khi đó, $g(x)=\left|f(t)\right|,t\le 1$.

+ $f'(t)<0\Rightarrow -2<t<1\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

+ $f'(t).0\Rightarrow t<-2\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Xét $g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f^2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{-4x.f(t).f'(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$.

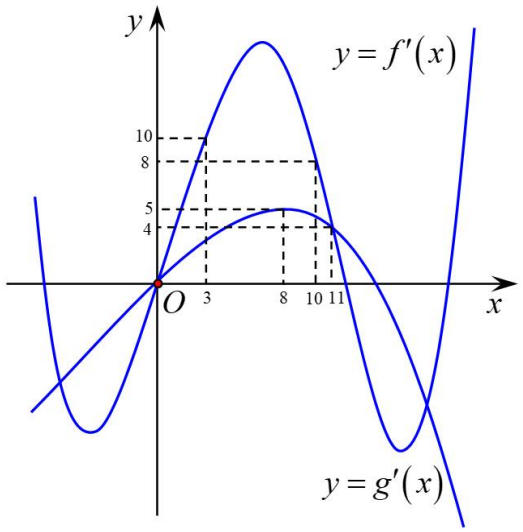
Từ đây, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\sqrt{-3})$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Câu 32. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+6)-g\left(2x+\frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **B.** $\left(\frac{21}{5};+\infty\right)$. **C.** $\left(3;\frac{21}{5}\right)$. **D.** $\left(4;\frac{17}{4}\right)$.

Lời giải..

Chọn A

Ta có $h'(x)=f'(x+6)-2g'\left(2x+\frac{5}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3;8)$ thì $g'(x)<5$ và $f'(x)>10$. Do đó $f'(x)>2g'(x)$.

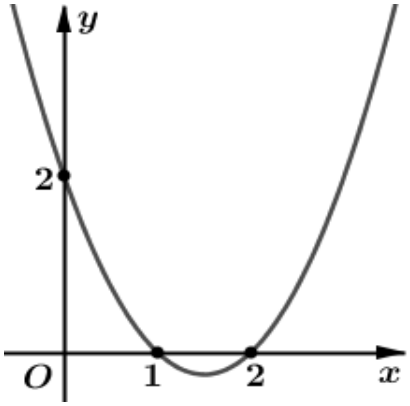
Như vậy: $g'\left(2x+\frac{5}{2}\right)<5$ nếu $3<2x+\frac{5}{2}<8\Leftrightarrow\frac{1}{4}<x<\frac{11}{4}$.

$f'(x+6)>10$ nếu $3<x+6<8\Leftrightarrow -3<x<2$.

Suy ra trên khoảng $\left(\frac{1}{4};2\right)$ thì $g'\left(2x+\frac{5}{2}\right)<5$ và $f'(x+7)>10$ hay $h'(x)>0$.

Tức là trên khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $g'(x)=(x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)f'\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

- $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}.(1)$
- $0<u=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}+\sqrt{(x+1)^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{2}+1}<1$

$\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(u)>0,\forall x\in\mathbb{R}.(2)$

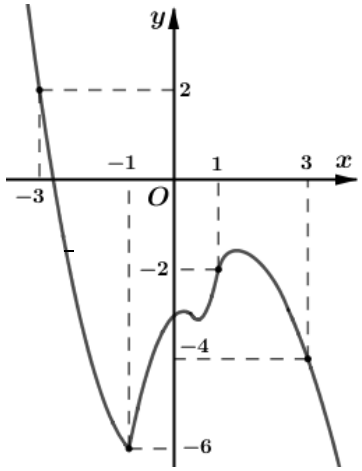
Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	↗		↘

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn A

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



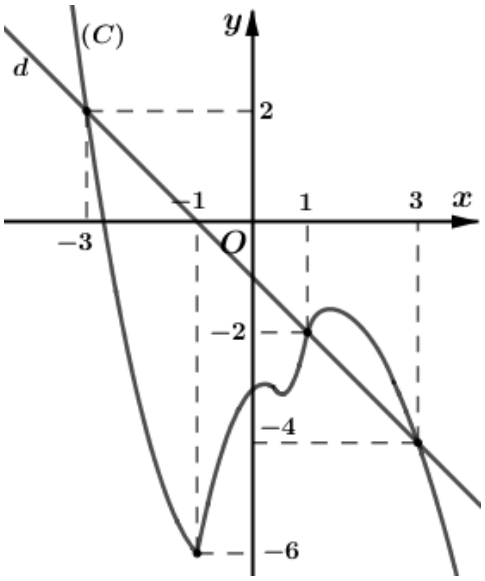
A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải.

Chọn B

có $g'(x)=2f'(x)+2(x+1)\longrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x-1.$

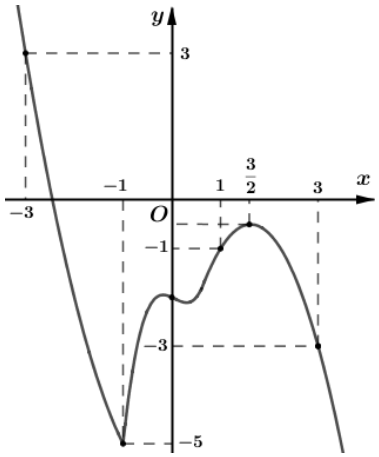
Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d:y=-x-1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\1<x<3\end{array}\right.$ (vì phần đồ thị của $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-x-1$). Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án B thỏa mãn. Chọn B

Câu 35. **[Mức độ 4]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt hàm số $g(x)=f(1+m-x)+\dfrac{x^2}{2}-x-mx$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;0]$ để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. 2016 . **B.** 2017 . **C.** 2019 . **D.** 2020 .

Lời giải

Chọn A

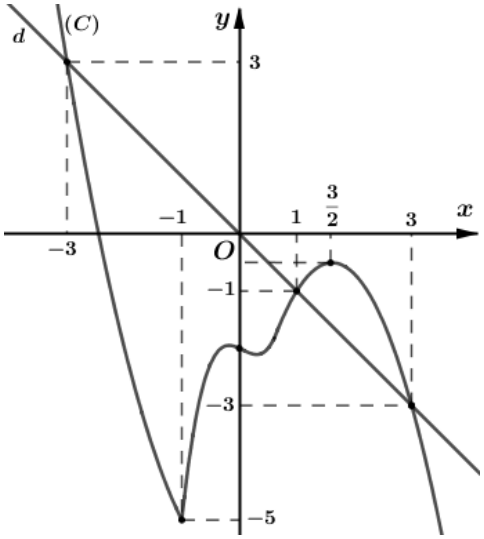
Ta có :

$g'(x) = -f'(m+1-x) + x - 1 - m.$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(m+1-x) > x - 1 - m.$

Đặt $t = m+1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t) > -t.$

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ (hình vẽ bên dưới) ta thấy đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x = -3;\ x = 1;\ x = 3.$



Quan sát đồ thị ta thấy $f'(t) > -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+1-x < -3 \\ 1 < m+1-x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4+m \\ -2+m < x < m \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(4+m; +\infty)$ và $(-2+m; m).$

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ thì $\left[\begin{array}{l} 4+m \le -2 \\ \left\{\begin{array}{l} -2+m \le -2 \\ m \ge 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -6 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Vậy trên đoạn $[-2020; 0]$ có tất cả 2016 giá trị của m thỏa mãn đề Câu.

BÀI 22:XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ DỰA VÀO ĐỒ THỊ $f'(x)$.

A. LÝ THUYẾT:

❒ **Bài toán:** *Xác định cực trị của hàm số* $y=f'(x)$.

*Ứng dụng phương pháp giống bài toán xác định tính **cực trị** dựa vào đồ thị* $y=f'(x)$

❶ *Hàm số* $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên D nếu:

- Đồ thị hàm số $f'(x)$ …… Ox nên $f'(x)\ge 0$.
- Đồ thị hàm số $f'(x)$ …… Ox nên $f'(x)<0$.

❷ *Hàm số* $y=f(x)=h(x)-g(x)$, cho trước các đồ thị $h'(x)$, $g'(x)$.

- Nếu đồ thị $h'(x)$ …… … đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)>0$.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ …… … đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)<0$.

Phương pháp chung:

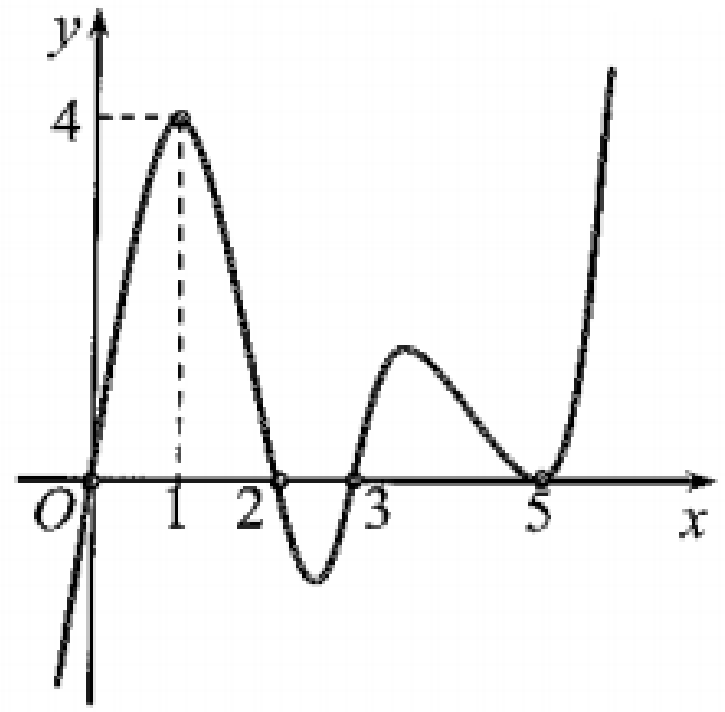
Bước 1: Tìm …… x_0 mà tại đó $f'(x)=0$.

Bước 2: Lập …… $f'(x)$ dựa vào đồ thị $f'(x)$.

Bước 3: Kết luận về …… của đồ thị hàm số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây **đúng.**

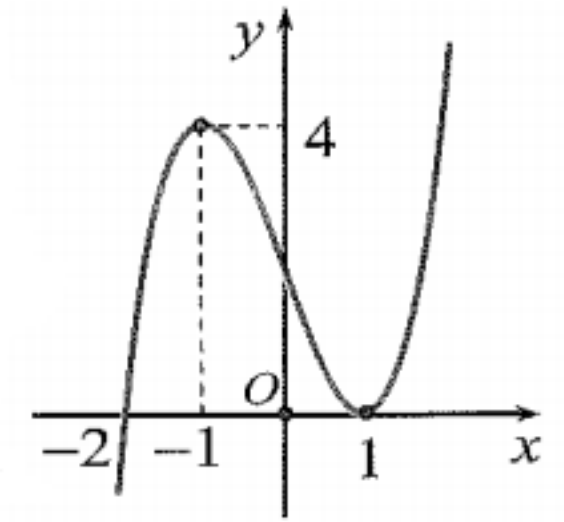
A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=5$.

B. Hàm số $y=f(x)$ có bốn đạt cực trị.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây **đúng.**

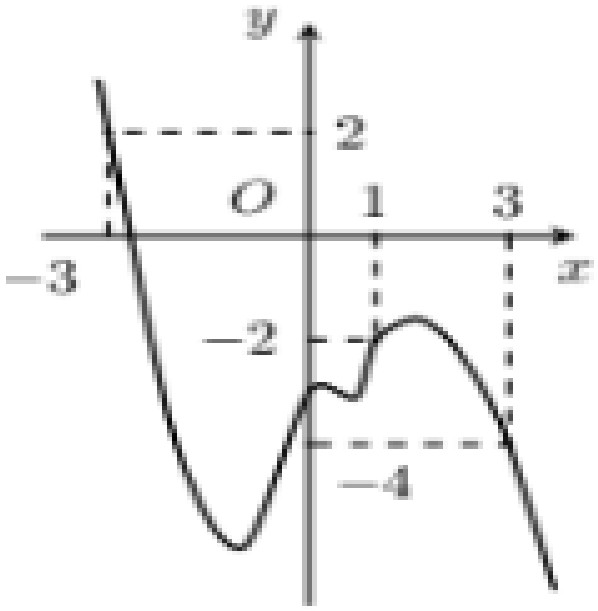
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu $x=-2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $y=g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

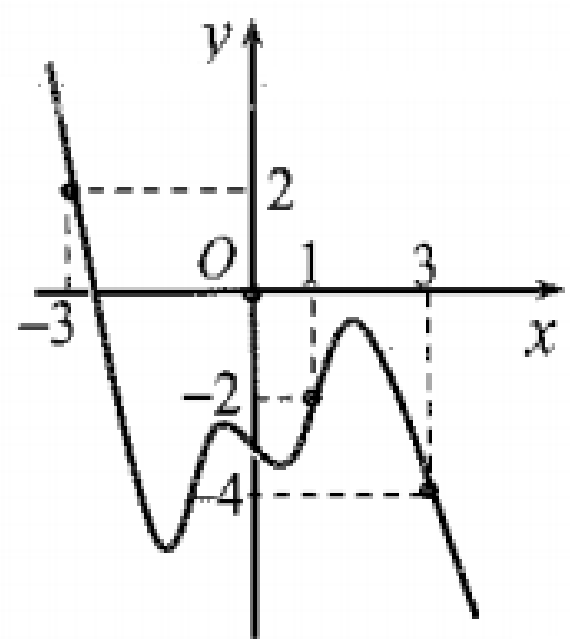
A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 3 cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-3$.

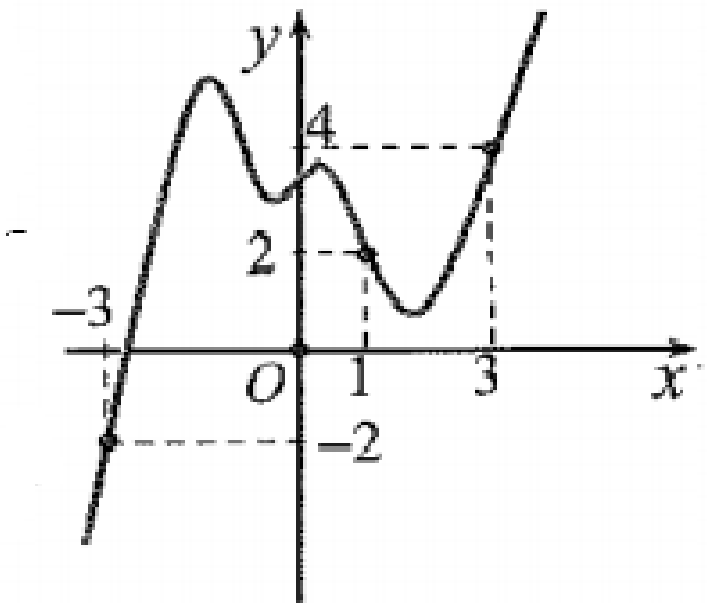
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đạt cực tiểu tại

A. $x=-3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

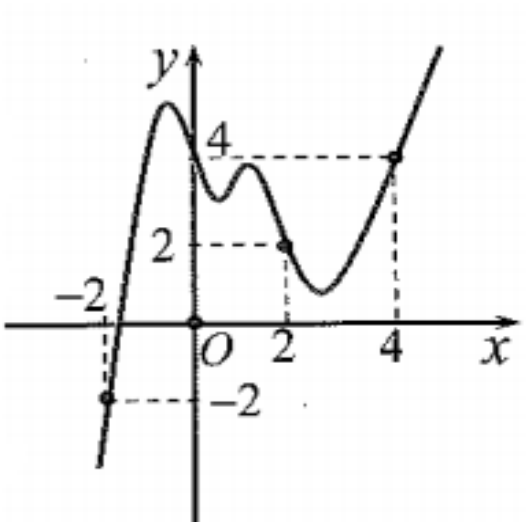
A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

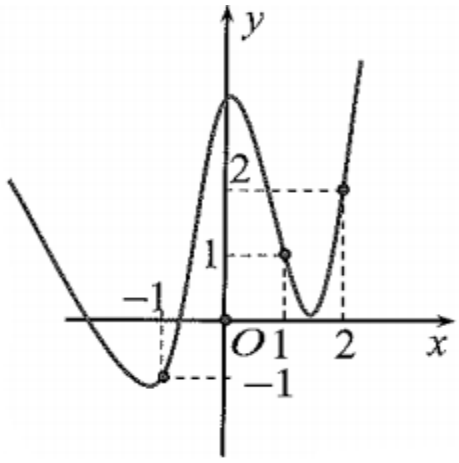
A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-4$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

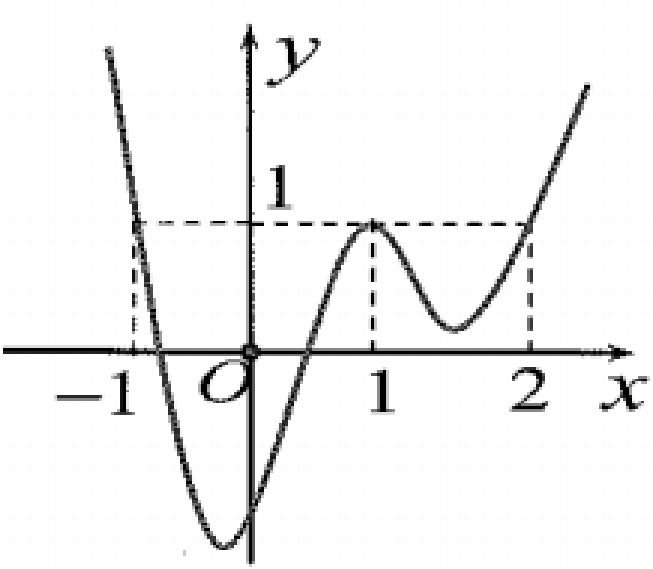
A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y=g(x)=f(x)-x$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

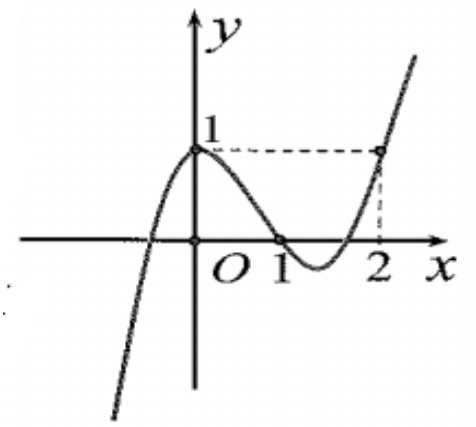
A. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y=g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

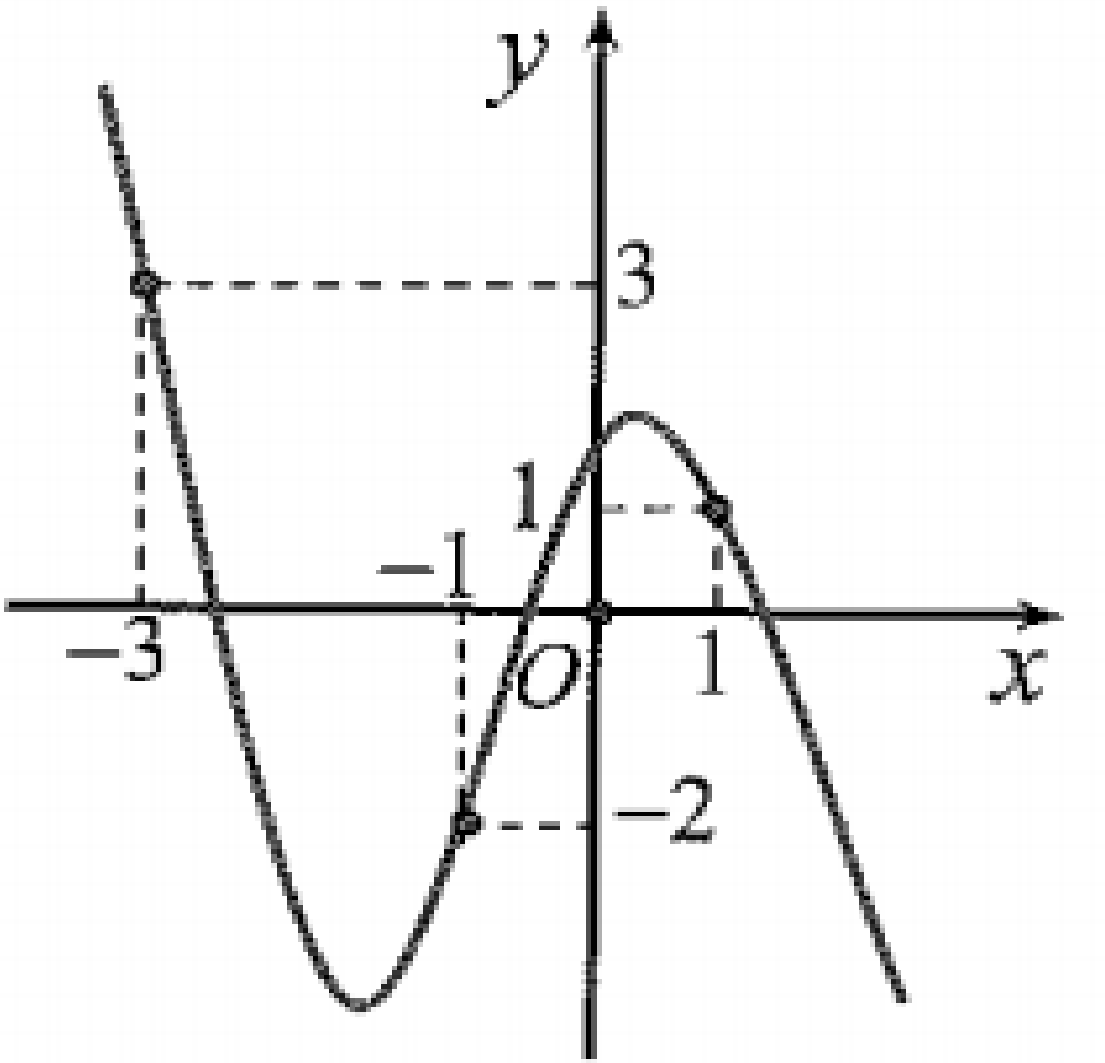
A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y=g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-1)$.

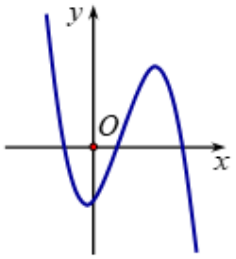
B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực đại.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

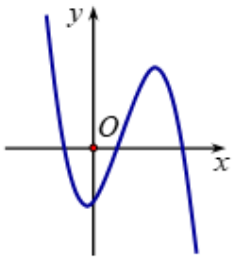
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

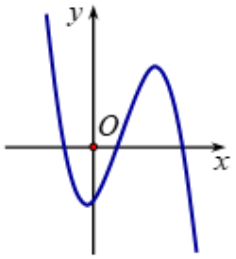
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

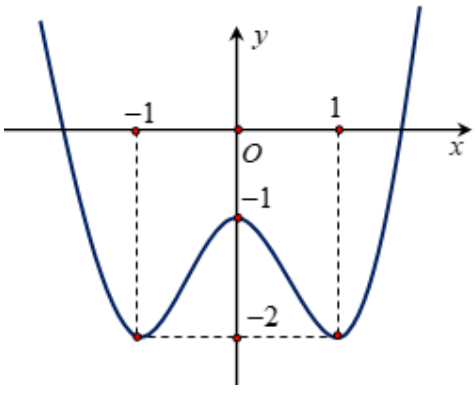
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

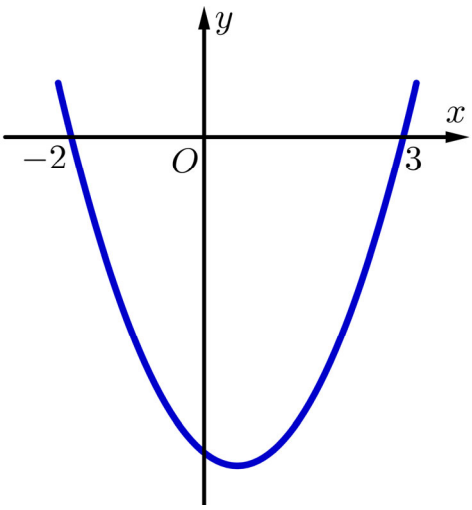
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

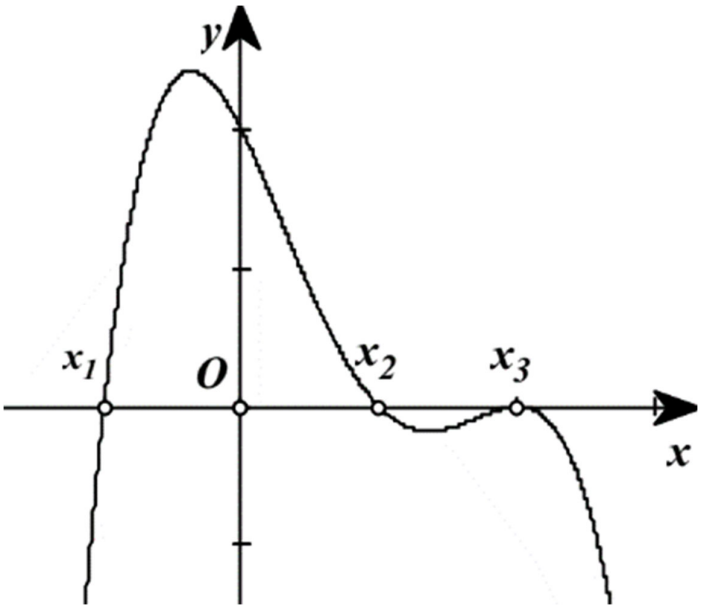
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x^2)$ là

A. 4 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. **(THPT Chuyên Quốc Học Huế - Lần 2 -2018 - BTN)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định **đúng** ?

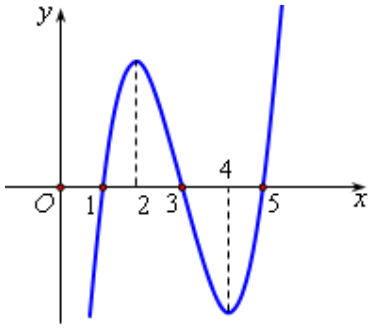
(I). Trên K, hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II). Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_3.

(III). Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 7. **[2D1-2.3-2] (SGD-BÌNH PHƯỚC)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là đúng?



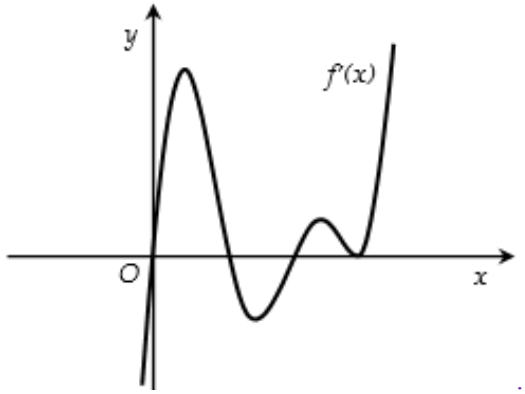
A. Hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

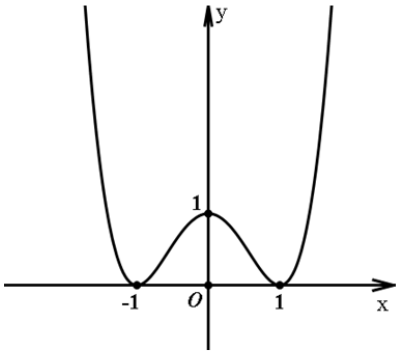
D. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.

Câu 8. **[2D1-2.3-2] [THPT THÁI PHIÊN HP- 2017]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

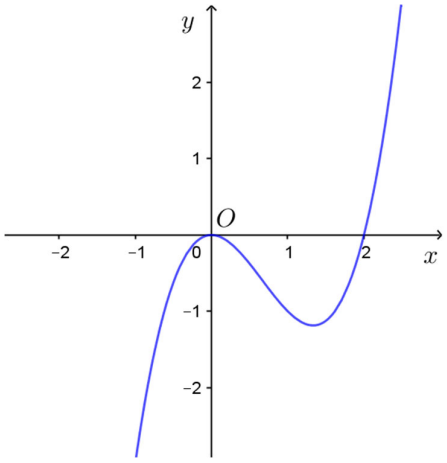
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

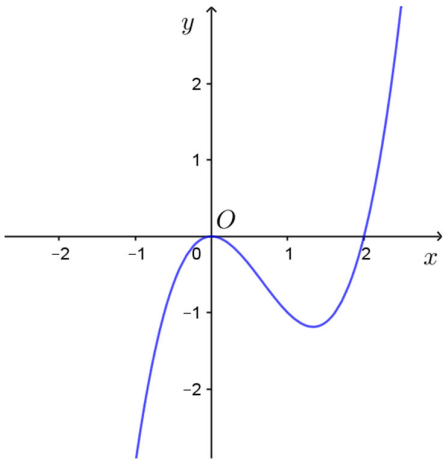
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^3-3x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

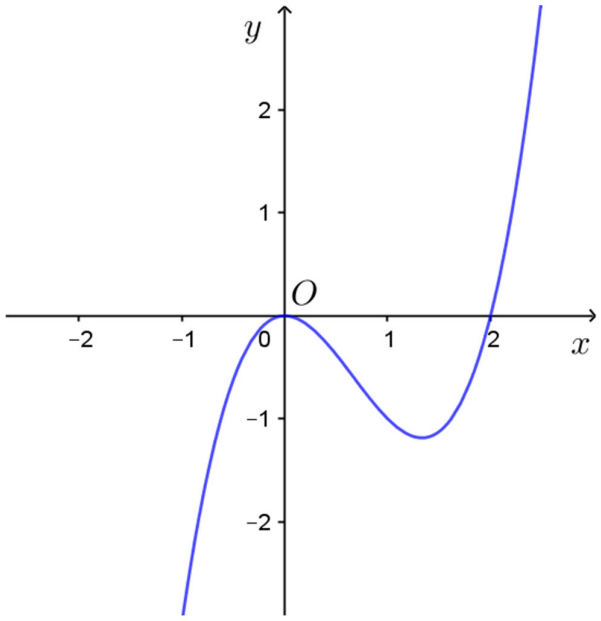
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^3-3x)$. Tổng các điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

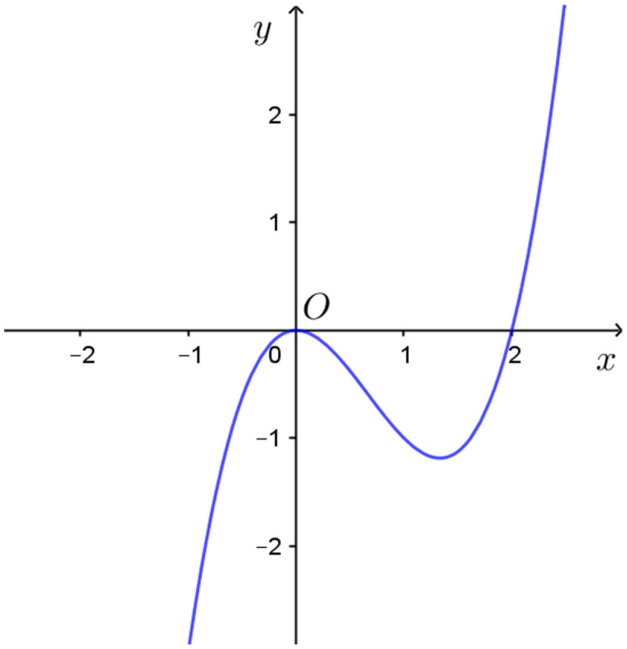
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^3-3x)$. Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

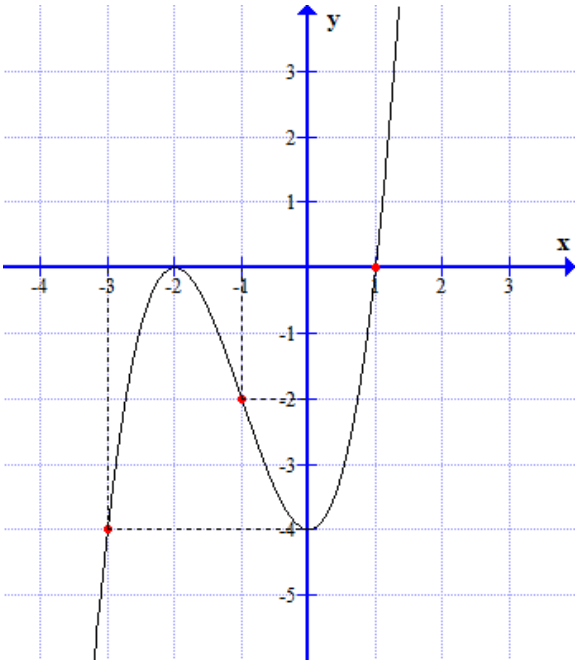


Đặt $g(x)=f(x^3-3x)$. Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là

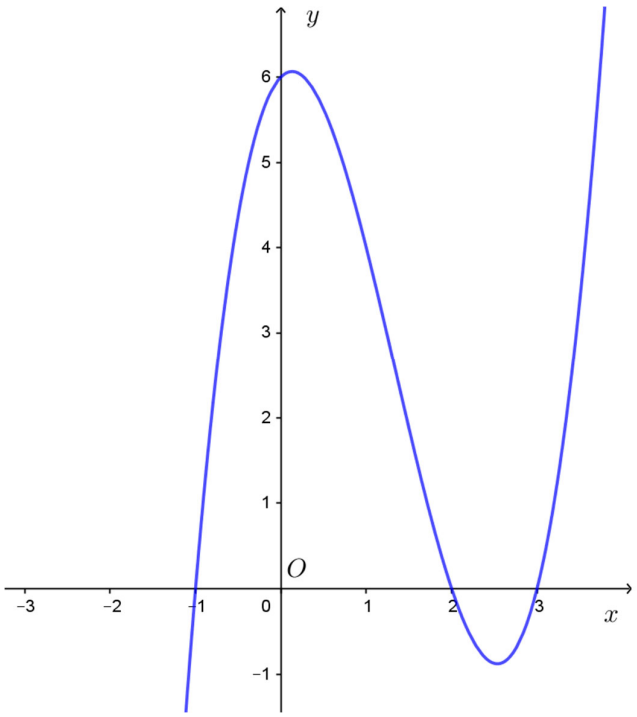
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=2f(x)-x^2+2x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3, x=1$



Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

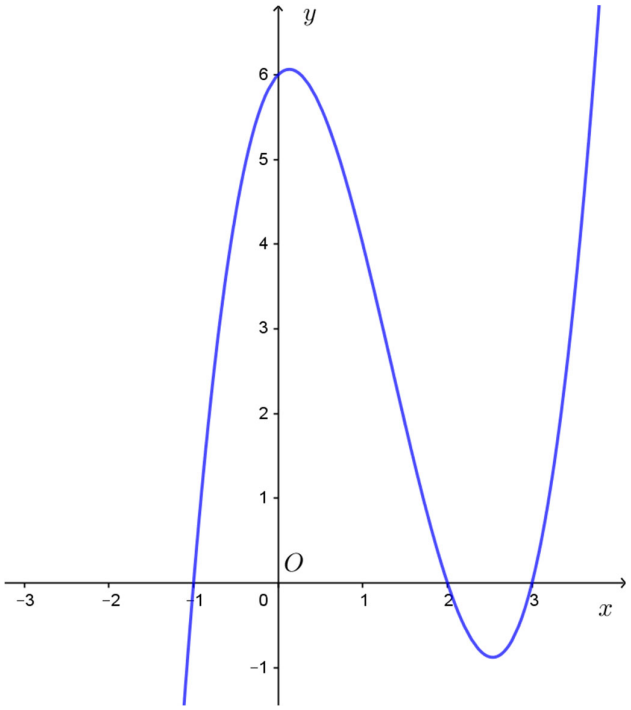


Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=1-\sqrt{3}; x=1+\sqrt{3}$. **B.** $x=1-\sqrt{3}; x=3$.

C. $x=-1; x=1; x=3$. **D.** $x=-1; x=1+\sqrt{3}$.

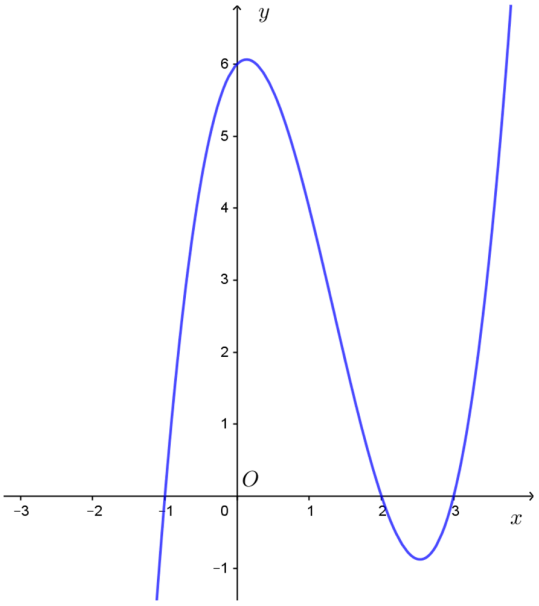
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1-\sqrt{3};x=1+\sqrt{3}$.
B. $x=1-\sqrt{3};x=3$.
C. $x=-1;x=1;x=3$.
D. $x=-1;x=1+\sqrt{3}$.

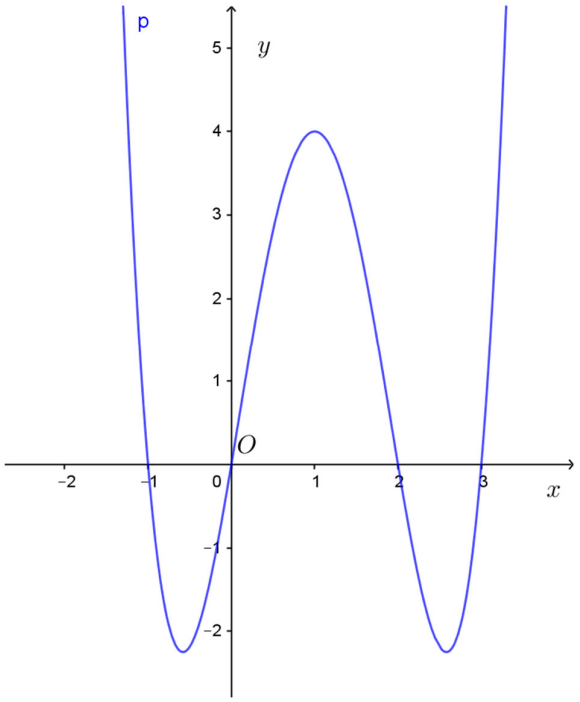
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Hàm số $y=g(|x|)$ có số điểm cực trị là

A. 4.
B. 5.
C. 6.
D. 7.

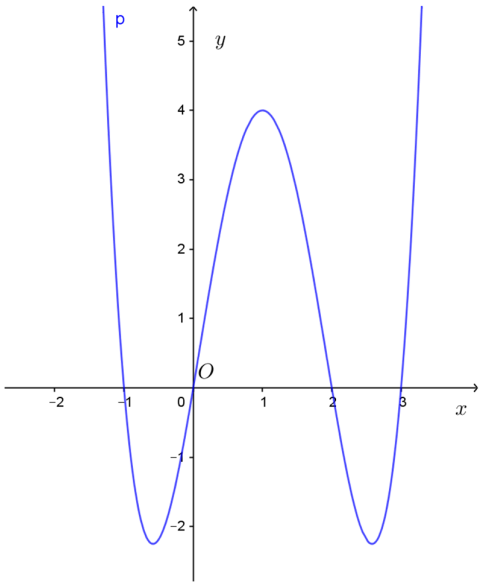
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(m-x^2\right)$. Tìm m để hàm số $y=g(x)$ có 9 điểm cực trị là

A. $m>-1$. **B.** $m>0$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

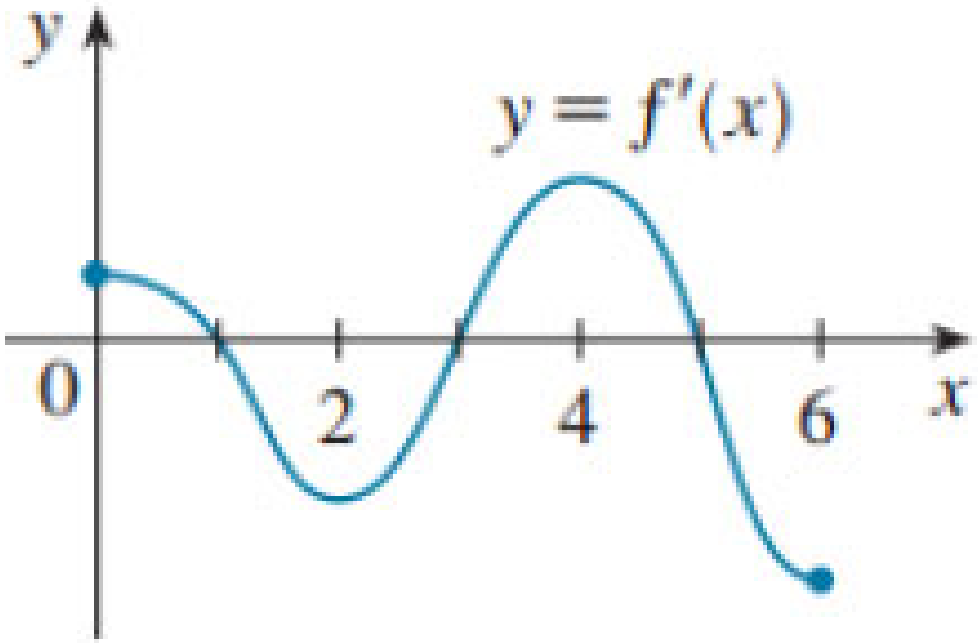
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(m-x^2\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

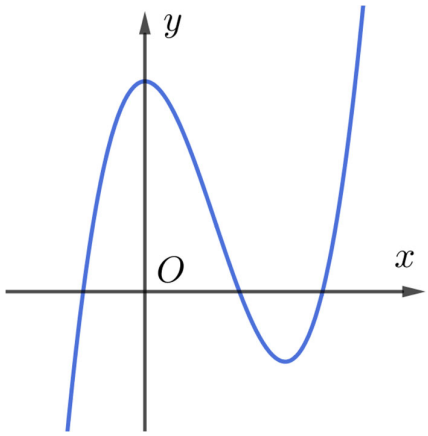
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=g(x)=[f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 4

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

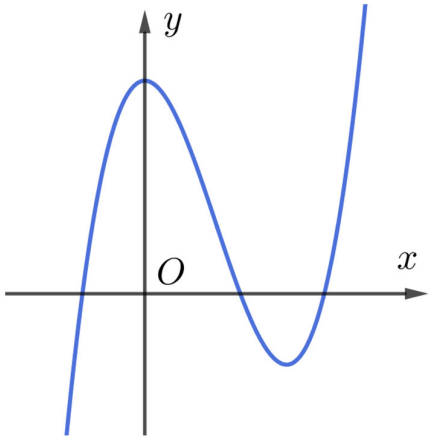
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

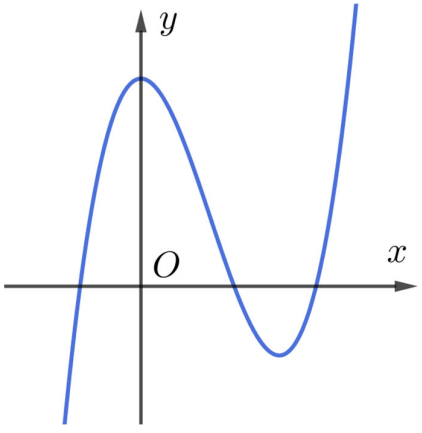
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

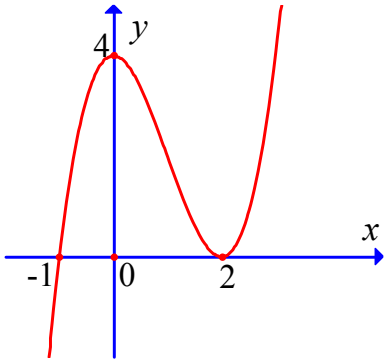
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

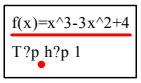


Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

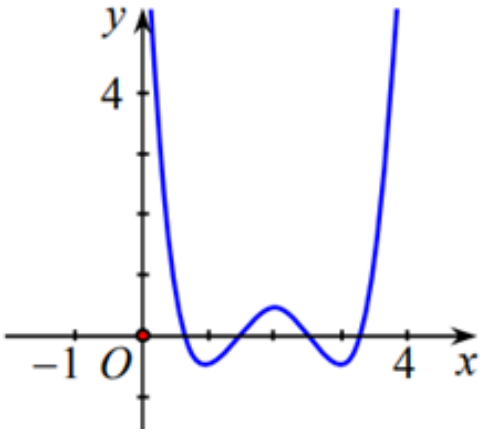




Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

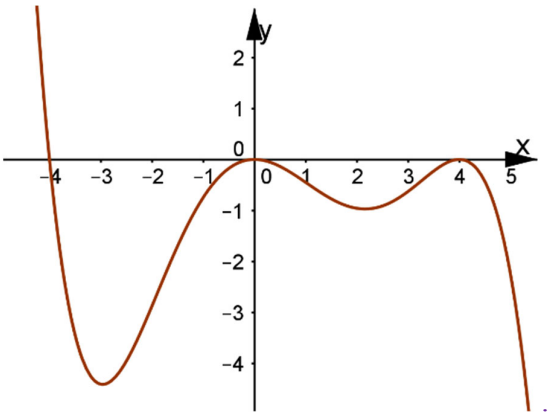
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

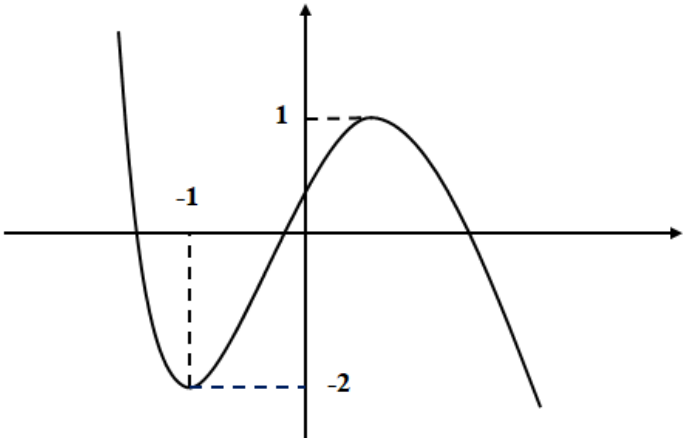
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1

Câu 6. **[THPT Nguyễn Khuyến –NĐ 2017]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ bên dưới. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



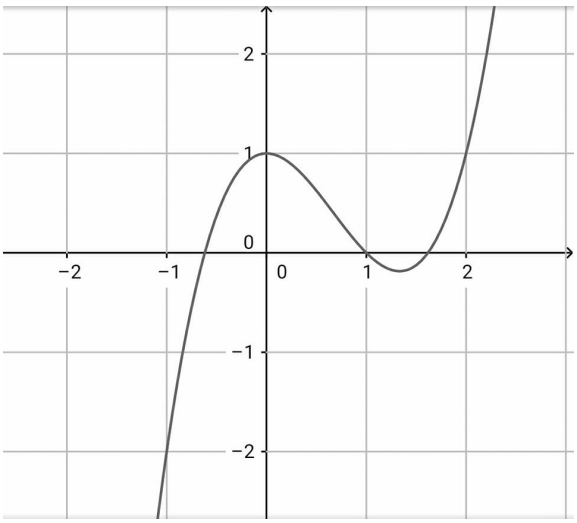
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7. **[Đề thi thử-Liên trường Nghệ An-L2]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+2x$ là:



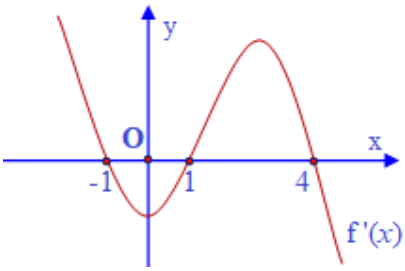
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. **(THPT Chuyên Bắc Ninh - Lần 2 - 2017 - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

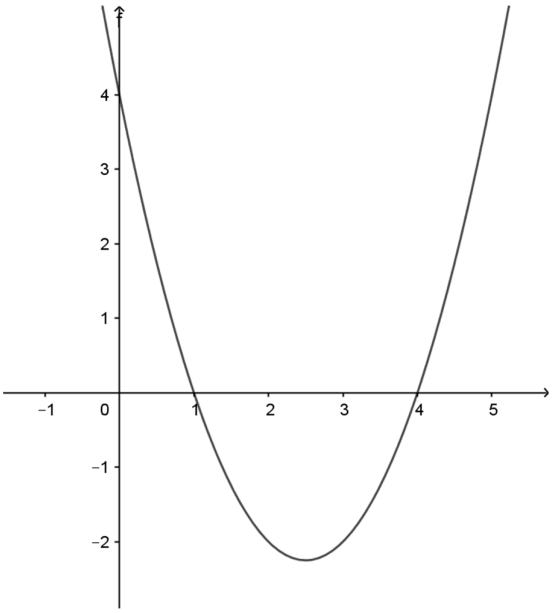
Câu 9. **[2D1-5.5-4]** **(THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

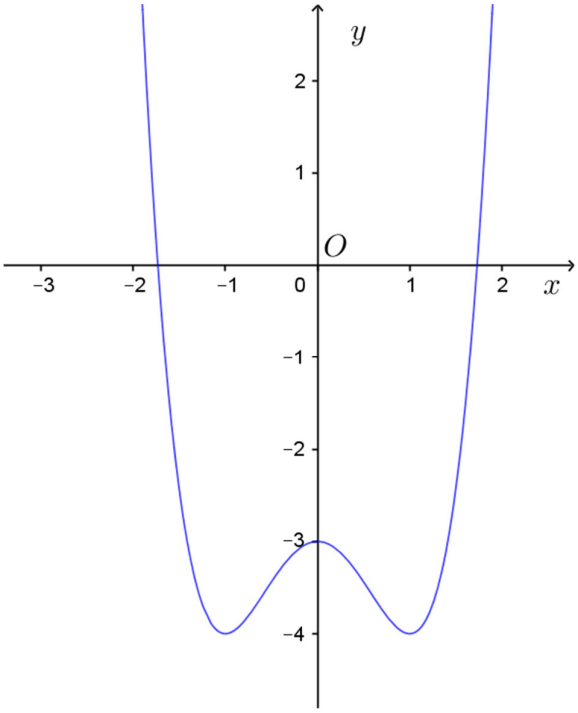
Câu 10. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$. Số giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị là

A. vô số. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 5.

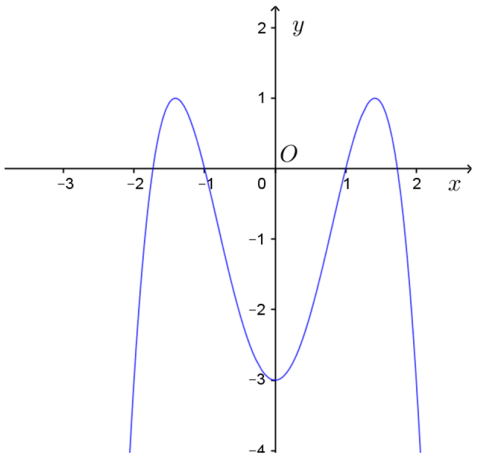
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

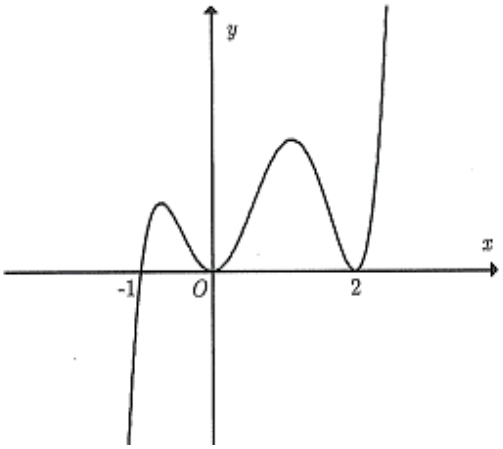
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

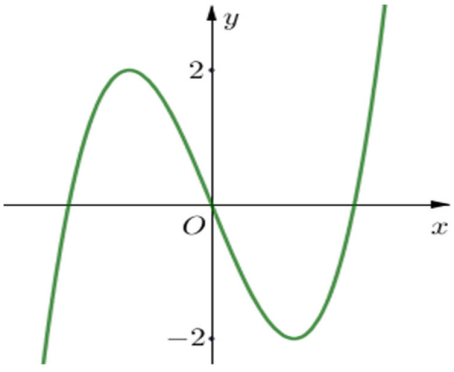
A. 4 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. **[BTN 165]** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $f(x)$ trên khoảng K. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:



A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

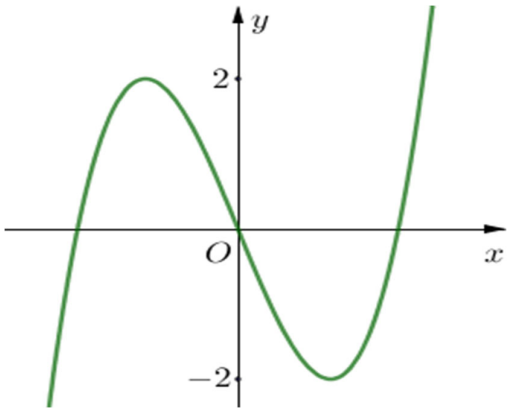
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

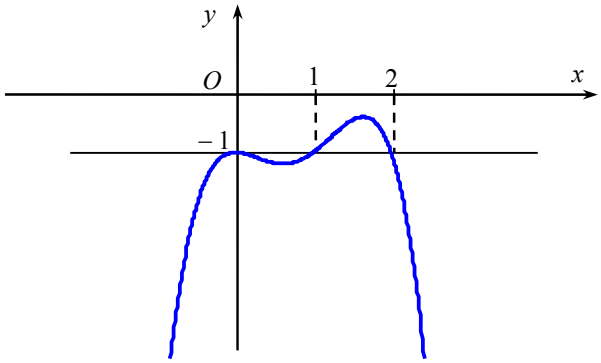


Hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

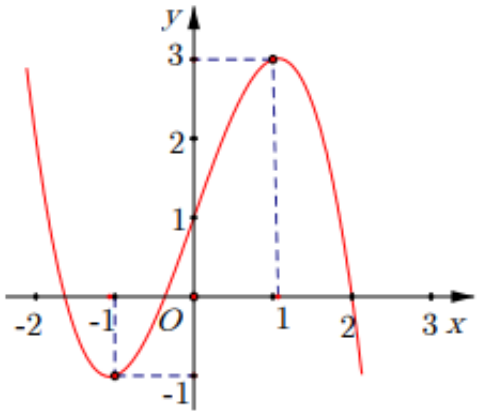
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.

Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.



A. $x=2$. **B.** Không có điểm cực tiểu.
C. $x=0$. **D.** $x=1$.

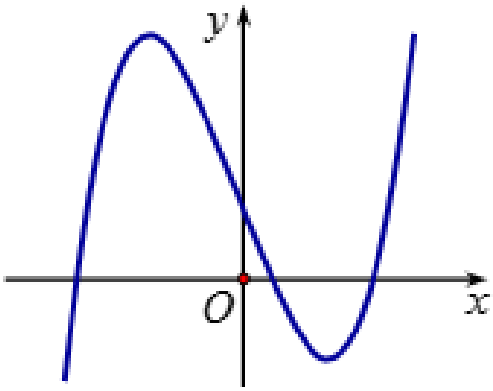
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

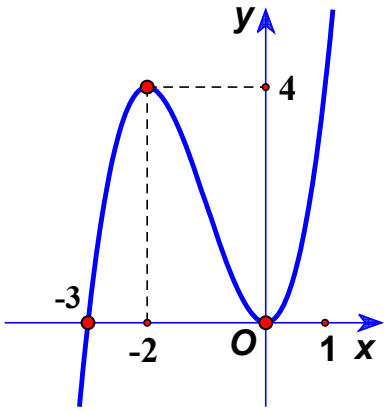
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=|f(x)|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 7 **D.** 6 .

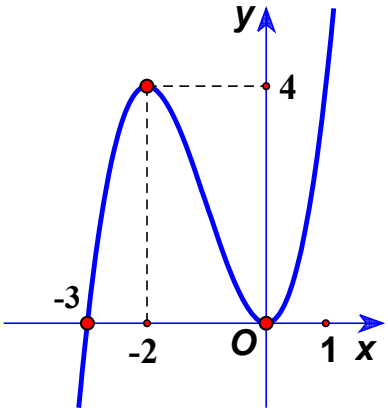
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=|f(x)|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 4.

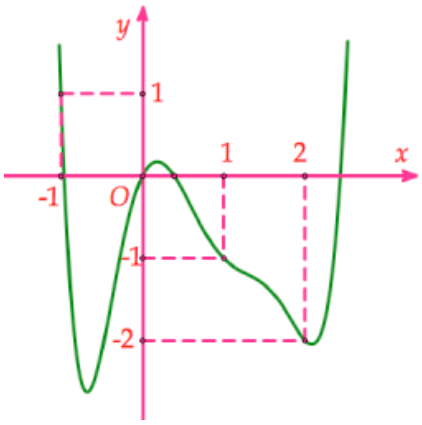
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^3+2)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

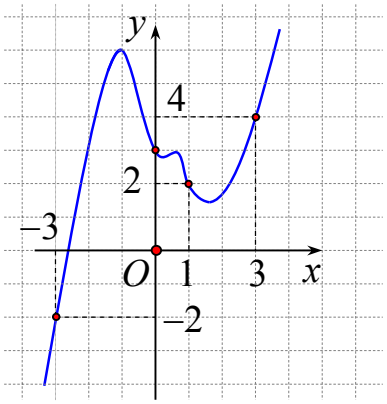
Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi điểm cực tiểu của hàm số $y=2f(x)+x^2$ là

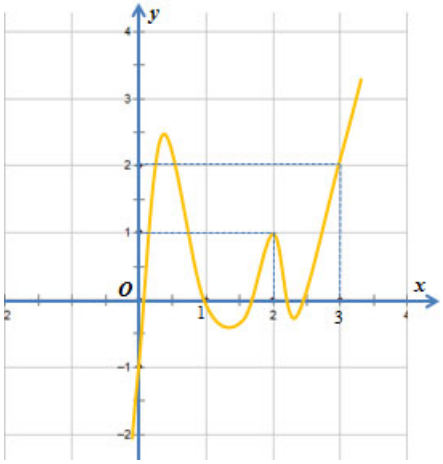
A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=0$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ là:



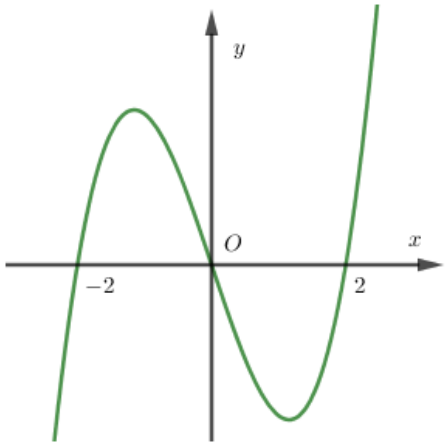
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

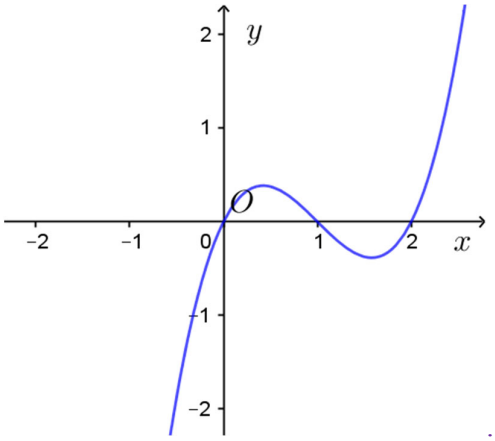
Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(-\left|x^3-3x\right|\right)$ là?

A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7

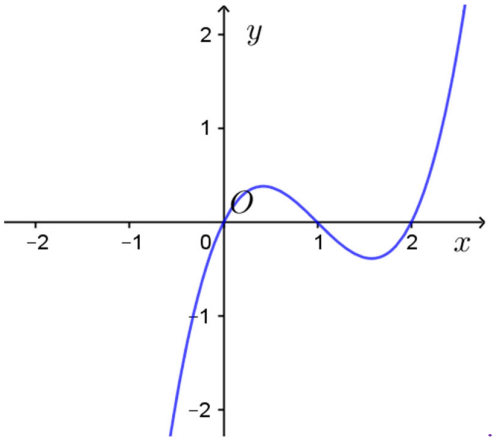
Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+x\right)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

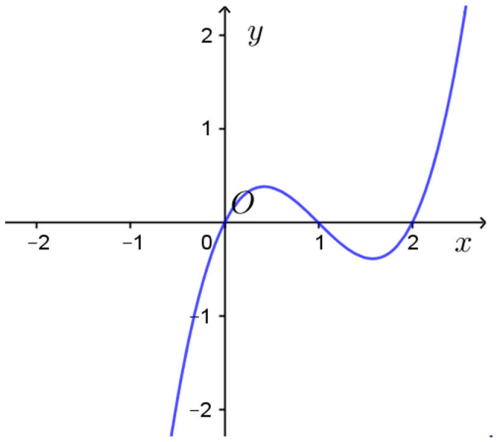
Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+x\right)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 7. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

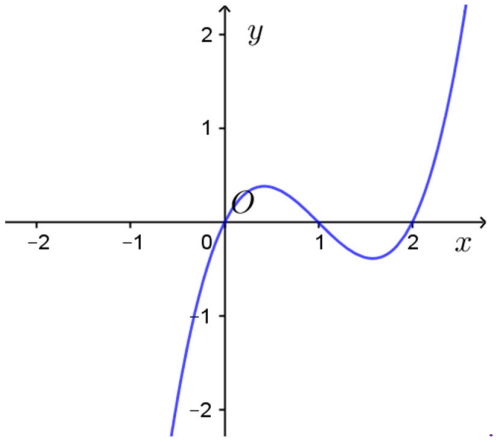
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+x\right)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

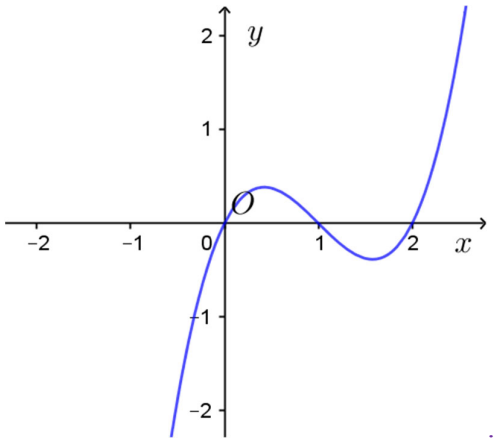
Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+x\right)$. Hàm số $y=g(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

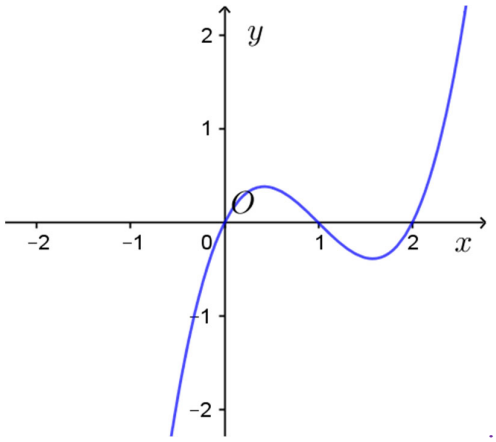
Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+x\right)$. Hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 15.

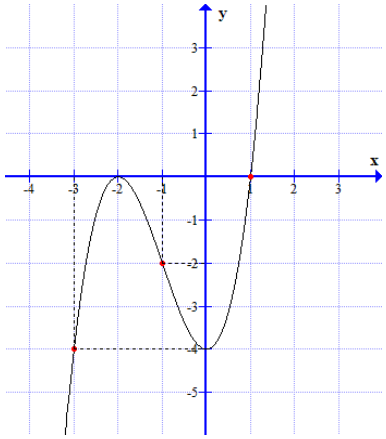
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+6x+m\right)$. Số giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

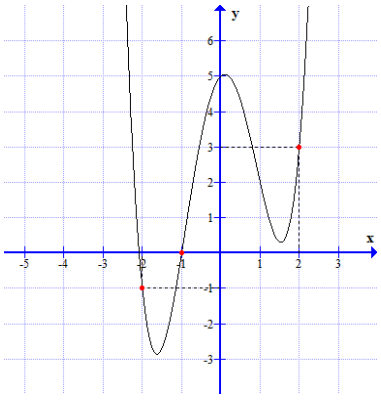
Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=2f(x)-x^2+2x$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3, x=1$

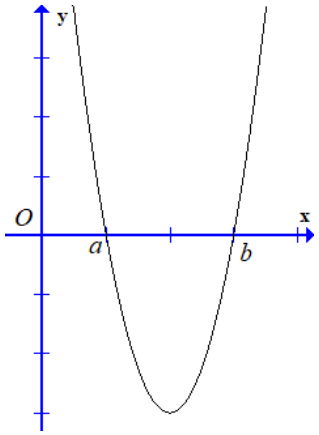
Câu 32. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2f(x)-x^2-2x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33. **[2D1-2.15-4] (THPT HAU LOC 2_THANH HOA_LAN2_2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm m để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng ba điểm cực trị. Biết rằng $f(b)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.



A. $m<\dfrac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{4}$.

BÀI 22:XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ DỰA VÀO ĐỒ THỊ $f'(x)$.

A. LÝ THUYẾT:

❒ **Bài toán:** *Xác định cực trị của hàm số* $y=f'(x)$.

Ứng dụng phương pháp giống bài toán xác định tính đơn điệu dựa vào đồ thị $y=f'(x)$

❶ *Hàm số* $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên D nếu:

- Đồ thị hàm số $f'(x)$ ***nằm phía trên*** Ox nên $f'(x)\ge 0$.
- Đồ thị hàm số $f'(x)$ ***nằm phía dưới*** Ox nên $f'(x)<0$.

❷ *Hàm số* $y=f(x)=h(x)-g(x)$, cho trước các đồ thị $h'(x)$, $g'(x)$.

- Nếu đồ thị $h'(x)$ ***nằm phía trên*** đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)>0$.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ ***nằm phía dưới*** đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x)<0$.

Phương pháp chung:

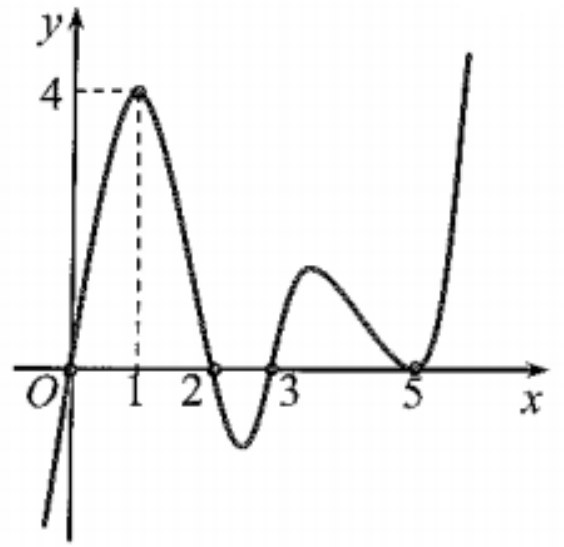
Bước 1: Tìm các giá trị x_0 mà tại đó $f'(x)=0$.

Bước 2: Lập bảng xét dấu $f'(x)$ dựa vào đồ thị $f'(x)$.

Bước 3: Kết luận về điểm cực trị của đồ thị hàm số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây **đúng.**

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=5$.

B. Hàm số $y=f(x)$ có bốn đạt cực trị.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có:

+ $f'(x)>0 \Leftrightarrow x \in (1;2) \cup (3;5) \cup (5;+\infty)$.

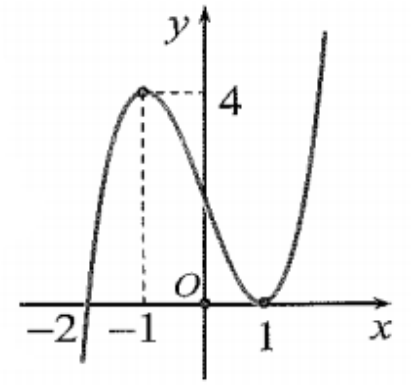
+ $f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (2;3)$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↗	

Suy ra: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây **đúng.**

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu $x=-2$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có:

+ $f'(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-2;1) \cup (1;+\infty)$.

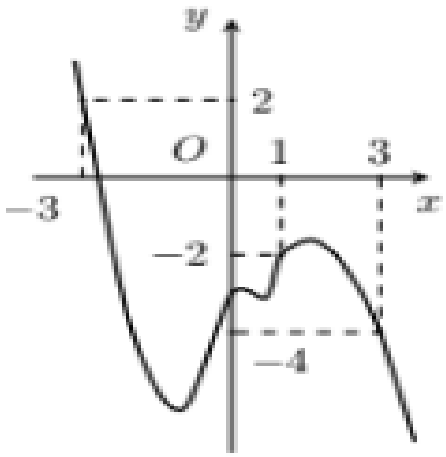
+ $f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2)$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$		↘		↗		↗	

Suy ra: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $y=g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 3 cực trị.

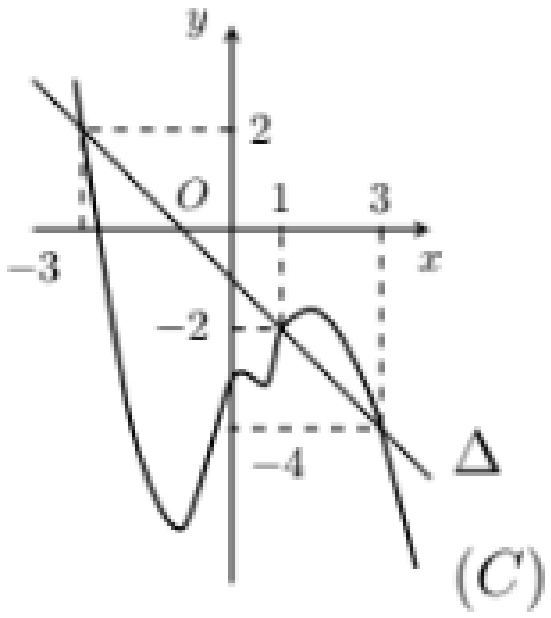
C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-3$.

Lời giải

Chọn C.

+ Vẽ đường thẳng $\Delta: y=-x-1$ đi qua các điểm $(-3;2)$, $(1;-2)$, $(3;-4)$.



+ Ta có $y' = g'(x) = f'(x) + x + 1 = f'(x) - (-x-1)$.

+ Trên hai khoảng $(-3;1), (3;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $\Delta : y = -x-1$

nên $f'(x) < (-x-1) \Rightarrow g'(x) < 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên hai khoảng $(-3;1)$, $(3;+\infty)$.

+ Trên hai khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;3)$, thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $\Delta : y = -x-1$

nên $f'(x) > (-x-1) \Rightarrow g'(x) > 0$.

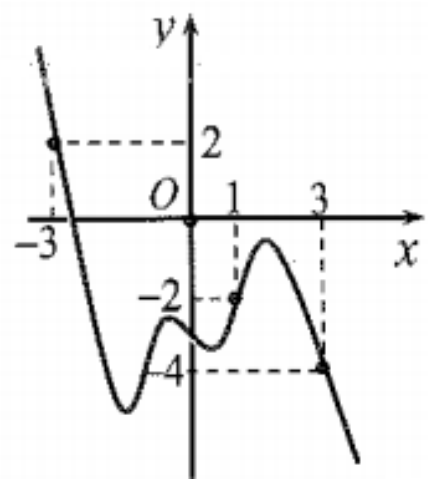
Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến biến trên hai khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;3)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$ **là mệnh đề sai.**

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đạt cực tiểu tại

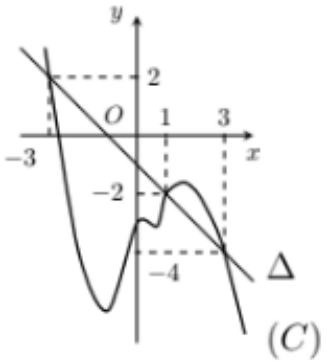
A. $x=-3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có $y'=g'(x)=2f'(x)+2(x+1)=2\left[f'(x)-(-x-1)\right]$.

+ Vẽ đường thẳng $\Delta: y=-x-1$ đi qua các điểm $(-3;2)$, $(1;-2)$, $(3;-4)$.



+ Trên hai khoảng $(-3;1),(3;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $\Delta: y=-x-1$

nên $f'(x)<(-x-1) \Rightarrow g'(x)<0$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên hai khoảng $(-3;1)$, $(3;+\infty)$.

+ Trên hai khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;3)$, thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $\Delta: y=-x-1$

nên $f'(x)>(-x-1) \Rightarrow g'(x)>0$.

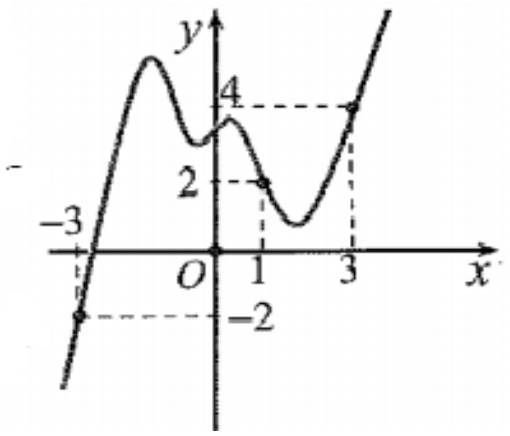
Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến biến trên hai khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;3)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

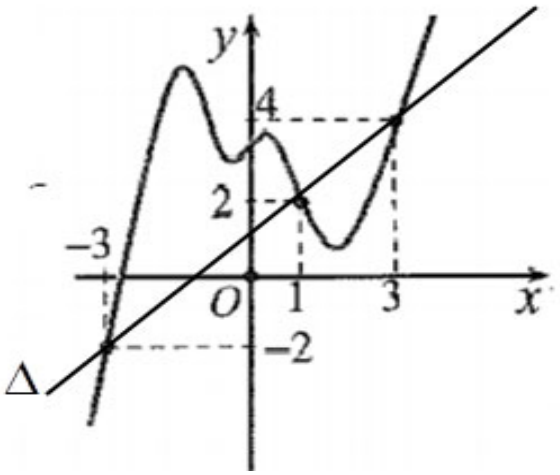
D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có $y'=g'(x)=2f'(x)-2(x+1)=2\left[f'(x)-(x+1)\right]$.

+ Vẽ đường thẳng $\Delta: y=x+1$ đi qua các điểm $(-3;-2)$, $(1;2)$, $(3;4)$.



+ Trên hai khoảng $(-3;1),(3;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $\Delta: y=x+1$

nên $f'(x)>(x+1) \Rightarrow g'(x)>0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-3;1)$, $(3;+\infty)$.

+ Trên hai khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;3)$, thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $\Delta: y=x+1$

nên $f'(x)<(x+1) \Rightarrow g'(x)<0$.

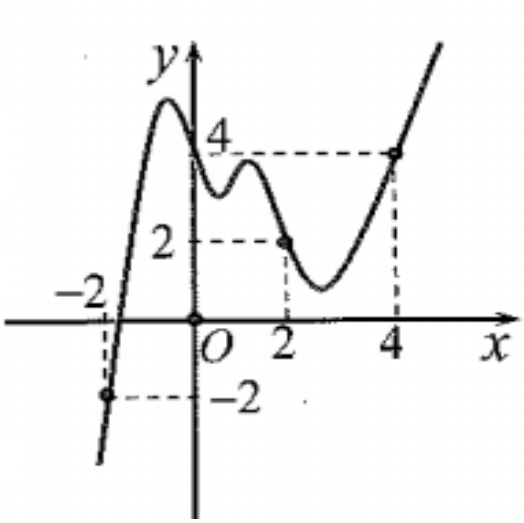
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến biến trên hai khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;3)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-4$.

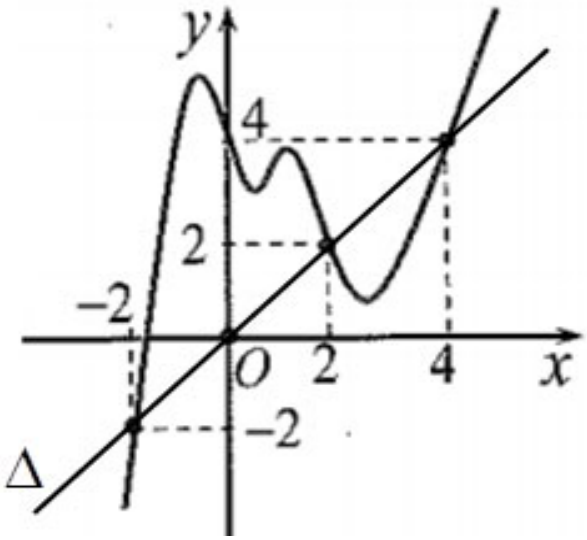
D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn D.

+ Ta có $y'=g'(x)=2f'(x)-2x=2\left[f'(x)-x\right]$.

+ Vẽ đường thẳng $\Delta: y=x$ đi qua các điểm $(-2;-2)$, $(0;0)$, $(4;4)$.



+ Trên hai khoảng $(-2;2),(4;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $\Delta: y=x$

nên $f'(x)>x \Rightarrow g'(x)>0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-2;2),(4;+\infty)$.

+ Trên hai khoảng $(-\infty;-2)$, $(2;4)$, thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $\Delta: y=x$

nên $f'(x)<x \Rightarrow g'(x)<0$.

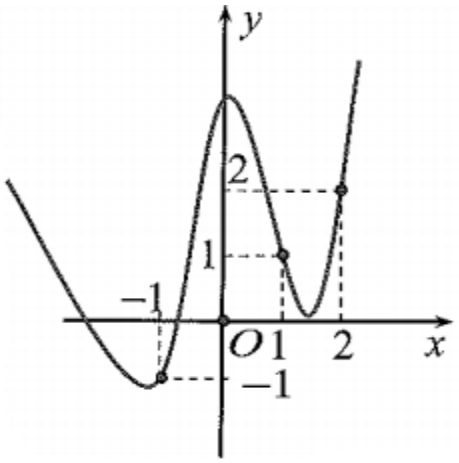
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến biến trên hai khoảng $(-\infty;-2)$, $(2;4)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$. Nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

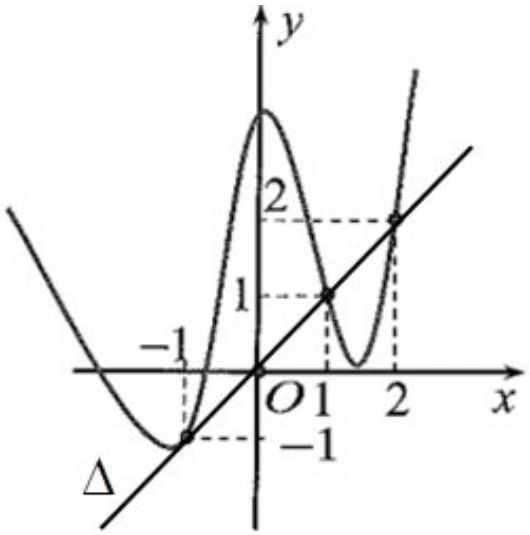
D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Lời giải

Chọn D.

+ Ta có $y'=g'(x)=f'(x)-x$.

+ Vẽ đường thẳng $\Delta: y=x$ đi qua các điểm $(-1;-1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;2)$.



+ Trên hai khoảng $(-\infty;1),(2;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $\Delta: y=x$

nên $f'(x)>x \Rightarrow g'(x)>0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;1),(2;+\infty)$.

+ Trên khoảng $(1;2)$, thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $\Delta: y=x$

nên $f'(x)<x \Rightarrow g'(x)<0$.

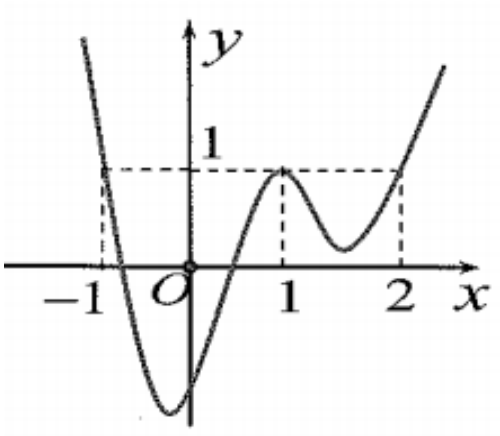
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến biến trên khoảng $(1;2)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y=g(x)=f(x)-x$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn A.

+ Ta có $y'=g'(x)=f'(x)-1$.

+ Đồ thị của hàm số $g'(x)$ có được khi tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương Oy xuống dưới 1 đơn vị.

+ Từ đó suy ra được trên hai khoảng $(-\infty;-1),(2;+\infty)$ thì đồ thị $g'(x)$ nhận giá trị dương

$\Rightarrow g'(x)>0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1),(2;+\infty)$.

+ Trên khoảng $(-1;2)$, thì đồ thị $g'(x)$ nhận giá trị âm $\Rightarrow g'(x)<0$.

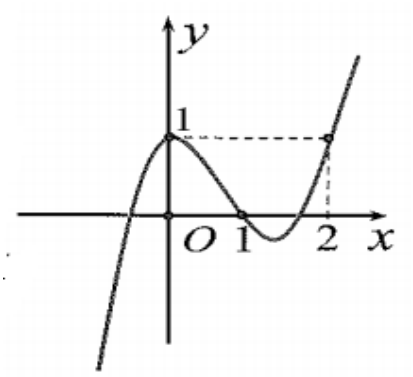
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến biến trên khoảng $(1;2)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y=g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

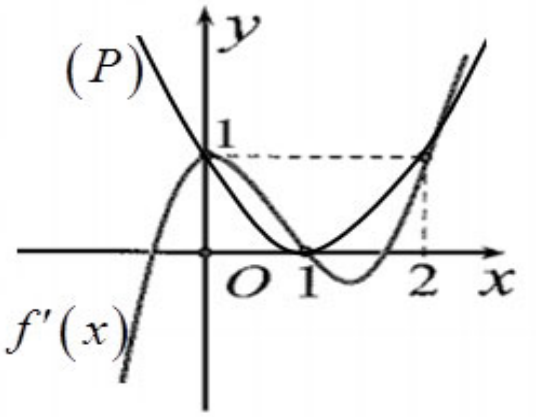
D. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D.

+ Ta có $y'=g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1=f'(x)-(x^2-2x+1)$.

+ Vẽ đồ thị của Parabol $(P):y=x^2-2x+1$ có đỉnh $I(1;0)$ và qua các điểm $(0;1)$, $(2;1)$.



+ Trên hai khoảng $(-\infty;0),(1;2)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới parabol $(P):y=x^2-2x+1$

nên $f'(x)<x^2-2x+1 \Rightarrow g'(x)<0$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;0),(1;2)$.

+ Trên hai khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên parabol $(P):y=x^2-2x+1$

nên $f'(x) > x^2 - 2x + 1 \Rightarrow g'(x) > 0$.

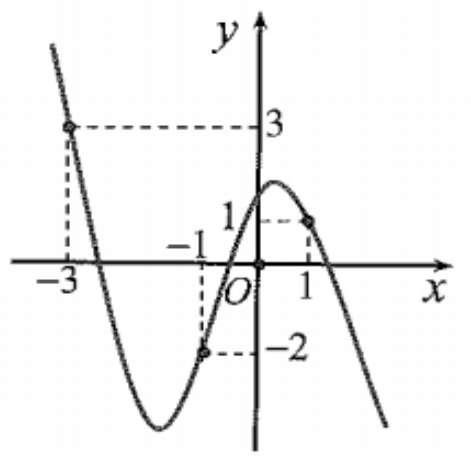
Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến biến trên khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-1)$.

B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực đại.

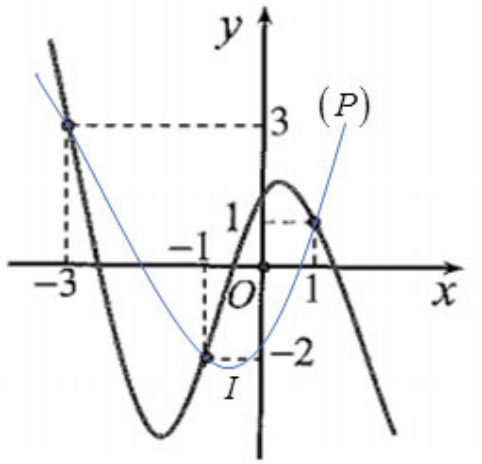
D. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có $y' = g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

+ Vẽ đồ thị của Parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ có đỉnh $I\left(-\frac{3}{4};-\frac{33}{12}\right)$ và qua các điểm $(-3;3)$, $(-1;-2)$, $(1;1)$.



+ Trên hai khoảng $(-\infty;-3),(-1;1)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên parabol $(P):y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ nên $f'(x)>x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow g'(x)>0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-3),(-1;1)$.

+ Trên hai khoảng $(-3;-1)$, $(1;+\infty)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới parabol $(P):y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ nên $f'(x)<x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow g'(x)<0$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến biến trên khoảng $(-3;-1)$, $(1;+\infty)$.

+ Bảng biến thiên

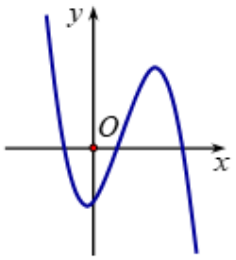
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-3$, $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực đại.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

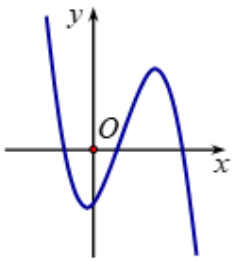
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt nên $f'(x)$ đổi dấu ba lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

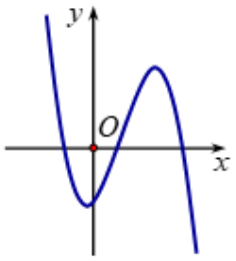
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương một lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

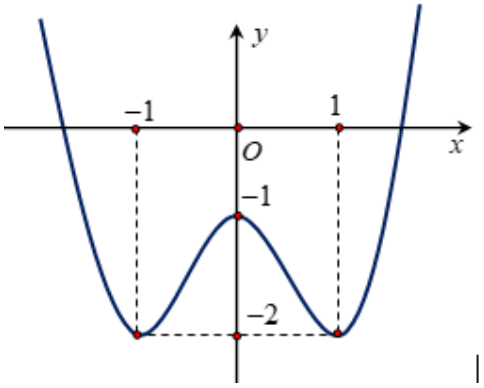
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm hai lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

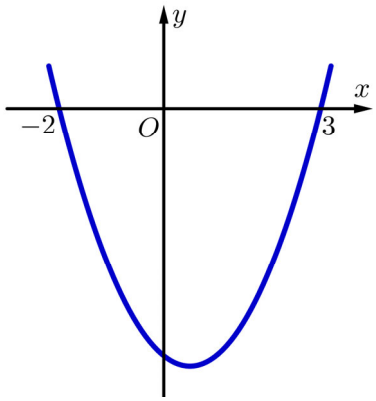
A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu 2 lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x^2)$ là

A. 4 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

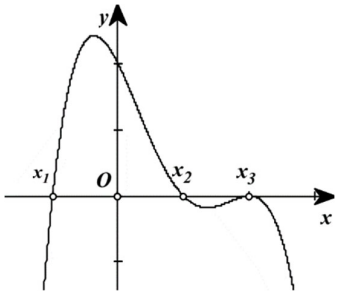
Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x^2=-2\\x^2=3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=-\sqrt{3}\\x=\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

Ba nghiệm của $g'(x)$ đều là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu ba lần.

Do đó hàm số $y=g(x)=f(x^2)$ có ba điểm cực trị.

Câu 6. **[2D1-2.3-2] (THPT Chuyên Quốc Học Huế - Lần 2 -2018 - BTN)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định **đúng** ?

(I). Trên K, hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II). Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_3.

(III). Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

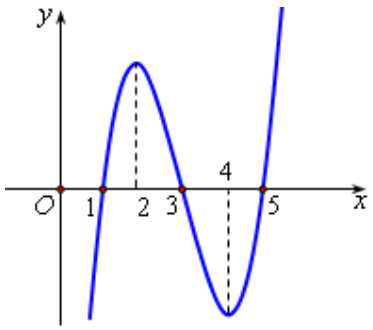
Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Như vậy: trên K, hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là x_1 và điểm cực đại là x_2, x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 7. **[2D1-2.3-2] (SGD-BÌNH PHƯỚC)** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.

Lời giải

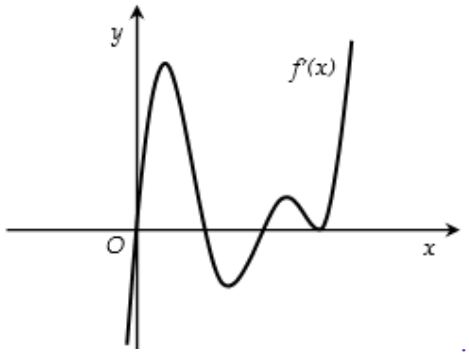
Chọn B

Vì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt nên hàm số hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Do đó loại hai phương án A và **D.**

Vì trên $(-\infty;2)$ thì $f'(x)$ có thể nhận cả dầu âm và dương nên loại phương án **C.**

Vì trên $(1;3)$ thì $f'(x)$ chỉ mang dấu dương nên $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 8. **[2D1-2.3-2] [THPT THÁI PHIÊN HP- 2017]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?

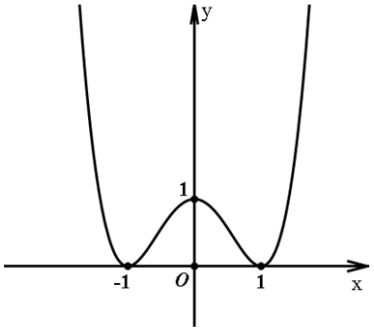


A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

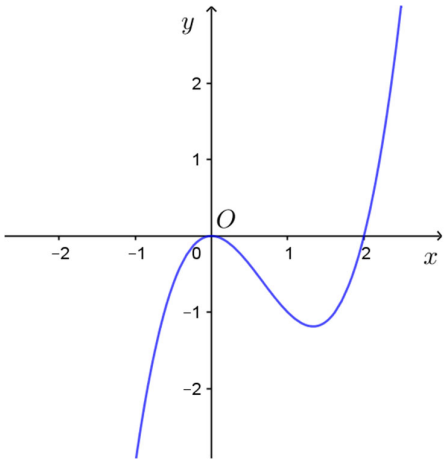
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

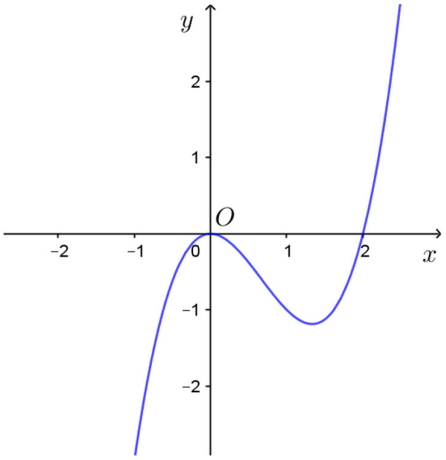
Chọn A

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 3) f'(x^3 - 3x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \\ x^3 - 3x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm trong đó có $x = 0; x = \pm\sqrt{3}$ là nghiệm kép, $x = -1$ là nghiệm bội ba; $x = 1; x = 2$ là nghiệm đơn. Do đó, $g'(x)$ đổi dấu ba lần nên hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^3-3x)$. Tổng các điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

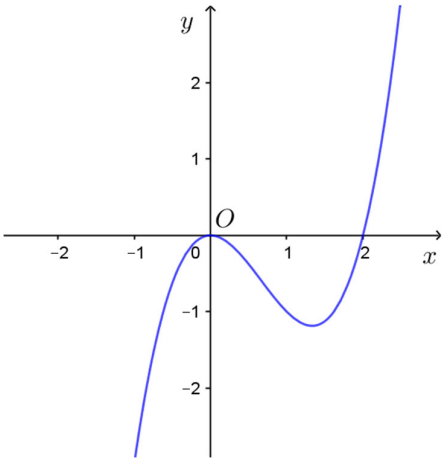
Chọn D

Ta có $g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\x^3-3x=0\\x^3-3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=0\\x=\pm\sqrt{3}\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm trong đó có $x=0;x=\pm\sqrt{3}$ là nghiệm kép, $x=-1$ là nghiệm bội ba; $x=1;x=2$ là nghiệm đơn. Do đó, $g'(x)$ đổi dấu ba lần nên hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1;x=1;x=2$. Vậy tổng các điểm cực trị của hàm số là 2.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(x^3-3x\right)$. Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ x^3-3x=0\\ x^3-3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=0\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$$

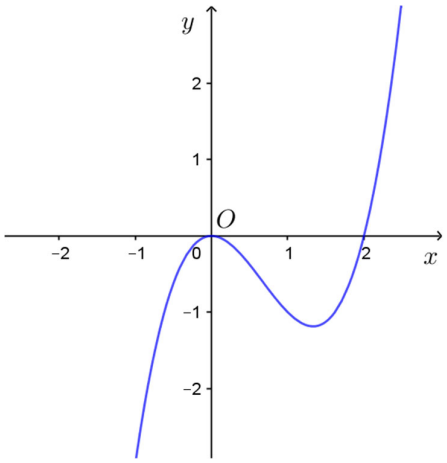
Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm trong đó có $x=0;x=\pm\sqrt{3}$ là nghiệm kép, $x=-1$ là nghiệm bội ba; $x=1;x=2$ là nghiệm đơn.

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(x^3-3x\right)$. Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

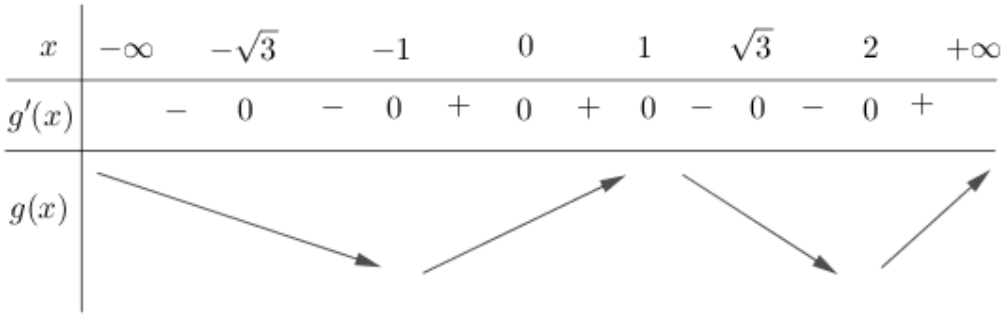
Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ x^3-3x=0\\ x^3-3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=0\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$$

Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm trong đó có $x=0;x=\pm\sqrt{3}$ là nghiệm kép, $x=-1$ là nghiệm bội ba; $x=1;x=2$ là nghiệm đơn.

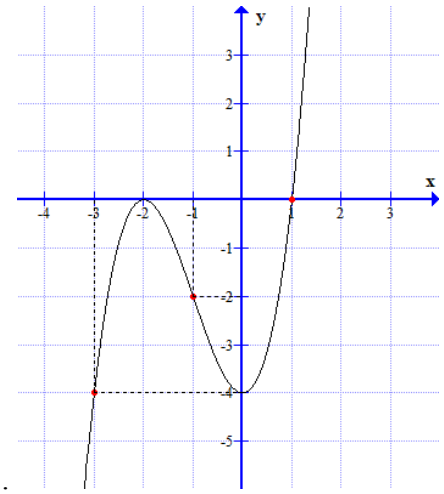
Bảng biến thiên:



Vậy hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=2f(x)-x^2+2x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3, x=1$



Lời giải

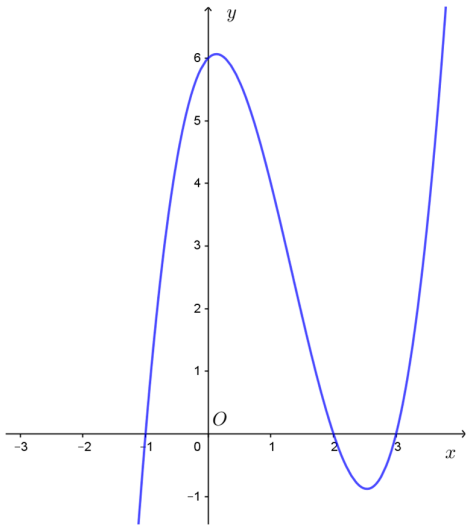
Chọn C

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x+2; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
g(x)		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=1-\sqrt{3};x=1+\sqrt{3}$.
B. $x=1-\sqrt{3};x=3$.
C. $x=-1;x=1;x=3$.
D. $x=-1;x=1+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x-2=0\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=2\\x^2-2x=3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=1\pm\sqrt{3}\\x=-1\\x=3\end{bmatrix}.$$

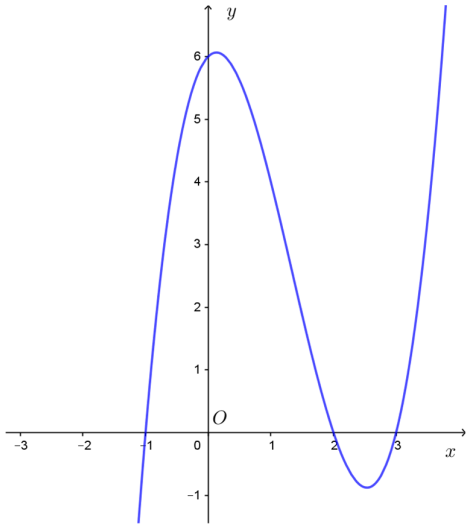
Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=1$ là nghiệm bội ba, các nghiệm còn lại là nghiệm đơn.

Bảng xét cực trị

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1-\sqrt{3}$, $x=1+\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1-\sqrt{3};x=1+\sqrt{3}$.

B. $x=1-\sqrt{3};x=3$.

C. $x=-1;x=1;x=3$.

D. $x=-1;x=1+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x-2=0\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=2\\x^2-2x=3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=1\pm\sqrt{3}\\x=-1\\x=3\end{bmatrix}.$$

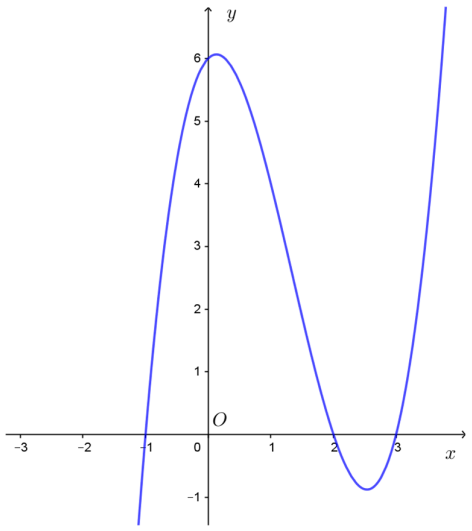
Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=1$ là nghiệm bội ba, các nghiệm còn lại là nghiệm đơn.

Bảng xét cực trị

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1;x=1;x=3$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$. Hàm số $y=g(|x|)$ có số điểm cực trị là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=2\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{3}\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

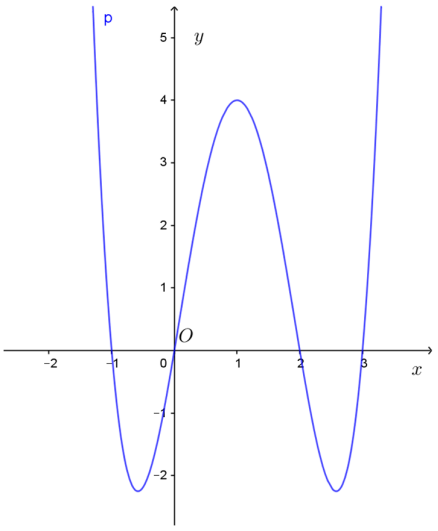
Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=1$ là nghiệm bội ba, các nghiệm còn lại là nghiệm đơn.

Bảng xét cực trị

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Do hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị dương nên hàm số $y=g(|x|)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(m-x^2\right)$. Tìm m để hàm số $y=g(x)$ có 9 điểm cực trị là

A. $m>-1$. **B.** $m>0$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Chọn D

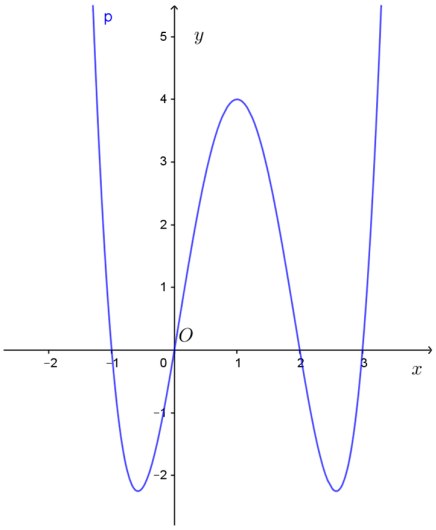
$$g'(x)=-2xf'\left(m-x^2\right);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ m-x^2=-1\\ m-x^2=0\\ m-x^2=2\\ m-x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0\\ x^2=m+1 & (1)\\ x^2=m & (2)\\ x^2=m-2 & (3)\\ x^2=m-3 & (4)\end{array}\right.$$

Hàm số $y=g(x)$ có 9 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 9 lần

$\Leftrightarrow$ mỗi phương trình $(1),(2),(3),(4)$ đều có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>-1\\ m>0\\ m>2\\ m>3\end{array}\right.\Leftrightarrow m>3.$$

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left(m-x^2\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

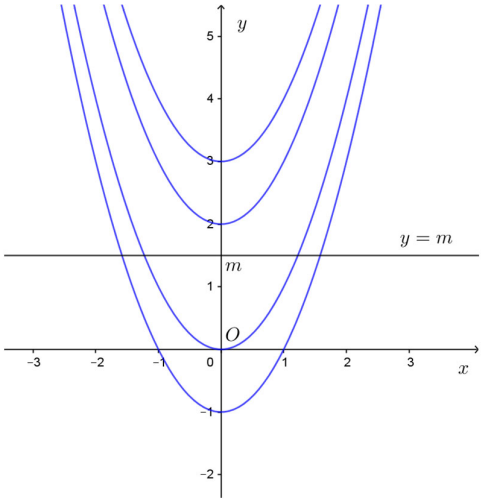
Chọn C

$$g'(x)=-2xf'\left(m-x^2\right);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ m-x^2=-1\\ m-x^2=0\\ m-x^2=2\\ m-x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0&\\ x^2-1=m&(1)\\ x^2=m&(2)\\ x^2+2=m&(3)\\ x^2+3=m&(4)\end{array}\right.$$

Hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

$\Leftrightarrow$ Tổng số nghiệm khác 0 của bốn phương trình $(1),(2),(3),(4)$ là 4 hoặc tổng số nghiệm bốn phương trình $(1),(2),(3),(4)$ là 5 trong đó có 1 nghiệm kép bằng 0.

Vẽ 4 đồ thị hàm số $y=x^2, y=x^2-1, y=x^2+2, y=x^2+3$ trên cùng một hệ trục tọa độ

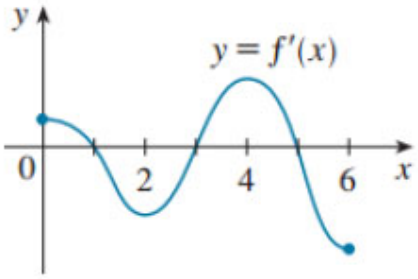


Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m$ cắt bốn đồ thị tại 4 điểm phân biệt khác 0 hoặc cắt tại 5 điểm phân biệt trong đó có có 1 điểm có hoành độ bằng 0.

$0<m\le 2$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=g(x)=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 3 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 4

Lời giải

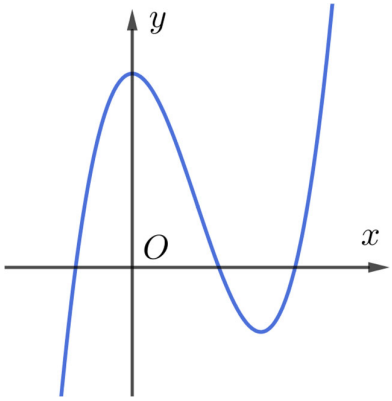
Chọn C

Ta có $g'(x)=2f(x)f'(x)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.$.

$f'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt trên $(0;6)$ nên phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 ngiệm trên đoạn $[0;6]$. Do đó hàm số $y=g(x)$ có tối đa 7 điểm cực trị.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

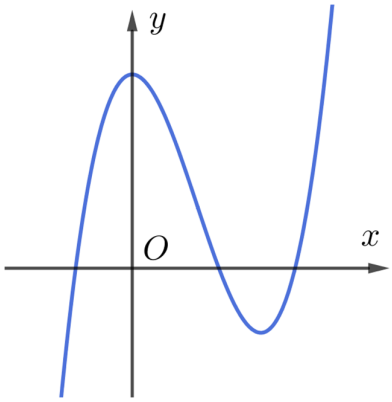
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt nên $f'(x)$ đổi dấu ba lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

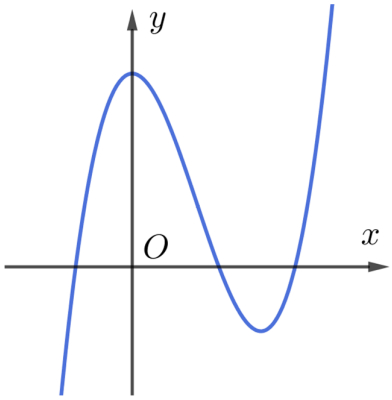
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm một lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

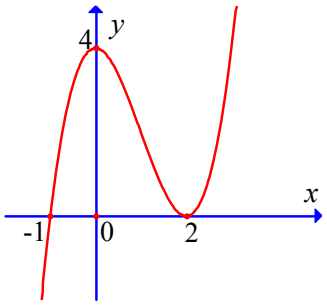
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

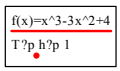
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương hai lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.





Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

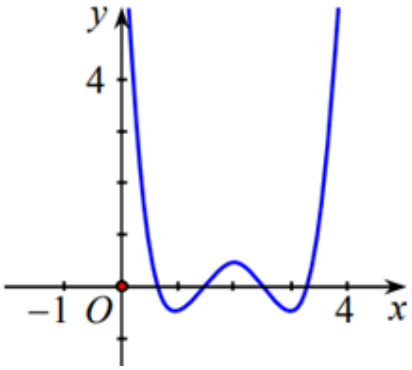
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=2$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-1$. Do đó $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương một lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

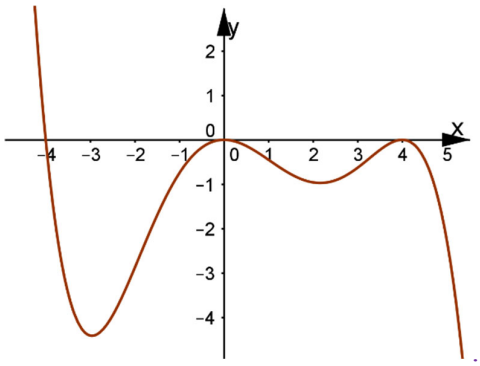
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu 4 lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 6. **[2D1-2.3-3] [THPT Nguyễn Khuyến –NĐ 2017]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ bên dưới. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



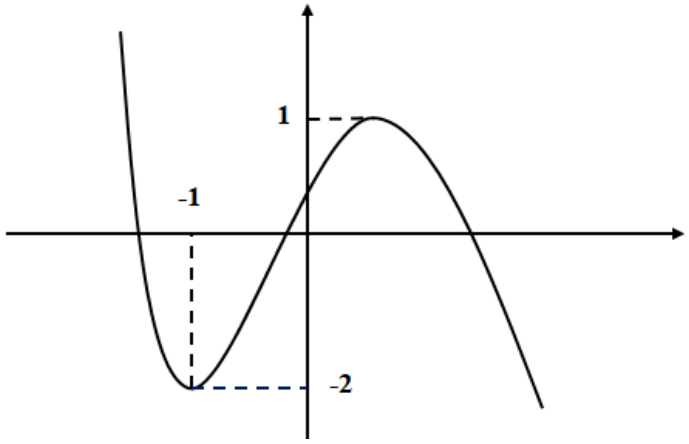
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0$ tại 3 điểm $x_1<x_2=0<x_3$. Mà $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua x_1 nên $y=f(x)$ chỉ có một cực trị.

Câu 7. **[2D1-2.15-4] [Đề thi thử-Liên trường Nghệ An-L2]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)+2x$ là:



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f(x)+2x$ suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+2=0\Leftrightarrow f'(x)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=x_0>-1\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $(-\infty;-1)$ thì $f'(x)>-2\Leftrightarrow f'(x)+2>0$.

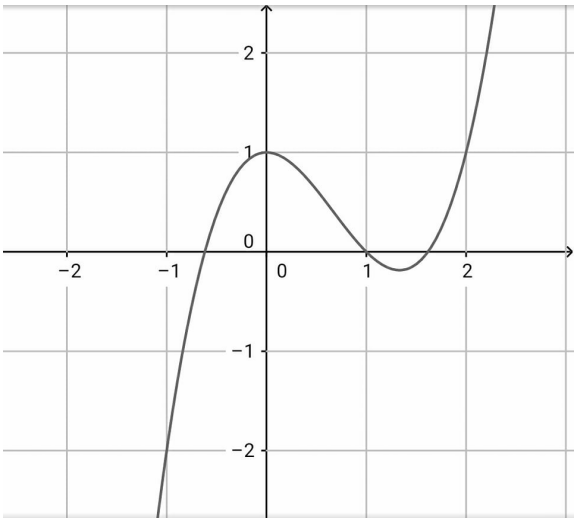
Trên $(-1;x_0)$ thì $f'(x)>-2\Leftrightarrow f'(x)+2>0$.

Trên $(x_0;+\infty)$ thì $f'(x)<-2\Leftrightarrow f'(x)+2<0$.

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	0	−	
$g(x)$		↗		↗		↘	

Vậy hàm số $g(x)=f(x)+2x$ có 1 cực trị.

Câu 8. **[2D1-2.5-3] (THPT Chuyên Bắc Ninh - Lần 2 - 2017 - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

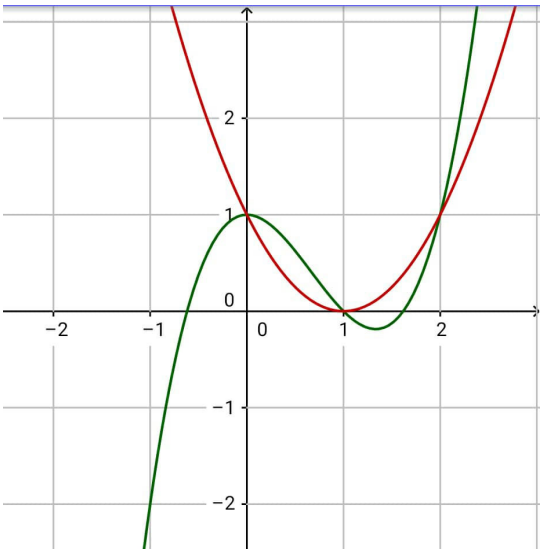
Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$

Điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ tức là nghiệm của phương trình $f'(x)=(x-1)^2$ suy ra điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ cũng là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=f'(x); y=x^2-2x+1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'(x); y=x^2-2x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:

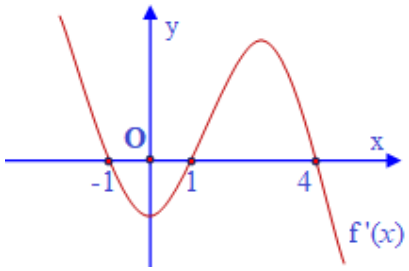


Dựa vào đồ thị trên ta có BBT của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=g(x)$ có điểm cực đại $x=1$.

Câu 9. **[2D1-5.5-4] (THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=2x.f'(x^2)$.

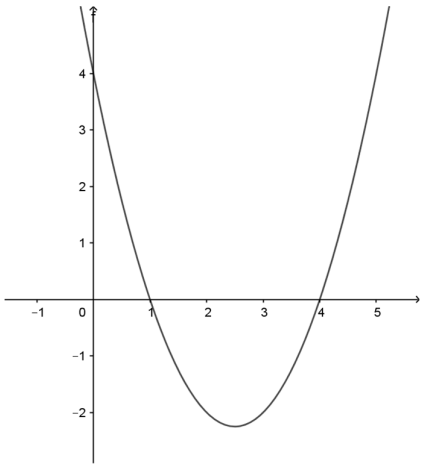
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\x^2=-1\\x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số có 3 điểm cực đại.

Câu 10. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f\left(x^2-4x+m\right)$. Số giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị là

A. vô số. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

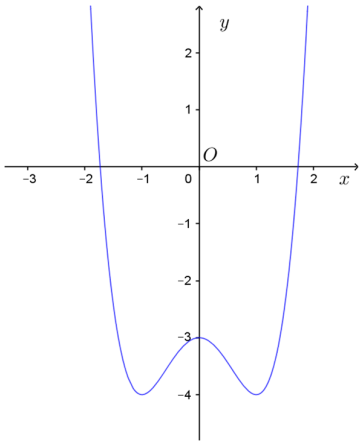
Ta có $g'(x)=(2x-4)f'\left(x^2-4x+m\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x-4=0\\x^2-4x+m=1\\x^2-4x+m=4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2\\x^2-4x+m-1=0\quad(1)\\x^2-4x+m-4=0\quad(2)\end{bmatrix}.$$

Ta có (1) và (2) không có nghiệm chung nên hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chr khi $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2 và (2) có hai nghiệm phân biệt khác $2\Leftrightarrow\begin{cases}5-m>0\\m-5\neq0\\8-m>0\\m-8\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<5$

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầy bài toán

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

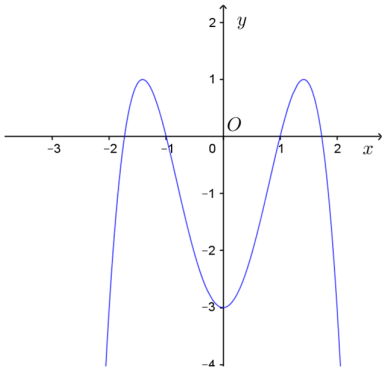
A. 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu hai lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

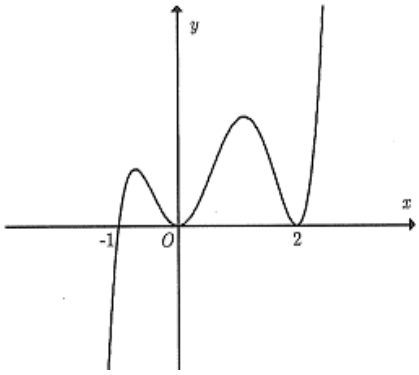
A. 4 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu bốn lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có bốn điểm cực trị.

Câu 13. **[2D1-2.5-3] [BTN 165]** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $f(x)$ trên khoảng K. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:



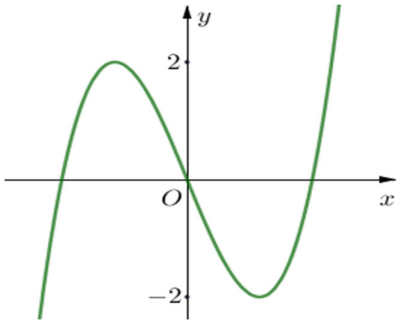
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (và hai nghiệm kép) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn này. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

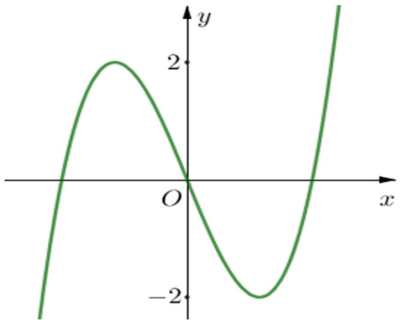
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu ba lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị, trong đó có một điểm cực trị dương nên đồ thị hàm số $f=f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

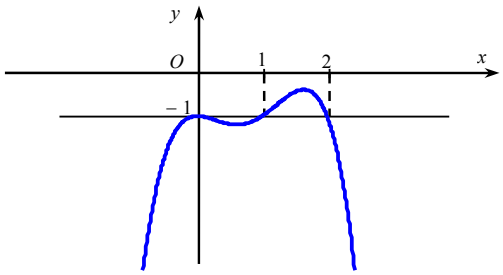
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu ba lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị, trong đó có một điểm cực trị dương nên đồ thị hàm số $f=f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.

Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.



A. $x=2$. **B.** Không có điểm cực tiểu.

C. $x=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

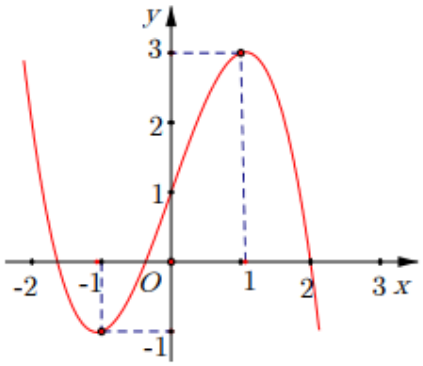
$$g'(x)=f'(x)+1;\ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↘		↗		↘	

Vậy hàm số có điểm cực tiểu $x=1$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

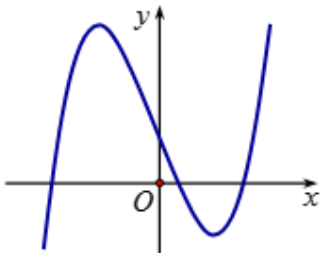
Chọn A

Ta có $y=\left[f\left(x\right)\right]^2\Rightarrow y'=2f\left(x\right).f'\left(x\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=0\end{array}\right.$.

Do phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa bốn nghiệm.

Suy ra phương trình $y'=0$ có tối đa bẩy nghiệm nên hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^2$ có tối đa bẩy điểm cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 7 **D.** 6.

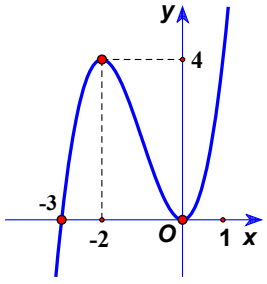
Lời giải

Chọn C

Do phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $f'\left(x\right)$ đổi dấu khi x đi qua ba nghiệm đó nên hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cự trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa bốn nghiệm.

Suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị và đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại tối đa bốn điểm. Vậy hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có tối đa bẩy điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 4.

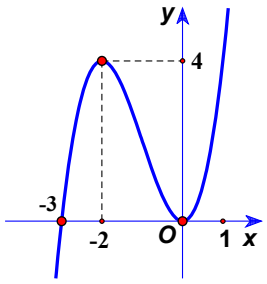
Lời giải

Chọn B

Do phương trình $f'\left(x\right)=0$ có một nghiệm đơn và một nghiệm kép nên hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa ba nghiệm.

Suy ra hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại tối đa hai điểm. Vậy hàm số $y=|f(x)|$ có tối ba điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^3+2)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

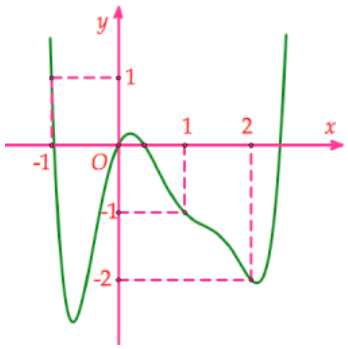
Chọn B

$$g'(x)=3x^2f'(x^3+2);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3+2=-3\\x^3+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\sqrt[3]{5}\\x=-\sqrt[3]{2}\end{array}\right.$$

$g'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm bội chẵn là $x=0, x=-\sqrt[3]{2}$, do đó $g'(x)$ đổi dấu 1 lần.

Vậy hàm số $y=g'(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



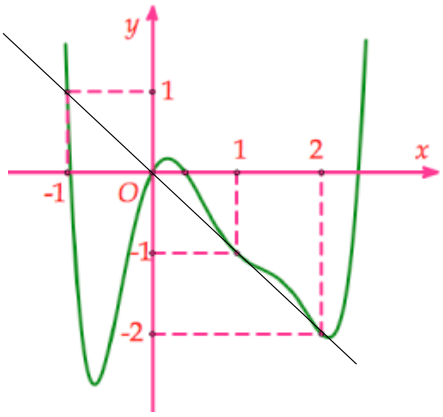
Hỏi điểm cực tiểu của hàm số $y=2f(x)+x^2$ là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn D.

$y'=2f'(x)+2x$.

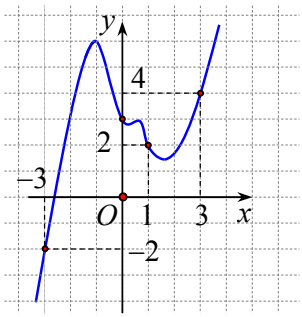


$y'=0\Leftrightarrow f'(x)=-x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↗		↗	

Điểm cực tiểu của hàm số là $x=0$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ là:



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y=g(|x|)$ là hàm chẵn và đồ thị nhận Ox làm trục đối xứng.

Với $x\geq 0$

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

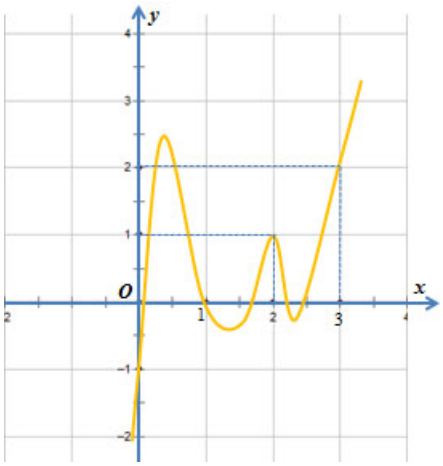
$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$g(0)$	↗	$g(1)$	↘	$g(3)$	↗	$+\infty$

Do tính đối xứng nên đồ thị hàm số $y=g\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

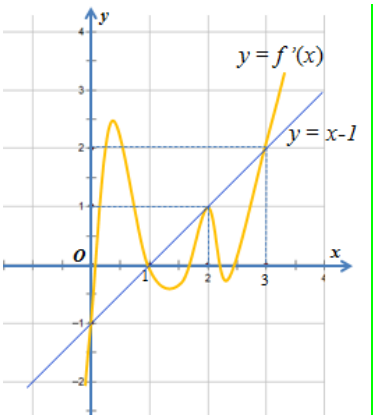
Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B.



Ta thấy số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ chính là số cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox

+ Xét hàm số $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2\left[f'(x)-(x-1)\right]$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

+ Ta có bảng biến thiên:

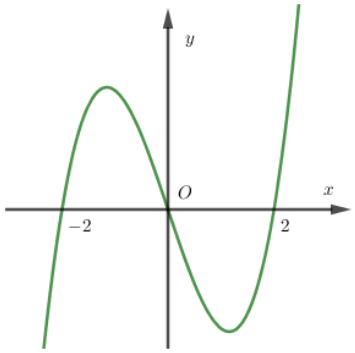
x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(0)$	↗	$h(1)$	↘	$h(2)$	↘	$h(3)$	↗	$+\infty$

+ Từ bảng biến thiên ta thấy

Hàm số $h(x)$ có ba cực trị và đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bốn điểm

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều nhất bảy điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(-\left|x^3-3x\right|\right)$ là?

A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7

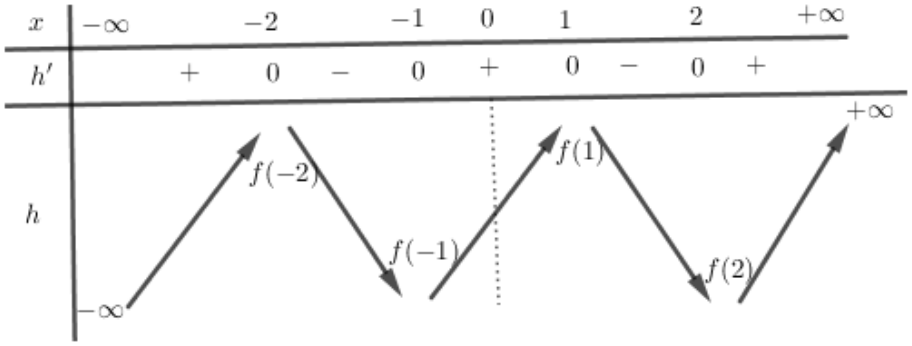
Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=f\left(x^3-3x\right)$. Ta có $h'(x)=3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x\right)$.

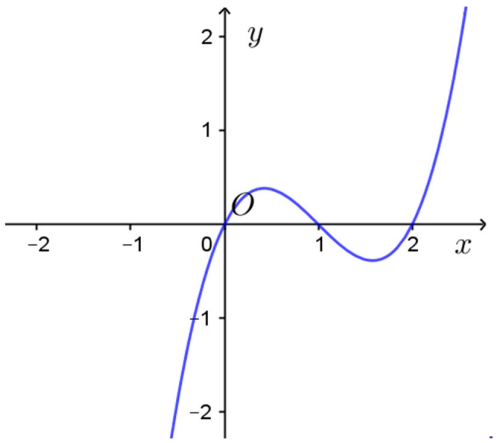
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \text{ (nghiệm bội ba) } \vee \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Ta lập được bảng biến thiên như sau:



Ta có $g(x)=h(-|x|)$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^2+x)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

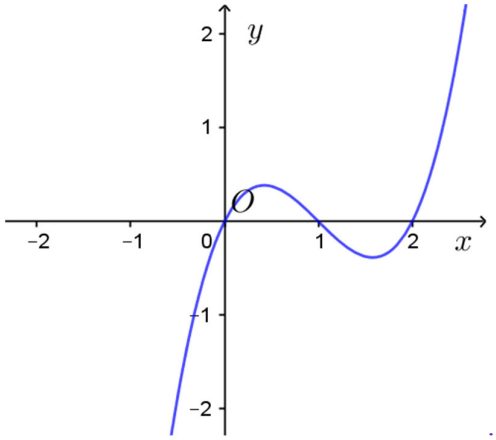
Lời giải

Chọn A

$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'(x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x^2+x=0\\ x^2+x=1\\ x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=-1\\ x=0\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

$g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt đều là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu 7 lần. Do đó, hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^2+x)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 7. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

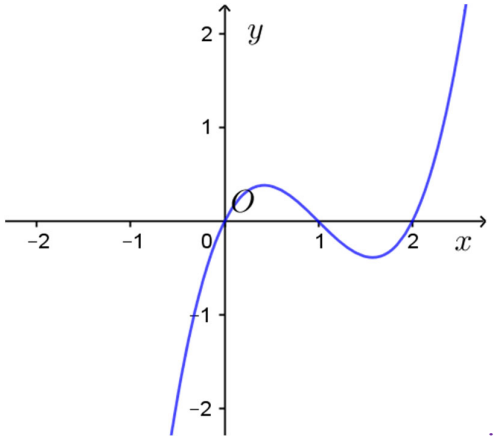
$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'(x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x^2+x=0\\ x^2+x=1\\ x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=-1\\ x=0\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^2+x)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

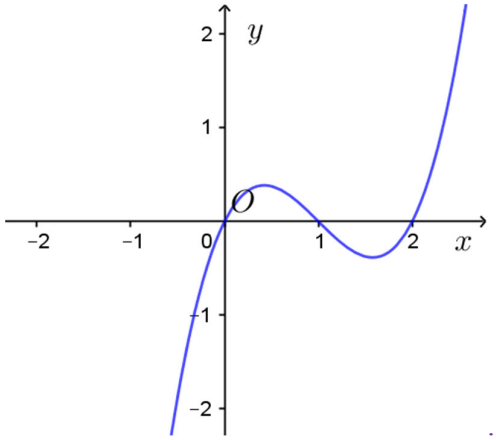
$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'(x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x^2+x=0\\ x^2+x=1\\ x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=-1\\ x=0\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^2+x)$. Hàm số $y=g(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

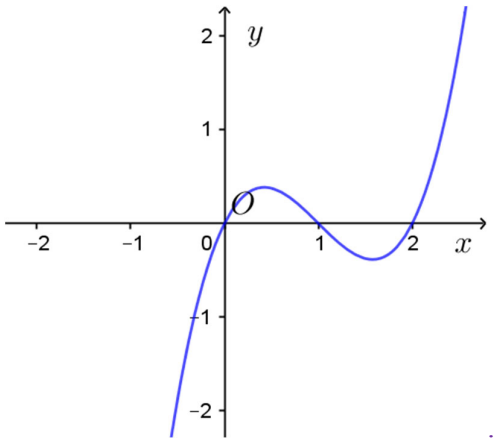
Chọn C

$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'(x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x^2+x=0\\ x^2+x=1\\ x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=-1\\ x=0\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm số $y=g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f(x^2+x)$. Hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

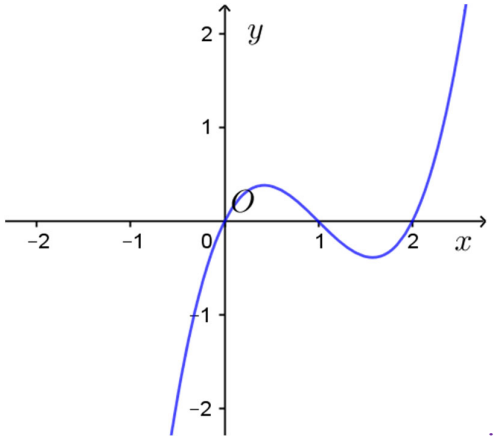
$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'(x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x^2+x=0\\ x^2+x=1\\ x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=-1\\ x=0\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị nên phương trình $g(x)=0$ có tối đa 8 nghiệm.

Do đó, hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 15 điểm cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=f\left(x^2+6x+m\right)$. Số giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

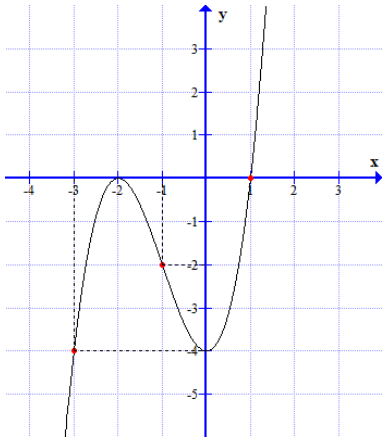
Chọn A

$$g'(x)=(2x+6)f'\left(x^2+6x+m\right);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+6=0\\ f'\left(x^2+6x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x^2+6x+m=0\ (1)\\ x^2+6x+m=1\ (2)\\ x^2+6x+m=2\ (3)\end{array}\right.$$

Hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $(1),(2),(3)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác -3 $\Leftrightarrow\begin{cases}9-m>0\\ 9-m\neq 0\\ 10-m>0\\ 10-m\neq 0\\ 11-m>0\\ 11-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<9$

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của tham số m.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

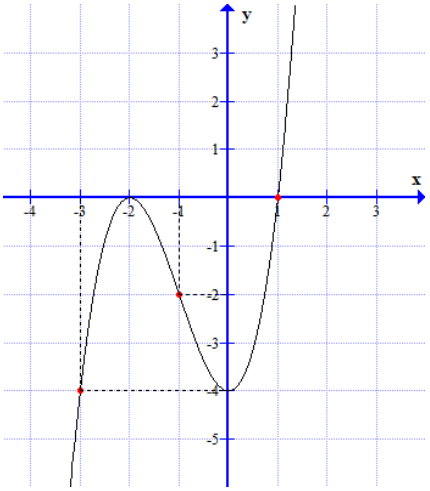


Đặt $g(x)=2f(x)-x^2+2x$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3, x=1$

Lời giải

Chọn D

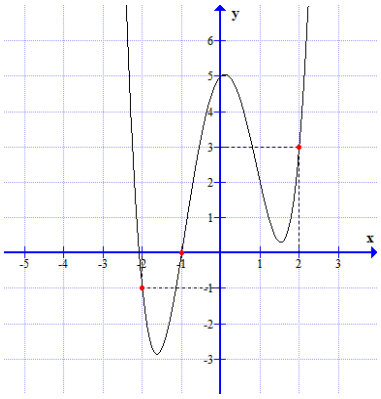


Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x+2; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	-∞		-3		-1		1		+∞
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
g(x)		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-3, x=1$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên

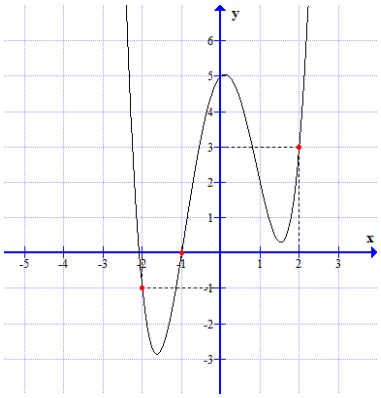


Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2f(x)-x^2-2x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

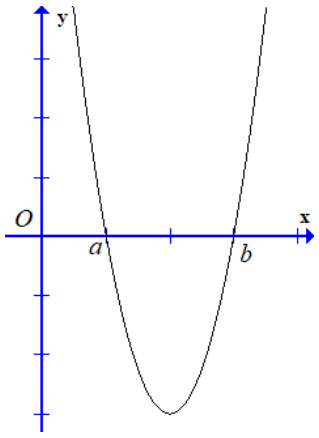


Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x+2; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
g(x)		↗		↘		↗		↘		↗	

Hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 33. **[2D1-2.15-4] (THPT HAU LOC 2_THANH HOA_LAN2_2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm m để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng ba điểm cực trị. Biết rằng $f(b)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.



A. $m<\frac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↗	$+\infty$

Xét hàm số $h(x)=f^2(x)+f(x)+m$.

Ta có $h'(x)=2f(x).f'(x)+f'(x)$;

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;x=b\\x=c<a\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f^2(x)+f(x)+m$:

x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$m-\dfrac{1}{4}$	↗		↘	m	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m-\dfrac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{4}$

BÀI TOÁN 23: XÁC TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán:

Xác định tính đơn điệu của hàm hợp $y=f(u)$ *dựa vào BBT, đồ thị* $y=f'(x)$

❖ ***Xét hàm*** $g(x)=f(u(x))$

➢ ***Bước 1:*** ……

…… ……. ……..……

…….

Tìm $x_1,x_2,...,x_i$ *là nghiệm* $f'(x)=0$ *hoặc không xác định*

➢ ***Bước 2:*** *Giải phương trình* ……

…….

…….

…….

Xét dấu $f'(u(x))$ *dựa vào dấu* $f'(x)$ *hoặc dựa vào bảng biến thiên dấu* $f'(x)$

Vai trò của $u(x)$ *giống như* x *vì dấu của* $f'(u(x))$ *cũng là dấu của* $f'(x)$.

➢ ***Bước 3:*** *Lập bảng xét dấu* ……

…….

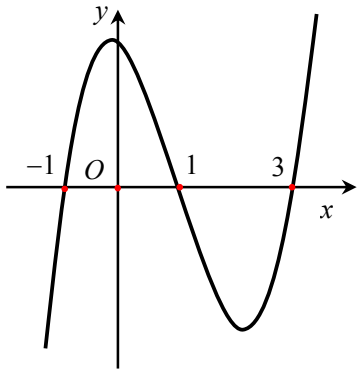
…….

…….

➢ ***Bước 4:*** *Kết luận tính đơn điệu của hàm* $g(x)=f(u(x))$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

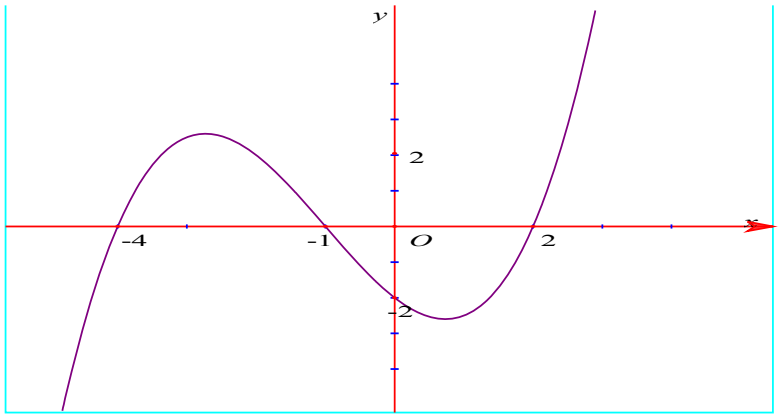
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng

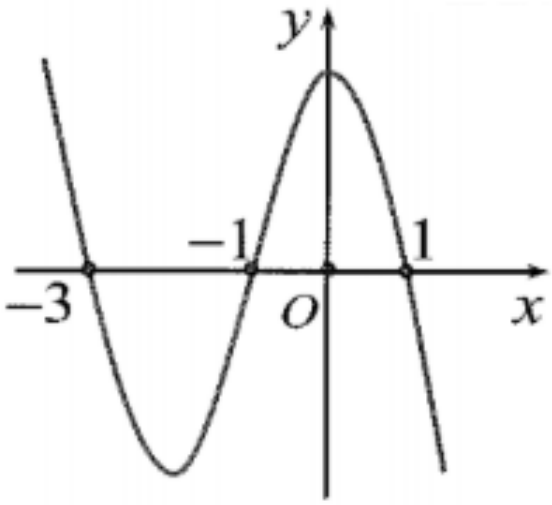
A. $(0;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x^2-5)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $y=g(x)=f(1-x)$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

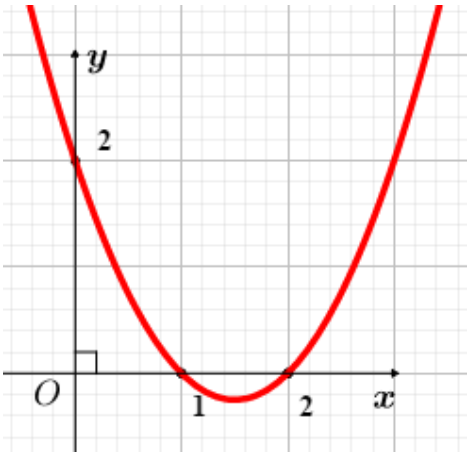
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(2x+1)\cdot g(x)+1$, trong đó $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(2-x)+x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)g(x)$ trong đó $g(x)>0,\forall x$. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường parabol như hình bên. Hàm số $y=f(1-x^2)+6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(\sqrt{2};+\infty)$. **C.** $(-\sqrt{2};0)$. **D.** $(1;\sqrt{2})$.

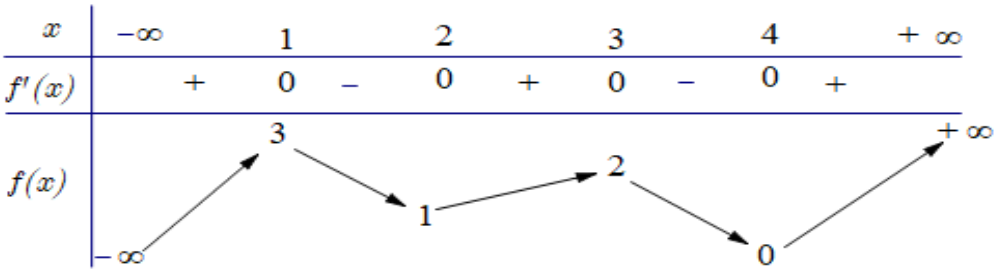
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y=f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ trong đó $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.
Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2018$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(0;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm thỏa $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;3)$.

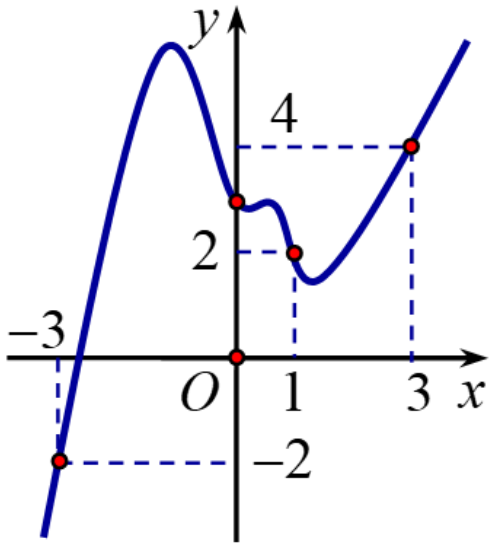
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $y=(f(x))^3-3(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

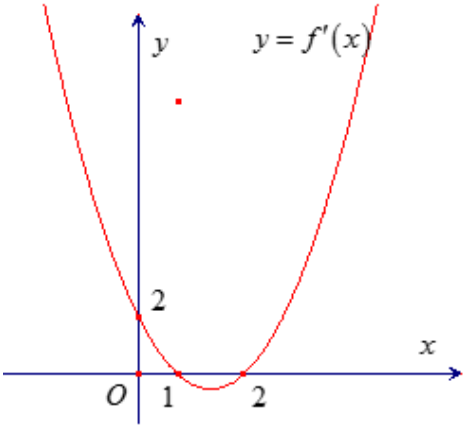


Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

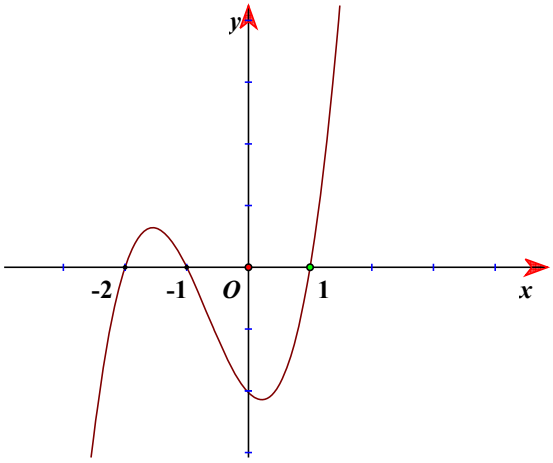
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng

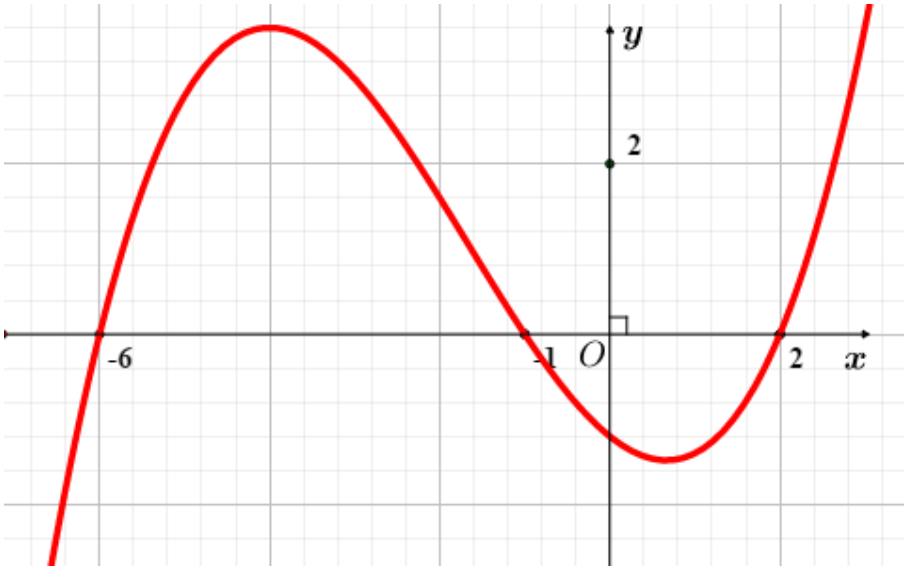
A. $(1;2)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau . Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây ?



A. $(0;1)$. **B.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\sqrt{3};0\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng



A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$ **D.** $(-2;-1)$

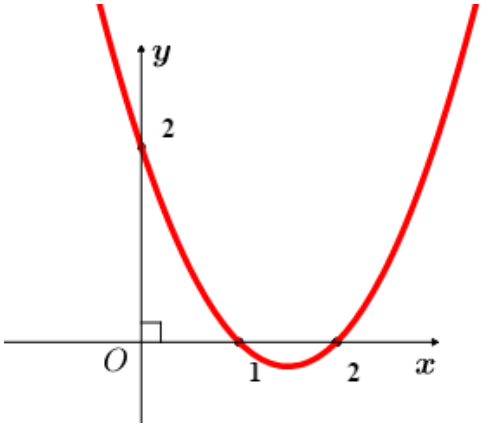
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường parabol như hình bên. Hàm số $y=f\left(1-x^2\right)+6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{2};0\right)$. **D.** $\left(1;\sqrt{2}\right)$.

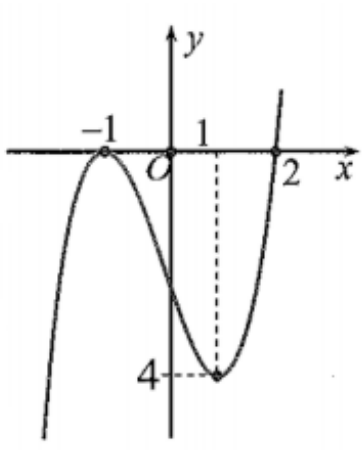
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-x-2\right)$. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$).



Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào sau đây là **SAI**?

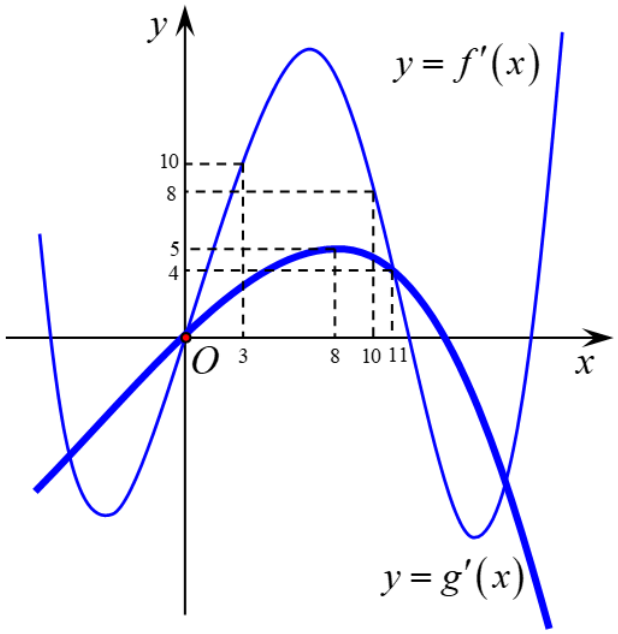
A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 9. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.



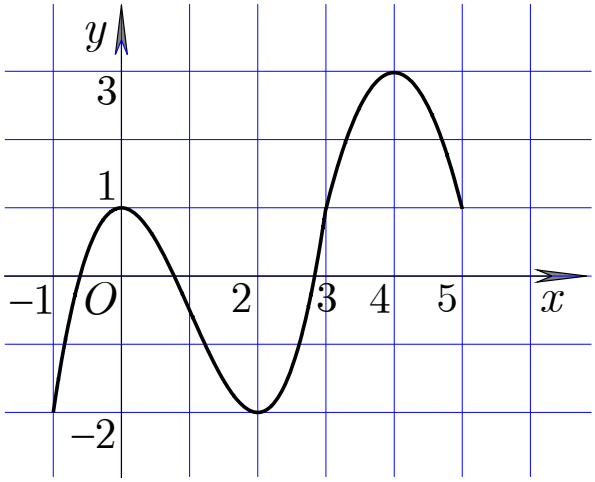
Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\frac{31}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$ **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$ **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1$ trong đó $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên khoảng nào?

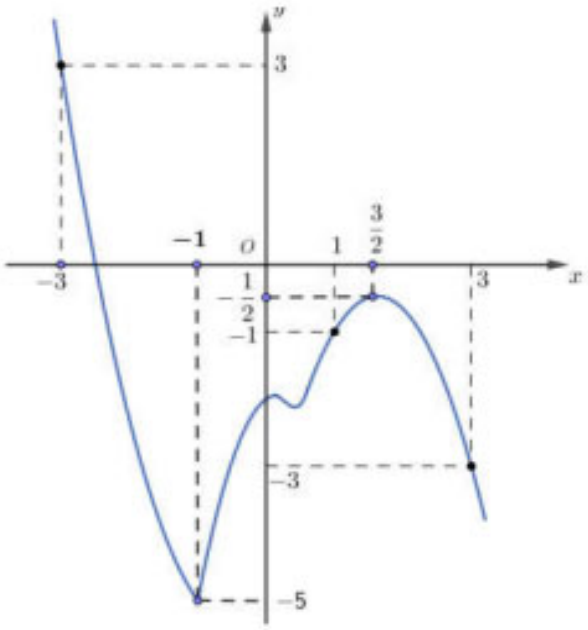
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f(1-x)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

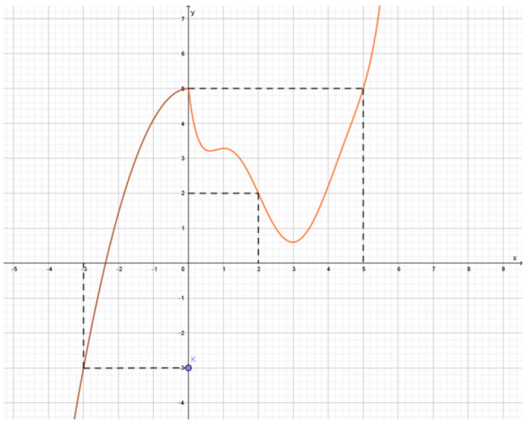
Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+2019$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:

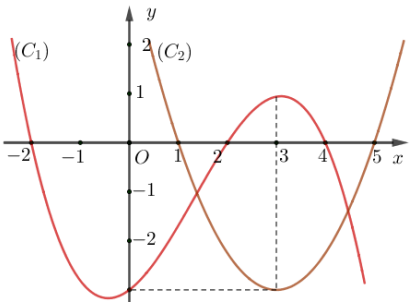


Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;\dfrac{-1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\dfrac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$.

Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

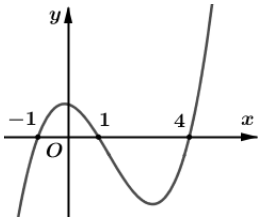
A. $(-\infty;0)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(0;1)$.



Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10,20]$ để hàm số $f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

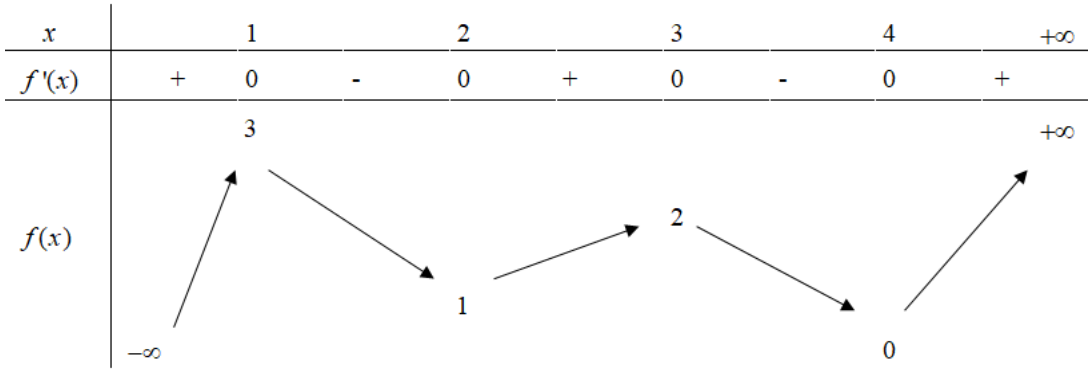
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(4;7)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3-3.\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

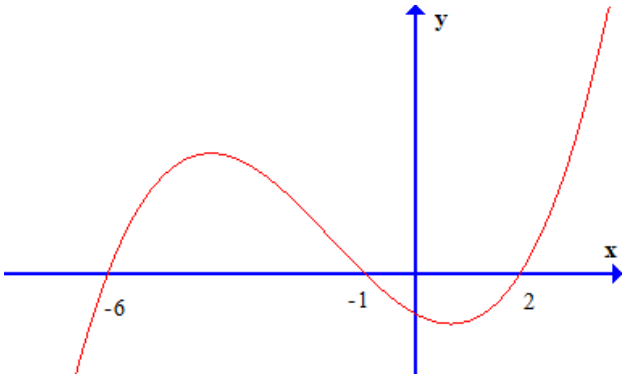
Câu 1. Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $+$	0	$-$

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

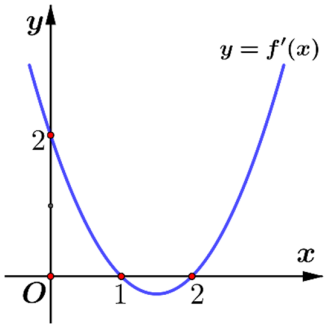
A. $\left(-2;1\right)$. **B.** $\left(-4;-3\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(2;3\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

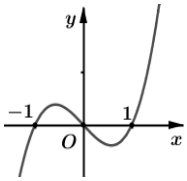
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(0;4)$.

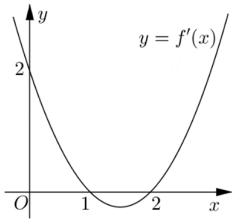
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

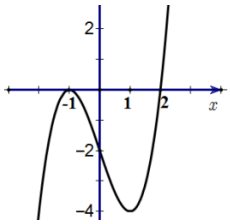
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(1+2x-x^2)$ đồng biến trên khoảng dưới đây?



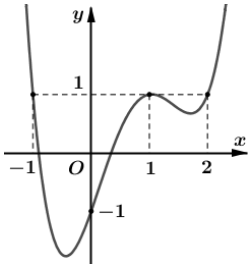
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x)=f(x)-x$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **B.** $g(-1)<g(1)<g(2)$.

C. $g(-1)>g(1)>g(2)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y=1$ nên $g'(x)=f'(x)-1$ mang dấu +.

Câu 9. **(Đề HSG_ Tỉnh Bắc Giang 18-19)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

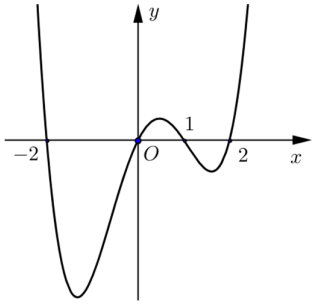
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

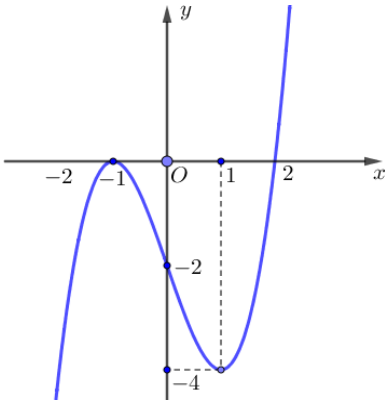
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$, biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên



Hàm số $y=f(2-x)+2019$ đồng biến trên các khoảng

A. $(-2;0)$ và $(1;2)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;4)$. **C.** $(0;1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$ và $(2;4)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

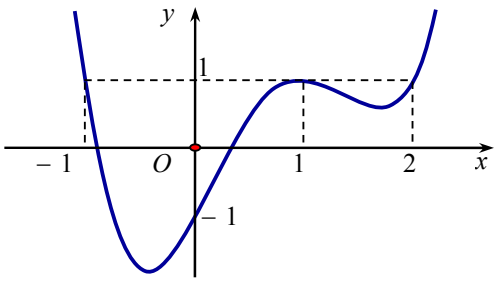
A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2\ ;3)$. **B.** $(0\ ;1)$. **C.** $(-1\ ;0)$. **D.** $(1\ ;2)$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

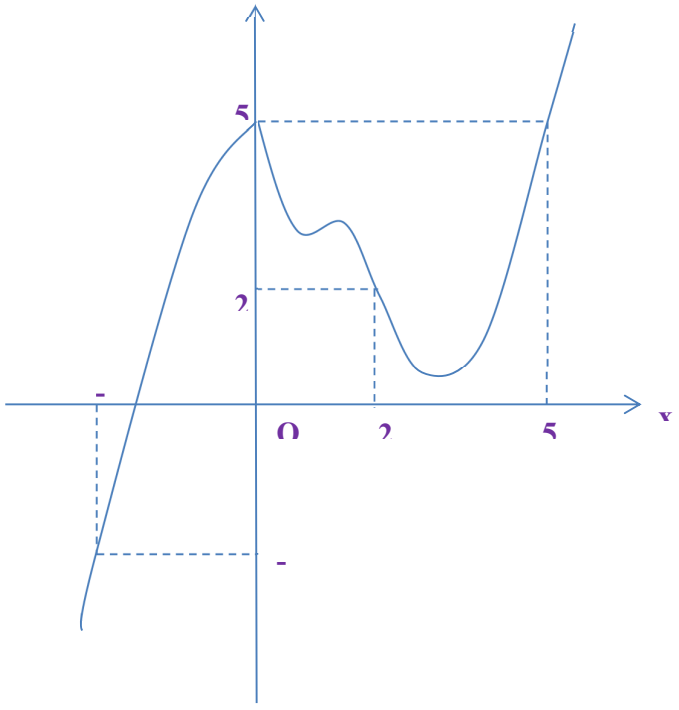
Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

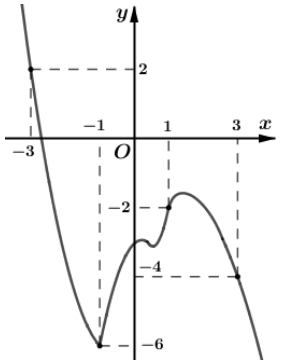
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R . Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

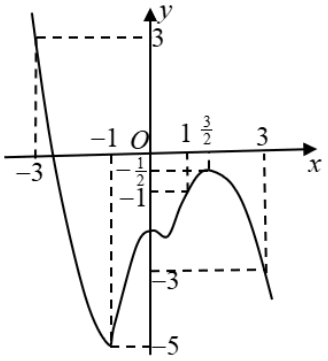
A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-3;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

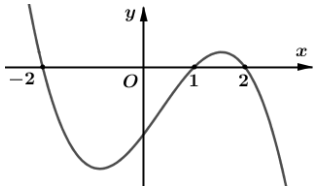
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

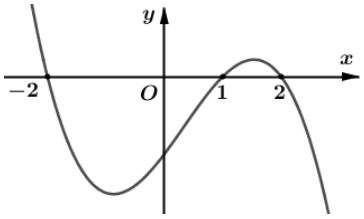
A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

BÀI TOÁN 23: XÁC TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán:

Xác định tính đơn điệu của hàm hợp $y=f(u)$ *dựa vào BBT, đồ thị* $y=f'(x)$

❖ ***Xét hàm*** $g(x)=f(u(x))$

➢ ***Bước 1:*** $g'(x)=\left[f(u(x))\right]'=u'(x).f'(u(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\f'(u(x))=0\end{array}\right.$.

Tìm $x_1,x_2,...,x_i$ *là nghiệm* $f'(x)=0$ *hoặc không xác định*

➢ ***Bước 2:*** *Giải phương trình* $f'(u(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u(x)=u_1\\u(x)=u_2\\.....\end{array}\right.$.

Xét dấu $f'(u(x))$ *dựa vào dấu* $f'(x)$ *hoặc dựa vào bảng biến thiên dấu* $f'(x)$

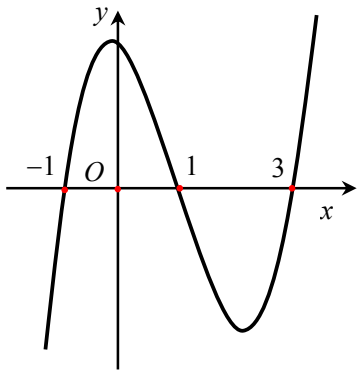
Vai trò của $u(x)$ *giống như* x *vì dấu của* $f'(u(x))$ *cũng là dấu của* $f'(x)$.

➢ ***Bước 3:*** *Lập bảng xét dấu* $g'(x)$.

➢ ***Bước 4:*** *Kết luận tính đơn điệu của hàm* $g(x)=f(u(x))$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

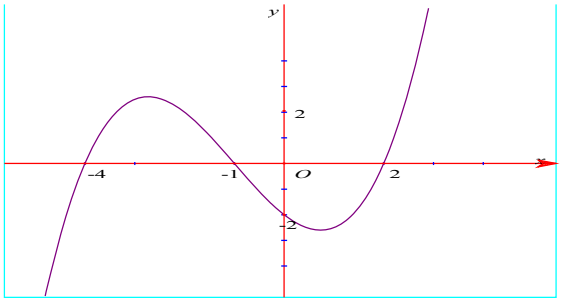
$y=f(1-x) \Rightarrow y'=-f'(1-x)$

Hàm số đồng biến khi $y'>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x<-1\\1<1-x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\-2<x<0\end{array}\right.$.

Hàm số nghịch biến khi $y'<0 \Leftrightarrow f'(1-x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<1-x<1\\1-x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\x<-2\end{array}\right.$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y=f(x^2-5)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=f(x^2-5)$

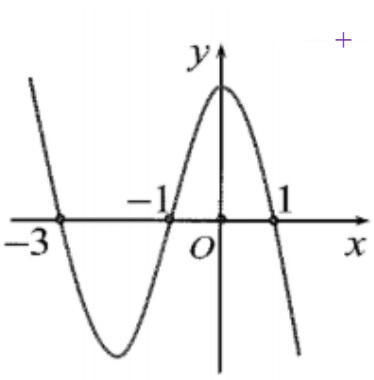
Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-5\right)$, $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-5=-4\\x^2-5=-1\\x^2-5=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\\x=\pm\sqrt{7}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{7}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $y=g(x)=f(1-x)$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=\left[f(1-x)\right]'=-f'(1-x)$

$$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<1-x<-1\\1-x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x<0\end{array}\right.$$

$$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x<-3\\-1<1-x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\0<x<2\end{array}\right.$$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(2x+1)\cdot g(x)+1$, trong đó $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(2-x)+x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y'=-f'(2-x)+1$.

Hàm số đồng biến khi và khi khi $y'>0 \Leftrightarrow f'(2-x)<1 \Leftrightarrow (2-x)(5-2x)g(2-x)<0$

Vì $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $y'>0$ khi và chỉ khi $(2-x)(5-2x)<0 \Leftrightarrow 2<x<\frac{5}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(2-x)+x$ đồng biến trên khoảng $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)g(x)$ trong đó $g(x)>0,\forall x$. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y=f(x^2)\Rightarrow y'=2x.f'(x^2)=2x^5(x^2-1)(x^2-4)g(x)$

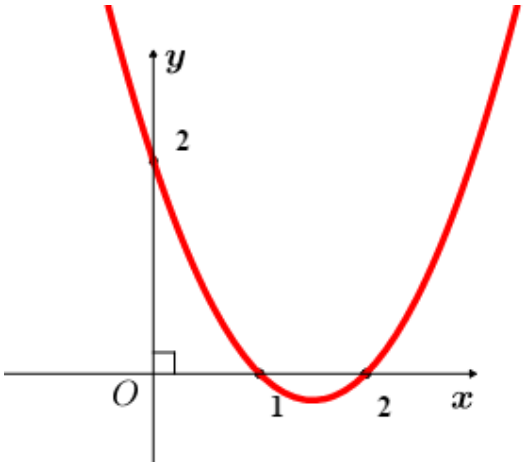
(Với $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)g(x)\Rightarrow f'(x^2)=x^4(x^2-1)(x^2-4)g(x)$)

$$y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Hàm số đồng biến trong khoảng $(-2;-1);(0;1)$

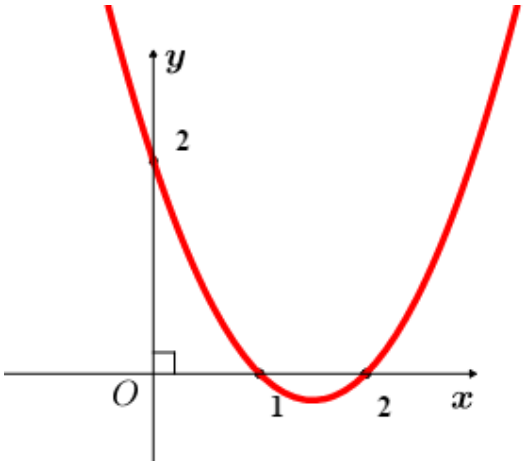
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường parabol như hình bên. Hàm số $y=f(1-x^2)+6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(\sqrt{2};+\infty)$. **C.** $(-\sqrt{2};0)$. **D.** $(1;\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D.



Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 3 điểm $(2;0)$, $(1;0)$, $(0;2)$ nên hàm số $y=f'(x)$ có dạng $y=f'(x)=x^2-3x+2$.

Xét hàm số $y'=\left[f\left(1-x^2\right)+6x^2\right]'=-2xf'\left(1-x^2\right)+12x$

$=-2x\left[\left(1-x^2\right)^2-3\left(1-x^2\right)+2\right]+12x=-2x\left(x^4+x^2-6\right)=-2x\left(x^2-2\right)\left(x^2+3\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(1-x^2\right)+6x^2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗		↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-\sqrt{2})$ và $(0;\sqrt{2})$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y=f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ trong đó $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2018$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(0;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $h(x)=f(1-x)+2019x+2018.$

Ta có $h'(x)=-f'(1-x)+2019.$

Theo đề $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019\Rightarrow f'(1-x)=x(3-x)g(1-x)+2019.$

Do đó $h'(x)=x(x-3)g(1-x)$

Mặt khác $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(1-x)>0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Nên $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$h(0)$	↘	$h(3)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên nhận thấy $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;3).$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm thỏa $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn A.

$y'=\left[f(1-x)\right]'+2018=-\left[x(3-x)g(1-x)+2018\right]+2018=x(x-3)g(1-x).$

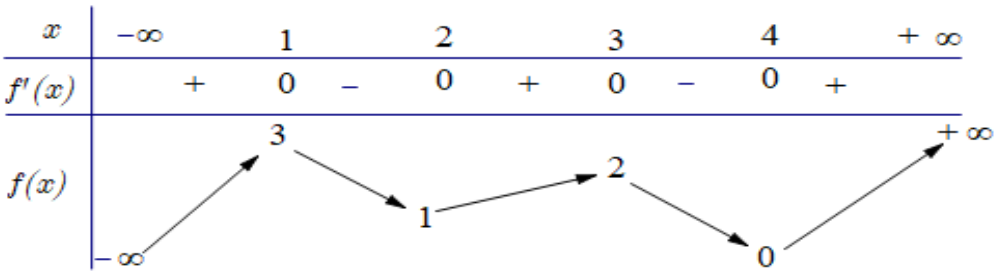
$y'=0\Leftrightarrow x(x-3)g(1-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ (do $g(1-x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3-3\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(2;3\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(3;4\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=3\left(f\left(x\right)\right)^2.f'\left(x\right)-6f\left(x\right).f'\left(x\right)$.

$y'=3f'\left(x\right).f\left(x\right)\left[f\left(x\right)-2\right]$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=2\end{array}\right.$$

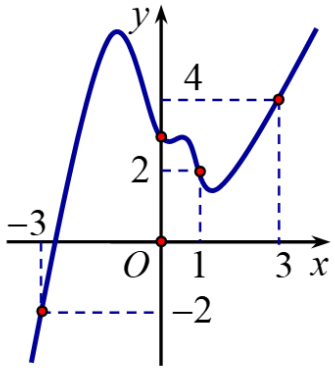
+ $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$; $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<1\\x=4\end{array}\right.$; $f\left(x\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2\in\left(x_1;1\right)\\x=x_3\in\left(1;2\right)\\x=x_4>4\\x=3\end{array}\right.$.

+ Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
$f'(x)$	+		+		+	0	−		−	0	+	0	−	0	+		+		
$f(x)$	−	0	+		+		+		+		+		+	0	+		+		
$f(x)-2$	−		−	0	+		+	0	−		−		−		−	0	+		
	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+		

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3-3\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;3\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.

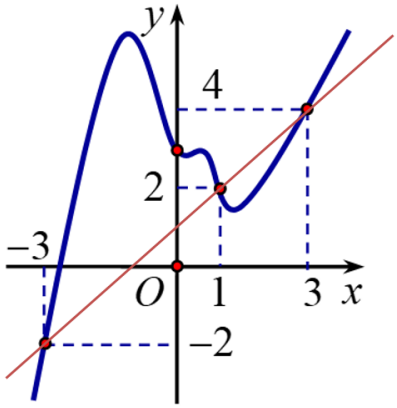


Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.



$g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2} \Rightarrow g'(x)=f'(x)-(x+1)$.

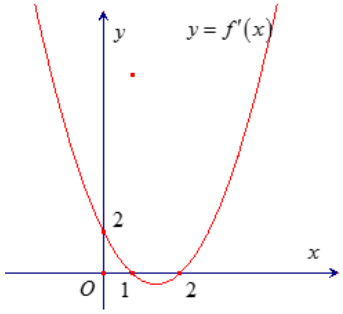
Hàm số đã cho đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x)-(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x)\ge (x+1)$

Vẽ đồ thị hàm số $y=x+1$ lên cùng một hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

$f'(x)\ge (x+1)\forall x\in(-3;1)\cup(3;+\infty)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f\left(1-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\left(f\left(1-x^2\right)\right)'=-2xf'\left(1-x^2\right)$ nên để tìm khoảng nghịch biến ta sẽ tìm x để cho $-2xf'\left(1-x^2\right)<0\Leftrightarrow 2xf'\left(1-x^2\right)>0$

Mà theo trên ta có khoảng nghịch biến của $f(x)$ là $(1;2)$, khoảng đồng biến của $f(x)$ là $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$. Suy ra

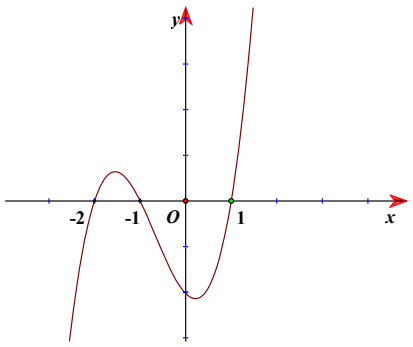
Khoảng nghịch biến của $f'\left(1-x^2\right)$ là $\begin{cases}1-x^2>1\\1-x^2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2<0\\x^2>-1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Khoảng đồng biến của $f'\left(1-x^2\right)$ là $\begin{bmatrix}1-x^2<1\\1-x^2>2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2>0\\x^2<-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$-2xf'\left(1-x^2\right)<0\Leftrightarrow 2xf'\left(1-x^2\right)>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}2x>0\\f'\left(1-x^2\right)>0\end{cases}\\\begin{cases}2x<0\\f'\left(1-x^2\right)<0\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}x>0\\x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases}\\\begin{cases}x<0\\x\in\varnothing\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow x>0$$

Hàm số $y=f\left(1-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau . Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây ?



A. $(0;1)$. **B.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\sqrt{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn A.

+) Xét hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$.

$y'=f'\left(x^2-2\right).2x$.

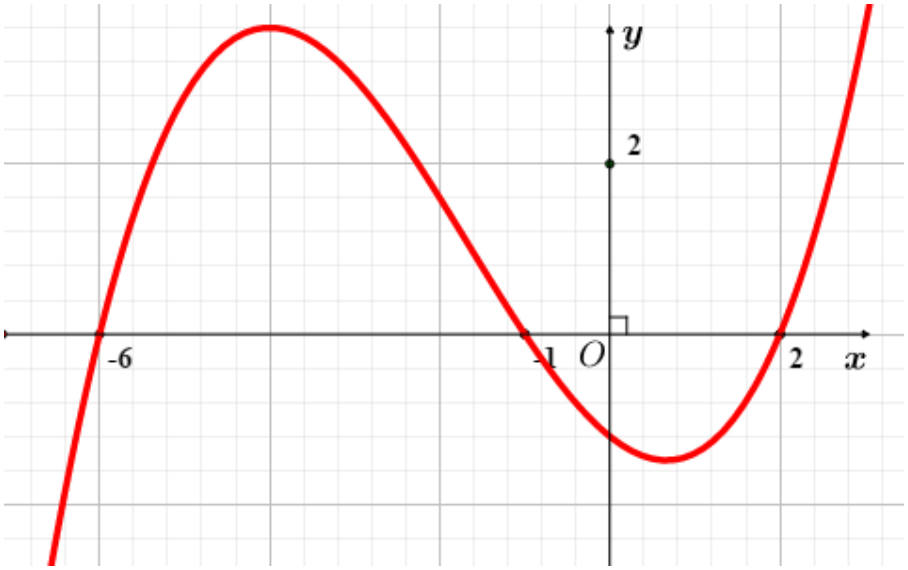
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x^2-2\right)=0\\2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2=-2\\x^2-2=-1\\x^2-2=1\\x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$.

+) Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ BBT, chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng



A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$ **D.** $(-2;-1)$

Lời giải

Chọn A.

$y=f\left(3-x^2\right)$.

$y'=-2x.f'\left(3-x^2\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow -2x.f'\left(3-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\\x=\pm 2\\x=\pm 1\end{array}\right.$$

Phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm đơn

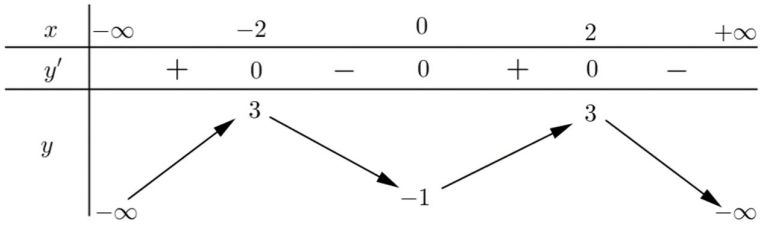
Khi $x=\frac{1}{2}$ có $y'\left(\frac{1}{2}\right)=-2.\frac{1}{2}.f\left(\frac{11}{4}\right)<0$ .Nên $y'<0,\forall x\in(0;1)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	0 $+$	0	$-$	0	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$
y									

Dựa vào BBT có hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trong khoảng $(-1;0)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$.

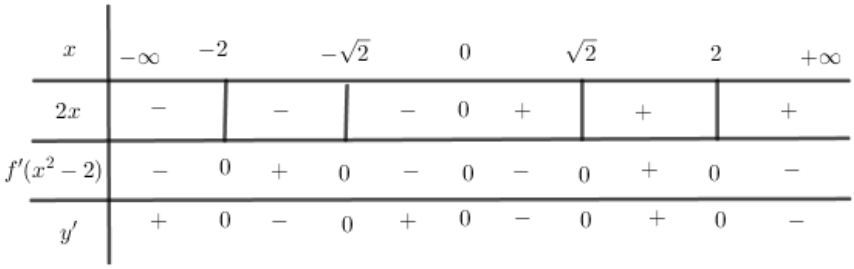
Với $y=f\left(x^2-2\right)$ ta có $y'=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

Vậy $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\f\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=0\\x^2-2=\pm2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\x>2\end{array}\right.$.

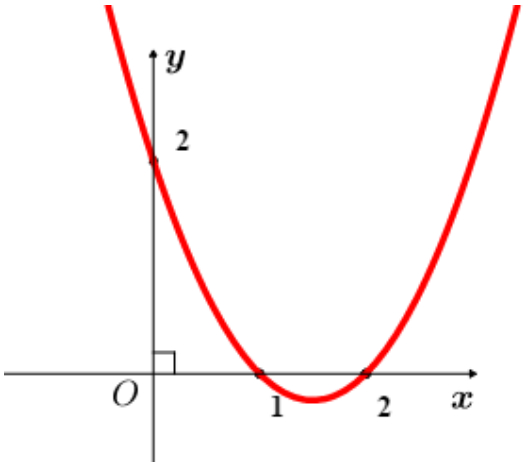
Vậy $f'\left(x^2-2\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x^2-2<0\\x^2-2>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x^2<2\\x^2>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\sqrt{2}\\-\sqrt{2}<x<0\\x>2\\x<-2\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu



Dựa vào bảng xét dấu y' ta được $y'<0\ \ \forall x\in\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$ nên hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

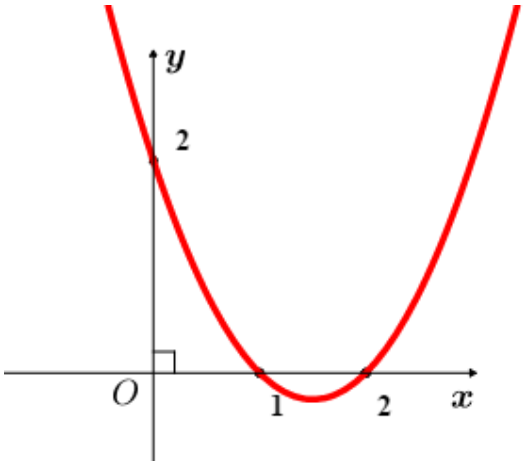
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường parabol như hình bên. Hàm số $y=f\left(1-x^2\right)+6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(\sqrt{2};+\infty)$. **C.** $(-\sqrt{2};0)$. **D.** $(1;\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D.



Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 3 điểm $(2;0)$, $(1;0)$, $(0;2)$ nên hàm số $y=f'(x)$ có dạng $y=f'(x)=x^2-3x+2$.

Xét hàm số $y'=\left[f\left(1-x^2\right)+6x^2\right]'=-2xf'\left(1-x^2\right)+12x$

$=-2x\left[\left(1-x^2\right)^2-3\left(1-x^2\right)+2\right]+12x=-2x\left(x^4+x^2-6\right)=-2x\left(x^2-2\right)\left(x^2+3\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(1-x^2\right)+6x^2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗		↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-\sqrt{2})$ và $(0;\sqrt{2})$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=(x^2)'x^4(x^2-9)(x^2-4)^2=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x^2-x-2)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\x^2-x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

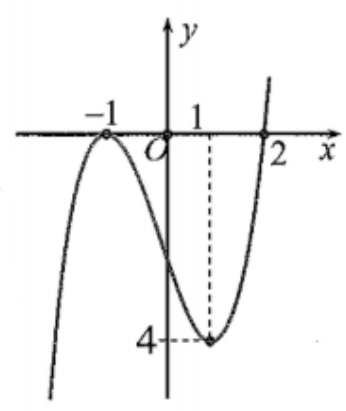
$$g'(x)=0\Leftrightarrow(1-2x)f'(x-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\f'(x-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x-x^2=-1\\x-x^2=1\\x-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$).



Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào sau đây là **SAI**?

A. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

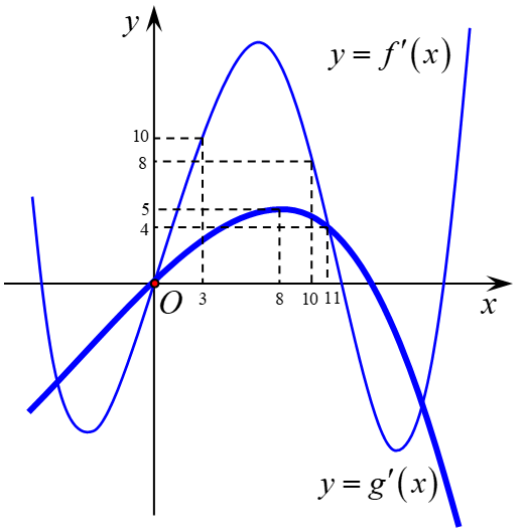
Lời giải

$$g'(x)=\left[f\left(x^2-2\right)\right]'=2x.f'\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2	$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+

Câu 9. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.



Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\frac{31}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$ **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$ **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$.

Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow h'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow f'(x+4)\ge 2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\le x+4\le 8 \\ 3\le 2x-\frac{3}{2}\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 4 \\ 3+\frac{3}{2}\le 2x\le 8+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 4 \\ \frac{9}{2}\le 2x\le \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 4 \\ \frac{9}{4}\le x\le \frac{19}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4}\le x\le \frac{19}{4}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên khoảng nào?

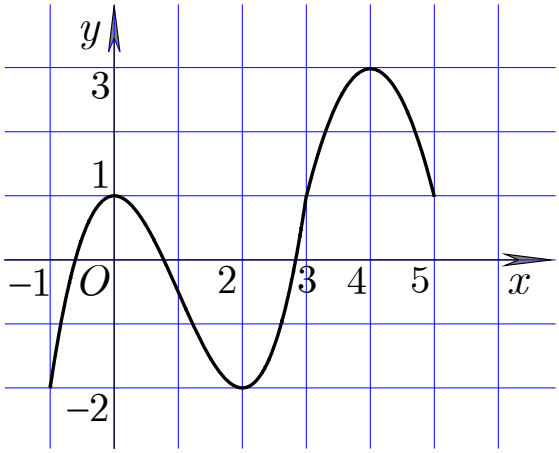
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

$y=f(1-x)+x+2 \Rightarrow y'=-f'(1-x)+1$

$$y'<0\Leftrightarrow -f'(1-x)+1<0\Leftrightarrow f'(1-x)>1\Leftrightarrow x(3-x)g(1-x)>0\Leftrightarrow x(3-x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\x>3\end{array}\right.$$

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C.

$(0;2)$

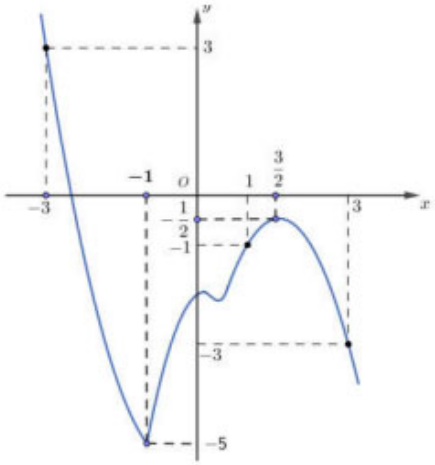
Ta có $y=-2f(2-x)+x^2\Rightarrow y'=-(2-x)'2f'(2-x)+2x$

$y'=2f'(2-x)+2x\Rightarrow y'<0\Leftrightarrow f'(2-x)+x<0\Leftrightarrow f'(2-x)<(2-x)-2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\left[\begin{array}{l}1<x_1<2\\x_2=3\end{array}\right.$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x)<x-2$ trên miền $2<x<3$ nên $f'(2-x)<(2-x)-2$ trên miền $2<2-x<3\Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ

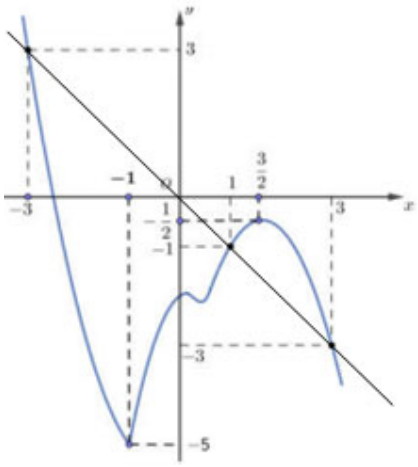


Hàm số $y=f\left(1-x\right)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(-3;1\right)$. **D.** $\left(1;3\right)$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $y'=-f\left(1-x\right)+x-1$.

Hàm số nghịch biến khi $y'=-f\left(1-x\right)+x-1<0 \Leftrightarrow -f\left(1-x\right)-\left(1-x\right)<0$

$\Leftrightarrow f\left(1-x\right)>-\left(1-x\right)$ (dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ và đồ thị hàm số $y=-x$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x<-3\\1<1-x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\-2<x<0\end{array}\right.$.

Câu 13. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=2f\left(1-x\right)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)$. **C.** $\left(-2;0\right)$. **D.** $\left(-3;-2\right)$.

Lời giải

Chọn C.

$y'=-2f'\left(1-x\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

Có $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$, $\forall x\in\left(-2;0\right)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow -2f'(1-x)<0,\ \forall x\in(-2;0)$

$\Rightarrow -2f'(1-x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0,\ \forall x\in(-2;0)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\text{(nghiem kep)}\\x=2\end{array}\right.$

Ta có $g'(x)=\dfrac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)=0$

Dựa và $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}-5x^2+20=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=1\\\dfrac{5x}{x^2+4}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\\x=1\text{(nghiem kep)}\\x=4\text{(nghiem kep)}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3x+2019$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

$y=3f(x+2)-2x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+2019$

$\Rightarrow y'=3f'(x+2)-6x^2-3x+3=3\left[f'(x+2)-\left(2x^2+x-1\right)\right]$.

Đặt $t=x+2\Rightarrow x=t-2$. Ta có:

$$f'(x+2)-\left(2x^2+x-1\right)=f'(t)-\left(2t^2-7t+5\right)$$

t	$-\infty$		1		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2t^2-7t+5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm $f'(t)$ và hàm $g(t)=2t^2-7t+5$ ta thấy

□ Nếu $t<1\Leftrightarrow x+2<1\Leftrightarrow x<-1$ thì $f'(t)<\left(2t^2-7t+5\right),\forall t<1\Leftrightarrow y'<0,\forall x<-1$.

Loại B.

□Nếu $t\in(3;4)\Leftrightarrow x\in(1;2)$ thì $f'(t)<\left(2t^2-7t+5\right),\forall t\in(3;4)\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in(1;2)$.

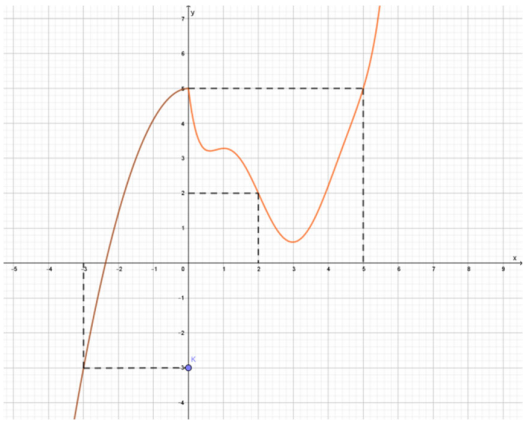
Loại A, D.

□Nếu $t\in\left(1;\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ thì $f'(t)>\left(2t^2-7t+5\right),\forall t\in\left(1;\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Vậy đáp án đúng là **đáp án C.**

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:

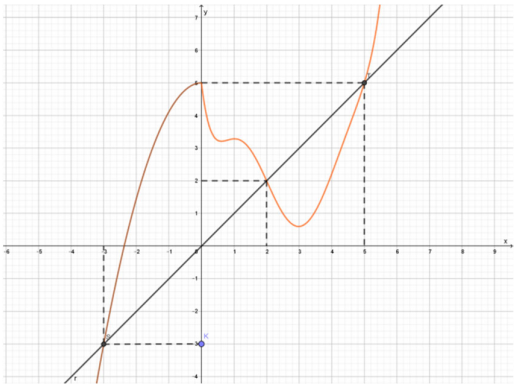


Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;\frac{-1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn A.



$g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$

$g(x)=f(-2x+1)+(-2x^2+2x+4)$

$g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

$g'(x)=-2\left[f'(-2x+1)+2x-1\right]$

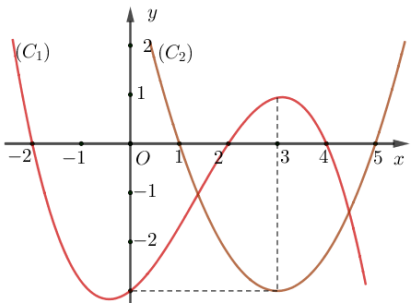
Để hàm số đồng biến thì $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1$

Dựa vào đồ thị ta có $2<-2x+1<5$

$\Rightarrow -2<x<\frac{-1}{2}$

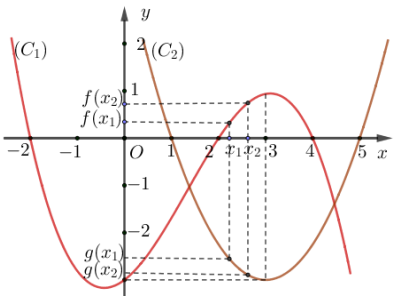
Câu 17. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(0;1)$.



Lời giải

Chọn C



Ta xét khoảng $(2;3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;3), x_1 < x_2$ ta có:

$$\begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 > g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < -g(x_1) < -g(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1).[-g(x_1)] < f(x_2).[-g(x_2)] \Rightarrow f(x_1).g(x_1) > f(x_2).g(x_2)$$

$$\Rightarrow y(x_1) > y(x_2)$$

Hay hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10,20]$ để hàm số $f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Ta các bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

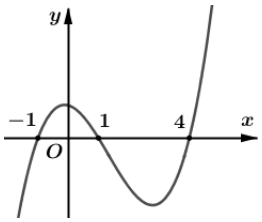
Ta có $\left[f(x^2+3x-m)\right]' = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Để hàm số $f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0,2)$ cần $f'(x^2+3x-m) > 0; \forall x \in (0,2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \le -3 \\ x^2+3x-m \ge 1 \end{array}\right.; \forall x \in (0,2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \max\limits_{[0,2]} (x^2+3x+3) \\ m \le \min\limits_{[0,2]} (x^2+3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 13 \\ m \le -1 \end{array}\right.$$

Vậy có 18 giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;20]$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(4;7)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x>4\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<4\end{array}\right.$.

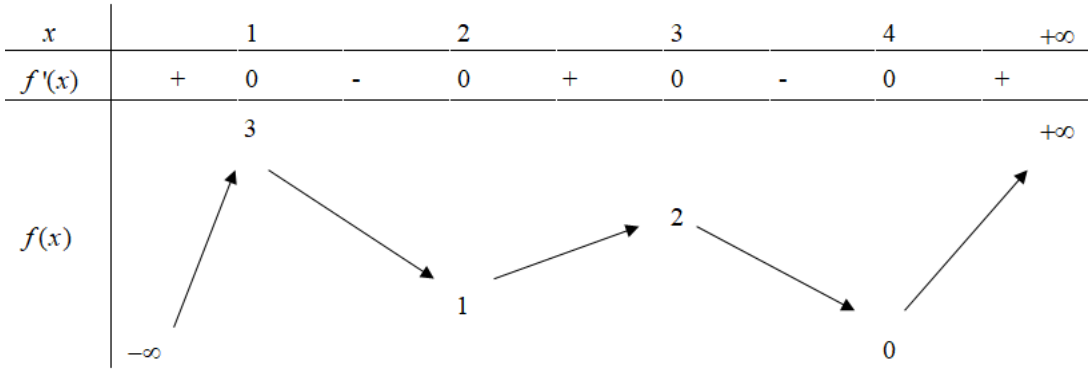
● Với $x>3$ khi đó $g(x)=f(x-3)\longrightarrow g'(x)=f'(x-3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x-3<1\\x-3>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x>7\end{array}\right.$

$\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3;4)$, $(7;+\infty)$.

● Với $x<3$ khi đó $g(x)=f(3-x)\longrightarrow g'(x)=-f'(3-x)>0\Leftrightarrow f'(3-x)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x<-1\\1<3-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\ (\text{loại})\\-1<x<2\end{array}\right.\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=(f(x))^3-3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3.(f(x))^2.f'(x)-6.f(x).f'(x)$

$=3f(x).f'(x).[f(x)-2]$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1)\\ f(x)=2 \quad (2)\\ f'(x)=0 \quad (3)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x\in\{x_1,4\,|\,x_1<1\}$

$(2)\Leftrightarrow x\in\{x_2,x_3,3,x_4\,|\,x_1<x_2<1<x_3<2;4<x_4\}$.

$(3)\Leftrightarrow x\in\{1,2,3,4\}$

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
f (x)		-	0	+		+		+		+		+		+	0	+		+	
f (x) - 2		-		-	0	+		+	0	-		-	0	-		-	0	+	
f '(x)		+		+		+	0	-		-	0	+	0	-	0	+		+	
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;\ 3)$.

Cách 2. Ta có $y'=3.f^2(x).f'(x)-6.f(x).f'(x)=3.f(x).f'(x).(f(x)-2)$

Xét dấu y' trên từng khoảng đáp án.

Chọn $a\in(1;2)$ và a rất gần 2 suy ra $y'(a)>0$. Loại đáp án A

$y'\left(\frac{7}{2}\right)>0$. Loại đáp án B

$y'(0)>0$. Loại đáp C

Cách 3. Ta có $y'=3.f(x).f'(x).(f(x)-2)$.

Vì cần xét dấu y' quan sát xét dấu $f(x)$ với 0 và 2. Nhìn bảng biến thiên bài toán xuất hiện giá trị $f(x)$ ứng với 1, 2, 0 tương ứng chúng ta nhìn vào khoảng $(2;3)$.

Ta có $f'_{(2;3)}(x)>0, 1<f_{(2;3)}(x)<2\Rightarrow y'<0,\forall x\in(2;3)$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $y=g(x)=f\left(x^2+2x\right)$; $g'(x)=\left[f(x^2+2x)\right]'=(2x+2).f'(x^2+2x)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(2x+2).f'(x^2+2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\f'(x^2+2x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-2\\x^2+2x=1\\x^2+2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=-1\pm\sqrt{2}\\x=-3\end{array}\right.$$

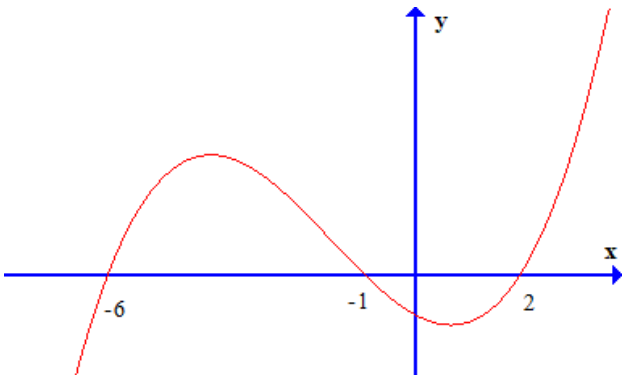
(Trong đó: $x=-1-\sqrt{2};x=-1+\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của PT: $x^2+2x=1$)

+ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=-2x.f'(3-x^2)$.

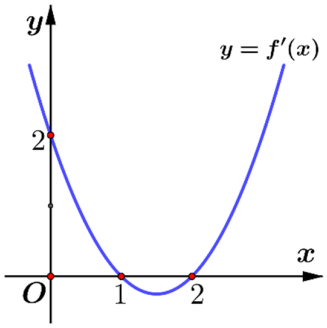
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(3-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3		-2		-1		0		1		2		3	$-\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án **C**.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

• Từ đồ thị ta thấy: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

• Ta có: $g'(x)=\left[f\left(x-x^2\right)\right]'=\left(x-x^2\right)'.f'\left(x-x^2\right)=(1-2x).f'\left(x-x^2\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=1\\ x-x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

Vậy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn D

+ Nhìn vào bảng biến thiên ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$; $f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<3$.

+ Ta có: $y=f(3-x) \Rightarrow y'=\left[f(3-x)\right]'=-f'(3-x)$.

$$\left[f(3-x)\right]'=0 \Leftrightarrow f'(3-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-x=-1\\ 3-x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=0\end{array}\right.$$

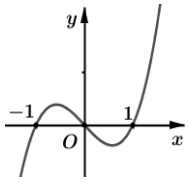
$$\left[f(3-x)\right]'>0 \Leftrightarrow -f'(3-x)>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0 \Leftrightarrow -1<3-x<3 \Leftrightarrow 0<x<4.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$\left[f(3-x)\right]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(3-x)$	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$CĐ$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $y=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

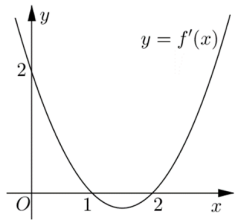
Ta có $g'(x)=3x^2f'(x^3)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'(x^3)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)}\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^3=0\\x^3=-1\\x^3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(1+2x-x^2)$ đồng biến trên khoảng dưới đây?



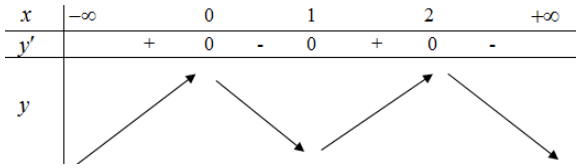
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

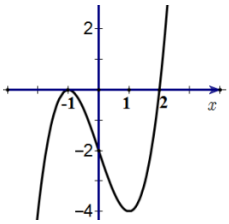
Ta có: $y'=(2-2x)f'(1+2x-x^2)$. Nhận xét: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\1+2x-x^2=1\\1+2x-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



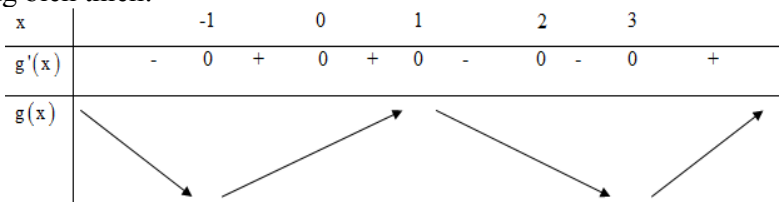
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

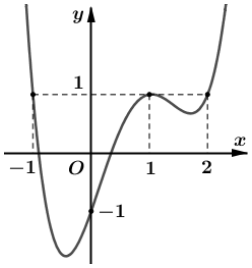
Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x-1)$. Nhận xét: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-1=-1\\x^2-2x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=2;x=3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x)=f(x)-x$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **B.** $g(-1)<g(1)<g(2)$.

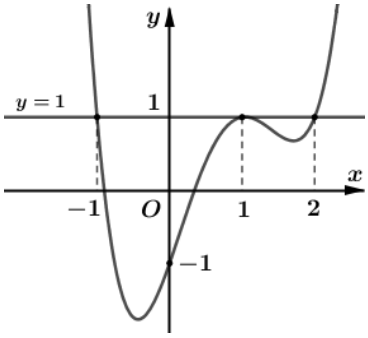
C. $g(-1)>g(1)>g(2)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-1\longrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d:y=1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên $\longrightarrow g(2)<g(-1)<g(1)$. Chọn C

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y=1$ nên $g'(x)=f'(x)-1$ mang dấu $+$.

Câu 9. **(Đề HSG_ Tỉnh Bắc Giang 18-19)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2x$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-2x=0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2-2)$.

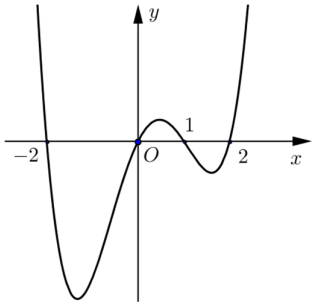
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$, biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên



Hàm số $y=f(2-x)+2019$ đồng biến trên các khoảng

A. $(-2;0)$ và $(1;2)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;4)$. **C.** $(0;1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$ và $(2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

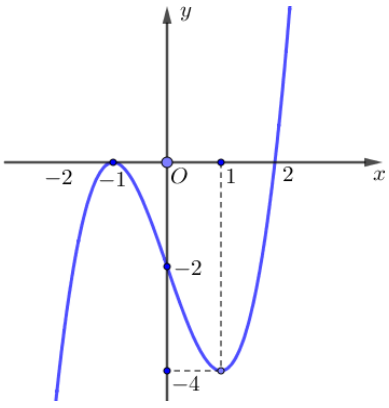
Ta có: $y'=-f'(2-x)$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow f'(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=-2\\2-x=0\\2-x=1\\2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\\x=1\\x=0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $y'=-f'(2-x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$y'=-f'(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;1),(2;4)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-2)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$$

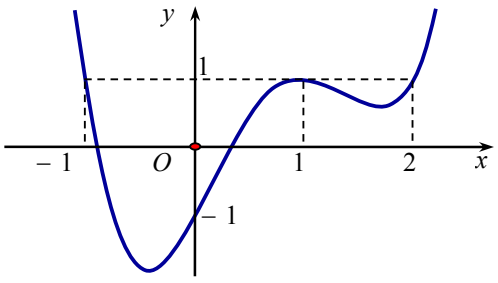
$$f'(x^2-2)>0\Leftrightarrow x^2-2>2\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$f'(x^2-2)$	$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		
$g(x)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$		

Từ bảng biến thiên, ta thấy câu **D** là sai.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2\ ;\ 3)$. **B.** $(0\ ;\ 1)$. **C.** $(-1\ ;\ 0)$. **D.** $(1\ ;\ 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)-1\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1\le -1 \\ x-1\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1\,;0)$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x-1}{2}=-1 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-1}{2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=7 \end{array}\right.$$

$$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2}<-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{x-1}{2}<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ 2<x<7 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu cho các biểu thức

x	$-\infty$	-4	-1	0	1	2	7	$+\infty$
$f'\left(\frac{x-1}{2}\right)$	$+$	0 $-$	0 $-$	$-$	$-$	0	$+$ 0	$-$
$-\left(x^2-3x+2\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$ 0	$-$	$-$
$g'(x)$		$-$	$-$	$-$				$-$

Từ bảng xét dấu đáp án B sai, vì $x\in(0;1)\subset(0;2)$ thì $g'(x)<0$. Hàm số nghịch biến.

Cách 2: Thử trực tiếp

Ta có $g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$

Đáp án A: chọn $x=-\frac{1}{2}\in(-1;0)$ thì $g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{15}{4}<0$

Đáp án B: chọn $x=\frac{1}{2}\in(0;2)$ thì $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}<0$, sai

Tương tự cho các đáp án còn lại.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$ 0	$+$ 0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(-x+2\right)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề bài: $y'=\left[3f\left(-x+2\right)+x^3+3x^2-9x\right]'=-3f'\left(-x+2\right)+3x^2+6x-9$.

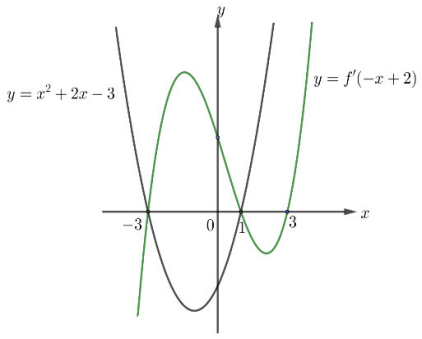
Để hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y'<0\Leftrightarrow -3f'\left(-x+2\right)+3x^2+6x-9<0$

$\Leftrightarrow f'\left(-x+2\right)>x^2+2x-3$

Từ BXD $f'(x)$ ta có BXD của $f'\left(-x+2\right)$ như sau:

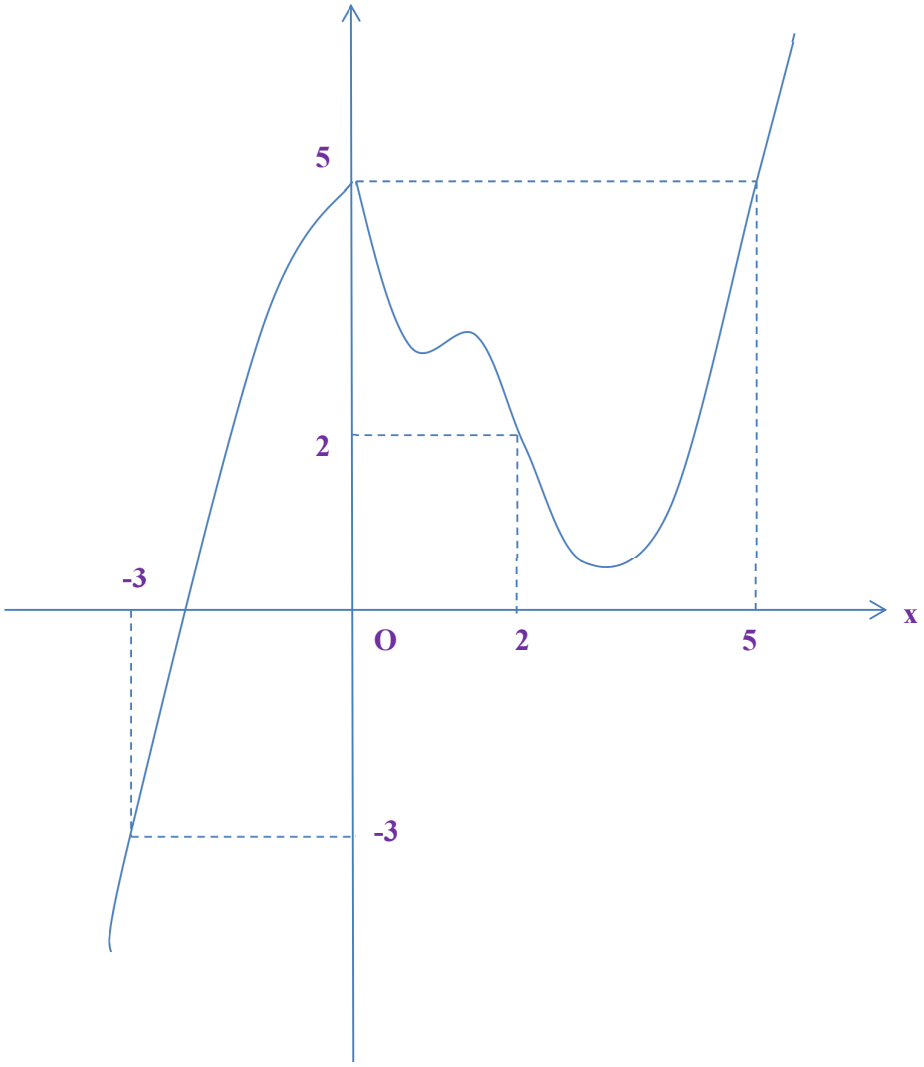
x	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
$f'(-x+2)$	$-$ 0	$+$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$	

Từ BXD trên, ta có hình dạng đồ thị của hàm số $y' = f'(-x+2)$ và $y = x^2 + 2x - 3$ được vẽ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên $(-3;1)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

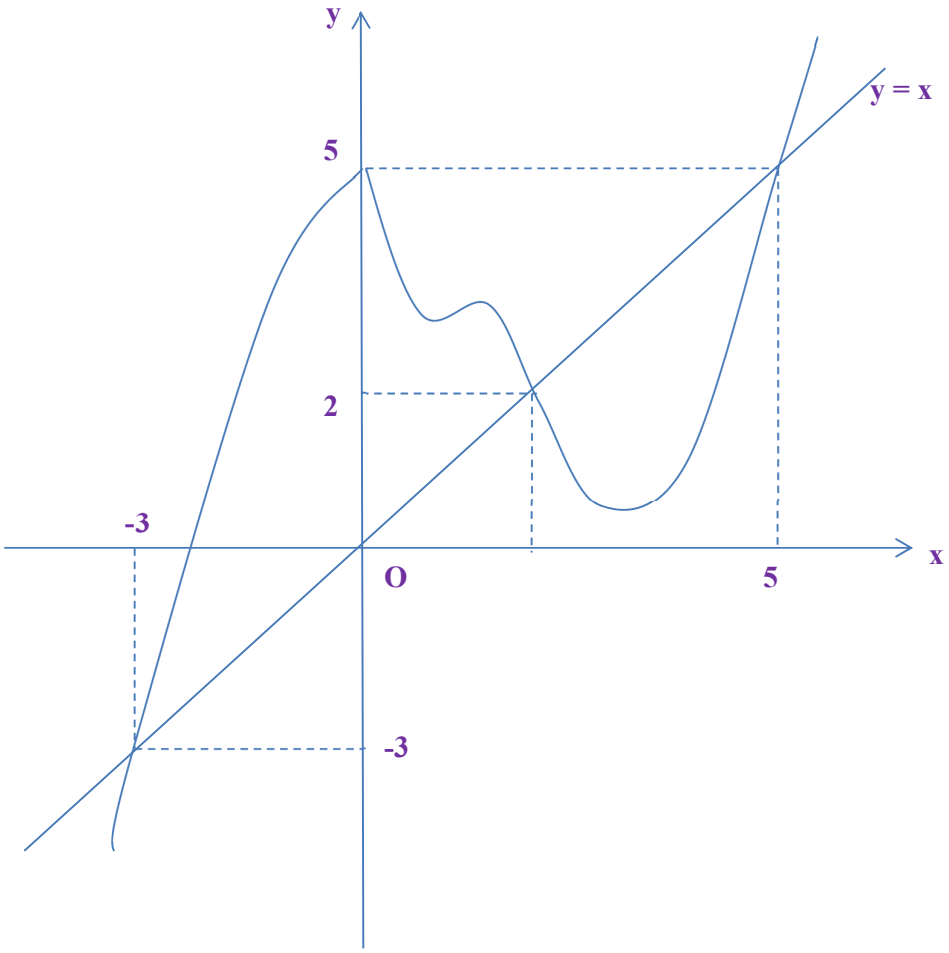
Lời giải

Chọn A

Ta thấy $g'(x)=-2.f'(-2x+1)-4x+2=-2.\left[f'(-2x+1)-(-2x+1)\right]$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)-(-2x+1)<0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<(-2x+1)$.

Xét bất phương trình $f'(t)<t \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ nằm phía dưới đường thẳng $y=t$



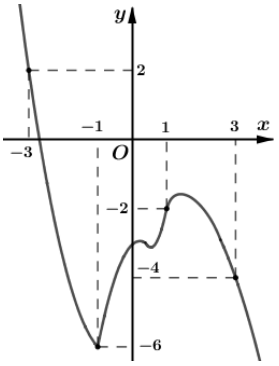
Theo đồ thị ta thấy bất phương trình $f'(t)<t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 2<t<5 \end{array}\right.$

Như vậy bất phương trình $f'(-2x+1)<(-2x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1<-3 \\ 2<-2x+1<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ -2<x<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu đáp án, ta chọn đáp án A.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi

hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



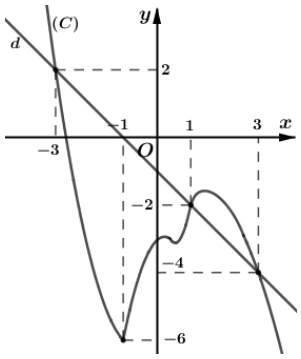
A. $(-3;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2(x+1)\longrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x-1$.

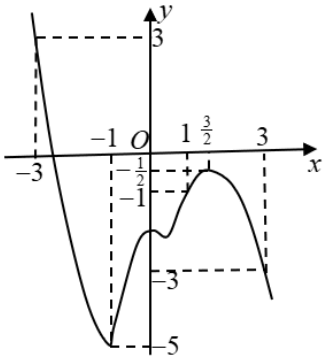
Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=-x-1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\1<x<3\end{array}\right.$ (vì phần đồ thị của $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-x-1$). Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án B thỏa mãn. Chọn B

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ

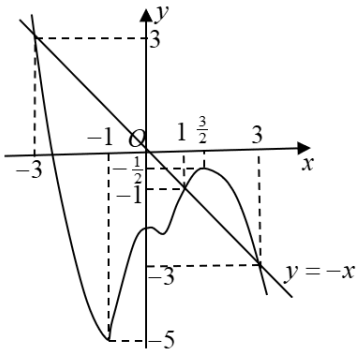


Hàm số $y=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(-3;1\right)$. **D.** $\left(1;3\right)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g'\left(x\right)=-f'\left(1-x\right)+x-1$.

Để $g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(1-x\right)>x-1$. Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $f'\left(t\right)>-t$.

Kẻ đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=-1;\ x=3$.

Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình $f'\left(t\right)>-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-3\\1<t<3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-x<-3\\1<1-x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\-2<x<0\end{array}\right.$.

Đối chiếu đáp án ta **chọn B**

Cách khác: - Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$, có $f'\left(x\right)+x>0\Leftrightarrow f'\left(x\right)>-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<x<1\\2<x\end{array}\right.$

- Xét hàm số $y=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$, có $y'=-f'\left(1-x\right)+x-1=-f'\left(1-x\right)-\left(1-x\right)$ $=-\left[f'\left(1-x\right)+\left(1-x\right)\right]$.

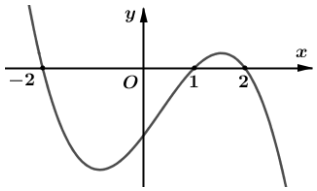
Như vậy $f'\left(1-x\right)+\left(1-x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<1-x<1\\2<1-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<4\\x<-1\end{array}\right.$

Hay $-\left[f'(1-x)+(1-x)\right]<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<1-x<1\\ 2<1-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<4\\ x<-1\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;4)$.

Suy ra hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ cũng sẽ nghịch biến trên khoảng $(1;3)\subset(0;4)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\pm 2$; $f(2)=f(-2)=0$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

$\Rightarrow f(x)<0; \forall x \neq \pm 2.$

Xét $y=\left(f(x)\right)^2 \Rightarrow y'=2f(x).f'(x)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f'(x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\ x=1; x=\pm 2\end{array}\right.$

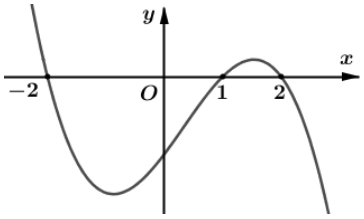
Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	
$y=\left[\left(f(x)\right)^2\right]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hoặc Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$. Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x).f(x)<0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}f'(x)>0\\ f(x)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ 1<x<2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(1;2)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

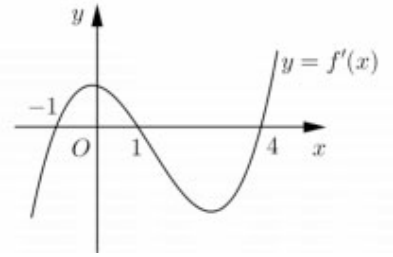
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-2f'(3-x).f(3-x)$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}f'(3-x)<0\\ f(3-x)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2<3-x<1\\ 3-x>2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<5\\ x<1\end{cases}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;5)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=2^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\left[2^{f(3-2x)}\right]'=2^{f(3-2x)}.\ln 2.f'(3-2x).(-2)$

Hàm số $y=2^{f(3-2x)}$ đồng biến nếu $f'(3-2x).(-2)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x<-1 \\ 1<3-2x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ -\frac{1}{2}<x<1 \end{array}\right.$$

BÀI TOÁN 24: XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 01:

Xác định cực trị của hàm hợp $y=f(u)$ *dựa vào BBT, đồ thị* $y=f'(x)$

♥ Xét hàm số: $g(x)=f(u(x))$

Bước 1: $g'(x)=[f(u(x))]'=.....x.....=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}.....=0\\.....=0\end{array}\right.$

Bước 2: Giải phương trình $.....=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}.....=.....\\.....=.....\end{array}\right.$

Xét dấu $f'(u;(x))$ dựa vào dấu của $f'(x)$ hoặc dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$

Vai trò của $u(x)$ giống như x vì dấu của $f'(u)$ cũng là dấu của $f'(x)$

Bước 3: Lập bảng xét dấu của $g'(x)$

Bước 4: Kết luận cực trị của hàm số $g(x)=f(u(x))$

Bài toán 02:

Biết BẢNG XÉT DẤU(BBT) hàm số $y=f'(x)$ *xét cực trị của hàm số* $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ *trong bài toán không chứa tham số.*

Bước 1: Tính $y'=g'(x)=k.....[.....]^{k-1}.....$

+ Nếu: *k* chẵn: $y'=g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}.....=0\\.....=0\\.....=0\end{array}\right.$.

+ Nếu *k* lẻ: $y'=g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}.....=0\\.....=0\end{array}\right.$

Bước 2: Giải tìm nghiệm: $u'(x)=0$ ta giải bình thường.

$.....=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

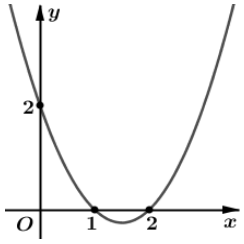
$.....=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các các nghiệm x_0 của phương trình $f(x)=0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

B. VÍ DỤ MINH HỌA

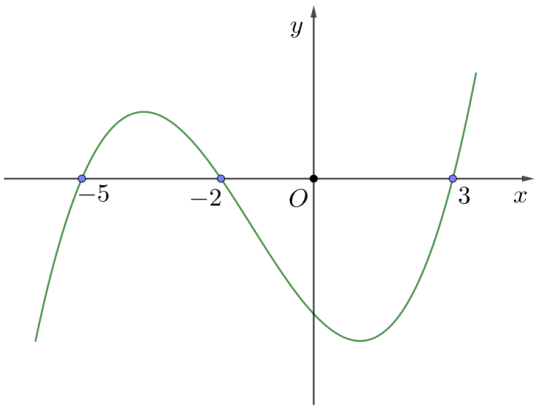
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x)=ax^2+bx+c$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=g(x)=f(x^2-5)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f(x^2-4x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

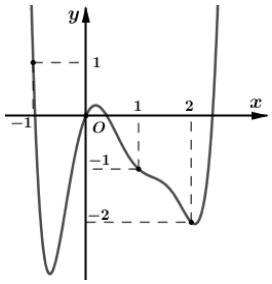
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f(x^2-2x-4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)$ là

A. 2 . **B.** 1. **C.** 3 . **D.** 4 .

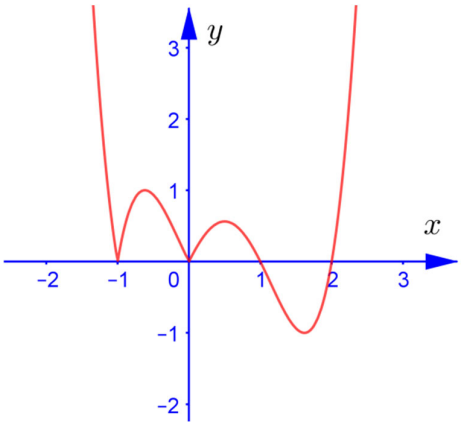
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x)=f(x^2-2x-m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

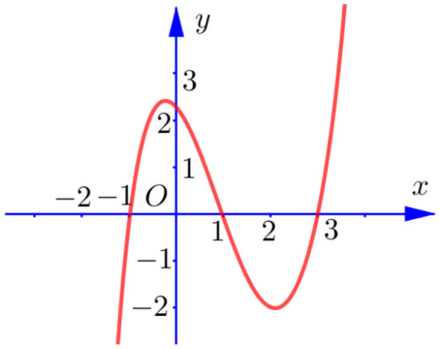
Câu 7. **(Tô Quốc An- sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^{2021}$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1)=0$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^4$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6 .

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2\left(f(x)\right)^3+4\left(f(x)\right)^2+1$ là

A. 4 . **B.** 9 . **C.** 5 . **D.** 3

Câu 10. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

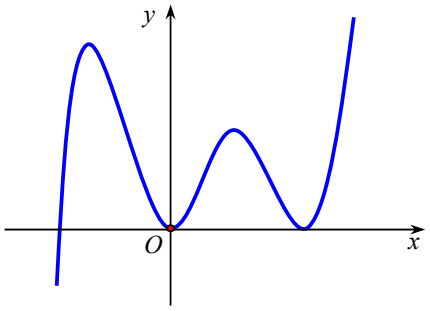
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2021}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 2

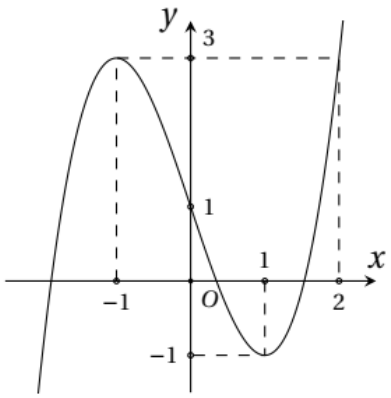
C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x-2021)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

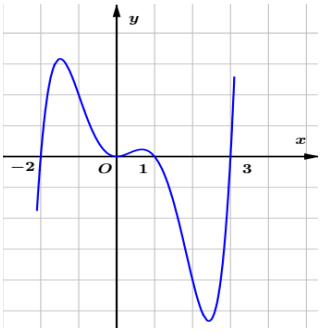
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x+1)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

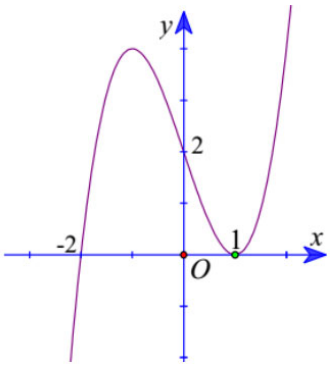
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x^2-3)$.



A. 2 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 5 .

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)=f\left(6-x^2\right)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

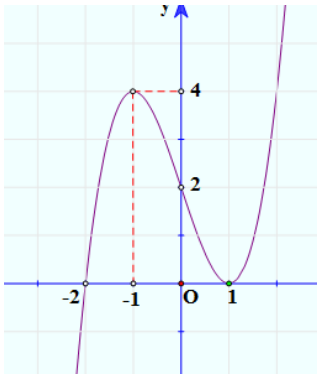
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 7. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R, có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x-2021)+2019x-2020$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

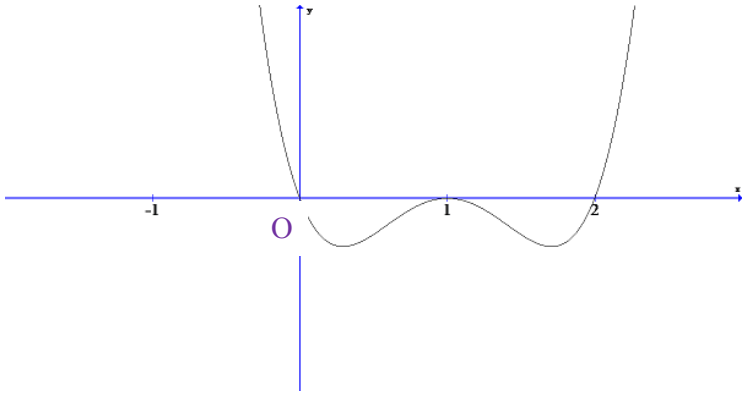
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

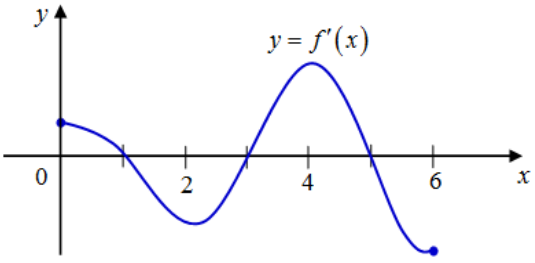
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm y = $f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

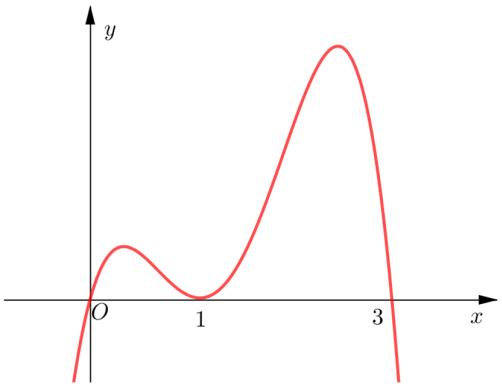
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

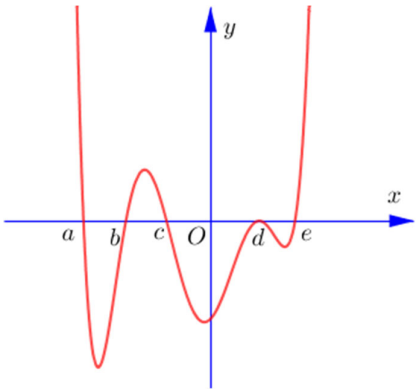
A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

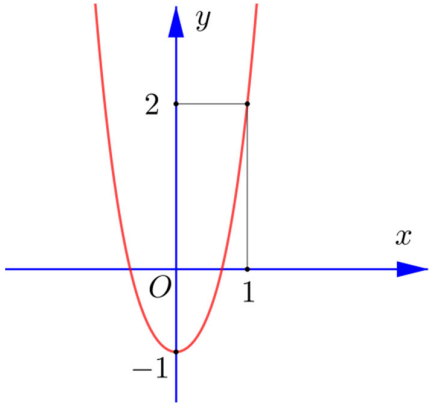
Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x;m\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x;m\right)$ như hình vẽ:



Biết $f\left(a\right)>f\left(c\right)>0;\ f\left(b\right)<0<f\left(e\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x+m\right)\right]^2$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

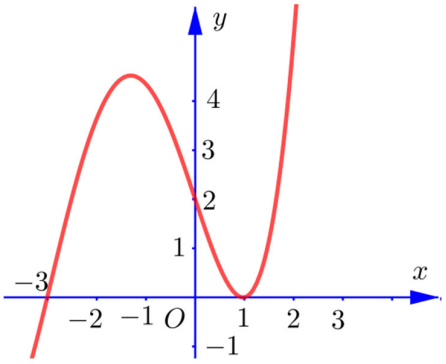
Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^5+nx^3+px$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x+2\right)\right]^5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^3$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+ 0	-
f(x)	$-\infty$ ↘	2 ↗	5 ↘	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^2(2x^2+x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

LỜI BÌNH: Yêu cầu đề bài có thể thay đổi **số cực đại** hoặc **số cực tiểu** của hàm số, khi đó ta cần phải xét dấu g'(x). Cụ thể:

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0 +	0	− 0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-2 ↗	-1 ↘	-2 ↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f^3\left(x^3+3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17. Cho hàm $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)f(2)<0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'(x)	+	0 -	0	+

Hỏi hàm số $g(x)=f^2(x-2019)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

LỜI BÌNH: Chúng ta có thể tổng quát: Cho hàm $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a_1)f(a_2)<0$, $f(a_2)f(a_3)<0$ …., $f(a_{n-1})f(a_n)<0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	a_1	a_2	.....	a_n	$+\infty$
$f'(x)$	+ 0	- 0	+	0		

($f'(x)$ đổi dấu đan xen khi qua $a_1,\ldots a_n$)

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^{2k}(x\pm c)$ là $2n+1$

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x		- 5		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Biết rằng $f(-5)<0$ và $f(5)>0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 19. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3	$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	||	–
$f(x)$	$+\infty$	↘	- 1	↗	1	↘ $-\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-x^2\right)\right]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 20. Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu y' như sau.

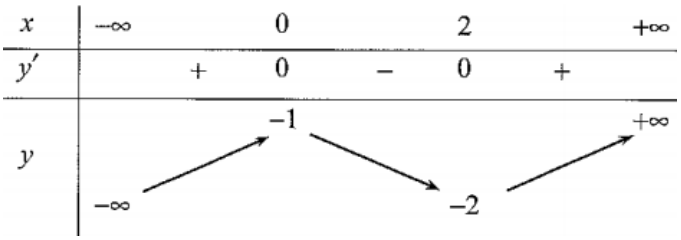
x	$-\infty$		1		3	$+\infty$
y'		+	0	–	0	+

Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị nhiều nhất và ít nhất của hàm số $y=g(x)=\left[f\left(2x+1\right)\right]^2$, biết $f(3)<0$. Khi đó $2m-3n$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 2.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

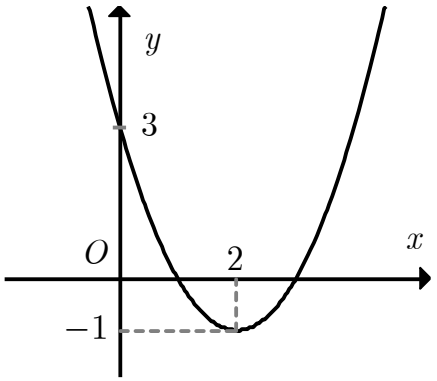
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đặt hàm số $y=g(x)=f(2-x)-2$. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại:

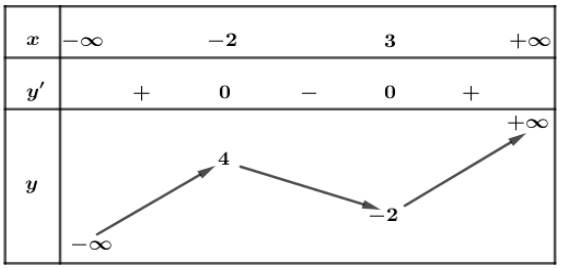
A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $g=f(x^2)$ có mấy điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

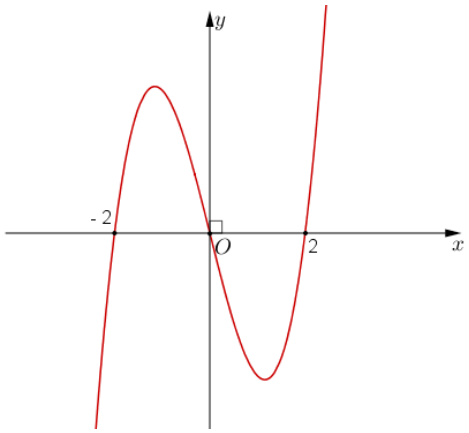
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ là

A. 3. **B.**4. **C.** 5. **D.**6.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

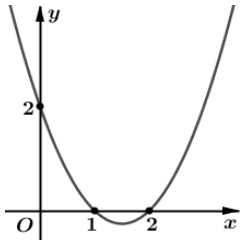
Đặt $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

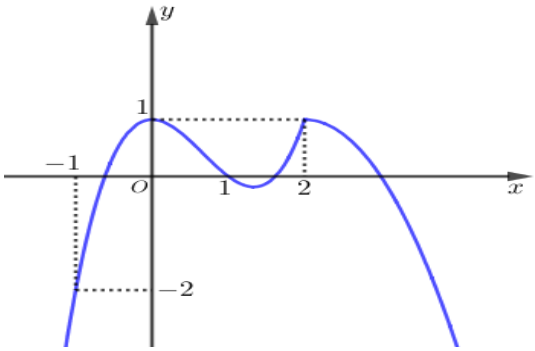
Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $|=i'(\{)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=15f\left(-x^4+2x^2\right)-10x^6+30x^2-20$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

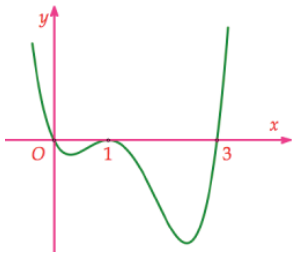
Câu 9. Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

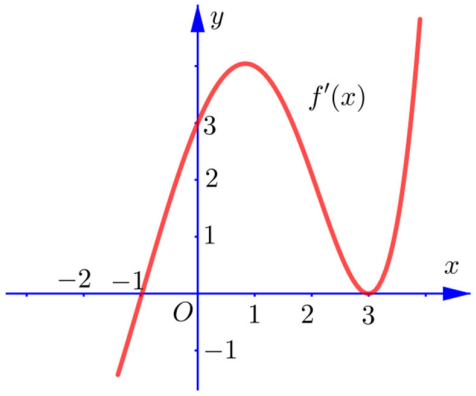
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y=(f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.
C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

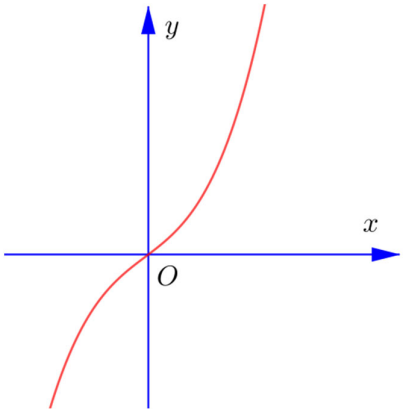
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1)=0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:

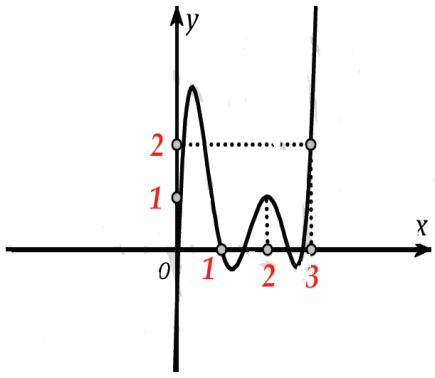


Biết $f\left(x^2-4\right)=m$ để hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]^2$ có 5 điểm cực trị. Khẳng định nào đúng?

A. $m\neq\left\{f(-2);f(0);f(2)\right\}$. **B.** $m\neq\left\{f(-4);f(-2);f(2)\right\}$.

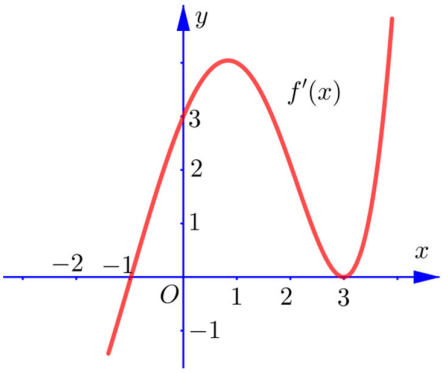
C. $m\neq\left\{f(-4);f(0)\right\}$. **D.** $m\neq\left\{f(0);f(2)\right\}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

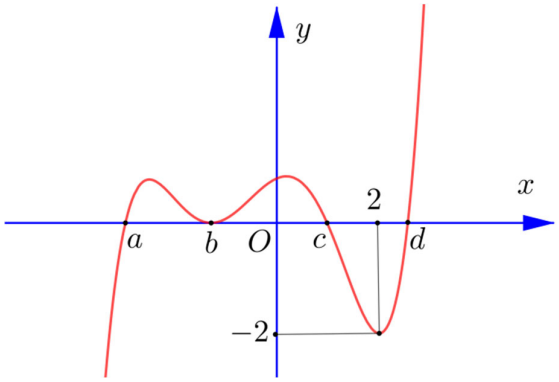
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(3)<0,$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x-1)\right]^{2020}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

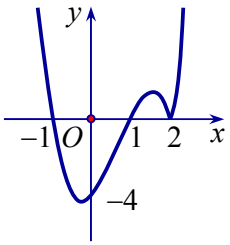
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^{2021}$ là

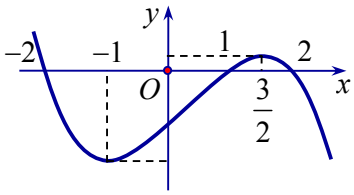
A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2021}(x^3-1)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

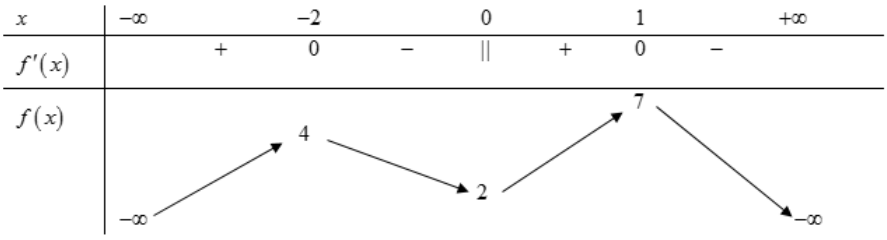
Câu 17. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left(f\left(2x-1\right)\right)^{2022}$ là

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 5 .

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên



Hỏi hàm số $y=\left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 7 .

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau

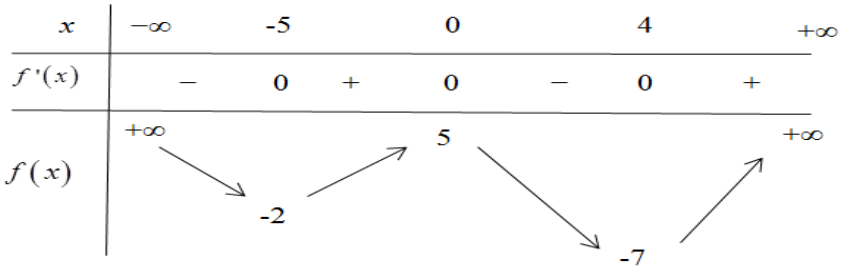
x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ 0 $+$	0	$-$

Biết rằng hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hỏi hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 3 .

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:



Hàm số $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

BÀI TOÁN 24: XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 01:

Xác định cực trị của hàm hợp $y=f(u)$ *dựa vào BBT, đồ thị* $y=f'(x)$

♥ Xét hàm số: $g(x)=f(u(x))$

Bước 1: $g'(x)=[f(u(x))]'=u'(x).f'(u(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\f'(u(x))=0\end{array}\right.$

Bước 2: Giải phương trình $f'(u(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u(x)=x_1\\u(x)=x_2\end{array}\right.$

Xét dấu $f'(u;(x))$ dựa vào dấu của $f'(x)$ hoặc dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$

Vai trò của $u(x)$ giống như x vì dấu của $f'(u)$ cũng là dấu của $f'(x)$

Bước 3: Lập bảng xét dấu của $g'(x)$

Bước 4: Kết luận cực trị của hàm số $g(x)=f(u(x))$

Bài toán 02:

Biết BẢNG XÉT DẤU(BBT) hàm số $y=f'(x)$ *xét cực trị của hàm số* $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ *trong bài toán không chứa tham số.*

Bước 1: Tính $y'=g'(x)=k.u'(x).\left[f(u(x))\right]^{k-1}.f'(u(x))$

+ Nếu: *k* chẵn: $y'=g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\f(u(x))=0\\f'(u(x))=0\end{array}\right.$.

+ Nếu *k* lẻ: $y'=g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\f'(u(x))=0\end{array}\right.$

Bước 2: Giải tìm nghiệm: $u'(x)=0$ ta giải bình thường.

$f'(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

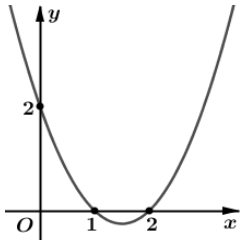
$f(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các các nghiệm x_0 của phương trình $f(x)=0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x)=ax^2+bx+c$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

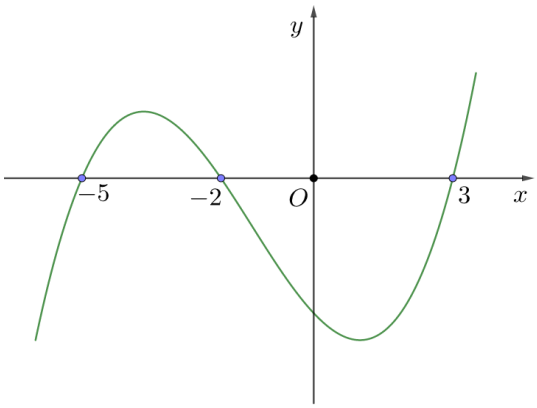
Xét $g(x)=f\left(x-x^2\right) \Rightarrow g'(x)=(1-2x)f'\left(x-x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=1\ (*)\\ x-x^2=2\ (**)\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (vì phương trình (*)(**) vô nghiệm).

Ta có: $g'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$

Ta có $y'=g'(x)=2x.f'\left(x^2-5\right)$

$$+\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-5=-5\\x^2-5=-2\\x^2-5=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\\x^2=3\\x^2=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad(nghiem\ boi\ 3)\\x=\pm\sqrt{3}\ (nghiem\ don)\\x=\pm2\sqrt{2}\ (nghiem\ don)\end{array}\right..$$

$$+\ g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}x^2-5>3\\-5<x^2-5<-2\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\left[\begin{array}{l}-2<x^2-5<3\\x^2-5<-5\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}x>2\sqrt{2}\\x<-2\sqrt{2}\\-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\-2\sqrt{2}<x<-2\sqrt{2}\\\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\sqrt{2}\\0<x<\sqrt{3}\\-2\sqrt{2}<x<-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$ như sau:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f\left(x^2-5\right)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

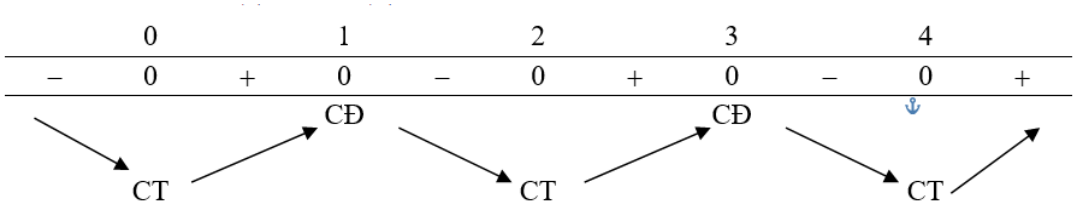
Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\left[f\left(x^2-4x\right)\right]'=(2x-4).f'\left(x^2-4x\right)$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ f'\left(x^2-4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x^2-4x=-3\\ x^2-4x=0\\ \left(x^2-4x-1\right)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\\ x=3\\ x=0\\ x=4\\ x=2\pm\sqrt{5}\ (\text{Ko TM})\end{array}\right.$.

Xét $x=-1\Rightarrow y'(1)=-2.f'(5)<0$. Từ đây ta có bảng xét dấu cho y' như sau:



Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại.

Chú ý: *Ở bài toán trên, do $f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x=1$ nên $f'(x)=0$ sẽ có nghiệm bội chẵn dạng $(x-1)^2=0$ do đó $f'\left(x^2-4x\right)=0$ sẽ có các nghiệm trong đó có 1 nghiệm dạng bội chẵn, mà f' qua nó không đan dấu, nên $x=2\pm\sqrt{5}$ không là cực trị của hàm số.*

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-4)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)f'(x^2-2x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'(x^2-2x-4)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-4=-2\\ x^2-2x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{5}\\ x=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2)=2.(-3).f'(4)$. Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó: $f'(4)>0$.

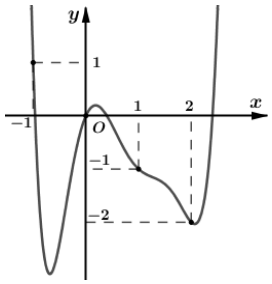
Suy ra: $g'(-2)<0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng biên thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

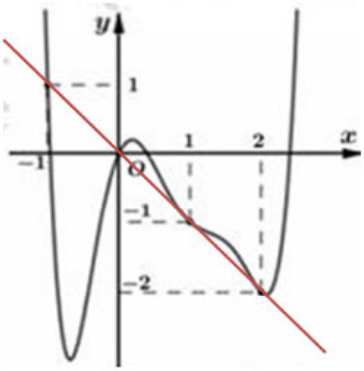
Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x+2)+2x+4$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x+2)=-(x+2)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'(t)=-t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng d : $y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

ta có $f'(t)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘			↗			↗	

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x-m\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m=-1 \\ x^2-2x-m=1 \\ x^2-2x-m=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m+1=0 \quad (1) \\ x^2-2x-m-1=0 \quad (2) \\ x^2-2x-m-4=0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ

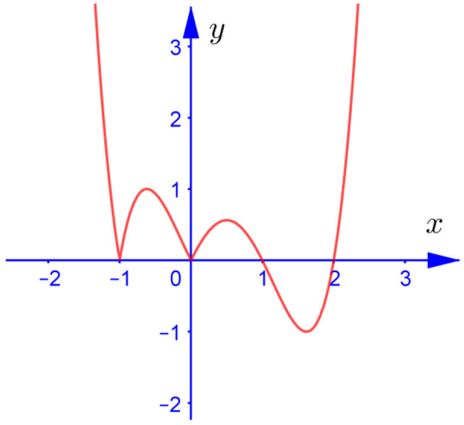
$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)}>0 \\ \Delta'_{(3)}>0 \\ VT_{(1)}\neq 0 \\ VT_{(3)}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m+5>0 \\ -m\neq 0 \\ -m-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 10 giá trị của tham số m.

Câu 7. **(Tô Quốc An- sáng tác)** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = \left[f(x+1)^3 + m \right]^{2021}$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

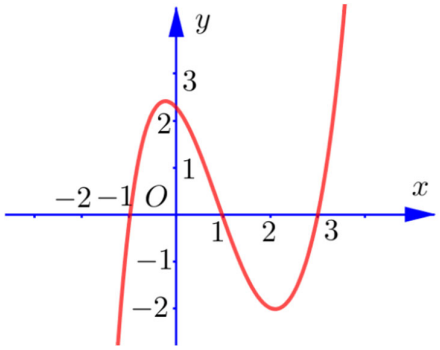
Ta có $g(x) = \left[f(x+1)^3 + m \right]^{2021} \Rightarrow g'(x) = 3.2021.\left[f(x+1)^3 + m \right]^{2020} .f(x+1)^2 .f'(x+1)$

Ta có $\left[f(x+1)^3 + m \right]^{2020} .f(x+1)^2$ nên dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu $f'(x+1)$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên có 2 điểm cực trị, số điểm cực trị hàm $f(x+1)$ bằng số điểm cực trị hàm $f(x)$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi m.

Vậy với mọi m hàm số $g(x)$ đều có 2 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1) = 0$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left[f(x^2 - 2x) \right]^4$ là

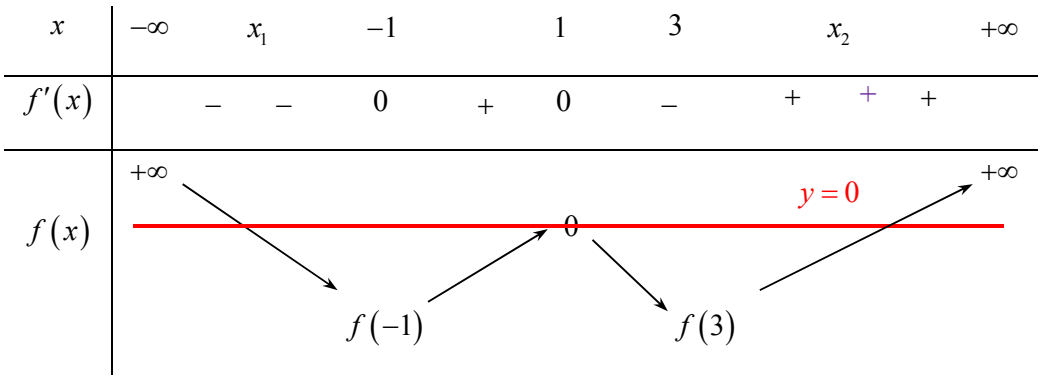
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^4 \Rightarrow g'(x)=8(x-1)f'\left(x^2-2x\right)\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^3$.

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$



Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0\ (1) \\ f\left(x^2-2x\right)=0\ (2) \end{array}\right.$

Xét (1). Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

$f'\left(x^2-2x\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (\textit{nghiệm kép}) \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \\ x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Xét (2): Do $f(1)=0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt nghiệm phân biệt $x_1 \in (-\infty;-1)$ và $x_2 \in (3;+\infty)$

Với nghiệm $x_1 \in (-\infty;-1)$ thì $f\left(x^2-2x\right)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_1$ vô nghiệm do $x^2-2x \geq -1$

Với nghiệm $x_2 \in (3;+\infty)$ thì $f\left(x^2-2x\right)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=2\left(f(x)\right)^3+4\left(f(x)\right)^2+1$ là

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm: $g'(x)=6f'(x)\left(f(x)\right)^2+8f'(x)f(x)$.

$g'(x)=2.f'(x)f(x)\left[3.f(x)+4\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=\dfrac{-4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=x_1<-1\\x=x_2>1\\x=x_3\left(-1>x_3>x_1\right)\\x=x_4\left(-1<x_4<0\right)\\x=x_5\left(0<x_5<1\right)\\x=x_6\left(1<x_6<x_2\right)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_3		-1		x_4		0		x_5		1		x_6		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 10. **(thầy Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2021}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2021.\frac{3}{(x+2)^2}.\left(f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2020}.f'\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ Vì $g'(x)$ phụ thuộc dấu của hàm bậc lẻ

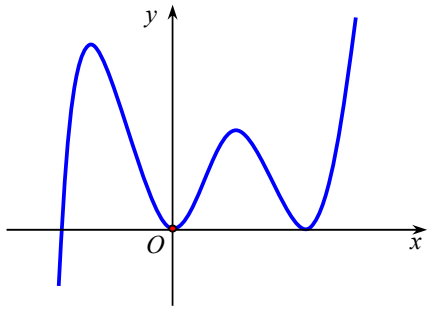
$g'(x)=0 \Rightarrow f'\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0 \quad (2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f'\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+2}=0\\ \frac{x-1}{x+2}=2\end{array}\right.$

Vậy $g'(x)=0$ có 2 nghiệm đơn nên hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x-2021)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

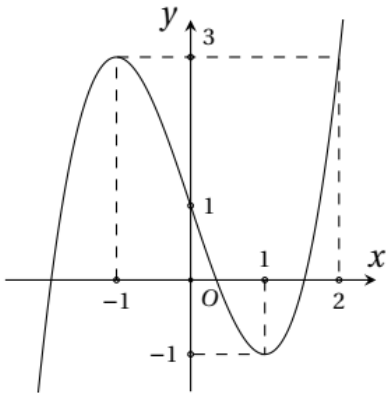
Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương song song trục hoành

nên đồ thị hàm số $f'(x-2021)$ vẫn cắt trục hoành tại 3 điểm và đổi dấu 1 lần do đó hàm số $y=f(x-2021)$ có một cực trị. Ta chọn đáp án A.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x+1)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$ nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x=-1, x=1$.

Ta có $y'=(2x-2)f'(x^2-2x+1)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x+1=-1\\x^2-2x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Ta có

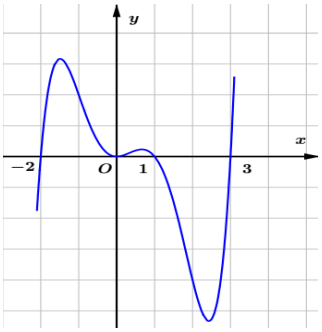
$$y'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2x-2>0\\f'(x^2-2x+1)>0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}2x-2<0\\f'(x^2-2x+1)<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>1\\\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1>1\\x^2-2x+1<-1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<1\\-1<x^2-2x+1<1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>1\\\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<1\\0<x<2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\0<x<1\end{array}\right.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2021$ có 3 cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right.$;

$f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$; $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\1<x<3\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=3\\x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

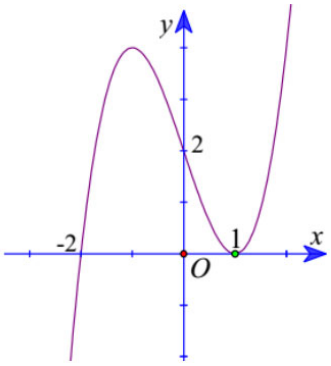
Ta có $f'(x^2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x^2<1\\x^2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-1<x<1\\x\neq0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x^2-3)$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

- Dựa vào đồ thị ta thấy: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2(nghiem\ don)\\x=1(nghiem\ kep)\end{array}\right.$.

- Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-3)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(nghiem\ don)\\x=\pm1(nghiem\ don)\\x=\pm2(nghiem\ kep)\end{array}\right.$$

(Đến đây có thể kết luận hàm số có 3 điểm cực trị. Nếu muốn tìm điểm cực đại, cực tiểu của hàm số thì ta cần lập bảng biến thiên)

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\f'(x^2-3)>0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\f'(x^2-3)<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\x^2-3>-2\\x^2-3\neq1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\x^2-3<-2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>1\\x\neq2\end{array}\right.\\-1<x<0\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0 -	0	+	0 -	0 +	0 +
$g(x)$	↘		↗		↘		↗

Suy ra hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)=f(6-x^2)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

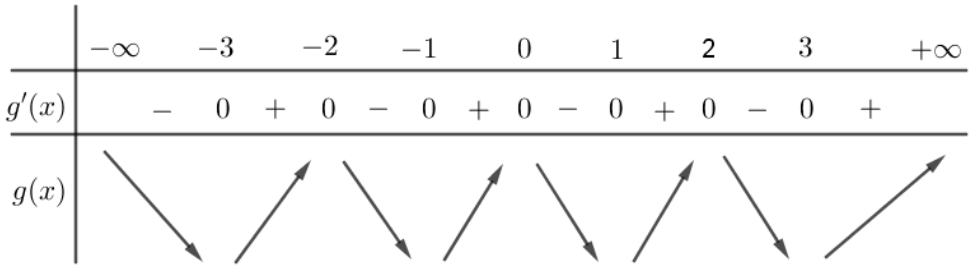
Chọn D

Ta có $g'(x)=-2x.f'(6-x^2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(6-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\6-x^2=-3\\6-x^2=2\\6-x^2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$$

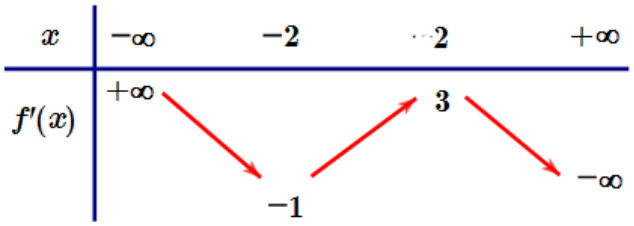
Ta có $g'(4)=-8.f'(-10)>0$ và bảng xét dấu $f'(x)$ không có nghiệm bội chẵn.

Bảng biến thiên $y=g(x)$.



Vậy số điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)=f\left(6-x^2\right)$ là 4.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

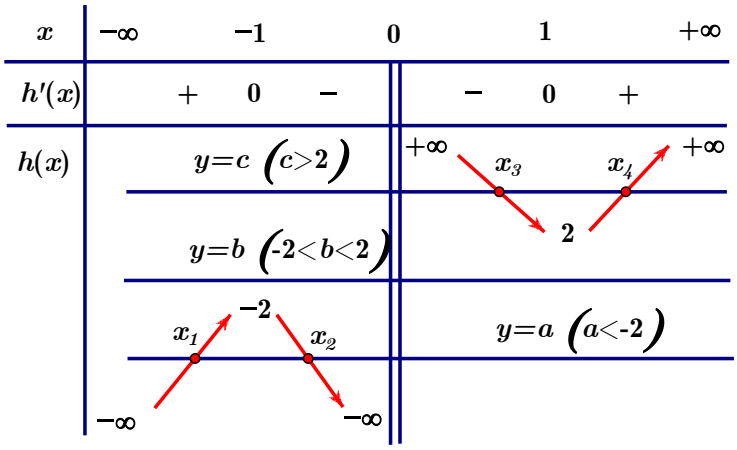
Chọn C

+ Đặt $g'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ \dfrac{x^2+1}{x}=a\ (a<-2)\\ \dfrac{x^2+1}{x}=b\ (-2<b<2)\\ \dfrac{x^2+1}{x}=c\ (c>2)\end{array}\right.$

+ Xét hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}, h'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}, h'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

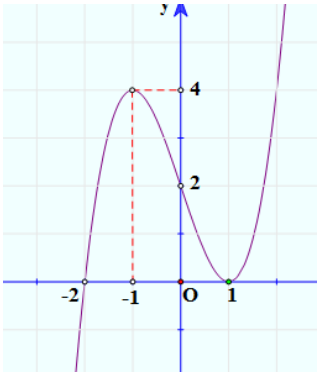


+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=c$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác ± 1, mà $a \neq c \Rightarrow f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x)=b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 cực trị.

Câu 7. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R, có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x-2021)+2019x-2020$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=g'(x)=f'(x-2021)+2019$

Tịnh tiến sang phải 2021 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 2019 đơn vị ta thấy đồ thị hàm số $y'=g'(x)=f'(x-2021)+2019$ cắt trục Ox tại 1 điểm.

Do đó hàm số có 1 cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$=-12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$=-12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0\\x^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1\end{cases}$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

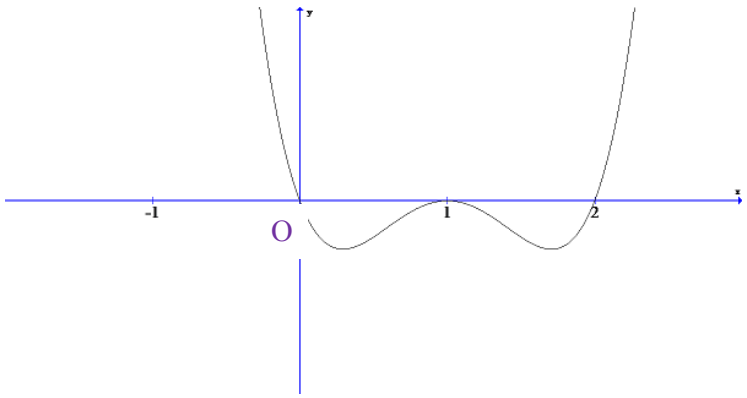
Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)$

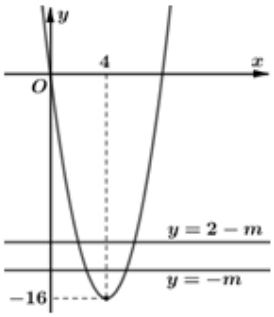
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x^2-8x+m=1\ (\text{nghiem boi 2})\\ x^2-8x+m=0\quad(1)\\ x^2-8x+m=2\quad(2)\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Cách 1: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\ 16-m+2>0\\ m\neq 16\\ m\neq 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

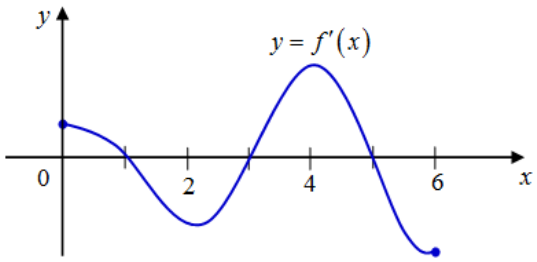
Cách 2: Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m,\ d_2: y=-m+2$ (hình vẽ).



Khi đó $(*) \Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới.

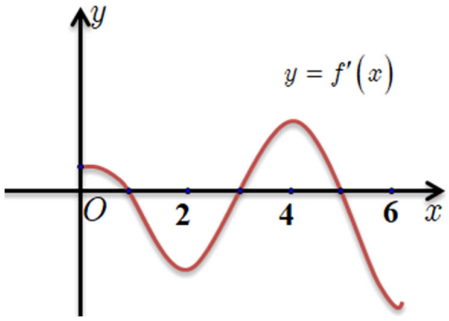


Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y = [f(x)]^2 \Rightarrow y' = 2f(x).f'(x)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1;3;5\}$.

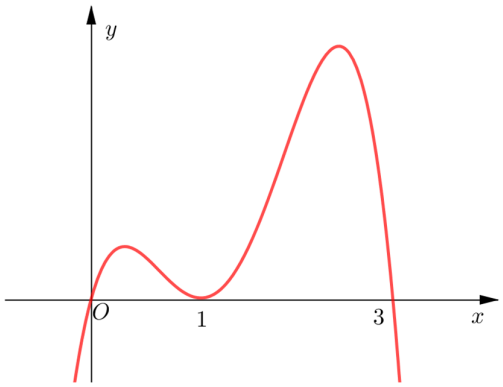
Dựa vào đồ thị hàm số của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ là

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm phân biệt với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 5 < x_4 < 6$.

Do đó, phương trình $y' = 0$ có tối đa 7 nghiệm phân biệt và đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=\left[\left(f\left(x\right)\right)^2\right]'=2f'\left(x\right),f\left(x\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\ \ (*)\\ f\left(x\right)=0\ \ (2*)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, suy ra

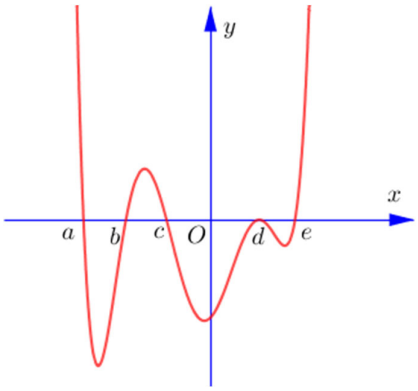
+) phương trình (*) có 3 nghiệm $x\in\left\{0;\ 1;\ 3\right\}$ trong đó có 1 nghiệm bội chẵn $x=1$.

+) phương trình (2*) có 3 nghiệm (vì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị).

Vậy $y'=0$ có tất cả 5 nghiệm (không tinh nghiệm bội chẵn $x=1$) qua nó y' đổi dấu.

Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x;m\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x;m\right)$ như hình vẽ:



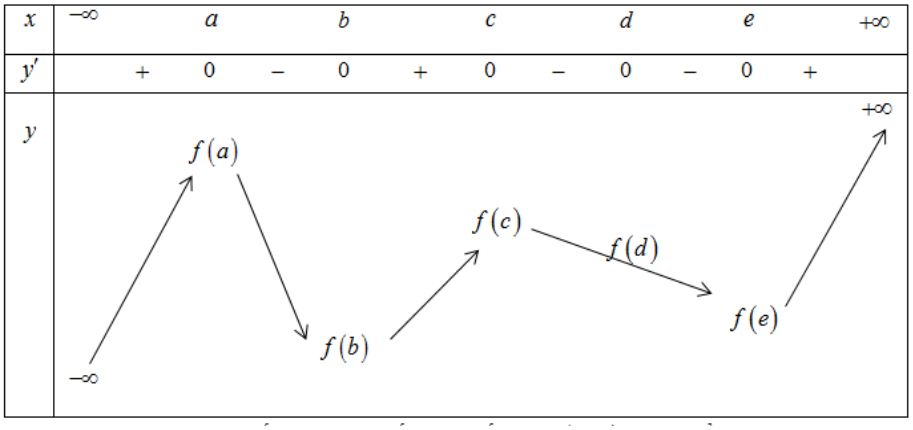
Biết $f\left(a\right)>f\left(c\right)>0;\ f\left(b\right)<0<f\left(e\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x+m\right)\right]^2$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x;m\right)$ ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f\left(x;m\right)$ có 4 điểm cực trị.

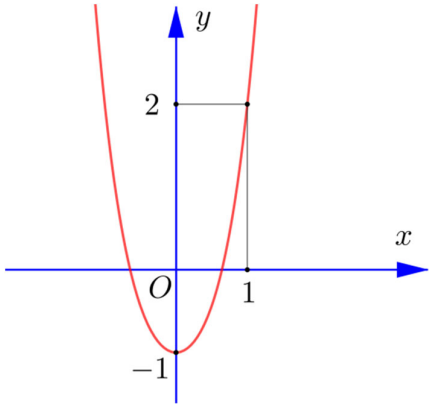
Khi $f\left(a\right)>f\left(c\right)>0;\ f\left(b\right)<0<f\left(e\right)$ thì đồ thị hàm số $y=f\left(x;m\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $f\left(x+m\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Ta có $g\left(x\right)=\left[f\left(x+m\right)\right]^2\Rightarrow g'\left(x\right)=2f'\left(x+m\right).f\left(x+m\right).$

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2=.f\left(x+m\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x+m\right)=0\rightarrow 3\ nghiệm\\ f\left(x+m\right)=0\rightarrow 4\ nghiệm\end{array}\right.$$

Các nghiệm không trùng nhau nên hàm số $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^5+nx^3+px$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x+2\right)\right]^5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g\left(x\right)=\left[f\left(x+2\right)\right]^5\Rightarrow g'\left(x\right)=5f'\left(x+2\right)\left[f\left(x+2\right)\right]^4.$

Do $\left[f\left(x+2\right)\right]^4\geq 0$ nên dấu $g'\left(x\right)$ chỉ phụ thuộc dấu của $5f'\left(x+2\right).$

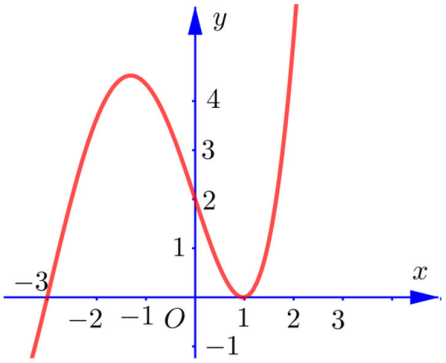
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên

$f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a>0$ $f'(x)=a(x+2-x_1)(x+2-x_2)$,

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi qua $x=x_1-2$, từ - sang + khi qua $x=x_2-2$.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^3$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^3 \Rightarrow g'(x)=-6f'(1-2x)\left[f(1-2x)\right]^2$.

Do $\left[f(1-2x)\right]^2\geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $-6f'(1-2x)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x+3)(x-1)^2$, $a>0$

$\Rightarrow f'(1-2x)=a(4-2x)(-2x)^2$

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x=2$ nên $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$.

Hàm số $g(x)$ không có điểm cực đại.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+ 0	-
f(x)	$-\infty$ ↘	2 ↗	5 ↘	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^2(2x^2+x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=2(2x^2+x)'.f'(2x^2+x).f(2x^2+x)=2(4x+1).f'(2x^2+x).f(2x^2+x)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+1=0 \\ f'(2x^2+x)=0 \\ f(2x^2+x)=0 \end{array}\right.$$

- $4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$
- Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2x^2+x=-2(VN) \\ 2x^2+x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$
- Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0>1$ (vì đồ thị $y=f(x)$ cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ lớp hơn 1). Khi đó
  $f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ (*) phương trình có hai nghiệm vì a,c trái dấu.

  Mặt khác, thay các nghiệm $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ vào (*) ta được $x_0 \le 1$ không thỏa mãn điều kiện của x_0 nên $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ không là nghiệm của (*).

  Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn. Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Yêu cầu đề bài có thể thay đổi **số cực đại** hoặc **số cực tiểu** của hàm số, khi đó ta cần phải xét dấu g'(x). Cụ thể:

Ta có 2 nghiệm của phương trình $f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ là

+ $x_1=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \to x_1'=\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}}>0;\forall x_0>1$

$\Rightarrow x_1>x_1(1)=\frac{1}{2}$

+ $x_1=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \to x_1'=-\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}}<0;\forall x_0>1$

$\Rightarrow x_1<x_1(1)=-1$

Mặt khác:

$$f'(2x^2+x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2x^2+x<-2(VN) \\ 2x^2+x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$f'(2x^2+x)>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2+x>-2 \\ 2x^2+x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	x_1	-1	-1/4	½	x_2	$+\infty$
$4x+1$	-	| -	| -	0 +	| +	| +	
$f'(2x^2+x)$	+	| +	0 -	| -	0 +	| +	
$f(2x^2+x)$	+	0 -	| -	| -	| -	0 +	
$g'(x)$	-	0 +	0 -	0 +	0 -	0 +	

Dựa vào bảng biến thiên ta được: **2 cực đại và 3 cực tiểu.**

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^3+3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x\right).f^2\left(x^3+3x\right)$.

Ta thấy $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f^2\left(x^3+3x\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'\left(x^3+3x\right)$

$$f'\left(x^3+3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=-1\\x^3+3x=0\\x^3+3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\approx -0,32\\x=0\\x=x_2\approx 0,32\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$

Do đó $f'\left(x^3+3x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x^3+3x<0\\x^3+3x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<x<0\\x>x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 17. Cho hàm $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)f(2)<0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $g(x)=f^2(x-2019)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=2f(x-2019)f'(x-2019)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x-2019)=0(1)\\f'(x-2019)=0(2)\end{array}\right.$

+) Vì $f(1)f(2)<0$ và từ BBT suy ra đồ thị $y=f(x)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1<1,1<x_2<2,x_3>2$. Mà đồ thị hàm số $f(x-2019)$ có được bằng cách tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 2019 đơn vị, nên nó sẽ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1<2020,2020<x_2<2021,x_3>2021$

$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2019=1\\x-2019=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2020\\x=2021\end{array}\right.$

Do vậy pt $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt +) KL hàm g(x) có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Chúng ta có thể tổng quát: Cho hàm $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a_1)f(a_2)<0$, $f(a_2)f(a_3)<0$ …., $f(a_{n-1})f(a_n)<0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		a_1		a_2	.....	a_n		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0		

($f'(x)$ đổi dấu đan xen khi qua $a_1,\ldots a_n$)

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^{2k}(x\pm c)$ là $2n+1$

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x		-5		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Biết rằng $f(-5)<0$ và $f(5)>0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2(2x-6).f'\left(x^2-6x\right).f\left(x^2-6x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-6=0\Leftrightarrow x=3\\ f'\left(x^2-6x\right)=0 \quad (1)\\ f\left(x^2-6x\right)=0 \quad (2)\end{array}\right.$

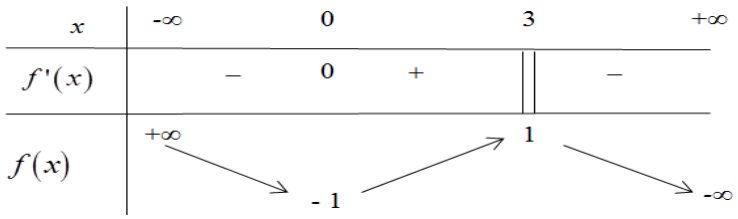
+) Từ (1) kết hợp với bảng dấu $f'(x)$ ta có $f'\left(x^2-6x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x=-5\Leftrightarrow x=5,x=1\\ x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0.x=6\end{array}\right.$

+) Từ (2) kết hợp bảng dấu $f'(x)$ và đk $f(-5)<0$ và $f(5)>0$ ta có

$f\left(x^2-6x\right)=0\Leftrightarrow x^2-6x=x_0\in(0;5)$ nên pt $x^2-6x-x_0=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

+) Các nghiệm đó là nghiệm bội lẻ (nghiệm đơn) => hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ có 7 cực trị

Câu 19. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $y=\left[f\left(4-x^2\right)\right]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

TH1. Ta có $y'=-6x.\left[f\left(4-x^2\right)\right]^2.f'\left(4-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \left[f\left(4-x^2\right)\right]^2=0 \quad (1)\\ f'\left(4-x^2\right)=0 \quad (2)\end{array}\right.$

+) Dựa vào bảng xét dấu y' ta có pt(1) có nghiệm nhưng đều là nghiệm bội chẵn nên tại đó không phải là điểm cực trị.

+) Từ (2) ta có $4-x^2=0\Rightarrow x=2,x=-2$

TH2. Điểm làm cho y' không xác định: $4-x^2=3\Rightarrow x=1,x=-1$

Vậy ta có 5 điểm cực trị

Câu 20. Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu y' như sau.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị nhiều nhất và ít nhất của hàm số $y=g(x)=\left[f(2x+1)\right]^2$, biết $f(3)<0$. Khi đó $2m-3n$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$g'(x)=4f(2x+1).f'(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2x+1)=0\\f'(2x+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2x+1)=0\\2x+1=1\\2x+1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2x+1)=0\\x=0\\x=1\end{array}\right..$$

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ phụ thuộc số nghiệm của phương trình $f(2x+1)=0$.

☑ Trường hợp 1: $f(1)>0$. Suy ra phương t $f(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=a<1\\2x+1=b,b\in(1,3)\\2x+1=c>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a-1}{2}<0\\x=\dfrac{b-1}{2}\in(0;1)\\x=\dfrac{c-1}{2}>1\end{array}\right.$.

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có năm điểm cực trị.

☑ Trường hợp 2: $f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=1\\2x+1=a>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{a-1}{2}>1\end{array}\right.$.

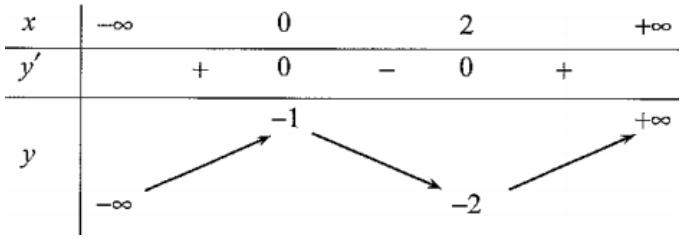
Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

☑ Trường hợp 3: $f(1)<0$. Suy ra phương trình $f(2x+1)=0\Leftrightarrow 2x+1=a>3\Leftrightarrow x=\dfrac{a-1}{2}>1$.

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực trị.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đặt hàm số $y=g(x)=f(2-x)-2$. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại:

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

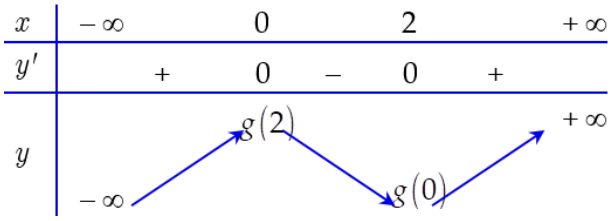
Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=-2f'(2-x)$

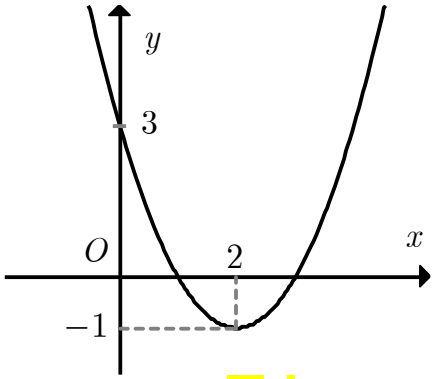
$$g'(x)=0\Leftrightarrow -f'(2-x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x=0\\2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

BBT:



Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $g=f(x^2)$ có mấy điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

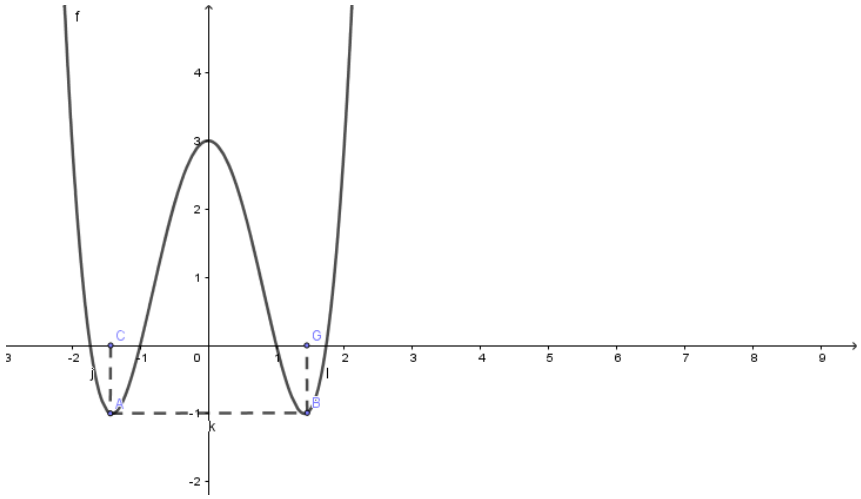
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g=f(x^2)$.

Đặt $t=x^2$. Khi đó với $t\ge 0$, hàm $g=f(t)$ có đồ thị là dạng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục Oy. Hàm số $g=f(x^2)$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Từ đó ta có đồ thị hàm $g(t)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ là

A. 3. **B.**4. **C.** 5. **D.**6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>3\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow -2<x<3.$

Ta có $g'(x)=\left(4x-\frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right).$

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}4x-\frac{5}{2}<0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0\end{array}\right.\end{array}\right.$.

- $\begin{cases} 4x-\dfrac{5}{2}>0 \\ f'\left(2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{8} \\ -2<2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}<3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{9}{4}.$

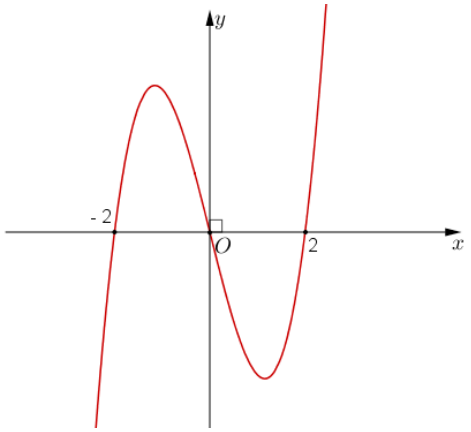
- $\begin{cases} 4x-\dfrac{5}{2}<0 \\ f'\left(2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{5}{8} \\ 2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}>3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\dfrac{5}{8} \\ 2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}<-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{5}{8} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{8}$		1		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng xét dấu của hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)$ ta được hàm số có 5 cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$. Ta có $y'=(2x-1)f'\left(x^2-x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(x^2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x^2-x=-2\\ x^2-x=0\\ x^2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=0\\ x=1\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right.$$

$$f'\left(x^2-x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x^2-x<0\\ x^2-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x>2\\ x<-1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ là:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Do $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>\dfrac{x+\left|x\right|}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0$

nên $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\sqrt{x^2+1}=1\\ x+\sqrt{x^2+1}=3\\ x+\sqrt{x^2+1}=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{4}{3}\\ x=\dfrac{12}{5}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên $y=g(x)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↘	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là 2.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

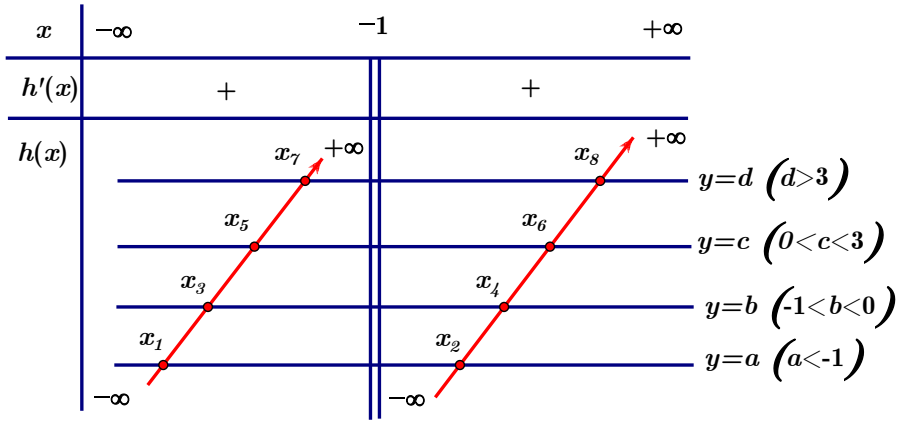
Chọn D

+ Đặt $g'(x)=\left(\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right)f'\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)$

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right)=0\,(VN)\\ f'\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2+2x}{x+1}=a\ (a<-1)\\ \frac{x^2+2x}{x+1}=b\ (-1<b<0)\\ \frac{x^2+2x}{x+1}=c\ (0<c<3)\\ \frac{x^2+2x}{x+1}=d\ (d>3)\end{array}\right.$

+ Xét hàm số $h(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}, h'(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}, h'(x)=0\ (VN)$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}$



+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=b, h(x)=c, h(x)=d$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt mà a,b,c,d đôi một khác nhau

$\Rightarrow f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$.

Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1,x_3,x_5,x_7,x_2,x_4,x_6,x_8$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$ có 8 cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y'=\left(f(x^2-2x)\right)'=(2x-2).f'(x^2-2x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & (2^*)\\ f'(x^2-2x)=0 & (*)\end{array}\right.$$

Do $-2;-1;0$ là các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ nên $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1\\ x=0\end{array}\right.$

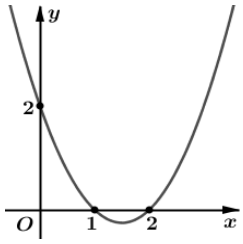
Do đó, (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^2=0\\ x=0\\ x=2\end{array}\right.$

Kết hợp với (2*) ta được: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^3=0\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vì $x\in\{1;0;2\}$ là các nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ, nên y' qua nó đổi dấu.

Suy ra hàm số có 3 cực trị $x\in\{1;0;2\}\Rightarrow$ chọn **B.**

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $|=i'(\{)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=15f\left(-x^4+2x^2\right)-10x^6+30x^2-20$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 5 .

Lời giải

Chọn B

$g(x)=15f\left(-x^4+2x^2\right)-10x^6+30x^2-20$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=60\left(-x^3+x\right)f'\left(-x^4+2x^2\right)-60x^5+60x=60\left(-x^3+x\right)\left[f'\left(-x^4+2x^2\right)+x^2+1\right]$

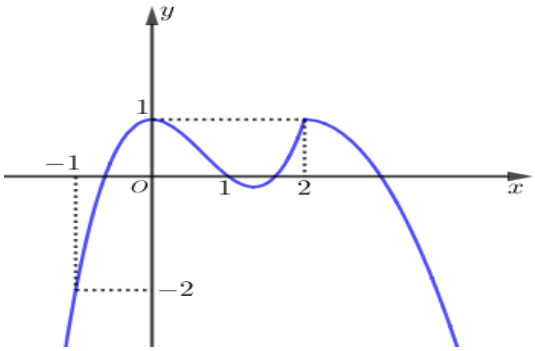
$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ x=\pm1\\f'\left(-x^4+2x^2\right)+x^2+1=0(*)\end{array}\right.$

Ta thấy $-x^4+2x^2=-\left(x^2-1\right)^2+1\le1\ \forall x$, kết hợp với đồ thị hàm số $|=i'(\{)$,

suy ra $f'\left(-x^4+2x^2\right)\ge0\ \forall x$. Hơn nữa, $x^2+1>0\ \forall x$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

mà $x=0,\ x=\pm1$ là các nghiệm đơn của phương trình $g'(x)=0$ nên hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

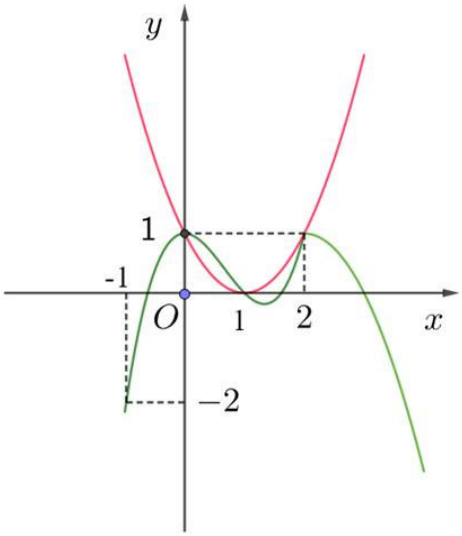
Chọn D

Ta có: $g(x)=f\left(x^2\right)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2 \Rightarrow g'(x)=2x\left[f'\left(x^2\right)-\left(x^4-2x^2+1\right)\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \underbrace{f'\left(x^2\right)-\left(x^4-2x^2+1\right)}_{k(x)}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2\right)=\left(x^2\right)^2-2x^2+1 (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2\left(t\geq 0\right)$,phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=t^2-2t^2+1(**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số x^2-2x+1 (màu đỏ) trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



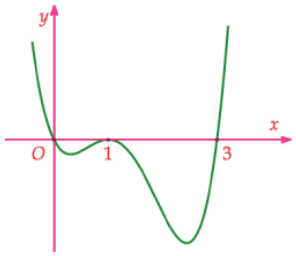
Dựa vào đồ thị, $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{(boãi chaün).} \\ x=\pm 1. \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$k(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$		
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$		
$g(x)$													

Vậy $g(x)$ đạt cực tiểu tại 1 điểm $x=0$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B. 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.
C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
D. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có: $f(x)=0$ có nghiệm đơn là $x=0;x=3$ và nghiệm kép $x=1$.

Và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn $x=x_1\in(0;1)$; $x=x_2\in(1;3)$ và $x=1$.

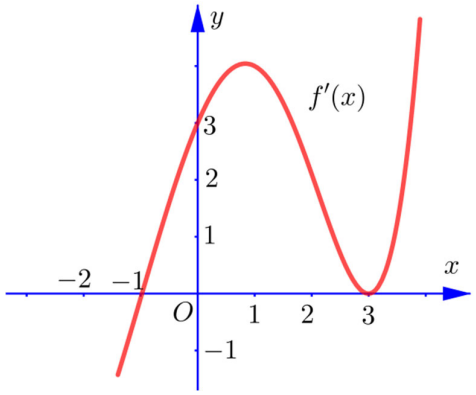
Ta có: $y=\left(f(x)\right)^2\Rightarrow y'=2f'(x).f(x)$ có các nghiệm đơn là $x=0;x=3;x_1;x_2$ và nghiệm bội 3 là $x=1$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
$y'=2f'(x).f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
		CT		CĐ		CT		CĐ		CT			

Vậy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1)=0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x)=2f'(x)f(x)$.

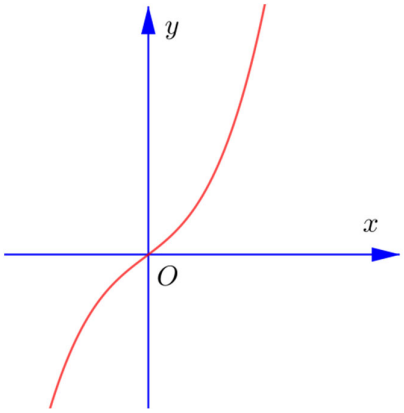
Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\end{array}\right.$.

Do $f(-1)=0$ nên $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\ (nghiệm\ kép)\end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Biết $f\left(x^2-4\right)=m$ để hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]^2$ có 5 điểm cực trị. Khẳng định nào đúng?

A. $m\neq\left\{f(-2);f(0);f(2)\right\}$.

B. $m\neq\left\{f(-4);f(-2);f(2)\right\}$.

C. $m\neq\left\{f(-4);f(0)\right\}$.

D. $m\neq\left\{f(0);f(2)\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]^2\Rightarrow g'(x)=2x.f\left(x^2-4\right).f'\left(x^2-4\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow 2x.f\left(x^2-4\right).f'\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-4\right)=0\ (1)\\ f\left(x^2-4\right)=0\ (2)\end{array}\right.$$

Xét (1). Do đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua $x=0$ nên $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

Do đó $f'\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$.

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì (2) phải có 3 nghiệm phân biệt khác $-2;0;2$.

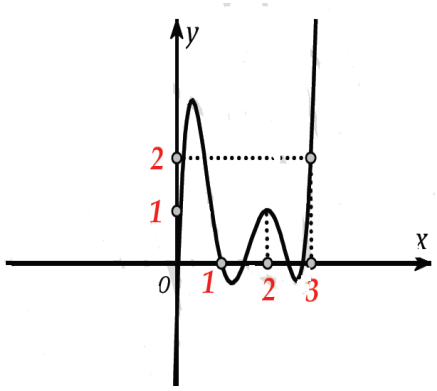
Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để $f\left(x^2-4\right)=m$ có 2 nghiệm thì $x^2-4\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 2$.

Vậy $m\neq\left\{f(-4);f(0)\right\}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



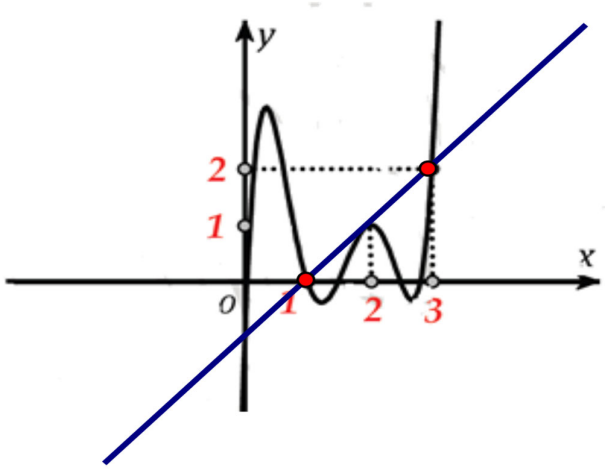
A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$.

Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow x=0; x=1; x=2; x=3.$

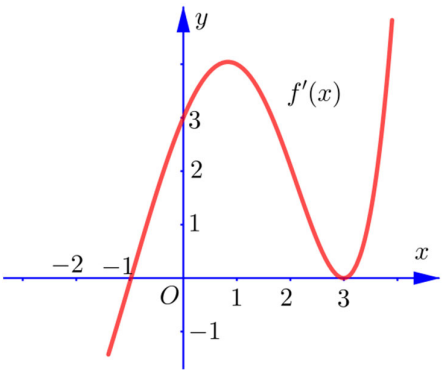
Theo đồ thị $h'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>x-1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(3;+\infty).$

Ta có :

x	$-\infty$	0		1		2		3	$+\infty$
$h'(x)$		$-$ 0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		↘		↗		↘		↗	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 4 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(3)<0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x-1)\right]^{2020}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		$y=0$		$+\infty$

Ta có $g'(x)=2020f'(x-1)f^{2019}(x-1)$.

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x-1)=0\ (1)\\ f(x-1)=0\ (2)\end{array}\right.$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\ (nghiệm\ kép)\end{array}\right.$.

$\Rightarrow f'(x-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=-1\\ x-1=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\,(nghiệm\ kép)\end{array}\right.$

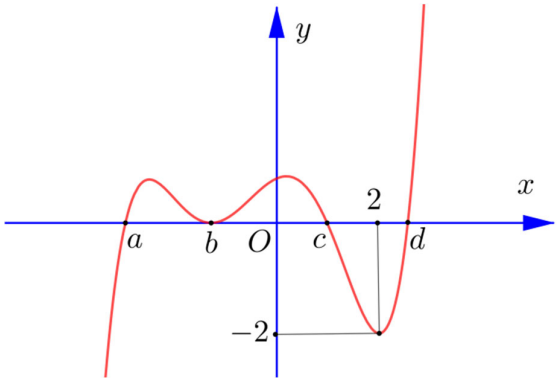
Xét (2). Do $f(3)<0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$

Suy ra $f(x-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1\in(-\infty;-1)$ và $x_2\in(4;+\infty)$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\ (nghiệm\ kép)\\ x=x_1\in(-\infty;-1)\\ x=x_2\in(4;+\infty)\end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^{2021}$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^{2021} \Rightarrow g'(x)=4042x.f'\left(x^2\right).\left[f\left(x^2\right)\right]^{2020}$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=k(x-a)(x-b)^{2m}(x-c)(x-d),\ k>0$

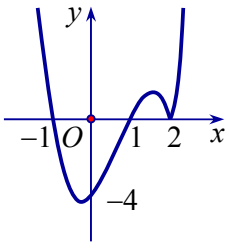
$f'\left(x^2\right)=0 \Rightarrow k\left(x^2-a\right)\left(x^2-b\right)^{2m}\left(x^2-c\right)\left(x^2-d\right)$

$\Rightarrow g'(x)=4042k.x.\left(x^2-a\right)\left(x^2-b\right)^{2m}\left(x^2-c\right)\left(x^2-d\right).\left[f\left(x^2\right)\right]^{2020}$

Do $\left[f\left(x^2\right)\right]^{2020}\geq 0;\left(x^2-b\right)^{2m}\geq 0 \Rightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm $\pm\sqrt{c};\pm\sqrt{d};0$

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 16. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2021}\left(x^3-1\right)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2021.f^{2020}\left(x^3-1\right).f'\left(x^3-1\right).3x^2$,

Ta có $y' = f^{2020}\left(x^3-1\right) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $3x^2 \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức $f'\left(x^3-1\right)$.

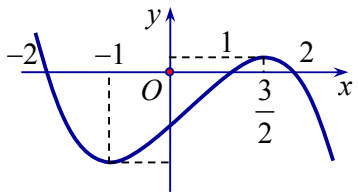
Ta có $f'\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-1=-1 \\ x^3-1=1 \\ x^3-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'\left(x^3-1\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-1<-1 \\ \left\{\begin{array}{l} x^3-1>1 \\ x^3-1 \neq 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \left\{\begin{array}{l} x>\sqrt[3]{2} \\ x \neq \sqrt[3]{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Tương tự $f'\left(x^3-1\right)<0 \Leftrightarrow -1<x^3-1<1 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt[3]{2}$.

Vì vậy suy ra hàm số $y=f^{2021}\left(x^3-1\right)$ có hai điểm cực trị.

Câu 17. **(Tô Quốc An sáng tác)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left(f\left(2x-1\right)\right)^{2022}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên của $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘		↗	0	↘	$-\infty$

Xét hàm số $y=\left(f\left(2x-1\right)\right)^{2022}$, ta có $y'=2022.f^{2021}\left(2x-1\right).2.f'\left(2x-1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(2x-1\right) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{2021}\left(2x-1\right) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức: $-f'\left(2x-1\right)$.

Ta có $y' \le 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 \le -2 \\ 1 \le 2x-1 \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\frac{1}{2} \\ 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Tương tự $y' > 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 2x-1 < 1 \\ 2x-1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Từ đó suy ra hàm số $y = \left(f(2x-1)\right)^{2020}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	7	↘	$-\infty$

Hỏi hàm số $y = \left[f(2-x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$y' = -2.f(2-x).f'(2-x)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -2.f(2-x).f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2-x) = 0 \\ f'(2-x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x = a < -2 \\ 2-x = b > 1 \\ 2-x = -2 \\ 2-x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-a > 4 \\ x = 2-b < 1 \\ x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$

y' không xác định $\Leftrightarrow f'(2-x)$ không xác định $\Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Dựa vào đồ thị $f(x)$ ta thấy $f(2-x) > 0 \Leftrightarrow a < 2-x < b \Leftrightarrow 2-b < x < 2-a$

$f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x < -2 \\ 0 < 2-x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$2-b$		1		2		4		$2-a$		$+\infty$
$f'(2-x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(2-x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=\left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết rằng hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hỏi hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất nên

$$f\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-2\\x=b>3\end{array}\right.$$

Đặt $g\left(x\right)=f^2\left(x^2-2x\right)$. Ta có $g'\left(x\right)=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)f\left(x^2-2x\right)$.

Để hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều điểm cực tiểu nhất thì phương trình $f\left(x^2-2x\right)=0$ có nhiều nghiệm nhất $\Rightarrow x^2-2x=b>3$ (vì $x^2-2x\geq-1,\forall x$)

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1\\x^2-2x=3\\x^2-2x=b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+2=0\\x^2-2x-1=0\\x^2-2x-3=0\\x=x_1<-1\\x=x_2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{2}\\x=-1\\x=3\\x=x_1<-1\\x=x_2>3\end{array}\right.$$

Trong đó các nghiệm $-1,\ 1,\ 3\ x_1;x_2$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'\left(x\right)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1,\ 1,\ 3\ ;x_1;x_2$.

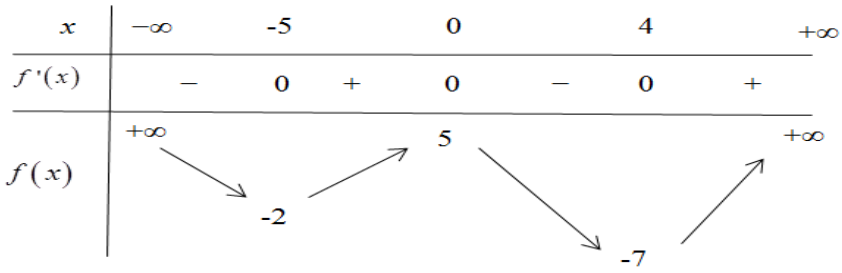
Ta có $g'\left(0\right)=-2f'\left(0\right)<0$ (do $f'\left(0\right)>0$).

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		x_1		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có đúng 3 điểm cực tiểu.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D=[0;+\infty)$

Ta có $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{x}}.f'\left(4-\sqrt{x}\right).\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^3,(x>0)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(4-\sqrt{x}\right)=0 \quad (1)\\ f\left(4-\sqrt{x}\right)+3=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

+) Từ (1) ta có: $f'\left(4-\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-\sqrt{x}=-5\Leftrightarrow x=81\\ 4-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=16\\ 4-\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=0\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

+) Từ (2) ta có $f\left(4-\sqrt{x}\right)+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-\sqrt{x}=a\in(0;4)\Leftrightarrow x=x_1\\ 4-\sqrt{x}=b\in(4;+\infty)\Leftrightarrow x\in\varnothing\end{array}\right.$

Vậy có $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có 3 cực trị.

BÀI TOÁN 25:TƯƠNG GIAO CỦA HÀM HỢP $f\left(f\left(x\right)\right)$

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 01:

Tìm số nghiệm phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=k$ *hay các biến thể của nó*

- **Tìm ..... phương trình** $f\left(f\left(x\right)\right)=k,\left(*\right)$
- Tìm ..... của đồ thị $y=f\left(x\right)$ và ..... $y=k$ được ..... các giao điểm là $x_1;x_2;...;x_n$
- Thay ..... bởi .....
- Kẻ các đường thẳng ..... cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại ..... điểm thì phương trình (*) có ..... nghiệm.

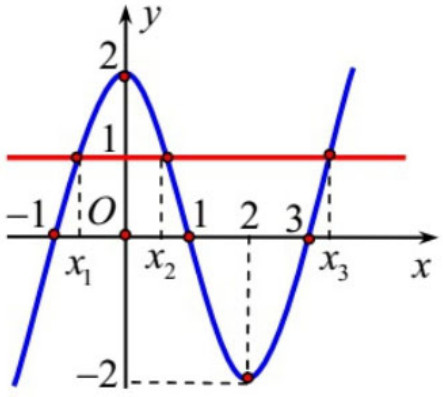
Bài toán 02:

Tìm số cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$. *hay các biến thể của nó*

- **Tìm số ..... của hàm số** $y=f\left(f\left(x\right)\right)$.**(**)**
- Tính đạo hàm .....
- .....
- Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}.....=0,\left(1\right)\\.....=0,\left(2\right)\end{array}\right.$.
- Số điểm cực trị của (**) bằng số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0$.

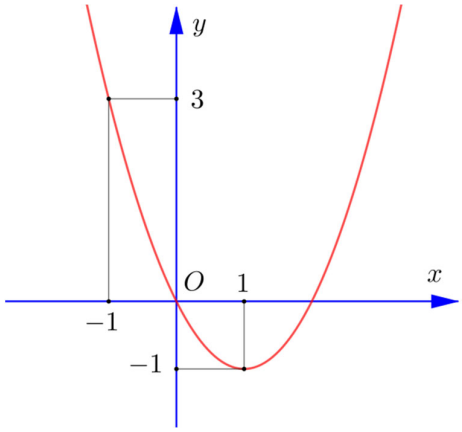
B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

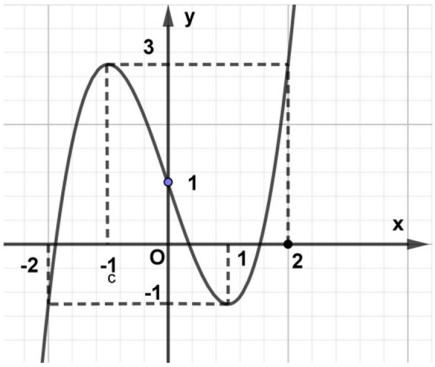
Câu 2. **[LỚP TOÁN THẦY AN]** Đồ thị hàm số đa thức $y=f(x)$ có dạng như hình vẽ :



Phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm thì số giá trị nguyên của m thỏa mãn là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

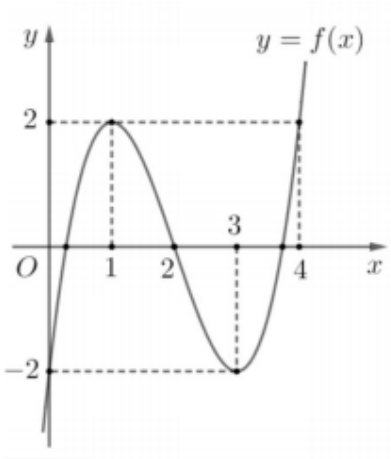
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f(x).f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

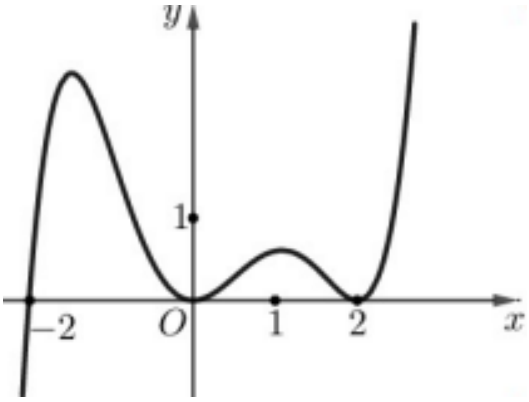
A. 9. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=x$ là



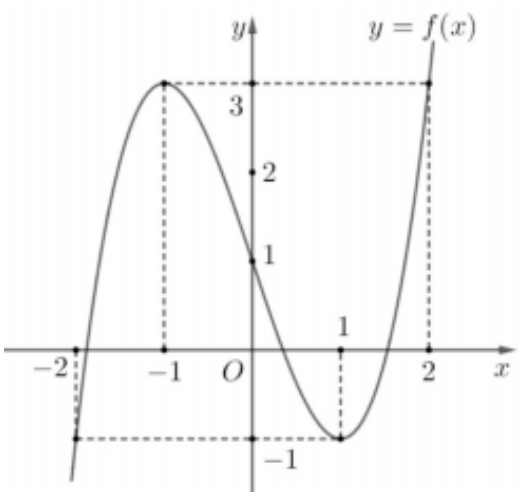
A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Số nghiệm thực của phương trình $g'(x)=0$ là:



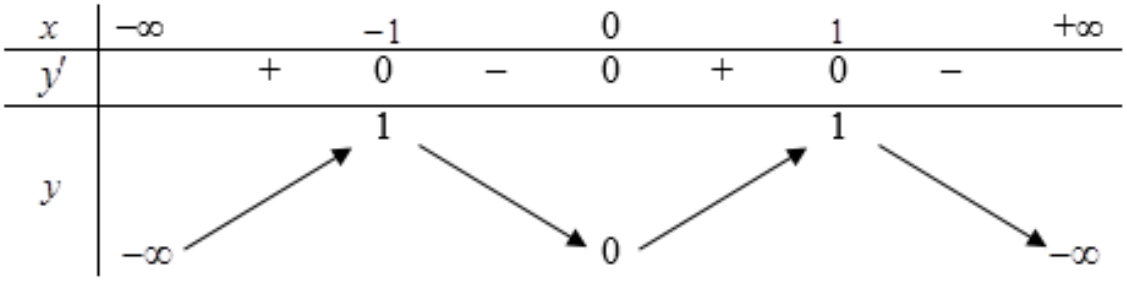
A. 14. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(\sin x))-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$?



A. 4. **B. 2.** **C. 3.** **D. 5.**

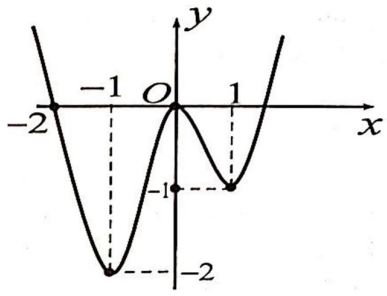
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $f(f(\cos 2x))=0$ là

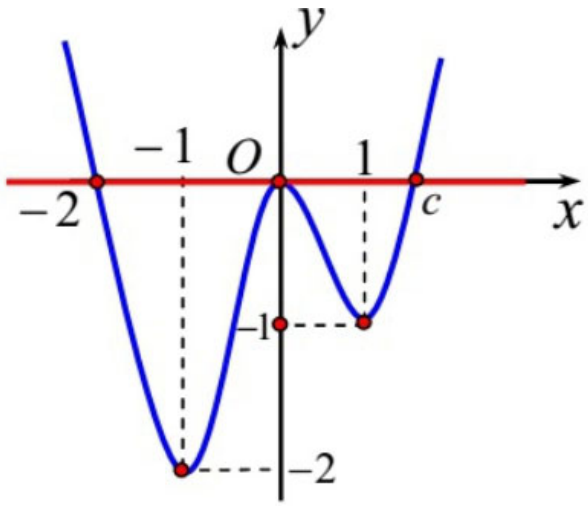
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(f(x))$ bằng?



A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(f(x))$ bằng?



A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 10. Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

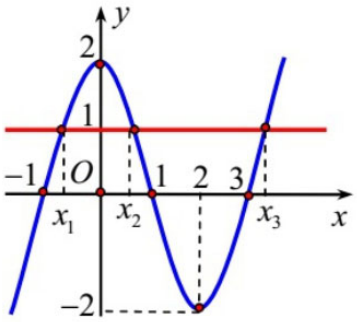
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ để hàm số $g(x)=f(f(x)+m)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

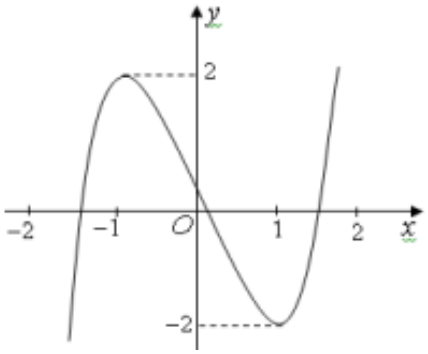
C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực dương của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



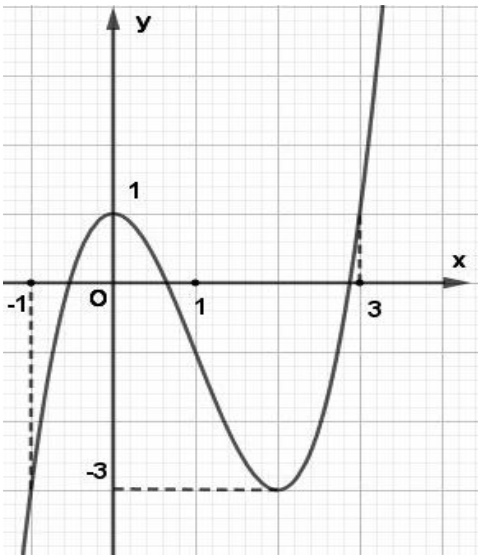
A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x))=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?



A. 3. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 5.

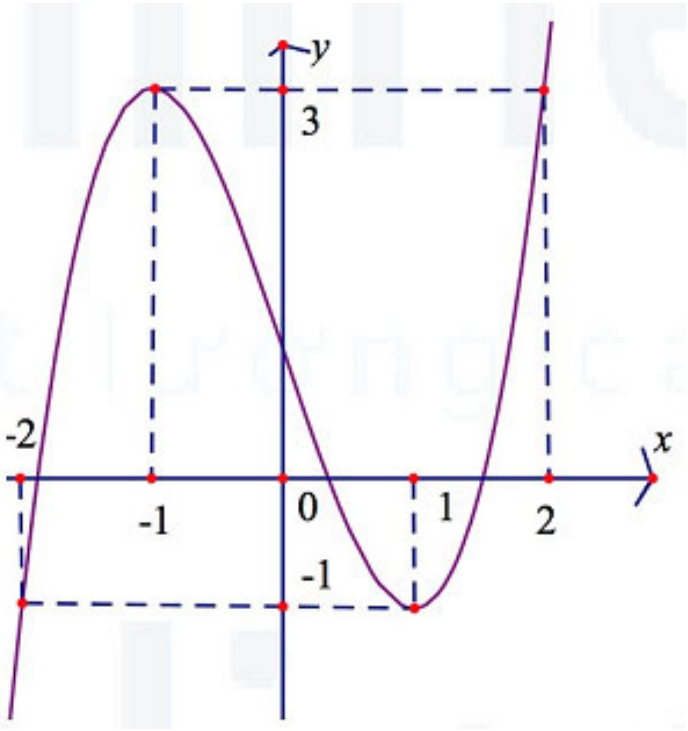
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m là số nghiệm của phương trình $2f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

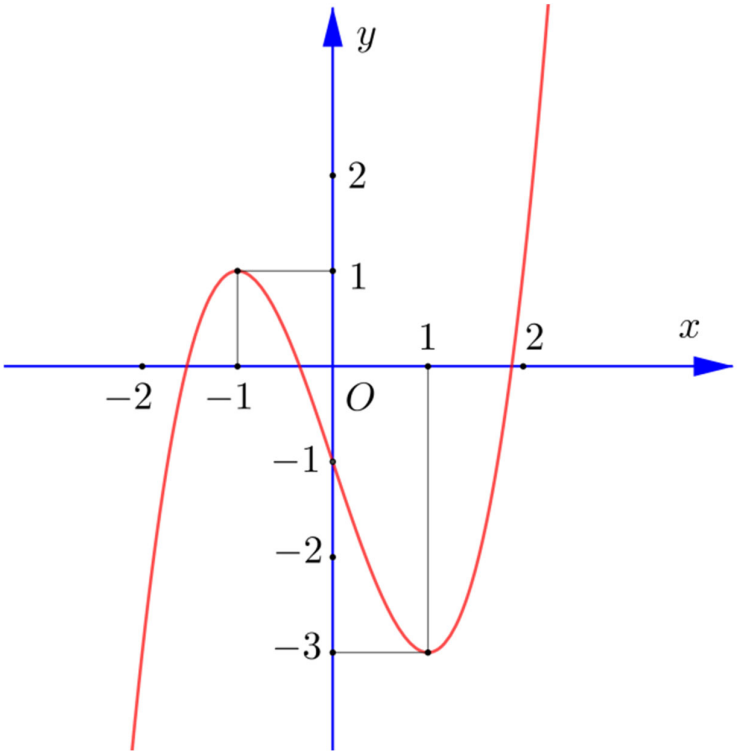
A. $m=6$. **B.** $m=8$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x))=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?



A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 5. **[LỚP TOÁN THẦY AN]** Đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có dạng như hình vẽ sau:

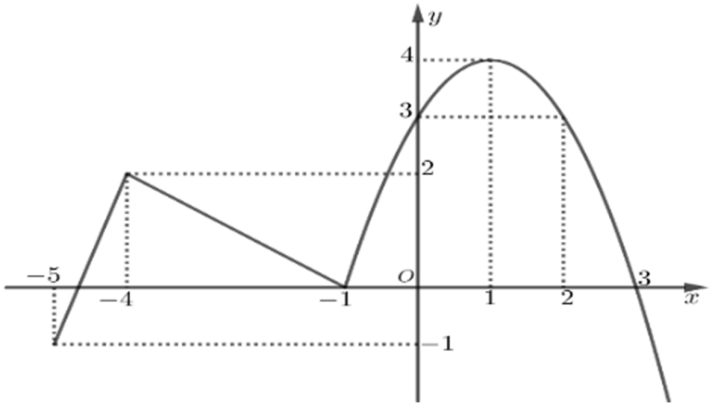


Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(x)+1)=m$ có số nghiệm là lớn nhất?

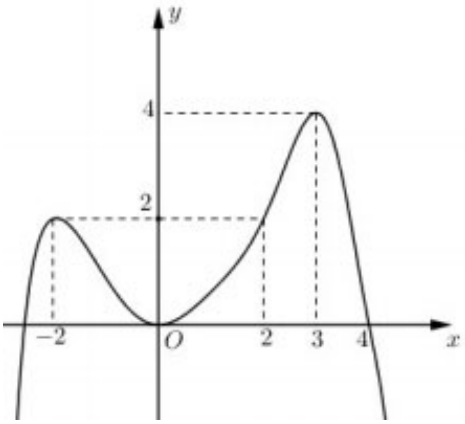
A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f\left(f(x)\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt $x\in[-5;0]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.



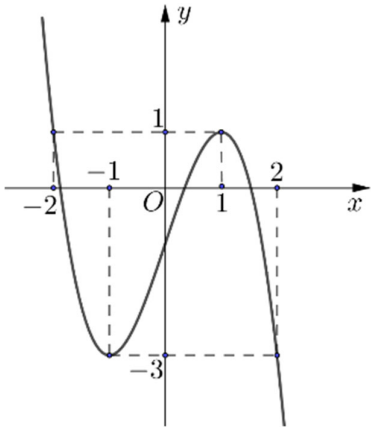
Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ



Số giá trị nguyên m để phương trình $f\left[f\left(x\right)\right]=m$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$ là

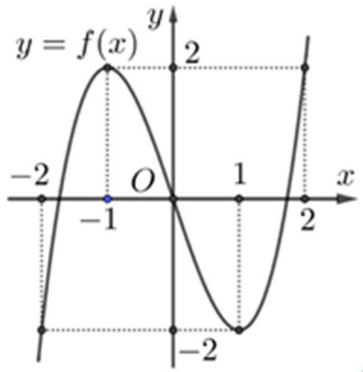
A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(1-f\left(x\right)\right)=0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



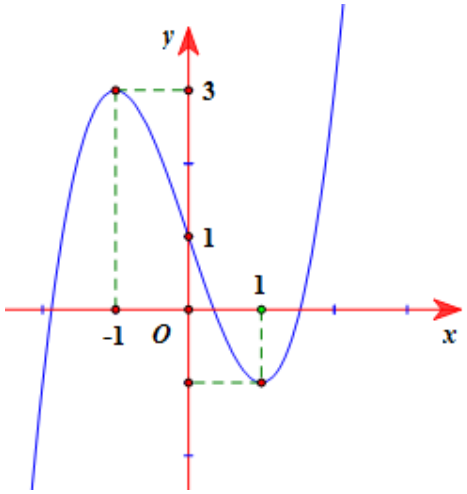
A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=x$ là:



A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 10. Cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)=x^3-5x^2+2x+8$ trong đó $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực của phương trình $g\left[f\left(x\right)\right]=0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

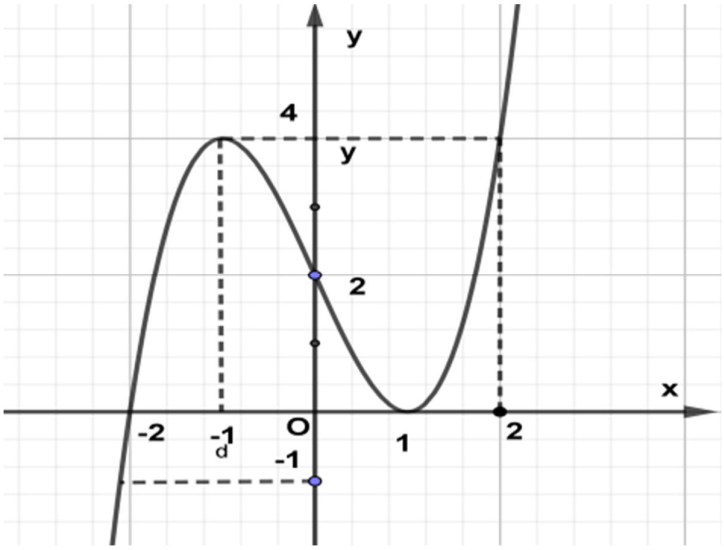
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây, giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với Ox là $O(0;0);A(-1;0);B(1;0)$

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$-\infty$	0	↗	0	↘	0	↗ $+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'\left(x\right)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

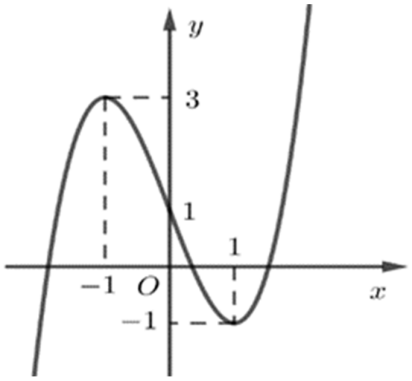
Câu 12. ho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0.$

A. 8 . **B.** 4 . **C.** 6. **D.** 5 .

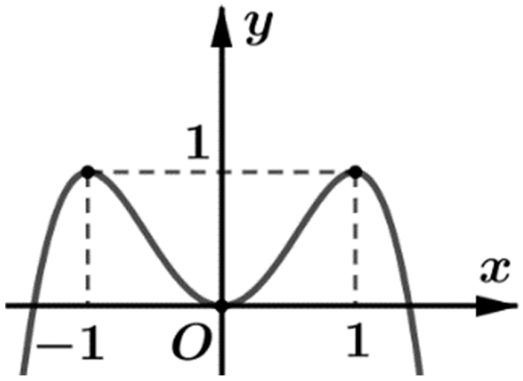
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x))=0.$



A. 1. **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** Vô số.

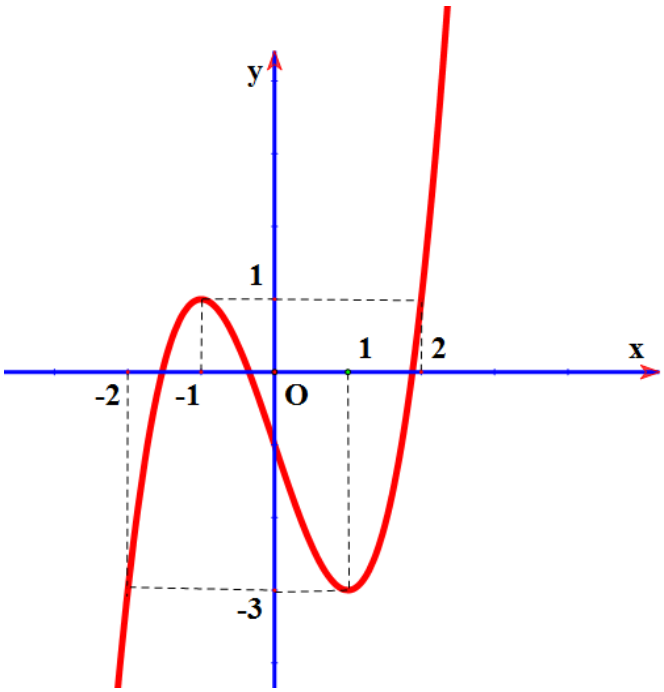
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0$ là

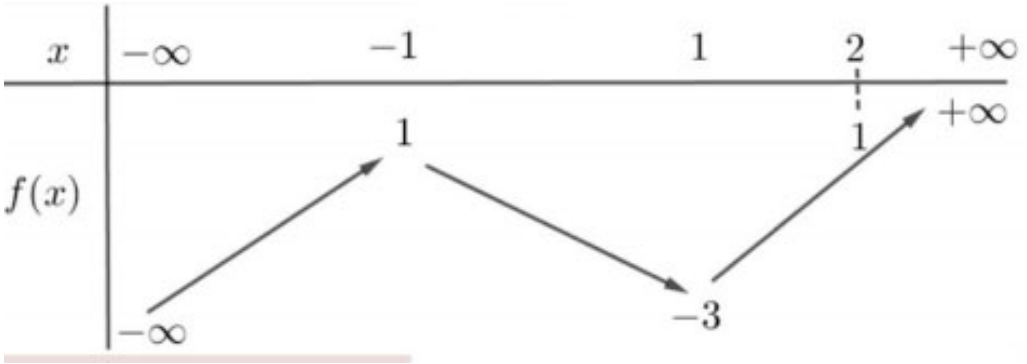
A. 4 . **B.** 2 **C.** 3 **D.** 8

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(3-2f\left(x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6 . **B.** 5 . **C.** 7 . **D.** 4 .

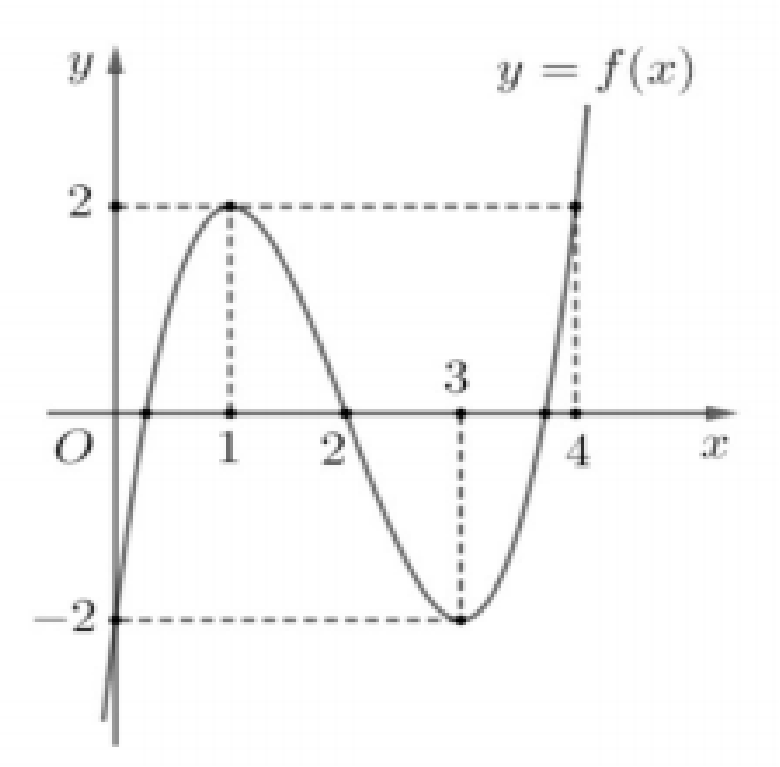
Câu 17. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ sau



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(\left|2f(x)+m\right|\right)=1$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-1;1]$.

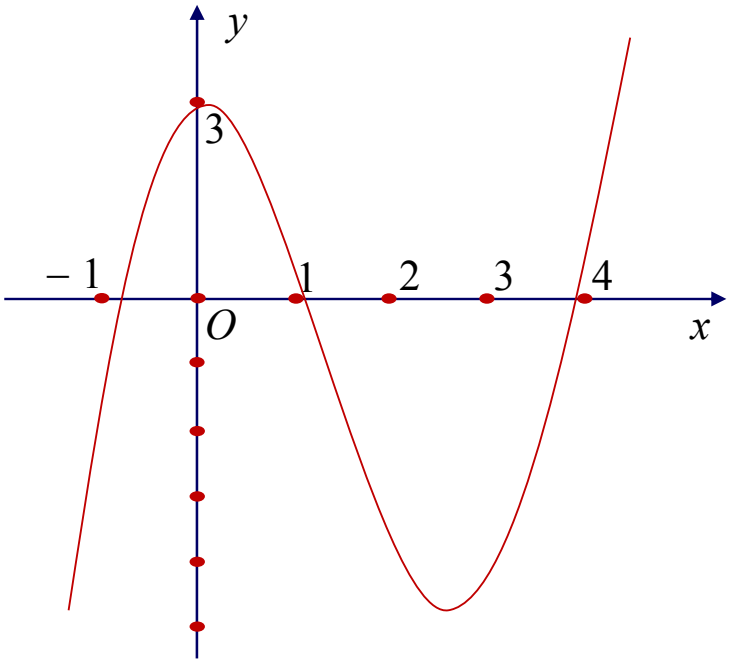
A. 13. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm thực của phương trình $f(|f(x)|)=x$ là



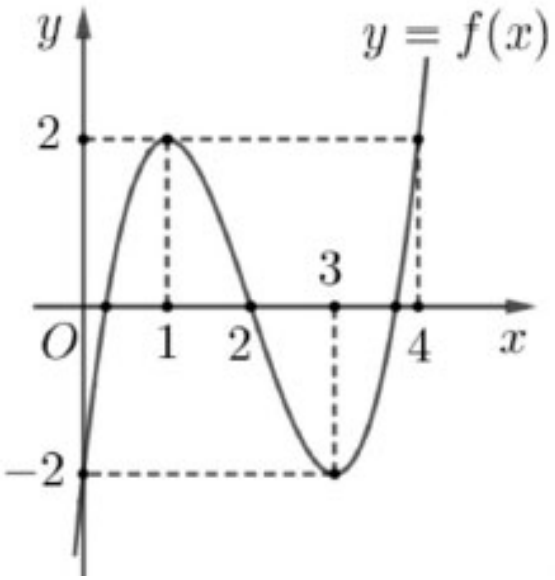
A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

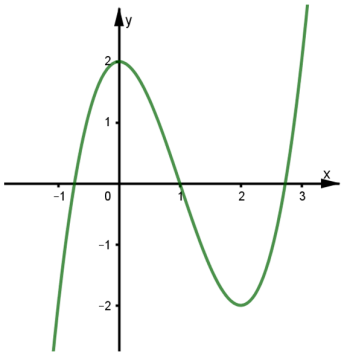
Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|f(x)\right|\right)$ là



A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

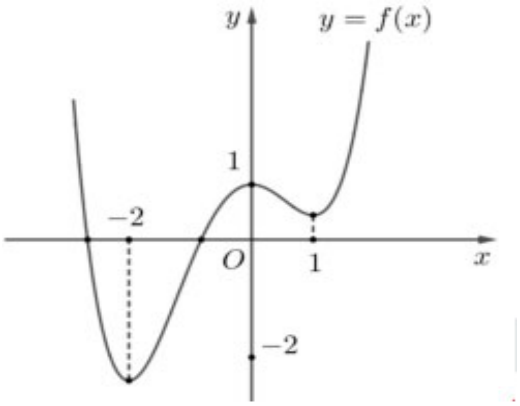
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

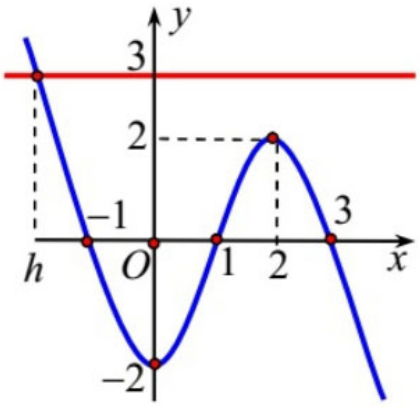
A. $m=6$. **B.** $m=7$. **C.** $m=5$. **D.** $m=9$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là:



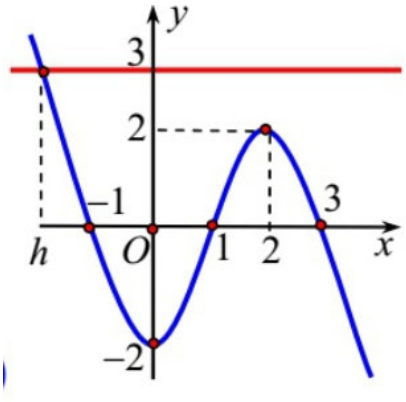
A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



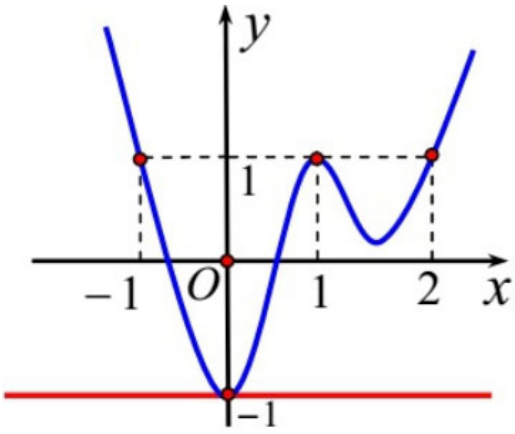
A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực âm của phương trình $f(f(x))=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



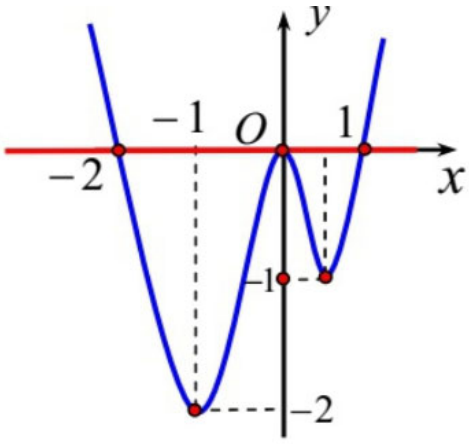
A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



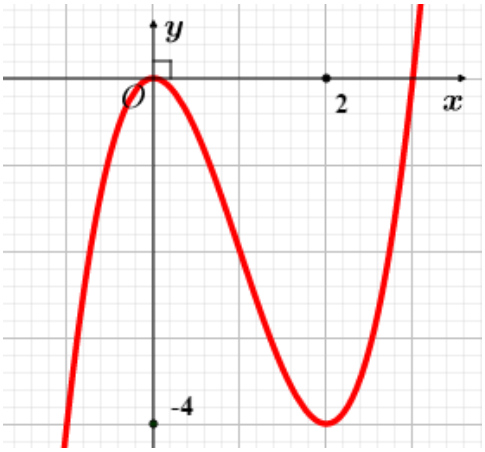
A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=8$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=8$.

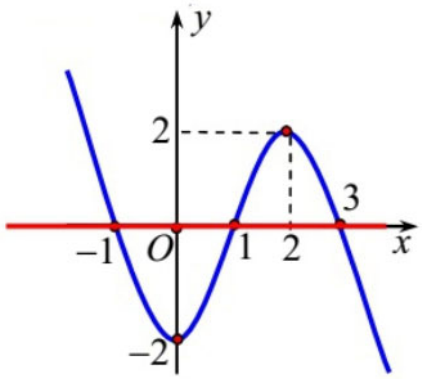
Câu 7. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$.

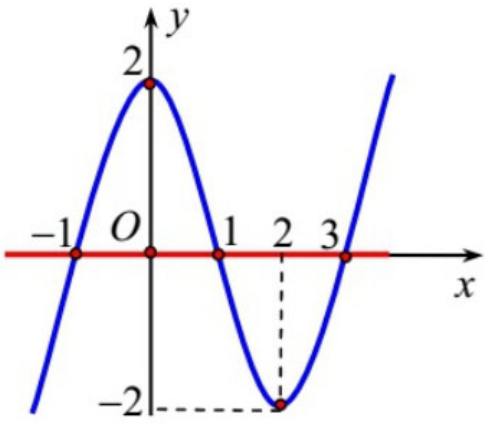
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ bằng?



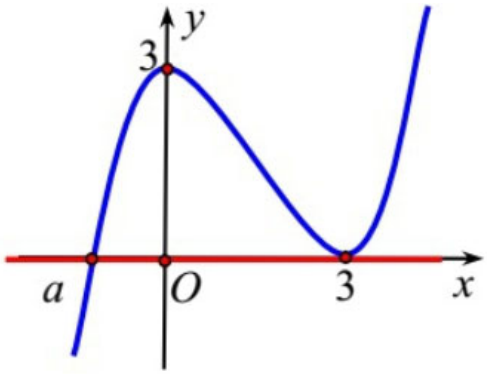
A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ bằng?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ bằng?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

BÀI TOÁN 25:TƯƠNG GIAO CỦA HÀM HỢP $f\left(f\left(x\right)\right)$

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán 01:

Tìm số nghiệm phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=k$ *hay các biến thể của nó*

- **Tìm số nghiệm phương trình** $f\left(f\left(x\right)\right)=k,(*)$
- Tìm giao điểm của đồ thị $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=k$ được hoành độ các giao điểm là $x_1;x_2;...;x_n$
- Thay $x_1;x_2;...;x_n$ bởi $y_1;y_2;...;y_n$.
- Kẻ các đường thẳng $y=y_1;y=y_2;...;y=y_n$ cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại bao nhiêu điểm thì phương trình (*) có bấy nhiêu nghiệm.

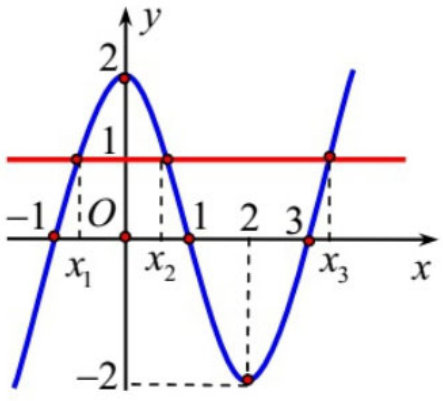
Bài toán 02:

Tìm số cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$.*hay các biến thể của nó*

- **Tìm số cực trị của hàm số** $y=f\left(f\left(x\right)\right)$.**(**)**
- Tính đạo hàm $y'=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)$.
- Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0,(1)\\f'\left(f\left(x\right)\right)=0,(2)\end{array}\right.$.
- Số điểm cực trị của (**) bằng số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Lời giải 01

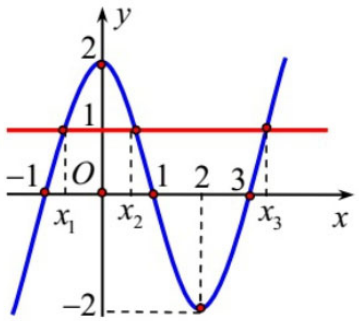
Dựa vào đồ thị ta có $f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=k_1\in\left(-1;0\right);\left(1\right)\\f\left(x\right)=k_2\in\left(0;1\right);\left(2\right)\\f\left(x\right)=k_3\in\left(3;+\infty\right);\left(3\right)\end{array}\right.$.

Cũng dựa vào đồ thị ta thấy số nghiệm của các phương trình (1), (2), (3) lần lượt là 3; 3; 1 đồng thời các nghiệm này không trùng nhau, nên phương trình đã cho có tất cả 7 nghiệm.

Lời giải:

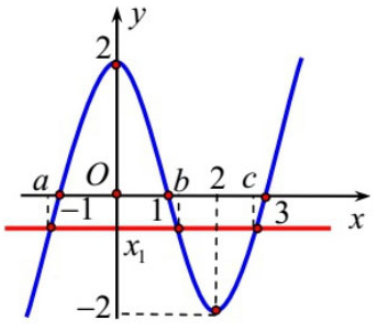
Đặt $t=f\left(x\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow f\left(t\right)=1$

Dựa vào đồ thị $f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=x_1\\t=x_2\\t=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=x_1\in\left(-1;0\right)\\f\left(x\right)=x_2\in\left(0;1\right)\\f\left(x\right)=x_3\in\left(3;4\right)\end{array}\right.$



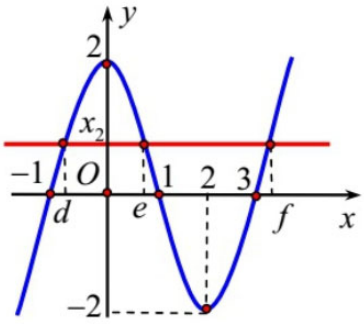
Trường hợp 1: Phương trình $f\left(x\right)=x_1$ với $x_1\in\left(-1;0\right)$

Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\in\left(-2;-1\right)\\x=b\in\left(1;2\right)\\x=c\in\left(2;3\right)\end{array}\right.$ (I)



Trường hợp 2: Phương trình $f(x)=x_2$ với $x_2\in(0;1)$

Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=d\in(-1;0) \\ x=e\in(0;1) \\ x=f\in(3;4) \end{array}\right.$ (II)

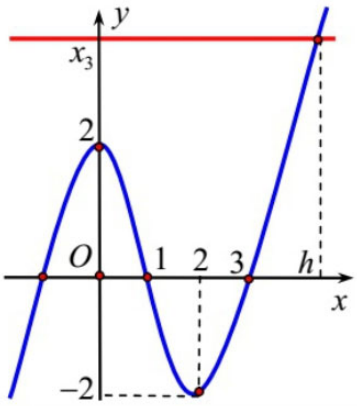


Trường hợp 3: Phương trình $f(x)=x_3$ với $x_3\in(3;4)$

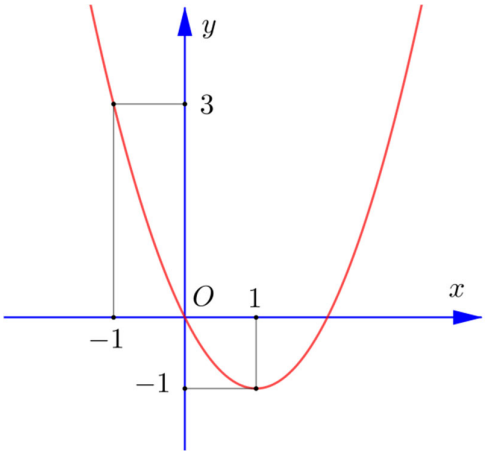
Dựa vào đồ thị phương trình có 1 nghiệm $x=h>4$ (III)

Từ $(I);(II)$ và (III) phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Câu 2. **[LỚP TOÁN THẦY AN]** Đồ thị hàm số đa thức $y=f(x)$ có dạng như hình vẽ :

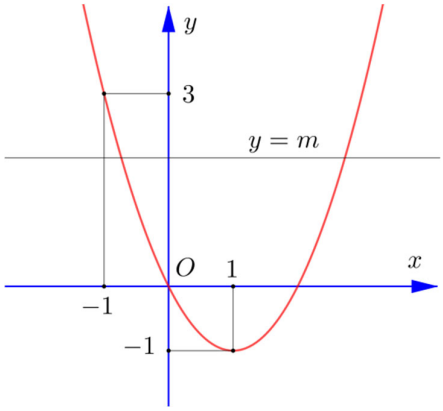


Phương trình $f(f(x))=m$ có 4 nghiệm thì số giá trị nguyên của m thỏa mãn là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A.



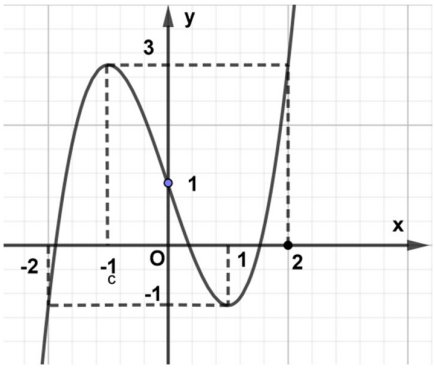
Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=m$ có 4 nghiệm thì đồ thị hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 4 điểm phân biệt.

Đặt $f\left(x\right)=t\Rightarrow f\left(t\right)=m$. Phương trình $f\left(x\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $m>-1$.

Để phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt thì $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm $t_1,t_2>-1$

Do đó $-1<m<3\Rightarrow m=\left\{0;1;2\right\}\Rightarrow$ ***Chọn A.***

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(x\right).f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(x\right).f\left(f\left(x\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f\left(f\left(x\right)-1\right)=0\end{array}\right.$

TH1: $f\left(x\right)=0$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,\ x_3$ với $-2<x_1<-1;0<x_2<1;1<x_3<2.$

TH2: $f\left(f\left(x\right)-1\right)=0$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$f\left(f\left(x\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-1=a_1,\ a_1\in\left(-2;-1\right)\\f\left(x\right)-1=a_2,\ a_2\in\left(0;1\right)\\f\left(x\right)-1=a_3,\ a_3\in\left(1;2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1+a_1\in\left(-1;0\right)\\f\left(x\right)=1+a_2\in\left(1;2\right)\\f\left(x\right)=1+a_3\in\left(2;3\right)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $f(x)=a$, từ đồ thị ta nhận thấy:

Nếu $\left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>3 \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

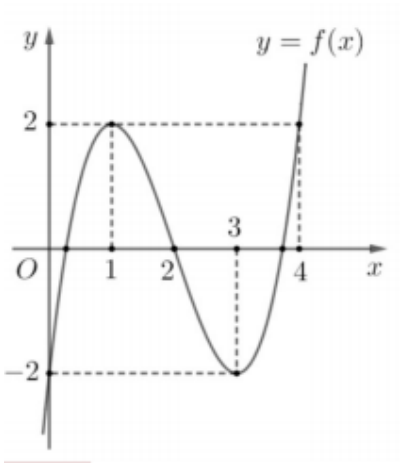
Nếu $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Nếu $-1<a<3$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Dựa vào kết quả trên suy ra phương trình: $f(f(x)-1)=0$ có 9 nghiệm phân biệt đều khác 3 nghiệm phân biệt của phương trình $f(x)=0$.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f(x).f(f(x)-1)=0$ là: 12 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=x$ là



A. 7 . **B.** 5 . **C.** 9 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn B

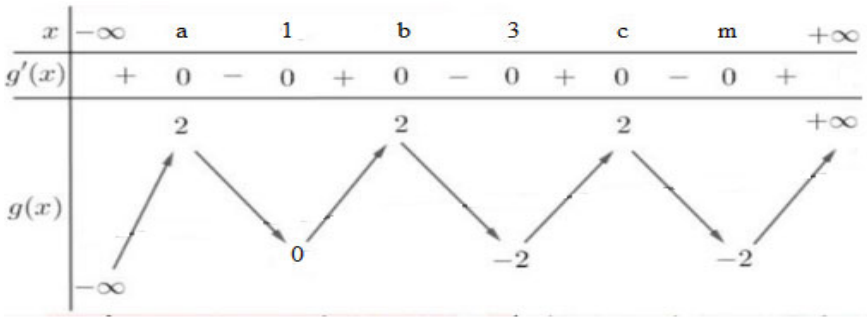
Ta xét hàm số $g(x)=f(f(x))$ có $g'(x)=f'(x)f'(f(x))$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1, x=3 \\ f(x)=1, f(x)=3 \end{array}\right.$$

$$f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a\in(0;1) \\ x=b\in(1;2), f(x)=3\Leftrightarrow x=m\in(4;+\infty), \\ x=c\in(3;4) \end{array}\right.$$

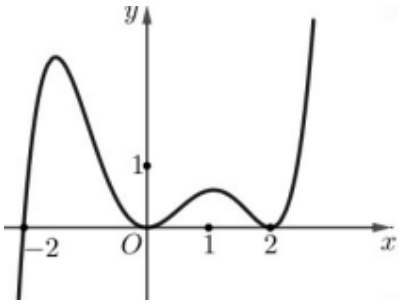
Ta có $\left\{\begin{array}{l} g(1)=f(f(1))=f(2)=0; g(3)=f(f(3))=f(-2)<0 \\ f(a)=f(b)=f(c)=1\Rightarrow g(a)=g(b)=g(c)=f(1)=2 \\ f(m)=3\Rightarrow g(m)=f(3)=-2 \end{array}\right.$

Ta có BBT



Đường thẳng $y=x$ đi qua 2 điểm $(b;b);(c;c)\left(b\in(1;2),c\in(3;4)\right)$ nên nó cắt đồ thị hàm số $g(x)=f\left(f(x)\right)$ tại 5 điểm phân biệt nên số nghiệm thực của phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$. Số nghiệm thực của phương trình $g'(x)=0$ là:



A. 14. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=a\in(-2;0)$; $x=0$; $x=1$; $x=2$ vì vậy $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{a;0;1;2\}$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x).f'\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{a;0;1;2\}\\f(x)\in\{a;0;1;2\}\end{array}\right.$.

Phương trình $f(x)=a$ có một nghiệm thực duy nhất.----------→1

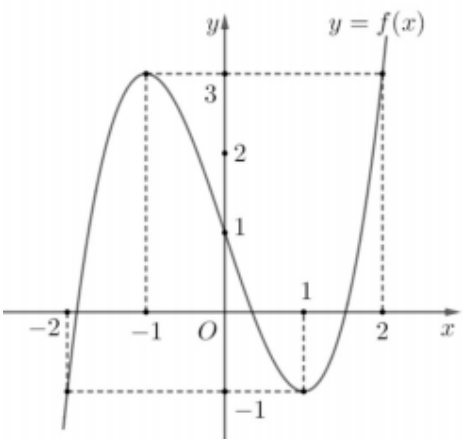
Phương trình $f(x)=0$ có các nghiệm $x=-2$; $x=0$; $x=2$.-------→1

Phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm thực phân biệt.----------→3

Phương trình $f(x)=2$ có ba nghiệm thực phân biệt.----------→3

Vậy có tất cả $4+1+1+3+3=12$ nghiệm.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(\sin x))-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$?



A. 4. **B. 2.** **C. 3.** **D. 5.**

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=f(\sin x)$ phương trình trở thành :

$$f(t)-2=0\Leftrightarrow f(t)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-2;-1)\\t=b\in(-1;0)\\t=c\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\sin x)=a\in(-2;-1)\\f(\sin x)=b\in(-1;0)\\f(\sin x)=c\in(1;2)\end{array}\right.$$

* Phương trình $f(\sin x)=a\in(-2;-1)\Leftrightarrow\sin x=m<-2$ phương trình vô nghiệm

* Phương trình $f(\sin x)=b\in(-1;0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=n\in(-2;-1)\Rightarrow vn\\\sin x=p\in(0;1)\\\sin x=q\in(1;2)\Rightarrow vn\end{array}\right.$

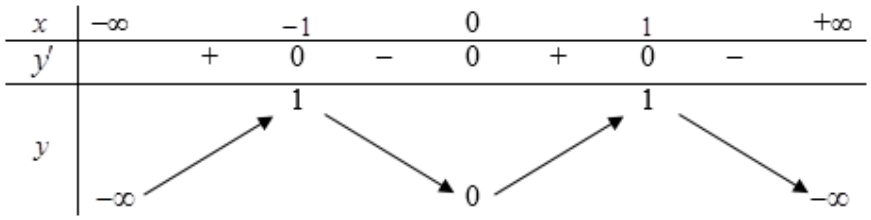
* Phương trình $f(\sin x)=c\in(1;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=r\in(-2;-1)\Rightarrow vn\\\sin x=s\in(-1;0)\\\sin x=t\in(1;2)\Rightarrow vn\end{array}\right.$

Phương trình $\sin x=p\in(0;1)$ có hai nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Phương trình $\sin x=s\in(-1;0)$ có một nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Vậy phương trình $f(f(\sin x))-2=0$ có tất cả 3 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và có bảng biến thiên như sau

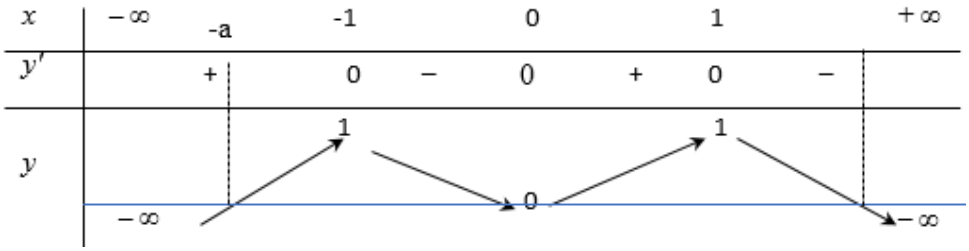


Số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Dựa và bảng biến thiên ta có $f\left(x\right)\le 1,\forall x\in R$ và

$$f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos 2x\right)=a\\f\left(\cos 2x\right)=-a\ \text{ với }\ a>1\\f\left(\cos 2x\right)=0\end{array}\right.$$

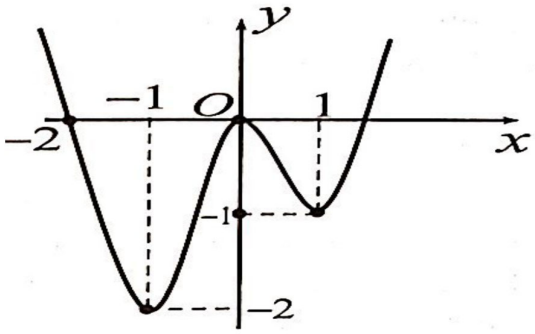
Với $f\left(\cos 2x\right)=a$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $f\left(\cos 2x\right)=-a\Leftrightarrow \cos 2x=\pm b$ với $b>1$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $f\left(\cos 2x\right)=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}.$

Vậy phương trình $f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ bằng?



A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = f'(x)\left[f'\left(f(x)\right)\right]$

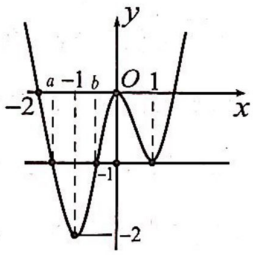
$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'(t) = 0 \ (2) \end{array}\right.$ (Với $t = f(x)$).

Xét phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. (I)$.

Xét phương trình

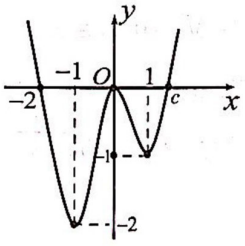
$(2) \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:



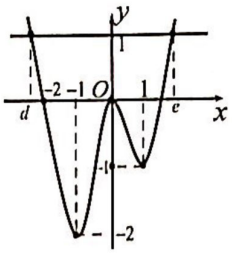
Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-2;-1) \\ x = b \in (-1;0) \\ x = 1 \end{array}\right. (II)$.

Trườn hợp 2: Dựa vào đồ thị:



Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = c > 1 \end{array}\right. (III)$.

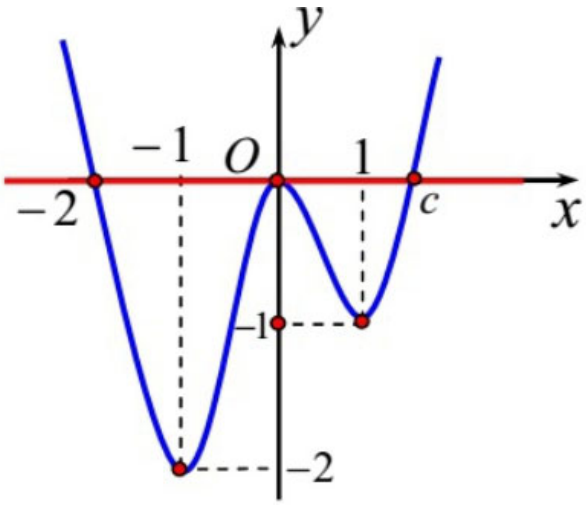
Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:



Phương trình $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=d<-2\\x=e>1\end{array}\right.(IV)$.

Từ $(I);(II);(III)$ và (IV) thì hàm số $y=f(f(x))$ có 9 nghiệm điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(f(x))$ bằng?

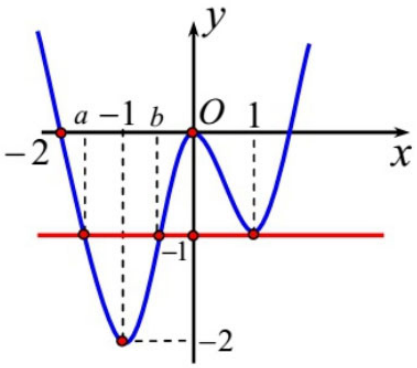


A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải:

Ta có: $y' = f'(x)\left[f'\left(f(x)\right)\right]; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'(t) = 0 \ (2) \end{array}\right.$ (Với $t = f(x)$)

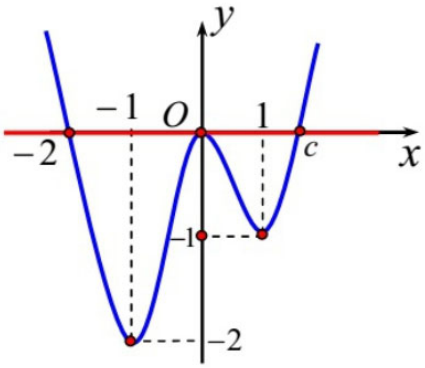
Xét phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. (I)$



Xét phương trình $(2) \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{array}\right.$

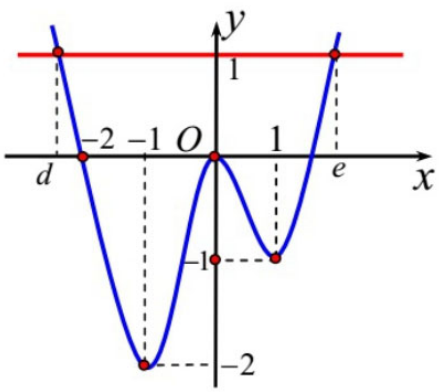
Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị

Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-2;-1) \\ x = b \in (-1;0) \\ x = 1 \end{array}\right. (II)$



Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = c > 1 \end{array}\right. (III)$



Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = d < -2 \\ x = e > 1 \end{array}\right. (IV)$

Từ $(I);(II);(III)$ và (IV) thì hàm số $y = f\left(f(x)\right)$ có 9 điểm cực trị

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 10. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ để hàm số $g(x)=f\left(f(x)+m\right)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

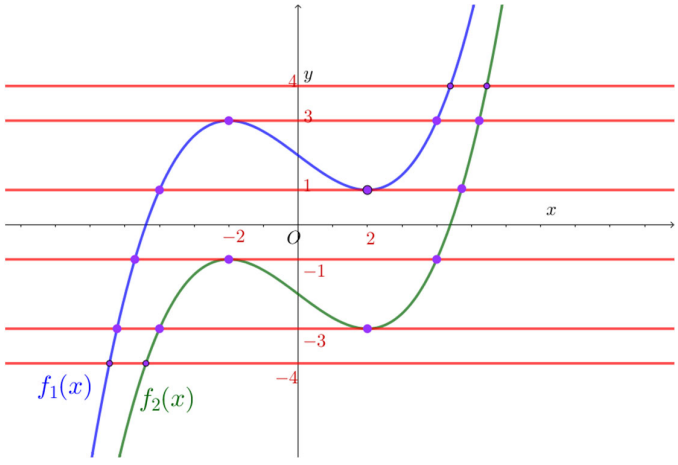
Chọn B

$g'(x)=f'(x).f'\left(f(x)+m\right).$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)+m\right)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ f(x)+m=-2 \\ f(x)+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ f(x)+2=-m \\ f(x)-2=-m \end{array}\right.$$, trong đó $x=-2$ và $x=2$ là hai nghiệm bội lẻ.

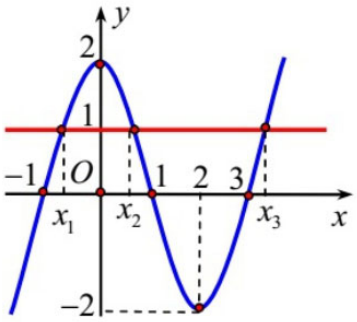
Đặt $f_1(x)=f(x)+2$ và $f_2(x)=f(x)-2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m\in(-5;5) \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m\in\{-4;-3;-1;1;3;4\}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực dương của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

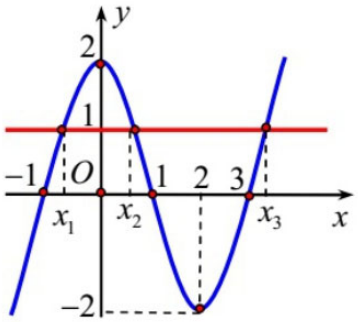


A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Lời giải:

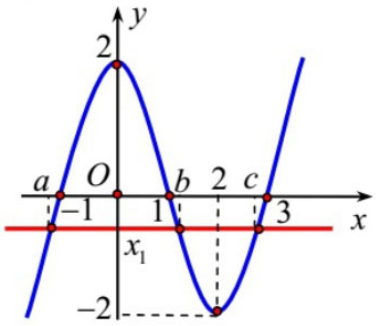
Đặt $t=f(x)\Rightarrow f(f(x))=1\Leftrightarrow f(t)=1$

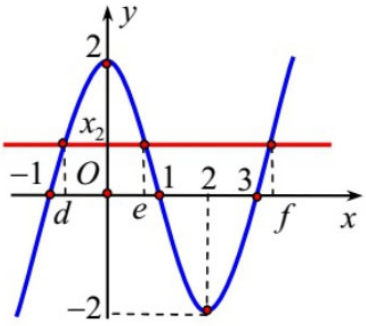
Dựa vào đồ thị $f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=x_1\\t=x_2\\t=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x_1\in(-1;0)\\f(x)=x_2\in(0;1)\\f(x)=x_3\in(3;4)\end{array}\right.$



Trường hợp 1: Phương trình $f(x)=x_1$ với $x_1\in(-1;0)$

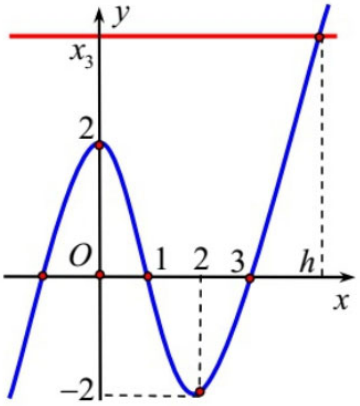
Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=b\in(1;2)\\x=c\in(2;3)\end{array}\right.$ (I)





Trường hợp 2: Phương trình $f(x)=x_2$ với $x_2\in(0;1)$

Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=d\in(-1;0) \\ x=e\in(0;1) \\ x=f\in(3;4) \end{array}\right.$ (II)



Trường hợp 3: Phương trình $f(x)=x_3$ với $x_3\in(3;4)$

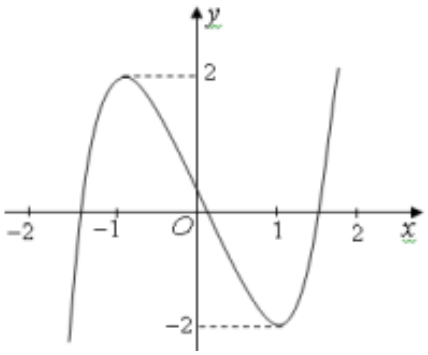
Dựa vào đồ thị phương trình có 1 nghiệm $x=h>4$ (III)

Từ $(I);(II)$ và (III) phương trình $f(f(x))=1$

có 5 nghiệm dương $x\in\{b,c,e,f,h\}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x))=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?



A. 3. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

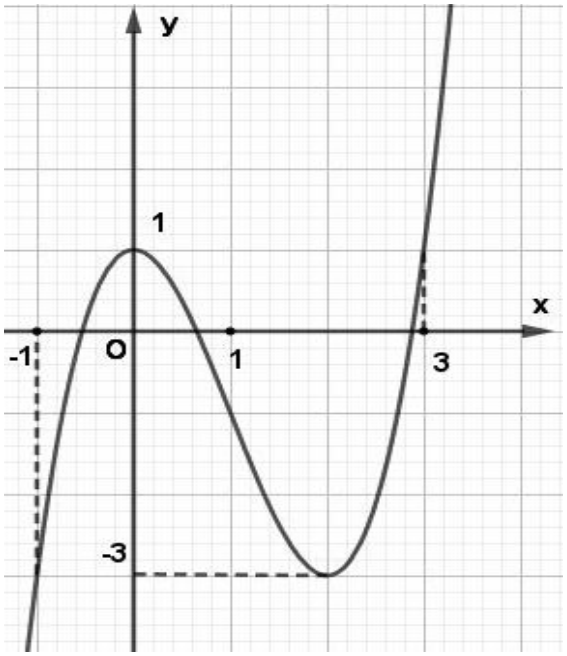
Chọn C

Đặt $t=f(x)$, phương trình $f(f(x))=0$ trở thành $f(t)=0$ $(*)$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy phương trình $(*)$ có 3 nghiệm t thuộc khoảng $(-2;2)$, với mỗi giá trị t như vậy phương trình $f(x)=t$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có 9 nghiệm.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



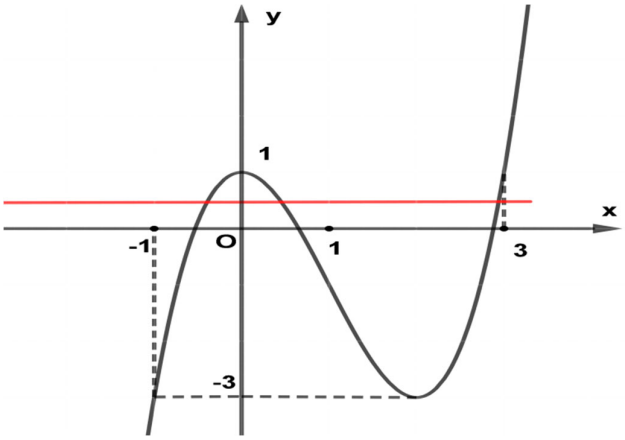
Gọi m là số nghiệm của phương trình $2f\left(f(x)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m=6$. **B.** $m=8$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Lời giải

Chọn C

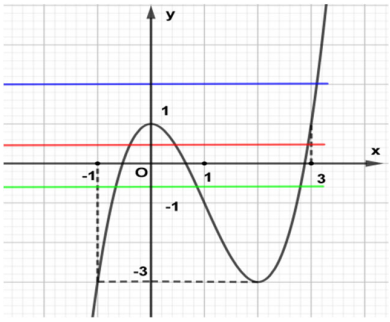
Đặt $f(x)=u$ khi đó nghiệm của phương trình $2f\left(f(x)\right)=1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f(u)$ với đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.



Dựa vào đồ thị ta có $f(u)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=u_1 \\ f(x)=u_2 \\ f(x)=u_3 \end{array}\right.$ với $u_1\in(-1;0)$, $u_2\in(0;1)$, $u_3\in(1;3)$.

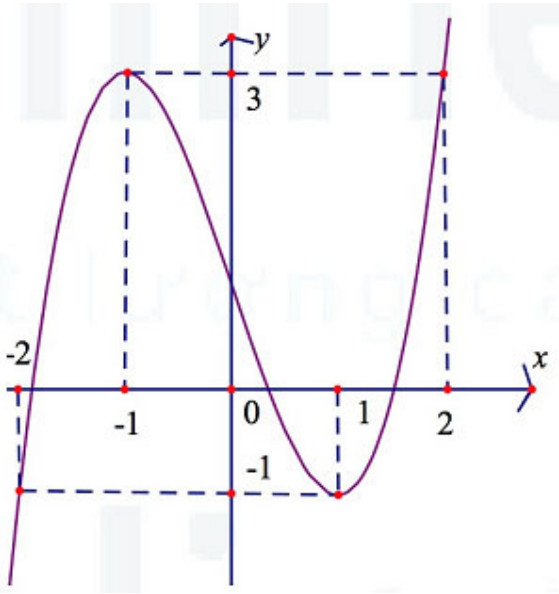
Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y=u_1$, $y=u_2$, $y=u_3$.

.



Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ có 7 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?



A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

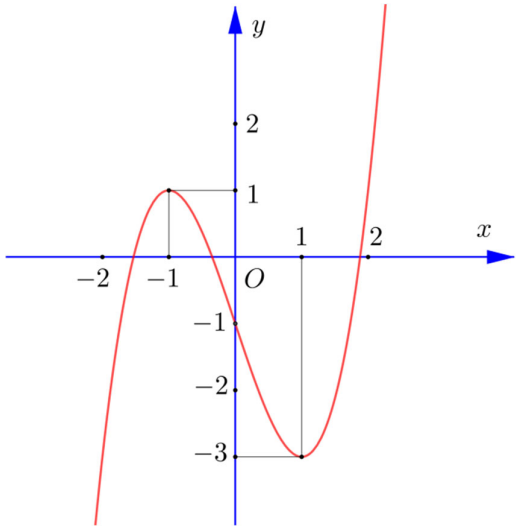
Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\ \ \left(-2<m<-1\right)\Rightarrow 1n_o\\ x=n\ \ \left(0<n<1\right)\Rightarrow 3n_o\\ x=p\ \ \left(1<p<2\right)\Rightarrow 3n_o\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả 7 nghiệm thực.

Câu 5. **[LỚP TOÁN THẦY AN]** Đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có dạng như hình vẽ sau:

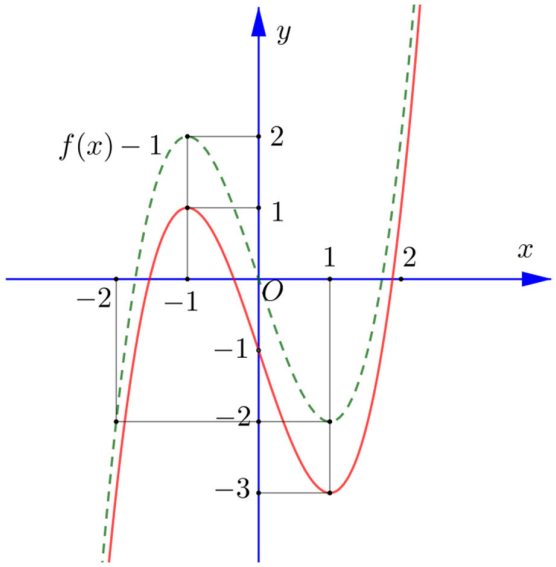


Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f(x)+1\right)=m$ có số nghiệm là lớn nhất?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.



Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)+1$ bằng cách từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ tịnh tiến lên trên 1 đơn vị.

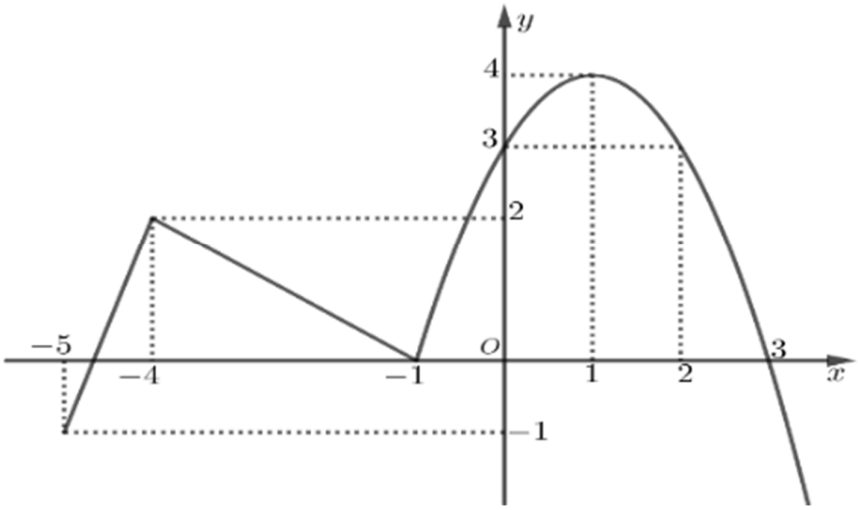
Phương trình bậc 9: $f\left(f(x)+1\right)=m$ có tối đa 9 nghiệm.

Do đó đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2

$\Rightarrow m\in(-2;2)$ nên có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn $\Rightarrow$ ***Chọn D.***

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f\left(f(x)\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt $x\in[-5;0]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.



Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $t=f(x), x\in[-5;0]\Rightarrow t\in[-1;3]\Rightarrow f(t)\in[0;4]$

Phương trình đã cho có dạng $f(t)=\frac{m}{3}, t\in[-1;3]$

TH1: $\frac{m}{3}\notin[0;4]$ phương trình đã cho vô nghiệm

TH2: $m=0: f(t)=\frac{m}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\ (1)\\f(x)=3\ (2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) Có 1 nghiệm, (2) có 1 nghiệm trong miền $x\in[-5;0]$. Do đó phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x\in[-5;0]$.

TH3: $0<\frac{m}{3}<3$ hay 0<m<9 $f(t)=\frac{m}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a\in(-1;0)\ (3)\\f(x)=b\in(2;3)\ (4)\end{array}\right.$

Phương trình (1) Có 1 nghiệm, (2) có 1 nghiệm trong miền $x\in[-5;0]$. Do đó phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x\in[-5;0]$.

TH4: $3<\frac{m}{3}<4$ hay 9<m<12 $f(t)=\frac{m}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}t=c\in(0;2)\\t=d\in(0;2), c\neq d\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=c\in(0;2)\ (5)\\f(x)=d\in(0;2)\ (6)\end{array}\right.$

Hệ (3), (4) có 6 nghiệm phân biệt trong miền $x\in[-5;0]$. Do đó phương trình ban đầu có 6 nghiệm $x\in[-5;0]$.

TH5: $\frac{m}{3}=3 \vee \frac{m}{3}=4$ phương trình ban đầu lần lượt có 4 nghiệm, 3 nghiệm trong miền $x \in [-5;0]$.

Vậy để phương trình $3f\left(f(x)\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt $x \in [-5;0]$. thì 9<m<12 hay $m \in \{10;11\}$.

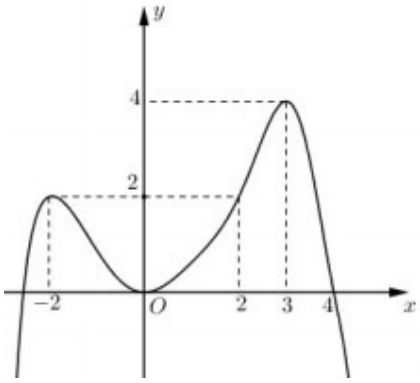
Cách 2:

Sử dụng phương pháp "ghép trục" ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ như sau:

x	$-\infty$	-4	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$		-4 -1 1 1 1 3 1 -1 -4 $-\infty$ 2 0 4 $-\infty$				
$f\left(f(x)\right)$	2 0 $-\infty$	4 3	4 3		4 0 $f(4)$	2 0 $-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta nhận thấy: để phương trình $2f\left(f(x)\right)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-4;0]$ thì $\frac{m}{2}=4 \Leftrightarrow m=8$. Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Đáp án đúng là đáp án **A.**

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ



Số giá trị nguyên m để phương trình $f\left[f(x)\right]=m$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

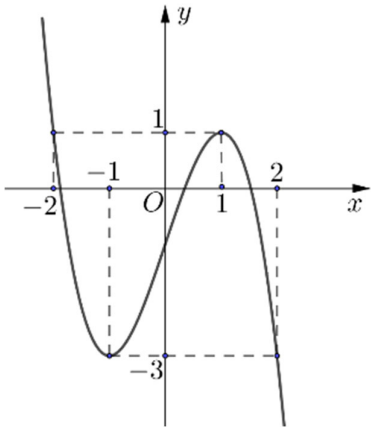
Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right], x\in[-2;4]$.

$$g'(x)=f'(x).f\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=3\\f(x)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\vee x=0\vee x=3\\x=0\vee x=4\\x=x_3\in(2;3)\vee x=x_4\in(3;4)\end{array}\right.$$

x	-2		0		2		x_3		3		x_4		4
$g'(x)$	0	-	0	+	|	+	0	-	0	+	0	-	0
$g(x)$	2	↘	0	↗	2	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0

$f\left[f(x)\right]=m$ có 5 nghiệm $\Leftrightarrow g(x)=m$ có 5 nghiệm $\Leftrightarrow 0<m\le 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(1-f(x)\right)=0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



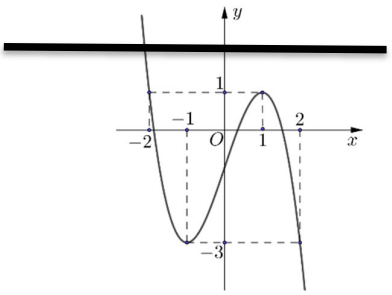
A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

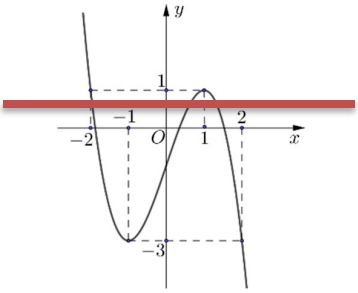
Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có $f\left(1-f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}1-f(x)=m & (-2<m<-1)\\1-f(x)=n & (0<n<1)\\1-f(x)=p & (1<p<2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1-m\\f(x)=1-n\\f(x)=1-p\end{array}\right.$.

+) Do $-2<m<-1\Rightarrow 2<1-m<3$. Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(x)=1-m$ có đúng một nghiệm $x_1<-2$.

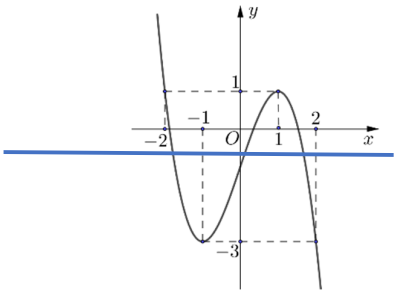


+) Do $0<n<1\Rightarrow 0<1-n<1$. Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f\left(x\right)=1-n$ có đúng ba nghiệm $-2<x_2<0<x_3<1<x_4<2$.

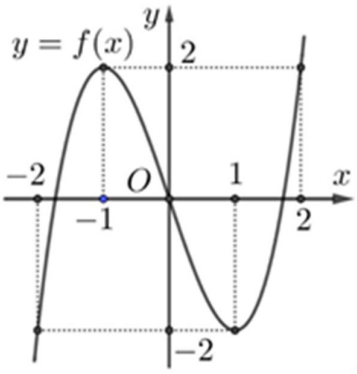


+) Do $1<p<2\Rightarrow -1<1-p<0$. Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f\left(x\right)=1-p$ có đúng ba nghiệm $-2<x_5<-1<x_6<1<x_7<2$ khác x_2,x_3,x_4.

Vậy phương trình đã cho có tối đa 7 nghiệm phân biệt.



Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=x$ là:



A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

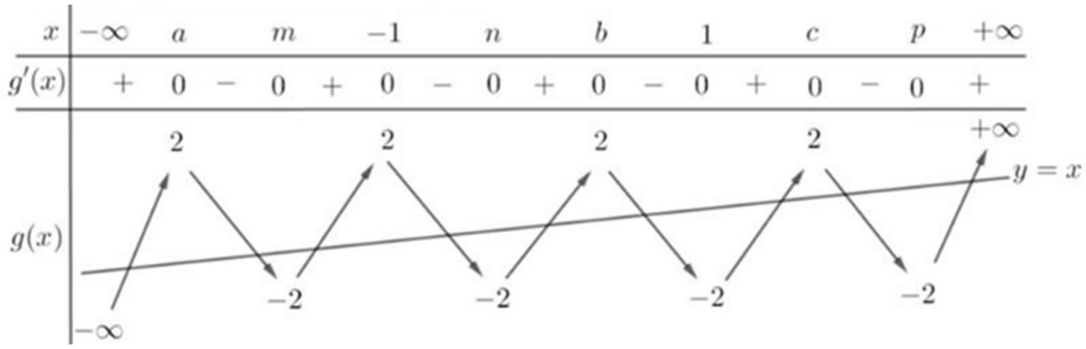
Ta xét hàm số $g(x)=f\left(f(x)\right)$ có $g'(x)=f'(x)f'\left(f(x)\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;x=1\\f(x)=-1;f(x)=1\end{array}\right.$$

$$f(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=b\in(0;1)\\x=c\in(1;2)\end{array}\right.\quad f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\in(a;-1)\\x=n\in(-1;0)\\x=p\in(c;2)\end{array}\right.$$

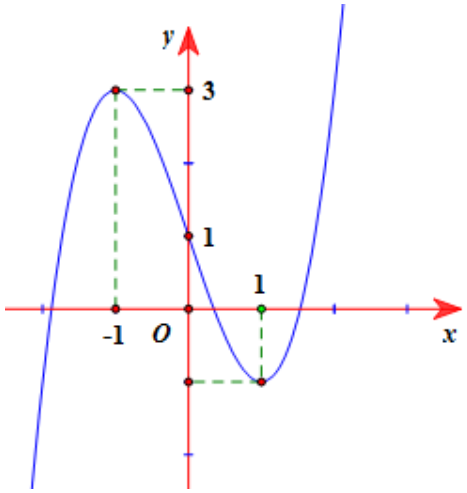
Ta có $\left\{\begin{array}{l}g(-1)=f\left(f(-1)\right)=f(2);g(1)=f\left(f(1)\right)=f(-2)=-2\\f(a)=f(b)=f(c)=-1\Rightarrow g(a)=g(b)=g(c)=f(-1)=2\\f(m)=f(n)=f(p)=1\Rightarrow g(m)=g(n)=g(p)=f(1)=-2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Đường thẳng $y=x$ đi qua hai điểm $(-1;-1);(1;1)$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 9 điểm phân biệt nên phương trình có tất cả 9 nghiệm.

Câu 10. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)=x^3-5x^2+2x+8$ trong đó $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực của phương trình $g\left[f(x)\right]=0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=f(x)$ khi đó $g\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow g(t)=0\Leftrightarrow t^3-5t^2+2t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\\t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\\f(x)=2\\f(x)=4\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm $f(x)$ ta có

+ $f(x)=-1$ có 2 nghiệm.

+ $f(x)=2$ có 3 nghiệm.

+ $f(x)=4$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $g\left[f(x)\right]=0$ có 6 nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây, giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với Ox là $O(0;0);A(-1;0);B(1;0)$

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$-\infty$	0 ↗		0 ↘		0 ↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Từ giả thiết, có đồ thị hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $O(0;0);A(-1;0);B(1;0)$.

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}c=0\\a+b=-1\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\\c=0\end{cases}$.

$\Rightarrow f'(x)=x^3-x\Rightarrow f''(x)=3x^2-1$

Đặt: $g(x)=f\left(f'(x)\right)$

Ta có: $g'(x)=\left(f\left[f'(x)\right]\right)'=f'\left[f'(x)\right].f''(x)=\left[\left(x^3-x\right)^3-\left(x^3-x\right)\right]\left(3x^2-1\right)$

$=x(x-1)(x+1)(x^3-x-1)(x^3-x+1)(3x^2-1)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x^3-x-1=0\\x^3-x+1=0\\3x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x=a(\approx 1,32)\\x=b(b\approx -1,32)\\x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

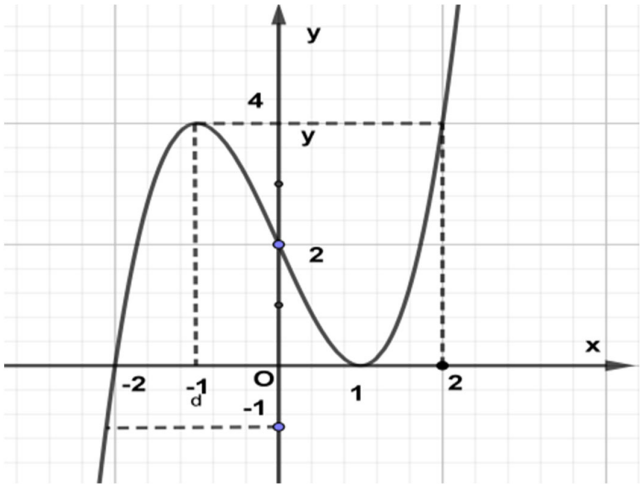
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		b		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		a		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

**** Cách xét dấu*** $g'(x)$: chọn $x=2\in(a;+\infty)$ ta có: $g'(2)>0\Rightarrow g'(x)>0\forall x\in(a;+\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(f(x))$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A. 8 . **B.** 4 . **C.** 6. **D.** 5 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

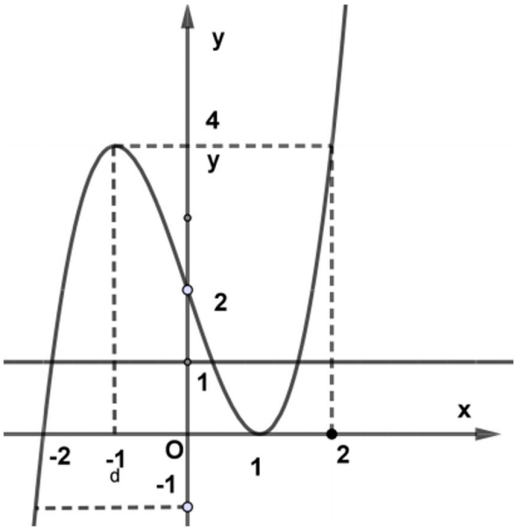
$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x).f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\f'\left[f(x)\right]=0 & (2)\end{array}\right.$$

TH1: Xét phương trình $f'(x)=0$. Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1$; $x_2=1$.

TH2: Xét phương trình $f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\\f(x)=1\end{array}\right.$.

◆ Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ thì $f(x)=-1$ có nghiệm duy nhất $x_3<-2$.

◆ Xét phương trình $f(x)=1$, dựa vào đồ thị ta thấy số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là số giao điểm của hai đồ thị $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $d:y=1$.

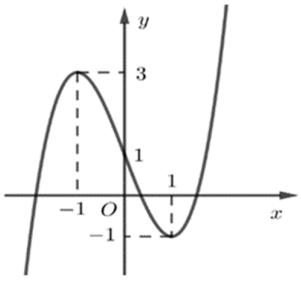


Từ đồ thị trên ta thấy đường thẳng $d:y=1$ cắt đồ thị hàm số: $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-2<x_4<-1;0<x_5<1;1<x_6<2$

$\Rightarrow$ phương trình $\left(2\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'\left(x\right)=0$ có tất cả 6 nghiệm phân biệt.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

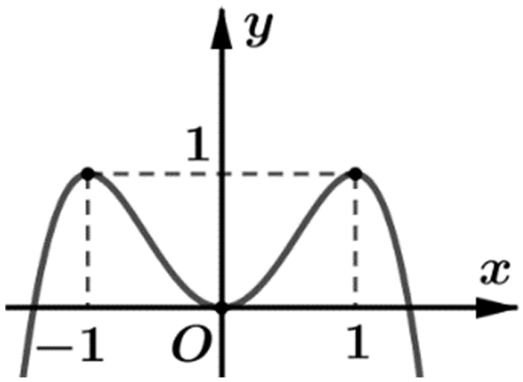
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=f\left(\sin x\right)$, do $x\in\left(0;\pi\right)\Leftrightarrow\sin x\in\left(0;1\right]\Leftrightarrow t=f\left(\sin x\right)\in\left[-1;1\right)$

Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f\left(t\right)=m$ có nghiệm thuộc $\left[-1;1\right)$ khi và chỉ khi $-1<m\le 3\Rightarrow m=0,1,2,3$. Vậy có 4 giá trị nguyên m.

Câu 14. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\cos 2x))=0$.



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Cách 01:

Quan sát đồ sự tương giao của hàm số $y=f(x)$ và $y=0$ ta thấy:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (a<-1)\\x=0\\x=b\ (b>1)\end{array}\right.\quad\text{Vậy: }f(f(\cos 2x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos 2x)=a\ \ (\mathrm{a}<-1)\\f(\cos 2x)=0\\f(\cos 2x)=b\ (b>1)\end{array}\right.$$

Đặt $\cos 2x=t;\ \ t\in\left[-1;1\right]$

Quan sát đồ thị $y=f(x)$ ta thấy: khi $x\in\left[-1;1\right]$ thì $f(x)\in\left[0;1\right]$

Vậy: Phương trình $f(t)=a$ và $f(t)=b$ vô nghiệm.

Xét: $f(t)=0\Leftrightarrow t=0$ suy ra: $\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Vậy: Có 4 điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tập nghiệm của phương trình đã cho.

Chọn đáp án C

Cách 01:

Từ đồ thị ta có $f\left(x\right)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và suy ra được $f\left(\cos 2x\right)=\pm a\ \left(a>1\right)$ hoặc $f\left(\cos 2x\right)=0$

TH1: Nếu $f\left(\cos 2x\right)=a>1$ thì phương trình này vô nghiệm.

TH2: Nếu $f\left(\cos 2x\right)=-a<-1$ thì $\left|\cos 2x\right|>1$, phương trình này vô nghiệm.

TH3: Nếu $f\left(\cos 2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\pm a\,(VN)\\ \cos 2x=0\end{array}\right.$

$\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$ nên có 4 điểm trên đường tròn lượng giác.

Vậy có 4 điểm.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên R và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0$ là

A. 4. **B.** 2 **C.** 3 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$		$-a$		-1		0		1		a		$+\infty$
y'		$+$		0		$-$		$+$		0		$-$	
y	$-\infty$	↗		1	↘		0	↗		1	↘		$-\infty$

Dựa và bảng biến thiên ta có $f\left(x\right)\le 1,\forall x\in R$ và

$$f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos 2x\right)=a\\ f\left(\cos 2x\right)=-a\\ f\left(\cos 2x\right)=0\end{array}\right.\text{ với }a>1$$

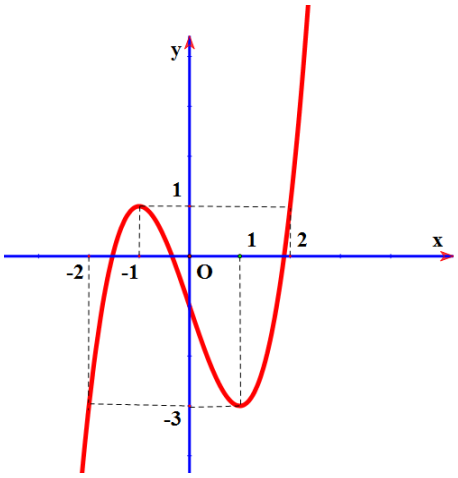
Với $f\left(\cos 2x\right)=a$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $f\left(\cos 2x\right)=-a\Leftrightarrow\cos 2x=\pm b$ với $b>1$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $f\left(\cos 2x\right)=0\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình $f\left(f\left(\cos 2x\right)\right)=0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(3-2f\left(x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

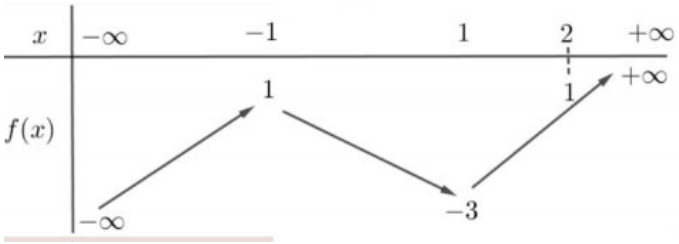
Dựa vào đồ thị ta có: $f\left(3-2f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2f\left(x\right)=-1\\3-2f\left(x\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Mà $f\left(x\right)=2$ có 1 nghiệm duy nhất lớn hơn 2.

Và $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1\in\left(-2;-1\right),x_2\in\left(-1;0\right),x_3\in\left(1;2\right)$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ sau



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(\left|2f\left(x\right)+m\right|\right)=1$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;1\right]$.

A. 13. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

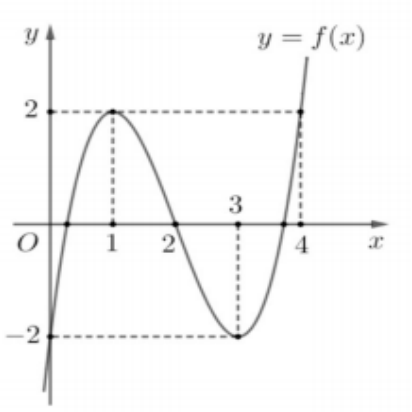
Đặt $t=\left|2f\left(x\right)+m\right|,\left(t\geq0\right)$ phương trình trở thành

$$f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|2f\left(x\right)+m\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2f\left(x\right)+m=2\\2f\left(x\right)+m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}\\f\left(x\right)=\dfrac{-2-m}{2}\end{array}\right.$$

Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-1;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le \dfrac{2-m}{2} \le 1 \\ -3 \le \dfrac{-2-m}{2} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \le m \le 4.$

Vậy có 5 giá trị trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(\left|f(x)\right|\right) = x$ là



A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f\left(\left|f(x)\right|\right) \Rightarrow g'(x) = f'\left(\left|f(x)\right|\right).\left(\left|f(x)\right|\right)' = f'\left(\left|f(x)\right|\right).\left(\sqrt{f^2(x)}\right)'$

$= f'\left(\left|f(x)\right|\right).\dfrac{f(x)}{\left|f(x)\right|}.f'(x)$, điều kiện $f(x) \ne 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ne a \in (0;1) \\ x \ne 2 \\ x \ne b \in (3;4) \end{array}\right.$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f'\left(\left|f(x)\right|\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ \left|f(x)\right| = 1 \\ \left|f(x)\right| = 3 \end{array}\right.$

$\left|f(x)\right| = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = c\,(0 < a < c < 1) \\ x = h\,(1 < h < 2) \\ x = d\,(3 < b < d < 4) \end{array}\right.$; $f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e\ (0 < e < a) \\ x = p\,(3 < p < b) \\ x = t\,(2 < t < 3) \end{array}\right.$

$\left|f(x)\right| = 3 \Leftrightarrow f(x) = \pm 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m\,(m > 4) \\ x = n\,(n < 0) \end{array}\right.$

Ta có $f(c)=f(d)=f(h)=1, f(e)=f(p)=f(t)=-1, f(m)=3, f(n)=-3.$

$g(a)=f(|f(a)|)=f(|0|)=f(0)=-2,\ g(c)=f(|f(c)|)=f(|1|)=f(1)=2$

$g(n)=f(|f(n)|)=f(|-3|)=f(3)=-2,\ g(e)=f(|f(e)|)=f(|-1|)=f(1)=2$

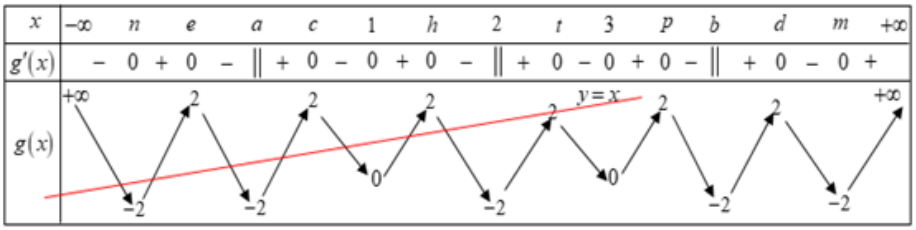
$g(1)=f(|f(1)|)=f(|2|)=f(2)=0,\ g(2)=f(|f(2)|)=f(|0|)=f(0)=-2$

$g(3)=f(|f(3)|)=f(|-2|)=f(2)=0,\ g(p)=f(|f(p)|)=f(|-1|)=f(1)=2$

$g(b)=f(|f(b)|)=f(|0|)=f(0)=-2,\ g(d)=f(|f(d)|)=f(|1|)=f(1)=2$

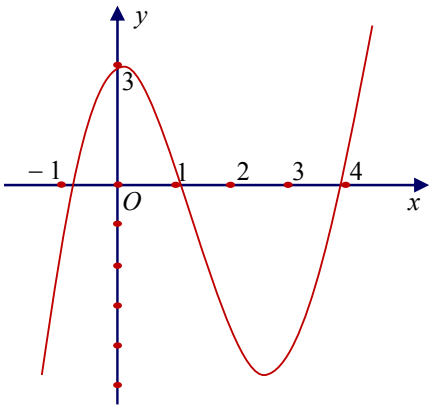
$g(m)=f(|f(m)|)=f(3)=-2.$

Ta có BBT



Đường thẳng $y=x$ đi qua 2 điểm $(-1;-1);(2;2)$ nên nó cắt đồ thị hàm số $g(x)=f(|f(x)|)$ tại 8 điểm phân biệt nên số nghiệm thực của phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

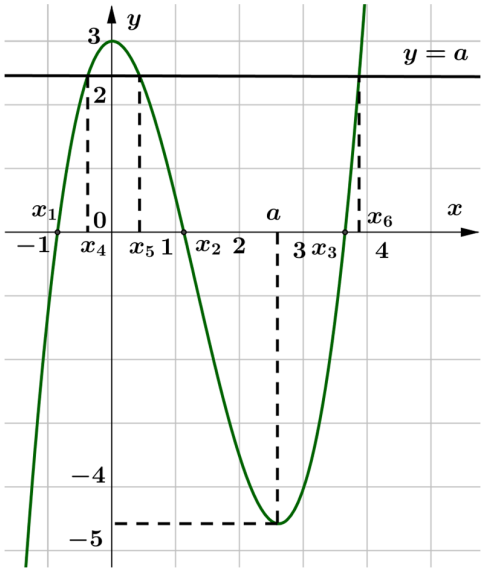
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'(x)=3f'(f(x)).f'(x)$.

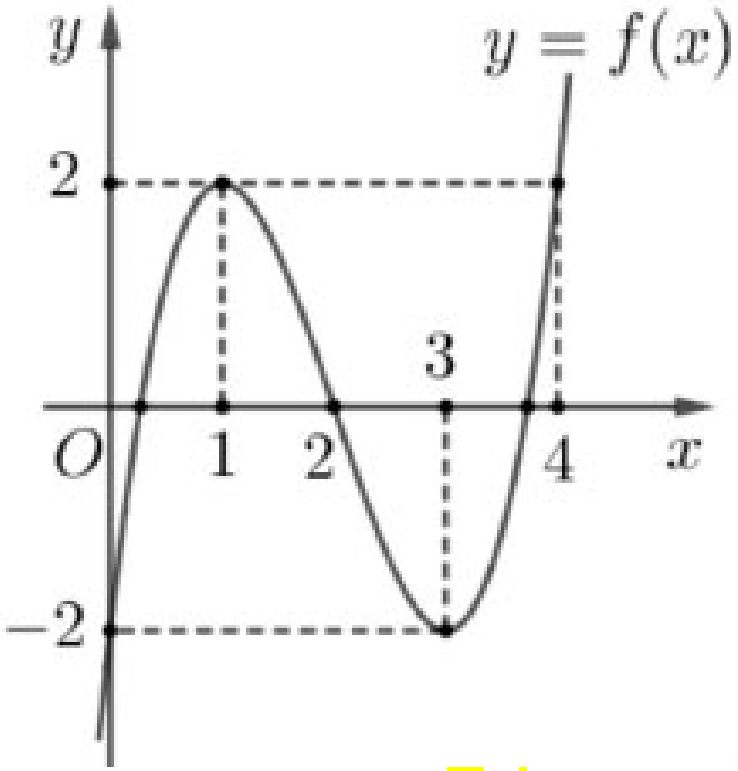
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 3f'(f(x)).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(f(x))=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=a\\x=0\\x=a\end{array}\right.,\ (2<a<3).$$

$f(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2<a<3$ nên $f(x)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x)=3f(f(x))+4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|f(x)\right|\right)$ là



A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

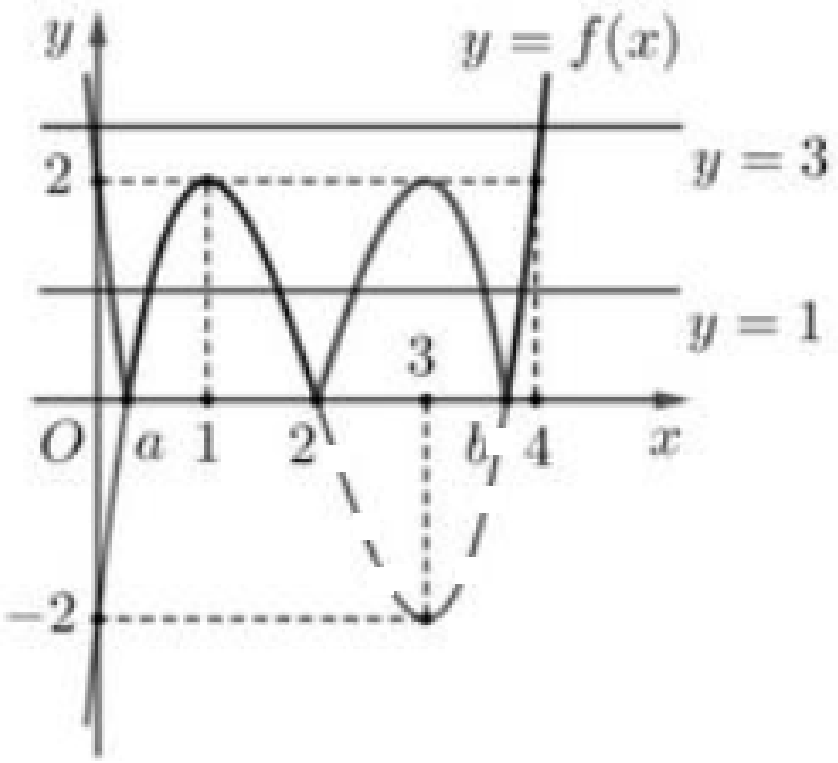
Cách 1:

Xét $g(x)=f\left(\left|f(x)\right|\right)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{f(x).f'(x)}{\left|f(x)\right|}.f'\left(\left|f(x)\right|\right)$

+ Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{a;2;b\}(a<2<b)$

+ Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x=1;x=3\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

+ Từ đồ thị của hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $\left|f(x)\right|$ đường nét liền trong hình vẽ dưới đây



Xét phương trình $f'\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}\left|f\left(x\right)\right|=1\Leftrightarrow x\in\left\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6\right\}\\ \left|f\left(x\right)\right|=3\Leftrightarrow x\in\left\{x_7;x_8\right\}\end{array}\right.$

Trong đó $x_7<x_1<a<x_2<1<x_3<2<x_4<3<x_5<b<x_6<x_8$

+ Ta có: $\left\{\begin{array}{c}\left|f\left(x_1\right)\right|=\left|f\left(x_2\right)\right|=...=\left|f\left(x_6\right)\right|=1\Rightarrow g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=...=g\left(x_6\right)=f\left(1\right)=2\\ \left|f\left(x_7\right)\right|=\left|f\left(x_8\right)\right|=3\Rightarrow g\left(x_7\right)=g\left(x_8\right)=f\left(3\right)=-2\\ f\left(a\right)=f\left(2\right)=f\left(b\right)=0\Rightarrow g\left(a\right)=g\left(2\right)=g\left(b\right)=f\left(0\right)=-2\\ g\left(1\right)=f\left(\left|f\left(1\right)\right|\right)=f\left(2\right)=0;g\left(3\right)=f\left(\left|f\left(3\right)\right|\right)=f\left(2\right)=0\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên sau:

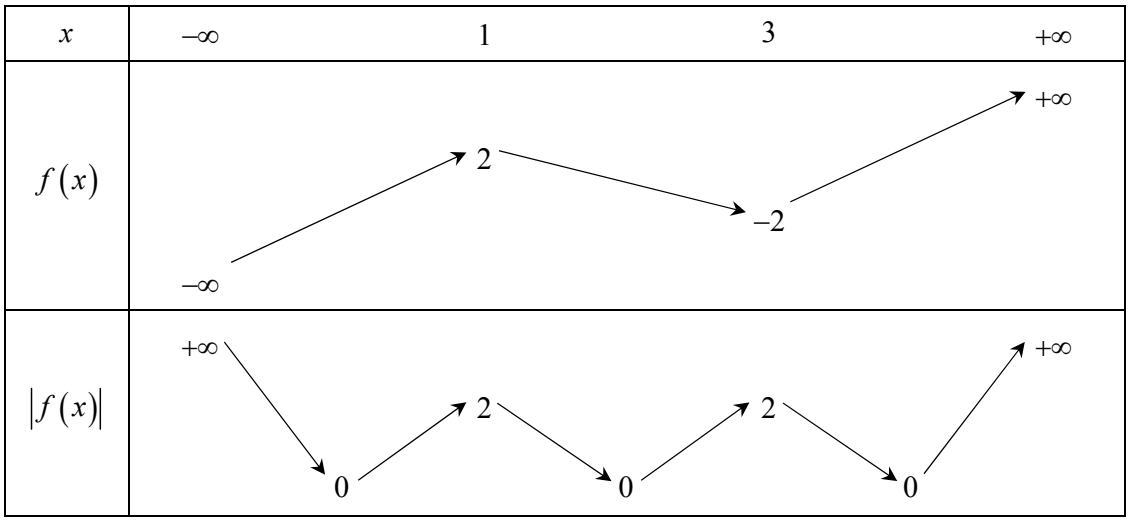
x	$-\infty$	x_7	x_1	a	x_2	1	x_3	2	x_4	3	x_5	b	x_6	x_8	$+\infty$
$g'(x)$		$-$ 0 $+$	0 $-$	||	$+$ 0 $-$	||	$+$ 0 $-$		$+$ 0 $-$		$+$ 0 $-$	||	$+$ 0 $-$	0 $+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ có 13 điểm cực trị.

7 cực tiểu và 6 cực đại

Cách 2:

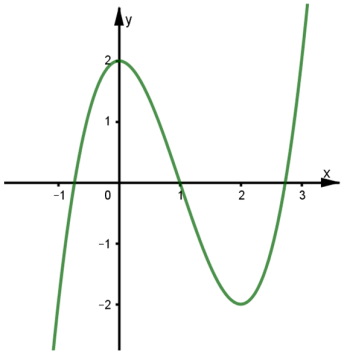
Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ như sau:



Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị và trên $\left(0;2\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ có 1 điểm cực trị suy ra hàm số $f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ có $2.2+4.1+5=13$ điểm cực trị.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



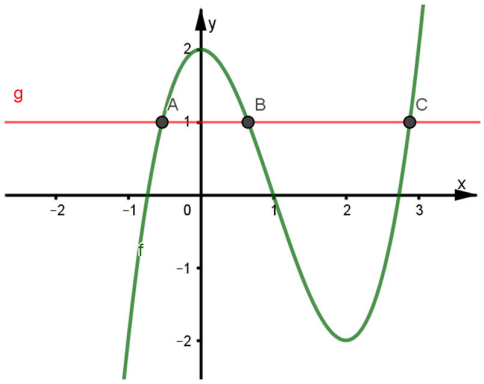
Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m=6$. **B.** $m=7$. **C.** $m=5$. **D.** $m=9$.

Lời giải

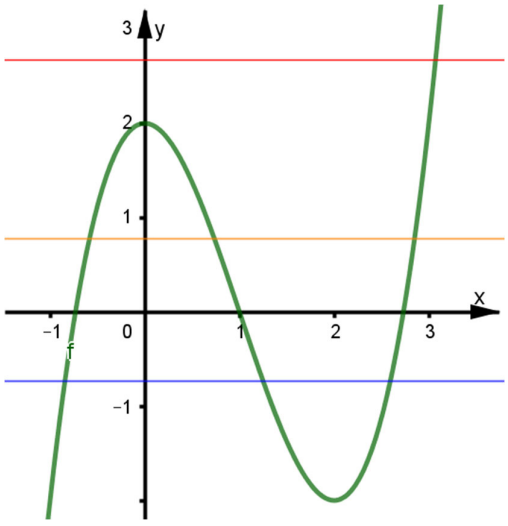
Chọn B

Đặt $f\left(x\right)=u$ khi đó nghiệm của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f\left(u\right)$ với đường thẳng $y=1$.



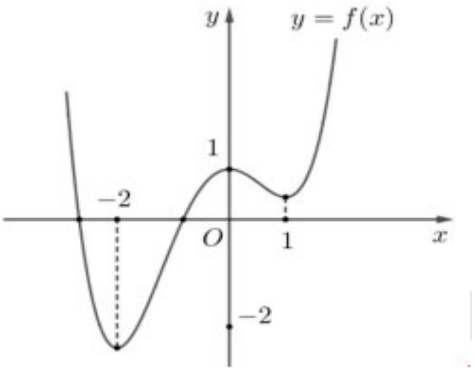
Dựa vào đồ thị ta có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=u_1 \\ f\left(x\right)=u_2 \\ f\left(x\right)=u_3 \end{array}\right.$ với $u_1\in\left(-1;0\right)$, $u_2\in\left(0;1\right)$, $u_3\in\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ với từng đường thẳng $y=u_1$, $y=u_2$, $y=u_3$.



Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ có 7 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'\left(x\right)=0$ là:



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=-2;x=0;x=1$. Vì vậy $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2,0,1\}$.

Vậy $g'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=f'(x).f'(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(f(x))=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{-2,0,1\}\\f(x)\in\{-2,0,1\}\end{array}\right.$

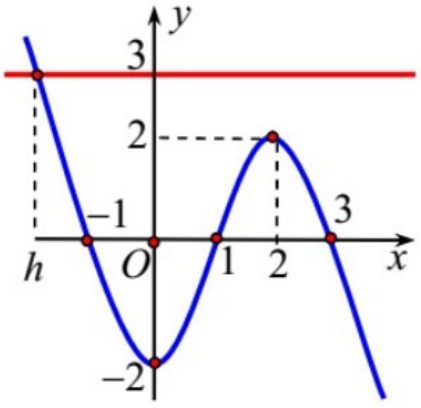
Phương trình $f(x)=-2$ có 2 nghiệm.

Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm.

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm, trong đó có một nghiệm $x=0$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả $3+2+2+(3-1)=9$ nghiệm.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

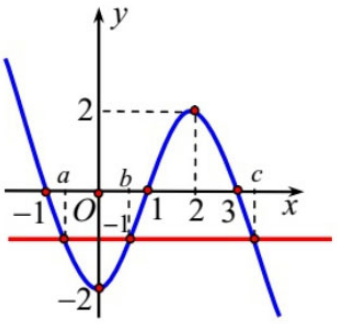


A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=9$.

Lời giải:

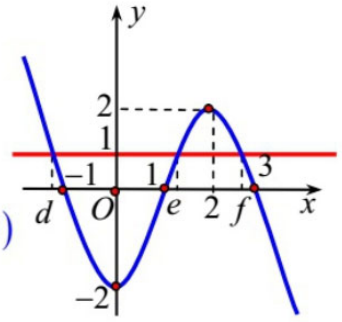
Đặt $t=f(x)\Rightarrow f(f(x))=0\Leftrightarrow f(t)=0$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\\f(x)=1\\f(x)=3\end{array}\right.$



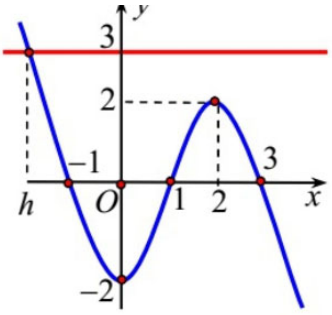
Trường hợp 1: Phương trình $f(x)=-1$

Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\in(-1;0)\\x=b\in(0;1)\\x=c\in(3;4)\end{array}\right.\quad(I)$



Trường hợp 2: Phương trình $f(x)=1$

Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=d\in(-2;-1)\\x=e\in(1;2)\\x=f\in(2;3)\end{array}\right.\quad(II)$



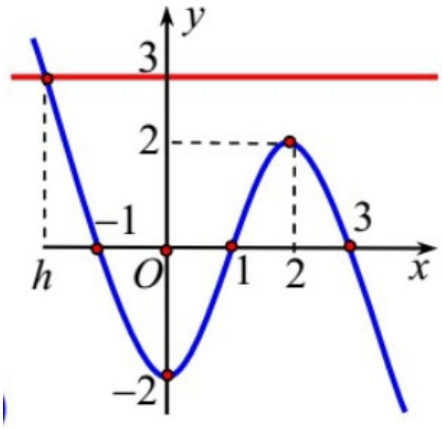
Trường hợp 3: Phương trình $f(x)=3$

Dựa vào đồ thị phương trình có 1 nghiệm $x=h\in(-2;-1)\quad(III)$

Từ $(I);(II)$ và (III) phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

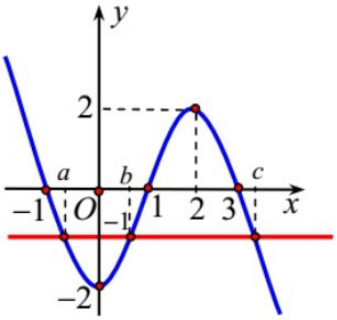
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực âm của phương trình $f(f(x))=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Lời giải:

Đặt $t=f(x)\Rightarrow f(f(x))=0\Leftrightarrow f(t)=0$

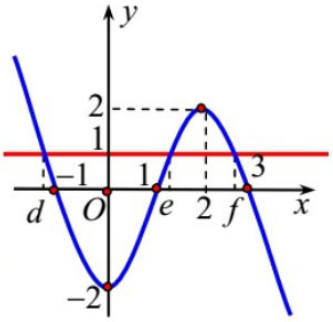


Dựa vào đồ thị phương trình $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-1\\f(x)=1\\f(x)=3\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Phương trình $f(x)=-1$

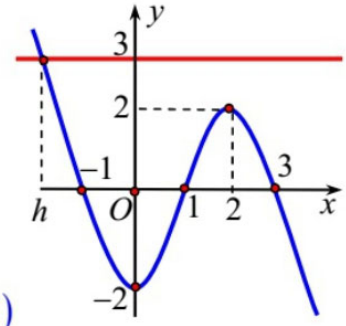
Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\in(-1;0)\\x=b\in(0;1)\\x=c\in(3;4)\end{array}\right.\ (I)$

Trường hợp 2: Phương trình $f(x)=1$



Dựa vào đồ thị phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=d\in(-2;-1)\\x=e\in(1;2)\\x=f\in(2;3)\end{array}\right.\ (II)$

Trường hợp 3: Phương trình $f(x)=3$

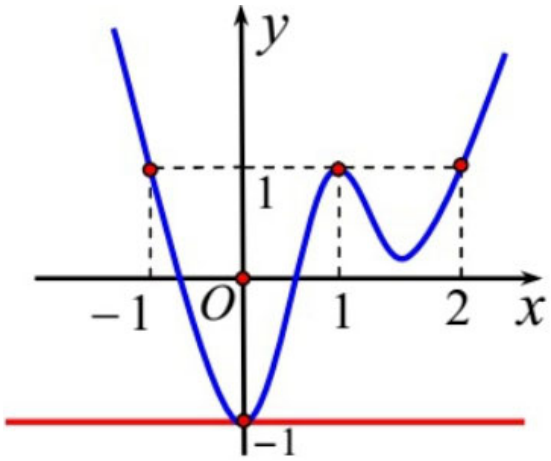


Dựa vào đồ thị phương trình có 1 nghiệm $x=h\in(-2;-1)\ (III)$

Từ $(I);(II)$ và (III) phương trình $f(f(x))=1$ có 3 nghiệm thực âm là $x\in\{a;d;h\}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

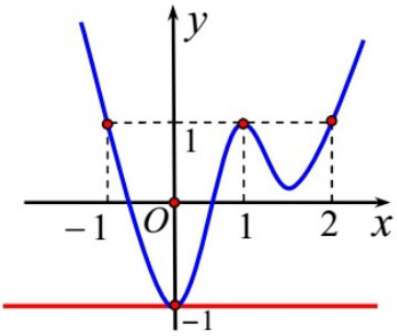


A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=8$.

Lời giải:

Đặt $t=f(x)\Rightarrow f(f(x))=1\Leftrightarrow f(t)=1$

Dựa vào đồ thị $f(t)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1 \\ f(x)=1 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

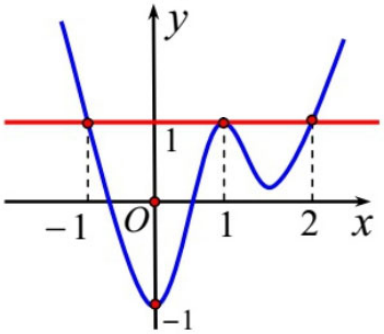


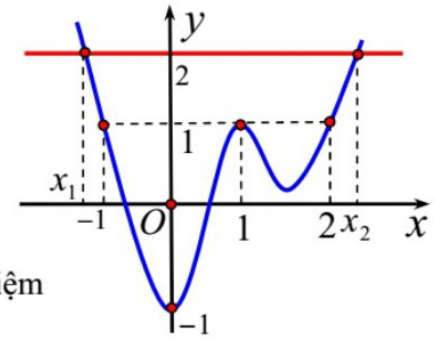
Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị

Phương trình $f(x)=-1\Leftrightarrow x=0$ (I)

Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (II)





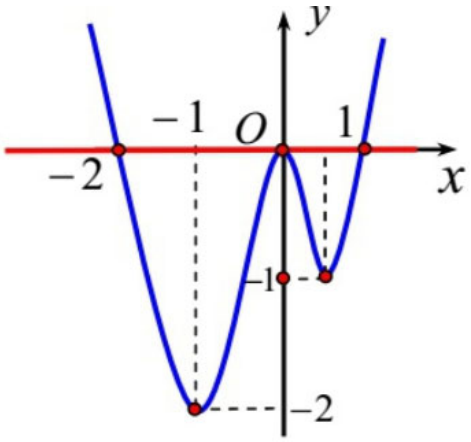
Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<-1 \\ x=x_2>2 \end{array}\right. \quad (III)$

Từ $(I);(II)$ và (III) phương trình $f(f(x))=1$ có 6 nghiệm

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f(f(x))=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

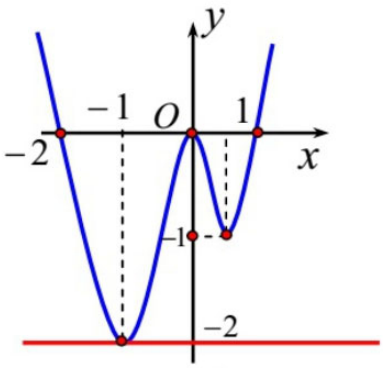


A. $m=5$. **B.** $m=6$. **C.** $m=7$. **D.** $m=8$.

Lời giải:

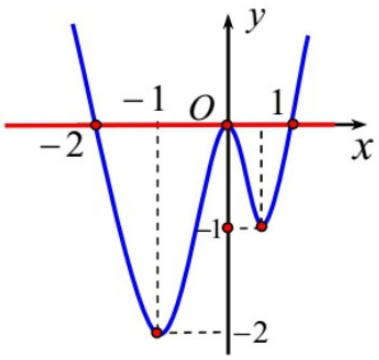
Đặt $t=f(x)\Rightarrow f(f(x))=0\Leftrightarrow f(t)=0$

Dựa vào đồ thị $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-2\\f(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.$



Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị

Phương trình $f(x)=-2\Leftrightarrow x=-1\ (I)$

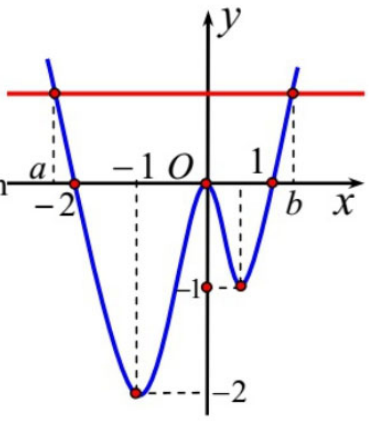


Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.\ (II)$

Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:

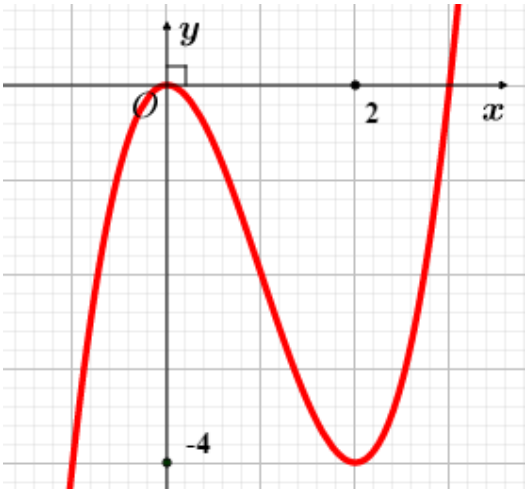
Phương trình $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-2\\x=b>1\end{array}\right.\ (III)$



Từ $(I);(II)$ và (III) phương trình $f(f(x))=0$ có 6 nghiệm

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 7. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên.



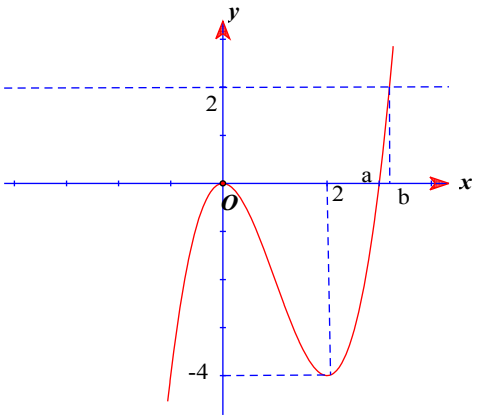
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Cách 01:



Ta có: $y^{'}=\left[f\left(f\left(x\right)\right)\right]^{'}=f^{'}\left(x\right).f^{'}\left(f\left(x\right)\right)$

$$y^{'}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^{'}\left(x\right)=0\\f^{'}\left(f\left(x\right)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^2=0\\x=a\in\left(2;+\infty\right)\\x=b\in\left(\mathrm{a};+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=0\\x=2\\x=a\in\left(2;+\infty\right)\\x=b\in\left(\mathrm{a};+\infty\right)\end{array}\right.$$

Do $x\in\left\{0;2;\mathrm{a};b\right\}$ đều là nghiệm đơn hoặc các nghiệm bội lẻ nên chúng đều là các điểm cực trị.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị

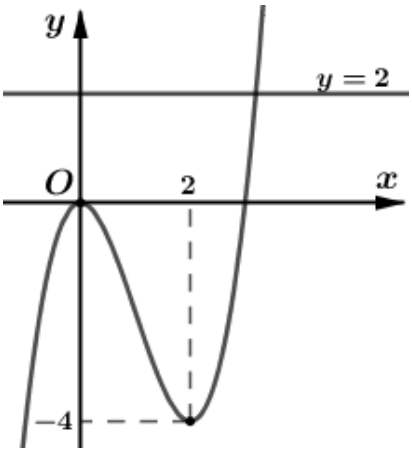
Cách 02:

Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=0,\ x=2.$

Suy ra $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \left(\text{nghiem don}\right)\\x=2\ \left(\text{nghiem don}\right)\end{array}\right.$.

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right).f'\left[f\left(x\right)\right];\ g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right.$.

- $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \left(\text{nghiem don}\right)\\x=2\ \left(\text{nghiem don}\right)\end{array}\right.$.
- $f'\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\ \left(1\right)\\f\left(x\right)=2\ \left(2\right)\end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị suy ra:

- Phương trình (1) có hai nghiệm $x=0$ (nghiệm kép) và $x=a\ (a>2)$.
- Phương trình (2) có một nghiệm $x=b\ (b>a)$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x=0,\ x=2,\ x=a$ và $x=b$. Suy ra hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ có 4 điểm cực trị.

Cách 03:

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$, $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=a\in(2;+\infty)\\x=b\in(a;+\infty)\end{array}\right.$$

Với $x\in(-\infty;0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)>0\\f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in(0;2)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)<0\\f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'<0$.

Với $x\in(2;a)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)>0\\f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in(a;b)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)>0\\0<f(x)<2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0\end{array}\right.\Rightarrow y'<0$.

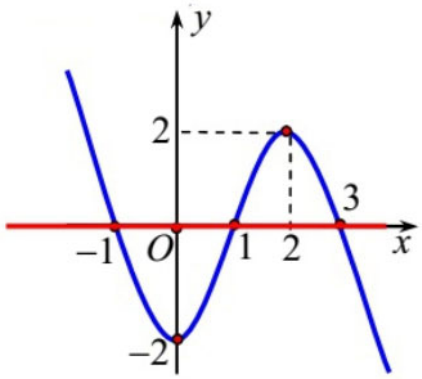
Với $x\in(b;+\infty)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)>0\\f(x)>2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'>0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ bằng?



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Đạo hàm $y'=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right).$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left(f\left(x\right)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-1\\x=1\\x=3\\x=a\in\left(-\infty;-1\right)\\x=2\left(\text{ke´p }2\right)\end{array}\right.$$

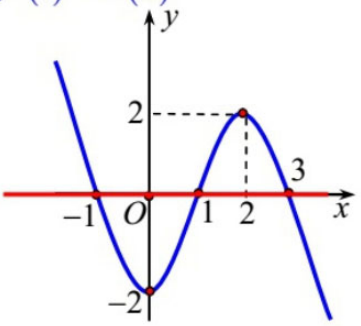
Vậy hàm số đã cho có 6 cực trị.

Lời giải:

Ta có: $y'=f'(x)\left[f'\left(f(x)\right)\right]$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\ (1)\\f'(t)=0\ (2)\end{array}\right.$ (Với $t=f(x)$)

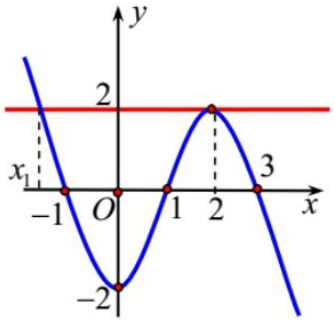
Xét phương trình $(1)\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\ (I)$

Xét phương trình $(2)\Leftrightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$



Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.\ (II)$



Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-2;-1)\\x=2\end{array}\right.\ (III)$

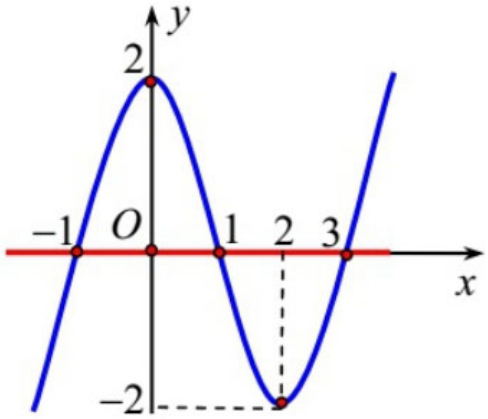
Bảng xét dấu y' *:*

x	$-\infty$		x_1		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$y'=f'(x)f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Qua bảng xét dấu hàm số 6 điểm cực trị $x\in\{x_1;-1;0;1;2;3\}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ bằng?



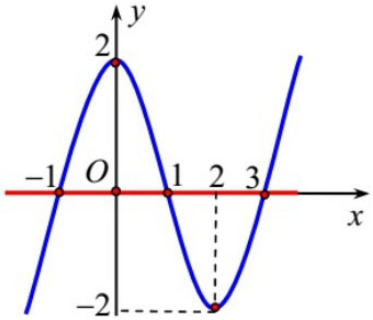
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

Ta có: $y' = f'(x)\left[f'\left(f(x)\right)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'(t) = 0 \ (2) \end{array}\right.$ (Với $t = f(x)$)

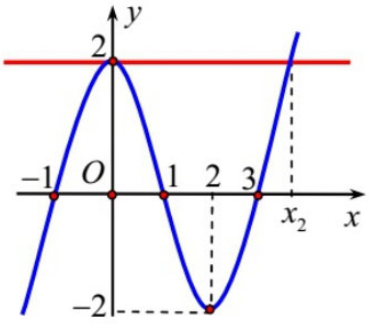
Xét phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. (I)$

Xét phương trình $(2) \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$



Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. (II)$



Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị

Phương trình $f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_2 > 3 \end{array}\right. (III)$

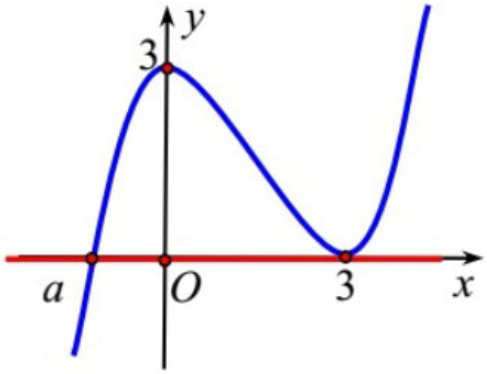
Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	|	$-$	0	$-$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Qua bảng xét dấu hàm số đạt cực trị tại $x \in \{-1;0;1;2;3;x_2\}$. Vậy có 6 điểm cực trị

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(f(x))$ bằng?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải 01:

Đạo hàm $y'=f'(x).f'(f(x))$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ f(x)=0 \\ f(x)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=a\in(-\infty;0) \\ x=3\,(\text{ke´p }2) \\ x=b\in(3;+\infty) \\ x=0\,(\text{ke´p }2) \end{array}\right.$$

Vậy hàm số đã cho có 4 cực trị.

Lời giải:

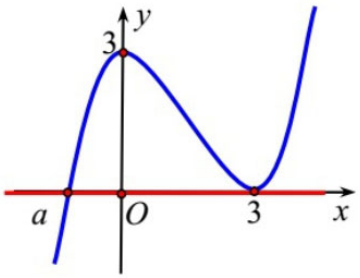
Ta có: $y' = f'(x)\left[f'\left(f(x)\right)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'(t) = 0 \ (2) \end{array}\right.$ (Với $t = f(x)$)

Xét phương trình $(1) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. (I)$

Xét phương trình $(2) \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{array}\right.$

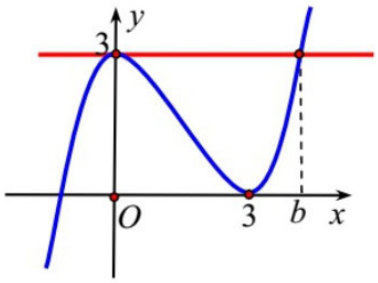
Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a < 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$



Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị

Phương trình $f(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = b > 3 \end{array}\right. (III)$



Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$		a		0		3		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$y' = f'(x)f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Qua bảng xét dấu hàm số đạt cực trị tại $x \in \{a; 0; 3; b\}$. Vậy có 4 điểm cực trị

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

BÀI TOÁN 26: XÁC ĐỊNH TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tính đơn điệu của hàm số sử dụng phương pháp xét hàm số.

Bước 1: Tìm …… của hàm số.

Bước 2: Tính …… và xét dấu ……
Tìm ……... ……. mà tại đó đạo hàm bằng …….. hoặc ……..

Bước 3: Lập ……. (nếu cần).

Bước 4: ……..của hàm số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0, \forall x\in(a;b)$

B. Nếu $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến $(a;b)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$.

D. Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

Câu 2. **(THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG - LẦN 1 - 2018)** Hàm số nào sau đây có chiều biến thiên khác với chiều biến thiên của các hàm số còn lại.

A. $h(x)=x^3+x-\sin x$.

B. $k(x)=2x+1$.

C. $g(x)=x^3-6x^2+15x+3$.

D. $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+5}{x+1}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 4. Hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left[1;\dfrac{5}{2}\right)$.

B. $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

C. $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

D. $\left(\dfrac{5}{2};4\right]$.

Câu 5. **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018)** Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 6. **(THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực**C.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

Câu 7. **(THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH - PHÚ YÊN - 2018)** Cho hàm số: $y=(m-1)x^3+(m-1)x^2-2x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 8. **(THPT** CHUYÊN **HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 9. Gọi S là tập **hợp** các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{m\cos x-4}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên không thuộc S.

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 10. **Câu 40: [DS12.C5.1.D05.c] (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. **(THPT NGUYỄN HUỆ - NINH BÌNH - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

B. $f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$đồng biến trên $(a;b)$.

C. $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

D. $f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)\Leftrightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

Câu 2. **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NĐ - LẦN 1 - 2018)** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+x$. **B.** $y=x^4+x^2$. **C.** $y=x^3+x$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Câu 3. Hàm số $y=-x^3+3x-4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 4. **(THPT LƯƠNG THẾ VINH - HN - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 5. **(CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 6. **(THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=x^4-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 8. Hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-2;2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(2;+\infty)$

Câu 9. Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 10. **(THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 11. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 12. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. Cho **hàm** số $y=|x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 14. **(THPT LƯƠNG THẾ VINH - HN - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-(m+1)x^2+(m-2)x-3m$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\frac{-1}{4}\le m<0$. **B.** $m\le-\frac{1}{4}$. **C.** $m<0$. **D.** $m>0$.

Câu 15. **(SỞ GD&ĐT LÀO CAI - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y=f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2).g(x)+2018$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 16. **(TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3x-3\cos^2x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m>-3$. **B.** $m\le0$. **C.** $m\le-3$. **D.** $m>0$.

Câu 17. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018)** Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S=[-1;0]$ **B.** $S=\varnothing$. **C.** $S=\{-1\}$. **D.** $S=[0;1]$.

Câu 18. **(THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018)** Tìm tất cả các số thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $-\frac{1}{2}<m<0$ hoặc $m>1$. **B.** $m>-\frac{1}{2}$.

C. $m\ge-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\le0$ hoặc $m\ge1$.

Câu 19. **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 20. **Câu 39: [DS12.C5.1.D05.c] (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. *Mệnh đề nào sau đây là đúng?*

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\le 0,\forall x\in(a;b)$

B. Nếu $f'(x)\le 0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $(a;b)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0\ \forall x\in(a;b)$.

D. Nếu $f'(x)<0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ đơn điệu và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)$. **B.** $f'(x)\le 0,\forall x\in(a;b)$.

C. $f'(x)\ne 0,\forall x\in(a;b)$. **D.** $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(a;b)$.

Câu 3. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của chúng

A. $y=x^4+2x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=x^3+3x^2-21$. **D.** $y=x^3+x+1$.

Câu 4. **(SGD&ĐT ĐỒNG THÁP - 2018)** Khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3+3x^2+4$ là

A. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 5. **(THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là đúng nhất:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$;

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 6. **(THPT KIM LIÊN - HÀ NỘI - HKI - 2018)** Hàm số $y=-x^3+3x-5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 7. **(THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018)** Tìm khoảng nghịch biến của số $y=-x^3+3x^2+1$.

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

C. $(-\infty;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 8. **(CTN - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 9. **(THPT CAN LỘC - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Câu 10. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018)** Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 11. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 12. **(THPT HÒA VANG - ĐÀ NẴNG - 2018)** Các khoảng đồng biến của hàm số $y=x^4-8x^2-4$ là

A. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$. **D.** $(-2;0)$ và $(0;2)$.

Câu 13. **(THPT CẦU GIẤY - HKI - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 14. **(THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018)** Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y=\frac{2x-1}{x+2}$ là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 15. **(THPT CAN LỘC - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Xét hàm số $y=\frac{2-x}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 16. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 17. Cho **hàm** số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 18. Hàm số $y=\sqrt{x^2-7x+12}$ đồng biến trên.

A. $(-\infty,3)$. **B.** $(4,+\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 19. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 20. **(SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 21. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le\frac{4}{3}$. **B.** $m\le\frac{1}{3}$. **C.** $m\ge\frac{1}{3}$. **D.** $m\ge\frac{4}{3}$.

Câu 22. Có tất cả **bao** nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 23. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018)** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{2x^2-3x+m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m>-2$. **B.** $m\ge-2$. **C.** $m\le-2$. **D.** $m<-2$.

Câu 25. **(THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 3.

Câu 26. **(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 27. **(THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU - ĐỒNG THÁP - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2-4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;\ 4]$.

A. $m\le\frac{1}{2}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $m\le 2$.

Câu 28. **(HỒNG BÀNG - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

A. $-2<m\le -1$. **B.** $-2\le m<-1$. **C.** $-2\le m\le -1$. **D.** $m\le -1$.

Câu 29. **(CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. $m\in(-\infty;-5)$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in[-5;2)$. **D.** $m\in(-\infty;2]$.

Câu 30. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 31. **(THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI - SÓC TRĂNG - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{3}{2}x^2-mx-\frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 32. **Câu 41: [DS12.C5.1.D05.d] (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

A. $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 33. **Câu 42: [DS12.C5.1.D05.d] (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

BÀI TOÁN 26: XÁC ĐỊNH TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tính đơn điệu của hàm số sử dụng phương pháp xét hàm số.

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $y'=f'(x)$ và xét dấu y'. Tìm các điểm $x_i\,(i=1;2;...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác đinh.

Bước 3: Lập bảng biến thiên (nếu cần).

Bước 4: Kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)$

B. Nếu $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến $(a;b)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$.

D. Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. Dạng toán: Lý thuyết về sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Phương pháp:

2. Áp dụng lý thuyết: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Điều kiện cần

Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x)\ge 0,\forall x\in K$.

Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x)\le 0,\forall x\in K$.

Điều kiện đủ

Nếu $f'(x)>0,\forall x\in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.

2. Hướng giải: áp dụng lý thuyết.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)$

Đây mà mệnh đề khi và chỉ khi nên chiều điều kiện cần sai nên câu A sai.

B. Nếu $f'(x)\ge 0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến $(a;b)$.

Hàm số $f'(x)\ge 0$ những chưa lý giải $f'(x)=0$ là hữu hạn hay vô han nên sai

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0\ \forall x\in(a;b)$.

Mệnh đề khi và chỉ khi sai theo chiều điều kiện cần.

D. Nếu $f'(x)>0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

Đây là điều kiện đủ nên mệnh đề đúng.

Câu 2. **(THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG - LẦN 1 - 2018)** Hàm số nào sau đây có chiều biến thiên khác với chiều biến thiên của các hàm số còn lại.

A. $h(x)=x^3+x-\sin x$.

B. $k(x)=2x+1$.

C. $g(x)=x^3-6x^2+15x+3$.

D. $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+5}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

❍ $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x-7}{(x+1)^2}=\dfrac{-(x+1)^2-6}{(x+1)^2}<0,\forall x\ne -1\Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

❍ $g'(x)=3x^2-12x+15=3(x-2)^2+2>0,\forall x\ \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

❍ $k'(x)=2>0,\forall x\ \Rightarrow k(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

❍ $h'(x)=3x^2+1-\cos x=3x^2+2\sin^2\dfrac{x}{2}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và do hàm số $h(x)=x^3+x-\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số 3003 đồng biến trên AD.

Qua đây ta nhận thấy các hàm số $h(x)$, $g(x)$, $k(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, còn hàm $f(x)$ thì không.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=4x^3-4x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Câu 4. Hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left[1;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};4\right]$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=[1;4]$.

Ta có $y=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$, $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	1		$\frac{5}{2}$		4
y		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2};4\right)$.

Câu 5. **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018)** Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y'=\dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}<0\Leftrightarrow x>0$. Chọn C.

Câu 6. **(THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

$y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ \dfrac{-m}{2}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{-m}{2}\le 0\\ \dfrac{-m}{2}\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 0\\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2$.

Vì m là số nguyên nên $m\in\{0;1\}$.

Câu 7. **(THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH - PHÚ YÊN - 2018)** Cho hàm số: $y=(m-1)x^3+(m-1)x^2-2x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D.

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Có $y'=3(m-1)x^2+2(m-1)x-2$.

TH1: $m=1$ thì $y'=-2<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

+ TH2: $m\neq 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3(m-1)<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ (m-1)(m+5)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ -5\le m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -5\le m<1.$$

Vậy các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 8. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $M(a;b;c)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$$\Leftrightarrow 1+m\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\ (1).$$

Nếu $x=1$ thì (1) luôn thỏa $\forall m$.

Nếu $x>1$ thì $(1)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1}\Leftrightarrow m\ge -\sqrt{1+\dfrac{2}{(x-1)^2}}\Leftrightarrow m\ge -1$.

Nếu $x<1$thì $(1)\Leftrightarrow m\le -\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1}\Leftrightarrow m\le \sqrt{1+\dfrac{2}{(x-1)^2}}\Leftrightarrow m\le 1$.

Vậy $-1\le m\le 1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Do đó có 3 giá trị nguyên m cần tìm.

Câu 9. Gọi S là tập **hợp** các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{m\cos x-4}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên không thuộc S.

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\cos x$, vì $x\in\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, ta được $y=f(t)=\dfrac{mt-4}{t-m}$, với $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Bài toán trở thành: Tìm m để hàm số $y=f(t)=\dfrac{mt-4}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-m^2+4}{(t-m)^2}$. Hàm số $y=f(t)=\dfrac{mt-4}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ khi

$$f'(x)<0,\forall\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4<0\\ m\notin\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-2\vee m>2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.$$

Các phần tử nguyên không thuộc S là $\{-1;0;1\}$.

Câu 10. **Câu 40: [DS12.C5.1.D05.c] (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ $\Leftrightarrow$ $y'>0$, $\forall x\in(-\infty;-7)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-4>0\\ -m\notin(-\infty;-7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ -m\ge -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ m\le 7\end{cases}\Leftrightarrow 4<m\le 7.$$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. **(THPT NGUYỄN HUỆ - NINH BÌNH - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

B. $f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

C. $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

D. $f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)\Leftrightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

Lời giải

Theo định lý về sự biến thiên: $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

$f(x)$ đồng biến trên $(a;b)\Rightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in(a;b)$.

Vậy phương án đúng là **A**

Câu 2. **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NĐ - LẦN 1 - 2018)** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+x$. **B.** $y=x^4+x^2$. **C.** $y=x^3+x$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Chọn C.

Ta thấy hàm số $y=x^2+x$ là hàm số bậc hai do đó không đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại đáp án **A**

Hàm số $y=x^4+x^2$ là hàm số trùng phương luôn có điểm cực trị do đó không đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra loại đáp án **B**

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ nên loại đáp án **D**

Vậy đáp án đúng là **C**

Cách khác: Hàm số $y=x^3+x$ có $y'=3x^2+1>0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$ do đó hàm số luôn đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Câu 3. Hàm số $y=-x^3+3x-4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$.

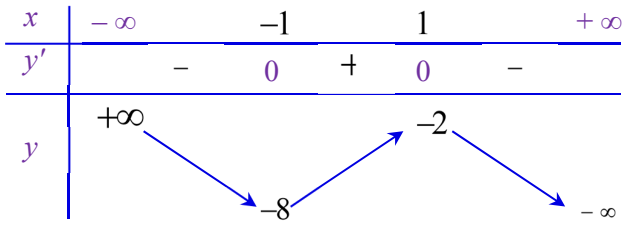
C. $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-3x^2+3$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 4. **(THPT LƯƠNG THẾ VINH - HN - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-3;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. Chọn C.

Câu 5. **(CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

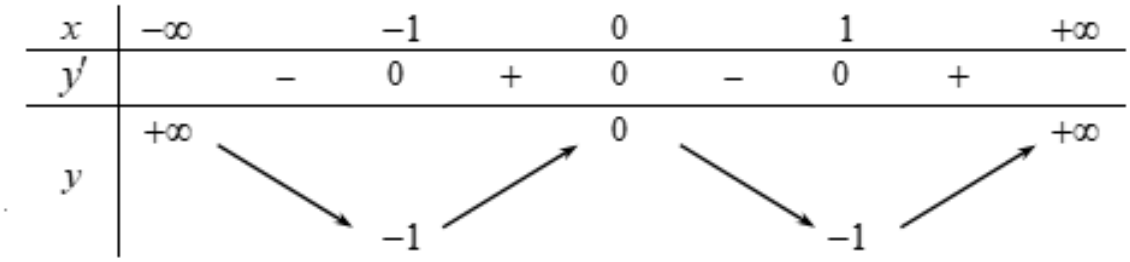
A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$; $y'=4x^3-4x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 6. **(THPT CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=x^4-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y'=x^3$.

Hàm số nghịch biến $\Rightarrow y'=x^3<0\Leftrightarrow x<0$. Chọn B.

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\frac{3}{(x+2)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 8. Hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-2;2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $x\neq 0$.

Ta có: $y'=\frac{x^2-4}{x^2}$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 9. Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

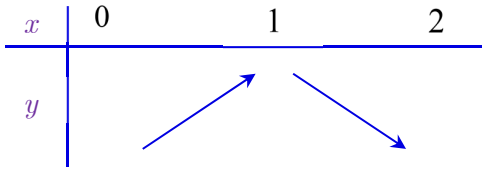
Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=[0;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 10. **(THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0$, $\forall x\in(5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 11. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

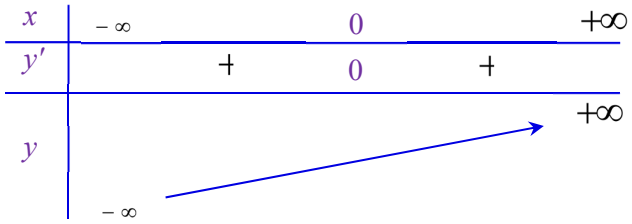
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 12. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

$y'=\dfrac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm m để $y'\geq 0$ trên $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ và dấu "="chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2-m+2>0 \Leftrightarrow -2<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1, \mathrm{m}=0$.

Câu 13. Cho **hàm** số $y=|x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

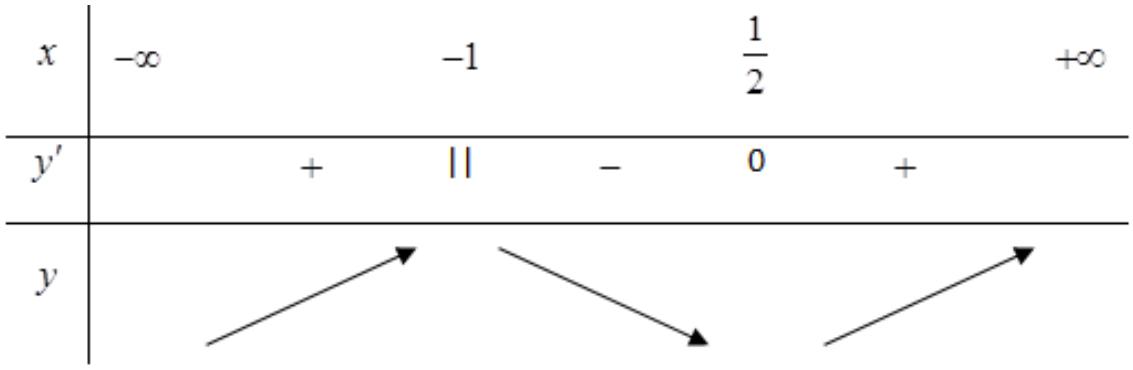
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có: $y'=\begin{cases}2x-1 & khi \quad x\geq -1\\ -2x+1 & khi \quad x<-1\end{cases}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên:



Từ BBT suy ra đáp án sai là B.

Câu 14. **(THPT LƯƠNG THẾ VINH - HN - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-(m+1)x^2+(m-2)x-3m$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\frac{-1}{4}\le m<0$. **B.** $m\le -\frac{1}{4}$. **C.** $m<0$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$y'=mx^2-2(m+1)x+(m-2)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0\forall x\in\mathbb{R}$.

TH1: $m=0$ ta có $y'=-2x-2$ (không thỏa mãn)

TH2: $m\ne 0$ ta có $y'\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ (m+1)^2-m(m-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 1+4m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -\frac{1}{4}$.

Câu 15. **(SỞ GD&ĐT LÀO CAI - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y=f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2).g(x)+2018$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y=f(1-x)-2018(1-x)+4037$.

Ta có $y'=-f'(1-x)-2018=-(1-(1-x))(1-x+2).g(1-x)=-x(3-x)g(1-x)$.

Ta có $y'<0\Leftrightarrow -x(3-x)g(1-x)<0\Leftrightarrow x(3-x)<0\Leftrightarrow x\in(0;3)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 16. **(TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m>-3$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $\sin x=t, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t^2-mt-4$

Ta có $f'(t)=3t^2+6t-m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$ cần:

$f'(t)\ge 0 \quad \forall t\in[0;1]\Leftrightarrow 3t^2+6t-m\ge 0 \quad \forall t\in[0;1]\Leftrightarrow 3t^2+6t\ge m \quad \forall t\in[0;1]$

Xét hàm số $g(t)=3t^2+6t$

$g'(t)=6t+6$

$g'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên

t	0		1
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	9

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m\le 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 17. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018)** Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S=[-1;0]$ **B.** $S=\varnothing$. **C.** $S=\{-1\}$. **D.** $S=[0;1]$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y'=x^2-2(m+1)x+(m^2+2m)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+(m^2+2m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+2\end{array}\right. \forall m$

Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(m;m+2)$ $\forall m$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $(-1;1)\subset(m;m+2)$.

Nghĩa là: $m\le -1<1\le m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -1 \\ -1<1 \\ 1\le m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$. Chọn C.

Câu 18. **(THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018)** Tìm tất cả các số thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $-\dfrac{1}{2}<m<0$ hoặc $m>1$. **B.** $m>-\dfrac{1}{2}$.

C. $m\ge -\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $m\ge 1$.

Lời giải

$x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x\in(0;1)$. Hàm số xác định trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $m\notin(0;1)$ hay $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$ (1).

Ta có $y'=\dfrac{\cos x(2m+1)}{(\sin x-m)^2}$. Hàm số đồng biến trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y'>0$ với $\forall x\in D \Leftrightarrow 2m+1>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp (1) ta có $-\dfrac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $m\ge 1$.

Câu 19. **(THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 4 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

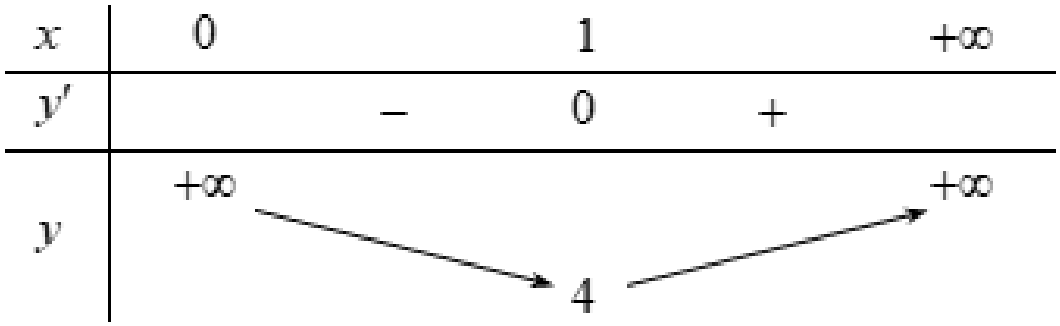
Ta có $y'=3x^3-2(m-1)x+\dfrac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$.

$y'\ge 0 \Leftrightarrow 2(m-1)\le 3x^2+\dfrac{1}{x^6}$.

Xét $g(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^6}$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Ta có $g'(x)=6x-\dfrac{6}{x^7}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên:



$2(m-1) \le g(x) \Leftrightarrow 2(m-1) \le 4 \Leftrightarrow m \le 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1,2,3\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương thỏa mãn bài toán.

Câu 20. **Câu 39: [DS12.C5.1.D05.c] (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{m-5}{(x+m)^2} > 0 \\ -m \notin (-\infty;-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ -m \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m \le 8.$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. *Mệnh đề nào sau đây là đúng?*

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\le 0, \forall x\in(a;b)$

B. Nếu $f'(x)\le 0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $(a;b)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0\ \forall x\in(a;b)$.

D. Nếu $f'(x)<0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Lời giải

Chọn D

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\le 0, \forall x\in(a;b)$

Đây mà mệnh đề khi và chỉ khi nên chiều điều kiện cần sai nên câu A sai.

B. Nếu $f'(x)\le 0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $(a;b)$.

Hàm số $f'(x)\le 0$ những chưa lý giải $f'(x)=0$ là hữu hạn hay vô han nên sai

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)>0\ \forall x\in(a;b)$.

Mệnh đề khi và chỉ khi sai theo chiều điều kiện cần.

D. Nếu $f'(x)<0\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Đây là điều kiện đủ nên mệnh đề đúng.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ đơn điệu và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)\ge 0, \forall x\in(a;b)$.

B. $f'(x)\le 0, \forall x\in(a;b)$.

C. $f'(x)\ne 0, \forall x\in(a;b)$.

D. $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(a;b)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đơn điệu trên khoảng K thì đạo hàm không đổi dấu trên khoảng đó.

Câu 3. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của chúng

A. $y=x^4+2x^2-1$.

B. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

C. $y=x^3+3x^2-21$.

D. $y=x^3+x+1$.

Lời giải

Chọn D

Xét đáp án A : Tập xác định $D=\mathbb{R}$. $y=x^4+2x^2-1\Rightarrow y'=4x^3+4x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ (vô lý). Nên loại **A.**

Xét đáp án B : Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $y=\dfrac{x-2}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$. Nên loại. **B.**

Xét đáp án C: Tập xác định $D=\mathbb{R}$. $y=x^3+3x^2-21\Rightarrow y'=3x^2+6x>0,\forall x\in\mathbb{R}$(vô lý). Nên loại. **C.**

Xét đáp án D: Tập xác định $D=\mathbb{R}$. $y=x^3+x+1\Rightarrow y'=3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ (luôn đúng).

Câu 4. **(SGD&ĐT ĐỒNG THÁP - 2018)** Khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3+3x^2+4$ là

A. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+6x$; $y'<0\Leftrightarrow 3x^2+6x<0\Leftrightarrow -2<x<0$.

Câu 5. **(THPT KINH MÔN - HD - LẦN 2 - 2018)** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là đúng nhất:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$;

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y=-x^3+3x^2-1\Rightarrow y'=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy đáp án A là đúng nhất.

Câu 6. **(THPT KIM LIÊN - HÀ NỘI - HKI - 2018)** Hàm số $y=-x^3+3x-5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-3x^2+3$.

Ta có $y'>0 \Leftrightarrow -3x^2+3>0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$. Chọn B.

Câu 7. **(THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018)** Tìm khoảng nghịch biến của số $y=-x^3+3x^2+1$.

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

C. $(-\infty;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x$.

$y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. Chọn D.

Câu 8. **(CTN - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

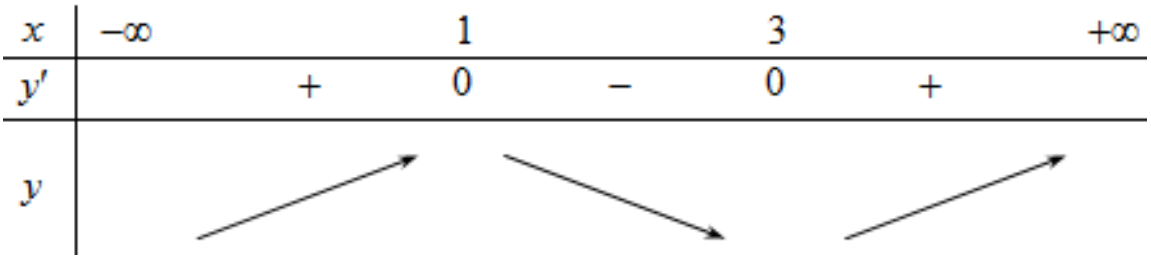
A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y'=x^2-4x+3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Xét bảng sau:



Bảng trên cho ta hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 9. **(THPT CAN LỘC - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

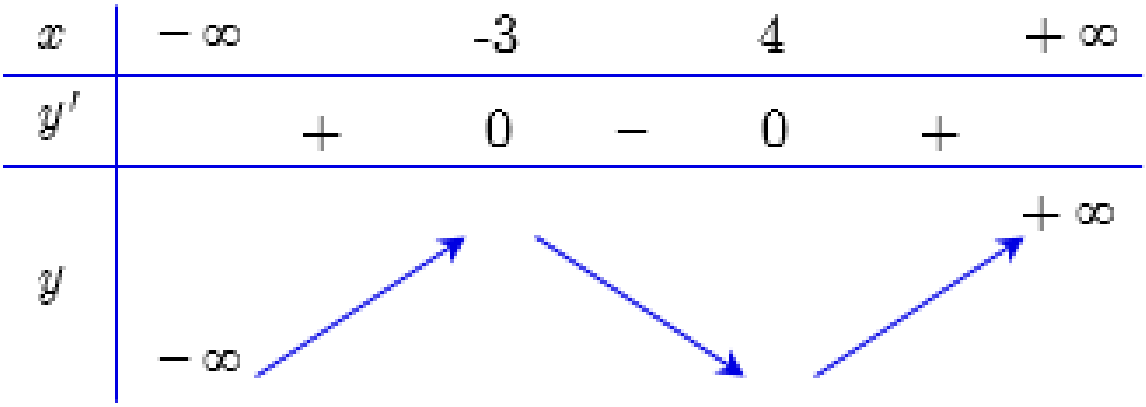
Lời giải

Chọn B

$y'=x^2-x-12$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Câu 10. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018)** Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

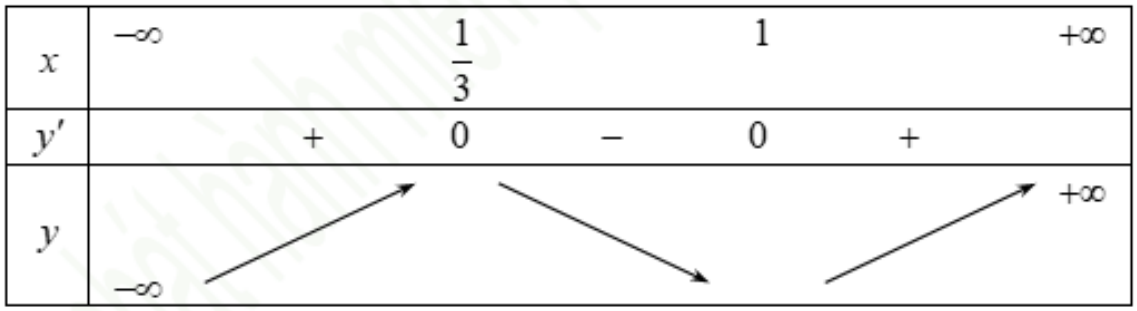
Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-4x+1$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

BBT:



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 11. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

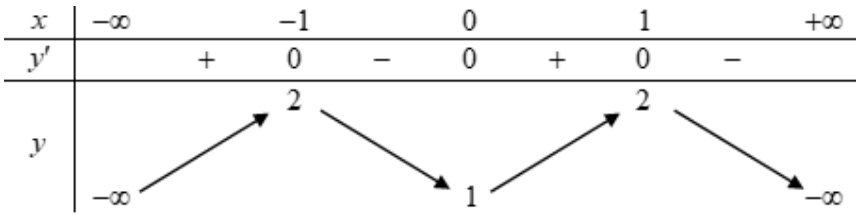
Lời giải

Chọn B.

Đạo hàm: $y'=-4x^3+4x$

$y'=0\Leftrightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \\ y=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Dựa vào BBT chọn đáp án **B**

Câu 12. **(THPT HÒA VANG - ĐÀ NẴNG - 2018)** Các khoảng đồng biến của hàm số $y=x^4-8x^2-4$ là

A. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$. **D.** $(-2;0)$ và $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-16x, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$. Chọn B.

Câu 13. **(THPT CẦU GIẤY - HKI - 2018)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0 \forall x\neq 1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Chọn A.

Câu 14. **(THPT TRIỆU THỊ TRINH - LẦN 1 - 2018)** Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Lời giải

* Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

* Ta có $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq -2$ suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Chọn A.

Câu 15. **(THPT CAN LỘC - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Xét hàm số $y=\dfrac{2-x}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\in D$. Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

.

Câu 16. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số là $D=[0;2]$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ với $0<x<2$.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow x=1\in(0;2)$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Chọn B.

Câu 17. Cho **hàm** số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

HSXĐ: $3x^2-x^3\ge 0\Leftrightarrow x\le 3$ suy ra $D=(-\infty;3]$. $y'=\dfrac{6x-3x^2}{2\sqrt{3x^2-x^3}}$, $\forall x\in(-\infty;3)$.

Giải $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$. y' không xác định khi $\left\{\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số nghịch biến $(-\infty;0)$ và $(2;3)$. Hàm số đồng biến $(0;2)$. Chọn B.

Câu 18. Hàm số $y=\sqrt{x^2-7x+12}$ đồng biến trên.

A. $(-\infty,3)$. **B.** $(4,+\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^2-7x+12\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 3\\x\ge 4\end{array}\right.$. Hàm số có tập xác định $D=(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+12}}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}\notin D$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$		$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên $(4,+\infty)$.

Câu 19. **(THPT HOA LƯ A - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-1)^3(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$. Chọn A.

Câu 20. **(SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $y'=\dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4-m^2>0\Leftrightarrow-2<m<2$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 21. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\le\dfrac{4}{3}$. **B.** $m\le\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{3}$. **D.** $m\ge\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2+2x+m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;\ +\infty)\Leftrightarrow y'\ge0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=1-3m\le0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{3}$.

Câu 22. Có tất cả **bao** nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=mx^2-4mx+3m+5$.

Với $a=0\Leftrightarrow m=0\Rightarrow y'=5>0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ (2m)^2-m(3m+5)\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m^2-5m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\leq m\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 5.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

Câu 23. **(THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018)** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

*Với $m=1$ ta có: $y=-x+4$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

*Với $m=-1$ ta có: $y=-2x^2-x+4$ là hàm số bậc hai, không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

*Với $m\neq\pm 1$ ta có $y'=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1$

Hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow y'=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\ (m-1)^2+3(m^2-1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ -\frac{1}{2}\leq m\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m<1\Rightarrow m=0.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m>-2$. **B.** $m\geq -2$. **C.** $m\leq -2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$f'(x)=\frac{2x^2-8x+6-m}{(x-2)^2}.$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0(\forall x\in D)$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x+6-m\geq 0(\forall x\in D)\Leftrightarrow 2(x-2)^2\geq m+2(\forall x\in D)$.

Suy ra $m+2\leq 0\Leftrightarrow m\leq -2$.

Câu 25. **(THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

- Ta có: $y'=-\cos^2 x.\sin x+\frac{4}{\sin^2 x}+(m+1).\sin x=\sin^3 x+\frac{4}{\sin^2 x}+m.\sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$, $\forall x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x+\frac{4}{\sin^2 x}+m.\sin x\ge 0$, $\forall x\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\frac{4}{\sin^3 x}\ge -m$, $\forall x\in(0;\pi)$ (1).

- Xét hàm số: $g(x)=\sin^2 x+\frac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0;\pi)$.

Có $g'(x)=2\sin x.\cos x-\frac{12\cos x}{\sin^4 x}=2\cos x.\left(\sin x-\frac{6}{\sin^4 x}\right)=2\cos x.\frac{\sin^5 x-6}{\sin^4 x}$

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\in(0;\pi)$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

- Do đó: $(1)\Leftrightarrow -m\le \min\limits_{x\in(0;\pi)} g(x)\Leftrightarrow -m\le 5\Leftrightarrow m\ge -5$.

Lại do m nguyên âm nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

Câu 26. **(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN - LẦN 2 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A.

$y=3x+m(\sin x+\cos x+m)$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3+m(\cos x-\sin x)=3+m\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 3+\sqrt{2}m\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq -\frac{3}{\sqrt{2}}$

- $m=0\Rightarrow 0\geq -\frac{3}{\sqrt{2}}$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.
- $m>0\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq \frac{-3}{\sqrt{2}m}\Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}m}\leq -1\Rightarrow 0<m\leq \frac{3}{\sqrt{2}}$.
- $m<0\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq \frac{-3}{\sqrt{2}m}\Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}m}\geq 1\Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}}\leq m<0$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán. Chọn A.

Câu 27. **(THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIÊU - ĐỒNG THÁP - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2-4mx$ đồng biến trên đoạn $[1;\ 4]$.

A. $m\leq\frac{1}{2}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $m\leq 2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x-4m$.

YCBT $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in[1;\ 4]\Leftrightarrow 2m(x+2)\leq x^2+2x,\ \forall x\in[1;\ 4]$

$\Leftrightarrow 2m(x+2)\leq x(x+2),\ \forall x\in[1;\ 4]\Leftrightarrow m\leq\frac{x}{2},\ \forall x\in[1;\ 4]\Leftrightarrow m\leq\frac{1}{2}$.

Câu 28. **(HỒNG BÀNG - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

A. $-2<m\leq -1$. **B.** $-2\leq m<-1$. **C.** $-2\leq m\leq -1$. **D.** $m\leq -1$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $x\neq -m$.

Ta có $y'=\frac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì $y'<0$ với $\forall x\in(-\infty;1)$ thì $\frac{m^2-4}{(x+m)^2}<0$

$\Leftrightarrow -2<m<2$.

Do hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $x\neq -m$ nên $m\in(-\infty;-1]$.

Vậy $-2<m\le -1$.

Câu 29. **(CHUYÊN LONG AN - LẦN 1 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. $m\in(-\infty;-5)$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in[-5;2)$. **D.** $m\in(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn D.

$y'=4x^3-4(m-1)x\ge 0\ \ \forall x\in(1;3)\Leftrightarrow x^2+1\ge m\ \ \forall x\in(1;3)$.

Đặt $h(x)=x^2+1$ với $x\in(1;3)$, $h'(x)=2x$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=0\notin(1;3)$.

x	1		2
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	2	$\nearrow$	10

Vậy $m\le 2$.

Câu 30. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

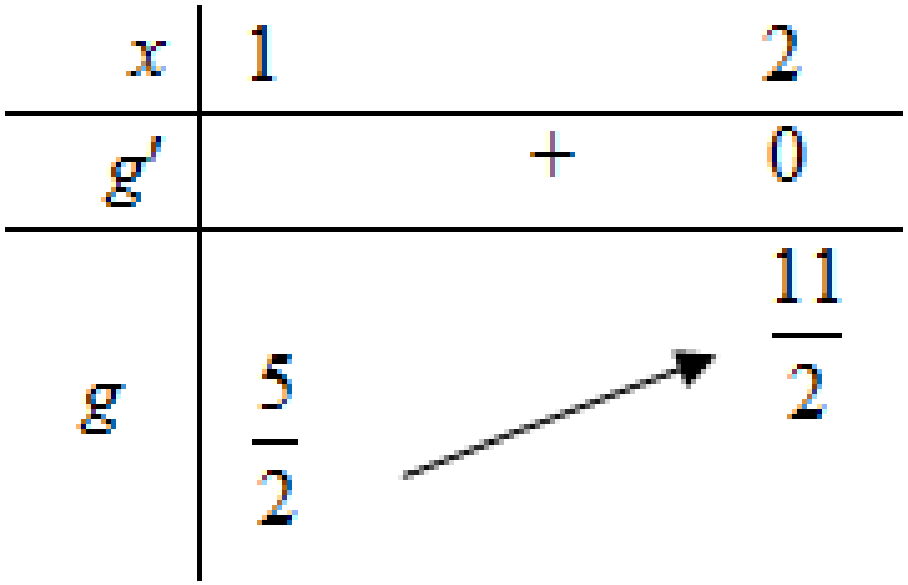
Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\frac{3}{2}=g(x),\forall x\in(1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x)=2x=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 31. **(THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI - SÓC TRĂNG - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{3}{2}x^2-mx-\frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

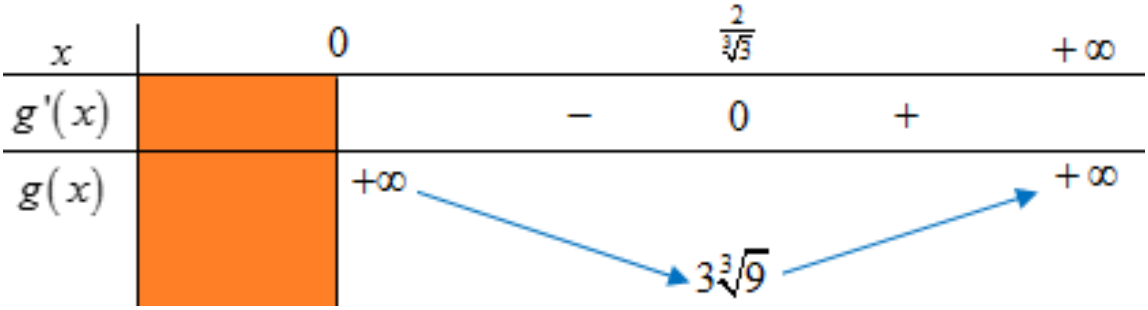
Chọn B.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x-m+\frac{4}{x^2} \ge 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \underbrace{3x+\frac{4}{x^2}}_{g(x)} \ge m,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$g'(x)=3-\frac{8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow g\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)=3\sqrt[3]{9} \approx 6,2$

Bảng biến thiên:



Theo bảng biến thiên $\min\limits_{(0;+\infty)} g(x)=3\sqrt[3]{9} \Rightarrow m \le 3\sqrt[3]{9}$

Vậy có 6 số nguyên dương thỏa YCBT.

Câu 32. **Câu 41: [DS12.C5.1.D05.d] (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

A. $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-2}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} y'>0 \forall x\in(-\infty;-5) \\ -m\notin(-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ -m\geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leq 5$.

Câu 33. **Câu 42: [DS12.C5.1.D05.d] (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi: $x+m\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -m$.

$y=\dfrac{x+3}{x+m} \Rightarrow y'=\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'>0, \forall x\in(-\infty;-6) \\ -m\notin(-\infty;-6) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3>0 \\ -m\in[-6;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -m\geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m\leq 6$.

Vậy: $m\in(3;6]$.

BÀI 27: XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ (DẠNG 1)

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định cực trị bằng phương pháp xét hàm số $y=f(x)$.

- **Bước 1**: ..... $\mathscr{D}$.
- **Bước 2**: Tìm ..... Tìm ..... x_i $(i=1;2;...)$ mà tại đó hàm số của hàm số bằng ..... hoặc hàm số .....
- **Bước 3**: Lập ..... hoặc ..... $f'(x)$.

  Nếu $f'(x)$ ..... thì ..... tại x_i.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ có tọa độ là

A. $(0;-1)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};0\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{x^2-3x}{x+1}$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

A. $(1;-1)$. **B.** $(-2;-10)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;-2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x\sqrt{x^2-4}$. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có điểm cực trị $x=-2$. **B.** Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=2$.
C. Hàm số có giá trị cực đại $y=0$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=|x-1|$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có điểm cực trị đại tại $x=1$. **B.** Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=1$.
C. Hàm số có giá trị cực đại $y=0$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 5. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=(x-2)^2(x+1)$ bằng.

A. $AB=2$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=2\sqrt{5}$. **D.** $AB=5\sqrt{2}$.

Câu 6. Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ có hai điểm cực trị A và B. Diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S=9$. **B.** $S=4$. **C.** $S=10$. **D.** $S=5$.

Câu 7. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{x-1}$ là:

A. $y=4x+1$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $y=2x-1$. **D.** $y=2x$.

Câu 8. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+1$.

A. $M(1;4)$. **B.** $N(-1;8)$. **C.** $P(1;12)$. **D.** $Q(0;-4)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3x$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1, y_2. Khi đó:

A. $y_1-y_2=-4$. **B.** $2y_1-y_2=6$. **C.** $2y_1-y_2=-6$. **D.** $y_1+y_2=-4$.

Câu 10. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-mx+m}{x-1}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Điểm cực trị tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+1$ có tọa độ là

A. $(1;6)$. **B.** $(-3;-26)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+5$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số có một điểm cực trị. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x+6}{x+2}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=-4$ và $y_{CT}=11$.

C. Hàm số có điểm cực đại tại $x=-4$ và $y_{CĐ}=11$.

D. Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=3$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x-1+\dfrac{4}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có hai cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$.

C. Hàm số đại cực đại tại $x=-1$. **D.** Hàm số có giá trị cực tiểu $y=5$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại $x=2$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 6. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=|x+2|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có cực tiểu tại $x=-2$. **B.** Hàm số có giá trị cực tiểu $x=0$.

C. Hàm số chỉ có cực tiểu. **D.** Hàm số có điểm cực trị $(-2;0)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=|4-2x|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có điểm cực đại $(2;0)$. **B.** Hàm số giá trị cực tiểu $x=0$.

C. Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=2$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 9. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y=(2x+1)(x-1)^2$ bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 10. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+5$ bằng

A. $4\sqrt{65}$. **B.** $4\sqrt{63}$. **C.** $3\sqrt{65}$. **D.** $3\sqrt{66}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2\ (C)$. Giả sử ba điểm A, B, C lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 12. Cho hàm số $y=(1-x)(x-3)^2$. Gọi A và B là hai điểm cực trị của hàm số, tính diện tích tam giác OAB trong đó O là gốc tọa độ.

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 13. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+3}{x+1}$ là:

A. $y=4x+1$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $y=2x-1$. **D.** $y=2x$.

Câu 14. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1\,(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) có phương trình là

A. $y=-x$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $x-4y+5=0$. **D.** $x-2y+3=0$.

Câu 15. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $N(1;-11)$. **C.** $P(2;-20)$. **D.** $Q(0;-4)$.

Câu 16. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x-\frac{1}{3}$.

A. $M(-1;3)$. **B.** $N(1;-11)$. **C.** $P(2;-20)$. **D.** $Q(1;-4)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-5$. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng

A. -30. **B.** 0. **C.** 30. **D.** 12.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y=x^3-9x^2+24x+4$ có điểm cực tiểu và cực đại lần lượt là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Giá trị $x_1y_2-x_2y_1$ bằng:

A. -56. **B.** 56. **C.** 32. **D.** -32.

Câu 19. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+mx+m+3}{x+1}$ bằng

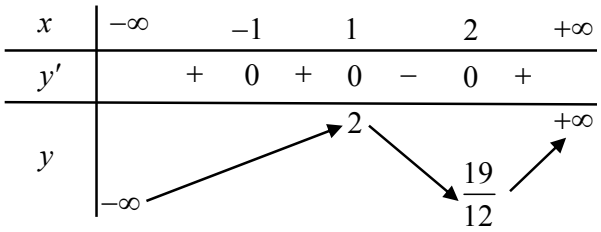
A. $5\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 20. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-\frac{x^2+mx+2m}{x+2}$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $8\sqrt{5}$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Kết luận nào sau đây đúng.



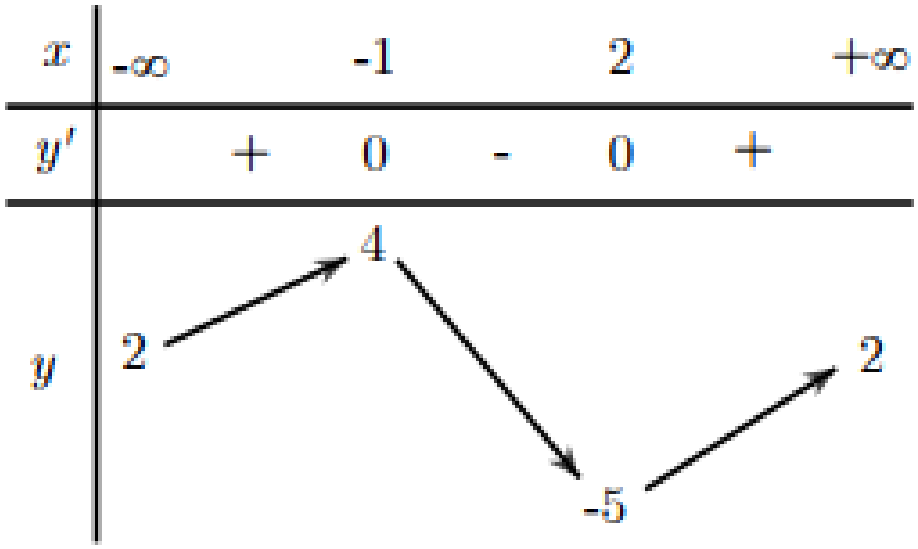
A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.
C. Hàm số có ba điểm cực trị. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 2. Cho đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x^2-5x+2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. (C) không có điểm cực trị. **B.** (C) có hai điểm cực trị.
C. (C) có ba điểm cực trị. **D.** (C) có một điểm cực trị.

Câu 3. Hàm số $y=x^3-3x+2$ có giá trị cực đại bằng
A. 0. **B.** $\Leftrightarrow$. **C.** -1. **D.** 4.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có đường tiệm cận.
B. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại bằng 4.
C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-5;2)$.
D. Hàm số $y=f(x)$ có cực tiểu bằng -5.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 8. Cho hàm số $y=-x^4+6x^2+1$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Điểm $A(\sqrt{3};10)$ là điểm cực tiểu của (C). **B.** Điểm $A(-\sqrt{3};10)$ là điểm cực đại của (C).

C. Điểm $A(-\sqrt{3};28)$ là điểm cực đại của (C). **D.** Điểm $A(0;1)$ là điểm cực đại của (C).

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 10. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=-2x+1$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2. Khi đó giá trị của biểu thức $S=x_1^2+x_2^2$ bằng:

A. -10. **B.** -8. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+4x-7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1,x_2. Khi đó, giá trị của tổng x_1+x_2 là:

A. -6. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 13. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ là:

A. $4\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 14. Hai cực trị của đồ thị hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+3x^2-4x-\frac{1}{3}$ đối xứng nhau qua điểm

A. $I\left(-3;\frac{17}{3}\right)$. **B.** $I\left(3;\frac{17}{6}\right)$. **C.** $I\left(3;-\frac{17}{3}\right)$. **D.** $I\left(3;\frac{17}{3}\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là:

A. $5x-2y+13=0$. **B.** $y=3x+13$. **C.** $y=6x+13$. **D.** $2x+4y-1=0$.

Câu 16. Gọi M,n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$. Khi đó giá trị của biểu thức M^2-2n bằng:

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 17. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1\ (1)$. Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Biết điểm $C(4;3)$, tam giác ABC là

A. tam giác vuông cân. **B.** tam giác vuông. **C.** tam giác đều. **D.** tam giác cân.

Câu 18. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+1$, điểm $M(m-1;2)$ thuộc đường thẳng d, ***giá trị của*** m ***gần với giá trị nào sau đây nhất***?

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-2\ (1)$. Gọi A, B, C lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Tính diện tích tam giác ABC (đơn vị diện tích).

A. $S_{\Delta ABC}=1$. **B.** $S_{\Delta ABC}=2$. **C.** $S_{\Delta ABC}=4$. **D.** $S_{\Delta ABC}=3$.

Câu 20. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi I là tâm đường tròn (T) đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số và điểm $M(1;0)$. Độ dài đoạn thẳng IM bằng

A. $IM=\sqrt{2}$. **B.** $IM=2$. **C.** $IM=\sqrt{3}$. **D.** $IM=2\sqrt{2}$.

BÀI 27: XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ (DẠNG 1)

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định cực trị bằng phương pháp xét hàm số $y=f(x)$.

- **Bước 1**: Tìm tập xác định $\mathscr{D}$.
- **Bước 2**: Tìm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i=1;2;...)$ mà tại đó hàm số của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3**: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ có tọa độ là

A. $(0;-1)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-4x+1$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{23}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(1;-1)$ và đạt cực đại tại điểm $\left(\frac{1}{3};-\frac{23}{27}\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

A. $(1;-1)$. **B.** $(-2;-10)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

Ta có $y'=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của hàm số là điểm $(1;-1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x\sqrt{x^2-4}$. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có điểm cực trị $x=-2$. **B.** Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=2$.

C. Hàm số có giá trị cực đại $y=0$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Đạo hàm $y'=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}>0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số không có cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=|x-1|$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có điểm cực trị đại tại $x=1$. **B.** Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=1$.

C. Hàm số có giá trị cực đại $y=0$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y=|x-1| \Leftrightarrow y=\sqrt{(x-1)^2} \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2-2x+1}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$. Ta có $y'=0 \Rightarrow x\in\varnothing$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu $y=0$.

Câu 5. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=(x-2)^2(x+1)$ bằng.

A. $AB=2$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=2\sqrt{5}$. **D.** $AB=5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y=(x-2)^2(x+1)=x^3-3x^2+4$.

Đạo hàm $y'=3x^2-6x$. $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đồ thị hàm số ta có hai điểm cực trị $A(0;4)$ và $B(2;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2;-4)$. Vậy khoảng cách giữa hai điểm cực trị AB là $AB=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 6. Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ có hai điểm cực trị A và B. Diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S=9$. **B.** $S=4$. **C.** $S=10$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-3x^2+6x$. $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(0;5)$ và $B(2;9)$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác OAB ta có: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|x_A y_B - x_B y_A\right|=\frac{1}{2}\left|0.9-5.2\right|=5$.

Câu 7. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{x-1}$ là:

A. $y=4x+1$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $y=2x-1$. **D.** $y=2x$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm $y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}\Leftrightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0		
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $O(0;0)$ và $A(2;4)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;4)$ suy ra VTPT của đường thẳng OA: $\vec{n}=(2;-1)$.

Phương trình đường thẳng OA $\begin{cases}\text{®i qua } O(0;0)\\ \text{cã VTPT } \vec{n}=(2;-1)\end{cases}\Rightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$.

Câu 8. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+1$.

A. $M(1;4)$. **B.** $N(-1;8)$. **C.** $P(1;12)$. **D.** $Q(0;-4)$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y=-3x^2+6x+9$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	28	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị là $A(-1;-4)$ và $B(3;28)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(4;32)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $\begin{cases}\text{®i qua } A(-1;-4)\\ \text{cã VTPT } \vec{n}=(8;-1)\end{cases}$

$AB: 8(x+1)-(y+4)=0\Leftrightarrow 8x-y+4=0$.

Vậy điểm $P(1;12)$ thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3x$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1, y_2. Khi đó:

A. $y_1-y_2=-4$. **B.** $2y_1-y_2=6$. **C.** $2y_1-y_2=-6$. **D.** $y_1+y_2=-4$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y=3x^2-3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $y_1=2$, $y_2=-2$. Vậy $2y_1-y_2=2.2-(-2)=6$.

Câu 10. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-mx+m}{x-1}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{(2x-m)(x-1)-(x^2-mx+m)}{(x-1)^2}\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0		
y	$-\infty$	↗	$-m$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$4-m$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(0;-m)$ và $B(2;4-m)$.

Vậy $AB=\sqrt{(2-0)^2+\left[4-m-(-m)\right]^2}=2\sqrt{5}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Điểm cực trị tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+1$ có tọa độ là

A. $(1;6)$. **B.** $(-3;-26)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=-3x^2-6x+9$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-26	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-3;-26)$ và điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1;6)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+5$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số có một điểm cực trị. **D.** Hàm số không có cực trị.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=4x^3-8x$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu $\left(-\sqrt{2};1\right)$, $\left(\sqrt{2};1\right)$.

Đồ thị hàm số có cực đại $(0;5)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x+6}{x+2}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=-4$ và $y_{CT}=11$.

C. Hàm số có điểm cực đại tại $x=-4$ và $y_{CĐ}=11$.

D. Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=3$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{(-2x+3)(x+2)-(-x^2+3x+6)}{(x+2)^2}\Leftrightarrow y'=\dfrac{-x^2-4x}{(x+2)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow -x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	11	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(-4;11)$ và điểm cực đại $(0;3)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x-1+\dfrac{4}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có hai cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$.

C. Hàm số đại cực đại tại $x=-1$. **D.** Hàm số có giá trị cực tiểu $y=5$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Đạo hàm $y'=1-\dfrac{4}{(x-3)^2}$. Ta có $y'=0\Rightarrow(x-3)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có cực tiểu tại $x=5$ và giá trị cực tiểu $y=5$.

Hàm số có cực đại tại $x=1$ và có giá trị cực đại $y=-1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại $x=2$. **D.** Hàm số không có cực trị.

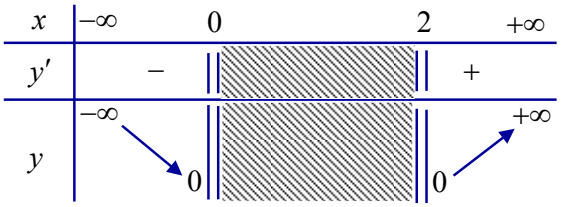
Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. Ta có $y'=0\Rightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1(\text{loại})$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

Câu 6. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

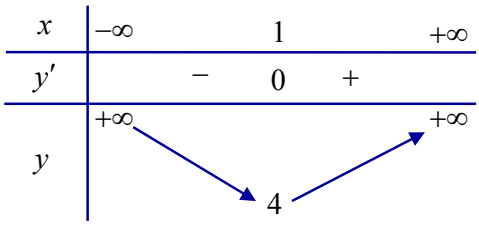
Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. Ta có $y'=0\Rightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên



(Bảng biến thiên vẽ sai)

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có điểm cực tiểu $(1;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=|x+2|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có cực tiểu tại $x=-2$. **B.** Hàm số có giá trị cực tiểu $x=0$.

C. Hàm số chỉ có cực tiểu. **D.** Hàm số có điểm cực trị $(-2;0)$.

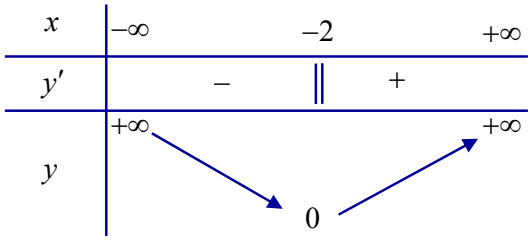
Lời giải

Chọn B.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y=|x+2|\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+4x+4}$, suy ra $y'=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+4}}$.

Bảng biến thiên



Qua bảng biến thiên suy ra hàm số có điểm cực tiểu $(-2;0)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=|4-2x|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có điểm cực đại $(2;0)$. **B.** Hàm số giá trị cực tiểu $x=0$.

C. Hàm số có điểm cực tiểu tại $x=2$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y=|4-2x| \Leftrightarrow y=2\sqrt{4-4x+x^2} \Rightarrow y'=\dfrac{2(x-2)}{|2-x|}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên hàm số có điểm cực tiểu $(2;0)$.

Câu 9. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y=(2x+1)(x-1)^2$ bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y=(2x+1)(x^2-2x+1) \Leftrightarrow y=2x^3-3x^2+1$.

Đạo hàm $y'=6x^2-6x$. Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị của hàm số là $A(0;1)$ và $B(1;0)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.

Câu 10. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+5$ bằng

A. $4\sqrt{65}$. **B.** $4\sqrt{63}$. **C.** $3\sqrt{65}$. **D.** $3\sqrt{66}$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=3x^2-6x-9$, $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có hai điểm cực trị $A(-1;10)$ và $B(3;-22)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(-22-10)^2}=4\sqrt{65}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2\ (C)$. Giả sử ba điểm A, B, C lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=4x^3-4x$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

Ta có ΔABC là tam giác cân tại A có $BC=\sqrt{(1+1)^2}=2$.

Gọi I là trung điểm của BC suy ra $I(0;1)$. Từ đó ta có $AI=\sqrt{(1-2)^2}=1$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AI.BC=\frac{1}{2}.1.2=1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=(1-x)(x-3)^2$. Gọi A và B là hai điểm cực trị của hàm số, tính diện tích tam giác OAB trong đó O là gốc tọa độ.

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y=(1-x)(x^2-6x+9)\Leftrightarrow y=-x^3+7x^2-15x+9$.

Đạo hàm $y'=-3x^2+14x-15$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+14x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{5}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A\left(\frac{5}{3};-\frac{32}{27}\right)$ và $B(3;0)$.

Diện tích ΔOAB: $S=\frac{1}{2}\left|x_Ay_B-x_By_A\right|\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\left|\frac{5}{3}.0-3.\left(-\frac{32}{27}\right)\right|=\frac{16}{9}$.

Câu 13. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ là:

A. $y=4x+1$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $y=2x-1$. **D.** $y=2x$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-6	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(-3;-6)$ và $B(1;2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(4;8)$.

Phương trình đi qua hai điểm cực trị $\begin{cases}\text{®i qua } B(1;2)\\\text{VTPT } \vec{n}=(2;-1)\end{cases}$.

$AB: 2(x-1)-(y-2)=0\Leftrightarrow 2x-y=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1\,(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) có phương trình là

A. $y=-x$. **B.** $y=2x+3$. **C.** $x-4y+5=0$. **D.** $x-2y+3=0$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2-6x$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $B(0;1)$ và $C(2;-3)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(2;-4)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm $\begin{cases}\text{®i qua } A(-1;1)\\\text{VTPT } \vec{n}=(1;-2)\end{cases}$

Phương trình: $x-(-1)-2(y-1)=0\Leftrightarrow x-2y+3=0$.

Câu 15. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $N(1;-11)$. **C.** $P(2;-20)$. **D.** $Q(0;-4)$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2-6x-9$.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-27	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(-1;5)$ và $B(3;-27)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(4;-32)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $\left\{\begin{array}{l}\text{®i qua ®iÓm } A(-1;5)\\\text{cã vtpt } \vec{n}=(8;1)\end{array}\right.$.

$AB:8(x+1)+(y-5)=0\Leftrightarrow 8x+y+3=0$.

Vậy điểm $N(1;-11)$ thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Câu 16. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x-\frac{1}{3}$.

A. $M(-1;3)$. **B.** $N(1;-11)$. **C.** $P(2;-20)$. **D.** $Q(1;-4)$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=x^2-2x-8$, ta có $y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	9	↘	-27	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị $A(-2;9)$ và $B(4;-27)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(6;-36)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $\left\{\begin{array}{l}\text{®i qua ®iÓm } A(-2;9)\\\text{cã vtpt } \vec{n}=(6;1)\end{array}\right.$.

$AB:6(x+2)+y-9=0\Leftrightarrow 6x+y+3=0$.

Từ đó suy ra điểm

Câu 17. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-5$. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng

A. -30. **B.** 0. **C.** 30. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=6x^2-6x$, ta có $y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	-7	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số bằng -5 và giá trị cực tiểu bằng -6.

Vậy tích giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng: $-5.(-6)=30$.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y=x^3-9x^2+24x+4$ có điểm cực tiểu và cực đại lần lượt là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$. Giá trị $x_1y_2-x_2y_1$ bằng:

A. -56. **B.** 56. **C.** 32. **D.** -32.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, đạo hàm $y'=3x^2-18x+24$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-18x+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	24	↘	20	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu $A(4;20)$ và điểm cực đại $B(2;24)$.

Suy ra $x_1y_2-x_2y_1=4.24-2.20=56$.

Câu 19. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m+3}{x+1}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

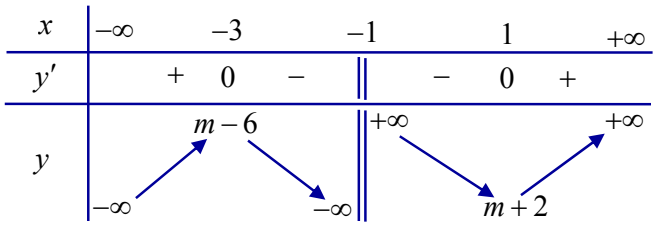
Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{(2x+m)(x+1)-(x^2+mx+m+3)}{(x+1)^2}\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị của hàm số $A(1;m+2)$ và $B(-3;m-6)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số là $AB=\sqrt{(-3-1)^2+(m-6-m-2)^2}=4\sqrt{5}$.

Câu 20. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x^2+mx+2m}{x+2}$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $8\sqrt{5}$.

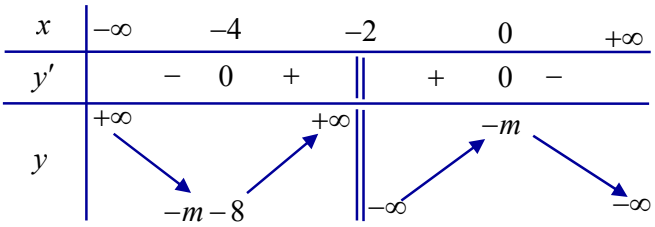
Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Đạo hàm $y'=-\dfrac{(2x+m)(x+2)-(x^2+mx+2m)}{(x+2)^2}=-\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

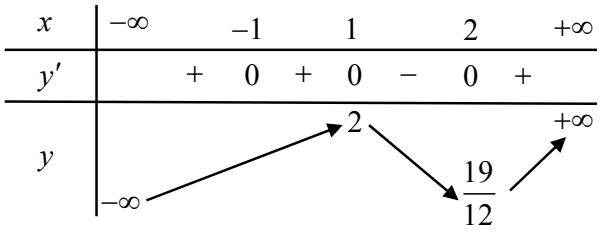


Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(-4;-m-8)$ và $B(0;-m)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị $AB=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Kết luận nào sau đây đúng.



A. Hàm số có hai điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

C. Hàm số có ba điểm cực trị. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 2. Cho đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x^2-5x+2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. (C) không có điểm cực trị. **B.** (C) có hai điểm cực trị.

C. (C) có ba điểm cực trị. **D.** (C) có một điểm cực trị.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x-5=-3(x-1)^2-2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có điểm cực **trị**.

Câu 3. Hàm số $y=x^3-3x+2$ có giá trị cực đại bằng

A. 0. **B.** $\Leftrightarrow$. **C.** -1. **D.** 4.

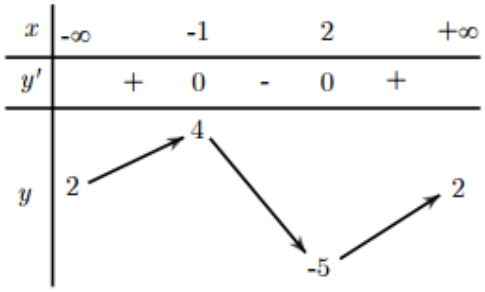
Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y'=3x^2-3$. Xét $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\x=-1\Rightarrow y=4\end{array}\right.$.

Và: $y''=6x\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y''(1)=6>0\\y''(-1)=-6<0\end{array}\right.$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$. Vậy $y_{CD}=4$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có đường tiệm cận.

B. Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại bằng 4.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-5;2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ có cực tiểu bằng -5.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ nên đường $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Giá trị cực đại $y_{CD}=4$, điểm cực đại $x_{CD}=-1$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$; $(2;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-1;2)$.

Vì vậy A, B, C sai.

Hàm số $y=f(x)$ có cực tiểu bằng -5.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

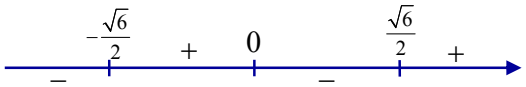
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=4x^3-6x$, ta có $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Xét dấu:



Suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Xét dấu $f'(x)$:



Từ đó suy ra hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=-x^4+6x^2+1$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Điểm $A(\sqrt{3};10)$ là điểm cực tiểu của (C). **B.** Điểm $A(-\sqrt{3};10)$ là điểm cực đại của (C).

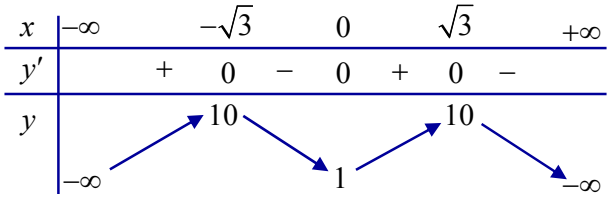
C. Điểm $A(-\sqrt{3};28)$ là điểm cực đại của (C). **D.** Điểm $A(0;1)$ là điểm cực đại của (C).

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-4x^3+12x$, ta có $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực đại $A(-\sqrt{3};10)$, $B(\sqrt{3};10)$ và điểm cực tiểu $C(0;1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

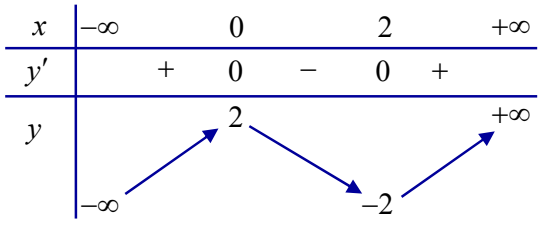
D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2-6x$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạy cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 10. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2.$ **B.** $y=2x-1.$ **C.** $y=-2x+1.$ **D.** $y=-x+2.$

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2-3$, ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Qua bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị là $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2;-4)$.

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}\text{di qua diem } B(1;-1)\\ \text{co vtpt } \vec{n}=(2;1)\end{cases}$

$AB:2(x-1)+y+1=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2. Khi đó giá trị của biểu thức $S=x_1^2+x_2^2$ bằng:

A. -10. **B.** -8. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-3x^2+6x+6$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6x+6=0(1)$.

Do x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số nên x_1, x_2 cũng là nghiệm của phương trình (1).

Theo hệ thức viét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-2\end{cases}$.

Ta có $S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4+4=8$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+4x-7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1,x_2. Khi đó, giá trị của tổng x_1+x_2 là:

A. -6. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2-12x+4$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+4=0(1)$.

Do x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số nên x_1, x_2 cũng là nghiệm của phương trình (1).

Theo hệ thức viét ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=4$.

Câu 13. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ là:

A. $4\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2-3$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Qua bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(-1;2)$, $B(1;-2)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị $AB=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 14. Hai cực trị của đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+3x^2-4x-\dfrac{1}{3}$ đối xứng nhau qua điểm

A. $I\left(-3;\dfrac{17}{3}\right)$. **B.** $I\left(3;\dfrac{17}{6}\right)$. **C.** $I\left(3;-\dfrac{17}{3}\right)$. **D.** $I\left(3;\dfrac{17}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-x^2+6x-4$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow -x^2+6x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{5} \\ x=3-\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$3-\sqrt{5}$		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$\dfrac{17-10\sqrt{5}}{3}$	↗	$\dfrac{17+10\sqrt{5}}{3}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A\left(3-\sqrt{5};\dfrac{17-10\sqrt{5}}{3}\right)$ và $B\left(3+\sqrt{5};\dfrac{17+10\sqrt{5}}{3}\right)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, suy ra A đối xứng B qua I.

Tọa độ điểm I: $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=3 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{17}{3} \end{cases}\Rightarrow I\left(3;\dfrac{17}{3}\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là:

A. $5x-2y+13=0$. **B.** $y=3x+13$. **C.** $y=6x+13$. **D.** $2x+4y-1=0$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $y=\dfrac{\left(3x^2+13x+19\right)'}{\left(x+3\right)'}=6x+13$.

Câu 16. Gọi M,n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$. Khi đó giá trị của biểu thức M^2-2n bằng:

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{(2x+3)(x+2)-\left(x^2+3x+3\right)}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$.

Ta có $y'=0\Rightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số lần lượt bằng $M=-3$ và $n=1$.

Suy ra $M^2-2n=(-3)^2-2.1=7$.

Câu 17. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1\ (1)$. Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Biết điểm $C(4;3)$, tam giác ABC là

A. tam giác vuông cân. **B.** tam giác vuông. **C.** tam giác đều. **D.** tam giác cân.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm số $y'=3x^2-6x$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị của hàm số $A(0;1)$ và $B(2;-3)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(4;2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2.4+(-4).2=0$, $AB=AC=2\sqrt{5}$.

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

Câu 18. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+1$, điểm $M(m-1;2)$ thuộc đường thẳng d, ***giá trị của*** m ***gần với giá trị nào sau đây nhất***?

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2+6x-9$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	28	↘	-4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hai điểm cực trị $A(-3;28)$ và $B(1;-4)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(4;-32)$.

Phương trình đường thẳng d: $\left\{\begin{array}{l}\text{®i qua ®iÓm } B(1;-4)\\\text{cã vtpt } \vec{n}=(8;1)\end{array}\right.$ $8(x-1)+y+4=0\Leftrightarrow 8x+y-4=0$.

Để $M(m-1;2)$ thuộc đường thẳng d thì $8(m-1)+2-4=0\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{4}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-2$ (1). Gọi A, B, C lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Tính diện tích tam giác ABC (đơn vị diện tích).

A. $S_{\Delta ABC}=1$. **B.** $S_{\Delta ABC}=2$. **C.** $S_{\Delta ABC}=4$. **D.** $S_{\Delta ABC}=3$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=4x^3-4x$, $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị $A(-1;-3)$, $B(0;-2)$ và $C(1;-3)$.

Gọi I là trung điểm của AC suy ra $\left\{\begin{array}{l}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=0\\y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=-3\end{array}\right.\Rightarrow I(0;-3)$.

Ta có $BI=\sqrt{(-3+2)^2}=1$, $AC=\sqrt{2^2}=2$.

Do tam giác ABC cân tại B suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BI.AC=\dfrac{1}{2}.1.2=1$.

Câu 20. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$ có đồ thị (C). Gọi I là tâm đường tròn (T) đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số và điểm $M(1;0)$. Độ dài đoạn thẳng IM bằng

A. $IM=\sqrt{2}$. **B.** $IM=2$. **C.** $IM=\sqrt{3}$. **D.** $IM=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=4x^3-4x$, ta có $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra ba điểm cực trị $A(-1;1)$, $B(0;2)$ và $C(1;1)$.

Ta có $AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{2^2}=2$.

Suy ra $AB^2+BC^2=AC^2$ và $AB=BC$ vậy ΔABC là tam giác vuông cân tại B.

Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm của AC.

Ta có tọa độ điểm I: $\begin{cases}x_I=0\\y_I=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1)$.

Vậy $IM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

BÀI 28: XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ (DẠNG 2)

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định cực trị bằng phương pháp xét hàm

- ***Số điểm cực trị*** của hàm số $y=f(x)$ bằng số lần y' ……..

- Với các ***hàm đa thức*** thì ***số điểm cực trị*** của hàm số $y=f(x)$ bằng số ……..
  hoặc …….. của phương trình $y'=0$.

- Để tìm số ***điểm cực trị*** của hàm số $y=f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

  Bước 1: Tính ……

  Bước 2: Giải ……..

  Bước 3: Lập ……

  Bước 4: Tìm …….

  Nếu y' ***đổi dấu*** từ $+$ sang $-$ khi qua x_0 thì hàm số đạt …… tại x_0.

  Nếu y' ***đổi dấu*** từ $-$ sang $+$ khi qua x_0 thì hàm số đạt …….. tại x_0.

  Nếu y' ***không đổi dấu*** khi qua x_0 thì hàm số …….. tại x_0.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập K. Gọi $x_0 \in K$, khi đó $x=x_0$ được gọi là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ nếu

A. $f'(x_0)$ đổi dấu khi x đi qua giá trị $x=x_0$.

B. $f'(x_0)=0$.

C. $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua giá trị $x=x_0$.

D. $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua giá trị $x=x_0$.

Câu 2. Số điểm cực trị của hàm số $y=(x-1)^{2017}$ là

A. 0. **B.** 2017. **C.** 1. **D.** 2016.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Hàm số $y=x^5-2x^3+1$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $y=\frac{x^7}{7}-\frac{x^5}{5}+1$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị. **B.** Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=2$.

C. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **D.** Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 8. Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-4)^2(x+1)^4$, số điểm cực tiểu của hàm số f là :

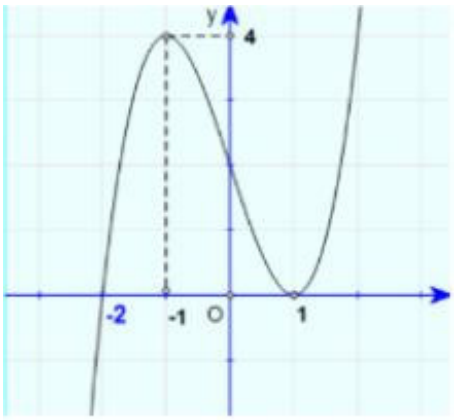
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 9. Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên R và đạo hàm $f'(x)=2(x-1)^2(2x+6)$. Khi đó hàm số $f(x)$

A. Đạt cực đại tại điểm $x=1$. **B.** Đạt cực tiểu tạo điểm $x=-3$.

C. Đạt cực đại tại điểm $x=-3$. **D.** Đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

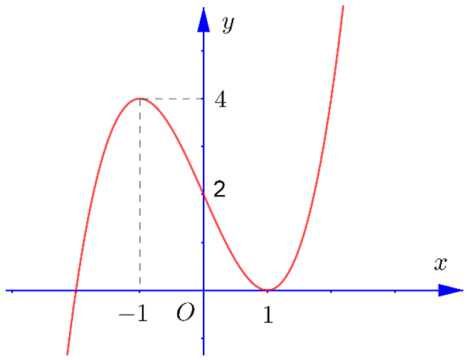
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $y=f(x)$?



A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$. **B.** Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$. **D.** Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

B. Nếu $f'(x)=0$ và $f''(x)>0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

C. Nếu $f'(x)=0$ và $f''(x)=0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số $y=f(x)$ đã cho.

D. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Câu 2. Hàm số $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x+1$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 3. Hàm số $y=x^4-8x^3+432$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Không có.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên trục trên R và có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và có $f'(x)=(x-1)^{2017}(x^2-1)(2x+3)^3$. Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 6. Hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 điểm. **B.** 4 điểm. **C.** 3 điểm. **D.** 1 điểm.

Câu 7. Hàm số $y=x^3-3x+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 8. Trong các hàm số $y=x^4-2x^2-3, y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+3$, $y=|x^2-1|-4$, $y=x^2-2|x|-3$ có hàm số có 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 9. Một hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Số cực trị của hàm số là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 11. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=-2(x-1)^2(x+1)$. Khi đó hàm số $f(x)$.

A. Đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$. **B.** Đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

C. Đạt cực đại tại điểm $x=-1$. **D.** Đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x+1)^2(x+2)^3$. Hàm số có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

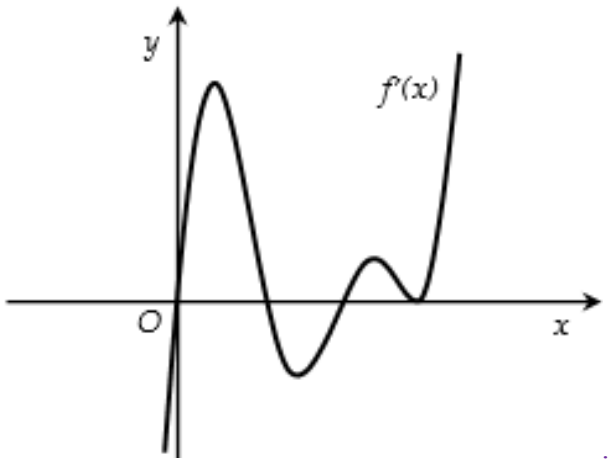
Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x+1)^2(x-2)^4\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^5}{\sqrt[3]{x-4}}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

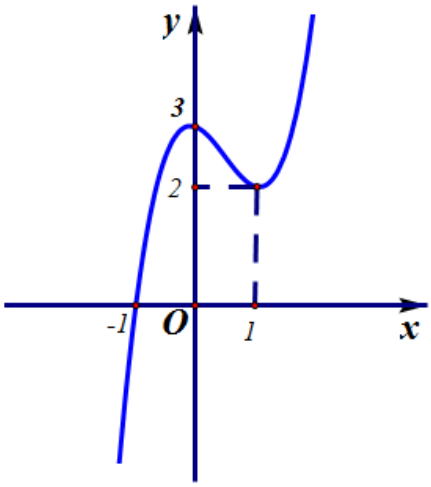
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$. **B.** Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$. **D.** Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x-1)^2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng?**

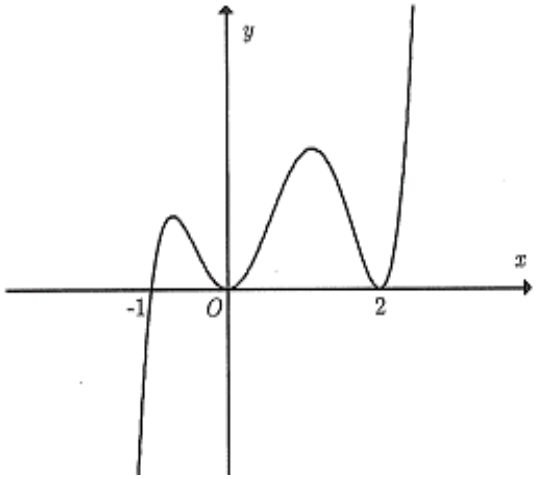
A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tiểu $x=1$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

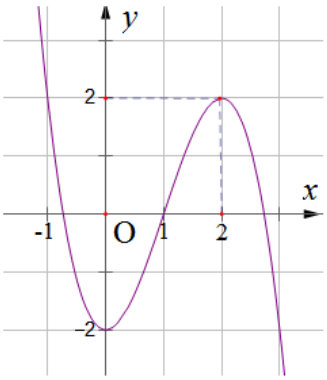
D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-2;1)$.

Câu 19. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $f(x)$ trên khoảng K. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:



A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x)=f(x)+x$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

B. Hàm số không có điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

C. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3x^4-8x^3+6x^2-1$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2

Câu 2. Đồ thị hàm số nào sau đây không có điểm cực trị ?

A. $y=x^3-x^2$. **B.** $y=-x^3-x$. **C.** $y=x^3+x^2-1$. **D.** $y=-x^3+x^2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{1}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$; đạt cực tiểu tại $x=1$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$; đạt cực tiểu tại $x=1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=1$; đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $x=1$; đạt cực tiểu tại $x=0$.

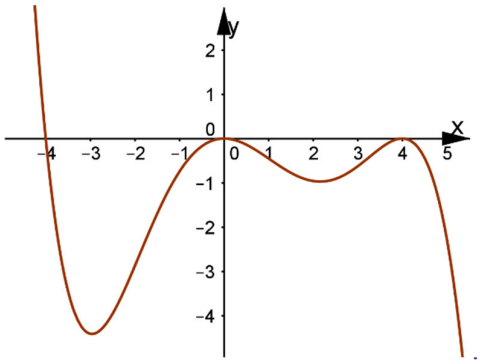
Câu 4. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

A. $y=-x^4-2x^2-1$. **B.** $y=2x^4+4x^2+1$. **C.** $y=x^4+2x^2-1$. **D.** $y=x^4-2x^2-1$.

Câu 5. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=x\left(x^2-1\right)(x+2)^{2018}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ bên. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x+1)^2$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

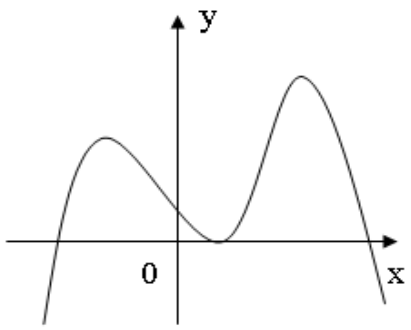
A. Có đúng 3 điểm cực trị. **B.** Không có điểm cực trị.

C. Có đúng 1 điểm cực trị. **D.** Có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên M và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3x^2$. Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Đồ thị sau đây là của hàm số $y=f'(x)$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

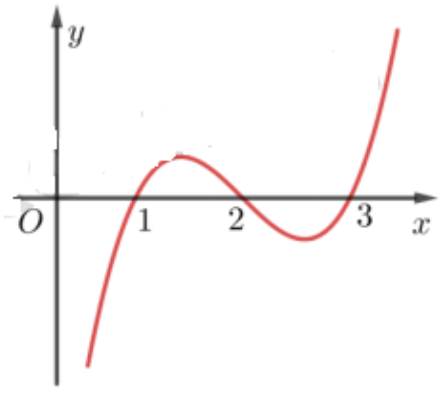


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$. hàm số $y'=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. **B.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có cực trị **D.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

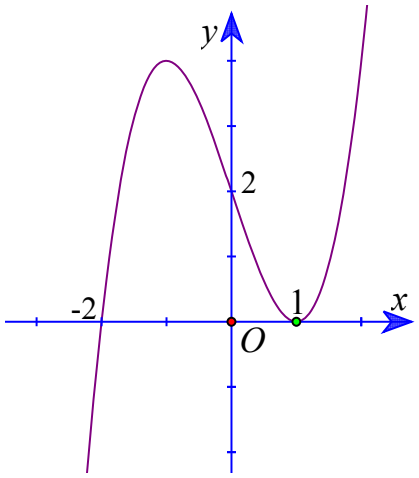
Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là:

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-2017(x-1)(x+2)^3(x-3)^2$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$

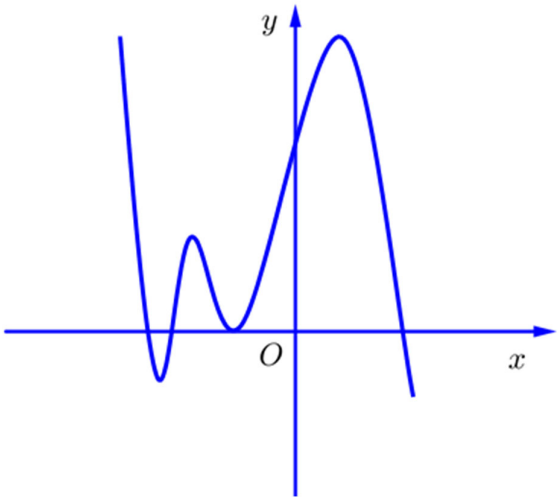
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x^2-1)(x-\sqrt{3})^2$. Số điểm cực trị của hàm số này là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

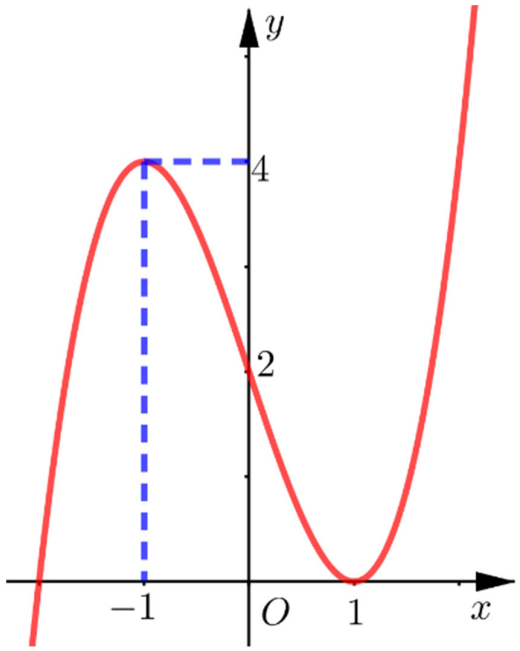
Câu 17. Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số f là.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

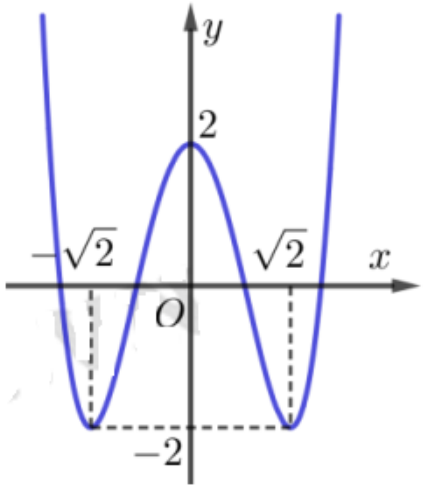
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 20. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}+2^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

BÀI 28: XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT HÀM SỐ (DẠNG 2)

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định cực trị bằng phương pháp xét hàm

- ***Số điểm cực trị*** của hàm số $y=f(x)$ bằng số lần y' ***đổi dấu***.
- Với các ***hàm đa thức*** thì ***số điểm cực trị*** của hàm số $y=f(x)$ bằng số ***nghiệm đơn*** hoặc ***nghiệm bội lẻ*** của phương trình $y'=0$.
- Để tìm số ***điểm cực trị*** của hàm số $y=f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính y'.

Bước 2: Giải phương trình $y'=0$.

Bước 3: Lập bảng xét dấu y' hoặc biến thiên.

Bước 4: Tìm số điểm cực trị của hàm số bằng số lần y' đổi dấu.

Nếu y' ***đổi dấu*** từ $+$ sang $-$ khi qua x_0 thì hàm số đạt ***cực đại*** tại x_0.

Nếu y' ***đổi dấu*** từ $-$ sang $+$ khi qua x_0 thì hàm số đạt ***cực tiểu*** tại x_0.

Nếu y' ***không đổi dấu*** khi qua x_0 thì hàm số ***không đạt cực trị*** tại x_0.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập K. Gọi $x_0 \in K$, khi đó $x=x_0$ được gọi là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$ nếu

A. $f'(x_0)$ đổi dấu khi x đi qua giá trị $x=x_0$.

B. $f'(x_0)=0$.

C. $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua giá trị $x=x_0$.

D. $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua giá trị $x=x_0$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 2. Số điểm cực trị của hàm số $y=(x-1)^{2017}$ là

A. 0. **B.** 2017. **C.** 1. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=2017(x-1)^{2016} \geq 0, \forall x$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 4. Hàm số $y=x^5-2x^3+1$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Cách giải: ta có $y' = 5x^4 - 6x^2 = x^2\left(5x^2 - 6\right); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{6}{5}} \end{array}\right.$

Tại $x = 0$ thì y' không đổi dấu nên suy ra hàm số có 2 cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^7}{7} - \dfrac{x^5}{5} + 1$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D.

$y' = x^6 - x^4 = x^4\left(x^2 - 1\right)$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4 = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

y' đổi dấu khi qua các điểm $x = -1; x = 1$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

y' đổi dấu khi qua các điểm $x = -2; x = 5$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2\left(x^2 - 4\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$.

C. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$ và $f''(x)=4x^3-8x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f''(2)=16>0 \\ f''(-2)=-16<0 \end{array}\right.$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

Khi $x=0$ thì đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu nên $f(x)$ không đạt cực trị tại $x=0$.

Câu 8. Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-4)^2(x+1)^4$, số điểm cực tiểu của hàm số f là :

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

$f'(x)=x(x-4)^2(x+1)^4$; $f'(x)=x(x-4)^2(x+1)^4>0 \Leftrightarrow x>0$ hoặc $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

$f'(x)$ đổi dấu khi đi qua điểm có hoành độ $x=0 \Leftrightarrow$ hàm số có cực trị tại điểm $x=0$.

Câu 9. Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên R và đạo hàm $f'(x)=2(x-1)^2(2x+6)$. Khi đó hàm số $f(x)$

A. Đạt cực đại tại điểm $x=1$. **B.** Đạt cực tiểu tại điểm $x=-3$.

C. Đạt cực đại tại điểm $x=-3$. **D.** Đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Lời giải

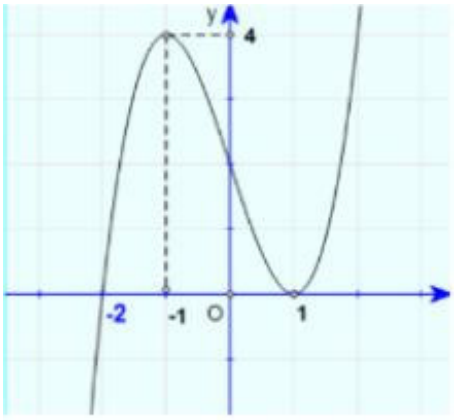
Chọn B.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(2-1)^2(2x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=0 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$ Hàm số đặt cực trị $x=-3$.

Do y' đổi dấu âm sang dương khi qua điểm $x=-3$ nên $x=-3$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Hoặc $f''(x)=\left[2(2-1)^2(2x+6)\right]'=4(x-1)(3x+5) \Rightarrow f''(-3)=64>0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-3$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $y=f(x)$?



A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$. **B.** Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

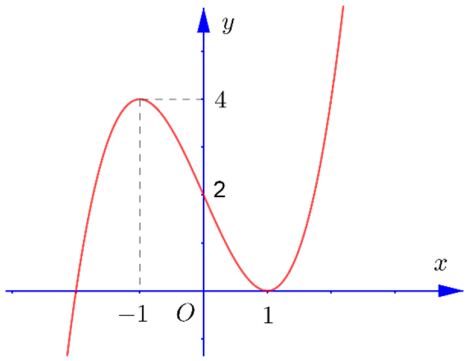
C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$. **D.** Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=-2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\left[f(x-2017)-2018x+2019\right]'=f'(x-2017)-2018$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x-2017)-2018$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2017 đơn vị và tịnh tiến xuống dưới 2018 đơn vị.

Do đó đồ thị hàm số $y=f'(x-2017)-2018$ chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm và đổi dấu qua điểm đó nên hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ có một điểm cực trị.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

B. Nếu $f'(x)=0$ và $f''(x)>0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

C. Nếu $f'(x)=0$ và $f''(x)=0$ thì x_0 không phải là cực trị của hàm số $y=f(x)$ đã cho.

D. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Lời giải

Chọn D.

Câu 2. Hàm số $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x+1$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y'=12x^3-12x^2-12x+12$.

$$y'=0\Leftrightarrow 12x^3-12x^2-12x+12=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Dấu của $y'=12x^3-12x^2-12x+12=12(x-1)^2(x+1)$ chính là dấu của $x+1$. Suy ra hàm số $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x+1$ có một điểm cực trị.

Câu 3. Hàm số $y=x^4-8x^3+432$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Không có.

Lời giải

Chọn C.

$y'=4x^3-24x^2$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^2(x-6)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=6\end{array}\right.$$

Qua $x=0$ y' không đổi dấu $\Rightarrow$ hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên trục trên R và có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}=(x-1)(x-3).(x-2)^2(x-3)^{2016}$

Suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<1\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(1;3)$, đồng thời $x=2$ không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và có $f'(x)=(x-1)^{2017}(x^2-1)(2x+3)^3$. Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^{2017}(x^2-1)(2x+3)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

Vậy hàm số có 2 cực trị.

Câu 6. Hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 điểm. **B.** 4 điểm. **C.** 3 điểm. **D.** 1 điểm.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\Rightarrow y'=x^3-x^2-x+1$.

Suy ra: $y'=0\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị tại $x=-1$.

Câu 7. Hàm số $y=x^3-3x+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y'=3x^2-3$, $y'=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$.

Xét trên khoảng $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$, ta loại nghiệm $x=-1$ và nhận nghiệm $x=1$.

Do y' đổi dấu khi đi qua $x=1$ nên ta có một cực trị trên khoảng $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 8. Trong các hàm số $y=x^4-2x^2-3, y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+3$, $y=\left|x^2-1\right|-4$, $y=x^2-2\left|x\right|-3$ có hàm số có 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

********** $y=x^4-2x^2-3\Rightarrow y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

********** $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+3\Rightarrow y'=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)$

$=(x-1)^2(x+1)=0\Leftrightarrow x=\pm1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị tại $x=-1$.

********** $y=\left|x^2-1\right|-4=\begin{cases}x^2-5 \text{ khi } x^2\geq 1\\ -x^2+3 \text{ khi } x^2<1\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}2x \text{ khi } x^2>1\\ -2x \text{ khi } x^2<1\end{cases}$ hàm số có $y'=0\Leftrightarrow x=0$ và y' đổi dấu khi qua điểm $x=0$ và không có đạo hàm tại các điểm $x=\pm 1\Rightarrow$ hàm số có 3 điểm cực trị.

$y=x^2-2\left|x\right|-3=\begin{cases}x^2-2x-3 \text{ khi } x\geq 0\\ x^2+2x-3 \text{ khi } x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}2x-3 \text{ khi } x>0\\ 2x+3 \text{ khi } x<0\end{cases}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Hàm số có y' đổi dấu khi đi qua điểm $x=\pm\dfrac{3}{2};x=0$ nên hàm số có 3 cực trị .

Câu 9. Một hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Số cực trị của hàm số là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ (x-1)^2=0\\ (x-2)^3=0\\ (x-3)^4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\\ x=3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

$f'(x)$ đổi dấu khi đi qua $x=0;x=2$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 11. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=-2(x-1)^2(x+1)$. Khi đó hàm số $f(x)$.

A. Đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$. **B.** Đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

C. Đạt cực đại tại điểm $x=-1$. **D.** Đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow -2(x-1)^2(x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘	$-\infty$

Suy ra hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x+1)^2(x+2)^3$. Hàm số có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

$$f'(x)=x(x+1)^2(x+2)^3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$.

Ta có $x=0$ và $x=-2$ là nghiệm bội lẻ nên qua đó $f'(x)$ đổi dấu.

$\Rightarrow x=0$ và $x=-2$ là cực trị.

$x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên qua đó $f'(x)$ không đổi dấu.

$\Rightarrow x=-1$ không là cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Ta có y' đổi dấu khi đi qua $x=-3$ và qua $x=2$ nên số điểm cực trị là 2.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x+1)^2(x-2)^4\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B.

$$f'(x)=x(x+1)^2(x-2)^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$f(0)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^5}{\sqrt[3]{x-4}}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

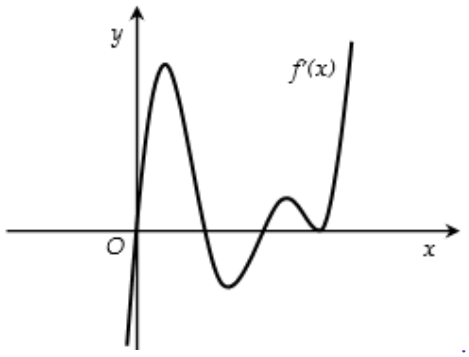
Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right..$

Bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x qua $1,3,4$ nên hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



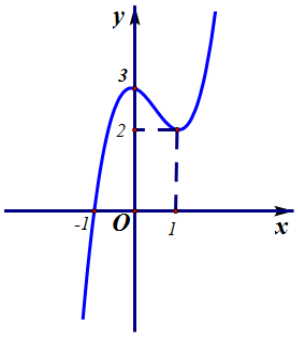
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Theo đồ thị ta có $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên **Chọn**. **C.**

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$. **B.** Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$. **D.** Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT của hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x-1)^2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng?**

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tiểu $x=1$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-2;1)$.

Lời giải

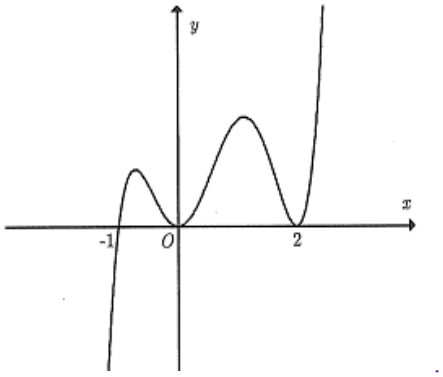
Chọn A.

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=(x+2)(x-1)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên. Ta suy ra hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Câu 19. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $f(x)$ trên khoảng K. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên là:



A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

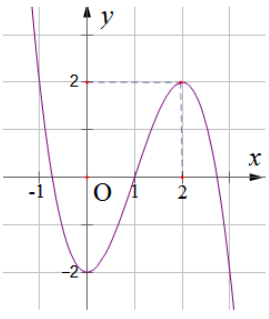
Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (và hai nghiệm kép) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn này.

Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Đặt $g(x)=f(x)+x$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

B. Hàm số không có điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

C. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

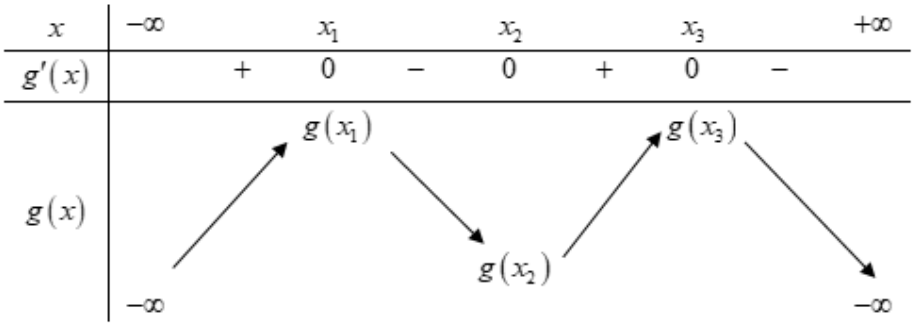
Lời giải

Chọn D.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)=f(x)+x$ cũng có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)+1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $\forall x\in[1;4]$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2 và x_3 với $x_1<x_2<x_3$.

Bảng biến thiên của $g(x)$:



Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3x^4-8x^3+6x^2-1$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y'=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$.

Suy ra y' đổi dấu 1 lần, suy ra hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 2. Đồ thị hàm số nào sau đây không có điểm cực trị ?

A. $y=x^3-x^2$. **B.** $y=-x^3-x$. **C.** $y=x^3+x^2-1$. **D.** $y=-x^3+x^2$.

Lời giải

Chọn B.

$y=x^3-x^2$ có $y'=3x^2-2x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\x=0\end{array}\right.\Rightarrow y'$ đổi dấu $\Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

$y=-x^3+x^2$ có $y'=-3x^2+2x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow y'$ đổi dấu $\Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

$y=-x^3-x$ có $y'=-3x^2-1$, $y'=0$ vô nghiệm. Vậy hàm số không có cực trị.

$y=x^3+x^2-1$ có $y'=3x^2+2x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow y'$ đổi dấu $\Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{1}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$; đạt cực tiểu tại $x=1$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$; đạt cực tiểu tại $x=1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=1$; đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $x=1$; đạt cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải

Chọn A.

$y'=x^4+2x^3-3x^2=x^2\left(x^2+2x-3\right)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ hoặc $x=-3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$

Câu 4. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị?

A. $y=-x^4-2x^2-1$. **B.** $y=2x^4+4x^2+1$. **C.** $y=x^4+2x^2-1$. **D.** $y=x^4-2x^2-1$.

Lời giải

Chọn D.

Xét đáp án $y=2x^4+4x^2+1$ ta có $y'=8x^3+8x=8x(x^2+1)$ (loại vì y' chỉ có 1 nghiệm).

Xét đáp án $y=x^4-2x^2-1$ ta có $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$. Ở đây $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi đi qua các nghiệm đó nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 5. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=x\left(x^2-1\right)(x+2)^{2018}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

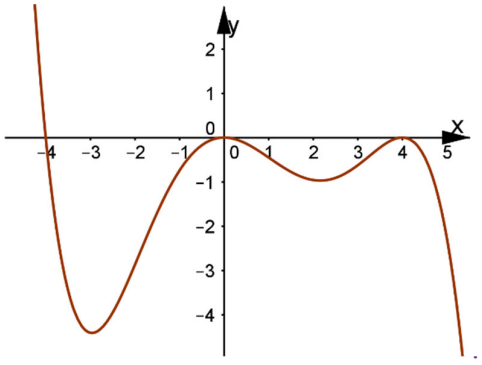
Lời giải

Chọn B.

Ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=0, x=1, x=-1$ và $f'(x)$ liên tục đổi dấu qua 3 nghiệm đó nên hàm số có 3 điểm cực trị.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↘		↗		↘		↗	

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ bên. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)=0$ tại 3 điểm $x_1<x_2=0<x_3$. Mà $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua x_1 nên $y=f(x)$ chỉ có một cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x+1)^2$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Có đúng 3 điểm cực trị. **B.** Không có điểm cực trị.

C. Có đúng 1 điểm cực trị. **D.** Có đúng 2 điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$. Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x=0$ nên hàm số có một điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên M và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3x^2$. Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

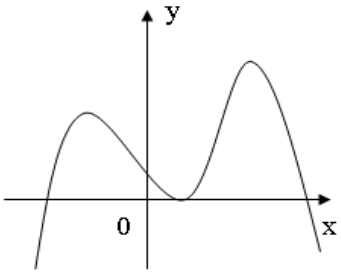
Chọn A.

Ta sử dụng bảng xét dấu của y'.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng này ta thấy rằng $f'(x)$ đổi dấu qua $x=1$. Vậy hàm số đạt cực trị tại $x=1$. Hàm số có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 9. Đồ thị sau đây là của hàm số $y=f'(x)$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có $f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $g(x)=f(x^2)\Rightarrow g'(x)=(x^2)'.f'(x^2)=2x.f'(x^2)$ (1)

Mà $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2\Rightarrow f'(x^2)=x^4(x^2-1)(x^2-4)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x)=2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2$

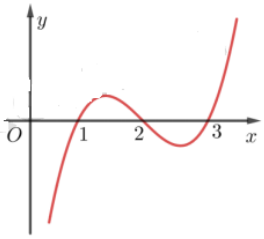
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị $x=0,x=\pm1$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$. hàm số $y'=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. **B.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có cực trị **D.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

Lời giải

Chọn A.

$f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=1;x=2;x=3$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là:

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=-3\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\|x\|)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là 3.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-2017(x-1)(x+2)^3(x-3)^2$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$

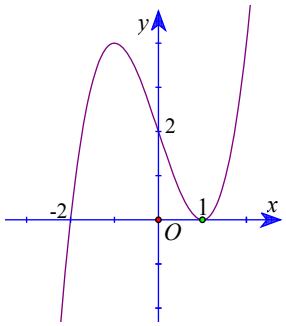
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\\x=3\end{array}\right.$, y' đổi dấu qua $x=1$ và $x=-2$, y' không đổi dấu qua $x=3$ nên hàm số có hai cực trị tại $x=1$ và $x=-2$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



A. 4 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 3 .

Lời giải

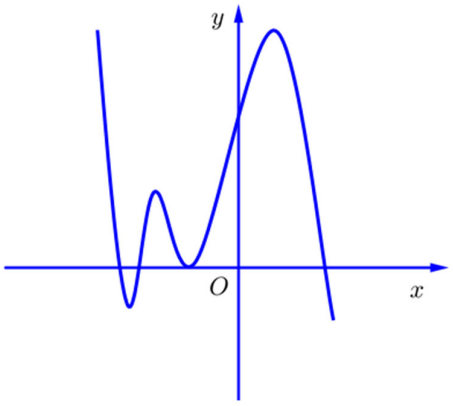
Chọn D.

Quan sát đồ thị ta có $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

Ta có $y'=\left[f\left(x^2-3\right)\right]'=2x.f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 6 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có 4 nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu 3 lần.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\left(x^2-1\right)\left(x-\sqrt{3}\right)^2$. Số điểm cực trị của hàm số này là:

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn B.

$$f'(x)=(x^2-1)(x-\sqrt{3})^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu y'

x		-1		1		$\sqrt{3}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Do đó số điểm cực trị của hàm số là 2.

Câu 17. Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số f là.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2)(x^4-4)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2)^2(x^2+2)=0$.

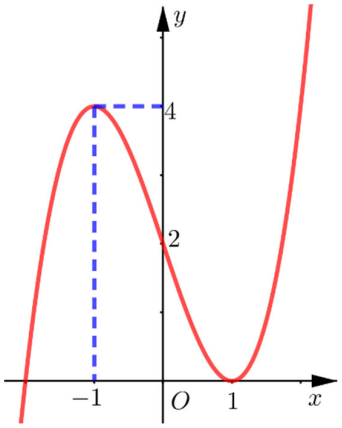
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=f(1) \\ x=\sqrt{2},\ y=f(\sqrt{2}) \\ x=-\sqrt{2},\ y=f(-\sqrt{2}) \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		↘	$f(-\sqrt{2})$	↘	$f(1)$	↗	$f(\sqrt{2})$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số chỉ có 1 cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:

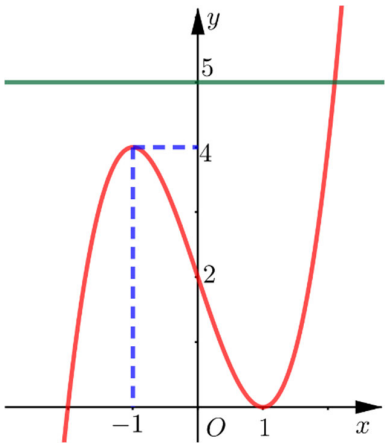


Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.



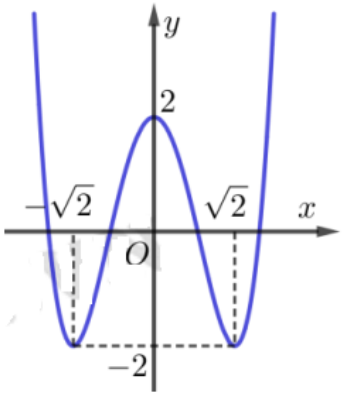
Ta có: $y'=f'(x)-5$; $y=0 \Leftrightarrow f'(x)=5$.

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f'(x)=5$ có nghiệm duy nhất và đó là nghiệm đơn.

Nghĩa là phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi qua nghiệm này.

Vậy hàm số $y=f(x)-5x$ có một điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = f'(x).3^{f(x)} + f'(x).2^{f(x)} = f'(x)\left[3^{f(x)} + 2^{f(x)}\right]$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ (do $3^{f(x)} + 2^{f(x)} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt nên $f'(x)$ đổi dấu 4 lần. Vậy $y' = 0$ có 4 điểm cực trị.

BÀI 29. BÀI TOÁN HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI MỘT ĐIỂM

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Xác định tham số để hàm số đạt cực trị tại một điểm.

Bước 1: Tìm …….. Tìm ……..

Bước 2: Điều kiện ……$\Rightarrow$ Tìm ra tham số

Bước 3: Điều kiện …… hàm số.

Kiểm tra …… yêu cầu đề bài hay không?

Lưu ý: Điểm cực trị $A(x_0;y_0)$ …….. đồ thị

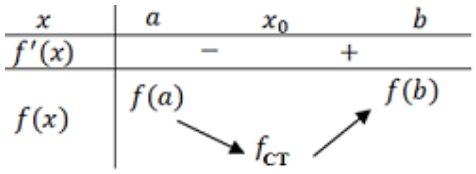
Định lý 1. Nếu hàm f đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì …….

Chú ý Chiều ngược lại của định lý này ……,

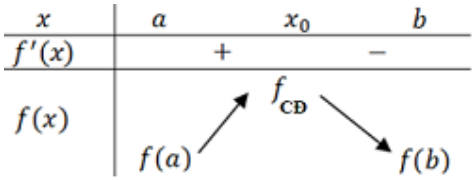
nghĩa là nếu $f'(x_0)=0$ thì …….. cực trị tại x_0.

Định lý 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

* Nếu khi x đi qua điểm x_0, $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ thì hàm f đạt …….. tại x_0.



* Nếu khi x đi qua điểm x_0, $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thì hàm f đạt …… tại x_0.



Nhận xét: Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0. Hàm số $f(x)$ đạt …….. tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x)$ ……. tại x_0.

Định lý 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

* Nếu $\begin{cases} f'(x_0).....0 \\ f''(x_0).....0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực đại tại x_0.

* Nếu $\begin{cases} f'(x_0).....0 \\ f''(x_0).....0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại ……

…… …… … . hoặc ……..

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. **[2D1-2.3-2] (SGD Bắc Ninh - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(m^2+1\right)x^2+\left(3m-2\right)x+m$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=2$ **B.** $m=-2$

C. $m=1$ **D.** $m=-1$

Câu 2. **[2D1-2.3-2] (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- Lần 1- 2018)** Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi:

A. $m>0$. **B.** $m=0$.

C. $m<0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 3. **[2D1-2.3-2] (CHUYÊN SƠN LA)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(6m^2-3\right)x$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. Không có giá trị nào của m. **B.** $m=0$.

C. $m=1$. **D.** $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 4. **[2D1-2.3-3] (THPT Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Hàm số $y=-x^4+2mx^2+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$ khi:

A. $-1\le m<0.$ **B.** $m\ge 0.$

C. $m<-1.$ **D.** $m>0.$

Câu 5. **[2D1-2.3-2] [Chuyên Quang Trung – Bình Phước]** Để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào?

A. $\left(0;2\right)$. **B.** $\left(-4;-2\right)$. **C.** $\left(-2;0\right)$. **D.** $\left(2;4\right)$.

Câu 6. **[2D1-2.3-2] (THPT Quốc Oai - Hà Nội - HKII - 2016 - 2017)** Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=2$? Một học sinh làm như sau:

Bước 1: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-m\right\}$, $y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{\left(x+m\right)^2}$.

Bước 2: Hàm số đạt cực đại tại $x=2\Leftrightarrow y'\left(2\right)=0\ \left(*\right)$.

Bước 3: $\left(*\right)\Leftrightarrow m^2+4m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-1\end{array}\right.$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ bước 2. **B.** Đúng. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 7. **[2D1-2.3-2] (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2017 - 2018)** Cho biết hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại điểm $x=1$, $f\left(3\right)=29$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $f\left(-2\right)=4$. **B.** $f\left(-2\right)=24$. **C.** $f\left(-2\right)=2$. **D.** $f\left(-2\right)=16$.

Câu 8. [2D1-2.3-2] **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - Lần 1 - 2017 - 2018)** Biết điểm $M(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$. Tính $f(3)$.

A. $f(3)=17$. **B.** $f(3)=49$. **C.** $f(3)=34$. **D.** $f(3)=13$.

Câu 9. [2D1-2.3-2] Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=2$, $f(2)=-3$, đồng thời đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1. Tính giá trị của $f(3)$.

A. $f(3)=-1$. **B.** $f(3)=2$. **C.** $f(3)=1$. **D.** $f(3)=-2$.

Câu 10. [2D1-2.3-4] **(Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** Vô số

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. [2D1-2.3-2] **(Sở GD&ĐT Bà Rịa - Vũng Tàu - 2017 - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m-1)x$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=0$.

Câu 2. [2D1-2.3-2] **(CHUYÊN VĨNH PHÚC)** Giá trị của m để hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3(m^2-1)x$ đạt cực tiểu tại $x=2$ là:

A. $m\neq\pm1$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 3. [2D1-2.3-2] **(THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Hàm số $y=x^3+2ax^2+4bx-2018$, $(a,b\in\mathbb{R})$ đạt cực trị tại $x=-1$. Khi đó hiệu $a-b$ là

A. -1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 4. [2D1-2.3-2] **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - Lần 1 - 2017 - 2018)** Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x$. Tìm m để hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0=1$.

A. $m\neq0$ và $m\neq2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=0$ hoặc $m=2$.

Câu 5. [2D1-2.3-2] **(THPT Kiến An - HP - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^3+x^2+(m^2-6)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 6. [2D1-2.3-2] **[THPT chuyên Lê Thánh Tông-2017]** Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+4x-1$ đạt cực trị tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 7. [2D1-2.3-2] Giá trị m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+(m^2-3m+2)x+5$ đạt cực đại tại $x=0$ là

A. $m=2$. **B.** Không có m nào.

C. $m=1;m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 8. [2D1-2.3-2] **(SGD Bà Rịa - Vũng Tàu - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$.

C. $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 9. [2D1-2.3-2] **[THPT Chuyên Lam Sơn lần 2-2017]** Gọi m_0 là giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+(m^2-1)x+1$ đạt cực trị tại $x_0=1$, các giá trị của m_0 tìm được sẽ thoả mãn điều kiện nào sau đây?

A. $-1<m_0<3$. **B.** $m_0\le 0$. **C.** $m_0\ge 0$. **D.** $m_0<-1$.

Câu 10. [2D1-2.3-3] **(THPT Trần Hưng Đạo-TP.HCM-2018)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2-1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m<-1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m\le -1$. **D.** $m\le -1\vee m\ge 1$

Câu 11. [2D1-2.3-3] **[SGD Hà Nội 2017 – 2018]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m\le 0$. **B.** $m=0$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m>0$.

Câu 12. [2D1-2.3-2] **[THPT chuyên Hưng Yên lần 2-2017]** Cho hàm số $f(x)=x+m+\frac{n}{x+1}$ (với m, n là các tham số thực). Tìm m, n để hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $f(-2)=-2$.

A. $m=-1;n=1$. **B.** Không tồn tại giá trị của m, n.

C. $m=n=1$. **D.** $m=n=-2$.

Câu 13. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $y=\frac{x^2-mx+1}{x-m}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=2$? Một học sinh làm như sau:

Bước 1: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$, $y'=\frac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2}$.

Bước 2: Hàm số đạt cực đại tại $x=2\Leftrightarrow y'(2)=0$ $(*)$.

Bước 3: $(*)\Leftrightarrow m^2-4m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ bước 2. **B.** Đúng. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 14. [2D1-2.3-2] **(THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018)** Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=7$. **B.** $y(-1)=11$

C. $y(-1)=-11$ **D.** $y(-1)=-35$

Câu 15. [2D1-2.3-2] Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$. **B.** $y(-2)=22$.

C. $y(-2)=6$. **D.** $y(-2)=-18$.

Câu 16. [2D1-2.3-2] Cho biết hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực đại tại điểm $x=1$, $f(1)=\frac{4}{3}$, đạt cực đại tại điểm $x=3$, $f(3)=0$. Tính giá trị của $f(-1)$.

A. $f(-1)=-2$. **B.** $f(-1)=\frac{8}{3}$.

C. $f(-1)=-3$. **D.** $f(-1)=-\frac{10}{3}$.

Câu 17. [2D1-2.3-2] Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$, $f(1)=-3$, đồng thời đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của $f(3)$.

A. $f(3)=81$. **B.** $f(3)=27$.

C. $f(3)=29$. **D.** $f(3)=-29$.

Câu 18. [2D1-2.3-4] **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-1)x^5-(m^2-1)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 2.

C. Vô số. **D.** 1.

Câu 19. [2D1-2.3-4] **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 103)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-4)x^5-(m^2-16)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 8. **B.** Vô số.

C. 7. **D.** 9.

Câu 20. [2D1-2.3-4] **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 104)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 4. **B.** 7.

C. 6. **D.** Vô số.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. **[2D1-2.3-2] (THPT Hải An - Hải Phòng - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-7$. **B.** $m=5$.

C. $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 2. **(Sở Yên Bái 2019-2020)** Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3\left(m^2-1\right)x+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.

C. $m=3$. **D.** $m=3, m=1$.

Câu 3. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=3$.

C. $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 4. **[2D1-2.3-2] [THPT An Lão lần 2-2017]** Có tất cả bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. 3. **B.** 1.

C. 2. **D.** 0.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2-2\right)x+2019$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. 1. **B.** 3.

C. 0. **D.** 2.

Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2m+3)x^2+\left(m^2+3m-4\right)x$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $m=-3$ hoặc $m=2$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

C. $m=2$. **D.** $m=-3$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0=1$.

A. $m\neq 0$ và $m\neq 2$. **B.** $m=2$.

C. $m=0$. **D.** $m=0$ hoặc $m=2$.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2-4)x$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=3$. **B.** $m=-3$.

C. $m=-1$. **D.** $m=1$

Câu 9. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$.

C. $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 10. *Hàm số* $y=x^3-3x^2+mx-2020$ *đạt cực tiểu tại* $x=2$ *khi*

A. $m>0$. **B.** $m=0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 11. **[2D1-2.3-2] (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$, $m=3$. **B.** $m=1$.

C. $m=3$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 12. **[2D1-2.3-2] [Sở GDĐT Lâm Đồng lần 01-2017]** Hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x-2$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$.

C. $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 13. **[2D1-2.3-2] [SGD Quảng Nam]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2m+3)x^2+(m^2+3m-4)x$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=-3$.

C. $m=-3$ hoặc $m=2$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

Câu 14. **[2D1-2.3-2] (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa-Lần 2-2018)** Tìm m để hàm số $y=mx^3-(m^2+1)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=-\frac{3}{2}$.

C. $m=0$. **D.** $m=-1$.

Câu 15. **[2D1-2.3-2] (THPT Kim Liên-Hà Nội -Lần 2-2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+2x^2-mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$.

C. $m\in\varnothing$. **D.** $m\in[1;+\infty)$.

Câu 16. Với giá trị nào của m thì $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2+m+1)x$?

A. $m\in\{-2;-1\}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** Không có m.

Câu 17. Hàm số $y=x^3-mx^2+3(m+1)x-1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ với m bằng:

A. $m=-1$. **B.** $m>-3$.

C. $m=0$. **D.** $m=-6$.

Câu 18. Biết rằng hàm số $y=x^3-2x^2+mx+3$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Giá trị của m bằng

A. 4. **B.** 3.

C. 2. **D.** 1.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^3+x^2+(m^2-6)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=-4$.

C. $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 20. Hàm số $y=-x^4+2mx^2+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$ khi:

A. $-1\le m<0$. **B.** $m\ge 0$.

C. $m<-1$. **D.** $m>0$.

Câu 21. **[2D1-2.3-2]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

A. $m=-9$. **B.** $m=1$.

C. $m=3$. **D.** $m=-2$.

Câu 22. Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $\{5;1\}$. **B.** $\{5\}$.

C. $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

Câu 23. Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3+(m+4)x^2+(5m+2)x+m+6$ đạt cực tiểu tại $x=-2$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $\{2\}$. **D.** $\{-2\}$.

Câu 24. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$.

C. $m=5$. **D.** $m=-7$.

Câu 25. **[2D1-2.3-2]** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai-Sóc Trăng-2018)** Biết $M(-2;20)$, $N(1;-7)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-3$.

A. $y(-3)=20$. **B.** $y(-3)=45$.

C. $y(-3)=30$. **D.** $y(-3)=9$.

Câu 26. Tìm giá trị của m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(2m+1)x-2$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$.

C. Không tồn tại m. **D.** $m=1$.

Câu 27. Hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(m-1)^2x$. Hàm số đạt cực trị tại điểm có hoành độ $x=1$ khi

A. $m=1$. **B.** $m=0;m=4$.

C. $m=4$. **D.** $m=0;m=1$.

Câu 28. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2-1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m<-1$. **B.** $m=-1$.

C. $m\le -1$. **D.** $m\le -1\vee m\ge 1$

Câu 29. Tìm m để hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4-5$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.

C. $m\ne -1$. **D.** $m\ne 1$.

Câu 30. **[2D1-2.3-2](Chuyên Long An - Lần 2 - Năm 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-14)$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=0$. **B.** $f(1)=-6$.

C. $f(1)=-5$. **D.** $f(1)=-7$.

Câu 31. Cho hàm số $y=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq=2$. **B.** $pq=\dfrac{1}{2}$.

C. $pq=\sqrt{3}$. **D.** $pq=1$.

Câu 32. Xác định tham số m sao cho hàm số $y=x+m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$.

C. $m=-6$. **D.** $m=6$.

Câu 33. **[2D1-2.7-1] (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0)=0$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0)>0$ hoặc $f''(x_0)<0$.

Câu 34. **[2D1-2.3-2] (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** -1. **C.** 7. **D.** 14.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^4+ax^2+b$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1;4)$ là điểm cực tiểu. Tổng $2a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 36. Biết a,b,c là các số thực tùy ý, $a\neq 0$ và hàm số $y=ax^3+bx^2+cx$ nhận $x=-1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây **đúng ?**

A. $3a+2b+c=0$. **B.** $a+c=b$. **C.** $3a+c=2b$. **D.** $2a-b=0$.

Câu 37. Biết điểm $M(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$. Tính $f(3)$.

A. $f(3)=17$. **B.** $f(3)=49$. **C.** $f(3)=34$. **D.** $f(3)=13$.

Câu 38. Cho hàm số $y=x^4+ax^2+b$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1;4)$ là điểm cực tiểu. Tổng $2a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^9+(m+2)x^7-(m^2-4)x^6+7$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

BÀI 29. BÀI TOÁN HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI MỘT ĐIỂM

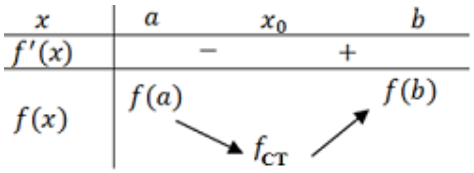
A. LÝ THUYẾT

Định lý 1. Nếu hàm f đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

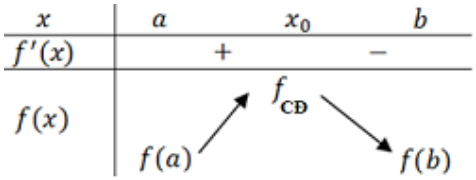
Chú ý Chiều ngược lại của định lý này chưa chắc đúng, nghĩa là nếu $f'(x_0)=0$ thì chưa chắc hàm đạt cực trị tại x_0.

Định lý 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

* Nếu khi x đi qua điểm x_0, $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ thì hàm f đạt cực đại tại x_0.



* Nếu khi x đi qua điểm x_0, $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ thì hàm f đạt cực tiểu tại x_0.



Nhận xét: Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu tại x_0.

Định lý 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

* Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực đại tại x_0.

* Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ thì hàm f đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

B. BÀI TẬP MINH HỌA

Câu 1. **[2D1-2.3-2] (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- Lần 1- 2018)** Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi:

A. $m>0$. **B.** $m=0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\neq 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x+m$.

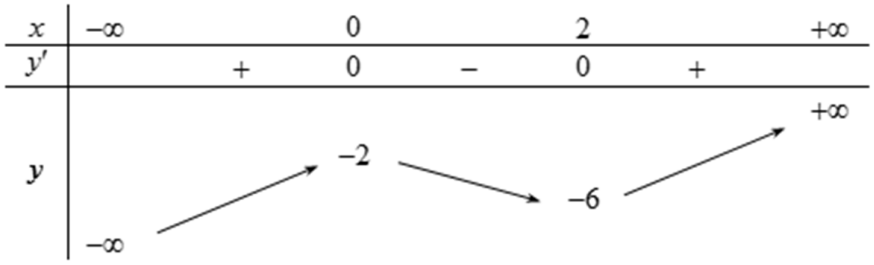
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ suy ra: $y'(2)=0 \Leftrightarrow m=0$.

Với $m=0$, ta có $y=x^3-3x^2-2$

$D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. [2D1-2.3-2] (CHUYÊN VĨNH PHÚC) Giá trị của m để hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3(m^2-1)x$ đạt cực tiểu tại $x=2$ là:

A. $m \neq \pm 1$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3(m^2-1)$; $y''=6x-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, suy ra:

$y'(2)=0 \Leftrightarrow 3(m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Thử lại:

Khi $m=\pm 1$ thì $y''(2)=12>0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Vậy $m=\pm 1$.

Câu 3. [2D1-2.3-2] (THPT Kiến An - HP - Lần 1 - 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^3+x^2+(m^2-6)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3mx^2+2x+m^2-6$ và $y''=6mx+2$

Hàm số $y=mx^3+x^2+\left(m^2-6\right)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ nên

$y'(1)=0\Leftrightarrow m^2+3m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-4\end{array}\right.$.

Với $m=1$ ta có: $y''(1)=8>0\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Với $m=-4$ ta có: $y''(1)=-22<0\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Vậy $m=1$.

Câu 4. **[2D1-2.3-2] (SGD Bắc Ninh - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(m^2+1\right)x^2+\left(3m-2\right)x+m$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-\left(m^2+1\right)x+\left(3m-2\right)$; $y''=2x-m^2-1$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$, suy ra:

$y'(1)=1^2-\left(m^2+1\right).1+\left(3m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow 1^2-\left(m^2+1\right).1+\left(3m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow -m^2+3m-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$.

Thử lại:

Khi $m=2$ thì $y''(1)=-1<0$. Vậy khi $m=2$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Khi $m=1$ thì $y'=(x-1)^2\geq 0\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số không có cực trị

Câu 5. **[2D1-2.3-2] (Sở GD&ĐT Bà Rịa - Vũng Tàu - 2017 - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m-1$; $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ suy ra $y'(1)=0\Leftrightarrow m^2-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=3\end{array}\right.$.

Với $m=0$: $y''(1)=2>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Với $m=3$: $y''(1)=-4<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. **[2D1-2.3-2] (THPT Quốc Oai - Hà Nội - HKII - 2016 - 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$.

Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=2$? Một học sinh làm như sau:

Bước 1: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$, $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.

Bước 2: Hàm số đạt cực đại tại $x=2 \Leftrightarrow y'(2)=0$ $(*)$.

Bước 3: $(*)\Leftrightarrow m^2+4m+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ bước 2. **B.** Đúng. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số đạt cực đại tại $x=2\Rightarrow y'(2)=0$ nên bước 2 là sai.

Câu 7. **[2D1-2.3-2] (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2017 - 2018)** Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại điểm $x=1$, $f(3)=29$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $f(-2)=4$. **B.** $f(-2)=24$. **C.** $f(-2)=2$. **D.** $f(-2)=16$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(3)=29 \\ f(0)=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=-3 \\ 9a+3b+c=2 \\ c=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-9 \\ c=2 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-9x+2\Rightarrow f(-2)=24$.

Câu 8. **[2D1-2.3-2] (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - Lần 1 - 2017 - 2018)** Biết điểm $M(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$. Tính $f(3)$.

A. $f(3)=17$. **B.** $f(3)=49$. **C.** $f(3)=34$. **D.** $f(3)=13$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$ và $f''(x)=6x+2a$.

$M(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} f(0)=4 \\ f'(0)=0 \\ f''(0)<0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b=0 \\ a<0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+4$. Vậy $f(3)=13$.

Câu 9. **[2D1-2.3-3] (THPT Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Hàm số $y=-x^4+2mx^2+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$ khi:

A. $-1\le m<0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=-4x^3+4mx=4x\left(-x^2+m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

TH1: $m\le 0$ thì $-x^2+m\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó dấu y' ngược dấu với dấu của $4x$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

TH2: $m>0$ thì $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $m>0$.

Câu 10. **[2D1-2.3-4] (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-2)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=2$ hoặc $m=-2$

Với $m=2$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=2$ thỏa ycbt.

Với $m=-2$ thì $g(x)=8x^4-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. [2D1-2.3-2] (THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - Lần 1 - 2017 - 2018) Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x$. Tìm m để hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0=1$.

A. $m\neq 0$ và $m\neq 2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=0$ hoặc $m=2$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=3x^2-6mx+3(m^2-1)$, $f''(x)=6x-6m$.

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0=1$ nên $f'(1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=0\end{array}\right.$.

Với $m=2$ thì $f''(1)=-6<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x_0=1$.

Với $m=0$ thì $f''(1)=6>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_0=1$.

Vậy $m=2$.

Câu 2. [2D1-2.3-2] (SGD Bà Rịa - Vũng Tàu - Lần 1 - 2017 - 2018) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6x+m$; $y''=6x-6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2\Rightarrow y'(2)=0\Leftrightarrow m=0$.

Thử lại: với $m=0$ thì $y''(2)=6>0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Vậy: $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. [2D1-2.3-2] Giá trị m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+(m^2-3m+2)x+5$ đạt cực đại tại $x=0$ là

A. $m=2$. **B.** Không có m nào. **C.** $m=1;m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+(m^2-3m+2)$; $y''=2x-2(m-1)$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, suy ra:

$y'(0)=0\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$.

Thử lại:

Khi $m=1$ thì $y'=x^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị.

Khi $m=2$ thì $y''(0)=-2<0$.

Vậy khi $m=2$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 4. **[2D1-2.3-2] (CHUYÊN SƠN LA)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(6m^2-3\right)x$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. Không có giá trị nào của m. **B.** $m=0$.

C. $m=1$. **D.** $m=0$ hoặc $m=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-6mx+6m^2-3\Rightarrow y'(1)=6m^2-6m$.

Điều kiện cần: Hàm số đạt cực trị tại $x=1$ thì $y'(1)=0\Leftrightarrow 6m^2-6m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

☑ Với $m=0$ thì $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$. Dễ thấy hàm số đạt cực trị tại $x=1$.

☑ Với $m=1$ thì $y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0,\ \forall\in\mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị tại $x=1$.

Vậy với $m=0$ hàm số sẽ đạt cực trị tại $x=1$.

Câu 5. **[2D1-2.3-2] (THPT Hải An - Hải Phòng - Lần 1 - 2017 - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-7$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-4$, $y''=2x-2m$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$ là: $y'(3)=0\Leftrightarrow m^2-6m+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

- Tại $m=1$ thì $y''(3)=2.3-2.1=4>0$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3$ (loại).
- Tại $m=5$ thì $y''(3)=2.3-2.5=-4<0$, hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$ (thỏa mãn).

Vậy với $m=5$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Câu 6. **[2D1-2.3-2]** Cho hàm số $y=\frac{x^2-mx+1}{x-m}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=2$? Một học sinh làm như sau:

Bước 1: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$, $y'=\frac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2}$.

Bước 2: Hàm số đạt cực đại tại $x=2\Leftrightarrow y'(2)=0$ $(*)$.

Bước 3: $(*) \Leftrightarrow m^2-4m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ bước 2. **B.** Đúng. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số đạt cực đại tại $x=2 \Rightarrow y'(2)=0$ nên bước 2 là sai.

Câu 7. [2D1-2.3-2] Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=2$, $f(2)=-3$, đồng thời đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1. Tính giá trị của $f(3)$.

A. $f(3)=-1$. **B.** $f(3)=2$. **C.** $f(3)=1$. **D.** $f(3)=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} f'(2)=0 \\ f(2)=-3 \\ f(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=-12 \\ 4a+2b+c=-11 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+1 \Rightarrow f(3)=1$.

Câu 8. [2D1-2.3-2] Cho biết hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực đại tại điểm $x=1$, $f(1)=\frac{4}{3}$, đạt cực đại tại điểm $x=3$, $f(3)=0$. Tính giá trị của $f(-1)$.

A. $f(-1)=-2$. **B.** $f(-1)=\frac{8}{3}$. **C.** $f(-1)=-3$. **D.** $f(-1)=-\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=\frac{4}{3} \\ f'(3)=0 \\ f(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+c+d=\frac{4}{3} \\ 27a+6b+c=0 \\ 27a+9b+3c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x \Rightarrow f(3)=1$.

Câu 9. [2D1-2.3-3] (THPT Trần Hưng Đạo-TP.HCM-2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2-1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m<-1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m\le -1$. **D.** $m\le -1 \vee m\ge 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = (m+1) \end{array}\right.$.

Nếu $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{m+1}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{m+1}$ khi đó ta có y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ ki qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực đại $\Rightarrow m > -1$ không thỏa mãn.

Nếu $m+1 \le 0 \Leftrightarrow m \le -1$ thì $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ khi đó ta có y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu $\Rightarrow m \le -1$ thỏa mãn.

Câu 10. **[2D1-2.3-4] (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3\left(8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

* Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

* Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \end{array}\right.$, nhưng $x = 0$ là nghiệm bội chẵn nên không phải cực trị.

* Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Để $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $m = 0$ và $m = 1$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. **[2D1-2.7-1] (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0)=0$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0)>0$ hoặc $f''(x_0)<0$.

Lời giải

Chọn A

Câu 2. **[2D1-2.3-2] (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018)** Hàm số $y=x^3+2ax^2+4bx-2018$, $(a,b\in\mathbb{R})$ đạt cực trị tại $x=-1$. Khi đó hiệu $a-b$ là

A. -1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2+4ax+4b$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=-1$ nên $y'(-1)=0\Rightarrow 3-4a+4b=0\Rightarrow a-b=\frac{3}{4}$.

Câu 3. **[2D1-2.3-2] [THPT An Lão lần 2-2017]** Có tất cả bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Do y đạt cực đại tại $x=1$ nên $y'(1)=1\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow m=1\vee m=2$.

Ta có $y''=2x-2m$.

Với $m=1$, $y''(1)=0$ nên hàm số không đạt cực đại tại $x=1$.

Với $m=2$, $y''(1)=-2<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 4. **[2D1-2.3-2] [Sở GDĐT Lâm Đồng lần 01-2017]** Hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x-2$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2-4mx+m^2$. $y'(1)=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=3$. Thử lại ta thấy $m=1$ thỏa mãn.

Câu 5. [2D1-2.3-2] [THPT chuyên Lê Thánh Tông-2017] Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+4x-1$ đạt cực trị tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

$y'=x^2-2mx+4$; $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=2 \Rightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4m+4=0 \\ 4-2m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6. [2D1-2.3-2] [SGD Quảng Nam] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2m+3)x^2+(m^2+3m-4)x$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=-3$.

C. $m=-3$ hoặc $m=2$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-(2m+3)x+(m^2+3m+4)$; $y''=2x-2m-3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ suy ra $y'(1)=0 \Leftrightarrow m^2+m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Thử lại:

Khi $m=2$ thì $y''(1)=-5<0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Khi $m=-3$ thì $y''(1)=1>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Vậy $m=-3$.

Câu 7. [2D1-2.3-2] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

A. $m=-9$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-3x^2+4(2m-1)x-(m^2-8)$;

$f''(x)=-6x+4(2m-1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$ suy ra

$f'(-1)=0 \Leftrightarrow m^2+8m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-9 \end{array}\right.$.

Thử lại:

Khi $m=1$ thì $f''(-1)=10>0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Khi $m=-9$ thì $f''(-1)=-70<0$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Vậy $m=1$.

Câu 8. **[2D1-2.3-2] (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=1$, $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B

Xét $y=x^3-2mx^2+m^2x+1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-4mx+m^2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ nên $y'(1)=0\Leftrightarrow 3-4m+m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$.

Thử lại:

* Với $m=1$, ta có:

$y'=3x^2-4x+1$.

$y''=6x-4$.

$y''(1)=2>0$. Do đó hàm số hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

* Với $m=3$, ta có:

$y'=3x^2-12x+9$.

$y''=6x-12$.

$y''(1)=-6<0$. Do đó hàm số hàm số không đạt cực tiểu tại $x=1$.

Vậy với $m=1$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 9. **[2D1-2.3-2] (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa-Lần 2-2018)** Tìm m để hàm số $y=mx^3-\left(m^2+1\right)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=-\frac{3}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3mx^2-2\left(m^2+1\right)x+2$, $y''=6mx-2\left(m^2+1\right)$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$ suy ra $y'(1)=0\Leftrightarrow -2m^2+3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Thử lại:

Khi $m=0$ thì $y''(1)=-2<0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Khi $m=\frac{3}{2}$ thì $y''(1)=\frac{5}{2}>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Vậy $m=\frac{3}{2}$.

Câu 10. **[2D1-2.3-2] (THPT Kim Liên-Hà Nội -Lần 2-2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+2x^2-mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\in[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-3x^2+4x-m$, $y''=-6x+4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ suy ra $y'(1)=0\Leftrightarrow m=1$

Thử lại:

Khi $m=1$ thì $y''(1)=-2<0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Vậy $m\in\varnothing$.

Câu 11. **[2D1-2.3-2] [Chuyên Quang Trung – Bình Phước]** Để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn B

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.
- Đạo hàm: $y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.
- Hàm số đạt cực trị tại $x=2$ thì $y'(2)=0\Rightarrow\frac{4+4m+m^2-1}{(2+m)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-1\end{array}\right.$.
- Với $m=-3\Rightarrow y'=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $m=-3$ ta nhận.
- Với $m=-1\Rightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ nên $m=-1$ ta loại.

Câu 12. [2D1-2.3-2] [THPT Chuyên Lam Sơn lần 2-2017] Gọi m_0 là giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2+\left(m^2-1\right)x+1$ đạt cực trị tại $x_0=1$, các giá trị của m_0 tìm được sẽ thoả mãn điều kiện nào sau đây?

A. $-1<m_0<3$. **B.** $m_0\le 0$. **C.** $m_0\ge 0$. **D.** $m_0<-1$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $\mathbb{R}$.

$y'(x)=x^2+2mx+\left(m^2-1\right)$.

$y(1)=m^2+2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$.

Với $m=0$, ta có $y'=x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ nên $m=0$ thỏa mãn.

Với $m=-2$, ta có $y'=x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1$ nên $m=-2$ thỏa mãn. Suy ra $m_0\le 0$.

Câu 13. [2D1-2.3-2] Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$, $f(1)=-3$, đồng thời đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của $f(3)$.

A. $f(3)=81$. **B.** $f(3)=27$. **C.** $f(3)=29$. **D.** $f(3)=-29$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}f'(1)=0\\f(1)=-3\\f(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=-3\\a+b+c=-4\\c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-9\\c=2\end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-9x+2 \Rightarrow f(3)=29$.

Câu 14. **[2D1-2.3-2] (THPT Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018)** Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=7$. **B.** $y(-1)=11$ **C.** $y(-1)=-11$ **D.** $y(-1)=-35$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Theo bài cho ta có: $\begin{cases}3a+2b+c=0\\12a+4b+c=0\\a+b+c+d=-7\\8a+4b+2c+d=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a+2b+c=0\\12a+4b+c=0\\7a+3b+c=-1\\d=-7-a-b-c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-9\\c=12\\d=-12\end{cases}$

Suy ra: $y=2x^3-9x^2+12x-12$. Do đó, $y(-1)=-35$.

Câu 15. **[2D1-2.3-2](Chuyên Long An - Lần 2 - Năm 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-14)$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=0$. **B.** $f(1)=-6$. **C.** $f(1)=-5$. **D.** $f(1)=-7$.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra ta có hệ sau:

$\begin{cases}f'(2)=0\\f(0)=2\\f(2)=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a+b=0\\c=2\\4a+b=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-8\\c=2\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=x^4-8x^2+2$. Vậy $f(1)=-6$.

Câu 16. **[2D1-2.3-2] (THPT Nguyễn Thị Minh Khai-Sóc Trăng-2018)** Biết $M(-2;20)$, $N(1;-7)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-3$.

A. $y(-3)=20$. **B.** $y(-3)=45$. **C.** $y(-3)=30$. **D.** $y(-3)=9$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì $M(-2;20)$, $N(1;-7)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}3a(-2)^2+2b(-2)+c=0\\3a+2b+c=0\\(-2)^3a+(-2)^2b+(-2)c+d=20\\a+b+c+d=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12a-4b+c=0\\3a+2b+c=0\\-8a+4b-2c+d=20\\a+b+c+d=-7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}12a-4b+c=0\\3a+2b+c=0\\-9a+3b-3c=27\\a+b+c+d=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=-12\\d=0\end{cases}\Rightarrow y=2x^3+3x^2-12x.$$

Khi đó $y(-3)=2(-3)^3+3(-3)^2-12(-3)=9$.

Câu 17. [2D1-2.3-2] Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$. **B.** $y(-2)=22$. **C.** $y(-2)=6$. **D.** $y(-2)=-18$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\begin{cases}y'(0)=0\\y'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\12a+4b+c=0\end{cases}(1)\text{ và }\begin{cases}y(0)=2\\y(2)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\8a+4b+2c+d=-2\end{cases}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1;\ b=-3;\ c=0;\ d=2\Rightarrow y=x^3-3x^2+2\Rightarrow y(-2)=-18$.

Câu 18. [2D1-2.3-2] (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** -1. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2+2ax+b$.

Đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ nên ta có: $a+b+c=-1$.

Đồ thị hàm số có điểm cực trị $(-2;0)$ nên $\begin{cases}4a-2b+c=8\\y'(-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b+c=8\\-4a+b=-12\end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}a+b+c=-1\\4a-2b+c=8\\-4a+b=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=0\\c=-4\end{cases}$.

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=25$.

Câu 19. [2D1-2.3-2] (SGD Đà Nẵng 2017-2018) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ sao cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=3$ đồng thời có $y(0)=3$ và $y(3)=3$. Hỏi trong không gian $Oxyz$, điểm $M(a;b;c)$ nằm trong mặt cầu nào sau đây?

A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=130$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=40$.

C. $x^2+y^2+(z+5)^2=90$. **D.** $(x+5)^2+(y-7)^2+(z+3)^2=42$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+2ax+b$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}y'(3)=0\\y(0)=3\\y(3)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}27+6a+b=0\\c=3\\27+9a+3b+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\b=9\\c=3\end{cases}\text{ hay } M(-6;9;3).$$

Ta có mặt cầu $(x+5)^2+(y-7)^2+(z+3)^2=42$ có tâm $I(-5;7;-3)$ và $R=\sqrt{42}$.

Do $IM=\sqrt{(-6+5)^2+(9-7)^2+(3+3)^2}=\sqrt{29}<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu $(x+5)^2+(y-7)^2+(z+3)^2=42$.

Câu 20. [2D1-2.3-2] [THPT chuyên Hưng Yên lần 2-2017] Cho hàm số $f(x)=x+m+\dfrac{n}{x+1}$ (với m, n là các tham số thực). Tìm m, n để hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $f(-2)=-2$.

A. $m=-1;n=1$. **B.** Không tồn tại giá trị của m, n.

C. $m=n=1$. **D.** $m=n=-2$.

Lời giải

Chọn C

Có $y'=1-\dfrac{n}{(x+1)^2}$; $y''=\dfrac{2n}{(x+1)^3}$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có: $\begin{cases}y'(-2)=0\\y''(-2)<0\\f(-2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-n=0\\-2n<0\\-2+m-n=-2\end{cases}\Leftrightarrow m=n=1.$

Câu 21. [2D1-2.3-3] [SGD Hà Nội 2017 – 2018] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m\le 0$. **B.** $m=0$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m>0$.

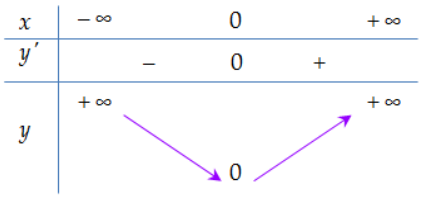
Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=x^4+mx^2\Rightarrow y'=4x^3+2mx=2x(2x^2+m)$.

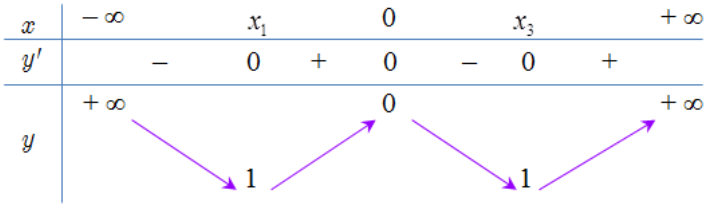
$$y'=0\Rightarrow 2x(2x^2+m)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{-m}{2} \end{array}\right.$$

• Nếu $m\ge 0$ ta có bảng biến thiên:



Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

• Nếu $m<0$ ta có bảng biến thiên:



Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi $m\ge 0$.

Câu 22. **[2D1-2.3-4] (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-4)x^5-(m^2-16)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 8. **B.** Vô số. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=8x^7+5(m-5)x^4-4(m^2-16)x^3=x^3\left[8x^4+5(m-4)x-4(m^2-16)\right]=x^3.g(x)$

Với $g(x)=8x^4+5(m-5)x-4(m^2-16)$.

● Trường hợp 1: $g(0)=0\Leftrightarrow m=\pm 4$.

Với $m=4\Rightarrow y'=8x^7$. Suy ra $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m=-4\Rightarrow y'=8x^4(x^3-5)$. Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.

● Trường hợp 2: $g(0)\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì qua giá trị $x=0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0)>0\Leftrightarrow -4<m<4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4<m\le 4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 23. **[2D1-2.3-4] (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 4 . **B.** 7 . **C.** 6 . **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-3)x^4-4(m^2-9)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

Với $m=-3$ thì $g(x)=8x^4-30x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-9<0 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

BÀI 30. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG & NỬA KHOẢNG.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Bài toán: Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y=f(x)$ *trên khoảng* D *-Khoảng- nửa khoảng.*

Bước 1: ……...

Bước 2: ……...

Bước 3: ……...

2. Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

□ Số M được gọi là ***giá trị lớn nhất (GTLN)*** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\le M$ với $\forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$ .Kí hiệu: $M=\max\limits_D f(x)$.

□ Số m được gọi là ***giá trị lớn nhất (GTNN)*** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\ge m$ với $\forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$ .Kí hiệu: $m=\min\limits_D f(x)$.

3. Chú ý

Các hàm số: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $y=\sqrt{ax+b}$, $y=\sqrt[3]{ax+b}$, $y=\sqrt[n]{ax+b}$, *hàm đa thức chỉ chứa bậc lẻ và toàn bộ các hệ số đều dương (hoặc toàn bộ các hệ số đều âm) có đạo hàm không đổi dấu trên tập xác định của nó.*

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=8\sqrt{x^2-2x+10}-x^2+2x-2$ bằng:

A. $\max y=24$. **B.** $\max y=40$. **C.** $\max y=32$. **D.** $\max y=23$

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019$ là

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$, tập giá trị của hàm số là

A. $[2;4]$. **B.** $\left[\dfrac{15}{2};5\right]$. **C.** $[2;3]$. **D.** $[3;4]$.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}, x>0$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 5. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ trên miền $x>0$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 6. Trên khoảng $(0;+\infty)$ thì hàm số $y=-x^3+3x+1$

A. có giá trị lớn nhất là $Max\, y=1$. **B.** có giá trị nhỏ nhất là $Min\, y=-1$.

C. có giá trị lớn nhất là $Max\, y=3$. **D.** có giá trị nhỏ nhất là $Min\, y=3$ .S

Câu 7. Hàm số $y=4\sqrt{x^2-2x+3}+2x-x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x mà tích của chúng là:

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 8. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

Câu 9. **(Đề KT Chương I ĐS Lớp 12 Chuyên ĐH VINH 2018-2019)** Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$ là

A. $\max P=16$. **B.** $\max P=12$. **C.** $\max P=4$. **D.** $\max P=8$.

Câu 10. **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sqrt{x^2-3x+2}-x^2+3x-1$ bằng:

A. $\max y=-4$. **B.** $\max y=2$. **C.** $\max y=-2$. **D.** $\max y=4$

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+3x^2-5$ là

A. -5. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{11}{4}$. **D.** 0.

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{6-8x}{x^2+1}$ trên tập xác định của hàm số là :

A. -2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-2\sqrt{x^2-4x+3}+x^2-4x-1$ bằng:

A. $\min y=-5$. **B.** $\min y=-6$. **C.** $\min y=-4$. **D.** $\min y=-3$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

A. -3. **B.** -1. **C.** không xác định. **D.** 1.

Câu 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Khi đó, tích $m.M$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.

Câu 7. **(ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01-2018-2019)** Cho hàm số $y=\frac{x}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m. Tính giá trị biểu thức $P=M^2+m^2$.

A. $P=\frac{1}{4}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+4x^2+2$.

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3. **B.** Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 6.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2. **D.** Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\frac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$ bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3

Câu 10. Cho hàm số $y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm sô trên $(0;+\infty)$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

A. $\max\limits_D f(x)=0$ không tồn tại $\min\limits_D f(x)$.

B. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-\sqrt{5}$.

C. $\max\limits_D f(x)=0;\min\limits_D f(x)=-1$.

D. $\min\limits_D f(x)=0$ không tồn tại $\max\limits_D f(x)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x-3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\max y=1$. **B.** $\max y=2$.

C. $\max y=5$. **D.** Hàm số không có giá trị lớn nhất

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y=1;\max y=2$.

B. $\min y=-1;\max y=\dfrac{7}{3}$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

D. $\min y=1;\max y=\dfrac{7}{3}$

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó?

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Câu 16. Cho x,y là những số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Khi đó giá trị $A=M+15m$ là:

A. $17-2\sqrt{6}$. **B.** $17-\sqrt{6}$. **C.** $17+\sqrt{6}$. **D.** $17+2\sqrt{6}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị (H) của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $P=k_1^{2018}+k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất với k_1,k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B của đồ thị (H).

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 18. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn với $3x^2y(1+\sqrt{9y^2+1})=2x+2\sqrt{x^2+4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3-12x^2y+4$

A. $\dfrac{36-32\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{36-20\sqrt{30}}{9}$. **C.** $\dfrac{9-8\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{14-11\sqrt{5}}{2}$.

Câu 19. Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $S(\text{m})$ là quảng đường vật duy chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $144(\text{m/s})$. **B.** $243(\text{m/s})$. **C.** $27(\text{m/s})$. **D.** $36(\text{m/s})$.

Câu 20. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2-4x+6}+4x-x^2+1$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x)=M$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$ **D.** Không tồn tại.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=-x^2+2x+3$.

A. $M=1$. **B.** $M=4$. **C.** $M=3$. **D.** $M=2$

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-3x^4+4x^3+3$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x}{4+x^2}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Câu 6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y=|x-1|+|x+3|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8. Hàm số nào sau đây không có giá trị lớn nhất?

A. $y=-x^4+x^2-2019$. **B.** $y=x^3+3x^2+2019$.

C. $y=-x^2+x+2019$. **D.** $y=-\sin x+\cos x$.

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. -1. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 4.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 4

Câu 11. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y=3$. **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-1$. **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5$. **D.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-\dfrac{7}{3}$.

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - Tháng 12 - 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}$ khi $x>0$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{(x+3)^2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 13. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x+6}{x-1}$ trên $[a;b]\subset(-\infty;1)$ là

A. $f(10)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(b)$. **D.** $f(a)$.

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Câu 17. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{3}{5}$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2.\sqrt[3]{9}$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3.\sqrt[3]{9}$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}$ khi $x>0$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+\dfrac{3}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $m=4\sqrt[4]{3}$. **B.** $m=2\sqrt{3}$. **C.** $m=4$ **D.** $m=2$

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ trên miền $x>0$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 21. Cho hàm số $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ .Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 22. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m.M$.

A. $T=\dfrac{1}{9}$

B. $T=\dfrac{3}{2}$

C. $T=0$

D. $T=-\dfrac{3}{2}$

Câu 23. Gọi giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là $M;m$.Khi đó các giá trị $M;m$ lần lượt là?

A. Không có M ; $m=-3$.

B. $M=-3$; $m=1$.

C. $M=0$; $m=1$.

D. Không có $M;m$.

Câu 24. **(THI HK I THPT KIM LIÊN HÀ NỘI 2017)** Cho hàm số $y=\sqrt{x^3-3x}$ với $x\in[2;+\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

C. Hàm số không có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+x+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y=1;\max y=3$.

B. $\min y=\dfrac{3}{7};\max y=1$.

C. $\min y=-\dfrac{3}{7};\max y=1$.

D. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y=1;\max y=6$.

B. $\min y=-1;\max y=6$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

D. $\min y=1;\max y=2$

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y=0;\max y=1$.

B. $\min y=-\dfrac{1}{3};\max y=1$.

C. $\min y=-\dfrac{1}{3};\max y=0$.

D. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Câu 28. Cho các số thực x,y thay đổi thoả mãn $x^2+2y^2+2xy=1$ và hàm số $f(t)=t^4-t^2+2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\dfrac{x+y+1}{x+2y-2}\right)$. Tính $M+m$?

A. $8\sqrt{3}-2$.

B. $\dfrac{303}{2}$.

C. $\dfrac{303}{4}$.

D. $4\sqrt{3}+2$.

Câu 29. Cho $y\ge 0;\ x^2+x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $P=4x+y-xy+2$.

A. $m=-10$ và $M=10$.

B. $m=-10$ và $M=6$.

C. $m=6$ và $M=26$.

D. $m=6$ và $M=10$.

Câu 30. Cho các số thực không âm x,y thay đổi. M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$. Giá trị của $8M+4m$ bằng:

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Câu 31. **(THPT THUẬN THÀNH 1)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^6+x^3+m\right|-2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 2.

D. 0.

Câu 32. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=5s$ **B.** $t=6s$ **C.** $t=3s$ **D.** $t=1s$

Câu 33. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-t^3+9t^2+t+10$ trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t=2s$. **B.** $t=6s$. **C.** $t=3s$. **D.** $t=5s$

Câu 34. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$. **C.** $64(m/s)$. **D.** $18(m/s)$.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bặt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $88(m/s)$. **B.** $25(m/s)$. **C.** $100(m/s)$. **D.** $11(m/s)$.

Câu 36. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$. Tính thời điểm t (giây) tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị **lớn nhất**?

A. $t=0$. **B.** $t=6$. **C.** $t=4$. **D.** $t=2$.

Câu 37. Một vật chuyển động theo quy luật $S=10t^2-\frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây, kể từ khi vật bắt đầu chuyển động vận tốc v (m/s) của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. $8(s)$. **B.** $20(s)$. **C.** $10(s)$. **D.** $15(s)$.

BÀI 30. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG & NỬA KHOẢNG.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Bài toán: Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y=f(x)$ *trên khoảng* D *-Khoảng- nửa khoảng.*

Bước 1: Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x)=0$ tìm nghiệm.

Bước 2: Xét dấu biểu thức $y'=f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).

2. Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

□ Số M được gọi là ***giá trị lớn nhất (GTLN)*** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\le M$ với $\forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{D} f(x)$.

□ Số m được gọi là ***giá trị lớn nhất (GTNN)*** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\ge m$ với $\forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{D} f(x)$.

3. Chú ý

Các hàm số: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $y=\sqrt{ax+b}$, $y=\sqrt[3]{ax+b}$, $y=\sqrt[n]{ax+b}$, *hàm đa thức chỉ chứa bậc lẻ và toàn bộ các hệ số đều dương (hoặc toàn bộ các hệ số đều âm) có đạo hàm không đổi dấu trên tập xác định của nó.*

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=8\sqrt{x^2-2x+10}-x^2+2x-2$ bằng:

A. $\max y=24$. **B.** $\max y=40$. **C.** $\max y=32$. **D.** $\max y=23$

Lời giải

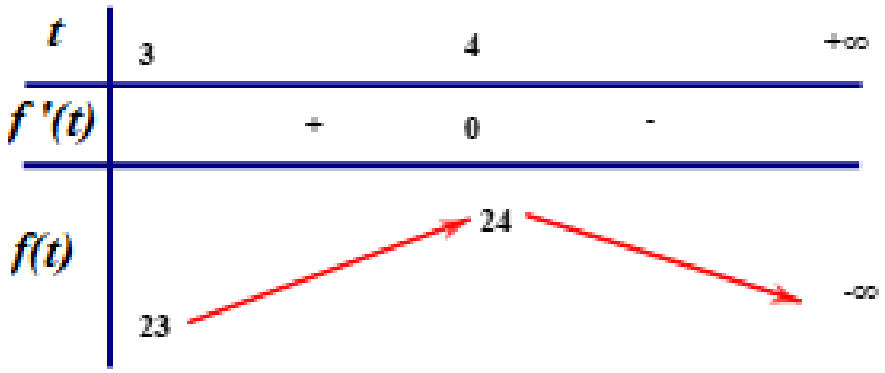
Chọn A

Đặt: $\sqrt{x^2-2x+10}=t$ Vì $x^2-2x+10=(x-1)^2+9\geq 9,\forall x\Rightarrow t\in[3;+\infty)$

Khi đó: $x^2-2x=t^2-10\Rightarrow f(t)=8t-(t^2-10)-2=-t^2+8t+8$

$f'(t)=-2t+8=0\Rightarrow t=4$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên: $\max y=24$

Câu 2. [DS12.C1.3.D03.c] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019$ là

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Biến đổi: $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+2019.$

Đặt $t=x^2+5x+4\Rightarrow t=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\Rightarrow t\geq -\frac{9}{4}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t)=t^2+2t+2019=(t+1)^2+2018\geq 2018\ \forall t\geq -\frac{9}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2018 tại $t=-1\in\left[-\frac{9}{4};+\infty\right).$

Câu 3. **[DS12.C1.3.D03.b]** Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$, tập giá trị của hàm số là

A. $[2;4]$. **B.** $\left[\dfrac{15}{2};5\right]$. **C.** $[2;3]$. **D.** $[3;4]$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow -2x^2+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	↘	2	↗	4	↘	3

Từ bảng biến thiên ta có $2\le y\le 4$. Vậy tập giá trị của hàm số là $[2;4]$.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}, x>0$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0:+\infty)$.

$$y=\frac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\frac{9x^2+1-x^2}{\left(8x^2+1\right)\left(\sqrt{9x^2+1}-x\right)}=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0:+\infty)$ khi hàm số

$f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0:+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+1}=9x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\72x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6\sqrt{2}}$$

Vậy $\max\limits_{x>0} y=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ khi $x=\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

Câu 5. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ trên miền $x>0$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng.

2. Hướng giải:

B1: Tính đạo hàm y'; cho $y'=0$, tìm nghiệm dương.

B2: Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ rồi dựa vào bảng biến thiên để kết luận về giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền $x>0$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn B

Ta có $y'=\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$.

+) $y'=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=1$.

+) $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	1

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ trên miền $x>0$ là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $x=1$.

Câu 6. Trên khoảng $(0;+\infty)$ thì hàm số $y=-x^3+3x+1$

A. có giá trị lớn nhất là $Max\, y=1$. **B.** có giá trị nhỏ nhất là $Min\, y=-1$.

C. có giá trị lớn nhất là $Max\, y=3$. **D.** có giá trị nhỏ nhất là $Min\, y=3$ .S

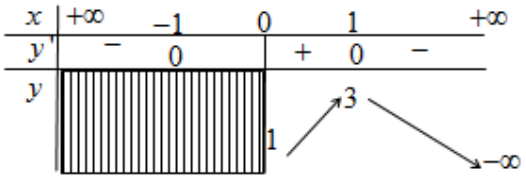
Lời giải

Chọn C

+ Hàm số xác định trên R

+ Ta có: $y'=-3x^2+3;\ \ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;+\infty) \\ x=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên như sau:



Dựa vào bảng biến thiên,ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} y=3$

Câu 7. **[2D1-3.4-2]**Hàm số $y=4\sqrt{x^2-2x+3}+2x-x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x mà tích của chúng là:

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$y'=\frac{2(2x-2)}{\sqrt{x^2-2x+3}}+2-2x=\frac{(2x-2)\left[2-\sqrt{x^2-2x+3}\right]}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow(2x-2)\left[2-\sqrt{x^2-2x+3}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ \sqrt{x^2-2x+3}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt GTLN tại $x=1-\sqrt{2}$ và $x=1+\sqrt{2}$

Nên tích của chúng là $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=-1$.

Câu 8. **[2D1-3.3-2]** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $G'(x)=0,035\left(30x-3x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=10\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

Từ bảng biến suy ra $x=10$.

Câu 9. **(Đề KT Chương I ĐS Lớp 12 Chuyên ĐH VINH 2018-2019)** Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-y)^2$ là

A. $\max P=16$. **B.** $\max P=12$. **C.** $\max P=4$. **D.** $\max P=8$.

Lời giải

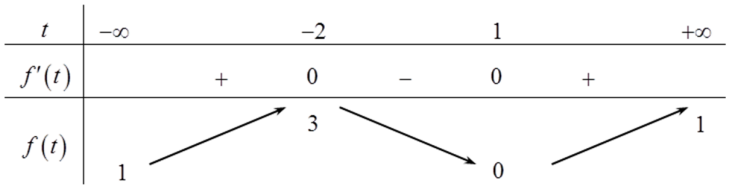
Chọn B

Ta có: $\dfrac{P}{4}=\dfrac{(x-y)^2}{x^2+2xy+3y^2}=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+3y^2}$

TH1: $y=0\Rightarrow\dfrac{P}{4}=1\Leftrightarrow P=4<12$.

TH2: $y\neq 0\Rightarrow\dfrac{P}{4}=\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2\dfrac{x}{y}+1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\dfrac{x}{y}+3}=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2+2t+3}=f(t)$ với $t=\dfrac{x}{y}$

$f'(t)=\dfrac{4t^2+4t-8}{\left(t^2+2t+3\right)^2};f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.$



$\Rightarrow \max f(t) = 3 \Rightarrow \max P = 12$

Vậy $\max P = 12$.

Câu 10. **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7) \Leftrightarrow y' > 0,\ \forall x \in (-\infty;-7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4>0 \\ -m \notin (-\infty;-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ -m \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m \leq 7.$$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sqrt{x^2-3x+2}-x^2+3x-1$ bằng:

A. $\max y=-4$. **B.** $\max y=2$. **C.** $\max y=-2$. **D.** $\max y=4$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2-3x+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le 1\end{array}\right.$

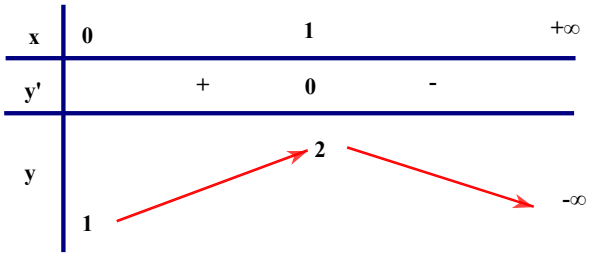
Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

Đặt: $\sqrt{x^2-3x+2}=t$ với $t\in[0;+\infty)$

Khi đó: $x^2-3x=t^2-2\Rightarrow f(t)=2t-(t^2-2)-1=-t^2+2t+1$

$f'(t)=-2t+2=0\Rightarrow t=1$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên: $\max y=2$

Câu 2. [2D1-3.3-2] Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+3x^2-5$ là

A. -5. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{11}{4}$. **D.** 0.

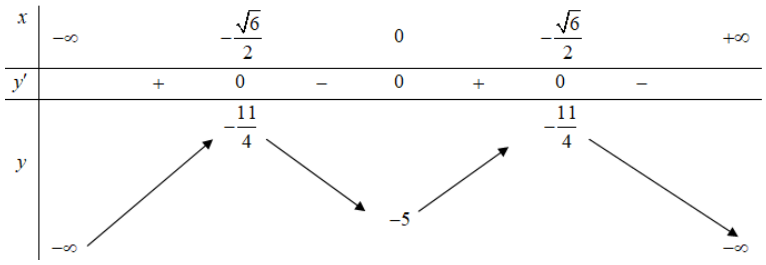
Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$y'=-4x^3+6x$

$y'=0\Leftrightarrow -4x^3+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$



Từ bảng biến thiên, giá trị lớn nhất của hàm số là $\max y = -\frac{11}{4}$

Câu 3. **[2D1-3.4-2]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{6-8x}{x^2+1}$ trên tập xác định của hàm số là :

A. -2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

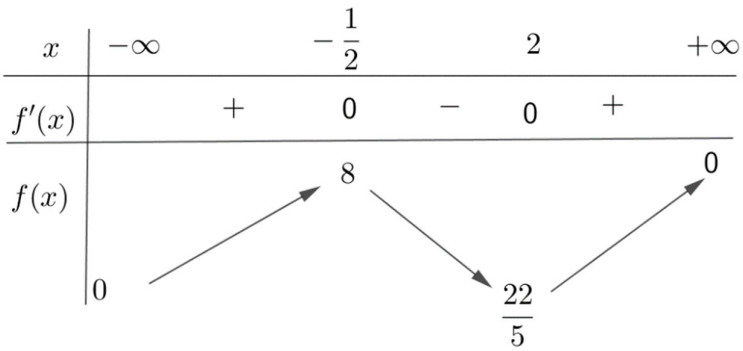
Cách 1:

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\frac{8x^2-12x-8}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau :



Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 8$

Cách 2:

Sử dụng máy tính

Đơn vị tính (DEG)

Mode 7 (nhập hàm $\frac{6-8x}{x^2+1}$)

Start -10 → End 0 → Step $\dfrac{0-(-10)}{20}$ → =

Quan sát máy tính → kết quả GTLN trên đoạn $[-10;0]$ là 8

nhấn phím AC =

Start 0 → End 10 → Step $\dfrac{10-0}{20}$ → =

Quan sát máy tính → kết quả GTLN trên đoạn $[0;10]$ là 6 …

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-2\sqrt{x^2-4x+3}+x^2-4x-1$ bằng:

A. $\min y=-5$. **B.** $\min y=-6$. **C.** $\min y=-4$. **D.** $\min y=-3$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x^2-4x+3\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le 1 \end{array}\right.$

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

Đặt: $\sqrt{x^2-4x+3}=t$ với $t\in[0;+\infty)$

Khi đó: $x^2-4x=t^2-3 \Rightarrow f(t)=-2t+t^2-3-1=t^2-2t-4$

$f'(t)=2t-2=0\Rightarrow t=1$

Bảng biến thiên

x	0		1		+∞
y'		-	0	+	
y	-4	↘	-5	↗	+∞

Dựa vào bảng biến thiên: $\min y=-5$

Câu 5. **[2D1-3.5-2]** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

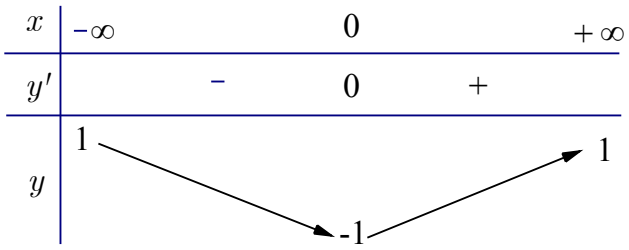
A. -3. **B.** -1. **C.** không xác định. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=0$

BBT:



Câu 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Khi đó, tích $m.M$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\Leftrightarrow y\left(x^2+x+1\right)=x^2-x+1\Leftrightarrow x^2\left(y-1\right)+x\left(y+1\right)+y-1=0$ (1)

Nếu $y=1\Rightarrow x=0$.

Nếu $y\neq 1$, thì (1) là phương trình bậc hai có $\Delta=-3y^2+10y-3\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\leq y\leq 3$.

Từ đó giá trị lớn nhất $M=3$, giá trị nhỏ nhất $m=\dfrac{1}{3}$. Suy ra: $m.M=1$.

Câu 7. **(ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01-2018-2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m. Tính giá trị biểu thức $P=M^2+m^2$.

A. $P=\dfrac{1}{4}$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

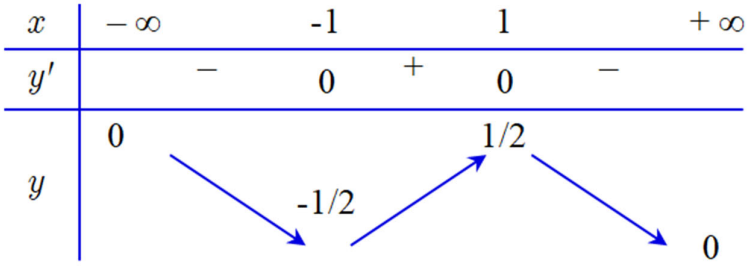
Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$; $y'=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}y=0$.

Bảng biến thiên



$M=\dfrac{1}{2};\ m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow P=M^2+m^2=\dfrac{1}{2}$.

Câu 8. **[2D1-3.3-2]** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+4x^2+2$.

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 6.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

D. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4.

Lời giải

Chọn B

$y'=-4x^3+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Mà $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=-\infty$; $y(0)=2$; $y\left(\pm\sqrt{2}\right)=6=\max\limits_{R}y$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$ bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3

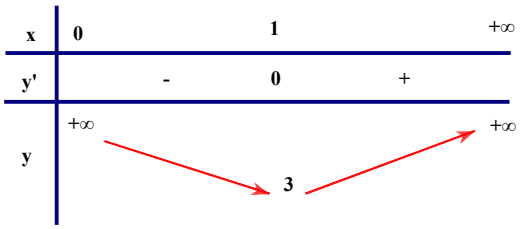
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$

$y'=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$ (nhận)

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên có $\underset{x\in(0;+\infty)}{Min}\, y=3$

Câu 10. Cho hàm số $y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm sô trên $(0;+\infty)$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm $x;\frac{1}{x}$ ta được:

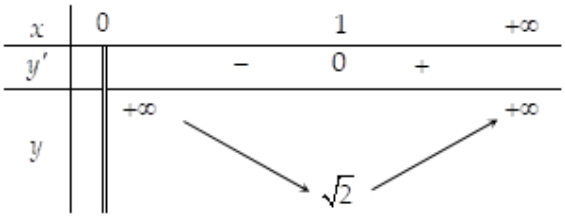
$y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}\geq\sqrt{2x.\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=1$

Vậy $\underset{(0;+\infty)}{Miny}=\sqrt{2}=y(1)$

Cách 2:

Ta có: $y'=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$; $y'=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;+\infty)\\x=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào BBT ta có: $\underset{(0;+\infty)}{Miny}=\sqrt{2}=y(1)$

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$

A. $\max\limits_{D} f(x)=0$ không tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$.

B. $\max\limits_{D} f(x)=0;\min\limits_{D} f(x)=-\sqrt{5}$.

C. $\max\limits_{D} f(x)=0;\min\limits_{D} f(x)=-1$.

D. $\min\limits_{D} f(x)=0$ không tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$.

Lời giải

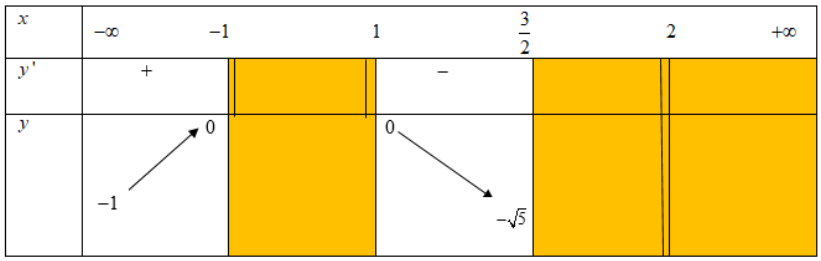
Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2}=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=-1$.

Bảng biến thiên:



Vậy $\max\limits_{D} f(x)=0;\min\limits_{D} f(x)=-\sqrt{5}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x-3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\max y=1$. **B.** $\max y=2$.

C. $\max y=5$. **D.** Hàm số không có giá trị lớn nhất

Lời giải

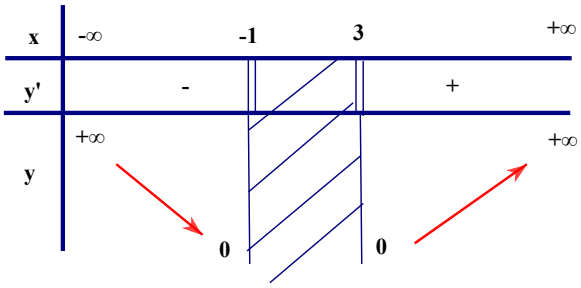
Chọn D

Điều kiện xác định: $x^2-2x-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le -1\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Tập xác định: $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

$$y'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x^2-2x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow VN$$

Bảng biến thiên:



Câu 13. Cho hàm số $y=\frac{2x^2+x+1}{x^2+x+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y=1;\max y=2$.

B. $\min y=-1;\max y=\frac{7}{3}$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

D. $\min y=1;\max y=\frac{7}{3}$

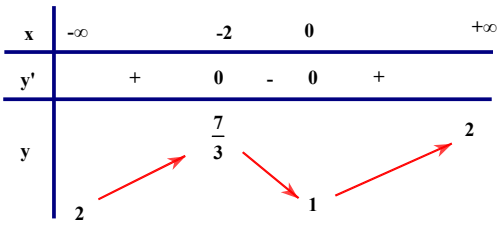
Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2+x+1\neq 0,\forall x\Rightarrow$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$y'=\frac{x^2+2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}\Rightarrow y'=0\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=-2\end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min y=1;\max y=\frac{7}{3}$

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó?

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5}=\dfrac{5-x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$, $y'=0\Leftrightarrow x=5$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$	↘	1

Từ bảng biến thiên kết luận: hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ tại $x=5$ và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

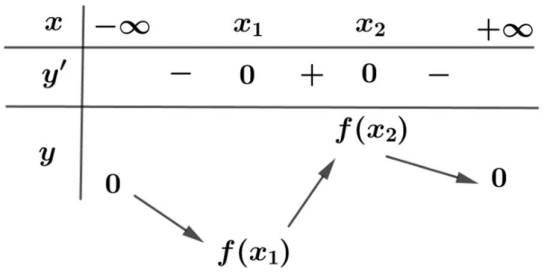
+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=0$

+ $y'=\dfrac{-x^2-2mx+1-m}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow -x^2-2mx+1-m=0$ (*)

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:



Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \dfrac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$YCBT \Leftrightarrow \dfrac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \le 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \ge 1$ (vì $f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \ge m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ m^2 - m + 1 \ge m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 1$

Câu 16. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. Khi đó giá trị $A = M + 15m$ là:

A. $17 - 2\sqrt{6}$. **B.** $17 - \sqrt{6}$. **C.** $17 + \sqrt{6}$. **D.** $17 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Người làm : Phạm Văn Thắng; Fb: Phạm Văn Thắng

Chọn A

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + xy$

+) $1 + xy = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \ge -2xy \Rightarrow xy \ge -\dfrac{1}{3}$.

+) $1 + xy = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy \ge 2xy \Rightarrow xy \le 1$.

Suy ra: $-\dfrac{1}{3} \le xy \le 1$

Đặt $t = xy, t \in \left[-\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

Ta có: $P = \dfrac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = \dfrac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1}{(x^2 + y^2) + 1} = \dfrac{(1 + xy)^2 - 2x^2y^2 + 1}{(1 + xy) + 1}$.

Khi đó $P=\dfrac{-t^2+2t+2}{t+2}$ suy ra $P'(t)=\dfrac{-t^2-4t+2}{(t+2)^2}$.

Cho $P'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{6}-2\in\left[-\dfrac{1}{3};1\right] \\ t=-\sqrt{6}-2\notin\left[-\dfrac{1}{3};1\right] \end{array}\right.$.

Ta có: $P(1)=1$; $P\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{15}$; $P\left(\sqrt{6}-2\right)=6-2\sqrt{6}$

Vậy $M=\max\limits_{\left[-\frac{1}{3};1\right]}P=6-2\sqrt{6}$; $m=\min\limits_{\left[-\frac{1}{3};1\right]}P=\dfrac{11}{15}$. Suy ra $A=M+15m=17-2\sqrt{6}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị (H) của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $P=k_1^{2018}+k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất với k_1,k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B của đồ thị (H).

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và đường thẳng $d: y=-2x+m$

$$\frac{2x+3}{x+2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ 2x^2+(6-m)x+3-2m=0 \quad (*) \end{cases}.$$

Xét phương trình $(*)$, ta có: $\Delta=(6-m)^2-8(3-2m)=m^2+4m+12>0, \forall m\in\mathbb{R}$ và $x=-2$ không là nghiệm của $(*)$ nên d luôn cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B lần lượt là: $k_1=\dfrac{1}{(x_1+1)^2}, k_2=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $(*)$.

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-6}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{3-2m}{2} \end{cases}$.

Ta thấy $k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\dfrac{1}{(x_1x_2+2x_1+2x_2+4)^2}=4$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương k_1^{2018} và k_2^{2018} ta có:

$P = k_1^{2018} + k_2^{2018} \ge 2.\sqrt{(k_1 k_2)^{2018}} \Rightarrow P \ge 2^{2019}$.

Do đó $\min P = 2^{2019}$ đạt được khi và chỉ khi

$k_1 = k_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_1+2)^2} = \dfrac{1}{(x_2+2)^2} \Leftrightarrow (x_1+2)^2 = (x_2+2)^2$.

Do x_1, x_2 phân biệt nên ta có

$x_1 + 2 = -x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 18. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn với $3x^2 y(1+\sqrt{9y^2+1}) = 2x + 2\sqrt{x^2+4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 - 12x^2 y + 4$

A. $\dfrac{36-32\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{36-20\sqrt{30}}{9}$. **C.** $\dfrac{9-8\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{14-11\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương với phương trình $3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right) = \dfrac{2}{x} + \sqrt{\dfrac{16}{x^4} + \dfrac{4}{x^2}}$

Đặt $v = \dfrac{2}{x}$, $u = 3y$ ta có $u + u\sqrt{1+u^2} = v + \sqrt{v^2+v^4} \Leftrightarrow u + u\sqrt{1+u^2} = v + v\sqrt{1+v^2}$

$\Leftrightarrow u\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = v\left(1+\sqrt{1+v^2}\right)$

Xét hàm số $f(x) = x + x\sqrt{1+x^2}$ với $x > 0$

Ta có $f'(x) = 1 + \sqrt{1+x^2} + \dfrac{x^2}{x + x\sqrt{1+x^2}} > 0$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ mà $u, v \in (0; +\infty)$,

$u\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = v\left(1+\sqrt{1+v^2}\right) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Khi đó ta có $3y = \dfrac{2}{x}$

$P = x^3 - 12x^2 \dfrac{2}{3x} + 4 = x^3 - 8x + 4$. Xét hàm số $g(x) = x^3 - 8x + 4, x > 0 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 8$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

x		0		$\sqrt{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$	
$g(x)$		4	↘	$\frac{36-32\sqrt{6}}{9}$	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{36-32\sqrt{6}}{9}$

Câu 19. **[2D1-3.14-2]** Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $S(\text{m})$ là quảng đường vật duy chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $144(\text{m/s})$. **B.** $243(\text{m/s})$. **C.** $27(\text{m/s})$. **D.** $36(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ suy ra vận tốc của vật là $v(t)=S'(t)=-t^2+12t$.

Trong khoảng 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật lớn nhất khi hàm số $f(t)=-t^2+12t$ với $t\in[0;9]$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó $f'(t)=-2t+12$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=6$.

Bảng biến thiên

t	0		6		9
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	↗	36	↘	27

Dựa vào bảng biến thiên ta có vật đạt vận tốc lớn nhất là $36(\text{m/s})$ khi $t=6$.

Câu 20. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{m-5}{(x+m)^2}>0\\ -m\notin(-\infty;-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\ -m\geq -8\end{cases}\Leftrightarrow 5<m\leq 8.$$

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2-4x+6}+4x-x^2+1$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x)=M$.

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+6}$, $t\geq\sqrt{2}$.

Khi đó $g(t)=-t^2+4t+7$ với $t\geq\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[\sqrt{2};+\infty)}g(t)=g(2)=11$.

$$f(x)=M\Leftrightarrow f(x)=11\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+6}=2\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{2}\\ x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm bằng $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$ **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f(1)=\sqrt{2}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$ ↗	$\sqrt{2}$	↘ $-\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ là $f(1)=\sqrt{2}$.

Câu 3. [2D1-3.3-2] Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=-x^2+2x+3$.

A. $M=1$. **B.** $M=4$. **C.** $M=3$. **D.** $M=2$

Lời giải

Chọn B

Ta có TXĐ : $D=\mathbb{R}$.

$y'=-2x+2, y'=0\Rightarrow x=1$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$ ↗	4	↘ $-\infty$

Dựa vào BBT suy ra: $\max\limits_{\mathbb{R}} y=4$.

Câu 4. [2D1-3.3-2] Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-3x^4+4x^3+3$ là

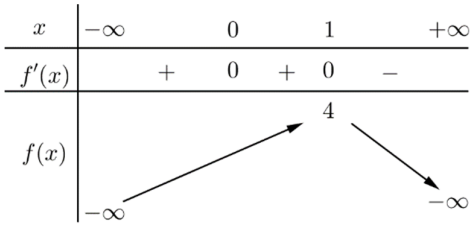
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-12x^3+12x^2$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Câu 5. [2D1-3.8-2] Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x}{4+x^2}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{-x^2+4}{\left(4+x^2\right)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$

BBT:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	0

Vậy $\underset{(-\infty;+\infty)}{\text{Max}}\, y=y(2)=\dfrac{1}{4}$

Câu 6. [008] [2D1-3.10-2] Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x>0$.

Khi đó ta có: $x+\dfrac{1}{x}\geq 2.\sqrt{x.\dfrac{1}{x}}=2\Rightarrow y\geq\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

Vậy $\min y=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y=|x-1|+|x+3|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

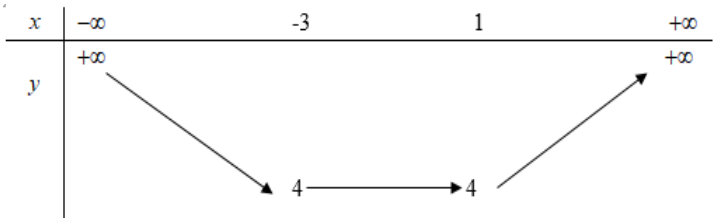
Lời giải

Chọn B

Ta có $y=|x-1|+|x+3|=\begin{cases}-2x-2 & \text{khi } x<-3\\ 4 & \text{khi } -3\le x\le 1\\ 2x+2 & \text{khi } x>1\end{cases}$

Vậy trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì hàm số nghịch biến, trên khoảng $(1;+\infty)$ thì hàm số đồng biến, còn hàm số là hằng số trên đoạn $[-3;1]$.

Ta có BBT:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y\ge 4,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\min y=4$ khi $x\in[-3;1]$. Có 5 giá trị x nguyên.

Câu 8. **[DS12.C1.3.D03.b]** Hàm số nào sau đây không có giá trị lớn nhất?

A. $y=-x^4+x^2-2019$. **B.** $y=x^3+3x^2+2019$.

C. $y=-x^2+x+2019$. **D.** $y=-\sin x+\cos x$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2+2019\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2019}{x^3}\right)=+\infty$ nên hàm số $y=x^3+3x^2+2019$ không có giá trị lớn nhất.

Câu 9. **[2D1-3.3-1]** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. -1. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 4.

Lời giải.

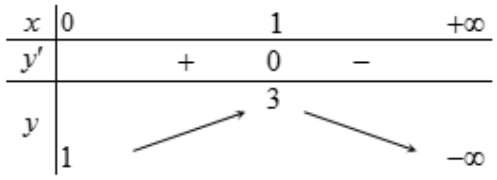
Chọn B.

Xét hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$y=-x^3+3x+1\Rightarrow y'=-3x^2+3$

$y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên.



Từ bảng biến thiên **Chọn B.**

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ bằng:

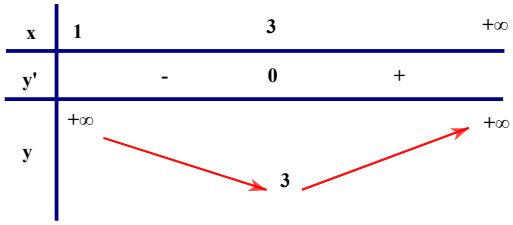
A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (loai)\\x=3\quad (nhan)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên có $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} y=3$

Câu 11. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức CauChy)

$y=3x+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{4}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{3x}{2}.\dfrac{3x}{2}.\dfrac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$ (do $x>0$)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Xét hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có $y=3x+\frac{4}{x^2}\Rightarrow y'=3-\frac{8}{x^3}$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\frac{8}{x^3}=3\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖	↘	$3\sqrt[3]{9}$	↗	

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right)=3\sqrt[3]{9}$

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

A. $\underset{(1;+\infty)}{Min}\, y=3$. **B.** $\underset{(1;+\infty)}{Min}\, y=-1$. **C.** $\underset{(1;+\infty)}{Min}\, y=5$. **D.** $\underset{(1;+\infty)}{Min}\, y=-\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$

x	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Từ đó $\min\limits_{(1;+\infty)} y = 3$.

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - Tháng 12 - 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ khi $x > 0$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y' = \frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Có $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0;+\infty)$, ta được:

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{-2\sqrt{3}}{9}$	↗	0

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $(0;+\infty)$ bằng $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 14. **[2D1-3.5-2]** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{(x+3)^2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 13. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$y=\frac{x^2+6x+9}{x}=x+\frac{9}{x}+6 \Rightarrow y'=1-\frac{9}{x^2}$$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 12 khi $x=3$.

Câu 15. **[2D1-3.5-2]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\frac{-x+6}{x-1}$ trên $[a;b]\subset(-\infty;1)$ là

A. $f(10)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(b)$. **D.** $f(a)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$y'=\frac{-5}{(x-1)^2}<0 \quad \forall x\in[a;b]$$

Nên hàm số $y=f(x)=\frac{-x+6}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $[a;b]\subset(-\infty;1)$.

$\Rightarrow f(a)>f(b)$.

Câu 16. **[2D1-3.5-2] [DCVB][VTH]** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

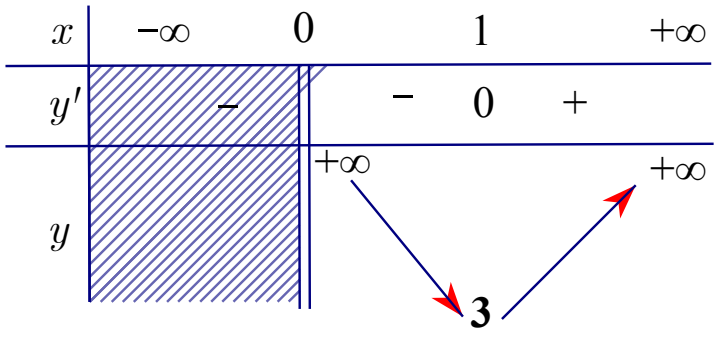
A. $m=3$. B. $m=2$. C. $m=4$. D. $m=1$.

Lời giải

Chọn A.

$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2(x^3-1)}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$

BBT



Vậy giá trị nhỏ nhất $m=3$.

Câu 17. **[016][2D1-3.6-2]** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\frac{3}{5}$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2.\sqrt[3]{9}$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3.\sqrt[3]{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $y=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}.\frac{3x}{2}.\frac{4}{x^2}}\Leftrightarrow y\geq 3\sqrt[3]{9}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{3x}{2}=\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

Vậy: $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3.\sqrt[3]{9}$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}$ khi $x>0$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\sqrt{3}\in(0;+\infty)$.

Có $\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0;+\infty)$, ta được:

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $(0;+\infty)$ bằng $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 19. **[DS12.C1.3.D03.b]** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+\frac{3}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $m=4\sqrt[4]{3}$. **B.** $m=2\sqrt{3}$. **C.** $m=4$ **D.** $m=2$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Xét $y'=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$;

$y'=0\Rightarrow\begin{cases}3x^4-3=0\\x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $\begin{cases}y(1)=4\\\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty\end{cases}\Rightarrow m=\min\limits_{(0;+\infty)}y=4$ tại $x=1$.

Câu 20. **[DS12.C1.3.D03.c]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ trên miền $x>0$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$ ta có:

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)'=\frac{\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Ta có BBT

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1

Từ BBT suy ra: $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} y=y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 21. [2D1-3.10-1] Cho hàm số $y=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$ .Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời Giải

Chọn A

$$y'=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'			‖	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	‖	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\sqrt{2}$.

Câu 22. [DS12.C1.3.D03.c] Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m.M$.

A. $T=\dfrac{1}{9}$ **B.** $T=\dfrac{3}{2}$ **C.** $T=0$ **D.** $T=-\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C

$y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$. Tập xác định $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\setminus\{2\}$.

$$y'=\frac{\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2}=\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2}$$

$y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	$-\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $M=0;\ m=-\sqrt{5}$

Vậy $M.m=0$

Câu 23. [2D1-3.3-2] [025] Gọi giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là $M;m$.Khi đó các giá trị $M;m$ lần lượt là?

A. Không có M ; $m=-3$. **B.** $M=-3$; $m=1$.

C. $M=0$; $m=1$. **D.** Không có $M;m$.

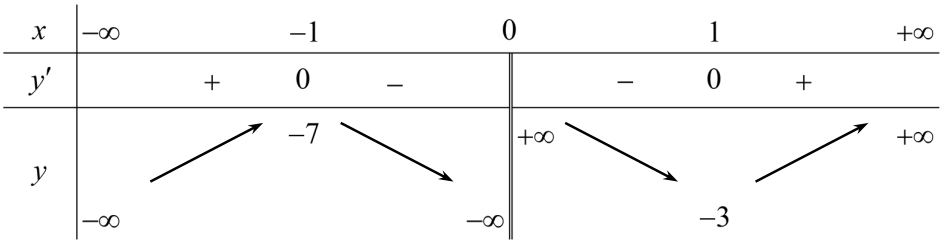
Lời giải

Chọn A

Ta có : $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;+\infty)\\x=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$$

Dựa vào BBT:



Trên khoảng $(0;+\infty)$, Không có M ; $m=-3$.

Câu 24. **(THI HK I THPT KIM LIÊN HÀ NỘI 2017)** Cho hàm số $y=\sqrt{x^3-3x}$ với $x\in[2;+\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

C. Hàm số không có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{3};0\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. Hàm số xác định và liên tục với $x\in[2;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$ và y' không xác định khi $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$.

Thấy ngay $y'>0$, $\forall x\in[2;+\infty)$ do đó hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ và không có giá trị lớn nhất.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+x+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y=1;\max y=3$.

B. $\min y=\dfrac{3}{7};\max y=1$.

C. $\min y=-\dfrac{3}{7};\max y=1$.

D. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

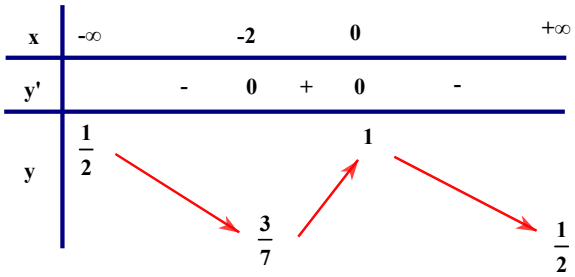
Lời giải

Chọn B

Ta có: $2x^2+x+1\neq0,\forall x\Rightarrow$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$y'=\frac{-x^2-2x}{\left(2x^2+x+1\right)^2}\Rightarrow y'=0\Rightarrow -x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min y = \frac{3}{7}; \max y = 1$

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y = 1; \max y = 6$.

B. $\min y = -1; \max y = 6$.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

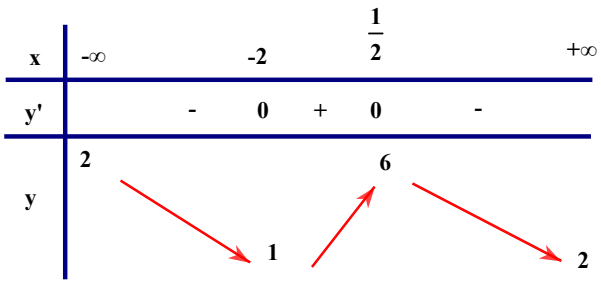
D. $\min y = 1; \max y = 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \Rightarrow$ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = -\frac{4x^2 + 6x - 4}{\left(x^2 + 1\right)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$



Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min y = 1; \max y = 6$

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\min y = 0; \max y = 1$.

B. $\min y = -\frac{1}{3}; \max y = 1$.

C. $\min y = -\frac{1}{3}; \max y = 0$.

D. Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

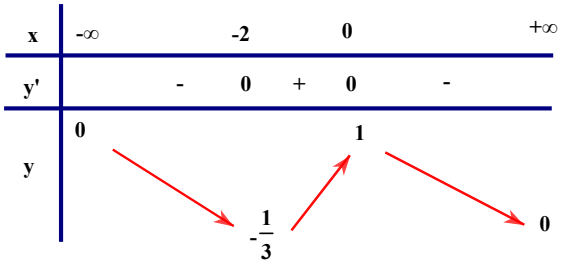
Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2+x+1\neq 0,\forall x\Rightarrow$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$y'=\frac{-x^2-2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}\Rightarrow y'=0\Rightarrow -x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min y=-\frac{1}{3};\ \max y=1$

Câu 28. Cho các số thực x,y thay đổi thoả mãn $x^2+2y^2+2xy=1$ và hàm số $f(t)=t^4-t^2+2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\frac{x+y+1}{x+2y-2}\right)$. Tính $M+m$?

A. $8\sqrt{3}-2$. **B.** $\frac{303}{2}$. **C.** $\frac{303}{4}$. **D.** $4\sqrt{3}+2$.

Lời giải

Người làm : Lê Thanh Quang; Fb: Lê Thanh Quang

Chọn C

Theo giả thiết ta có $x^2+2y^2+2xy=1\Leftrightarrow(x+y)^2+y^2=1$

do đó ta có thể đặt $\begin{cases}x+y=\sin\alpha\\y=\cos\alpha\end{cases}$, với $\alpha\in[0;2\pi]$.

Đặt $u=\frac{x+y+1}{x+2y-2}=\frac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-2}\Rightarrow -3\le u\le 0$.

Khi đó giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của Q là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên đoạn $[-3;0]$.

Ta có $f'(t)=4t^3-2t$ cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ t=0 \\ t=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin [-3;0] \end{array}\right.$

$f(0)=2$, $f(-3)=74$, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{7}{4}$.

Suy ra $M=74$, $m=\dfrac{7}{4}$. Vậy $M+m=\dfrac{303}{4}$.

Câu 29. Cho $y\ge 0;\ x^2+x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $P=4x+y-xy+2$.

A. $m=-10$ và $M=10$. **B.** $m=-10$ và $M=6$.

C. $m=6$ và $M=26$. **D.** $m=6$ và $M=10$.

Lời giải

Chọn A

Tác giả: Phí Văn Đức Thẩm ; Fb:Đức Thẩm

Từ $x^2+x+y=6 \Rightarrow y=-x^2-x+6$, do $y\ge 0 \Rightarrow -x^2-x+6\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 2$.

Ta có $P=4x+y-xy+2=4x+\left(-x^2-x+6\right)-x.\left(-x^2-x+6\right)+2=x^3-3x+8$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $P(x)=x^3-3x+8$ với $x\in[-3;2]$.

Ta có $P(x)'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1\ (\pm 1\in[-3;2])$.

$P(-3)=-10;\ P(-1)=10;\ P(1)=6;\ P(2)=10$

Từ đó giá trị nhỏ nhất $m=-10$ và giá trị lớn nhất $M=10$.

Câu 30. Cho các số thực không âm x,y thay đổi. M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$. Giá trị của $8M+4m$ bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

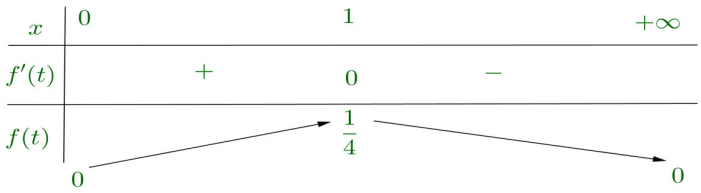
Ta có

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{x-y-x^2y+xy^2}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{x+xy^2+2xy-\left(y+x^2y+2xy\right)}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{x(1+y)^2-y(1+x)^2}{(x+1)^2(y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{x}{(x+1)^2}-\frac{y}{(y+1)^2}.$$

Đặt $f(t)=\frac{t}{(t+1)^2}$ với $t\ge 0$. $\Rightarrow f'(t)=\frac{1-t^2}{(t+1)^4}$.

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy GTLN của $f(t)=\frac{1}{4}$ khi $t=1$, GTNN của $f(t)=0$ khi $t=0$.

Vậy GTLN của $M=\max\limits_{t\in[0;+\infty)}f(t)-\min\limits_{t\in[0;+\infty)}f(t)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$ đạt được khi $x=\frac{1}{4},y=0$.

Vậy GTNN của $m=\min\limits_{t\in[0;+\infty)}f(t)-\max\limits_{t\in[0;+\infty)}f(t)=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ đạt được khi $x=0,y=\frac{1}{4}$.

Vậy: $8M+4m=8.\frac{1}{4}+4\left(-\frac{1}{4}\right)=2-1=1$.

Câu 31. **(THPT THUẬN THÀNH 1)** Cho hàm số $f(x)=\left|x^6+x^3+m\right|-2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$y=f(x)=\left|x^6+x^3+m\right|-2x^3$.

Đặt $t=x^3$ hàm số ban đầu trở thành hàm số $y=g(t)=\left|t^2+t+m\right|-2t$.

Tam thức bậc hai $h(t)=t^2+t+m$ có biệt thức $\Delta=1-4m$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

$\Delta = 1-4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$.

Vì $t_1 + t_2 = -1 < 0$ nên $t_1 < t_2 < 0$ hoặc $t_1 < 0 \le t_2$.

Nếu $t_1 < t_2 < 0$ thì $P = t_1 t_2 = m > 0$ kết hợp với $m < \frac{1}{4}$ ta có $0 < m < \frac{1}{4}$. Khi đó.

$g(\frac{1}{2}) = \left|\frac{3}{4} + m\right| - 1 < 0$.

+) Nếu $t_1 < 0 \le t_2$ thì $g(t_2) = -2t_2 \le 0$.

Suy ra trong trường hợp này hàm số $y = g(t)$ không thể có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2:

$\Delta = 1-4m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m \ge 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Khi đó, $y = g(t) = t^2 + t + m - 2t = t^2 - t + m = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4} \ge m - \frac{1}{4}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t) = g(\frac{1}{2}) = m - \frac{1}{4}.$

Theo đề $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \frac{1}{4} \\ m - \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \frac{1}{4} \\ m = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$

Câu 32. [2D1-3.14-2] Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 5s$ **B.** $t = 6s$ **C.** $t = 3s$ **D.** $t = 1s$

Lời giải

Chọn C

Ta có $S' = -6t^2 + 36t + 2 = V(t)$, $V' = -12t + 36$, $V' = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Vì $V(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -6 < 0$ nên $V(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 3s$.

Câu 33. [2D1-3.14-2] Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t = 2s$. **B.** $t = 6s$. **C.** $t = 3s$. **D.** $t = 5s$

Lời giải

Chọn C

Ta có $v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1=-3(t-3)^2+28\le 28$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

$\text{Max}\, v(t)=28\Leftrightarrow t=3$

Vậy thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là $t=3s$.

Câu 34. [2D1-3.14-2] Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$. **C.** $64(m/s)$. **D.** $18(m/s)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t$, $t\in[0;6]$

Đạo hàm : $v'(t)=-3t+12\longrightarrow v'(t)=0\leftrightarrow t=4$.

Ta có : $\begin{cases}v(0)=0\\ v(4)=24\\ v(6)=18\end{cases}\longrightarrow \max_{[0;6]} v=24$.

Câu 35. [2D1-3.14-2] Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bặt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $88(m/s)$. **B.** $25(m/s)$. **C.** $100(m/s)$. **D.** $11(m/s)$.

Lời giải

Chọn B

- $v(t)=s'(t)=-t^2+8t+9\Rightarrow v'(t)=-2t+8,\ \text{cho}\, v'(t)=0\Leftrightarrow t=4\in[0;10]$.
- $v(0)=8; v(10)=-11;\ v(4)=25$.

Câu 36. [2D1-3.14-2] Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$. Tính thời điểm t (giây) tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị **lớn nhất**?

A. $t=0$. **B.** $t=6$. **C.** $t=4$. **D.** $t=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t)=-3t^2+12t=-3(t^2-4t+4)+12=-(t-2)^2+12\le 12$, dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=2$. Vậy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t=2$.

Câu 37. **[2D1-3.14-2]** Một vật chuyển động theo quy luật $S=10t^2-\frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây, kể từ khi vật bắt đầu chuyển động vận tốc v (m/s) của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. $8(\text{s})$. **B.** $20(\text{s})$. **C.** $10(\text{s})$. **D.** $15(\text{s})$.

Lời giải

Chọn C

$S=10t^2-\frac{1}{3}t^3 \Rightarrow V=20t-t^2$. Tìm giá trị lớn nhất của V trên $[0;15]$.

$V'=20-2t=0\Leftrightarrow t=10$; $V(0)=0; V(10)=100; V(15)=75$

Vậy GTLN của vận tốc là $100(\text{m/s})$ tại $t=10(\text{s})$.

BÀI 31: TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC TRÊN ĐOẠN [a;b] .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ *liên tục trên* $[a;b]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$.

❖ **Các dạng bài toán:**

Dạng 1:
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ ***liên tục*** trên đoạn $[a;b]$.

Bước 1: ……

Bước 2: ……

……

……

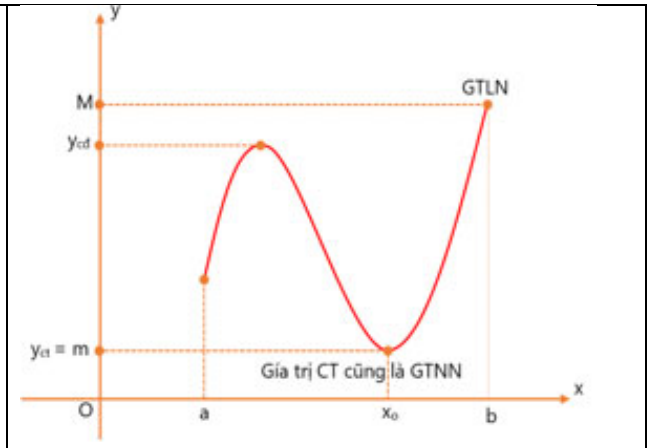
……

Bước 3: Tính ……

Bước 4: ……

……

Khi đó $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$ và $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$.



Dạng 2:
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ ***đơn điệu*** trên đoạn $[a;b]$.

Bước 1: ……

……

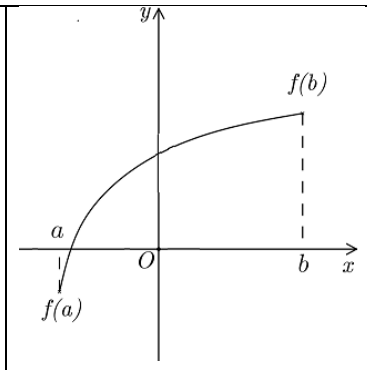
Bước 2:

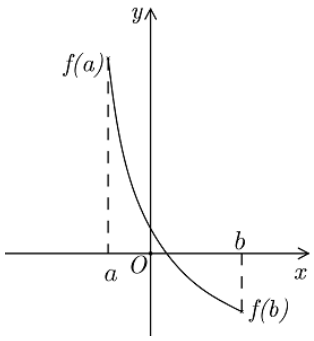
……

……

……

……





B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40.

C. $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

A. Không tồn tại **B.** 0.

C. -2. **D.** 2.

Câu 3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2$ trên $[-2;2]$ lần lượt là:

A. 7 và 2. **B.** 7 và -1.

C. 7 và 0. **D.** 7 và -20.

Câu 4. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$. Hãy tính $P=M+m$?

A. $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

C. $\sqrt{2}+1$. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 5. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-8x}{x+1}$ trên đoạn $[1;3]$. Khi đó $M-m$ bằng

A. -3. **B.** $\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{26}{5}$. **D.** $\dfrac{24}{5}$.

Câu 6. Cho $a,b\in\mathbb{R}$, $0<a<b$, hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)<0$, $\forall x\in(a;b)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[a;b]$ bằng

A. $f(b)$. **B.** $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

C. $f(a)$. **D.** $f\left(\sqrt{ab}\right)$.

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|-x^3+3x^2-3\right|$ trên đoạn $[1;3]$. Khi đó $M+m$ nằm trong khoảng nào?

A. $(2;4)$.

B. $(0;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(3;5)$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ lần lượt là

A. π và $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$ và $\frac{-\pi}{2}$.

C. $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{-\pi}{2}$.

Câu 9. Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x-3|\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$. Tính $M+2N$.

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

B. $3+\sqrt{5}$.

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Số phần tử của tập hợp S bằng?

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36.

B. $-14\sqrt{7}$.

C. $14\sqrt{7}$.

D. -34.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x\left(1-x^2\right)$ trên khoảng $(0;1)$ là:

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. 0.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 3. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $-\frac{50}{27}$.

B. -2.

C. 1.

D. 0.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ trên $[0;3]$ là

A. -61.

B. 3.

C. 61.

D. 2.

Câu 5. *Giá trị lớn nhất của hàm số* $y=f(x)=x^4-4x^2+9$ *trên đoạn* $[-2;3]$ *là*

A. 201. **B.** 2.

C. 9. **D.** 54.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** -5.

C. 5. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 7. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$. Khi đó:

A. $-3\sqrt{13}$. **B.** -12.

C. $3\sqrt{13}$. **D.** 12.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là

A. π. **B.** -1.

C. 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 9. **(HKI-SGD Thái Bình 2017-2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên khoảng $(0;2)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 10. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m=\dfrac{51}{4}$. **B.** $m=\dfrac{49}{4}$.

C. $m=13$. **D.** $m=\dfrac{51}{2}$.

Câu 11. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$.

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -5.

Câu 12. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$. Giá trị của M và m lần lượt là:

A. $M=40$; $m=-41$. **B.** $M=15$; $m=-41$.

C. $M=40$; $m=8$. **D.** $M=40$; $m=-8$.

Câu 13. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+5x+6}$ trên đoạn $[-1;6]$ lần lượt là

A. $\dfrac{5}{2}$ và 1. **B.** $\dfrac{7}{2}$ và 0.

C. 0 và $\dfrac{5}{2}$. **D.** 1 và 0.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất hàm số $f(x)=x^4-x^2+13$ trên $[-2;3]$ là phân số tối giản có dạng $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 53. **B.** 55.

C. 57. **D.** 59.

Câu 15. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2\sin x+3}{\sin x+1}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó M^2+m^2 là

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{31}{2}$.

C. 15. **D.** $\frac{61}{4}$.

Câu 16. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$ với $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $M+\sqrt{3}m$ bằng

A. $1+2\sqrt{2}$. **B.** -1.

C. 1. **D.** 2.

Câu 17. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=|x|+3$ trên $[-1;1]$ là :

A. 3. **B.** 7.

C. 0. **D.** 4.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-72x+90\right|+m$ trên đoạn $[-5;5]$ là 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng

A. $1600<m<1700$. **B.** $m=400$.

C. $m<1618$. **D.** $1500<m<1600$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-72x+90\right|+m$ trên đoạn $[-5;5]$ là 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $1600<m<1700$. **B.** $m=400$.

C. $m<1618$. **D.** $1500<m<1600$.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-\left(m^2+m+1\right)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -6. Tính tổng các phần tử của S.

A. 0. **B.** 4.

C. -4. **D.** $2\sqrt{2}$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63.

C. $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Câu 2. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$.

C. -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Câu 3. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^2+2x+3$ trên đoạn $[0;3]$ là

A. 18. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 4. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $M=0$. **B.** $M=2$. **C.** $M=4$. **D.** $M=-2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25;\frac{11}{10}\right)$. Tìm M.

A. $M=1$. **B.** $M=\frac{129}{250}$.

C. $M=0$. **D.** $M=\frac{1}{2}$.

Câu 6. **(Sở Yên Bái 2019-2020)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^3-3x^2-9x-1$ trên đoạn $[-2;4]$.

A. $M=3$. **B.** $M=4$. **C.** $M=21$. **D.** $M=28$.

Câu 7. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+3$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=3$. **B.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=6$. **C.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=5$. **D.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=4$.

Câu 8. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\frac{31}{8}$.

Câu 9. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} y=0$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y=3$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} y=7$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} y=5$.

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. 11. **B.** 15.

C. 6. **D.** 10.

Câu 11. *Giá trị lớn nhất của hàm số* $y=f(x)=x^4-8x^2+17$ *trên đoạn* $[-1;1]$ *là*

A. 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 17.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-2x^2-3$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -3.

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-8x^2+16$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng

A. 19. **B.** 9.

C. 25. **D.** 0.

Câu 14. **(ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01 - 2018 – 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$ bằng

A. $\dfrac{28}{9}$. **B.** 0.

C. $\dfrac{8}{3}$. **D.** 2.

Câu 15. Biết hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;m]$ bằng $\dfrac{4}{7}$. Tìm m ?

A. $m=\dfrac{3}{7}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2}{7}$.

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(2x+4)\sqrt{4-x^2}+x^2(4-x^2)+4x+2007$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2019;2024)$. **B.** $(2024;2028)$.

C. $(2028;2032)$. **D.** $(2015;2019)$.

Câu 17. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+4$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\min\limits_{[0;2]} y=4$. **B.** $\min\limits_{[0;2]} y=2$. **C.** $\min\limits_{[0;2]} y=-1$. **D.** $\min\limits_{[0;2]} y=6$.

Câu 18. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-2x^2-4x+5$ trên đoạn $[1;3]$ bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 3

Câu 19. **(TRAN-PHU-HA-TINH-LAN-1-19-20)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. -3. **B.** 0.

C. 2. **D.** 4.

Câu 20. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;3]} y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y=-3$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y=1$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y=-1$.

Câu 21. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ trên $[1;3]$

A. 9. **B.** 2. **C.** $\sqrt{28}$. **D.** 0.

Câu 22. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$. Khi đó:

A. $m=6$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\dfrac{19}{3}$.

Câu 23. **(THUẬN THÀNH SỐ 2 LẦN 1_2018-2019)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

A. $\min\limits_{[-4;2)} y=4$. **B.** $\min\limits_{[-4;2)} y=7$.

C. $\min\limits_{[-4;2)} y=5$. **D.** $\min\limits_{[-4;2)} y=\dfrac{15}{2}$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ trên $(2;6]$.

A. $\min\limits_{(2;6]} y=8$. **B.** $\min\limits_{(2;6]} y=4$.

C. $\min\limits_{(2;6]} y=3$. **D.** $\min\limits_{(2;6]} y=9$.

Câu 25. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính $M+m$.

A. -4. **B.** 4.

C. -2. **D.** 2.

Câu 26. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$. Khi đó $M.m$ bằng

A. 3. **B.** $3+3\sqrt{2}$.

C. $3\sqrt{2}$. **D.** $9\sqrt{2}$.

Câu 27. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x^2-8\sqrt{2x^2+3x+2}+6x+2019$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $M+m$

A. $4026+8\sqrt{2}$. **B.** 4016.

C. 4022. **D.** $4026-8\sqrt{2}$.

Câu 28. **[TT-SGD-PHU-THO-LAN-1-19-20]** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$..

C. 2. **D.** 0.

Câu 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$.

A. 48. **B.** 52.

C. -102. **D.** 0.

Câu 30. Tính tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x-\dfrac{2}{3}\cos^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Nhận xét: Ta có $x\in[0;\pi]\Rightarrow\pi-x\in[0;\pi]$ và $f(\pi-x)=-f(x)$.

Do đó nếu hàm số đạt giá trị lớn nhất tại x_0 thì sẽ đạt giá trị nhỏ nhất tại $\pi-x_0$ và giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là hai số đối nhau. Vậy tổng cần tìm bằng 0.

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4(\sin x+\cos x)^4+\dfrac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{4}\right]$. Khi đó tỉ số $\dfrac{M}{m}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Câu 32. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên nửa khoảng $[0;1)$ bằng –2

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+m^2}{\sin x-2}$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là -1.

A. $(-1;0)$. **B.** $(-4;3)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 34. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{1}{2}x^3-2x^2+1\right|$ trên $\left(-\dfrac{9}{8};\dfrac{10}{3}\right)$. Biết $M=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$. Tính $S=a+b^2$.

A. $S=830$. **B.** $S=2$. **C.** $S=122$. **D.** $S=127$.

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x^2-4mx+m^2-2m+2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số các phần tử của S là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 36. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;2)$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>2$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 37. Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+24x^2-140$ và hàm số $g(x)=f(\sqrt{x^2+4x+16})-x^2-4x+3$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-4;0]$ là:

A. 2. **B.** 8. **C.** 14. **D.** 18.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\left|8\cos^4 x+a\cos^2 x+b\right|$, trong đó a, b là các tham số thự**C.** Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a+b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a+b=-7$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=-8$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $\left|f(1+\sin x)+m\right|$ bằng 5.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

BÀI 31: TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC TRÊN ĐOẠN [a;b] .

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ *liên tục trên* $[a;b]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$.

❖ **Các dạng bài toán:**

Dạng 1:
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ ***liên tục*** trên đoạn $[a;b]$.

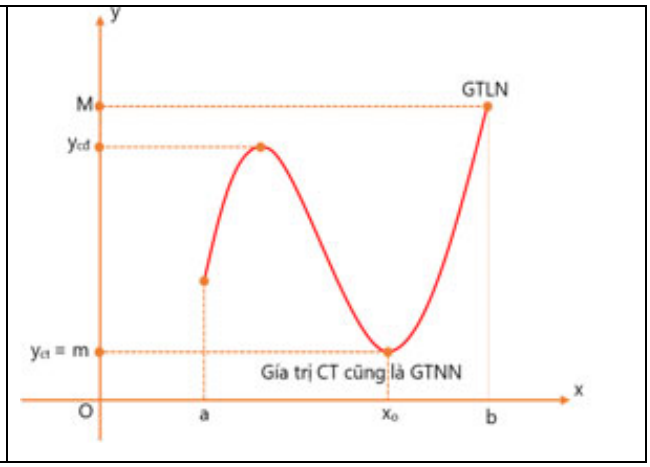
Bước 1: Tính $f'(x)$.

Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a;b)$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định.

Bước 3: Tính $f(a)$, $f(x_i)$, $f(b)$.

Bước 4: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Khi đó $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$ và $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$.



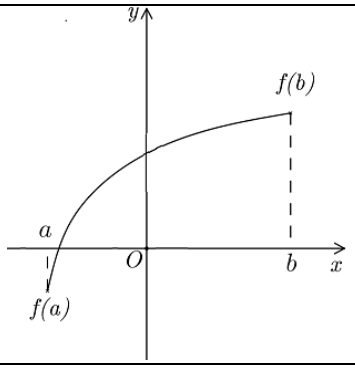
Dạng 2:
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ ***đơn điệu*** trên đoạn $[a;b]$.

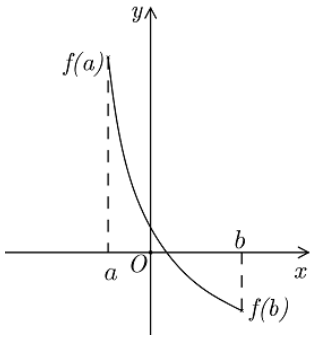
Bước 1: Tính $f(a), f(b)$.

Bước 2:

$\max f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$.

$\min f(x)=\min\{f(a),f(b)\}$.





B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=3x^2-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\in[2;19]\\x=-2\sqrt{2}\notin[2;19]\end{array}\right.$.

$f(2)=2^3-24.2=-40$;

$f\left(2\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^3-24.2\sqrt{2}=-32\sqrt{2}$;

$f(19)=19^3-24.19=6403$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-32\sqrt{2}$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

A. Không tồn tại **B.** 0. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;2]$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Ta lại có $y(2)=0$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}y=0$ khi $x=2$.

Câu 3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+2$ trên $[-2;2]$ lần lượt là:

A. 7 và 2. **B.** 7 và -1. **C.** 7 và 0. **D.** 7 và -20.

Lời giải:

Chọn D.

Ta có: $y'=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in(-2;2)\\x=3\notin(-2;2)\end{array}\right.$

Mà $y(-2)=0;y(2)=-20;y(-1)=7$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;2]}y=7$; $\min\limits_{[-2;2]}y=-20$.

Câu 4. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$. Hãy tính $P=M+m$?

A. $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)$. **C.** $\sqrt{2}+1$. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=[-2;2]$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\in(-2;2)$.

$y\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}, y(2)=2, y(-2)=-2$.

Vậy $M=2\sqrt{2}, m=-2\Rightarrow P=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Câu 5. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-8x}{x+1}$ trên đoạn $[1;3]$. Khi đó $M-m$ bằng

A. -3. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{26}{5}$. **D.** $\dfrac{24}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-8x}{x+1}$ trên $[1;3]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(2x-8)(x+1)-x^2+8x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$.

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in[1;3]\\ x=-4\notin[1;3]\end{array}\right.$.

Ta có $f(1)=\dfrac{-7}{2}$;

$f(3)=\dfrac{-15}{4}$; $f(2)=-4$.

Do đó $M=\max\limits_{x\in[1;3]}f(x)=-\dfrac{7}{2}$ khi $x=1$ và $m=\min\limits_{x\in[1;3]}f(x)=-4$ khi $x=2$.

Vậy $M-m=-\dfrac{7}{2}-(-4)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 6. Cho $a,b\in\mathbb{R}$, $0<a<b$, hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)<0$, $\forall x\in(a;b)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[a;b]$ bằng

A. $f(b)$. **B.** $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. **C.** $f(a)$. **D.** $f\left(\sqrt{ab}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)<0$ $\forall x\in(a;b)$ nên hàm số nghịch biến trên $(a;b)$.

Do đó $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$.

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|-x^3+3x^2-3\right|$ trên đoạn $[1;3]$. Khi đó $M+m$ nằm trong khoảng nào?

A. $(2;4)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=-x^3+3x^2-3$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+6x$.

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;3]\\x=2\in[1;3]\end{array}\right.$.

Ta có BBT của hàm số $f(x)=-x^3+3x^2-3$ trên đoạn $[1;3]$.

x	1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-3

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm trên đoạn $[1;3]$ (giả sử $x_1<x_2$) của phương trình $-x^3+3x^2-3=0$.

Khi đó ta có BBT của hàm số $g(x)=\left|-x^3+3x^2-3\right|$ trên đoạn $[1;3]$.

x	1		x_1		2		x_2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	1	↘	0	↗	3

Từ BBT ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|-x^3+3x^2-3\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|-x^3+3x^2-3\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 0.

Do đó $M=3$, $m=0$. Vậy $M+m=3$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ lần lượt là

A. π và $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$ và $\frac{-\pi}{2}$.

C. $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{-\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$y'=1-2\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$.

Xét $x\in\left[\frac{-\pi}{2};\pi\right]$ ta được $x=\pm\frac{\pi}{6};x=\frac{5\pi}{6}$.

$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2};\ f(\pi)=\pi;\ f\left(\frac{-\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2};\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2};\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]}y=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$; $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]}y=\frac{-\pi}{2}$.

Câu 9. Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x-3\right|\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$. Tính $M+2N$.

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$. **B.** $3+\sqrt{5}$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=\left|x-3\right|\sqrt{x+1}=\sqrt{(x-3)^2(x+1)}$. Xét hàm số $g(x)=(x-3)^2(x+1),x\in[0;4]$.

$g'(x)=2(x-3)(x+1)+(x-3)^2=(x-3)\left(2(x+1)+x-3\right)=(x-3)(3x-1)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\in(0;4) \\ x=\dfrac{1}{3}\in(0;4) \end{array}\right.$;

$g(0)=9;\quad g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{256}{27};\quad g(3)=0;\quad g(4)=5$;

$\max\limits_{[0;4]} g(x)=\dfrac{256}{27}$; $\min\limits_{[0;4]} g(x)=0$; $M=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}; N=0$.

Vậy $M+2N=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Số phần tử của tập hợp S bằng?

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m\right|$

Xét $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$ $g'(x)=0\Leftrightarrow x^3-19x+30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-5\notin[0;2] \\ x=3\notin[0;2] \\ x=2\in[0;2] \end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} g(x)=\max\{g(0),g(2)\}=\max\{m,m+26\}=m+26$

Do đó $\max\limits_{[0;2]} y=\max\limits_{[0;2]} f(x)=\max\{|m|,|m+26|\}\le 20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} |m|\le|m+26|\le 20 \\ |m+26|\le|m|\le 20 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -13\le m\le -6 \\ -20\le m\le -13 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -20\le m\le -6$

Suy ra $S=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-20\le m\le -6\}$. Khi đó số phần tử của tập hợp S bằng 15 phần tử.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** -34.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[2;19]$ hàm số liên tục.

Ta có $f'(x)=3x^2-21$. Cho $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-21=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{7}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=-34$, $f\left(\sqrt{7}\right)=-14\sqrt{7}$, $f(19)=6460$

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{7}\right)=-14\sqrt{7}$.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x\left(1-x^2\right)$ trên khoảng $(0;1)$ là:

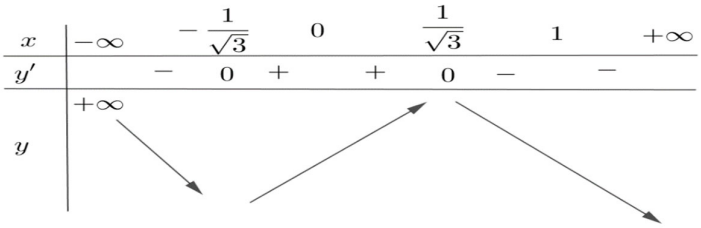
A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 0. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=1-3x^2\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có BBT của hàm số:



Từ BBT suy ra $\max\limits_{(0;1)} y=y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 3. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $-\frac{50}{27}$. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-4x+1 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;\,2] \\ x=\dfrac{1}{3}\in[0;\,2] \end{array}\right.$.

Do $f(0)=-2$, $f(1)=-2$, $f(2)=0$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{50}{27}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 0.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ trên $[0;3]$ là

A. -61. **B.** 3. **C.** 61. **D.** 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên một đoạn.

Phương pháp: Áp dụng ***Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn***

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$ ta làm như sau:

$*$ Tìm các điểm $x_1;\ x_2;...;\ x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

$*$ Tính $f(x_1);f(x_2);...;f(x_n);f(a);f(b)$.

$*$ So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Áp dụng qui tắc trên để tìm giá trị lớn nhất.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Đạo hàm $y'=-4x^3+4x$; $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;3] \\ x=-1\notin[0;3] \\ x=1\in[0;3] \end{array}\right.$.

Ta có $y(-1)=3$, $y(1)=3$, $y(0)=2$, $y(3)=-61$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ trên $[0;3]$ là 3.

Bài tập tương tự:

Câu 5. *Giá trị lớn nhất của hàm số* $y=f(x)=x^4-4x^2+9$ *trên đoạn* $[-2;3]$ *là*

A. 201. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 54.

Lời giải

Chọn D

Hàm số liên tục và xác định trên $[-2;3]$.

Ta có: $y'=4x^3-8x$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Xét: $f(-2)=9$; $f\left(-\sqrt{2}\right)=5$; $f(0)=9$; $f\left(\sqrt{2}\right)=5$; $f(3)=54$.

Vậy: $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=f(3)=54$.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-8}{(x-3)^2}<0$, $\forall x\in[0;2]$. Suy ra hàm số luôn nghịch biến trên $[0;2]$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$ là: $y(0)=\dfrac{1}{3}$.

Câu 7. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$. Khi đó:

A. $-3\sqrt{13}$. **B.** -12. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** 12.

Lời giải:

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}, x\in[0;3]$. Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;3) \\ x=2\in(0;3) \end{array}\right.$.

Tính $y(1)=-5\sqrt{5}$; $y(0)=-12$; $y(2)=-8\sqrt{2}$; $y(3)=-3\sqrt{13}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} y=-3\sqrt{13}$ khi $x=3$, $\min\limits_{[0;3]} y=-12$ khi $x=0$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là

A. π. **B.** -1. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; $\begin{cases} y'=0 \\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x=\pi$

BBT

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y=-1$.

Câu 9. **(HKI-SGD Thái Bình 2017-2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên khoảng $(0;2)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vì $x=-1$ không thuộc khoảng $(0;2)$ nên loại

Xét bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;2)$

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $x=1$.

Vậy $miny=f(1)=-1$.

Câu 10. [DS12.C1.3.D02.a] Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m=\frac{51}{4}$. **B.** $m=\frac{49}{4}$. **C.** $m=13$. **D.** $m=\frac{51}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-2;3]$.

Ta có $y'=4x^3-2x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in-[-2;3]\\x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in-[-2;3].\\x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-2;3]\end{array}\right.$

Khi đó $y(-2)=25$, $y(0)=13$, $y(3)=85$, $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{51}{4}$, $y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{51}{4}$.

Vậy $m=\min\limits_{[-2;3]}y=y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{51}{4}$.

Câu 11. [DS12.C1.3.D02.a] Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$.

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

$y'=\frac{3}{(-x+1)^2}>0\ \forall x\neq1\Rightarrow\min\limits_{[2;3]}y=y(2)=-5$.

Câu 12. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$. Giá trị của M và m lần lượt là:

A. $M=40;\ m=-41$. **B.** $M=15;\ m=-41$. **C.** $M=40;\ m=8$. **D.** $M=40;\ m=-8$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$.

Ta có: $y'=3x^2-6x-9$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-4;4]\\x=3\in[-4;4]\end{array}\right.$.

Ta có: $y(-4)=-41$; $y(-1)=40$; $y(3)=8$; $y(4)=15$.

Vậy: $M=40;\ m=-41$.

Câu 13. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+5x+6}$ trên đoạn $[-1;6]$ lần lượt là

A. $\frac{5}{2}$ và 1. **B.** $\frac{7}{2}$ và 0. **C.** 0 và $\frac{5}{2}$. **D.** 1 và 0.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;6]$.

Ta có: $y'=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}}$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\in[-1;6]$.

Ta lại có $y(-1)=y(6)=0, y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;6]} y=\frac{7}{2}$ khi $x=\frac{5}{2}$ và $\min\limits_{[-1;6]} y=0$ khi $x=-1, x=6$.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất hàm số $f(x)=x^4-x^2+13$ trên $[-2;3]$ là phân số tối giản có dạng $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 53. **B.** 55. **C.** 57. **D.** 59.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=4x^3-2x$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{TM}) \\ x=0(\text{TM}) \\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{TM}) \end{array}\right.$.

Ta lại có: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{51}{4}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{51}{4}, f(0)=13, f(-2)=25, f(3)=85$

nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ là $\frac{51}{4}$ tại $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $a=51$ và $b=4$. Vậy $a+b=55$.

Câu 15. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+3}{\sin x+1}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó M^2+m^2 là

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{31}{2}$. **C.** 15. **D.** $\dfrac{61}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x$. Với $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $0\le\sin x\le 1$ hay $0\le t\le 1$.

Khi đó $y=f(t)=\dfrac{2t+3}{t+1}$, với $t\in[0;1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-1}{(t+1)^2}<0$, $\forall t\in[0;1]$

nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

Suy ra $m=\min\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(1)=\dfrac{5}{2}$

và $M=\max\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(0)=3$.

Vậy $M^2+m^2=\dfrac{61}{4}$.

Câu 16. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$ với $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $M+\sqrt{3}m$ bằng

A. $1+2\sqrt{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\\ t^2=1+\sin 2x\end{cases}$.

Khi đó: $f(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t)=\dfrac{1-t}{\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $f(1)=\sqrt{2}$.

Suy ra $M=f(1)=\sqrt{2}$; $m=f\left(-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $M+\sqrt{3}m=1$.

Câu 17. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=|x|+3$ trên $[-1;1]$ là :

A. 3 . **B.** 7 . **C.** 0 . **D.** 4 .

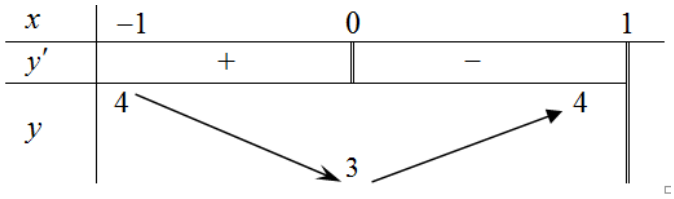
Lời giải

Chọn B

Ta có $y=f(x)=|x|+3=\begin{cases} x+3 & \text{khi } x\in[0;1] \\ -x+3 & \text{khi } x\in[-1;0) \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} y'=1 & \text{khi } x\in[0;1] \\ y'=-1 & \text{khi } x\in[-1;0) \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho.



Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y+\min\limits_{[-1;1]} y=7$.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3+3x^2-72x+90|+m$ trên đoạn $[-5;5]$ là 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng

A. $1600<m<1700$. **B.** $m=400$. **C.** $m<1618$. **D.** $1500<m<1600$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3+3x^2-72x+90$ trên đoạn $[-5;5]$.

Ta có: $g'(x)=3x^2+6x-72$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=4\in[-5;5] \\ x=-6\notin[-5;5] \end{cases}$.

$g(-5)=400,\ g(5)=-70,\ g(4)=-86$.

Suy ra: $\max\limits_{x\in[-5,5]}|g(x)|=|g(-5)|=400.$

Do đó: $\max\limits_{x\in[-5,5]} f(x)=400+m\Leftrightarrow 2018=400+m\Leftrightarrow m=1618$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3+3x^2-72x+90\right|+m$ trên đoạn $[-5;5]$ là 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $1600<m<1700$. **B.** $m=400$. **C.** $m<1618$. **D.** $1500<m<1600$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3+3x^2-72x+90$ trên đoạn $[-5;5]$.

Ta có: $g'(x)=3x^2+6x-72$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\in[-5;5]\\x=-6\notin[-5;5]\end{array}\right.$$

$g(-5)=400,\ g(5)=-70,\ g(4)=-86$.

Suy ra: $\max\limits_{x\in[-5,5]}\left|g(x)\right|=\left|g(-5)\right|=400.$

Do đó: $\max\limits_{x\in[-5,5]}f(x)=400+m\Leftrightarrow 2018=400+m\Leftrightarrow m=1618$.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-\left(m^2+m+1\right)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -6. Tính tổng các phần tử của S.

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-3x^2+2mx-m^2-m-1;\ \forall x\in\mathbb{R}$

Mà $\Delta'=-2m^2-3m-3<0;\ \forall m\in\mathbb{R}$

Suy ra $y'<0;\ \forall x\in[-1;1]$.

Do đó hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1;1]$

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]}y=y(1)=-6$.

Lại có $y(1)=-2-m^2$.

Do đó $-2-m^2=-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 0.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2-30 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{10} \ (n) \\ x=-\sqrt{10} \ (l) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=-52$; $f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}$ và $f(19)=6289$.

Vậy $\min\limits_{x\in[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}$.

Câu 2. **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58. **D.** $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3x^2-33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{11}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{11}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $f(2)=-58$, $f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$, $f(19)=6232$.

Vậy $f_{\min}=f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$.

Câu 3. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^2+2x+3$ trên đoạn $[0;3]$ là

A. 18. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Ta có $f'(x)=2x+2$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1\notin(0;3)$.

Khi đó $f(0)=3$; $f(3)=18$. Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x)=18$.

Cách 2.

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai.

Ta có $a=1>0, \dfrac{-b}{2a}=-1$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Vì $[0;3]\subset(-1;+\infty)$ nên $\underset{[0;3]}{\text{Max}} f(x)=f(3)=18$.

Cách 3.

Dùng máy tính cầm tay.

Vào chức năng Table, nhập $f(x)=x^2+2x+3$, Start: 0, End: 3, Step: $\dfrac{3}{29}$.

Dò bảng $f(x)$ nhận thấy giá trị 18 lớn nhất. Do đó $\underset{[0;3]}{\text{Max}} f(x)=18$.

Câu 4. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $M=0$. **B.** $M=2$. **C.** $M=4$. **D.** $M=-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow x=0$ và $x=2$.

Vì chỉ xét trên đoạn $[-1;1]$ nên ta có $y(-1)=-4$; $y(0)=0$; $y(1)=-2$. Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=0$ khi $x=0$.

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25;\dfrac{11}{10}\right)$. Tìm M.

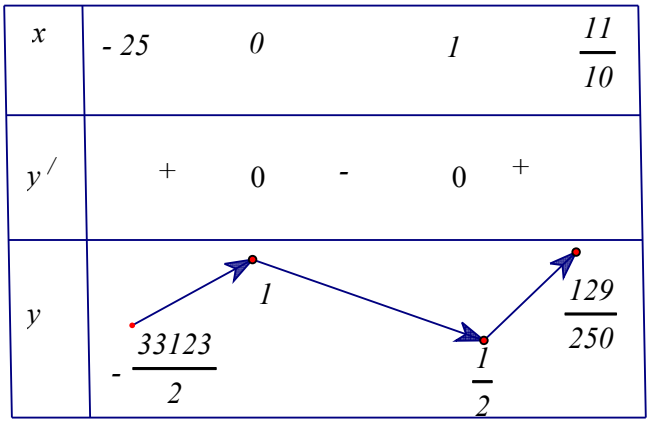
A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{129}{250}$. **C.** $M=0$. **D.** $M=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (\text{nhan})\\x=0\ (\text{nhan})\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $M=1$.

Câu 6. **(Sở Yên Bái 2019-2020)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^3-3x^2-9x-1$ trên đoạn $[-2;4]$.

A. $M=3$. **B.** $M=4$. **C.** $M=21$. **D.** $M=28$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x-9$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in(-2;4) \\ x=3\in(-2;4) \end{array}\right.$.

Ta có $y(-2)=-3; y(-1)=4; y(3)=-28; y(4)=-21.$

Nên giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^3-3x^2-9x-1$ trên đoạn $[-2;4]$ là 4.

Câu 7. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+3$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=3$. **B.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=6$. **C.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=5$. **D.** $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=4$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in\left[-1;\frac{3}{2}\right] \\ x=1\ \ \in\left[-1;\frac{3}{2}\right] \end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-1)=5$, $y(1)=1$, $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{8}$.

Vậy $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y = y(-1) = 5$.

Câu 8. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\frac{31}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 (loai) \\ x = 1 (t/m) \end{array}\right.$.

$y(0) = 5$; $y(1) = 3$; $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{31}{8}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} y = y(0) = 5$.

Câu 9. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} y = 0$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y = 3$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} y = 7$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} y = 5$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$

$y(0) = 5,\ y(1) = 3,\ y(2) = 7 \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y = 7.$

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. 11. **B.** 15. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã xác định và liên tục trên $[-1;2]$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$; $\left\{\begin{array}{l} x \in (-1;2) \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.

Tính được $f(-1) = 15$; $f(2) = 6$; $f(1) = -5 \Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 15$ .khi $x = -1$.

Câu 11. *Giá trị lớn nhất của hàm số* $y=f(x)=x^4-8x^2+17$ *trên đoạn* $[-1;1]$ *là*

A. 10. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

Chọn D

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1;1]$.

Ta có: $y'=4x^3-16x$, cho $y'=0\Rightarrow 4x^3-16x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[-1;1]\\x=2\notin[-1;1]\\x=0\in[-1;1]\end{array}\right.$.

Khi đó: $f(-1)=10$, $f(1)=10$, $f(0)=17$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=f(0)=17$.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-2x^2-3$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. –4. **B.** 0. **C.** 5. **D.** –3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3-4x$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=1\end{array}\right.$

Khi đó, $y(-1)=-4, y(0)=-3, y(1)=-4, y(2)=5$.

Vậy, $\min\limits_{[-1;2]} y=-4.$

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-8x^2+16$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng

A. 19. **B.** 9. **C.** 25. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có hàm số $f(x)=x^4-8x^2+16$ liên tục trên $[-1;3]$.

$f'(x)=4x(x^2-4)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;3]\\x=-2\notin[-1;3]\\x=2\in[-1;3]\end{array}\right.$

Ta có: $f(-1)=9$; $f(0)=16$; $f(2)=0$; $f(3)=25$.

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=25$, đạt được khi $x=3$.

Câu 14. **(ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01 - 2018 – 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$ bằng

A. $\dfrac{28}{9}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Xét trên $(0;3]$, ta có: $y'=1+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$

Suy ra $\max\limits_{(0;3]} f(x)=f(3)=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$.

Câu 15. Biết hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;m]$ bằng $\dfrac{4}{7}$. Tìm m ?

A. $m=\dfrac{3}{7}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ trên đoạn $D=[0;m]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)>0$, $\forall x\in D$. Do hàm số liên tục trên D nên giá trị lớn nhất của hàm số là $f(m)$.

$f(m)=\dfrac{4}{7}\Leftrightarrow\dfrac{2m-3}{m+1}=\dfrac{4}{7}\Leftrightarrow 14m-21=4m+4\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(2x+4)\sqrt{4-x^2}+x^2(4-x^2)+4x+2007$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2019;2024)$. **B.** $(2024;2028)$. **C.** $(2028;2032)$. **D.** $(2015;2019)$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=[-2;2]$.

Ta có $f(x)=x^2(4-x^2)+2x\sqrt{4-x^2}+4\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)+2007$.

Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2}$.

Khi đó: $t' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $t(-2) = -2$, $t\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $t(2) = 2$. Do đó $t \in \left[-2; 2\sqrt{2}\right]$.

Mặt khác, $t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \dfrac{t^2-4}{2}$ và $x^2\left(4-x^2\right) = \left(\dfrac{t^2-4}{2}\right)^2$.

Bài toán chuyển thành:

" Tìm GTLN của hàm số $g(t) = \left(\dfrac{t^2-4}{2}\right)^2 + t^2 - 4 + 4t + 2007$ trên đoạn $\left[-2; 2\sqrt{2}\right]$."

Ta có $g'(t) = 2\left(\dfrac{t^2-4}{2}\right).t + 2t + 4 = t^3 - 2t + 4$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Mặt khác, $g(-2) = 1999$ và $g\left(2\sqrt{2}\right) = 2015 + 8\sqrt{2}$.

Do đó, giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng $\left(2015 + 8\sqrt{2}\right) \in (2024; 2028)$ đạt tại $x = \sqrt{2}$.

Câu 17. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\min\limits_{[0;2]} y = 4$. **B.** $\min\limits_{[0;2]} y = 2$. **C.** $\min\limits_{[0;2]} y = -1$. **D.** $\min\limits_{[0;2]} y = 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số trên đoạn $[0;2]$, ta có $y' = 3x^2 - 3$.

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 4; y(1) = 2; y(2) = 6$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} y = 2$ đạt tại $x = 1$.

Câu 18. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ trên đoạn $[1;3]$ bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$y' = 3x^2 - 4x - 4$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{-2}{3} \end{array}\right.$

Ta có: $x = 2 \in [1;3]$; $x = \dfrac{-2}{3} \notin [1;3]$

Ta có: $y(1) = 0$, $y(2) = -3$, $y(3) = 2$. Vậy $\underset{[1;3]}{Min}\, y = -3 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 19. **(TRAN-PHU-HA-TINH-LAN-1-19-20)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. -3 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn D

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $y(1) = 2$, $y(2) = 0$, $y(3) = 4$.

Vậy $\max\limits_{[1;4]} y = y(3) = 4$.

Câu 20. **[DS12.C1.3.D02.a]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;3]} y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y = -3$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y = 1$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Lời giải

Chọn D

$y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$, $y(0) = -1$, $y(3) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Câu 21. **[DS12.C1.3.D02.a]** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \dfrac{1}{x}$ trên $[1;3]$

A. 9 . **B.** 2 . **C.** $\sqrt{28}$. **D.** 0 .

Lời giải

Chọn D

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ nên hàm số tăng trên từng khoảng xác định $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$; do đó tăng trên $[1;3]$. Vậy $\min\limits_{[1;3]} y = y(1) = 0$.

Câu 22. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$. Khi đó:

A. $m = 6$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = \frac{19}{3}$.

Lời giải:

Chọn A.

Hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ liên tục trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (2;4) \\ x = 3 \in (2;4) \end{array}\right.$

Ta lại có $y'(2) = 7;\ y'(4) = \frac{19}{3};\ y'(3) = 6$. Suy ra $m = 6$.

Câu 23. **(THUẬN THÀNH SỐ 2 LẦN 1_2018-2019)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

A. $\min\limits_{[-4;2)} y = 4$. **B.** $\min\limits_{[-4;2)} y = 7$. **C.** $\min\limits_{[-4;2)} y = 5$. **D.** $\min\limits_{[-4;2)} y = \frac{15}{2}$.

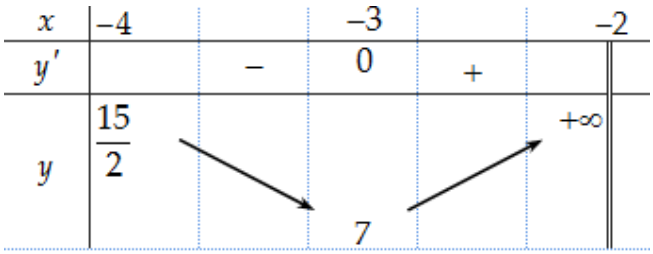
Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -1 + \frac{1}{(x+2)^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-4;2)} y = 7$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ trên $(2;6]$.

A. $\min\limits_{(2;6]} y=8$. **B.** $\min\limits_{(2;6]} y=4$. **C.** $\min\limits_{(2;6]} y=3$. **D.** $\min\limits_{(2;6]} y=9$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $(2;6]$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Do đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (loaïi)\\x=4\ (nhaän)\end{array}\right.$

Trên $(2;6]$ ta có $y(4)=8$; $y(6)=9$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{x-2}=+\infty$.

Do đó $\min\limits_{(2;6]} y=8$.

Câu 25. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính $M+m$.

A. -4. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\notin[-1;1]\end{array}\right.$.

$f(-1)=-4; f(0)=0; f(1)=-2$.

$\Rightarrow M=0; m=-4\Rightarrow M+m=-4$.

Câu 26. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$. Khi đó $M.m$ bằng

A. 3. **B.** $3+3\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases}x+3\ge 0\\6-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x\le 6$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{6-x}} = \dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+3)(6-x)}} = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{(x+3)(6-x)}\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}\right)}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3-2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \in [-3;6]$.

Ta lại có $y(-3) = 3$; $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3\sqrt{2}$; $y(6) = 3$.

Do đó $M = \max\limits_{x\in[-3;6]} y = 3\sqrt{2}$ tại $x = \dfrac{3}{2}$ và $\min\limits_{x\in[-3;6]} y = 3$ tại $x = 3$ và $x = 6$.

Suy ra $M = 3\sqrt{2}$, $m = 3$. Vậy $M.m = 9\sqrt{2}$.

Câu 27. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4x^2 - 8\sqrt{2x^2+3x+2} + 6x + 2019$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $M+m$

A. $4026+8\sqrt{2}$. **B.** 4016. **C.** 4022. **D.** $4026-8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$y = 4x^2 - 8\sqrt{2x^2+3x+2} + 6x + 2019 = 2(2x^2+3x+2) - 8\sqrt{2x^2+3x+2} + 2015$

Đặt $t = \sqrt{2x^2+3x+2}$. Hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = 2t^2 - 8t + 2015$.

Ta có $2x^2+3x+2 = 2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8}$.

$x \in [0;2] \Rightarrow x+\dfrac{3}{4} \in \left[\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{4}\right] \Rightarrow \left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 \in \left[\dfrac{9}{16};\dfrac{121}{16}\right] \Rightarrow 2x^2+3x+2 \in [2;16] \Rightarrow t \in \left[\sqrt{2};4\right]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t)$ và $\min\limits_{[0;2]} y = \min\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t)$.

Ta có: $f'(t) = 4t-8 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in \left[\sqrt{2};4\right]$.

Do $f\left(\sqrt{2}\right) = 2019 - 8\sqrt{2}$; $f(2) = 2007$, $f(4) = 2015$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t) = f(4) = 2015$ và $\min\limits_{[0;2]} y = \min\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t) = f(2) = 2007$

$\Rightarrow M = 2015; m = 2007 \Rightarrow M+m = 4022$.

Câu 28. **[TT-SGD-PHU-THO-LAN-1-19-20]** Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{-3}{(x-1)^2}<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$\max\limits_{[-1;0]} y=y(-1)=\frac{1}{2}$

$\min\limits_{[-1;0]} y=y(0)=-1$

$\Rightarrow y(-1).y(0)=-\frac{1}{2}.$

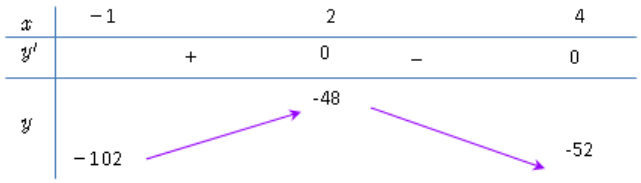
Câu 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$.

A. 48. **B.** 52. **C.** -102. **D.** 0.

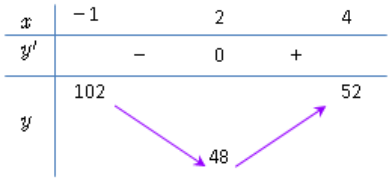
Lời giải:

Chọn A.

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-9x^2+24x-68$ trên $[-1;4]$



Suy ra BBT của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$ là



Vậy GTNN của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$ bằng : 48.

Câu 30. Tính tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f(x)=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Đặt $t=\cos x$. Ta có $t\in[-1;1]$ và hàm số đã cho trở thành $y=g(t)=t-\frac{2}{3}t^3$.

$y'=1-2t^2$; $\begin{cases}y'=0\\ t\in[-1;1]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2t^2=0\\ t\in[-1;1]\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$.

$g(-1)=-\frac{1}{3}$, $g(1)=\frac{1}{3}$, $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$, $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]}g(t)=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\min\limits_{[-1;1]}g(t)=g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

hay $\max\limits_{[0;\pi]}y=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\min\limits_{[0;\pi]}y=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{\sqrt{2}}{3}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=0$.

Nhận xét: Ta có $x\in[0;\pi]\Rightarrow\pi-x\in[0;\pi]$ và $f(\pi-x)=-f(x)$.

Do đó nếu hàm số đạt giá trị lớn nhất tại x_0 thì sẽ đạt giá trị nhỏ nhất tại $\pi-x_0$ và giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là hai số đối nhau. Vậy tổng cần tìm bằng 0.

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4(\sin x+\cos x)^4+\frac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right]$. Khi đó tỉ số $\frac{M}{m}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=4(\sin x+\cos x)^4+\frac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}=4(1+\sin 2x)^2+\frac{8}{\sin^2 2x}$.

Đặt $t=\sin 2x$, $x\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow 2x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $g(t)=4(1+t)^2+\frac{8}{t^2}$ với $\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Ta có $g'(t)=8(1+t)-\frac{16}{t^3}=\frac{8}{t^3}(t-1)(t^3+2t^2+2t+2)$.

Suy ra $g'(t)\le 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$-$	0
$g(t)$	41	$\searrow$	24

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g(t)=g(1)=24=m$ và $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g(t)=g\left(\frac{1}{2}\right)=41=M$

Khi đó tỉ số $\frac{M}{m}=\frac{41}{24}\in\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Câu 32. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên nửa khoảng $[0;1)$ bằng -2

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $m=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\frac{-m^2+m+1}{(x+1)^2}<0,\forall m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hs luôn nghịch biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;1]}f(x)=f(0)\Leftrightarrow -m^2+m=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-1\end{array}\right.$

Câu 33. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+m^2}{\sin x-2}$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là -1.

A. $(-1;0)$. **B.** $(-4;3)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x,\left(t\in\left[-1;1\right]\right)$ hàm số trở thành

$$y=\frac{t+m^2}{t-2}\Rightarrow y'=\frac{-2-m^2}{\left(t-2\right)^2}<0,\ \forall t\in\left[-1;1\right]$$

Kho đó do hàm số luôn nghịch biến nên giá trị lớn nhất là $y\left(-1\right)=\frac{-1+m^2}{-3}$.

Theo giả thuyết $\frac{-1+m^2}{-3}=-1\Leftrightarrow m=\pm2$.

Câu 34. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{2}x^3-2x^2+1\right|$ trên $\left(-\frac{9}{8};\frac{10}{3}\right)$. Biết $M=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$. Tính $S=a+b^2$.

A. $S=830$. **B.** $S=2$. **C.** $S=122$. **D.** $S=127$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^3-2x^2+1$ trên $\left(-\frac{9}{8};\frac{10}{3}\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2-4x=x\left(\frac{3}{2}x-4\right)$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \left(\text{nhan}\right)\\x=\frac{8}{3}\ \left(\text{nhan}\right)\end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên của $f\left(x\right)$ trên $\left(-\frac{9}{8};\frac{10}{3}\right)$ là

x	$-\frac{9}{8}$		0		$\frac{8}{3}$		$\frac{10}{3}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{2297}{1024}$	↗	1	↘	$-\frac{101}{27}$	↗	$-\frac{73}{27}$

Suy ra $M=\frac{101}{27}$ do đó $S=101+27^2=830$.

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x^2-4mx+m^2-2m+2$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 3. Số các phần tử của S là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số có $a=4>0$ và đỉnh của parabol là $I\left(\frac{m}{2};2-2m\right)$.

+ Nếu $\frac{m}{2}<0\Leftrightarrow m<0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là

$\min y=y(0)=m^2-2m+2$ nên $\min y=3\Leftrightarrow m^2-2m+2=3\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow m=1-\sqrt{2}$.

+ Nếu $0\le\frac{m}{2}\le 2\Leftrightarrow 0\le m\le 4$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là

$\min y=y\left(\frac{m}{2}\right)=2-2m$ nên $\min y=3\Leftrightarrow 2-2m=3\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (loại).

+ Nếu $\frac{m}{2}>2\Leftrightarrow m>4$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là

$\min y=y(2)=m^2-10m+18\Rightarrow\min y=3\Leftrightarrow m^2-10m+18=3\Leftrightarrow m^2-10m+15=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5-\sqrt{10}\\m=5+\sqrt{10}\end{array}\right.\Rightarrow m=5+\sqrt{10}$.

+ Vậy giá trị cần tìm là $m=1-\sqrt{2}$ hoặc $m=5+\sqrt{10}$. Vậy S có số phần tử là 2.

Câu 36. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0;2)$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>2$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{(2x+m)(x+m)-(x^2+mx+1)}{(x+m)^2}=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=0$

$\Leftrightarrow(x+m)^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m+1\\x=-m-1\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m-1$		$-m$		$-m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{[0;2]}y=y(x_0)$ với $x_0\in(0;2)$ khi và chỉ khi

$\left\{\begin{array}{l}-m<0\\0<-m+1<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>0\\-1<m<1\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 37. Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\max\{|A|,|B|\}\ge|A|\\ \max\{|A|,|B|\}\ge|B|\end{cases}\Rightarrow 2\max\{|A|,|B|\}\ge|A|+|B|\ge|A+B|$.

Hay $\max\{|A|,|B|\}\ge\dfrac{|A+B|}{2}$ (1). Dấu "=" xảy ra khi $A=B$.

Tương tự $\begin{cases}\max\{|A|,|B|\}\ge|A|\\ \max\{|A|,|B|\}\ge|B|\end{cases}\Rightarrow 2\max\{|A|,|B|\}\ge|A|+|B|=|A|+|-B|\ge|A+(-B)|$.

Suy ra $\max\{|A|,|B|\}\ge\dfrac{|A-B|}{2}$ (2). Dấu "=" xảy ra khi $A=-B$.

Xét hàm số $g(x)=x^2+ax+b$, có $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-a}{2}$.

Trường hợp 1: $\dfrac{-a}{2}\notin[-1;3]\Leftrightarrow a\notin[-6;2]$. Khi đó $\mathrm{M}=\max\{|1-a+b|,|9+3a+b|\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có $\mathrm{M}\ge|4+a+b|>2$.

Trường hợp 2: $\dfrac{-a}{2}\in[-1;3]\Leftrightarrow a\in[-6;2]$. Khi đó $\mathrm{M}=\max\left\{|1-a+b|,|9+3a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có

$\mathrm{M}\ge\max\left\{|5+a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}\Leftrightarrow\mathrm{M}\ge\dfrac{1}{8}|20+4a+a^2|\Leftrightarrow\mathrm{M}\ge\dfrac{1}{8}|16+(a+2)^2|$.

Suy ra $\mathrm{M}\ge 2$.

Vậy M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là $M=2$ khi $\begin{cases}a=-2\\ 5+a+b=\dfrac{a^2}{4}-b\\ 1-a+b=9+3a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$.

Do đó $a+2b=-4$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+24x^2-140$ và hàm số $g(x)=f(\sqrt{x^2+4x+16})-x^2-4x+3$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-4;0]$ là:

A. 2. **B.** 8. **C.** 14. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

$y' = -4x^3 + 48x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-140	↗	4	↘	$-\infty$

Ta có $g'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+16}}[f'(\sqrt{x^2+4x+16}) - 2]$

Do $\sqrt{x^2+4x+16} \geq 2\sqrt{3}$ Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(\sqrt{x^2+4x+16}) < 0$

Ta có $f'(\sqrt{x^2+4x+16}) - 2 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Ta có bảng biến thiên

x	-4		-2		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-9	↗	11	↘	-9

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-4;0]$ bằng 2.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \left|8\cos^4 x + a\cos^2 x + b\right|$, trong đó a, b là các tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a+b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a+b=-7$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=-8$.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x) = \left|8\cos^4 x + a\cos^2 x + b\right|$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow t \in [0;1] \Rightarrow f(t) = \left|8t^2 + at + b\right|$ và $M = \max f(t)$.

Khi đó:

$$\begin{cases} M \ge f(0) = |b| \\ M \ge f(1) = |8+a+b| \\ M \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|2+\frac{a}{2}+b\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \ge |b| \\ M \ge |8+a+b| \\ 2M \ge |4+a+2b| \end{cases}$$

$\Rightarrow 4M \ge |b| + |8+a+b| + |4+a+2b| \ge 4$

$\Rightarrow M \ge 1$.

Dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow |b| = |8+a+b| = \frac{|4+a+2b|}{2} = 1$ và các số b; $8+a+b$; $-4-a-2b$ cùng dấu.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy $P = a+b = -7$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(1+\sin x)+m|$ bằng 5.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 1+\sin x$. Suy ra $t \in [0;2]$. Ta có:

$|f(1+\sin x)+m| = |f(t)+m| = |t^2 - 2t + m|$.

Đặt $u = t^2 - 2t$. Với $t \in [0;2]$ thì $u \in [-1;0]$. Khi đó $|t^2 - 2t + m| = |u+m|$.

Suy ra, $\max\limits_{\mathbb{R}} |f(1+\sin x)+m| = \max\limits_{[0;2]} |f(t)+m| = \max\limits_{[0;2]} |t^2 - 2t + m| = \max\limits_{[-1;0]} |u+m|$

$= \max\limits_{[-1;0]} \{|-1+m|; |m|\}$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} |f(1+\sin x)+m| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |-1+m| = 5 \\ |m| = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4 \\ m = 5 \\ m = -5 \end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy với $m = -4$ hoặc $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI 32: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Tìm giá trị lớn nhất ,nhỏ nhất của hàm số bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải:

Bước 1: ……

Bước 2: ……

Bước 3: ……

……

……

Bước 4: ……

……

……

……

……

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Hỏi giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$ là?

A. $M=-1, m=-\frac{3}{2}$. **B.** $M=3, m=-1$. **C.** $M=3, m=-\frac{3}{2}$. **D.** $M=\frac{3}{2}, m=-3$.

Câu 2. Tìm GTNN của các hàm số $f(x)=\frac{\cos^2 x-\cos x+3}{2+\cos x}$.

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\frac{6x}{x^2+1}-1$ là?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -5. **C.** $-\frac{9}{2}$. **D.** 3.

Câu 4. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^4 x\cos^6 x$ bằng

A. $\frac{4}{81}$. **B.** $\frac{1}{32}$. **C.** $\frac{3^2}{4^5}$. **D.** $\frac{108}{5^5}$.

Câu 5. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1+\sin^4 x}{2+\cos^2 x}+\frac{1+\sin^2 x}{2+\cos^4 x}$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{2018} x+\cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó

A. $M=2; m=\frac{1}{2^{1008}}$. **B.** $M=1; m=\frac{1}{2^{1009}}$.

C. $M=1; m=0$. **D.** $M=1; m=\frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{-x^2+4x-3}$ trên tập xác định là:

A. 0. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\sqrt{2}$.

Câu 8. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ là?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Câu 9. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^3+2x^2+4x}{x^4+8x^2+16}$. Tính $M+m$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 10. Cho hàm số f thỏa mãn $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x, \forall x\in(0;\pi)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)$ trên $\mathbb{R}$ là.

A. $\frac{6}{125}$. **B.** $\frac{1}{20}$. **C.** $\frac{19}{500}$. **D.** $\frac{1}{25}$.

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Câu 2. Tính tổng của GTLN và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 3. Cho hai số thực $x,y\in[1;2]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2}$ là

A. $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{33}{4}$.

Câu 4. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $m=-4,\ n=3$. **B.** $m=4,\ n=3$. **C.** $m=-4,\ n=4$. **D.** $m=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ n=0$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x$ trên đoạn $D=\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in D} f(x)=1;\min\limits_{x\in D} f(x)=\frac{19}{27}$. **B.** $\max\limits_{x\in D} f(x)=\frac{3}{4};\min\limits_{x\in D} f(x)=-3$.

C. $\max\limits_{x\in D} f(x)=1;\min\limits_{x\in D} f(x)=-3$. **D.** $\max\limits_{x\in D} f(x)=\frac{3}{4};\min\limits_{x\in D} f(x)=\frac{19}{27}$.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^4 x-4\sin^2 x+5$.

A. $M=2,m=-5$. **B.** $M=5,m=2$. **C.** $M=5,m=-2$. **D.** $M=-2,m=-5$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^2 x-\sin x$ tương ứng là

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 8. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{1+\sin^6 x+\cos^6 x}{1+\sin^4 x+\cos^4 x}$.

A. -2 và 2. **B.** 3 và 2. **C.** $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$. **D.** 1 và -4.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos 2x-2\sin x-1$ là:

A. $\min y=-2$. **B.** $\min y=-4$. **C.** $\min y=-3$. **D.** $\min y=-1$.

Câu 10. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\sin^3 x-\cos^3 x$.

A. $m=-4$, $n=3$. **B.** $m=4$, $n=3$. **C.** $m=-4$, $n=4$. **D.** $m=4$, $n=-4$.

Câu 11. Tìm GTLN của các hàm số $y=\sqrt{2}\cos 2x-4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$.

C. $m=-\sqrt{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 12. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$.

C. $m=-2$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 13. Tìm GTLN của các hàm số $y=\sqrt{2}\cos 2x+4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

A. $m=4$. **B.** $m=2$.

C. $m=-\sqrt{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Câu 14. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4(\sin x+\cos x)^4+\frac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right]$. Khi đó tỉ số $\frac{M}{m}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 15. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+2\sin x-\frac{2}{3}$, với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{5}{6}$ và $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$ và $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{5}{6}$ và $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$ và $\frac{1}{6}$.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}$ bằng

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $2\sqrt{2}-2$. **D.** $7\sqrt{2}-9$.

Câu 17. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ là?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Câu 18. Tìm GTLN và GTNN của hàm số sau $y=\frac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}+2}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+1}$ trên $[-1;3]$.

A. $\min y=2$;và $\max y=\frac{4}{5}$. **B.** $\min y=-2$;và $\max y=\frac{4}{5}$.

C. $\max y=2$;và $\min y=\frac{4}{5}$. **D.** $\min y=2$;và $\max y=\frac{14}{5}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=\left|\frac{\sin^2 x-(m+1)\sin x+2m+2}{\sin x-2}\right|$ (với m là tham số thực). Hỏi giá trị lớn nhất của y có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

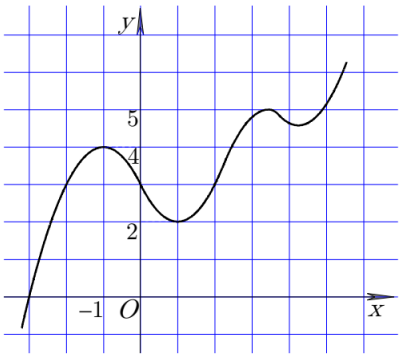
A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x^2-8\sqrt{2x^2+3x+2}+6x+2019$ trên đoạn [0;2]. Tính $M+m$

A. $4026+8\sqrt{2}$. **B.** 4016. **C.** 4022. **D.** $4026-8\sqrt{2}$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(2\sin x)$ trên $(0;\pi)$ là:



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+2}$.

A. $m=-2$ và $n=2$. **B.** $m=\frac{1}{3}$ và $n=-3$.

C. $m=3$ và $n=-\frac{1}{3}$. **D.** $m=1$ và $n=-4$.

Câu 3. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+1}{3-2\sin x}$. Khi đó ta có

A. $M+2019m=2$. **B.** $M-2019m=-2019$.

C. $2M+3m=0$. **D.** $M+m=1$.

Câu 4. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$.

A. $m=1$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-4$.

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^4 x-\cos^2 x+4$ bằng

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 6. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2\cos x+1}{\cos x-2}$. Khi đó ta có

A. $9M+m=0$. **B.** $9M-m=0$. **C.** $M+9m=0$. **D.** $M+m=0$.

Câu 7. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x+1}$.

A. $M=\frac{1}{2};\ m=-2$. **B.** $M=\frac{1}{2};\ m=-1$. **C.** $M=\frac{\sqrt{3}}{2};\ m=-1$. **D.** $M=\frac{1}{2};\ m=1$.

Câu 8. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{2\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

A. $m=2$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=-10$.

Câu 9. Tính tổng GTLN và GTNN của các hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5

Câu 10. Tìm GTLN của các hàm số. $y=\cos 2x+2\sin x-3$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** -6. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\cos 2x+2\sin x$.

A. $M=\frac{9}{4},m=-4$. **B.** $M=4,m=0$. **C.** $M=0,m=-\frac{9}{4}$. **D.** $M=4,m=-\frac{9}{4}$.

Câu 12. Tìm GTLN của các hàm số $f(x)=-\cos^3 x-\sin^2 x+\cos x-3$.

A. $m=3$. **B.** $m=-\frac{113}{27}$. **C.** $m=\frac{113}{27}$. **D.** $m=-3$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất hàm số $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 1. **B.** $\frac{23}{27}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** 5.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{1}{27}$.

C. 1. **D.** $\frac{23}{27}$.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\cos^4 x+\sqrt{3}\sin^2 x+2$

A. $M=2+\sqrt{3}$. **B.** $M=3$.

C. $M=\frac{5}{4}+\sqrt{3}$. **D.** $M=3+\sqrt{3}$.

Câu 16. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

A. $2\frac{3}{4};3$. **B.** $2\frac{1}{4};3$. **C.** $\frac{11}{4};3\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{13}{4};3$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

A. $\min y=3$. **B.** $\min y=\frac{11}{4}$. **C.** $\min y=-3$. **D.** $\min y=\frac{11}{2}$.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^4 x+\sqrt{2}\sin^2 x+2$ bằng

A. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $3+\sqrt{2}$.

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

A. $\min y=3$. **B.** $\min y=\frac{11}{4}$. **C.** $\min y=-3$. **D.** $\min y=\frac{11}{2}$.

Câu 20. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=2\cos^6 x-\frac{3}{4}\cos 2x$.

A. 4 và $\frac{1}{4}$. **B.** 4 và $\frac{1}{2}$. **C.** 2 và $\frac{1}{2}$. **D.** 2 và $\frac{1}{4}$.

Câu 21. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}$.

A. $\frac{3}{2};\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{3}{2};\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2};-\frac{4}{3}$.

Câu 22. Tìm GTLN của các hàm số $y=2(1+\sin 2x\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$.

A. $m=1$. **B.** $m=-3$.

C. $m=-1$. **D.** $m=3$.

Câu 23. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$ với $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $M+\sqrt{3}m$ bằng

A. $1+2\sqrt{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 24. Tìm GTLN của các hàm số $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}+\cos\frac{4x}{1+x^2}+1$.

A. $\frac{17}{8}$. **B.** $-\frac{17}{8}$. **C.** $\frac{7}{8}$. **D.** $-\frac{7}{8}$.

Câu 25. Tìm GTNN của các hàm số $y=x^3+\frac{1}{x^3}-x^2-\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}$.

A. 14. **B.** 13. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26. Tìm GTNN của hàm số $y=x^3+\frac{1}{x^3}-x^2-\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 12. **D.** 21

Câu 27. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\cos^2 2x+2(\sin x+\cos x)^3-3\sin 2x+m$ (với m là tham số thực) thoả mãn $\max\limits_R y=8$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m>7$. **B.** $3<m<4$. **C.** $0<m<3$. **D.** $4<m<7$.

Câu 29. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|1+2\cos x|+|1+2\sin x|$ là

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** 1. **D.** $2-\sqrt{3}$.

Câu 30. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số $y=\frac{\sin^6 x|\cos x|+\cos^6 x|\sin x|}{|\sin x|+|\cos x|}$.

A. $m=-4,\ n=3$. **B.** $m=4,\ n=3$. **C.** $m=-4,\ n=4$. **D.** $m=4,\ n=-4$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+m^2}{\sin x-2}$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là -1.

A. $(-1;0)$. **B.** $(-4;3)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 32. Cho ΔABC không tù. Tìm GTLN của biểu thức : $P=\cos 2A+2\sqrt{2}(\cos B+\cos C)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=|8\cos^4 x+a\cos^2 x+b|$, trong đó a, b là các tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a+b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a+b=-7$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=-8$.

Câu 34. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(2x+4)\sqrt{4-x^2}+x^2(4-x^2)+4x+2007$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2019;2024)$. **B.** $(2024;2028)$. **C.** $(2028;2032)$. **D.** $(2015;2019)$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(1+\sin x)+m|$ bằng 5.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

BÀI 32: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ.

A. LÝ THUYẾT:

Bài toán :

Tìm giá trị lớn nhất ,nhỏ nhất của hàm số bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải:

Bước 1: Tìm tập xác định và Biến đổi hàm số đã cho về dạng $y = F\left(u\left(x\right)\right)$.

Bước 2: Đặt $t = u\left(x\right)$. Khi đó ta tìm được $t \in K$ với $\forall x \in D$.

Bước 3: Việc tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D quy về việc tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $F\left(t\right)$ trên K .

Bước 4: Tính $y'\left(t\right)$ và giải phương trình $y'\left(t\right) = 0$ được nghiệm $t = t_0 \in \left[a;b\right]$ rồi tính $y\left(a\right), y\left(b\right), y\left(t_0\right)$ rồi so sánh và kết luận. (Có thể dùng BBT hay đồ thị nếu gặp bài khó xơi 😊)

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Hỏi giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$ là?

A. $M=-1, m=-\frac{3}{2}$. **B.** $M=3, m=-1$. **C.** $M=3, m=-\frac{3}{2}$. **D.** $M=\frac{3}{2}, m=-3$.

Lời giải:

Chọn C.

Đặt $t=\sin x$ với $t\in[-1;1]$

Khi đó $y=2t^2+2t-1$, $y'=4t+2$.

$y'=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Ta có. $\begin{cases} y(-1)=-1 \\ y(1)=3 \\ y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \end{cases}$ . .

Kết luận $M=3, m=-\frac{3}{2}$.

Câu 2. Tìm GTNN của các hàm số $f(x)=\frac{\cos^2 x-\cos x+3}{2+\cos x}$.

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét trên đoạn $[0;\pi]$:

Đạo hàm: $y'=\frac{\cos x(2+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

Cho $y'=0\Leftrightarrow 1+2\cos x=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Vì $x\in(0;\pi)$ nên $\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$

Tính: $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(0)=0$ $f(\pi)=0$

Vậy GTLN và GTNN của các hàm số $f(x)=\cos^2 x-\cos x+3$ lần lượt là 0; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\frac{6x}{x^2+1}-1$ là?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -5. **C.** $-\frac{9}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\frac{x}{x^2+1}$.

Do $x^2+1\ge 2|x|\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\le x\le \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\Rightarrow -\frac{1}{2}\le t\le \frac{1}{2}$.

Khi đó $y=4t^3+6t-1$ với $t\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$\Rightarrow y'=12t^2+6>0\forall t\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$\Rightarrow \min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y=y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$.

Câu 4. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^4 x\cos^6 x$ bằng

A. $\frac{4}{81}$. **B.** $\frac{1}{32}$. **C.** $\frac{3^2}{4^5}$. **D.** $\frac{108}{5^5}$.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

2. Hướng giải:

B1: Tìm tập xác định và đặt ẩn phụ để chuyển về hàm $y=g(t)$.

B2: Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đa thức trên đoạn $[a;b]$.

B3: Tính $y'(t)$ và giải phương trình $y'(t)=0$ được nghiệm $t=t_0\in[a;b]$ rồi tính $y(a)$, $y(b)$, $y(t_0)$ rồi so sánh và kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y(x)=\sin^4 x\cos^6 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3$.

Đặt $t=\cos 2x$, $t\in[-1;1]$.

Cách 1:

Ta có $y(t)=\frac{(1-t)^2}{4}.\frac{(1+t)^3}{8}=\frac{(1-t^2)^2.(1+t)}{32}=\frac{t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1}{32}$.

$y'(t)=\frac{5t^4+4t^3-6t^2-4t+1}{32}=\frac{(t-1)(t+1)^2(5t-1)}{32}$.

$y'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\\t=\frac{1}{5}\end{array}\right.$.

Cách 2: Ta có $y(t)=\frac{(1-t)^2}{4}.\frac{(1+t)^3}{8}\Rightarrow y'(t)=\frac{1}{32}\left[2(1-t)(-1)(1+t)^3+(1-t)^2.3.(1+t)^2\right]$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y(t)=\frac{t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1}{32}$ trên đoạn $[-1;1]$.

$y(1)=0;\ y(-1)=0;\ y\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{108}{5^5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số cần tìm là $\frac{108}{5^5}$.

Câu 5. **(Đề Thi Thử Trường Chuyên KHTN_HN_2020)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1+\sin^4 x}{2+\cos^2 x}+\frac{1+\sin^2 x}{2+\cos^4 x}$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác.

2. Hướng giải:

B1: Sử dụng phương pháp đổi biến: đặt $\sin^2 x=t, t\in[0;1]\Rightarrow\cos^2 x=1-t$.

B2: Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=\frac{1+t^2}{3-t}+\frac{1+t}{2+(1-t)^2}$ trên đoạn $[0;1]$;

Tính đạo hàm, giải phương trình $g'(t)=0, t\in[0;1]$. Tìm $\max\limits_{t\in[0;1]}g(t)$.

B3: Khi đó $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1+\sin^4 x}{2+\cos^2 x}+\frac{1+\sin^2 x}{2+\cos^4 x}\right)=\max\limits_{t\in[0;1]}g(t)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $\sin^2 x=t, t\in[0;1]$.

Ta có hàm số $g(t)=\dfrac{1+t^2}{3-t}+\dfrac{1+t}{2+(1-t)^2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

$$g'(t)=\frac{2t(3-t)+1+t^2}{(3-t)^2}+\frac{2+(1-t)^2+(1+t).2.(1-t)}{\left(2+(1-t)^2\right)^2}>0,\forall t\in[0;1].$$

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Do đó $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\dfrac{1+\sin^4 x}{2+\cos^2 x}+\dfrac{1+\sin^2 x}{2+\cos^4 x}\right)=\max\limits_{t\in[0;1]}g(t)=g(1)=2$ khi và chỉ khi $t=1$

$\Rightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó

A. $M=2; m=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

B. $M=1; m=\dfrac{1}{2^{1009}}$.

C. $M=1; m=0$.

D. $M=1; m=\dfrac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

1. Dạng toán: GTLả – GTả ả của hàm số lượng giác.

Phương pháp:

- Đặt ẩn phụ, đưa về hàm đại số, chú ý tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Áp dụng các bước tính GTLả – GTả ả của hàm số trên một đoạn.

2. Hướng giải:

B1: Dùng công thức hạ bậc $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Đặt $t=\cos 2x, -1\le t\le 1$, ta có hàm số $y=f(t)=\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^{1009}+\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^{1009}, t\in[-1;1]$.

B2: Tính đạo hàm $f'(t)$. Tìm các nghiệm thuộc đoạn $[-1;1]$ của phương trình $f'(t)=0$.

B3: Tính giá trị của hàm $f(t)$ tại các nghiệm tìm được ở **B2** và $f(-1), f(1)$. So sánh các giá trị tính được và kết luận về GTLả – GTả ả của hàm số đã cho.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn D

Ta có: $y=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\Leftrightarrow y=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{1009}+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{1009}$.

Đặt $t=\cos 2x,-1\le t\le 1$, ta có hàm số $y=f(t)=\left(\frac{1-t}{2}\right)^{1009}+\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1009},t\in[-1;1]$.

Có : $f'(t)=\frac{1009}{2^{1009}}\left[-(1-t)^{1008}+(1+t)^{1008}\right]$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow(1-t)^{1008}=(1+t)^{1008}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-t=1+t\\1-t=-1-t\,(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow t=0.$

Khi đó: $f(1)=f(-1)=1;f(0)=\frac{1}{2^{1008}}$.

Vậy, $M=\max\limits_{[-1;1]}f(t)=f(\pm1)=1$, khi đó $\cos 2x=\pm1\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}$.

$m=\min\limits_{[-1;1]}f(t)=f(0)=\frac{1}{2^{1008}}$, khi đó $\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{-x^2+4x-3}$ trên tập xác định là:

A. 0. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\sqrt{2}$.

Lời giải

1.Dạng toán: Đây là dạng toán tìm GTLẩ , GTẩ ẩ của hàm số chứa căn.

2. Hướng giải:

B1:Tìm ĐK của bài toán, đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$, tìm điều kiện của t

B2: Biến đổi hàm số $f(x)$ về hàm số $g(t)$.

B3: Dùng phương pháp hàm số tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của $g(t)$ suy ra kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn C

ĐK: $1\le x\le 3$

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\Rightarrow\sqrt{2}\le t\le 2$

$t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\Leftrightarrow 2\sqrt{-x^2+4x-3}=t^2-2$

Khi đó giá trị lớn nhất của $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{-x^2+4x-3}$ với $1\le x\le 3$ là giá trị lớn nhất của $g(t)=-t^2+t+2$ với $\sqrt{2}\le t\le 2$

Ta có $g'(t) = -2t + 1 \Rightarrow g'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

t	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$		2
g'(t)	0			−	
g(t)			$\sqrt{2}$	↘	0

$\Rightarrow \max\limits_{[\sqrt{2};2]} g(t) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x) = \sqrt{2}$

Câu 8. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$ là?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B.

Đặt $\cos x = t$, hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = \frac{t^2 + |t| + 1}{|t| + 1}$, với $|t| \le 1$.

ả ếu $t \in [0;1]$ thì $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0$ với mọi $t \in [0;1]$.

Ta có: $\min\limits_{t\in[0;1]} f(t) = f(0) = 1$; $\max\limits_{t\in[0;1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$

ả ếu $t \in [-1;0]$ thì $f'(t) = \frac{t^2 - 2t}{(-t+1)^2} < 0$ với mọi $t \in [-1;0]$.

Ta có: $\min\limits_{t\in[-1;0]} f(t) = f(0) = 1$; $\max\limits_{t\in[-1;0]} f(t) = f(-1) = \frac{3}{2}$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng:

$\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t) + \max\limits_{t\in[-1;1]} f(t) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Câu 9. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x}{x^4 + 8x^2 + 16}$. Tính $M + m$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

◆ ẩ ếu $x=0\Rightarrow y=0$.

◆ Xét $x\neq 0$, khi đó ta có $y=\dfrac{x+\dfrac{4}{x}+2}{\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}}+\dfrac{2}{\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2}$.

Đặt $t=x+\dfrac{4}{x}$, $|t|\geq 4$. Khi đó ta có hàm số $f(t)=\dfrac{t+2}{t^2}$, với $|t|\geq 4$;

$f'(t)=\dfrac{-t-4}{t^3}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-4$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-4	0	4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	‖		$-$	
$f(t)$	0	↘	$-\frac{1}{8}$	‖	$\frac{3}{8}$	↘	0

Do đó, suy ra $M=\dfrac{3}{8}$, $m=-\dfrac{1}{8}$.

Vậy $M+m=\dfrac{1}{4}$.

Câu 10. Cho hàm số f thỏa mãn $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x,\forall x\in(0;\pi)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)$ trên $\mathbb{R}$ là.

A. $\dfrac{6}{125}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{19}{500}$. **D.** $\dfrac{1}{25}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\cot x,\ x\in(0;\pi)\Rightarrow u\in\mathbb{R}$.

$f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x$ hay $f(u)=\dfrac{2u}{u^2+1}+\dfrac{u^2-1}{u^2+1}=\dfrac{u^2+2u-1}{u^2+1}$

Đặt $t=\sin^2 x,\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in[0;1]$

$g(x)=f(t).f(1-t)=\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}.\dfrac{(1-t)^2+2(1-t)-1}{(1-t)^2+1}=h(t)$

Cách 1: Dùng máy tính MODE 7 – nhập h(x) – start0 – and1 – step 0.1 được kết quả

Cách 2: (Tự luận) $h(x)=1-2\dfrac{5t^2-5t+2}{t^4-2t^3+3t^2-2t+2}$

$$h'(x)=4\frac{(2t-1)(5t^4-10t^3+9t^2-4t-6)}{\left(t^4-2t^3+3t^2-2t+2\right)^2}$$

$5t^4-10t^3+9t^2-4t-6=5t^3(t-1)-5t^3+9t(t-1)+5(t-5)-6<0,\forall t\in[0;1]$

Bảng biến thiên của $h(x)$ được giá trị lớn nhất $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{25}khi\,x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A. -20. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=t^2-4t-5$, $t\in[-1;1]$.

$f'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2\notin[-1;1]$.

$f(1)=-8, f(-1)=0$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)=-8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Câu 2. Tính tổng của GTLẩ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=f(x)=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Đặt $t=\cos x$. Ta có $t\in[-1;1]$ và hàm số đã cho trở thành $y=g(t)=t-\frac{2}{3}t^3$.

$y'=1-2t^2$; $\begin{cases} y'=0 \\ t\in[-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t^2=0 \\ t\in[-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

$g(-1)=-\dfrac{1}{3}$, $g(1)=\dfrac{1}{3}$, $g\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} g(t)=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\min\limits_{[-1;1]} g(t)=g\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

hay $\max\limits_{[0;\pi]} y=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\min\limits_{[0;\pi]} y=f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)=0$.

Câu 3. Cho hai số thực $x,y\in[1;2]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y^2}{x^2}$ là

A. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $\dfrac{17}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{33}{4}$.

Lời giải:

Chọn B.

Đặt $t=\dfrac{y}{x}$. Vì $x,y\in[1;2]$ nên $\dfrac{1}{2}\le t\le 2$

Khi đó $P=f(t)=2t^2+\dfrac{1}{t}$ với $t\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Ta có $f'(t)=4t-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{4t^3-1}{t^2}$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\nearrow$	$\frac{17}{2}$

Vậy $\max P=\dfrac{17}{2}$ khi $t=2$ hay $x=1,y=2$.

Câu 4. Tìm GTLả và GTả ả của các hàm số $y=2\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $m=-4,\ n=3$. **B.** $m=4,\ n=3$. **C.** $m=-4,\ n=4$. **D.** $m=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ n=0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3$, với $0\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=2-4t^2$ suy ra $f'(t)=2-4t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ t=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$.

Ta có: $y(0)=0; y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}; y(1)=\frac{2}{3}.$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f(1)=\frac{1}{2}$

Suy ra GTLả và GTả ả của các hàm số $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$ là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 0.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x$ trên đoạn $D=\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in D} f(x)=1; \min\limits_{x\in D} f(x)=\frac{19}{27}$.

B. $\max\limits_{x\in D} f(x)=\frac{3}{4}; \min\limits_{x\in D} f(x)=-3$.

C. $\max\limits_{x\in D} f(x)=1; \min\limits_{x\in D} f(x)=-3$.

D. $\max\limits_{x\in D} f(x)=\frac{3}{4}; \min\limits_{x\in D} f(x)=\frac{19}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x=2\cos^3 x-2\cos^2 x+1$.

Đặt $\cos x=t, x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Hàm số trở thành $y=2t^3-2t^2+1$, có $y'=6t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Ta có $y(1)=1$; $y\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{19}{27}; y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

Do đó $\max\limits_{x\in D} f(x)=1; \min\limits_{x\in D} f(x)=\frac{19}{27}$.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^4 x-4\sin^2 x+5$.

A. $M=2, m=-5$. **B.** $M=5, m=2$. **C.** $M=5, m=-2$. **D.** $M=-2, m=-5$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $\sin^2 x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=t^2-4t+5$, với $0\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=2t-4<0, \forall t\in[0;1]$

Ta có: $\underset{t\in[0;1]}{\text{Min}}\, f(t)=f(1)=2$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f(0)=5$

Suy ra $M=5$; $m=2$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^2 x-\sin x$ tương ứng là

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x, |t|\le 1$, được hàm số $g(t)=-t^2-t+1$

Ta có $g'(t)=-2t-1\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

$g(1)=-1;\ g(-1)=1;\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$.

Vậy $\max y=\max\limits_{[-1;1]} g(t)=\frac{5}{4}$.

Câu 8. Tìm GTLả và GTả ả của các hàm số $y=\frac{1+\sin^6 x+\cos^6 x}{1+\sin^4 x+\cos^4 x}$.

A. -2 và 2. **B.** 3 và 2. **C.** $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$. **D.** 1 và -4.

Lời giải

Chọn B

$$y=\frac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\frac{4-3\sin^2 2x}{2-\sin^2 2x}$$

Đặt $t=\sin^2 2x,\ 0\le t\le 1$. Khi đó: $y=\frac{4-t}{2-t}=g(t)$ với $0\le t\le 1$,

Ta có $g'(t)=\frac{2}{(2-t)^2}>0\Rightarrow \max y=\max\limits_{[0;1]} g(t)=3,\ \min y=2$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos 2x-2\sin x-1$ là:

A. $\min y=-2$. **B.** $\min y=-4$. **C.** $\min y=-3$. **D.** $\min y=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y=1-2\sin^2 x-2\sin x-1=-2\sin^2 x-2\sin x$.

Đặt $\sin x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=-2t^2-2t$, với $-1\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=-4t-2$ hay $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$.

Ta có: $f(1)=-4; f(-1)=0; f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Do đó $\underset{t\in[-1;1]}{\text{Min}}\, f(t)=-4$; $\underset{t\in[-1;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Suy ra $M=\frac{1}{2}$; $m=-4$.

Câu 10. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\sin^3 x-\cos^3 x$.

A. $m=-4$, $n=3$. **B.** $m=4$, $n=3$. **C.** $m=-4$, $n=4$. **D.** $m=4$, $n=-4$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Khi đó $y=g(t)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t$ với mọi $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Bài toán trở thành: tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(t)$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $g'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}$ với mọi $t\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Câu 11. Tìm GTLẩ của các hàm số $y=\sqrt{2}\cos 2x-4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$.

C. $m=-\sqrt{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\sqrt{2}\left(1-2\sin^2 x\right)+4\sin x$.

Đặt $\sin x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\sqrt{2}\left(1-2t^2\right)-4t$, với $0\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=-4\sqrt{2}t-4<0,\forall t\in(0;1)$

Ta có: $f(1)=-4-\sqrt{2}; f(0)=0$.

Do đó $\underset{t\in[0;1]}{\text{Min}}\, f(t)=0$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}\, f(t)=-4-\sqrt{2}$

Câu 12. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$.

C. $m=-2$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn D

Giải lại m=2.

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}1+\sin x\ge 0\\1+\cos x\ge 0\end{cases}$

$y>0\Rightarrow y^2=\sin x+\cos x+2+2\sqrt{\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1}\quad(*)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó $(*)$ viết lại $f(t)=t+2+2\sqrt{\frac{1}{2}\left(t^2+2t+1\right)}=t+2+\sqrt{2}|t+1|$

$$f(t)=\begin{cases}\left(1-\sqrt{2}\right)t+2-\sqrt{2},khi-\sqrt{2}\le t\le-1\\ \left(1+\sqrt{2}\right)t+2+\sqrt{2},khi-1\le t\le\sqrt{2}\end{cases}$$

Câu 13. Tìm GTLẩ của các hàm số $y=\sqrt{2}\cos 2x+4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

A. $m=4$. **B.** $m=2$.

C. $m=-\sqrt{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\sqrt{2}\left(1-\sin^2 x\right)+4\sin x$.

Đặt $\sin x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\sqrt{2}\left(1-2t^2\right)+4t$, với $0\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=-4\sqrt{2}t+4=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có: $f(1)=4;f(0)=\sqrt{2}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}$.

Do đó $\underset{t\in[0;1]}{\text{Min}}f(t)=\sqrt{2}$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}f(t)=4$

Câu 14. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4\left(\sin x+\cos x\right)^4+\frac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right]$. Khi đó tỉ số $\frac{M}{m}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=4\left(\sin x+\cos x\right)^4+\frac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}=4\left(1+\sin 2x\right)^2+\frac{8}{\sin^2 2x}$.

Đặt $t=\sin 2x$, $x\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow 2x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $g(t)=4\left(1+\mathrm{t}\right)^2+\frac{8}{t^2}$ với $\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Ta có $g'(t)=8\left(1+\mathrm{t}\right)-\frac{16}{t^3}=\frac{8}{t^3}(t-1)\left(t^3+2t^2+2t+2\right)$.

Suy ra $g'(t) \le 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$-$	0
$g(t)$	41	↘	24

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t) = g(1) = 24 = m$ và $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 41 = M$

Khi đó tỉ số $\frac{M}{m} = \frac{41}{24} \in \left(\frac{3}{2};2\right)$.

Câu 15. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + 2\sin x - \frac{2}{3}$, với $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{5}{6}$ và $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$ và $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{5}{6}$ và $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$ và $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 2\sin x - \frac{2}{3} = -\sin^2 x + 2\sin x - \frac{1}{6}$ $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Đặt $t = \sin x, 0 \le t \le 1 \Rightarrow g(t) = -t^2 + 2t - \frac{1}{6}$ với $\forall t \in [0;1]$.

$g'(t) = -2t + 2, \Rightarrow g'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$ với $\forall t \in [0;1]$

Ta có: $g(0) = -\frac{1}{6}$; $g(1) = \frac{5}{6}$.

Giá trị lớn nhất là: $\max\limits_{[0;1]} g(t) = g(1) = \frac{5}{6}$ khi $t = 1 \Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{5}{6}$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất là: $\min\limits_{[0;1]} g(t) = g(0) = \frac{1}{6}$ khi $t = 0 \Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{1}{6}$ khi $x = 0$.

Vậy $\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{5}{6}$ khi $x = \frac{\pi}{2}$., $\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{1}{6}$ khi $x = 0$.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}$ bằng

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $2\sqrt{2} - 2$. **D.** $7\sqrt{2} - 9$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=[1;5]$.

Đặt: $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x} \Rightarrow \sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}=\dfrac{t^2-4}{2}$.

$t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=3$.

$t(1)=t(5)=2$; $t(3)=2\sqrt{2}$.

Do đó: $x\in[1;5] \Rightarrow t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$f(t)=t-\dfrac{t^2-4}{2}$; $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=1-t<0$; $\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$

Vậy $\min\limits_D y=\min\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2$.

Câu 17. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ là?

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B.

Đặt $\cos x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\dfrac{t^2+|t|+1}{|t|+1}$, với $|t|\le 1$.

ầ ếu $t\in[0;1]$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0$ với mọi $t\in[0;1]$.

Ta có: $\underset{t\in[0;1]}{\text{Min}} f(t)=f(0)=1$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}} f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$

ầ ếu $t\in[-1;0]$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2-2t}{(-t+1)^2}<0$ với mọi $t\in[-1;0]$.

Ta có: $\underset{t\in[-1;0]}{\text{Min}} f(t)=f(0)=1$; $\underset{t\in[-1;0]}{\text{Max}} f(t)=f(-1)=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng:

$\underset{t\in[-1;1]}{\text{Min}} f(t)+\underset{t\in[-1;1]}{\text{Max}} f(t)=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$

Câu 18. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của hàm số sau $y=\dfrac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}+2}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+1}$ trên $[-1;3]$.

A. $\min y=2$;và $\max y=\dfrac{4}{5}$. **B.** $\min y=-2$;và $\max y=\dfrac{4}{5}$.

C. $\max y=2$;và $\min y=\frac{4}{5}$. **D.** $\min y=2$;và $\max y=\frac{14}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì $\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2=4\Rightarrow$ tồn tại số thực $t\in[0;1]$ sao cho $\sqrt{x+1}=\frac{4t}{1+t^2}$,

$\sqrt{3-x}=\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}$.

Khi đó: $y=\frac{2t^2-4t-6}{t^2-8t-3}=f(t)$, xét $f(t)=\frac{2t^2-4t-6}{t^2-8t-3}$ với $t\in[0;1]$

Ta có: $f'(t)=\frac{-12t^2-36}{(t^2-8t-3)^2}<0\ \ \forall t\in[0;1]$ nên $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$

Hơn nữa: $f(0)=2$, $f(1)=\frac{4}{5}$

Vậy $\max y=\max\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(0)=2$ khi $x=0$, $\min y=\min\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(1)=\frac{4}{5}$ khi $x=1$.

Câu 19. Cho hàm số $y=\left|\frac{\sin^2 x-(m+1)\sin x+2m+2}{\sin x-2}\right|$ (với m là tham số thực). Hỏi giá trị lớn nhất của y có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B.

Ta có $y=\left|\frac{\sin^2 x-\sin x+2}{\sin x-2}-m\right|=|t-m|$

trong đó $t=\frac{\sin^2 x-x+2}{\sin x-2}\sin\in[-2;-1],\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}}y=\max\limits_{[-2;-1]}|t-m|=\max\{|m+2|,|m+1|\}=\max\{|m+2|,|-m-1|\}$

$\geq\frac{|m+2|+|-m-1|}{2}\geq\frac{|(m+2)+(-m-1)|}{2}=\frac{1}{2}$

Dấu bằng đạt tại $m+2=-m-1\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$.

Câu 20. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x^2-8\sqrt{2x^2+3x+2}+6x+2019$ trên đoạn [0;2]. Tính $M+m$

A. $4026+8\sqrt{2}$. **B.** 4016. **C.** 4022. **D.** $4026-8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$y=4x^2-8\sqrt{2x^2+3x+2}+6x+2019=2(2x^2+3x+2)-8\sqrt{2x^2+3x+2}+2015$

Đặt $t=\sqrt{2x^2+3x+2}$.

Hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=2t^2-8t+2015$.

Ta có $2x^2+3x+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$.

$x\in[0;2]\Rightarrow x+\frac{3}{4}\in\left[\frac{3}{4};\frac{11}{4}\right]\Rightarrow\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\in\left[\frac{9}{16};\frac{121}{16}\right]\Rightarrow 2x^2+3x+2\in[2;16]\Rightarrow t\in\left[\sqrt{2};4\right]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=\max\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t)$ và $\min\limits_{[0;2]} y=\min\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t)$.

Ta có: $f'(t)=4t-8\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=2\in\left[\sqrt{2};4\right]$.

Do $f\left(\sqrt{2}\right)=2019-8\sqrt{2}$; $f(2)=2007$, $f(4)=2015$.

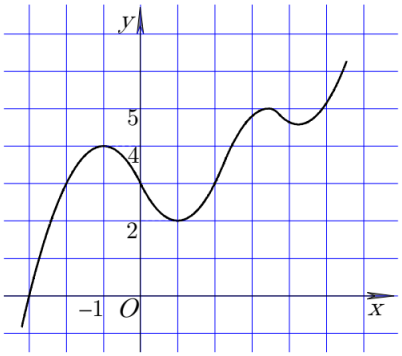
Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=\max\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t)=f(4)=2015$ và

$\min\limits_{[0;2]} y=\min\limits_{[\sqrt{2};4]} f(t)=f(2)=2007\Rightarrow M=2015; m=2007$

$\Rightarrow M+m=4022$.

D. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(2\sin x)$ trên $(0;\pi)$ là:



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(0;2]$

Dựa và đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có $\max\limits_{(0;\pi)} f(2\sin x)=\max\limits_{(0;2]} f(t)=f(2)=3$

Câu 2. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$.

A. $m=-2$ và $n=2$. **B.** $m=\dfrac{1}{3}$ và $n=-3$.

C. $m=3$ và $n=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $m=1$ và $n=-4$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow t\in[-1;1]$ Khi đó: bài toán trở thành :

Tìm GTLẩ -GTẩ ẩ của hàm số $y=f(t)=\dfrac{2t-1}{t+2}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{5}{(t+2)^2}>0,\forall t\in[-1;1]$.

Ta tính: $f(-1)=-3, f(1)=\dfrac{1}{3}$

Vậy • $\max y=\max\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{1}{3}$ • $\min y=\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(-1)=-3$.

Câu 3. Gọi M,m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{3-2\sin x}$. Khi đó ta có

A. $M+2019m=2$. **B.** $M-2019m=-2019$.

C. $2M+3m=0$. **D.** $M+m=1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sin x=t\,(|t|\le 1)$ ta có $f(t)=\dfrac{t+1}{3-2t}$ với $\forall t\in[-1;1]$.

$f'(t)=\dfrac{5}{(3-2t)^2}>0$ với $\forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[-1;1]$.

$\Rightarrow M=\underset{[-1;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f(1)=2$ và $m=\underset{[-1;1]}{\text{Min}}\, f(t)=f(-1)=0$.

Vậy $M+2019m=2$.

Câu 4. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$.

A. $m=1$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x \Rightarrow y=\dfrac{t+1}{t^2+t+1},\ t\in[-1;1]$

$\Rightarrow y'=\dfrac{-2t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow t=0\in[-1;1]$.

Ta có: $y(-1)=0, y(0)=1, y(1)=\dfrac{2}{3}$;

Vậy

$y_{\min}=\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(-1)=0$ tại $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$;

$y_{\max}=\max\limits_{[-1;1]} f(t)=f(0)=1$ tại $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$;

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^4 x-\cos^2 x+4$ bằng

A. $\dfrac{17}{4}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\cos^2 x=t$, với $t\in[0;1]$. Khi đó ta có : $y=f(t)=t^2-t+4$.

Xét trên $[0;1]$ ta có :

$y'=2t-1$.

$y'=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

$y(0)=4; y(1)=4; y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{4}$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=4=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 6. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-2}$. Khi đó ta có

A. $9M+m=0$. **B.** $9M-m=0$. **C.** $M+9m=0$. **D.** $M+m=0$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos x=t\ (|t|\le 1)$ ta có $f(t)=\dfrac{2t+1}{t-2}$, với $\forall t\in[-1;1]$.

$f'(t)=\dfrac{-5}{(t-2)^2}<0$ với $\forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[-1;1]$.

$\Rightarrow M=\underset{[-1;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f(-1)=\frac{1}{3}$ và $m=\underset{[-1;1]}{\text{Min}}\, f(t)=f(1)=-3$.

Vậy $9M+m=0$.

Câu 7. Tìm GTLớn và GTNhỏ của các hàm số $y=\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x+1}$.

A. $M=\frac{1}{2};\ m=-2$. **B.** $M=\frac{1}{2};\ m=-1$. **C.** $M=\frac{\sqrt{3}}{2};\ m=-1$. **D.** $M=\frac{1}{2};\ m=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\cos^2 x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\frac{2t-1}{t+1}$, với $0\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=\frac{3}{(t+1)^2}>0,\forall t\in[0;1]$

Ta có: $\underset{t\in[0;1]}{\text{Min}}\, f(t)=f(0)=-1$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}\, f(t)=f(1)=\frac{1}{2}$

Suy ra $M=\frac{1}{2};\ m=-1$.

Câu 8. Tìm GTLớn và GTNhỏ của các hàm số $y=\frac{2\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

A. $m=2$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=-10$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt{x^2+1}=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\frac{2t-1}{t+1}$, với $t\ge 1$.

Ta có $f'(t)=\frac{3}{(t+1)^2}>0,\forall t\ge 1$

Ta có: $\underset{t\in(0;+\infty)}{\text{Min}}\, f(t)=f(1)=\frac{1}{2}$.

Suy ra $m=\frac{1}{2}$.

Câu 9. Tính tổng GTLớn và GTNhỏ của các hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[6]{\left(1-x^2\right)^2}$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=t^3+t^2$, với $0\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2t$ suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Ta có: $f(0)=0; f(1)=2.$

Suy ra GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$ là $2;\ 0$

Câu 10. Tìm GTLẩ của các hàm số. $y=\cos 2x+2\sin x-3$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** -6. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\cos 2x+2\sin x-3=\left(1-2\sin^2 x\right)+2\sin x-3=-2\sin^2 x+2\sin x-2$ có miền xác định $D=R$.

Đặt $t=\sin x$ với $t\in[-1;1]$; thì $y=-2t^2+2t-2=f(t)$;

Ta có $f'(t)=-4t+2\Rightarrow\begin{cases}f'(t)=0\\t\in(-1;1)\end{cases}$; $\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$;

Ta có: $f(1)=-2;\ f(-1)=-6$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$;

Kết luận : $y_{\max}=\max\limits_{[-1;1]}f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$; $y_{\min}=\min\limits_{[-1;1]}f(t)=f(-1)=-6$;

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\cos 2x+2\sin x$.

A. $M=\frac{9}{4}, m=-4$. **B.** $M=4, m=0$. **C.** $M=0, m=-\frac{9}{4}$. **D.** $M=4, m=-\frac{9}{4}$.

Lời giải:

Chọn A.

Ta có $y=2\cos 2x+2\sin x=2\left(1-2\sin^2 x\right)+2\sin x=-4\sin^2 x+2\sin x+2$.

Đặt $t=\sin x,\ t\in[-1;1]\Rightarrow y=-4t^2+2t+2$.

Ta có: $y'=-8t+2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

Bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{1}{4}$		1
y		$+$	0	$-$	
y'	-4	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có: $M=\frac{9}{4}$, $m=-4$.

Câu 12. Tìm GTLẩ của các hàm số $f(x)=-\cos^3 x-\sin^2 x+\cos x-3$.

A. $m=3$. **B.** $m=-\frac{113}{27}$. **C.** $m=\frac{113}{27}$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=-\cos^3 x-\sin^2 x+\cos x-3=-\cos^3 x+\cos^2 x+\cos x-4$.

Đặt $t=\cos x$, điều kiện $t\in[-1;1]$.

Xét hàm số $g(t)=-t^3+t^2+t-4$.

Bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của hàm số $g(t)=-t^3+t^2+t-4$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $g'(t)=-3t^2+2t+1$.

$$g'(t)=0\Leftrightarrow -3t^2+2t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\notin(-1;1)\\ t=-\frac{1}{3}\in(-1;1)\end{array}\right.$$

Tính $g(-1)=-3$; $g\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{113}{27}$; $g(1)=-3$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]}g(t)=-3$ khi $t=\pm 1$.

$\min\limits_{[-1;1]}g(t)=-\frac{113}{27}$ khi $t=-\frac{1}{3}$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất hàm số $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. 1. **B.** $\frac{23}{27}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2=\sin^3 x-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sin x+2=\sin^3 x+2\sin^2 x+\sin x+1$

Đặt $t=\sin x$; $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(-1;1)$.

Hàm số đã cho trở thành: $y=t^3+2t^2+t+1$.

Ta có: $y' = 3t^2 + 4t + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		$+$		
y		↗		↘	$\frac{23}{27}$	↗			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1;1)$ là $\frac{23}{27}$.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{1}{27}$. **C.** 1. **D.** $\frac{23}{27}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$

$= \sin^3 x - (1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 2$

$= \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1$

Đặt $t = \sin x;\ t \in [-1;1]$. Đưa về bài toán tìm trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + t + 1$ trên $[-1;1]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \in [-1;1] \\ t = \frac{-1}{3} \in [-1;1] \end{array}\right.$.

Mà $f(-1) = 1; f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{23}{27}; f(1) = 5$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{23}{27}$.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \cos^4 x + \sqrt{3}\sin^2 x + 2$

A. $M = 2 + \sqrt{3}$. **B.** $M = 3$. **C.** $M = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$. **D.** $M = 3 + \sqrt{3}$.

Lời giải:

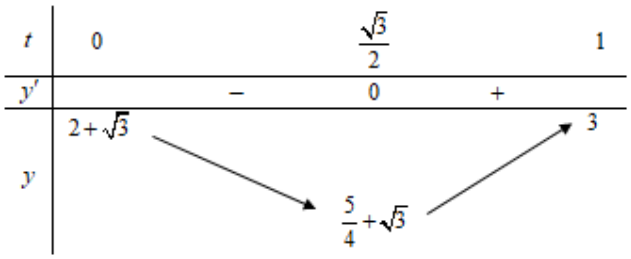
Chọn D.

Đặt $t = \cos^2 x;\ t \in [0;1]$

Khi đó, ta có $y = t^2 + \sqrt{3}(1 - t) + 2$ với $t \in [0;1]$

$\Rightarrow y' = 2t - \sqrt{3}$

Bảng biến thiên



Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $M=2+\sqrt{3}$ khi $t=\cos^2 x=0$ hay $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 16. Tìm GTLả và GTả ả của các hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

A. $2\frac{3}{4};3$. **B.** $2\frac{1}{4};3$. **C.** $\frac{11}{4};3\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{13}{4};3$.

Lời giải

Chọn A.

$y=\sin^4 x+\cos^2 x+2=\sin^4 x-\sin^2 x+3$. Đặt $t=\sin^2 x, 0\le t\le 1$

Xét hàm số $f(t)=t^2-t+3$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

$\min y=\min\limits_{t\in[0;1]} f(t)=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$

$\max y=\max\limits_{t\in[0;1]} f(t)=3$

Câu 17. Tìm nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

A. $\min y=3$. **B.** $\min y=\frac{11}{4}$. **C.** $\min y=-3$. **D.** $\min y=\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2=\sin^4 x-\sin^2 x+3$.

Đặt $t=\sin^2 x$, $t\in[0;1]$.

$y=f(t)=t^2-t+3$, $t\in[0;1]$.

$f'(t)=2t-1$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in[0;1]$.

$f(0)=f(1)=3$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}$.

Vậy $\min y=\frac{11}{4}$.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^4 x+\sqrt{2}\sin^2 x+2$ bằng

A. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $3+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(t)=t^2-\sqrt{2}t+2+\sqrt{2}$, với $t=\cos^2 x$; $t\in[0;1]$.

$f'(t)=2t-\sqrt{2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $f(0)=2+\sqrt{2}$; $f(1)=3$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\max\limits_{\mathbb{R}} f(t)=f(0)=2+\sqrt{2}$.

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

A. $\min y=3$. **B.** $\min y=\frac{11}{4}$. **C.** $\min y=-3$. **D.** $\min y=\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2=\sin^4 x-\sin^2 x+3$.

Đặt $t=\sin^2 x$, $t\in[0;1]$.

$y=f(t)=t^2-t+3$, $t\in[0;1]$.

$f'(t)=2t-1$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in[0;1]$.

$f(0)=f(1)=3$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}$.

Vậy $\min y=\frac{11}{4}$.

Câu 20. Tìm GTLả và GTả ả của các hàm số $y=2\cos^6 x-\frac{3}{4}\cos 2x$.

A. 4 và $\frac{1}{4}$. **B.** 4 và $\frac{1}{2}$. **C.** 2 và $\frac{1}{2}$. **D.** 2 và $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

. $y=2\cos^6 x-\frac{3}{4}\left(2\cos^2 x-1\right)$.

Đặt $t=\cos^2 x, 0\le t\le 1$

Khi đó $y=g(t)=2t^6-\frac{3}{4}\left(2t^2-1\right)$ với mọi $t\in[0;1]$

Bài toán trở thành: tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $g'(t)=6t^2-\frac{3}{2}$ với mọi $t\in(0;1)$.

Ta tìm nghiệm của phương trình $g'(t)$ trên khoảng $(0;1)$ và $g'(t)=0, t\in(0;1)\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

$\max y=\frac{5}{4}$ khi $x=\pi$ và $\min y=\frac{1}{4}$ khi $x=\frac{\pi}{4}$.

Câu 21. Tìm GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\frac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}$.

A. $\frac{3}{2};\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{3}{2};\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2};-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\frac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}=\frac{3\cos^4 x+4\left(1-\cos^2 x\right)}{3\left(1-\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x}=\frac{3\cos^4 x-4\cos^2 x+4}{3\cos^4 x-4\cos^2 x+3}$.

Đặt $t=3\cos^4 x-4\cos^2 x+3$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\frac{t+1}{t}=1+\frac{1}{t}$, với $2\le t\le 3$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0, \forall t\in(2;3)$.

Ta có: $f(2)=\frac{3}{2}; f(3)=\frac{4}{3}$.

Suy ra GTLẩ và GTẩ ẩ của các hàm số $y=\frac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}$ là $\frac{3}{2};\frac{4}{3}$.

Câu 22. Tìm GTLẩ của các hàm số $y=2(1+\sin 2x\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$.

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$y=2(1+\sin 2x\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$

$=2+2\sin 2x\left(1-2\sin^2 2x\right)+\sin 6x.\sin 2x$

$=2+2\sin 2x-4\sin^3 2x+\left(3\sin 2x-4\sin^3 2x\right).\sin 2x.$

$=2+2\sin 2x-4\sin^3 2x+3\sin^2 2x-4\sin^4 2x.$

Đặt $t=\sin 2x$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=2+2t-4t^3+3t^2-4t^4$, với $-1\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=2-12t^2+6t-16t^3$ suy ra $f'(t)=0 f'(t)=2-12t^2+6t-16t^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$.

Ta có: $f(-1)=3; f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{111}{64}; f\left(\frac{1}{2}\right)=3, f(1)=-1.$

Suy ra GTLả và GTả ả của các hàm số $y=2(1+\sin 2x\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$ là 3; -1.

Câu 23. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$ với $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $M+\sqrt{3}m$ bằng

A. $1+2\sqrt{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x+\cos x \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\le t\le \sqrt{2} \\ t^2=1+\sin 2x \end{cases}$.

Khi đó: $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t)=\frac{1-t}{\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $f(1)=\sqrt{2}$.

Suy ra $M=f(1)=\sqrt{2}$; $m=f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $M+\sqrt{3}m=1$.

Câu 24. Tìm GTLả của các hàm số $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}+\cos\frac{4x}{1+x^2}+1$.

A. $\frac{17}{8}$. **B.** $-\frac{17}{8}$. **C.** $\frac{7}{8}$. **D.** $-\frac{7}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\dfrac{2x}{1+x^2}\Rightarrow |t|\le 1\Rightarrow y=\sin t+\cos 2t+1=-2\sin^2 t+\sin t+2$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow -\sin 1\le u\le \sin 1\Rightarrow y=-2u^2+u+2$

Ta có $y'=-4u+1\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow u=\dfrac{1}{4}$. $\min y=-2\sin^2 1-\sin 1+2;\ \max y=\dfrac{17}{8}$.

Câu 25. Tìm GTẩ ẩ của các hàm số $y=x^3+\dfrac{1}{x^3}-x^2-\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}$.

A. 14. **B.** 13. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^3+\dfrac{1}{x^3}-x^2-\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=t^3-t^2+4t+2$, với $t\ge 2$.

Ta có $f'(t)=3t^2-2t+4>0,\forall t$.

Suy ra $\underset{t\in[[2;+\infty)]}{\text{Min}} f(t)=f(2)=14$.

Câu 26. Tìm GTẩ ẩ của hàm số $y=x^3+\dfrac{1}{x^3}-x^2-\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}+2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 12. **D.** 21

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^3+\dfrac{1}{x^3}-x^2-\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=t^3-t^2+4t+2$, với $t\ge 2$.

Ta có $f'(t)=3t^2-2t+4>0,\forall t$.

Suy ra $\underset{t\in[[2;+\infty)]}{\text{Min}} f(t)=f(2)=12$.

Câu 27. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(5;6)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=4\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x \Leftrightarrow y=4\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}$ (1)

Đặt $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=t$, $(t>0)$ ta có hàm số trở thành $y=4t+\dfrac{1}{t}$ (2).

$y'=4-\dfrac{1}{t^2}; y'=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ (vì $t>0$)

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$	
y		$+\infty$		$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn B

Câu 28. Cho hàm số $y=\cos^2 2x+2\left(\sin x+\cos x\right)^3-3\sin 2x+m$ (với m là tham số thực) thoả mãn $\max\limits_R y=8$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m>7$. **B.** $3<m<4$. **C.** $0<m<3$. **D.** $4<m<7$.

Lời giải:

Chọn B.

Đặt $t=\sin x+\cos x$,Khi đó ta có $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, $\sin 2x=t^2-1$ và $\cos^2 2x=1-\left(t^2-1\right)^2=2t^2-t^4$.

Ta viết lại hàm số như sau

$y=f\left(t\right)=2t^2-t^4+2t^3-3\left(t^2-1\right)+m=-t^4+2t^3-t^2+m+3$ với $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$f'\left(t\right)=-4t^3+6t^2-2t$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Ta có $f\left(0\right)=m+3$, $f\left(1\right)=m+3$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=m+\dfrac{47}{16}$

, $f\left(\sqrt{2}\right)=m+4\sqrt{2}-3$, $f\left(-\sqrt{2}\right)=m-4\sqrt{2}-3$

Vậy $\max y=\max\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f\left(t\right)=m+3\Leftrightarrow m+3=8\Leftrightarrow m=5$

Câu 29. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|1+2\cos x\right|+\left|1+2\sin x\right|$ là

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** 1. **D.** $2-\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn B.

Ta có: $P^2=6+4\left(\sin x+\cos x\right)+2\left|1+2\left(\sin x+\cos x\right)+4\sin x\cos x\right|$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ với $|t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

$$P^2 = f(t) = 6 + 4t + 2\left|2t^2 + 2t - 1\right| = \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4 & \text{khi } t \le \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; t \ge \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -4t^2 + 8 & \text{khi } \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \begin{cases} 8t + 8 & \text{khi } t < \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; t > \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -8t & \text{khi } \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		-		+	0	+	0	-		+	
$f(t)$	$12-8\sqrt{2}$	↘		↗		↗	8	↘		↗	$12+8\sqrt{2}$
			$4-2\sqrt{3}$						$4+2\sqrt{3}$		

$$\Rightarrow \underset{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}{Min}\, f(t) = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2.$$

$$\Rightarrow \min P = \sqrt{3} - 1.$$

Câu 30. Tìm GTLả và GTả ả của các hàm số $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$.

A. $m = -4,\ n = 3$. **B.** $m = 4,\ n = 3$. **C.** $m = -4,\ n = 4$. **D.** $m = 4,\ n = -4$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

ả ên $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|} = \dfrac{\left|\sin x \cos x\right|\left(\left|\sin x\right|^5 + \left|\cos x\right|^5\right)}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$

$$y = \left|\sin x \cos x\right|\left(1 - \left|\sin x \cos x\right| - \sin^2 x \cos^2 x\right)$$

$$y = \frac{-1}{8}\left|\sin^3 x\right| - \frac{1}{4}\left|\sin 2x\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\sin 2x\right|. \quad \text{Đặt } t = \left|\sin 2x\right|; 0 \le t \le 1$$

Xét hàm số : $f(t) = \dfrac{-1}{8}t^3 - \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin x + m^2}{\sin x - 2}$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là -1.

A. $(-1;0)$. **B.** $(-4;3)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x,\left(t\in[-1;1]\right)$ hàm số trở thành

$$y=\frac{t+m^2}{t-2}\Rightarrow y'=\frac{-2-m^2}{(t-2)^2}<0,\ \forall t\in[-1;1]$$

Kho đó do hàm số luông nghịch biến nên giá trị lớn nhất là $y(-1)=\frac{-1+m^2}{-3}$.

Theo giả thuyết $\frac{-1+m^2}{-3}=-1\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 32. Cho ΔABC không tù. Tìm GTLẩ của biểu thức : $P=\cos 2A+2\sqrt{2}(\cos B+\cos C)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A\le 90^0\Rightarrow \cos 2A=2\cos^2 A-1\le 2\cos A-1=1-4\sin^2\frac{A}{2}$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \cos^2 A=\cos A$.

$$\cos B+\cos C=2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}\le 2\sin\frac{C}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}=1$. Đặt $t=\sin\frac{A}{2}\Rightarrow 0<t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $P\le -4t^2+4\sqrt{2}t+1=f(t)$

Xét hàm số $f(t),\ t\in\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, có $f'(t)=-8t+4\sqrt{2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có: $f(t)\le f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\Rightarrow P\le 3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos A=\cos^2 A\\ \cos\frac{B-C}{2}=1\\ \sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=90^0\\ B=C=45^0\end{cases}$.

Vậy $\max P=3$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\left|8\cos^4 x+a\cos^2 x+b\right|$, trong đó a, b là các tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a+b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a+b=-7$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=-8$.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x)=\left|8\cos^4 x+a\cos^2 x+b\right|$.

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow t\in[0;1]\Rightarrow f(t)=\left|8t^2+at+b\right|$ và $M=\max f(t)$.

Khi đó:

$$\begin{cases} M\ge f(0)=|b| \\ M\ge f(1)=|8+a+b| \\ M\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|2+\frac{a}{2}+b\right| \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} M\ge|b| \\ M\ge|8+a+b| \\ 2M\ge|4+a+2b| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4M\ge|b|+|8+a+b|+|4+a+2b|\ge 4$$

$$\Rightarrow M\ge 1.$$

Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow |b|=|8+a+b|=\frac{|4+a+2b|}{2}=1$$ và các số b; $8+a+b$; $-4-a-2b$ cùng dấu.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=-8 \\ b=1 \end{cases}.$$

Vậy $P=a+b=-7$.

Câu 34. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(2x+4)\sqrt{4-x^2}+x^2(4-x^2)+4x+2007$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2019;2024)$. **B.** $(2024;2028)$. **C.** $(2028;2032)$. **D.** $(2015;2019)$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=[-2;2]$.

Ta có $f(x)=x^2(4-x^2)+2x\sqrt{4-x^2}+4\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)+2007$.

Đặt $t=x+\sqrt{4-x^2}$.

Khi đó: $t'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $t'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Ta có $t(-2)=-2$, $t\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$, $t(2)=2$. Do đó $t\in\left[-2;2\sqrt{2}\right]$.

Mặt khác, $t^2=4+2x\sqrt{4-x^2}\Rightarrow x\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$ và $x^2\left(4-x^2\right)=\left(\dfrac{t^2-4}{2}\right)^2$.

Bài toán chuyển thành:

" Tìm GTLẩ của hàm số $g(t)=\left(\dfrac{t^2-4}{2}\right)^2+t^2-4+4t+2007$ trên đoạn $\left[-2;2\sqrt{2}\right]$."

Ta có $g'(t)=2\left(\dfrac{t^2-4}{2}\right).t+2t+4=t^3-2t+4$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t^3-2t+4=0\Leftrightarrow t=-2$.

Mặt khác, $g(-2)=1999$ và $g\left(2\sqrt{2}\right)=2015+8\sqrt{2}$.

Do đó, giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng $\left(2015+8\sqrt{2}\right)\in(2024;2028)$ đạt tại $x=\sqrt{2}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $\left|f(1+\sin x)+m\right|$ bằng 5.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=1+\sin x$. Suy ra $t\in[0;2]$. Ta có:

$\left|f(1+\sin x)+m\right|=\left|f(t)+m\right|=\left|t^2-2t+m\right|$.

Đặt $u=t^2-2t$. Với $t\in[0;2]$ thì $u\in[-1;0]$. Khi đó $\left|t^2-2t+m\right|=\left|u+m\right|$.

Suy ra, $\max\limits_{\mathbb{R}}\left|f(1+\sin x)+m\right|=\max\limits_{[0;2]}\left|f(t)+m\right|=\max\limits_{[0;2]}\left|t^2-2t+m\right|=\max\limits_{[-1;0]}\left|u+m\right|$

$=\max\limits_{[-1;0]}\{|-1+m|;|m|\}$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}}\left|f(1+\sin x)+m\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|-1+m|=5\\|m|=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-4\\m=5\\m=-5\end{array}\right.$.