LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy cô và bạn đọc thân mến !

Kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2020 đã cận kề. Thời gian này, chắc hẳn các em học sinh đang gấp rút ôn tập và luyện đề để chuẩn bị kiến thức cho kỳ thi vô cùng quan trong sắp tới. Thấu hiểu được điều này, nhóm tác giả đã cùng nhau sưu tầm và biên soạn cuốn sách **" Chuyên đề hình tọa độ trong không gian Oxyz "** nhằm trang bị cho các em kiến thức trọng tâm và kĩ năng cần thiết để giải các bài toán khó trong chuyên đề này.

Như các em đã biết, Hình học Oxyz là một chuyên đề hay và khó nằm trong chương trình thi THPT Quốc Gia với mức độ câu hỏi trong đề thi thường là **VD** và **VDC.** Cuốn sách này ra đời với sứ mệnh bổ sung và bồi dưỡng những kiến thức cần thiết, giúp các em học sinh có thể dễ dàng giải quyết được các câu khó thường gặp trong đề thi.

Kho bài tập được nhóm tác giả sưu tầm và biên soạn khá phong phú và đa dạng, với những dạng toán hay và khó, đòi hỏi học sinh phải vận động khả năng tư duy của bản thân để xử lý những câu 8^+, giúp học sinh đạt điểm cao trong kì thi sắp tới.

Những câu hỏi trong cuốn sách được nhóm tác giả sưu tầm, tham khảo và phát triển từ các đề thi thử của các Sở, trường Chuyên trên cả nước. Mặc dù đã được phê duyệt và phản biện chặt chẽ nhưng không tránh khỏi sai xót. Kính mong quý thầy cô, các em học sinh và bạn đọc thông cảm và gửi góp ý vào địa chỉ sau đây

- **Gmail: Blearningtuduytoanhoc4.0@gmail.com**
- **Fanpage: 2002 – ÔN THI THPT QUỐC GIA**

Cuối cùng, nhóm tác giả xin gửi lời chúc sức khỏe đến quý thầy cô, các em học sinh và toàn thể các bạn đọc. Chúc quý vị có thể khai thác được hết các kiến thức khi cầm trên tay cuốn sách này!

Trân trọng./

NHÓM TÁC GIẢ

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN Trang

Dạng 1. Điểm và vecto trong hệ tọa độ Oxyz..... 5

Dạng 2. Tích vô hướng và ứng dụng..... 28

Dạng 3. Phương trình mặt cầu..... 39

Dạng 4. Cực trị..... 54

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG..... 79

Dạng 1. Xác định vecto pháp tuyến, tính tích có hướng của mặt phẳng..... 84

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng..... 91

Dạng 3. Tìm tọa độ điểm liên quan đến mặt phẳng..... 114

Dạng 4. Góc và khoảng cách liên quan đến mặt phẳng..... 123

Dạng 5. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa mặt cầu và mặt phẳng..... 140

Dạng 6. Cực trị liên quan đến mặt phẳng..... 165

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG..... 185

Dạng 1. Xác định vecto chỉ phương của đường thẳng..... 191

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng..... 200

Dạng 3. Tìm tọa độ điểm liên quan đến đường thẳng..... 231

Dạng 4. Góc và khoảng cách liên quan đến đường thẳng..... 247

Dạng 5. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng..... 257

Dạng 6. Bài toán liên quan giữa đường thẳng – mặt phẳng – mặt cầu..... 271

Dạng 7. Cực trị liên quan đến đường thẳng..... 314

CHỦ ĐỀ 4: ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ..... 347

Dạng 1. Tọa độ hóa Hình học không gian..... 353

Dạng 2. Bài toán đại số..... 367

CHỦ ĐỀ 5: TỔNG HỢP VỀ HÌNH TỌA ĐỘ OXYZ..... 372

Đề bài..... 372

Đáp án..... 381

CHỦ ĐỀ 1 : HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ

LÍ THUYẾT

- Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng Oxy tại O. Các vectơ đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.
  - Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.
  - $M(x_M;y_M;z_M)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$
  - Cho $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$
  - Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
  - M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có
  - $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$ $\qquad \vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$ $\qquad k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
  - $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\qquad |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
  - $\cos\varphi=\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)
  - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$
  - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$
- Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$
  - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ $\qquad \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
  - Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$
  - Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$
  - Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- Một số kiến thức khác
  - Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

    $x_M=\frac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\frac{y_A-ky_B}{1-k};z_M=\frac{z_A-kz_B}{1-k}$ Với $(k\neq 1)$
  - G là trọng tâm của tam giác ABC

    $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$
  - G là trọng tâm của tứ diện $ABCD\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ bằng $45°$.

A. $m=2$. **B.** $m=2-\sqrt{6}$. **C.** $m=2+\sqrt{6}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{1-2m}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2}}=\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 1-2m=\sqrt{3}\sqrt{1-m^2}$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=3+3m^2$ (điều kiện $m<\dfrac{1}{2}$).

$\Leftrightarrow m^2-4m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2-\sqrt{6} \\ m=2+\sqrt{6} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta có $m=2-\sqrt{6}$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=(0;-\sqrt{2};\sqrt{2})$. Tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau là

A. $\dfrac{\pm 26+\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{26\pm\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{11\sqrt{2}\pm\sqrt{26}}{18}$. **D.** $\dfrac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}=(2;2-3m\sqrt{2};-4+3m\sqrt{2})$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}=(2m;m+\sqrt{2};-2m-\sqrt{2})$.

Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow 4m+(2-3m\sqrt{2})(m+\sqrt{2})+(-4+3m\sqrt{2})(-2m-\sqrt{2})=0$.

$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2}-6m-6\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$.

VÍ DỤ 3: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

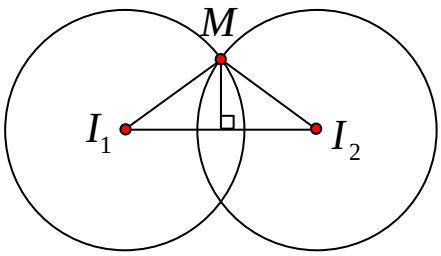
Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{AM}=(x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x-2;y+3;z)$, $\overrightarrow{CM}=(x+2;y-1;z-1)$, $\overrightarrow{DM}=(x;y+1;z-3)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1\\ \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)+(y+1)(y+3)+z(z-2)=1\\ x(x+2)+(y+1)(y-1)+(z-1)(z-3)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0\end{cases}$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2=2$.



Ta có: $I_1I_2=\sqrt{5}$. Dễ thấy: $r=\sqrt{R_1^2-\left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=2$. **B.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{AM}{BM}=3$.

Lời giải

Chọn B

$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x\,;0\,;z)$; $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(7\,;3\,;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}\\ \overrightarrow{AM}=(x+2\,;-3\,;z-1)\end{cases}$.

A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\ \ (k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\ -3=3k\\ z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\ -1=k\\ z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9\,;0\,;0)$.

$\overrightarrow{BM}=(-14\,;-6\,;-2)\Rightarrow BM=\sqrt{118}=2.AB$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0;1;-2)$. **B.** $M(0;1;4)$. **C.** $M(0;1;-4)$. **D.** $M(2;1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;7;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4\neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4MG$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

VÍ DỤ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM=\sqrt{26}$. **C.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{DA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{DC}=(0;0;3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D.

Giả sử $M(x+1;y+2;z+3)$.

Ta có $MA=\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}\geq|x-6|\geq 6-x$, $MB=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\geq|y-2|\geq 2-y$.

$MC=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\geq|z-3|\geq 3-z$, $\sqrt{3}MD=\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq\sqrt{(x+y+z)^2}\geq x+y+z$.

Do đó $P\geq(6-x)+(2-y)+(3-z)+(x+y+z)=11$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11, khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z=0\\6-x\geq 0\\2-y\geq 0\\3-z\geq 0\\x+y+z\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0$.

Khi đó $M(1;2;3)$ suy ra $OM=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

VÍ DỤ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(5;-1;3)$, $C(2;2;m)$, $D(3;1;5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

A. $m>6$. **B.** $m<6$. **C.** $m\neq 6$. **D.** $m=6$.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;1)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-2;-6;4)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;m-4)$

Để A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện khi $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AC}\neq 0$

$\Leftrightarrow -2-6+4m-16\neq 0\Leftrightarrow m\neq 6$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1. ĐIỂM VÀ VECTO TRONG HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Câu 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A\ -1;2;-3$, $B\ 1;0;2$, $C\ x;y;-2$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

Câu 2. Tìm tọa độ véctơ $\vec{u}$ biết rằng $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}$ và $\vec{a}=(1;-2;1)$.

A. $\vec{u}=(-3;-8;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;-2;8)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(6;-4;-6)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;2)$, $B(2;1;-3)$ và $C(1;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(0;2;-1)$. **B.** $D(-2;-2;5)$. **C.** $D(-2;2;5)$. **D.** $D(2;2;-5)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxz).

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;0;1)$. **D.** $(0;1;0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-3;1;2)$, tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

A. $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(3;1;-2)$. **D.** $(-3;-1;2)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1);B(2;-1;3);C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;8;-5)$ **B.** $D(-4;8;-3)$. **C.** $D(-2;8;-3)$. **D.** $D(-2;2;5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$ và điểm $M(1;2;-3)$. Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d. Độ dài đoạn thẳng OM_1 bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;1)$ và $B(4;5;2)$. Điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ có tọa độ là

A. $(-6;-1;-1)$. **B.** $(-2;-9;-3)$. **C.** $(6;1;1)$. **D.** $(2;9;3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ toạn độ $Oxyz$, cho $A(1;1;2),B(2;-1;1),C(3;2;-3)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(4;2;-4)$. **B.** $(0;-2;6)$. **C.** $(2;4;-2)$. **D.** $(4;0;-4)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là

A. $M\left(\frac{7}{3};\frac{-5}{3};\frac{8}{3}\right)$. **B.** $M(4;5;-9)$. **C.** $M\left(\frac{3}{2};-5;\frac{17}{2}\right)$. **D.** $M(1;-7;12)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ điểm $M(1;3;2)$ đến ba mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz). Tính $P = a + b^2 + c^3$?

A. $P = 32$. **B.** $P = 18$. **C.** $P = 30$. **D.** $P = 12$.

Câu 12. Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

A. $9a^2\pi$. **B.** $\frac{27\pi a^2}{2}$. **C.** $\frac{9\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{13\pi a^2}{6}$.

Câu 13. Trong không gian $(oxyz)$ cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và điểm $C(2;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-2;2;-1)$. **C.** $(2;-2;1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD = 2AB$ và diện tích bằng 27, đỉnh $A(-1;-1;0)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ điểm D biết $x_B > x_A$.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và điểm $C(2;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-2;2;-1)$. **C.** $(2;-2;1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ $C(2;0;-1)$ và điểm $D(a;b;c)$ sao cho B là trọng tâm tam giác ACD. Khi đó $P = a + b + c$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(-3;4;-1)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;5;6)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, véctơ $\vec{u}$ vuông góc với hai véctơ $\vec{a} = (1;1;1)$ và $\vec{b} = (1;-1;3)$; đồng thời $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc tù và độ dài véctơ $\vec{u}$ bằng 3. Tìm véctơ $\vec{u}$.

A. $\left(\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **B.** $\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Câu 20. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;-1;1), N(2;0;-1), P(-1;2;1)$. Xét điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành. Tọa độ Q là

A. $(-2;1;3)$ **B.** $(-2;1;3)$ **C.** $(-2;1;-3)$ **D.** $(4;1;3)$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$ và $C(9;2;y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x+y$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;4), B(8;-5;6)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

A. $N(3;-1;5)$. **B.** $M(0;-1;5)$. **C.** $Q(0;0;5)$. **D.** $P(3;0;0)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-5;4)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa độ (xOz) bằng 5.

B. Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{29}$.

C. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M'(2;5;-4)$.

D. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M'(-2;-5;-4)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;1;2)$, $B(0;1;-1)$, $C(x+2;y;-2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{8}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 25. Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi các điểm A,B,C lần lượt ở trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó hoành độ điểm A là:

A. -3. **B.** -5. **C.** 3. **D. 5**

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết $|\vec{u}|=2$; $|\vec{v}|=1$ và góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tìm k để vectơ $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$.

A. $k=\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{5}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=-\frac{2}{5}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(-2;1;3)$, $C(2;3;5)$, $B'(2;4;-1), D'(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm B.

A. $B(1;-3;3)$. **B.** $B(-1;3;3)$. **C.** $C(1;3;-3)$. **D.** $B(1;3;3)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;2;0)$, $B(3;1;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(1;2;2)$. Trong đó có ba điểm thẳng hàng là

A. A, C, D. **B.** A, B, D. **C.** B, C, D. **D.** A, B, C.

Câu 29. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;0;0)$. Gọi (H) là tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (H) là một đường tròn có bán kính bằng 4.

B. (H) là một mặt cầu có bán kính bằng 4.

C. (H) là một đường tròn có bán kính bằng 2.

D. (H) là một mặt cầu có bán kính bằng 2.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vecto $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vecto $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-3)$, $B(3;-1;1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác OAB,véc tơ $\overrightarrow{OG}$ có độ dài bằng:

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD=2AB$ và diện tích bằng 27, đỉnh $A(-1;-1;0)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ điểm A.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;3;2)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc trục Oz sao cho E cách đều hai điểm A,B.

A. $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2)$, $B(3;1;4)$, $C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm S, biết SA vuông góc với (ABC), mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và S có cao độ âm.

A. $S(4;6;-4)$. **B.** $S(4;-6;-4)$. **C.** $S(-4;6;-4)$. **D.** $S(-4;-6;-4)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có các đáy lần lượt là AB,CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a;b;c\in\mathbb{R}$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-1$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;5)$, $B(3;4;1)$, $C(2;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm thay đổi trên $mp(Oxz)$. Độ dài GM ngắn nhất bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$, $B(4;3;2)$, $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(x_0;y_0;z_0)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$. Biết vectơ $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $|\vec{b}|=\sqrt{21}$. Giá trị của tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -3. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (α) và $\vec{u}=(1;a;b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3};-1;1)$, hai đỉnh B,C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết véctơ $\vec{u}=(a;b;2)$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=5$. **B.** $T=16$. **C.** $T=4$. **D.** $T=9$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;2;-2)$, $C\left(\frac{11}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc nửa khoảng

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right]$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;-2)$, $C\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Độ dài đường phân giác trong đỉnh A của tam giác ABC là

A. $\frac{12\sqrt{2}}{7}$. **B.** $\frac{12\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{13\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{13\sqrt{3}}{7}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2)\in(P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 47. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;6;0)$ và M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Tập hợp các điểm M trên mặt cầu (S) thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$ có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48. Trong không gian Oxyz, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;-2;0)$. **B.** $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;-3;0)$. **D.** $M(0;-4;0)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó biểu thức $a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(0;4\sqrt{2};0\right)$, $B\left(0;0;4\sqrt{2}\right)$, điểm $C\in(Oxy)$ và tam giác OAC vuông tại C, hình chiếu vuông góc của O trên BC là điểm H. Khi đó điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn A**

Có $\overrightarrow{AB}=\left(2;-2;5\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(x+1;y-2;1\right)$.

$A,\ B,\ C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$

Câu 2. **Chọn C**

Ta có $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{u}=-\vec{a}=\left(-1;2;-1\right).$

Câu 3. **Chọn B**

Gọi $D\left(a;b;c\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left(3;1;-5\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(2;-1;-2\right)$

Vì $\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{1}{-1}$ nên $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ tồn tại hình bình hành $ABCD$.

Suy ra $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} 3=1-a \\ 1=-1-b \\ -5=-c \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$. Vậy $D\left(-2;-2;5\right)$.

Câu 4. **Chọn C**

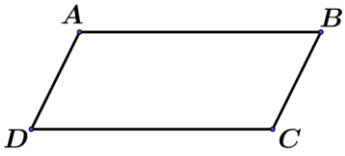
Vì $A\left(1;1;1\right)$ nên tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ là $\left(1;0;1\right)$.

Câu 5. **Chọn C**

Gọi $A\left(x;y;z\right)$, $A'\left(x';y';z'\right)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục Oy.

Điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy nên $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases}$. Do đó $A'=\left(3;1;-2\right)$.

Câu 6. **Chọn B**



Ta có $\overrightarrow{AB}\left(1;-3;4\right)$; $\overrightarrow{AC}\left(-4;3;2\right)$ nên $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay A,B,C không thẳng hàng. Gọi $D\left(x;y;z\right)\Rightarrow \overrightarrow{DC}\left(-3-x;5-y;1-z\right)$.

Lúc đó, $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} 1=-3-x \\ -3=5-y \\ 4=1-z \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=8 \\ z=-3 \end{cases}$.

Vậy $D\left(-4;8;-3\right)$.

Câu 7. **Chọn B**

Cách 1: Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Một vtcp của d là $\vec{u}=(2;1;2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và vuông góc với đường thẳng d. Khi đó (α) có vtpt là $\vec{n}=\vec{u}=(2;1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (α): $2(x-1)+1(y-2)+2(z+3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z+2=0$.

M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d nên M_1 là giao điểm của d và (α).

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x=3+2t \quad (1) \\ y=-1+t \quad (2) \\ z=1+2t \quad (3) \\ 2x+y+2z+2=0 (4) \end{cases}$

Thay $(1),(2),(3)$ vào (4) ta được: $2(3+2t)-1+t+2(1+2t)+2=0 \Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M_1(1;-2;-1)$.
$z=-1$

Độ dài đoạn thẳng OM_1 là: $OM_1=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

Cách 2: Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Một vtcp của d là $\vec{u}=(2;1;2)$.

$M_1 \in d \Rightarrow M_1(3+2t;-1+t;1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MM_1}=(2+2t;-3+t;4+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{MM_1} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 4+4t-3+t+8+4t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $M_1(1;-2;-1)$

Độ dài đoạn thẳng OM_1 là: $OM_1=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

Câu 8. Chọn A

Gọi $C(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{OC}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{BA}=(-6;-1;-1)$.

Khi đó $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$. Vậy $C(-6;-1;-1)$.

Câu 9. Chọn C

Gọi tọa độ điểm $D(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AD}=(x-1;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{BC}=(1;3;-4)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=3 \\ z-2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$. Vậy $D(2;4;-2)$.

Câu 10. ChọnA

Gọi $M(x;y;z)$.

Vì điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB \Rightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2(2-x) \\ y-1=2(-3-y) \\ z+2=2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \\ z=\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$. Vậy $M\left(\frac{7}{3};\frac{-5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

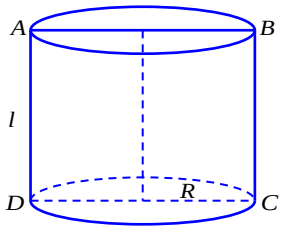
Câu 11. Chọn C

Với $A(x_o;y_o;z_o)\in(Oxyz)$. Khi đó $d\left(A,(Oxy)\right)=z_o$, $d\left(A,(Oxz)\right)=y_o$, $d\left(A,(Oyz)\right)=x_o$.

Theo bài ra ta có: $a=d\left(M;(Oxy)\right)=2$; $b=d\left(M;(Oyz)\right)=1$, $c=d\left(M;(Oxz)\right)=3$.

$P=a+b^2+c^3=2+1^2+3^3=30$.

Câu 12. Chọn B



Do thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có bán kính đáy $R=\frac{3a}{2}$ và độ dài đường sinh $l=3a$.

Diện tích toàn phần hình trụ là: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rl=\frac{27\pi a^2}{2}$.

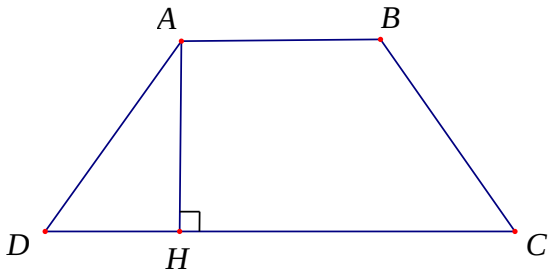
Câu 13. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow A(1;-2;3)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ta có

$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{1+3+2}{3}=2 \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-2-4+0}{3}=-2 \\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{3+1-1}{3}=1 \end{cases}$. Vậy $G(2;-2;1)$.

Câu 14. Chọn A



Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng CD.

Khi đó $H(2+2t;-1+2t;3+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(3+2t;2t;3+t)$.

Đường thẳng CD có vtcp là: $\vec{u}(2;2;1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Rightarrow 2(3+2t)+2.2t+3+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-3;2) \Rightarrow AH = 3.$

Đường thẳng AB đi qua A và song song với $CD \Rightarrow$ phương trình AB là: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$

$B \in AB \Rightarrow B(-1+2a;-1+2a;a) \Rightarrow AB = 3|a| \Rightarrow CD = 6|a|$

Theo bài ra ta có: $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}.AH \Leftrightarrow \frac{3|a|+6|a|}{2}.3 = 27 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$

Với $a=-2 \Rightarrow B(-5;-5;-2)$.

Với $a=2 \Rightarrow B(3;3;-2)$

Ta có: $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow D(-2;-5;1)$

Câu 15. Chọn C

Từ $\overrightarrow{OA} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow A(1;-2;3)$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\left\{\begin{array}{l} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}=2 \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}=-2 \\ z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}=1 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ trọng tâm $(2;-2;1)$.

Câu 16. Chọn A

Câu 17. Chọn C

Gọi $A'(a;b;c)$

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp $\Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;0)$, $\overrightarrow{AC'}=(3;5;-6) \Rightarrow \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=(2;5;-7)$

$\overrightarrow{AA'}=(a-1;b;c-1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=2 \\ b=5 \\ c-1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases}$. Vậy: $A'(3;5;-6)$.

Câu 18. Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1); \overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó : $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$

. Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 19. Chọn A

Ta có $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương đồng thời

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{a} \\ \vec{u} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} // \left[\vec{a},\vec{b}\right] = (4;-2;-2) \Rightarrow \vec{u} = (2k;-k;-k)$.

Do $|\vec{u}|=3 \Leftrightarrow \sqrt{4k^2+k^2+k^2}=3 \Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Mặt khác $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc tù nên

$\cos(\vec{u},\vec{k})<0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{k}<0 \Leftrightarrow 2k.0+(-k).1<0 \Leftrightarrow (-k).1<0 \Leftrightarrow k>0$. Suy ra $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\vec{u}=\left(\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Câu 20. Chọn A

Gọi $Q(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;1;-2)$, $\overrightarrow{QP}=(-1-x;2-y;1-z)$.

Tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-1-x \\ 1=2-y \\ -2=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$. Vậy, $Q(-2;1;3)$.

Câu 21. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=6k \\ x-5=-3k \\ 2=k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{2}{3} \\ x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy $x+y=5$.

Câu 22. Chọn B

Vì I là trung điểm của đoạn AB nên $I(3;-1;5)$.

Khi đó hình chiếu của I lên (Oyz) là $M(0;-1;5)$.

Câu 23. Chọn C

+) Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa độ (xOz) bằng $|-5|=5$ nên **A** đúng.

+) Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ nên **B** đúng.

+) Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (yOz) là $I(0;-5;4)$.

Suy ra tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M'(-2;-5;4)$ nên **C sai**.

+) Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oy là $J(0;-5;0)$.

Suy ra tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M'(-2;-5;-4)$ nên **D** đúng.

Câu 24. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(x+2;y-1;-1)$.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k:\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=k\\y-1=0\\-1=-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-5}{3}\\y=1\\k=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow x+y=-\frac{2}{3}.$$

Câu 25. Chọn C

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Khi đó mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AH}=(2-a;1;1);\ \overrightarrow{BH}=(2;1-b;1)\\\overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\ \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)\end{cases}$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases}H\in(ABC)\\\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\\-b+c=0\\-2a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=6\end{cases}$ Vậy $A(3;0;0)$

Câu 26. Chọn A

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=2.1.\cos(\vec{u},\vec{v})=2.\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$.

Vectơ $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$ khi và chỉ khi:

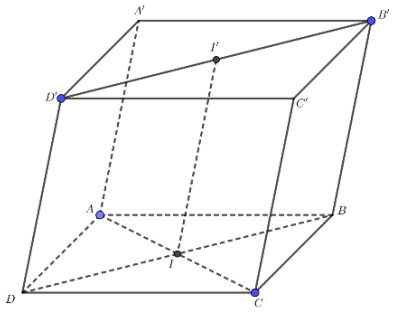
$$\vec{p}.\vec{q}=(k\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=0\Leftrightarrow k\vec{u}^2+(1-k)\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}^2=0\Leftrightarrow 4k-(1-k)-1=0\Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.$$

Câu 27. Chọn D

Gọi $B(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Gọi I và I' lần lượt là trung điểm AC và $B'D'$

$\Rightarrow I(0;2;4)$ và $I'(1;3;0)$.



$\overrightarrow{I'I}=(-1;-1;4); \overrightarrow{B'B}=(x-2;y-4;z+1)$

Ta có: $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{I'I} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-1 \\ y-4=-1 \\ z+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases}$. Vậy $B(1;3;3)$.

Câu 28. Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;2)$

Mà $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}=\vec{0}$, nên hai vecto $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương, hay ba điểm A,C,D thẳng hàng.

Nhận xét: Có thể vẽ phát họa lên hệ tọa độ $Oxyz$ để nhìn nhận dễ dàng hơn.

Câu 29. Chọn D

+ Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3;0;0)$.

Ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=0$

$\Leftrightarrow MI^2-IA^2=0 \Leftrightarrow MI^2=IA^2 \Leftrightarrow MI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.|5-1|=2$.

Suy ra tập hợp điểm M trong không gian là mặt cầu tâm I, bán kính bằng 2.

Vậy (H) là một mặt cầu có bán kính bằng 2.

Câu 30. Chọn A

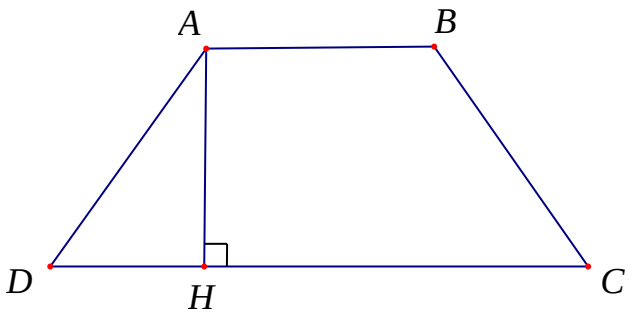
$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}\ (k>0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2=k \\ m-1=3k \\ 3=k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ m=7 \\ n=-\frac{3}{4} \end{cases}$. Vậy $m=7; n=-\frac{3}{4}$

Câu 31. Chọn A

G là trọng tâm tam giác OAB nên tọa độ $G\left(\frac{4}{3};0;\frac{-2}{3}\right)$.

Ta có: $OG=\sqrt{\frac{16}{9}+0+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Câu 32. Chọn A



Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng CD.

Khi đó $H(2+2t;-1+2t;3+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(3+2t;2t;3+t)$.

Đường thẳng CD có vtcp là: $\vec{u}(2;2;1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Rightarrow 2(3+2t)+2.2t+3+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-3;2) \Rightarrow AH=3.$

Đường thẳng AB đi qua A và song song với $CD \Rightarrow$ phương trình AB là: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$

$B \in AB \Rightarrow B(-1+2a;-1+2a;a) \Rightarrow AB=3|a| \Rightarrow CD=6|a|$

Theo bài ra ta có: $S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.AH \Leftrightarrow \frac{3|a|+6|a|}{2}.3=27 \Leftrightarrow |a|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$

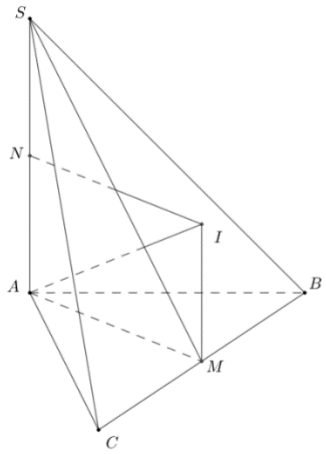
Với $a=-2 \Rightarrow B(-5;-5;-2)$. Với $a=2 \Rightarrow B(3;3;-2)$

Ta có: $\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow D(-2;-5;1)$

Câu 33. Chọn D

Gọi $E(0;0;t) \in Oz$. Ta có $AE=BE \Leftrightarrow \sqrt{t^2-4t+17}=\sqrt{t^2-8t+21} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow E(0;0;1).$

Câu 34. Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-6).$

Do SA vuông góc với nên một VTCP của đường thẳng SA được chọn là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-6).$

Đường thẳng SA qua $A(1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(3;6;-6)$ nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=6t \\ z=2-6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4-2-2=0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Gọi M là trung điểm BC, khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là đường thẳng qua M và song song với SA nên $d \perp (ABC)$, suy ra d là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Trong mặt phẳng (SAM) vẽ đường trung trực của SA cắt d tại I và cắt SA tại N.

Mặt phẳng (ABC) qua A và có một VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-6)$ nên có phương trình tổng quát là:

$3(x-1)+6y-6(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+3=0$

$\overrightarrow{BC}=(0;-3;-3) \Rightarrow BC=\sqrt{18} \Rightarrow BC^2=18$.

Ta có $R^2=IA^2+AM^2 \Leftrightarrow \frac{99}{4}=IM^2+\frac{1}{4}BC^2 \Rightarrow IM=\frac{9}{2}$.

Do $S \in SA$ nên $S(1+3t;6t;2-6t)$, mà $SA=2IM \Rightarrow SA=9$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}(S,(ABC))=9 \Leftrightarrow \frac{|1+3t+12t-2(2-6t)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=9$

$\Leftrightarrow |27t|=27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow S(4;6;-4) \\ t=-1 \Rightarrow S(-2;-6;8) \end{array}\right.$, mà cao độ của S âm nên $S(4;6;-4)$ thỏa mãn.

Câu 35. Chọn A

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4); \overrightarrow{CD}=(a+6;b-3;c-6)$

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}\ (k \in \mathbb{R})$ hay $\frac{a+6}{-2}=\frac{b-3}{1}=\frac{c-6}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{-a}{2} \\ c=-a \end{cases}$. Vậy $D\left(a;\frac{-a}{2};-a\right)$.

Lại có

$AC=BD \Leftrightarrow AC^2=BD^2 \Leftrightarrow (-9)^2+2^2+8^2=(a+1)^2+\left(\frac{a}{2}+3\right)^2+(a+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4a-60=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-10 \end{array}\right.$. Với $a=-10 \Rightarrow D(-10;5;10)$. Kiểm tra thấy: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Với $a=6 \Rightarrow D(6;-3;-6)$. Kiểm tra thấy: $(-3).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Do đó, $T=a+b+c=6-3-6=-3$.

Cách 2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4); \overrightarrow{CD}=(a+6;b-3;c-6)$

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng hay $\frac{a+6}{-2}=\frac{b-3}{1}=\frac{c-6}{2}<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{-a}{2} \\ c=-a \\ a>-6 \end{cases}$. Vậy $D\left(a;\frac{-a}{2};-a\right)$ với $a>-6$.

Lại có

$AC = BD \Leftrightarrow AC^2 = BD^2 \Leftrightarrow (-9)^2 + 2^2 + 8^2 = (a+1)^2 + \left(\frac{a}{2}+3\right)^2 + (a+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 60 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -10 (L) \end{array}\right.$. Với $a = 6 \Rightarrow D(6;-3;-6)$.

Do đó, $T = a + b + c = 6 - 3 - 6 = -3$.

Cách 3

+ Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

+ Gọi mp (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra mp (α) đi qua trung điểm $I(1;2;0)$ của đoạn thẳng AB và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-2;1;2)$, suy ra phương trình của mp (α) là : $(\alpha): -2x + y + 2z = 0$.

+ Vì C, D đối xứng nhau qua mp (α) nên

$D(6;-3;-6) \Rightarrow a = 6;\ b = -3; c = -6 \Rightarrow T = a + b + c = -3$

Công thức trắc nghiệm: Xác định toạ độ điểm $M'(x_1; y_1; z_1)$ là điểm đối xứng của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ qua mp $(\alpha): ax + by + cz + d = 0 \ \left(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\right)$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - 2ak \\ y_1 = y_0 - 2bk \ (k \in \mathbb{R}), \\ z_1 = z_0 - 2ck \end{cases} \qquad k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Câu 36. Chọn B

Do G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(2;3;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (Oxz), khi đó GH là khoảng cách từ G đến mặt phẳng (Oxz), ta có: $GH = d(G,(Oxz)) = 3$

Với M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), ta có $GM \geq GH = 3$, do đó GM ngắn nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$. Vậy độ dài GM ngắn nhất bằng 3.

Câu 37. Chọn B

Cách 1: $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-8;-3;-4)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, $AC \Rightarrow \begin{cases} M\left(\frac{9}{2};2;\frac{7}{2}\right) \\ N\left(1;-\frac{1}{2};3\right) \end{cases}$.

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-17;20;19)$.

$(ABC): -17x + 20y + 19z - 30 = 0$.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{IN} \perp \overrightarrow{AC} \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9}{2} - a\right).(-1) + (2-b).2 + \left(\frac{7}{2} - c\right).(-3) = 0 \\ (1-a).(-8) + \left(-\frac{1}{2} - b\right).(-3) + (3-c).(-4) = 0 \\ -17a + 20b + 19c - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 3c = 11 \\ 8a + 3b + 4c = \frac{37}{2} \\ -17a + 20b + 19c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy $a + 2b + c = 1 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 3$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-3)$ và $\overrightarrow{BC} = (-7;-5;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên I là trung điểm của AC.

Vậy $I\left(1;-\frac{1}{2};3\right) \Rightarrow a + 2b + c = 1 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 3$.

Câu 38. Chọn A

Do $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương và nên ta có $\vec{b} = k.\vec{a}(k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = k \\ y_0 = -2k \\ z_0 = 4k \end{cases}$.

Suy ra $\frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{-2} = \frac{z_0}{4} = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0) \\ y_0 = -\frac{2}{3}(x_0 + y_0 + z_0) \\ z_0 = \frac{4}{3}(x_0 + y_0 + z_0) \end{cases}$.

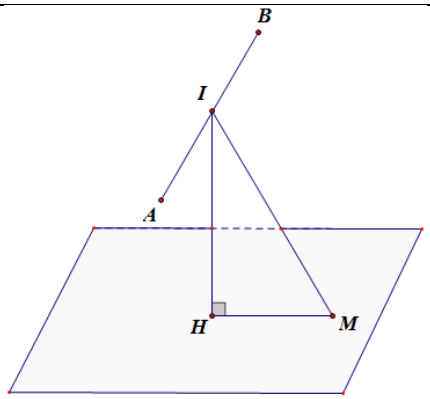
Theo giả thiết vectơ $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn nên $\vec{b}.\vec{j} > 0$ với $\vec{j} = (0;1;0)$, do đó $y_0 > 0$.

Mà $\frac{y_0}{-2} = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}$ nên $x_0 + y_0 + z_0 < 0$.

Lại có $|\vec{b}| = \sqrt{21}$, suy ra $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{\frac{21}{9}(x_0 + y_0 + z_0)^2} = \sqrt{21} \Rightarrow (x_0 + y_0 + z_0)^2 = 9$.

Vậy $x_0 + y_0 + z_0 = -3$.

Câu 39. Chọn B



Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3;1;4)$. Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) - IA^2 = MI^2 - IA^2$.

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = IH \Leftrightarrow M \equiv H$.

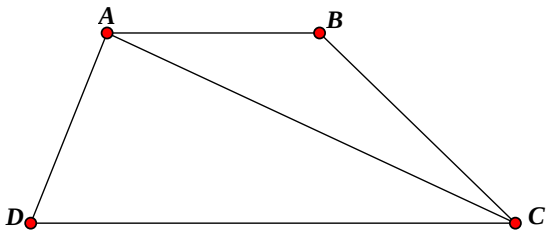
Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α). Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (1;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+2t \\ z = 4-3t \end{cases}$.

$H \in \Delta \Leftrightarrow H(3+t;1+2t;4-3t)$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow (3+t)+2(1+2t)-3(4-3t)-7=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow H(4;3;1)$.

Vậy $M(4;3;1)$.

Câu 40. Chọn C



Cách 1:

$\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2); \overrightarrow{AC} = (5;-1;-1); \overrightarrow{DC} = (6-a;1-b;-c)$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ACD} = 6\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$AB // CD$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương, cùng chiều $\Leftrightarrow \frac{6-a}{1} = \frac{1-b}{-2} = \frac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 12-2a \\ b = 13-2a \\ a < 6 \\ b > 1 \\ c > 0 \end{cases}$

$\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right] = (0;9a-54;54-9a)$.

$$S_{\Delta ACD}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left|54-9a\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{19}{3}\\a=\frac{17}{3}\end{array}\right.$$

So với điều kiện suy ra: $a=\frac{17}{3}\Rightarrow a+b+c=8.$

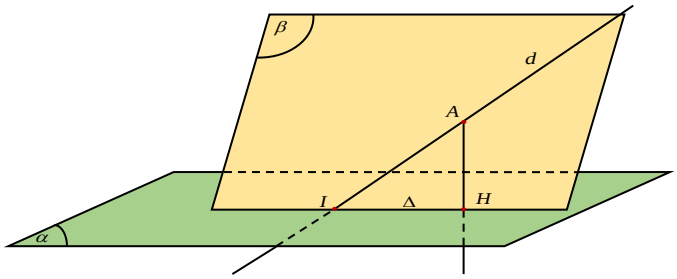
Cách 2:

Ta có $AB=3;h=d\left(C,AB\right)=\frac{\sqrt{162}}{3}.$

$$S_{ABCD}=\frac{h}{2}\left(AB+CD\right)\Leftrightarrow 6\sqrt{2}=\frac{\sqrt{162}}{6}\left(3+CD\right)\Leftrightarrow CD=1.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow D\left(\frac{17}{3};\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=8.$

Câu 41. Chọn C



Cách 1.

Ta có mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ nhận vectơ $\overrightarrow{n_\alpha}=\left(1;1;1\right)$ là vectơ pháp tuyến, đường thẳng d đi qua điểm $A=\left(0;-1;2\right)$ và nhận $\overrightarrow{u_d}=\left(1;2;-1\right)$ là vectơ chỉ phương.

Gọi $\left(\beta\right)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

Ta có $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_d}=\left(-3;2;1\right).$

Khi đó đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và $\left(\beta\right)$. Do đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=\left(-1;-4;5\right).$

Mà $\vec{u}=\left(1;a;b\right)$ nên $a=4$, $b=-5$. Vậy $a+b=-1.$

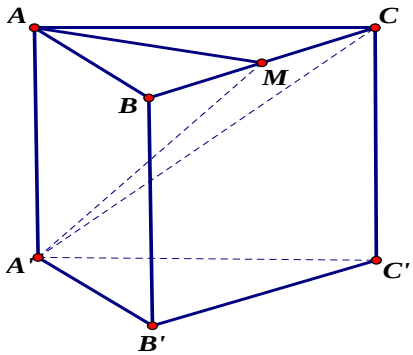
Cách 2.

Dễ dàng tính được tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ là $I=\left(1;1;1\right)$. Trên đường thẳng lấy điểm $A=\left(0;-1;2\right)$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\left(\alpha\right)$. Phương trình đường thẳng đi qua A và H có dạng: $\begin{cases}x=0+t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}.$

Tọa độ của là H nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0+t \\ y=-1+t \\ z=2+t \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{2}{3}$. Vậy $H\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và H nhận vecto $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{-1}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$ là vectơ chỉ phương nên cũng nhận vecto $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-5)$ là vectơ chỉ phương. Vậy $a+b=-1$.

Câu 42. Chọn B



Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ tại $M \Rightarrow M$ là hình chiếu của A' trên trục Oz

$A'\left(\sqrt{3};-1;1\right) \Rightarrow M(0;0;1)$ và $A'M=2$.

Ta có: $AM=\sqrt{A'M^2-AA'^2}=\sqrt{3}$. Mà tam giác ABC đều nên $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3} \Rightarrow BC=2$

$\Rightarrow MC=1$. Vì C thuộc trục Oz và C không trùng với O nên gọi $C(0;0;c)$, $c\neq 0$.

$\overrightarrow{MC}=(0;0;c-1) \Rightarrow MC=|c-1|$; $MC=1 \Leftrightarrow |c-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0\,(\text{L}) \\ c=2 \end{array}\right. \Rightarrow C(0;0;2)$.

$\overrightarrow{A'C}=\left(-\sqrt{3};1;1\right)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$

$\Rightarrow \vec{u}=\left(-2\sqrt{3};2;2\right)$ cũng là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$.

Vậy $a=-2\sqrt{3}; b=2 \Rightarrow T=a^2+b^2=16$.

Câu 43. Chọn D

Tính được $OA=3$; $OB=4$; $AB=5$.

Ta có: $OA.\overrightarrow{IB}+OB.\overrightarrow{IA}+AB.\overrightarrow{IO}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{8}{3}-x\right)+4(1-x)+5(-x)=0 \\ 3\left(\frac{4}{3}-y\right)+4(2-y)+5(-y)=0 \\ 3\left(\frac{8}{3}-z\right)+4(-2-z)+5(-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Vậy, $I(1;1;0)$, suy ra $a-b+c=0$.

Câu 44. Chọn B

Câu 45. Chọn A

Câu 46. Chọn A

$C(a;b;-2)\in(P) \Rightarrow a-b+2=0 \Rightarrow b=a+2 \Rightarrow C(a;a+2;-2)$.

$\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(a-1;a;-5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(10+2a;-2a+2;2a-2)$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{\sqrt{(2a+10)^2+2(2a-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{12a^2+24a+108}}{2}=\sqrt{3\left(a^2+2a+9\right)}$

$=\sqrt{3(a+1)^2+24} \ge 2\sqrt{6}$ với $\forall a$.

Do đó $\min S_{\Delta ABC}=2\sqrt{6}$ khi $a=-1$. Khi đó ta có $C(-1;1;-2) \Rightarrow a+b=0$.

Câu 47. Chọn B

Cách 1:

- Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.
- Ta tìm điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-y;-z)$, $\overrightarrow{IB}=(5-x;6-y;-z)$; $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-x)+5-x=0 \\ 3(-y)+6-y=0 \\ 3(-z)-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+8=0 \\ -4y+6=0 \\ -4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow I\left(2;\frac{3}{2};0\right)$. Suy ra $IA=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $IB=\frac{3\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $3MA^2+MB^2=48 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=48 \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=48$

$\Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=48 \Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2=48 \Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$.

Ta thấy $OI=\frac{5}{2}$ nên điểm I nằm ngoài mặt cầu (S). Ta có $OI=R+MI=OM+MI$, suy ra có một điểm M thuộc đoạn OI thỏa mãn đề bài .

Cách 2:

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt cầu (S) và thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$.

Ta có: $3MA^2+MB^2=48\Leftrightarrow 3\left[(x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2\right]+\left[(x_0-5)^2+(y_0-6)^2+z_0^2\right]=48$

$\Leftrightarrow 4x_0^2+4y_0^2+4z_0^2-16x_0-12y_0+16=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-4x_0-3y_0+4=0$.

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'\left(2;\frac{3}{2};0\right)$, bán kính $R'=\frac{3}{2}$.

Mặt khác M thuộc mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.

Ta thấy: $OI'=\frac{5}{2}=R+R'\Rightarrow$ mặt cầu (S) và (S') tiếp xúc ngoài nhau tại M

$\Rightarrow$ Có duy nhất một điểm M thỏa mãn đề bài.

Câu 48. Chọn B

Cách 1: Do $M\in Oy$ nên $M(0;y;0)$. Tính $MA^2+MB^2=2y^2-6y+20=f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$. Vậy $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$.

Cách 2: Ta có: $A(1;1;-3)$. Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $I=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)$.

Khi đó: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2MI^2+IA^2+IB^2=2MI^2+9$.

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với trục tung là

$0.\left(x-\frac{3}{2}\right)+1.\left(y-\frac{3}{2}\right)+0.(z+1)=0$ hay $(P):y-\frac{3}{2}=0$.

Phương trình tham số của trục tung là $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\\y-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{3}{2}\\z=0\end{cases}.$$ Vậy $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$.

Câu 49. Chọn B

Ta có $AB=\sqrt{44}$ không đổi. Do đó chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi $(MA+MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$M\in(d)\Rightarrow M(-1+2t;1-t;2t)$.

$MA=\sqrt{9t^2+20}=\sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$, $MB=\sqrt{9t^2-36t+56}=\sqrt{(6-3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$.

Chọn $\vec{u}=\left(3t;2\sqrt{5};0\right)\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$.

Chọn $\vec{v}=\left(6-3t;2\sqrt{5};0\right)\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{(6-3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=\left(6;4\sqrt{5};0\right)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{29}$.

Theo tính chất vecto $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{29}$.

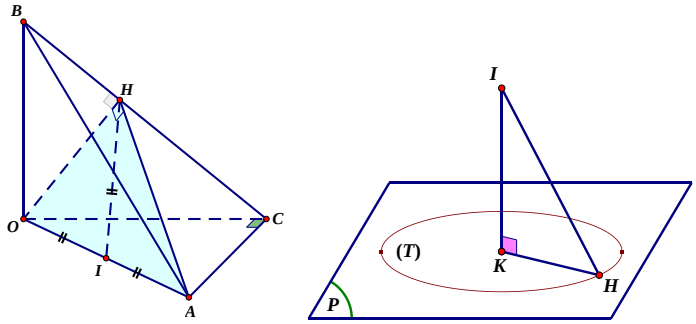
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $MA+MB=|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq 2\sqrt{29}$.

Do đó $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{29}$ khi $t=1\Rightarrow M(1;0;2)$.

Vậy $a+2b+3c=1+2.0+3.2=7$.

Câu 50. Chọn D



Dễ thấy $B\in Oz$. Ta có $A\in(Oxy)$ và $C\in(Oxy)$, suy ra $OB\perp(OAC)$.

Ta có $\begin{cases}AC\perp OC\\AC\perp OB\end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBC)$, mà $OH\subset(OBC)$. Suy ra $AC\perp OH\ (1)$.

Mặt khác ta có $OH\perp BC\ (2)$, .

Từ (1) và (2) suy ra $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp AB$ và $OH\perp HA$.

Với $OH\perp AB$ suy ra H thuộc mặt phẳng (P) với (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng AB. Phương trình của (P) là: $y-z=0$.

Với $OH\perp HA\Rightarrow\Delta OHA$ vuông tại H. Do đó H thuộc mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;2\sqrt{2};0\right)$ là trung điểm của OA và bán kính $R=\dfrac{OA}{2}=2\sqrt{2}$.

Do đó điểm H luôn thuộc đường tròn (T) cố định là giao tuyến của mp (P) với mặt cầu (S).

Giả sử (T) có tâm K và bán kính r thì $IK=d\left(I,(P)\right)=2$ và $r=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Vậy điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng 2.

DẠNG 2. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 11. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** 27.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(-2;3;-1)$; $\vec{b}(2;-1;3)$. Sin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $-\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$. **C.** $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(4;2;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\sqrt{22}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 22.

Câu 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. 30^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 150^0.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$; $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Độ dài AM là

A. $\sqrt{29}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{30}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Câu 6. Cho hai vec tơ $\vec{a}=(1;-2;3),\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó tích vô hướng $\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{b}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích tam giác ABC bằng:

A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $3|a|$. **B.** $\frac{3|a|}{2}$. **C.** $2|a|$. **D.** $|a|$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ và $B(m;m-1;-4)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để độ dài đoạn $AB=3$.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=1$ hoặc $m=4$.
C. $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=3$ hoặc $m=4$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-3y+z+3=0$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục Ox, Oz. Tính diện tích tam giác OMN.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất c giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng $45°$.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $150°$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;3)$, $B(3;2;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;-3;-7)$. **B.** $(1;3;-7)$. **C.** $(-1;3;-7)$. **D.** $(-1;-3;-7)$.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, tính bán kính đường tròn đó?

A. $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ và đỉnh $D(a;b;c)$. Biết rằng hình thang có diện tích là $6\sqrt{2}$, tính $a+b+c$?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=8$. **C.** $a+b+c=12$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{10}{6}$. **B.** 450. **C.** 10. **D.** 45.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) sao cho góc giữa (P) và đường thẳng (d_2) là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

A. $T=0$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-\frac{13}{4}$. **D.** $T=-6$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-2)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Cao độ của điểm C bằng

A. 1 hoặc $-\frac{2}{3}$. **B.** -1 hoặc $\frac{2}{3}$. **C.** -3 hoặc $\frac{1}{3}$. **D.** -1 hoặc $-\frac{1}{3}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\frac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0), B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right), B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11}$.

Câu 2. **Chọn D**

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{-4}{\sqrt{4+9+1}.\sqrt{4+1+9}}=-\frac{2}{7};\ \sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\vec{a};\vec{b}\right)}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Câu 3. **Chọn A**

Với $A(1;0;1),B(4;2;-2)$ ta được $AB=\sqrt{(4-1)^2+(2-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{22}$.

Vậy độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{22}$.

Câu 4. **Chọn D**

Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$, ta có :

$$\cos\alpha=\frac{\vec{i}.\vec{u}}{\left|\vec{i}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=150^0.$$

Câu 5. **Chọn A**

Giả sử $M(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{BM}=(a;b-3;c-1);\ \overrightarrow{BC}=(-3;3;3)$.

Ta có M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}.(-3)=-1\\ b-3=\frac{1}{3}.3\\ c-1=\frac{1}{3}.3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\\ c=2\end{cases}\Rightarrow M(-1;4;2).$$

Do đó $\overrightarrow{AM}=(-3;4;2)\Rightarrow AM=\sqrt{29}$.

Câu 6. **Chọn C**

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(-1;-1;5)\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{b}=-1.(-2)+(-1).1+2.5=11.$

Câu 7. **Chọn A**

Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi

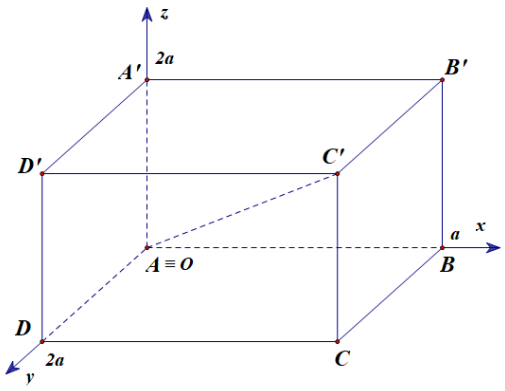
$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)<0\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow5.m+3.(-1)+(-2).(m+3)<0\Leftrightarrow3m-9<0\Leftrightarrow m<3.$

Vì m là số nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị m nguyên dương thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. **Chọn C**

$\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-1;2;-1)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 9. **Chọn A**



Từ giả thiết ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=(a;2a;2a)$

Vậy $\overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)\Rightarrow AC'=\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{a^2+4a^2+4a^2}=3|a|$.

Câu 10. Chọn B

$\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow A(3;1;-2)$

$AB=\sqrt{(m-3)^2+(m-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{2m^2-10m+17}$.

$AB=3\Leftrightarrow\sqrt{2m^2-10m+17}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=4\end{array}\right.$.

Câu 11. Chọn A

Cách 1.

Mặt phẳng $(P):2x-3y+z+3=0$ cắt các trục Ox, Oz lần lượt tại $M=\left(-\frac{3}{2};0;0\right)$, $N=(0;0;-3)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{3}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{ON}=(0;0;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=\left(0;-\frac{9}{2};0\right)$.

Vậy diện tích tam giác OMN là $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]\right|=\frac{9}{4}$.

Cách 2.

Ta có $OM=\frac{3}{2}$, $ON=3$.

Vì hai điểm M, N lần lượt thuộc trục Ox, Oz nên tam giác OMN vuông tại O.

Do đó, diện tích tam giác OMN là: $S=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{9}{4}$.

Câu 12. Chọn C

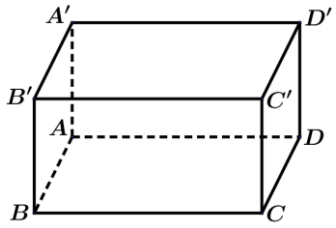
$+\ (\vec{u},\vec{v})=45^\circ\Leftrightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sqrt{3(m^2+1)}=1-2m$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1-2m\ge0\\3m^2+3=1-4m+4m^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\le\frac{1}{2}\\m^2-4m-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}$.

Câu 13. Chọn D

Ta có $\vec{i}=(1;0;0) \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{i})=\dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}|.|\vec{i}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Vậy $(\vec{u},\vec{i})=150°$.

Câu 14. Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'}=(0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)$.

Suy ra $AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{a^2+(2a)^2+(2a)^2}=3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC'=3|a|$.

Câu 15. Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(3-2;2-(-1);-4-3)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(1;3;-7)$.

Câu 16. Chọn D

- Trước tiên, ta xét bài toán phụ sau:

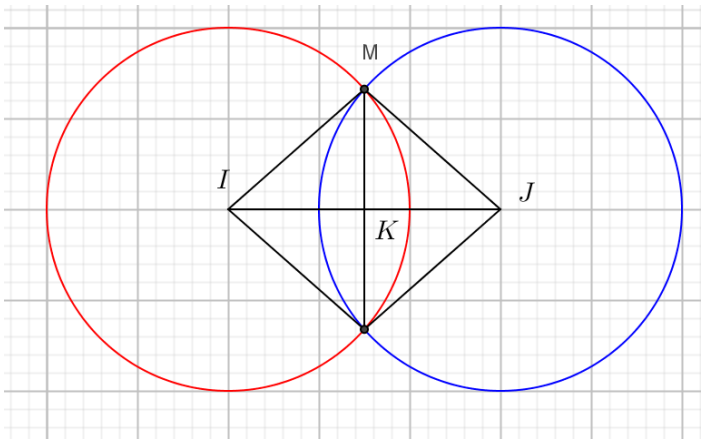
"Trong không gian cho đoạn thẳng AB bất kì, có trung điểm I. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k>0$ là một mặt cầu tâm I và bán kính $R=\sqrt{k+IA^2}$ ".

Thật vậy:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=k \Leftrightarrow MI^2-IA^2=k$

$\Leftrightarrow MI^2=k+IA^2$ hay $IM=\sqrt{k+IA^2}$.

Suy ra M thuộc mặt cầu tâm I, bán kính $R=\sqrt{k+IA^2}$.



- Áp dụng: Có $I(1;-2;1)$ và $J(-1;0;2)$ lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD

Sử dụng kết quả bài toán trên, ta có:

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm I, bán kính $R_1=2$. (1)

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm J, bán kính $R_2=2$. (2)

Ta có $\left|R_1-R_2\right|=0<IJ=3<R_1+R_2=4$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu nêu trên.

+ Gọi K là tâm của đường tròn giao tuyến.

Suy ra bán kính cần tìm $r=KM=\sqrt{IM^2-IK^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 17. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(4;1;1)\Rightarrow AB=3$, $BC=3\sqrt{2}$.

Mặt khác, hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, suy ra

$$S_{ABCD}=\frac{AB(AD+BC)}{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{2}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Với $\overrightarrow{AD}=(a-1;b-2;c-1)$ ta được $\begin{cases}a-1=\frac{1}{3}.4\\b-2=\frac{1}{3}.1\\c-1=\frac{1}{3}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{3}\\b=\frac{7}{3}\\c=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 18. Chọn B

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Gọi $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$; $C(0,0,c)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\quad(1).$$

Do $M(1;2;5)$ thuộc mặt phẳng (P) nên thay vào (1) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{c}=1\quad(2)$.

Mặt khác M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}AM\perp BC\\BM\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0\\\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1-a;2;5)$; $\overrightarrow{BM}=(1;2-b;5)$; $\overrightarrow{CB}=(0;b;-c)$; $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

Khi đó : $\begin{cases}2b-5c=0\\-a+5c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{5}{2}c\\a=5c\end{cases}$. Thay vào (2) ta có:

$$\frac{1}{5c}+\frac{4}{5c}+\frac{5}{c}=1\Leftrightarrow c=6\Rightarrow\begin{cases}a=30\\b=15\\c=6\end{cases}.$$

Vậy thể tích tứ diện $OABC$ là: $V=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{6}.30.15.6=450$ (đơn vị thể tích).

Câu 19. Chọn B

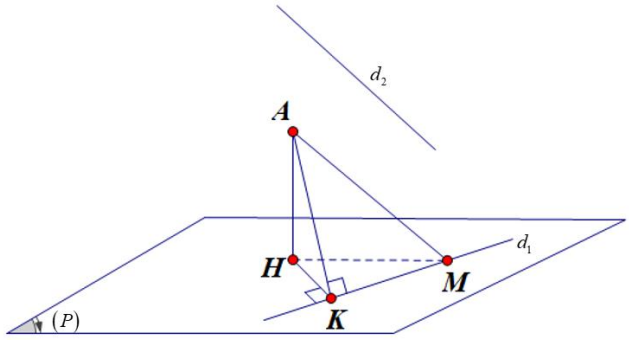
Ta xét bài toán tổng quát như sau:

Bài toán: Cho hai đường thẳng d_1, d_2 không song song. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với đường thẳng d_2 một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Giả sử d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}$, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}$.

Trước hết ta xét trường hợp d_1 và d_2 chéo nhau.



Gọi M là một điểm nào đó thuộc d_1, dựng đường thẳng qua M và song song với d_2. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng P, K là hình chiếu của A lên đường thẳng d_1.

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là AMH.

Ta có $\sin(d_2,P)=\sin(HMA)=\dfrac{AH}{AM}\le\dfrac{AK}{AM}$ (do $AH\le AK$). Góc (d_2,P) lớn nhất khi $\sin(d_2,P)$ lớn nhất. Do $\dfrac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin(d_2,P)$ lớn nhất $H\equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng (AKM), hay vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vectơ $\vec{u_1}$ và $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]$.

Nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\vec{u_1},\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right]$.

Trường hợp d_1 và d_2 cắt nhau tại M, bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\vec{u_1},\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right]$.

Áp dụng vào bài 45 ta có $\vec{u_1}=(1;2;-1)$; $\vec{u_2}=(2;-1;2)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(3;-4;-5)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1};\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\right]=(-14;2;-10)=-2(7;-1;5)$.

Mặt phẳng (P) chứa d_1 nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):7x-y+5z-9=0$. Suy ra $a+c+d=7+5-9=3$.

Câu 20. Chọn A

Gọi tọa độ $C(a;\,b;\,c)$.

Vì điểm C thuộc $(P):x+y+z+1=0$ nên $a=-b-c-1$ hay tọa độ C có dạng $C(-b-c-1;\,b;\,c)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(-b-c;\,b-1;\,c)\Rightarrow BC^2=(b+c)^2+(b-1)^2+c^2$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;\,0;\,2)\Rightarrow AB^2=5$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\\ BC^2=AB^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=c & (1)\\ (b+c)^2+(b-1)^2+c^2=5 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta có $6c^2-2c-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1\\ c=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C(-3;1;1)\\ C\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)\end{array}\right.$.

Vậy cao độ của điểm C là 1 hoặc $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 21. Chọn B

Cách 1:

$\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-a;2-b;-c)\\ \overrightarrow{MB}=(2-a;-b-6;-c-2)\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-a(2-a)+(2-b)(-b-6)-c(-c-2)=a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12=P$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12-P=0\Leftrightarrow(a-1)^2+(b+2)^2+(c+1)^2=P+18$

Nếu $P+18<0\Leftrightarrow P<-18$ thì không tồn tại điểm M .

Nếu $P+18=0\Leftrightarrow P=-18$ thì $M(1;-2;-1)$ không thỏa mãn $M\in(S)$.

Nếu $P+18>0\Leftrightarrow P>-18$ thì M thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'(1;-2;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18+P}$ .Khi đó M là điểm chung của hai mặt cầu:

$(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$(S')\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-12-P=0$ có tâm $I'(1;-2;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18+P}$.

Tồn tại điểm M khi và chỉ khi hai mặt cầu (S) và (S') có điểm chung

$$\Leftrightarrow |R-R'|\le II'\le R+R'\Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{18+P}\right|\le 2\sqrt{6}\le \frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{18+P}.$$

$$\begin{cases}\sqrt{18+P}\ge \dfrac{3\sqrt{6}}{2}\\ -2\sqrt{6}\le \dfrac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{18+P}\le 2\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}P\ge \dfrac{-9}{2}\\ \sqrt{18+P}\le \dfrac{5\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{-9}{2}\le P\le \frac{39}{2}$$ (thỏa mãn $P>-18$)

Khi đó $P=\dfrac{-9}{2}$ đạt được khi hai mặt cầu trên tiếp xúc ngoài tại $M(a;b;c)$ thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MI}=-\frac{R}{R'}\overrightarrow{MI'}=-\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}\overrightarrow{MI'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MI'}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI'}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{3\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OI'}}{4}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right).$$

Khi đó $\min P=\dfrac{-9}{2}\Leftrightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c=1.$

Cách 2:

$$M\in(S)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a-4b-2c+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow (a+1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2=\frac{3}{2}.$$

$$M\in(S)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2a+4b+2c-\frac{9}{2}.\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-a;2-b;-c)\\ \overrightarrow{MB}=(2-a;-b-6;-c-2)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-a(2-a)+(2-b)(-b-6)-c(-c-2)=a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-2a+4b+2c-\frac{9}{2}-2a+4b+2c-12=-4a+8b+4c-\frac{33}{2}=P.$$

$$P=-4a+8b+4c-\frac{33}{2}=-4(a+1)+8(b-2)+4(c-1)+\frac{15}{2}.$$

$$\Rightarrow P-\frac{15}{2}=-4(a+1)+8(b-2)+4(c-1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai bộ số $-4;8;4$ và $a+1;b-2;c-1$, ta có

$$\left(P-\frac{15}{2}\right)^2=\left[-4(a+1)+8(b-2)+4(c-1)\right]^2\le (16+64+16)\left[(a+1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\right]=144.$$

$\Rightarrow -12 \le P - \frac{15}{2} \le 12 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le P \le \frac{39}{2}$.

$$P = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 8b + 4c - \frac{33}{2} = -\frac{9}{2} \\ \frac{a+1}{-4} = \frac{b-2}{8} = \frac{c-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 8b + 4c = 12 \\ 2a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó $\min P = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b + c = 1.$

Câu 22. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R = 3$.

Với mọi điểm $M(x;y;z) \in (S)$ ta có $MI = 3$.

Theo đề bài $MA^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB} = 16 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 16$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO}\right) + \overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB} = 16\ (*)$.

Có $\overrightarrow{IA} = \left(0;-1;-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{IO} = \left(2;-1;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(-2;-5;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{MI} = \left(-2-x;1-y;-\sqrt{2}-z\right)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO} = (0;-8;0)$, $\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IO}\right) = 8(y-1)$, $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB} = 3$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow 2.9 + 3 + 8(y-1) + 3 = 16 \Leftrightarrow y = 0$ hay M thuộc mặt phẳng $(P): y = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Do $d(I;(P)) = 1$ suy ra bán kính của đường tròn $r = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

Cách 2.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R = 3$. Gọi $M(x;y;z)$.

$M \in (S) \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + \left(z+\sqrt{2}\right)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0\ (1)$

$MA^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB} = 16 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 + \left(z+2\sqrt{2}\right)^2 + x(x+4) + y(y+4) + z^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2\sqrt{2}z - 2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 0$ hay M thuộc mặt phẳng $(P): y = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Do $d(I;(P)) = 1$ suy ra bán kính của đường tròn $r = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

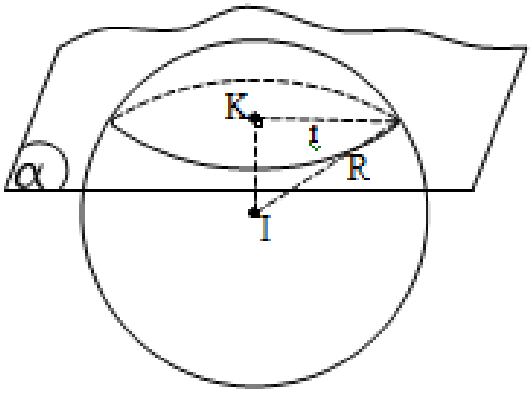
MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

❖ **Trong không gian với hệ trục Oxyz:**

- Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

- Phương trình : $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.



❖ **Vị trí tương đối của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S):**

- $d(I,(\alpha))>R$ khi và chỉ khi (α) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha))=R$ khi và chỉ khi (α) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha))<R$ khi và chỉ khi (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm K và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

❖ **Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng.**

- Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ
- Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt
- Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất
- Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu

DẠNG 3. MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Trong không gian gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình.

A. $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+8x+2=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x+2=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$.

C. $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$. **D.** $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=12$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây không phải phương trình mặt cầu?

A. $2x^2+2y^2+2z^2+2x-4y+6z+5=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+y-z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-3x+7y+5z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+3x-4y+\sqrt{3}z+7=0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;4)$, $B(6;1;2)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB.

A. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=18$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3\sqrt{2}$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây không phải phương trình mặt cầu?

A. $3x^2+3y^2+3z^2-2x=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+y-z-1=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2-z^2+2x-4y+6z+7=0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $I(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=29$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1;10\}$. **B.** $\{2;-10\}$. **C.** $\{-1;11\}$. **D.** $\{1;-11\}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-2y-z-8=0$ có phương trình là

A. $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I\ 1;1;1$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2;1;4)$; $N(5;0;0)$; $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết $a+b+c<5$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$

A. -4. **B.** -1. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(0;-4;6)$. Phương trình mặt cầu tâm A đi qua điểm B là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14^2$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$.

C. $(x-0)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=14$. **D.** $(x-0)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=\sqrt{14}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1)$, $B(-3;-2;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2+6y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4y-7=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4y+7=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+6y+2=0$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để $x^2+y^2+z^2+2(2+m)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình của một mặt cầu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 17: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m \le 6$. **B.** $m > 6$. **C.** $m < 6$. **D.** $m \ge 6$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu.

A. $m > 0$. **B.** $m \ne 0$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m < 0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 8m + 37 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m < -2$ hay $m > 4$. **B.** $m \le -2$ hay $m \ge 4$.

C. $m < -4$ hay $m > -2$. **D.** $m < -4$ hay $m > 2$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + m = 0$ là phương trình mặt cầu.

A. $m \ge 14$. **B.** $m > 14$. **C.** $m < 14$. **D.** $m \le 14$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 4x + 2y + 4z + 7 = 0$. Hai mặt cầu có bán kính là R_1 và R_2 chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): 3y - 4z - 20 = 0$. Tổng $R_1 + R_2$ bằng

A. $\frac{63}{8}$. **B.** $\frac{35}{8}$. **C.** 5. **D.** $\frac{65}{8}$.

Câu 22: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$.

A. $R = 2$. **B.** $R = 4$. **C.** $R = 1$. **D.** $R = 3$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất cảu biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 60. **C.** 68. **D.** 48.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu qua bốn điểm $A(5;3;3)$, $B(1;4;2)$, $C(2;0;3)$, $D(4;4;-1)$, có phương trình là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = D$. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0); B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

A. 116π. **B.** 29π. **C.** 16π. **D.** $\frac{29\pi}{4}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo ba giao tuyến là các đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$. Tổng bình phương bán kính của ba đường tròn (C_1), (C_2), (C_3) là

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 27: Cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng

A. $0,5$. **B.** -1. **C.** $-0,5$. **D.** 1.

Câu 29: Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2)=0$. Biết rằng khi m thay đổi mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định. Tọa độ tâm I của đường tròn đó là

A. $I(1;2;1)$. **B.** $I(-1;-2;-1)$. **C.** $I(1;2;-1)$. **D.** $I(-1;-2;1)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z-3=0$ và mặt phẳng $(Q):x-2y-2z+6=0$. Gọi (S) là một mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt phẳng. Bán kính của (S) bằng.

A. 3. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 9.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$ Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA=2MB$ là một đường tròn (C). Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 32: Trong không gian cho mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$. Từ điểm $A\ 2019;0;0$ ta kẻ các tiếp tuyến đến S với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài S và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến S với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính chiều dài quảng đường l khi M di chuyển đúng 2019 vòng theo cùng một chiều trên đường tròn đó.

A. $l=\dfrac{2.\sqrt{2019^4-1}}{2019}\pi$. **B.** $l=2019\pi$. **C.** $l=8152722\pi$. **D.** $l=4076361\pi$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Ta có phương trình $(Oxz): y=0$.

Do mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên $d\left(I,\ (Oxz)\right)=1\Leftrightarrow |b|=1$.

Câu 2: **Chọn A**

Gọi $I(a;0;0)\in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-a;1;2); \overrightarrow{IB}(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A,B nên $IA=IB\Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2+5}=\sqrt{(3-a)^2+13}\Leftrightarrow 4a=16\Leftrightarrow a=4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R=IA=\sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S):(x-4)^2+y^2+z^2=14\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2=0.$

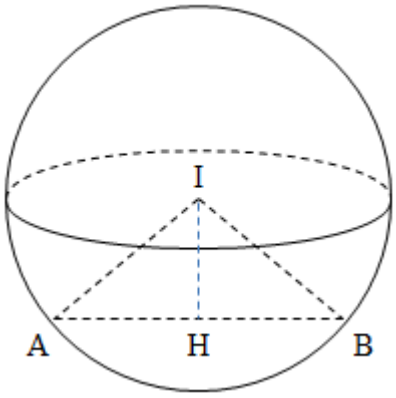
Câu 3: **Chọn C**

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{3}.$

Gọi I là trung điểm của AB khi đó $I(0;3;2)$. Bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$.

Câu 4: **Chọn A**



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH\perp AB$ tại $H \Rightarrow IH=d_{(I;(AB))}=d_{(I;Ox)}$.

Ox có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;0;0)$, chọn điểm $M(2;0;0)\in Ox$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=(1;2;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(0;-3;2)\Rightarrow IH=d_{(I,Ox)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{13}.$$

(*Cách khác*: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox\Rightarrow H(1;0;0)\Rightarrow IH=\sqrt{13}$) mà $HA=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R=IA=\sqrt{IH^2+HA^2}=4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 5: Chọn B

Mặt cầu có tâm I và bán kính R

Vì mặt cầu nhận OA làm đường kính do đó tâm I là trung điểm của OA

Ta có $I(1;-2;3); R=\dfrac{OA}{2}=\sqrt{14}\Rightarrow (S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$.

Câu 6: Chọn B

Mặt cầu có đường kính AB nên tâm I là trung điểm AB. Suy ra $I(2;2;3)$.

Mặt khác $r=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 7: Chọn D

Phương trình ở đáp án D không đúng dạng (1) do hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau.

Câu 8: Chọn D

Vì mặt cầu tâm I đi qua A nên có bán kính $R=\left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{(1-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$ Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ đi qua A là :

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$

Câu 9: Chọn C

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}$.

Do đó: $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=11\end{array}\right.$.

Câu 10: Chọn C

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên bán kính mặt cầu là: $d\left(I;(P)\right)=r\Leftrightarrow\dfrac{|2-4+1-8|}{\sqrt{4+4+1}}=3\Rightarrow r=3$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

Câu 11: Chọn D

Gọi R là bán kính mặt cầu, suy ra diện tích mặt cầu là $4\pi R^2$.

Theo đề bài mặt cầu có diện tích là 4π nên ta có $4\pi R^2=4\pi\Leftrightarrow R=1$.

Mặt cầu có tâm I $1;1;1$ và bán kính $R=1$ nên có phương trình: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

Câu 12: Chọn C

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P nên

$d\left(I;(Oyz)\right)=IM=IN=IP$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}d\left(I;(Oyz)\right)=IM\\IN=IM\\IN=IP\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-4)^2\\(a-5)^2+b^2+c^2=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-4)^2\\(a-5)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b+3)^2+(c-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-4)^2\\3a-b-4c=2\\4a+3b-c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-1\\c=2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=5\\b=-3\\c=4\end{cases}$$

So sánh với điều kiện $a+b+c<5$ ta có $c=2$

Câu 13: Chọn B

Gọi $D(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{DA}=(x+2;y;z);\overrightarrow{DB}=(x;y+2;z);\overrightarrow{DC}=(x;y;z+2)$

Vì $DA,\ DB,\ DC$ đôi một vuông góc nên

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=0\\\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0\\\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+2)+y(y+2)+z^2=0\\x(x+2)+y^2+z(z+2)=0\\x^2+y(y+2)+z(z+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=-\frac{4}{3}$$

$I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\\IA=ID\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+2)^2+b^2+c^2=a^2+(b+2)^2+c^2\\(a+2)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(c+2)^2\\(a+2)^2+b^2+c^2=\left(a+\frac{4}{3}\right)^2+\left(b+\frac{4}{3}\right)^2+\left(c+\frac{4}{3}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a=c\\4a+4=8a+\frac{16}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=-\frac{1}{3}.\text{ Vậy }a+b+c=-1.$$

Câu 14: Chọn B

Mặt cầu tâm $A(1;-2;3)$ đi qua $B(0;-4;6)$ có bán kính $R=AB=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14.$

Câu 15: Chọn A

Gọi $I(a;b;0)\in(Oxy);\ b<0$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-a;-b;-1)$, $\overrightarrow{IB}=(-3-a;-2-b;1)$.

Do mặt cầu (S) hai điểm A, B nên $IA=IB=\sqrt{11}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ (1-a)^2 + b^2 + 1 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ (1-a)^2 + (-2a-3)^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ 5a^2 + 10a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; b = -3 \\ a = -2; b = 1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có $I(0;-3;0) \Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0.$

Câu 16: Chọn D

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(2+m)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ có dạng

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a = -(2+m)$, $b = 0, c = m-1$, $d = 3m^2 - 5$.

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 10 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $m \in \{-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 7 giá nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Chọn C

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Câu 18: Chọn B

Để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu thì

$4 + m^2 + 3^2 - 13 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Câu 19: Chọn A

Câu 20: Chọn C

Câu 21: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $(S) \cap (P) = (C)$ là đường tròn tâm K, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(O,(P))} = \sqrt{9 - \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{11}}{6}$.

Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với (P). Khi đó $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Gọi I là tâm mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Khi đó $I \in d \Rightarrow I(2t;t;2t)$.

Theo bài ra $d(I,(Q)) = \sqrt{(d(I,(P)))^2 + r^2} \Leftrightarrow \frac{|3t - 8t - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{|8t + 2t + 8t + 7|^2}{6^2} + \frac{275}{36}}$

$$\Leftrightarrow 36|t+4|^2 = |18t+7|^2 + 275 \Leftrightarrow 288t^2 - 36t - 252 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{7}{8} \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow d(I,(Q)) = 5$; Với $t = -\frac{7}{8} \Rightarrow d(I,(Q)) = \frac{25}{8}$.

Vậy có hai mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng (Q), bán kính hai mặt cầu đó lần lượt là $R_1=5$, $R_2=\frac{25}{8}$. Khi đó $R_1+R_2=\frac{65}{8}$.

Câu 22: Chọn D

Tâm I nằm trên d nên $I(1+t;2-2t;2+t)$.

Mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $AI=d(I;(P))=R$.

$$AI=d(I;(P))\Leftrightarrow\sqrt{t^2+4t^2+(t+1)^2}=\frac{|1+t-4+4t+4+2t+1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6t^2+2t+1}=\frac{|7t+2|}{3}\Leftrightarrow 9(6t^2+2t+1)=(7t+2)^2.$$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;0;3)$. Vậy bán kính mặt cầu $R=AI=3$.

Câu 23: Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$. Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow E(5;5;-1)$. Dễ thấy điểm E là điểm ngoài của (S).

Khi đó $P=2MA^2-MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{AE}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{BE}\right)^2=ME^2+2AE^2-BE^2$.

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$\max ME=IE+R=8$; $\min ME=IE-R=2$. Do đó

$m=\max P=64+2AE^2-BE^2$; $n=\min P=4+2AE^2-BE^2$ suy ra $m-n=60$.

Câu 24: Chọn D

Cách 1:

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$

$\Rightarrow(S)$ có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+e=0\ (a^2+b^2+c^2-e>0)$.

Ta có: $\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\\D\in(S)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+6b+6c-e=43\\2a+8b+4c-e=21\\4a+6c-e=13\\8a+8b-2c-e=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\\c=1\\e=5\end{cases}$.

$\Rightarrow a+b+c=3+2+1=6$.

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$.

Khi đó: $AI=BI=CI=DI\Leftrightarrow\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\\AI^2=DI^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a-2b+2c=22\\6a+6b=30\\2a-2b+8c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\\c=1\end{cases}$.

$\Rightarrow a+b+c=3+2+1=6$.

Câu 25: Chọn B

Gọi phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm O,A,B,C có dạng là:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

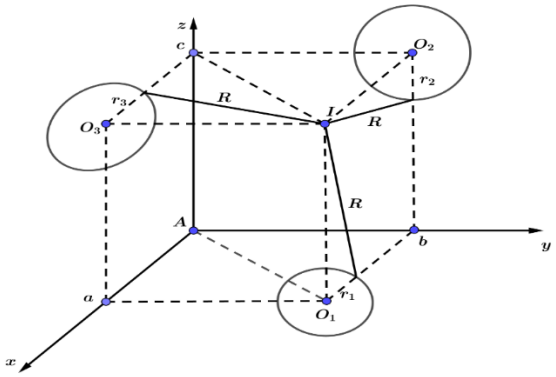
Do mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C nên thay lần lượt tọa độ O, A, B, C vào phương trình mặt cầu,

ta có hệ phương trình: $\begin{cases} d=0 \\ 9-6a+d=0 \\ 4+4b+d=0 \\ 16-8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=\dfrac{3}{2} \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$.

Do đó ta có bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{\frac{9}{4}+1+4-0}=\sqrt{\frac{29}{4}}$.

Nên diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=4\pi.\frac{29}{4}=29\pi$.

Câu 26: Chọn B



Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$.

Vì ba mặt phẳng thay đổi qua $A(1;1;-1)$ và đôi một vuông góc với nhau nên ba mặt phẳng này cắt nhau theo ba giao tuyến là ba đường thẳng đôi một vuông góc với nhau tại A. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho gốc tọa độ là điểm A và các trục tọa độ lần lượt trùng với các đường thẳng giao tuyến của ba mặt phẳng đã cho.

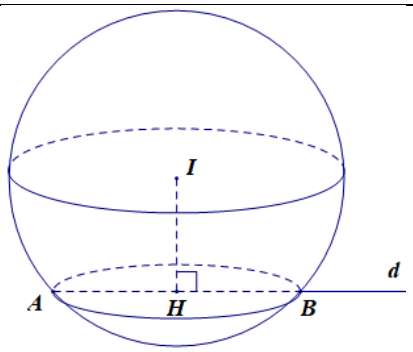
Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu (S) ứng với hệ trục tọa độ $Axyz$.

Suy ra $IA=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử mặt cầu (S) cắt các mặt phẳng $(Axy),(Ayz),(Axz)$ theo các đường tròn lần lượt có tâm là O_1,O_2,O_3 tương ứng với bán kính là r_1,r_2,r_3.

Ta có $r_1^2=R^2-IO_1^2=4-c^2, r_2^2=R^2-IO_2^2=4-a^2, r_3^2=R^2-IO_3^2=4-b^2$.

Suy ra $r_1^2+r_2^2+r_3^2=12-(a^2+b^2+c^2)=12-1=11$

Câu 27: Chọn D



Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2;2)$.

$\overrightarrow{IM}=(-2;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(6;13;4)$. Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow IH\perp AB$.

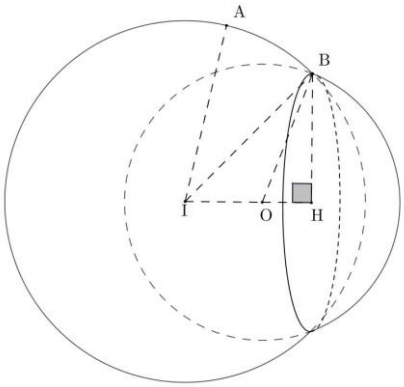
Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{36+169+16}}{\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}$.

Suy ra bán kính $R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{13+3}=4$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và có bán kính $R=4$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 28: Chọn A

Ta có hình vẽ sau:



Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=OB=1$.

Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (P) là: $d(O,(P))=OH=\dfrac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là: $r=BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Gọi d' là đường thẳng qua tâm $O(0;0;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó $d':\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ lại có điểm $I\in d'$ do ba điểm I,O,H thẳng hàng.

Suy ra $I(t;2t;-2t)$, $\overrightarrow{IA}=(t-1;2t-1;-2t-1)$, $IA=\sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2}$

Ta có:

$IH = d\left(I,(P)\right) = \dfrac{|t+4t+4t+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|9t+1|}{3}$, $IB = \sqrt{BH^2+IH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{|9t+1|}{3}\right)^2}$.

Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$ có bán kính

$IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{|9t+1|}{3}\right)^2}$

$\Leftrightarrow (t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2 = \dfrac{8}{9} + \left(\dfrac{|9t+1|}{3}\right)^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra tâm $I\left(\dfrac{1}{2};1;-1\right)$. Vậy $a+b+c = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2.

Măt cầu chứa đường tròn $(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+2y-2z+1 = 0 \end{cases}$ có dạng:

$(S'): x^2+y^2+z^2-1+m(x+2y-2z+1) = 0$

$A(1;1;1) \in (S') \Leftrightarrow 3-1+m(1+2-2+1) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$

$\Rightarrow (S'): x^2+y^2+z^2-x-2y+2z-1 = 0$. Suy ra tâm $I\left(\dfrac{1}{2};1;-1\right)$. Vậy $a+b+c = \dfrac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn D

Ta có $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-15+m(-2x-y+2z-6) = 0$

Khi đó đường tròn cố định (C) cần tìm là giao điểm của mặt phẳng $(P): -2x-y+2z-6 = 0$ và mặt cầu $(S'): (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-15 = 0$.

Mặt cầu (S') có tâm $J(1;-1;-1)$ nên độ tâm I của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của J trên mặt phẳng (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua J và vuông góc với (P), ta có: $\Delta: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

$I \in \Delta \Rightarrow I(-2t+1;-t-1;2t-1)$, mặt khác $I \in (P)$ nên $-2x_I - y_I + 2z_I - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy $I(-1;-2;1)$.

Câu 30: Chọn C

Dễ thấy mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

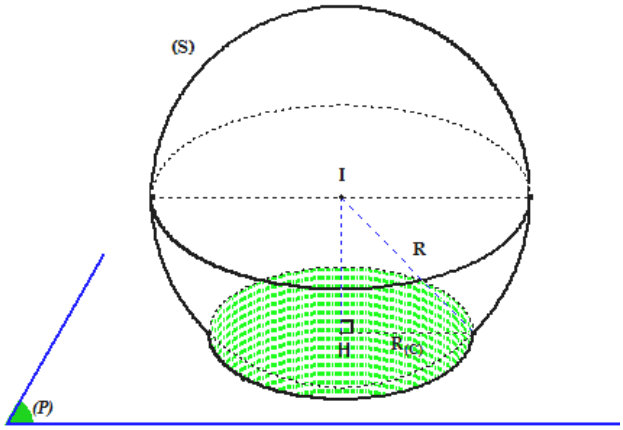
Lấy điểm $A(1;-1;0) \in (P)$. Ta có:

$d\left((P);(Q)\right) = d\left(A;(Q)\right) = \dfrac{|1+2+6|}{\sqrt{1+4+4}} = 3.$

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó chính bằng đường kính của (S).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính là $R_{(S)}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 31: Chọn A



Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=8$, suy ra mặt cầu có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thuộc (S) sao cho $MA=2MB$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} M\in(S) \\ MA=2MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ (x-4)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ x^2+y^2+z^2-\dfrac{2z}{3}-\dfrac{29}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ z-2=0 \end{cases}.$$

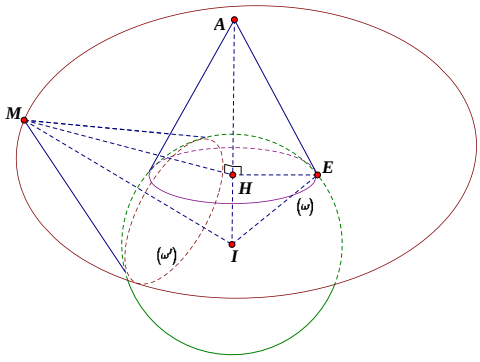
Khoảng cách từ tâm $I(0;0;3)$ đến mặt phẳng (P): $z-2=0$ là:

$$d(I,(P))=\frac{|3-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=1<R.$$

Do đó đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Đường tròn (C) có bán kính $R_{(C)}=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$.

Câu 32: Chọn C



Từ giả thiết ta có:

Bán kính mặt cầu $R=1$, tâm mặt cầu $O\ 0;0;0$.

Khoảng cách $AO=2019=2019R$.

Như vậy ta có $k=2019$.

Áp dụng bài toán 47.1 ta có bán kính mà đường tròn M di động trên đó là

$r=\dfrac{\sqrt{k^4-1}}{k}R=\dfrac{\sqrt{2019^4-1}}{2019}$. Chu vi của đường tròn M di động là $C=2\pi r$.

Vậy chiều dài quảng đường là: $l = 2019.2\pi r = 2019.2.\pi \dfrac{\sqrt{2019^4 - 1}}{2019} = 8152722\pi$.

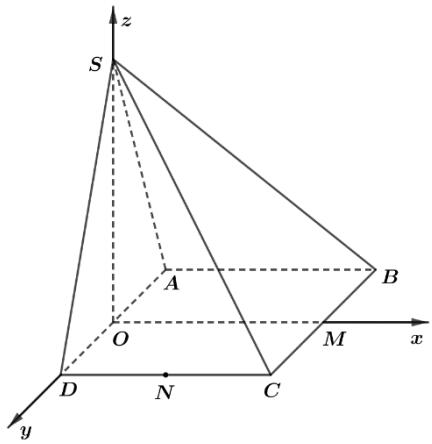
Câu 33: Chọn A

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M(1;0;0)$, $N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, $C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN \Rightarrow MI = NI = CI = SI$.

Ta có:



$\overrightarrow{MI} = (x-1;y;z)$, $\overrightarrow{NI} = \left(x-\dfrac{1}{2};y-\dfrac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{CI} = \left(x-1;y-\dfrac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{SI} = \left(x;y;z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ $MI = NI = CI = SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 = (x-1)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}.$$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{4};-\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right)$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ là: $R = IM = \dfrac{\sqrt{93}}{12}$.

DẠNG 4. CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Câu 1. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-2;1); B(1;0;-2); C(3;1;-2); D(-2;-2;-1)$. Câu nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. **B.** Tam giác ACD là tam giác vuông tại A.

C. Góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù. **D.** Tam giác ABD là tam giác cân tại B.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, mặt phẳng (P): $2x+y+z+5=0$. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ thỏa mãn đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Tính $a+b+c$

A. 2. **B.** -2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$ và mặt phẳng (P): $x+2y+2z+11=0$. Tìm điểm M trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là ngắn nhất.

A. $M(0;0;1)$. **B.** $M(2;-4;-1)$. **C.** $M(4;0;3)$. **D.** $M(0;-1;0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, mặt phẳng (P): $2x+y+z+5=0$. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ thỏa mãn đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Tính $a+b+c$

A. 2. **B.** -2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. 8. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -8.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;0;-3)$; $B(-1;-2;4)$; $C(2;-1;2)$. Biết điểm $E(a;b;c)$ là điểm để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-1$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Gọi tọa độ điểm $M(a;\ b;\ c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $K=a+b+c$.

A. $K=1$. **B.** $K=2$. **C.** $K=-5$. **D.** $K=-2$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Trong tất cả các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(9;-7;2)$. Tìm trên trục Ox toạ độ điểm M sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;0;0)$. **B.** $M(-2;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(9;0;0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua $M(2;2;0)$, song song với (P) và tổng khoảng cách từ A, B đến đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(-10;3;8)$. **B.** $\vec{u}_2=(14;-1;-8)$. **C.** $\vec{u}_3=(22;3;-8)$. **D.** $\vec{u}_4=(-18;-1;8)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $R=\sqrt{10}$. **B.** $R=\sqrt{10}-1$. **C.** $R=2\sqrt{2}-1$. **D.** $R=2\sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}-2$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}-2$. **D.** $2\sqrt{6}-2$.

Câu 13. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$ và $a+b+c=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ là

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **C.** $5-2\sqrt{6}$. **D.** $5+2\sqrt{6}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** 29. **C.** 24. **D.** 26.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(2;-1;1)$, $C(4;1;1)$ và $(P):x+y+z-6=0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $mp(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a+4b+c$ bằng:

A. 6. **B.** 12. **C.** 7. **D** 5.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $P=MA^4+MB^4+MA^2.MB^2$ nhỏ nhất. Tìm y_0.

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=2$. **C.** $y_0=1$. **D.** $y_0=-1$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;-2;4)$, $B(-2;6;4)$, $C(5;-1;-6)$. Xét các điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $AMB=90^o$, đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất bằng

A. $\sqrt{73}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ và điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)\in(S)$ sao cho biểu thức $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-3)^2+(y+4)^2=4$. Xét hai điểm M, N di động trên (S) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của OM^2-ON^2 bằng

A. -10. **B.** $-4-3\sqrt{5}$. **C.** -5. **D.** $-6-2\sqrt{5}$.

Câu 24. Cho điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$. Xét điểm M thay đổi trên (α), giá trị lớn nhất của MA^2-2MB^2 bằng

A. 398. **B.** 379. **C.** 397. **D.** 498.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1;3)$, vuông góc với đường thẳng d và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;2)$, $B(3;-1;-2)$, $C(-4;0;3)$. Tìm tọa độ điểm I trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $I\left(-\frac{37}{4};0;\frac{19}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$. **C.** $I\left(\frac{37}{4};0;-\frac{23}{4}\right)$. **D.** $I\left(\frac{25}{4};0;-\frac{19}{4}\right)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(3;1;0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M.

A. $x_0=4$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=2$. **D.** $x_0=1$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Câu 29. Cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và hai điểm $A(3;0;0), B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ A, B, C với $a,b,c>0$ sao cho $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$ bằng

A. $\frac{1}{108}$. **B.** $\frac{1}{486}$. **C.** $\frac{1}{54}$. **D.** $\frac{1}{162}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\frac{51}{7}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-3;2)$, $B(-2;1;4)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=12$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, tính $a+b+c$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** -4. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn $A'B'$ và $A'D'$ sao cho hai mặt phẳng (MAC') và (NAC') vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t;2t;0),B(0;0;t)$ với $t>0$. Cho điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\frac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q=2a+b$?

A. 5. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất, hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $M(5;7;3)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(7;13;5)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2=\frac{m^2}{4}$ và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A. $m=1$. **B.** $m=3-\sqrt{3}$. **C.** $m=8-4\sqrt{3}$. **D.** $m=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2);B(0;-1;-3)$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1); hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn A**

$\overrightarrow{AB}=(1;2;-3)$; $\overrightarrow{CD}=(-5;-3;1);\overrightarrow{AC}=(3;3;-3)$; $\overrightarrow{BD}=(-3;-2;1);\overrightarrow{AD}=(-2;0;-2)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-6;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=(-2).3+0.6+(-2)(-3)=0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

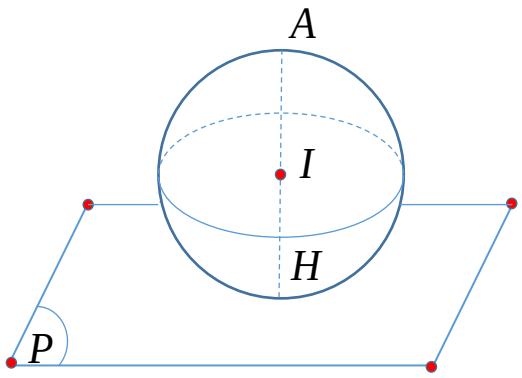
Lại có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=3.(-2)+3.0+(-3).(-2)=0 \Rightarrow AC\perp AD$.

$\Rightarrow$ tam giác ACD là tam giác vuông tại A. Vậy đáp án B đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1.(-5)+2.(-3)+(-3).1=-14<0\Rightarrow cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)<0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ là góc tù. Vậy đáp án C đúng.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{14}$ *hay* $AB=BD$ $\Rightarrow$ tam giác ABD là tam giác cân tại B. Vậy đáp án D đúng.

Câu 2. **Chọn A**



Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$$

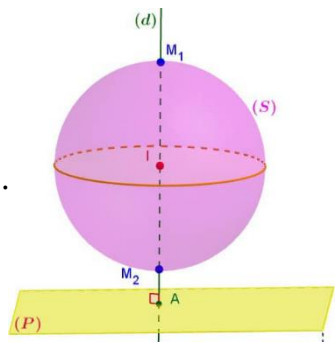
Gọi $H=\Delta\cap(P)$ ta có: $H(1+2t;2+t;3+t)$ và $H\in(P)$ nên ta có:

$2(1+2t)+(2+t)+(3+t)+5=0\Leftrightarrow 6t+12=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;0;1)$

Mặt cầu tâm I đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất nên có đường kính là đoạn AH với H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ trung điểm của AH ta có: $I(-1;1;2)\Rightarrow a+b+c=2$.

Câu 3. **Chọn B**



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$ và bán kính $R=3$.

Ta có: $d(I,(P))=4>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Suy ra phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$.

Gọi M_1, M_2 là các giao điểm của d và (S).

Khi đó tọa độ điểm M_1, M_2 ứng với t là nghiệm của phương trình $(3+t)^2+(-2+2t)^2+(1+2t)^2-6(3+t)+4(-2+2t)-2(1+2t)+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Với $t=1\Rightarrow M_1(4;0;3)\Rightarrow d(M_1,(P))=7$.

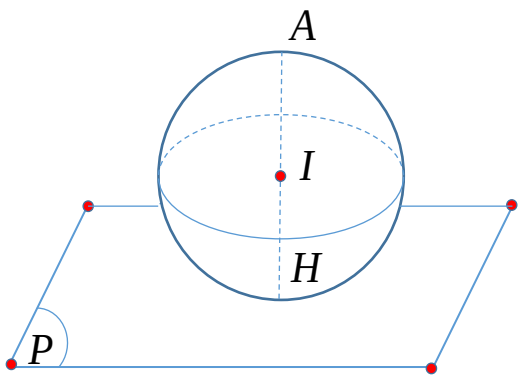
Với $t=-1\Rightarrow M_2(2;-4;-1)\Rightarrow d(M_2,(P))=1$.

Với mọi điểm M thuộc (S) ta luôn có $d(M_2,(P))\le d(M,(P))\le d(M_1,(P))$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) ngắn nhất bằng 1 khi $M\equiv M_2$.

Vậy $M(2;-4;-1)$.

Câu 4. **Chọn A**



Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$$

Gọi $H=\Delta\cap(P)$ ta có: $H(1+2t;2+t;3+t)$ và $H\in(P)$ nên ta có:

$2(1+2t)+(2+t)+(3+t)+5=0\Leftrightarrow 6t+12=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;0;1)$

Mặt cầu tâm I đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất nên có đường kính là đoạn AH với H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ trung điểm của AH ta có: $I(-1;1;2)\Rightarrow a+b+c=2$.

Câu 5. **Chọn A**

Gọi $H(x_H;y_H;z_H)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

Khi đó: $\begin{cases}1-x_H+3-x_H+3(2-x_H)=0\\4-y_H+4-y_H+3(-1-y_H)=0\\5-z_H+(-z_H)+3(-z_H)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=2\\y_H=1\\z_H=1\end{cases}\Leftrightarrow H(2;1;1)$.

Ta có: $T=MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC}\right)^2$

$=5MH^2+HA^2+HB^2+3HC^2+2\overrightarrow{MH}\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}\right)=5MH^2+HA^2+HB^2+3HC^2$.

Suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của H lên (P).

Phương trình đường thẳng d đi qua $H(2;1;1)$ và vuông góc với (P) là $\begin{cases}x=2+3t\\y=1+3t\\z=1-2t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ phương trình

$\begin{cases}x=2+3t\\y=1+3t\\z=1-2t\\3x+3y-2z-29=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\\z=-1\\t=1\end{cases}\Rightarrow M(5;4;-1)$. Vậy $a+b+c=8$.

Câu 6. **Chọn B**

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow G(1;-1;1)$.

Ta có: $P=\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right|=\left|3\overrightarrow{EG}\right|=3EG\geq 0\Rightarrow P_{\min}=0$ khi $E\equiv G(1;-1;1)\Rightarrow T=1$, chọn **B.**

Câu 7. **Chọn C**

Mặt cầu (S) có tâm $I=(1;-2;-1)$ và có bán kính $R=3$.

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S).

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\\x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\\\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.\end{cases}$.

Với $t=1\Rightarrow M(3;-3;1)\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(P)\right)=\dfrac{|6+3+2-14|}{3}=1$.

Với $t=-1\Rightarrow M(-1;-1;-3)\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(P)\right)=\dfrac{|-2+1-6-14|}{3}=7$.

Vậy $M(-1;-1;-3)$ thỏa mãn nên $a=-1,b=-1,c=-3\Rightarrow K=a+b+c=-5$.

Câu 8. **Chọn B**

Cách 1: Gọi I là tâm mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Q là tiếp điểm của Δ_1 với mặt cầu; R là tiếp điểm của Δ_2 với mặt cầu.

J là trung điểm của QR.

Ta có: $R = IQ \geq JQ \Rightarrow R$ nhỏ nhất khi và chỉ khi I trùng J hay QR là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2, khi đó tâm mặt cầu I là trung điểm của đoạn vuông góc chung, $2R$ bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

Gọi $\begin{cases} Q(4+3a;1-a;-5-2a) \in \Delta_1, a \in \mathbb{R} \\ R(2+b;-3+3b;b) \in \Delta_2, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Khi đó ta có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3;-1;-2)$, $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;3;1)$,

$\overrightarrow{RQ} = (3a-b+2;-a-3b+4;-2a-b-5)$.

Theo giả thiết đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = 0 \\ \overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = (2;-2;4) \Rightarrow RQ = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{RQ}{2} = \sqrt{6}.$$

Cách 2: Gọi hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1 và Δ_2 là (P) và (Q).

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với (P) và (Q) nên đường kính hình cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) hay là khoảng cách từ Δ_2 tới mặt phẳng (P).

Khi đó ta có *VTCP* $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3;-1;-2); \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;3;1)$ và $N = (2;-3;0) \in \Delta_2$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = \frac{1}{5}\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}};\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] = \frac{1}{5}(5;-5;10) = (1;-1;2)$

Ta có phương trình mặt phẳng (P) là $x - y + 2z + 7 = 0$.

Vậy $d((P),(Q)) = d(\Delta_2,(P)) = d(N,(P)) = 2\sqrt{6}$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{6}$.

Câu 9. **Chọn C**

Gọi $M(x;0;0) \in Ox$; $MA^2 = (x+1)^2 + 3^2 + 4^2$; $MB^2 = (x-9)^2 + 7^2 + 2^2$.

Suy ra $MA^2 + MB^2 = 2x^2 - 16x + 160 = 2(x-4)^2 + 128 \geq 128, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 128 khi $x = 4$. Vậy $M = (4;0;0)$

Câu 10. **Chọn B**

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2;2;0)$ và song song với (P).

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $1(x-2) - 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Theo bài ra $d \subset (Q)$.

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên (Q). Khoảng cách từ A, B đến d lần lượt là

k_1, k_2. Khi đó $k_1+k_2 \ge AA'+BB'$.

Vì $\overrightarrow{AB}=(-6;3;0)$, $\overrightarrow{AM}=(-4;2;0)$ là hai vectơ cùng phương nên A, B và M thẳng hàng.

Do đó, dấu bằng xảy ra khi d đi qua A', B'.

Ta có hai cách sau để tìm tọa độ vectơ chỉ phương của d.

Cách 1: Tìm B'.

Đường thẳng đi qua B và vuông góc với (Q) có phương trình: $\begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow B'(t;3-2t;2t)$

$B' \in (Q)$ suy ra $t-2(3-2t)+2(2t)+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{9} \Rightarrow B'=\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{19}{9};\dfrac{8}{9}\right)$.

Từ đó $\overrightarrow{MB'}=\left(\dfrac{-14}{9};\dfrac{1}{9};\dfrac{8}{9}\right)=\dfrac{-1}{9}(14;-1;-8)$.

Do vậy, một vectơ chỉ phương của d là $(14;-1;-8)$.

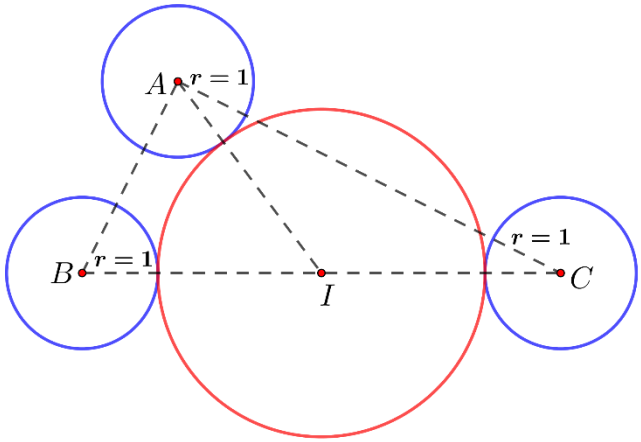
Cách 2: Ta thấy d là giao của hai mặt phẳng: (Q) và (R) với (R) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với (Q). Do đó vectơ chỉ phương của d cùng phương với tích có hướng của hai véc tơ pháp tuyến tương ứng của (Q) và (R).

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$. Vectơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB}=(-6;3;0)$.

Nên vectơ pháp tuyến của (R) là $\vec{n}_{(R)}=[\vec{n}_{(Q)},\overrightarrow{AB}]=(-6;-12;-9)=-3(2;4;3)$.

Từ đó vec tơ chỉ phương của d là $[\vec{n}_{(Q)},\vec{n}_{(R)}]=(-14;1;8)$.

Câu 11. Chọn B



Ta có: $AB=\sqrt{8};AC=\sqrt{32};\ BC=\sqrt{40} \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Thấy 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có đôi một nằm ngoài nhau.

Khi đó: Mặt cầu (S) tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) và có bán kính nhỏ nhất

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm thuộc $mp(ABC)$ và (S) **tiếp xúc ngoài** với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm I thuộc $mp(ABC)$ và $IA=IB=IC$

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, (trong đó I là trung điểm của BC).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $R_{\min} = IA - r = \sqrt{10} - 1$.

Câu 12. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính $R = 2$.

$d(I,(P)) = \sqrt{6} > R$ suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Điểm $M \in (S)$ thỏa mãn $d(M,(P))$ nhỏ nhất bằng $d(I,(P)) - R = \sqrt{6} - 2$.

Câu 13. Chọn C

Giả sử $M(x;y;z)$ và $N(a;b;c)$.

Khi đó $P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = MN^2$.

Vì $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$ nên M thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(-3;2;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Vì $a+b+c=1$ nên N thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$.

Ta có $d(I;(P)) = \dfrac{|-3+2-1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} > R \Rightarrow$ mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

$\Rightarrow \min P = \min MN^2 = \left[d(I;(P)) - R\right]^2 = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.

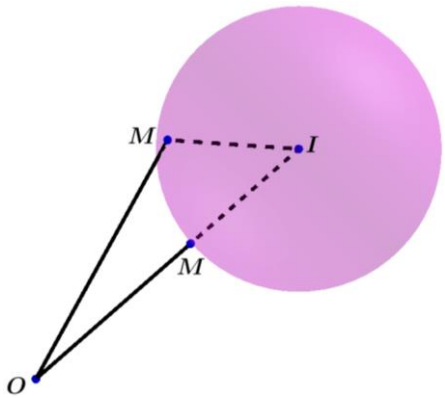
Câu 14. Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (1-a)^2 + (2-b)^2 + 1^2 + (2-a)^2 + (-1-b)^2 + 3^2 \\ &= 2a^2 - 6a + 2b^2 - 2b + 20 \\ &= 2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 15 \ge 15. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ khi đó $a + b = 2$.

Câu 15. Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;2;4)$, bán kính $R=1$

$OM=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Ta có $OM\geq OI-IM=OI-R$

Nên OM nhỏ nhất khi $OM=OI-R=\sqrt{4^2+2^2+4^2}-1=5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2=25$.

Câu 16. Chọn B

Ta có $T=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right|=\left|4\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|$

Tìm tọa độ điểm $I(x_I;y_I;z_I)$ sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}0-x_I+2(2-x_I)+4-x_I=0\\1-y_I+2(-1-y_I)+1-y_I=0\\1-z_I+2(1-z_I)+1-z_I=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=2\\y_I=0\\z_I=1\end{cases}\Rightarrow I(2;0;1)\Rightarrow T=4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ mà điểm M thuộc $mp(P)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi điểm M là hình chiếu của điểm I lên $mp(P)$.

$\min T=4.d_{(I,(P))}=4.\dfrac{|2+0+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=4\sqrt{3}$.

Đường thẳng IM đi qua điểm I và nhận vectơ $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

$\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Gọi điểm $M(2+t;t;1+t)\in IM$ mà $M\in(P)$

$\Rightarrow 2+t+t+1+t-6=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(3;1;2)$.

Vậy giá trị của $2a+4b+c=2.3+4.1+2=12$

Câu 17. Chọn D

Vì $M\in d$ nên $M(t+3;2t+1;3t+3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}=(-t-1;-2t-1;-3t)$, $\overrightarrow{MB}=(-t-1;-2t-3;-3t-6)$.

$MA^2=(t+1)^2+(2t+1)^2+9t^2=14t^2+6t+2\quad(1)$.

$MB^2=(t+1)^2+(2t+3)^2+(3t+6)^2=14t^2+50t+46\quad(2)$.

Ta có $P=MA^4+MB^4+MA^2.MB^2=\left(MB^2-MA^2\right)^2+3MA^2.MB^2$

Thay (1) và (2) vào P ta được $P=(44t+44)^2+3(14t^2+6t+2)(14t^2+50t+46)$

$=44^2(t+1)^2+3\left[14(t+1)^2+10-22(t+1)\right]\left[14(t+1)^2+10+22(t+1)\right]$

$=1936(t+1)^2+3\left\{\left[14(t+1)^2+10\right]^2-22^2(t+1)^2\right\}$

$=1936(t+1)^2+3\left[196(t+1)^4+280(t+1)^2+100-484(t+1)^2\right]$

$=588(t+1)^4+1324(t+1)^2+300$. Đặt $u=(t+1)^2, u\ge 0 \Rightarrow P=588u^2+1324u+300, u\ge 0$.

Xét hàm số $f(u)=588u^2+1324u+300, u\ge 0$ có $f'(u)=1176u+1324>0, \forall u\ge 0$ cho nên $f(u)\ge f(0), \forall u\ge 0$.

Ta được $P_{\min}=f(0)=300$ khi $u=0\Rightarrow t+1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow y_0=2.(-1)+1=-1$. Vậy $y_0=-1$.

Câu 18. Chọn B

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó:

$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right|=\left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right|=MN$.

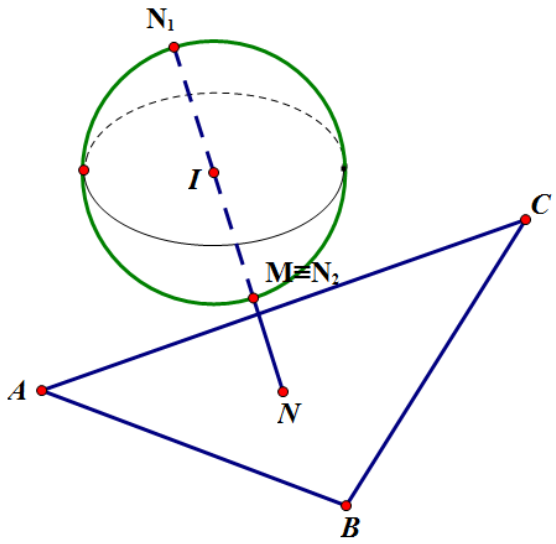
Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$. Phương trình $NI=\begin{cases}x=2+2t\\y=4+2t\\z=-1-t\end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S) ta được: $(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

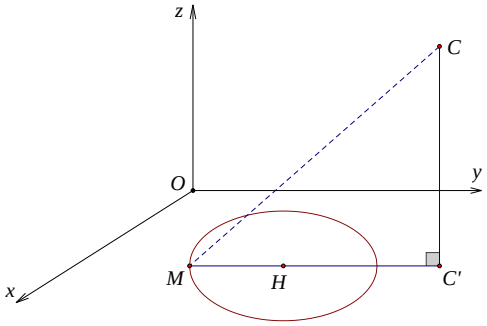
Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2), N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1>NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2$.



Câu 19.



Chọn C

Giả sử $M(x;y;0)$. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;2;4)$.

Do $MA \perp MB$ tại M, suy ra M thuộc mặt cầu tâm I bán kính

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 0^2}}{2} = 5.$$

Mặt khác $M \in Oxy$ suy ra toa độ điểm M thỏa mãn $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$. Suy ra M thuộc đường trong (C) có tâm $H(1;2;0)$ và bán kính $R = 3$

Gọi C' là hình chiếu của C lên (Oxy), suy ra $C'(5;-1;0)$, $CC' = |-6| = 6$.

$HC' = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

CM lớn nhất khi và chỉ khi $C'M$ lớn nhất.

$C'M$ lớn nhất bằng $(HC' + R) = 5 + 3 = 8$.

Suy ra độ dài đoạn CM lớn nhất bằng $\sqrt{C'M^2 + CC'^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Câu 20. Chọn B

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)$.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)^2$

$= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ (vì $MI^2 \geq 0$ với mọi điểm M)

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$.

Câu 21. Chọn B

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1;1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=d(I,(P))=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng $6MI^2+228=6.9+228=282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=1-2t\end{cases}$.

Ta có $M=\Delta\cap(P)$. Xét phương trình

$t+2(1+2t)-2(1-2t)-9=0\Leftrightarrow 9t-9=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;3;-1)$.

Câu 22. Chọn D

Cách 1:

Ta có $M(a\,;\,b\,;\,c)\in(S)\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=9$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$\left[1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\right]^2\le\left(1^2+2^2+2^2\right)\left[(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow\left[1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\right]^2\le 9.9\Leftrightarrow -9\le 1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\le 9$

$\Leftrightarrow -3\le a+2b+2c\le 15$ hay $-3\le P\le 15$.

Vậy $P_{\min}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-2}{1}=\dfrac{b-1}{2}=\dfrac{c-1}{2}\\1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-1\end{cases}$.

Khi đó $T=a+b+c=1+(-1)+(-1)=-1$.

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$, bán kính $R=3$. Để $M(a;b;c)\in(S)$ đồng thời $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải là điểm chung giữa (S) và mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-P=0$.

Suy ra $d(I;(\alpha))\le R \Leftrightarrow |6-P|\le 9 \Leftrightarrow -3\le P\le 15$. Ta có $P=-3$ khi $a=1$, $b=-1$, $c=-1$.

Vậy $T=a+b+c=-1$.

Câu 23. Chọn A

Cách 1:

Mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(y+4)^2=4.$ có tâm $I(0;3;-4)$, bán kính $R=2$.

Ta có: $OM^2-ON^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2=2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right)$, (vì $IM=IN=R$)

$=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{NM}=2.OI.\text{NM}.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{NM}\right)\ge -2OI.\text{NM}=-10$.

Dấu "=" xảy ra khi hai véc tơ $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{NM}$ ngược hướng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức OM^2-ON^2 là -10.

Cách 2:

Xét điểm $M(x;y;z)$, $N(a;b;c)$ ta có $\begin{cases} M\in(S) \\ N\in(S) \\ MN=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4(1) \\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2=4(2) \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1(3) \end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)$ theo vế có: $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=6(y-b)-8(z-c)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacopski) và (3) ta có

$OM^2-ON^2=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=6(y-b)-8(z-c)$

$\ge -\sqrt{\left(6^2+8^2\right)\left((y-b)^2+(z-c)^2\right)}\ge -\sqrt{\left(6^2+8^2\right)\left((y-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)}=-10.$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4 \\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2=4 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1 \\ x-a=0 \\ \dfrac{y-b}{6}=\dfrac{z-c}{-8}=k<0 \end{cases}$.

Chọn đáp án A.

*Một cách tương tự mở rộng cho min – max của $\alpha OM^2+\beta ON^2$.

Câu 24. Chọn C

Cách 1.

Gọi H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}=\vec{0} \Leftrightarrow H(13;-11;19)$.

Ta tính: $HA^2=1088$; $HB^2=272$; $\text{d}(H,(\alpha))=7\sqrt{3}$.

Ta có: $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-MH^2+2\overrightarrow{MH}\left(\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}\right)+HA^2-2HB^2 \Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-MH^2+544$.

$\Rightarrow MA^2-2MB^2\le -\mathrm{d}^2\left(H,(\alpha)\right)+544=397$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA^2-2MB^2=397$ khi M là hình chiếu vuông góc của H trên (α).

Cách 2.

Gọi $M(a;b;c)\in(\alpha) \Rightarrow a+b+c=0 \Leftrightarrow a=-b-c$.

Ta tính $MA^2=(-3-a)^2+(5-b)^2+(-5-c)^2$; $MB^2=(5-a)^2+(-3-b)^2+(7-c)^2$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-a^2+26a-b^2-22b-c^2+38c-107$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-2b^2-2b(24+c)-2c^2+12c-107$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-2\left(b+\dfrac{24+c}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}c^2+36c+181$

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-2\left(b+\dfrac{24+c}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}(c-12)^2+397 \Rightarrow MA^2-2MB^2\le 397$.

Giá trị lớn nhất của $MA^2-2MB^2=397$ khi $c=12;\ b=-18;\ a=6$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA^2-2MB^2=397$ khi $M(6;-18;12)$.

Câu 25. Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc d. Suy ra $(\alpha):2x+2y-z-3=0$.

Δ đi qua A và vuông với d nên Δ nằm trong (α).

Vì Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất nên Δ đi qua tâm K của đường tròn giao tuyến của (α) và (S).

Ta có: K là hình chiếu vuông góc của tâm I của mặt cầu lên (α) nên $K\left(\dfrac{23}{9};\dfrac{14}{9};\dfrac{47}{9}\right)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AK}=\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{5}{9};\dfrac{20}{9}\right)\Rightarrow\vec{u}=(1;1;4)$.

Câu 26. Chọn B

Chọn điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

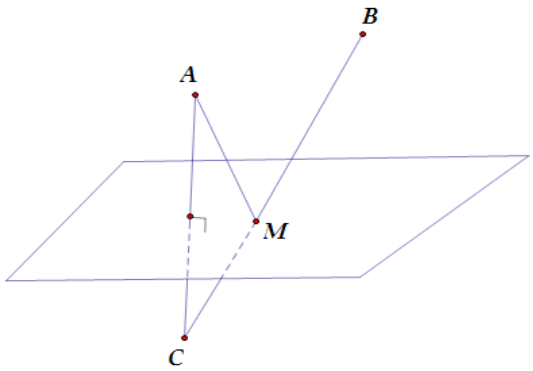
Khi đó: $\begin{cases}(-1-x_K)-2(3-x_K)+5(-4-x_K)=0\\(2-y_K)-2(-1-y_K)+5(0-y_K)=0\\(2-z_K)-2(-2-z_K)+5(3-z_K)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=-\dfrac{27}{4}\\y_K=1\\z_K=\dfrac{21}{4}\end{cases}\Rightarrow K\left(-\dfrac{27}{4};1;\dfrac{21}{4}\right)$.

$\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{IK}-2\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{IK}+5\overrightarrow{KC}\right|=\left|4\overrightarrow{IK}\right|=4IK$.

IK đạt giá trị nhỏ nhất khi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxz).

Vậy $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$.

Câu 27. Chọn C



Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

Vì $y_A.y_B=3>0$ nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (Oxz).

Lấy điểm C đối xứng với A qua (Oxz). Suy ra $C(-1;-3;4)$.

Khi đó $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MC+MB$ nhỏ nhất. Suy ra M là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (Oxz).

Đường thẳng $BC:\begin{cases}x=-1+t\\y=-3+t\\z=4-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Tọa độ điểm $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x=-1+t\\y=-3+t\\z=4-t\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow -3+t=0\Leftrightarrow t=3.$

$\Rightarrow M(2;0;1)\Rightarrow x_0=2$.

Câu 28. Chọn A

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t>0:\overrightarrow{MN}=t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t.\left|\vec{a}\right|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t=5$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$.

Gọi $A'(x';y';z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x'+4=5\\y'-7=-5\\z'-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1\\y'=2\\z'=3\end{cases}\Rightarrow A'(1;2;3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ suy ra $AM=A'N$ nên $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM-BN|=A'B=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$, đạt được khi $N=A'B\cap(Oxy)$.

Câu 29. Chọn C

Cách 1: Gọi $M(a;b;c)\in(S)$, ta có $(a+1)^2+(b-4)^2+c^2=8\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2a+8b-9$

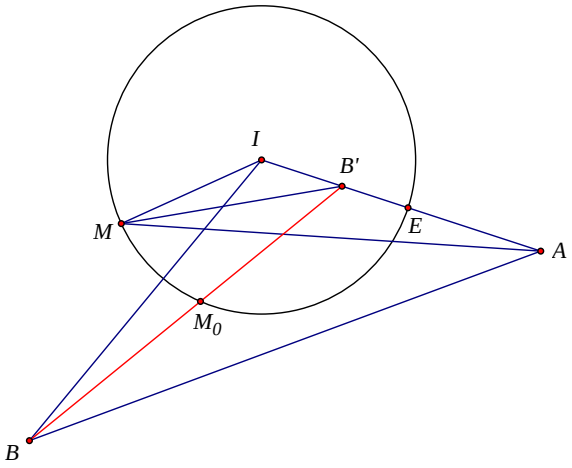
Do đó $MA=\sqrt{(a-3)^2+b^2+c^2}=\sqrt{4(a^2+b^2+c^2)-3(a^2+b^2+c^2)-6a+9}$

$2\sqrt{a^2+b^2+c^2-6b+9}=2\sqrt{a^2+(b-3)^2+c^2}=2MB'$ với $B'(0;3;0)$.

Dễ thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA+2MB=2(MB'+MB)$ nhỏ nhất khi B',M,B thẳng hàng.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $2BB'=6\sqrt{2}$.

Cách 2:



Ta có $IA=4\sqrt{2}$, với I là tâm mặt cầu.

Gọi $E(1;2;0), B'(0;3;0)$ lần lượt là trung điểm của IA và IE.

+ M là điểm nằm trên đường thẳng IA ta có $MB'=\frac{1}{2}MA$.

+ M là điểm không nằm trên đường thẳng IA ta có $\Delta IMB' \sim \Delta IAM$ nên $\frac{MB'}{MA}=\frac{IM}{IA}=\frac{1}{2}$,

ta có $MB'=\frac{1}{2}MA.$

Dễ thấy B'nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA+2MB=2(MB'+MB)$ nhỏ nhất khi B',M,B thẳng hàng. $M\equiv M_0$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $2BB'=6\sqrt{2}.$

Câu 30. Chọn D

Ta có $OA=a,OB=b;OC=c;AB=\sqrt{a^2+b^2},BC=\sqrt{b^2+c^2},CA=\sqrt{c^2+a^2}.$

$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}a.b.c.$

$OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1+\sqrt{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc},$

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge 3\sqrt[6]{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge 3\sqrt[6]{2ab.2bc.2ac}=3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}.$

Suy ra $a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{abc}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow abc\le\frac{1}{27}\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\le\frac{1}{162}\Leftrightarrow V_{OABC}\le\frac{1}{162}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0;b>0;c>0\\a=b=c\\a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

Vậy giá trị lớn nhất của V_{OABC} bằng $\frac{1}{162}.$

Câu 31. Chọn D

Ta có $M\left(a;b;c\right)\in\left(Oxy\right)$ nên $c=0$. Do đó $M\left(a;b;0\right).$

$\overrightarrow{MA}=\left(1-a;-1-b;2\right),\ \overrightarrow{MB}=\left(-2-a;-b;3\right),\ \overrightarrow{MC}=\left(-a;1-b;-2\right)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(1-a\right)\left(-2-a\right)+\left(-1-b\right)\left(-b\right)+6=a^2+a+b^2+b+4$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\left(-2-a\right)\left(-a\right)+\left(-b\right)\left(1-b\right)-6=a^2+2a+b^2-b-6$

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\left(-a\right)\left(1-a\right)+\left(1-b\right)\left(-1-b\right)-4=a^2-a+b^2-5$

Suy ra $S=a^2+a+b^2+b+4+2\left(a^2+2a+b^2-b-6\right)+3\left(a^2-a+b^2-5\right)=6a^2+2a+6b^2-b-23$

$S=6\left(a+\frac{1}{6}\right)^2+6\left(b-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{557}{24}\ge-\frac{557}{24}.$

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{557}{24}$ khi $a=-\frac{1}{6}$ và $b=\frac{1}{12}$

Khi đó $T=12a+12b+c=12.\left(-\frac{1}{6}\right)+12.\frac{1}{12}+0=-1.$

Câu 32. Chọn C

Ta có $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16.$

Vì điểm $M\in(S)\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16.$ (*)

Xét $T=2a+3b+6c=2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)+20$

$\le\sqrt{\left(2^2+3^2+6^2\right)\left((a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\right)}+20=7.4+20=48.$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a-1}{2}=\frac{b-2}{3}=\frac{c-2}{6}=t>0\Rightarrow\begin{cases}a=1+2t\\b=2+3t\\c=2+6t\end{cases}$, thay vào phương trình (*) ta

được: $4t^2+9t^2+36t^2=16\Rightarrow t=\frac{4}{7}.$

Do đó $M\left(\frac{15}{7};\frac{26}{7};\frac{38}{7}\right)$ và $P=2a-b+c=2.\frac{15}{7}-\frac{26}{7}+\frac{38}{7}=6.$

Câu 33. Chọn C

Mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=12$ có tâm $I(-1;0;4)$, bán kính $R=\sqrt{12}$.

Gọi $C(0;-1;3)$ là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+R^2-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}$

$=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+R^2-2.R.IC.\cos\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}\right).$

Vì I,A,B,R,C không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi $\cos\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}\right)=1$ lớn nhất hay hai vécto $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Cách 1: Đường thẳng IC có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{IC}=(1;-1;-1)$

Phương trình đường thẳng $IC:\begin{cases}x=-1+t\\y=-t\\z=4-t\end{cases}$

Điểm M thuộc đường thẳng IC nên $M=(-1+t;-t;4-t)$

Điểm M thuộc mặt cầu nên $(-1+t+1)^2+(-t)^2+(4-t-4)^2=12\Leftrightarrow3t^2=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$

Khi $t=-2$ thì $M(-3;2;6)$ và $\overrightarrow{IM}=(-2;2;2)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{IC}$ nên hai vécto $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ không cùng hướng.

Khi $t=2$ thì $M(1;-2;2)$ và $\overrightarrow{IM}=(2;-2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{IC}$ nên hai vécto $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Vậy $M(1;-2;2)$ hay $a+b+c=1$.

Cách 2: $IC=\sqrt{3}$, $IM=R=2\sqrt{3}$ và hai vécto $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{IC}$ (Tổng quát $\overrightarrow{IM}=\dfrac{IM}{IC}\overrightarrow{IC}$) hay C là trung điểm của đoạn thẳng IM. Suy ra $M(1;-2;2)$ hay $a+b+c=1$.

Bình luận: Bài toán cũng có thể ra ở dạng Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ **lớn** nhất, tính $a+b+c$.

Câu 34. Chọn C

• Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2(2-x)+3(-3-x)=0\\2(2-y)+3(3-y)=0\\2(4-z)+3(-1-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow H(-1;1;1)$$

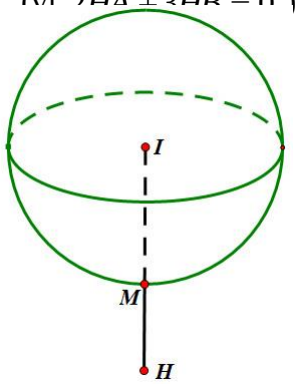
• Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2$

$=2\left(MH^2+HA^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}\right)+3\left(MH^2+HB^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}\right)$

$=5MH^2+2HA^2+3HB^2+\overrightarrow{MH}.\left(2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}\right)=5MH^2+2HA^2+3HB^2$ (vì $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$)

$=5MH^2+90$

Để $P=5MH^2+90$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH nhỏ nhất.

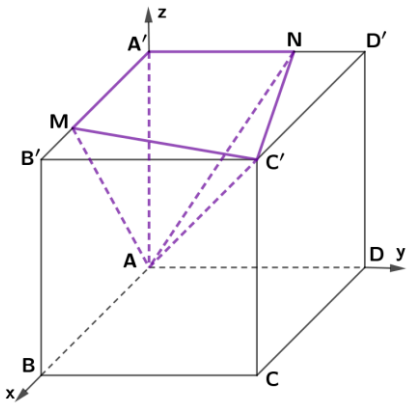


• Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

$IH=2\sqrt{3}>R$ nên điểm H nằm ngoài mặt cầu (S).

Khi đó: $MH_{\min}=|IH-R|=|2\sqrt{3}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min}=5.3+90=105$.

Câu 35. Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, ta có: $A(0;0;0)$, $A'(0;0;1)$, $C'(1;1;1)$.

$M(t;0;1)\in A'B', t\in[0;1]$, $N(0;m;1)\in A'D', m\in[0;1]$.(M , N lần lượt thuộc đoạn $A'B'$, $A'D'$)

$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(t;0;1)\\\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)\end{cases}\Rightarrow(AMC')$ có một vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC'}\right]=(-1;1-t;t)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AN}=(0;m;1)\\ \overrightarrow{AC'}=(1;1;1)\end{cases}\Rightarrow (ANC')$ có một vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AC'}\right]=(m-1;1;-m)$.

$(MAC')\perp(NAC') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow m+t+mt=2 \Rightarrow 2=m+t+mt \overset{Cauchy}{\leq} m+t+\dfrac{(m+t)^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{(m+t)^2}{4}+m+t-2\geq 0\Rightarrow m+t\geq 2\sqrt{3}-2$ vì $m,t\in[0;1]$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}t=m\\ t+m=2\sqrt{3}-2\end{cases}\Rightarrow t=m=\sqrt{3}-1$.

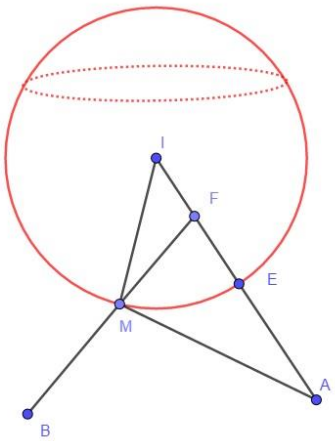
$S_{\Delta B'MC'}=\dfrac{1}{2}B'M.B'C'=\dfrac{1}{2}(1-t)$, $S_{\Delta D'NC'}=\dfrac{1}{2}D'N.D'C'=\dfrac{1}{2}(1-m)$, $S_{A'B'C'D'}=1$.

$S_{A'MC'N}=S_{A'B'C'D'}-S_{\Delta B'MC'}-S_{\Delta D'NC'}=\dfrac{1}{2}(m+t)$.

$V_{A.A'MC'N}=\dfrac{1}{3}AA'.S_{A'MC'N}=\dfrac{1}{6}(t+m)\geq\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$ là $\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$.

Câu 36. Chọn D



Nhận xét: điểm A,B nằm ngoài mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0), R=2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA=4\sqrt{2}=2R, E=IA\cap(S)\Rightarrow E(1;2;0)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE\Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có AIM chung và $\dfrac{IF}{IM}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{IM}{IA}\Rightarrow \Delta AIM\sim\Delta MIF$.

Suy ra $\dfrac{MA}{FM}=\dfrac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

Ta có: $MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2FB=6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M=BF\cap(S)$.

Câu 37. Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ nên

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}.\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OP}.\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)=3$

$\Leftrightarrow 3OP^2=3+2\overrightarrow{OP}\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right](1)$.

Giả sử $P\left(x;y;z\right)$ thì phương trình (1) trở thành

$3\left(x^2+y^2+z^2\right)=3+2t\left(2x+2y+z\right)\le 3+2t\sqrt{\left(4+4+1\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

Hay $3OP^2\le 3+6tOP\Leftrightarrow OP^2-2tOP-1\le 0\Rightarrow t-\sqrt{t^2+1}\le OP\le t+\sqrt{t^2+1}$

Từ giả thiết suy ra $t+\sqrt{t^2+1}=3\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}$. Vậy $Q=2a+b=11$.

Câu 38. Chọn B

Phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$.

Dễ thấy $D\in\left(ABC\right)$. Gọi H,K,I lần lượt là hình chiếu của A,B,C trên Δ.

Do Δ là đường thẳng đi qua D nên $AH\le AD,BK\le BD,CI\le CD$.

Vậy để khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất thì Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với $\left(ABC\right)$. Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+3t\\z=1+t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$. Kiểm tra ta thấy điểm $M\left(5;7;3\right)\in\Delta$.

Câu 39. Chọn C

Gọi $M\left(x;y;z\right)$, suy ra

$MA^2-MB^2=9\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2+\left(z-5\right)^2-\left[\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-4\right)^2\right]=9$

$\Leftrightarrow x+y+z-4=0$

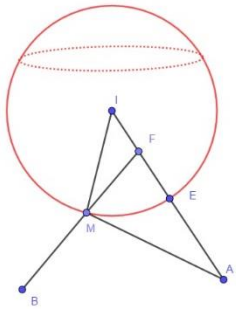
Suy ra: Tập các điểm $M\left(x;y;z\right)$ thỏa mãn $MA^2-MB^2=9$ là mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z-4=0$

Trên $\left(S_m\right)$ tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$ khi và chỉ khi $\left(S_m\right)$ và $\left(P\right)$ có điểm chung

$\Leftrightarrow d\left(I;\left(P\right)\right)\le R\Leftrightarrow\dfrac{\left|1+1+m-4\right|}{\sqrt{1+1+1}}\le\dfrac{\left|m\right|}{2}\Leftrightarrow 2\left|m-2\right|\le\sqrt{3}\left|m\right|$

$\Leftrightarrow m^2-16m+16\le 0\Leftrightarrow 8-4\sqrt{3}\le m\le 8+4\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8-4\sqrt{3}$.



Câu 40. Chọn D

Nhận xét: điểm A,B nằm ngoài mặt cầu $\left(S\right)$. Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(-1;4;0\right),R=2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA=4\sqrt{2}=2R,E=IA\cap\left(S\right)\Rightarrow E\left(1;2;0\right)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có AIM chung và $\frac{IF}{IM}=\frac{1}{2}=\frac{IM}{IA} \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM}=\frac{AI}{MI}=2 \Rightarrow MA=2MF$.

Ta có: $MA+2MB=2(MF+MB) \geq 2FB=6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M=BF \cap (S)$.

Câu 41. Chọn A

Chọn $I(a;b;c)$ thỏa $\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{4};\frac{-5}{4}\right)$.

Ta có : $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{MI}\right| = 4\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI \perp (Oxz)$.

Lúc đó $4\left|\overrightarrow{MI}\right|=4d\left(I;(Oxz)\right)=1$.

Câu 42. Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính là $R_1=2$. Mặt cầu (S_2) cũng có tâm $I(1;-2;1)$ nhưng bán kính là $R_2=\sqrt{10}$.

Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng AB, CD.

Ta có $AB=2\sqrt{R_1^2-a^2}=2\sqrt{4-a^2}$, $CD=2\sqrt{R_2^2-b^2}=2\sqrt{10-b^2}$

và $d(AB,CD) \leq d(I,AB)+d(I,CD)=a+b$. Thêm nữa: $\sin(AB,CD) \leq 1$.

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD) \leq \frac{2}{3}(a+b)\sqrt{4-a^2}\sqrt{10-b^2}$.

Ta có: $a+b=a+\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}}$

và $\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)\left(4-a^2\right)\left(5-\frac{b^2}{2}\right) \leq \left(\frac{a^2+\frac{b^2}{2}+4-a^2+5-\frac{b^2}{2}}{3}\right)^3=27$.

Vậy $V_{ABCD} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.\sqrt{2}.\sqrt{27}=6\sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt được tại $a=1$, $b=2$ và hai đường AB, CD vuông góc với nhau

CHỦ ĐỀ 2 : PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

LÍ THUYẾT

❖ Trong không gian $Oxyz$ phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Phương trình mặt phẳng (P) : $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$. Có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_o(x_o;y_o;z_o)$ và nhận vecto $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n}\neq\vec{0}$ làm vecto pháp tuyến có dạng $(P): A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_0)=0$
- Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương ,có giá song song hoặc nằm trên (P) thì vecto pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

❖ **Các trường hợp riêng của mặt phẳng :**

Trong không gian $Oxyz$ cho mp(α): $Ax+By+Cz+D=0$, với $A^2+B^2+C^2>0$. Khi đó:

- $D=0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
- $A=0,B\neq0,C\neq0,D\neq0$ khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox
- $A=0,B=0,C\neq0,D\neq0$ khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)
- $A,B,C,D\neq0$. Đặt $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$ Khi đó $(\alpha):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

❖ **Vị trí tương đối của hai mặt phẳng**

Trong không gian $Oxyz$ cho mp(α): $Ax+By+Cz+D=0$ và (α'): $A'x+B'y+C'z+D'=0$

- (α) cắt (α') $\Leftrightarrow\begin{cases}AB'\neq A'B\\BC'\neq B'C\\CB'\neq C'B\end{cases}$ $(\alpha)\,//\,(\alpha')$ $\Leftrightarrow\begin{cases}AB'=A'B\\BC'=B'C\\CB'=C'B\end{cases}$ và $AD'\neq A'D$
- $(\alpha)\equiv(\alpha')$ $\Leftrightarrow\begin{cases}AB'=A'B\\BC'=B'C\\CB'=C'B\\AD'=A'D\end{cases}$
- **Đặc biệt:** $(\alpha)\perp(\alpha')$ $\Leftrightarrow\vec{n_1}.\vec{n_2}=0\Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

❖ **Góc giữa hai mặt phẳng:**

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(0^o\le\varphi\le90^o\right)$

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

- $\cos\varphi=\left|\cos(\vec{n_P},\vec{n_Q})\right|=\dfrac{\left|\vec{n_P}.\vec{n_Q}\right|}{\left|\vec{n_P}\right|.\left|\vec{n_Q}\right|}=\dfrac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ và $P(0;0;p)$ Với m, n, p là các số dương thay đổi thỏa $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=3$. Mặt phẳng (MNP) luôn đi qua điểm:

A. $F(3;3;3)$. **B.** $E\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $H\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $G(1;1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Mà: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=3\Rightarrow\frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3p}=1$. Vậy mặt phẳng (MNP) luôn đi qua $E\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

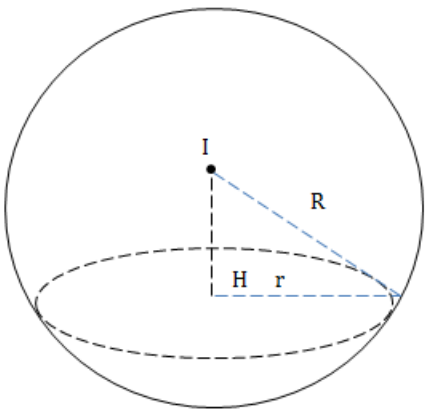
VÍ DỤ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $\left[\begin{array}{l}2x+2y-z-1=0\\2x+2y-z+11=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}2x+2y-z-6=0\\2x+2y-z+3=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}2x+2y-z-4=0\\2x+2y-z+17=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}2x+2y-z+2=0\\2x+2y-z+8=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q).

Đặt $IH=x$ ta có $r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{12-x^2}$

Vậy thể tích khối nón tạo được là $V=\frac{1}{3}.IH.S_{((C))}=\frac{1}{3}.x.\pi\left(\sqrt{12-x^2}\right)^2=\frac{1}{3}\pi\left(12x-x^3\right)$.

Gọi $f(x)=12x-x^3$ với $x\in(0;2\sqrt{3})$. Thể tích nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $f'(x)=12-3x^2$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên :

x	0		2		$2\sqrt{3}$
f'		+	0	−	
f	0	↗	16	↘	0

Vậy $V_{\max}=\frac{1}{3}\pi 16=\frac{16\pi}{3}$ khi $x=IH=2$.

Mặt phẳng $(Q)//(P)$ nên $(Q):2x+2y-z+a=0$

Và $d(I;(Q))=IH \Leftrightarrow \frac{|2.1+2(-2)-3+a|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow |a-5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=11 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy mặt phẳng (Q) có phương trình $2x+2y-z-1=0$ hoặc $2x+2y-z+11=0$.

VÍ DỤ 3: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$ là trực tâm của ΔABC với A,B,C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox,Oy,Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A,B,C là

A. $3x+y+2z-9=0$ **B.** $x+2y+3z-14=0$ **C.** $3x+2y+z-10=0$ **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$

Lời giải

Chọn B

Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1-a;2;3);\overrightarrow{BH}(1;2-b;3);\overrightarrow{BC}(0;-b;c);\overrightarrow{AC}(-a;0;c)$

Do H là trực tâm nên ta có: $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2b+3c=0 \\ -a+3c=0 \end{array}\right.$

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Vì $H\in(ABC)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} -2b+3c=0 \\ -a+3c=0 \\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2b \\ c=\frac{2b}{3} \\ \frac{1}{2b}+\frac{2}{b}+\frac{9}{2b}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=14 \\ b=7 \\ c=\frac{14}{3} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S)

A. $x-2y-2z+1=0$.
B. $-x+2y+2z+5=0$.
C. $x-2y-2z-23=0$.
D. $-x+2y+2z+17=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương trình (Q) có dạng: $x-2y-2z+D=0 \ (D\neq -5)$.

(Q) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I,(Q))=R \Leftrightarrow \frac{|1-2.(-2)-2.(-3)+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$

$\Leftrightarrow |D+11|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D+11=6 \\ D+11=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-5 \\ D=-17 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện suy ra $D=-17$.

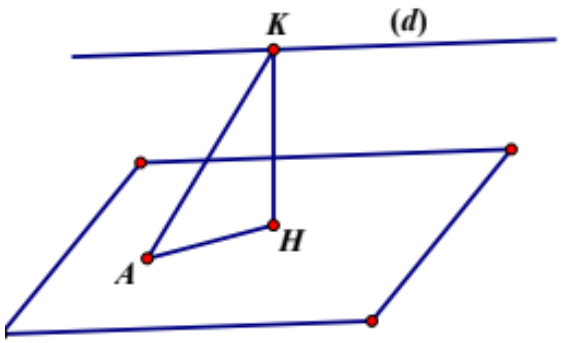
Vậy phương trình của (Q) là $x-2y-2z-17=0 \Leftrightarrow -x+2y+2z+17=0$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Ozyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x+3y+2z+10=0$.
B. $x-2y-3z-1=0$.
C. $3x+z+2=0$.
D. $x-y-6=0$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $K(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d. Tọa độ của K là nghiệm của hệ $\begin{cases} -x+1=y-1 \\ y-1=-z+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow K(1;1;1)$.

Ta có $d\left((d),(P)\right)=d\left(K,(P)\right)=KH\le KA=\sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overrightarrow{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overrightarrow{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x+z+2=0$.

VÍ DỤ 6: Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(0;8;2)$, $B(9;-7;23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$. Mặt phẳng $(P):x+by+cz+d=0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b+c+d$ khi đó là

A. $b+c+d=2$. **B.** $b+c+d=4$. **C.** $b+c+d=3$. **D.** $b+c+d=1$

Lời giải

Chọn C

Vì $A\in(P)$ nên ta $8b+2c+d=0\Leftrightarrow d=-8b-2c\Rightarrow(P):x+by+cz-(8b+2c)=0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d\left(I;(P)\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}$.

Ta có: $d\left(B;(P)\right)=\dfrac{|9-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=\dfrac{|(5-11b+5c)+4(1-b+4c)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

$\Rightarrow d\left(B;(P)\right)\le\dfrac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}+4\dfrac{|1-b+4c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}\Leftrightarrow d\left(B;(P)\right)\le 6\sqrt{2}+4\dfrac{|1-b+4c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

$\overset{Cosi-Svac}{\Leftrightarrow} d\left(B;(P)\right)\le 6\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{(1+1+16)(1+b^2+c^2)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}}\Leftrightarrow d\left(B;(P)\right)\le 18\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 1=-b=\dfrac{c}{4} \\ \dfrac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=4 \\ d=0 \end{cases}$.

Vậy $P_{\max}=18\sqrt{2}$ khi $b+c+d=3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1. VECTO CHỈ PHƯƠNG, TÍCH CÓ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG CỦA PT MẶT PHẲNG

Câu 1. Xét đường thẳng d xác định bởi $\begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ và đường thẳng d' xác định bởi $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$. Tính bán kính bé nhất R của mặt cầu tiếp xúc với cả d và d'.

A. $R=1$. **B.** $R=\dfrac{1}{2}$. **C.** $R=2$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$. **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$.

C. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 4. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;-3)$ và chứa trục Oy ?

A. $3y+z=0$. **B.** $x-y-z=0$. **C.** $3x+z=0$. **D.** $x+3z=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm A,B,C là $ax+by+cz+d=0$ với $a+b^2+c^2=21$ và $a>0$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng:

A. 2 . **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 6. Trong không gian Oxy, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Thể tích của (S) bằng

A. 12π. **B.** 9π. **C.** 36π. **D.** 36.

Câu 7. Trong không gian Oxy, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Thể tích của (S) bằng

A. 12π. **B.** 9π. **C.** 36π.. **D.** 36.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3)$ có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1), B(-2;1;-1), C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là

A. $R=\sqrt{10}$. **B.** $R=2\sqrt{2}$. **C.** $R=2\sqrt{2}-1$. **D.** $R=\sqrt{10}-1$.

Câu 10. Phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx+4y+2mz+m^2+5m=0$ là phương trình mặt cầu khi

A. $m<4$. **B.** $m>1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;-2)$, $B(3;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $2x+3y+4=0$. **B.** $x-2y+2x-8=0$.

C. $x-2y+2z+8=0$. **D.** $x-2y+2z+4=0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là :

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x-y+3z-4=0$. **C.** $x-2y-4=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng có phương trình nào sau đây song song với mặt phẳng Oxz

A. $(d_1):\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$. **B.** $(d_2):\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$.

C. $(d_3):\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=6-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$. **D.** $(d_4):\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=5-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau song song với đường thẳng $(d):\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$

A. $(P):z+2y+3z=5$. **B.** $(Q):3x-y-2z=5$.

C. $(\alpha):3x-3y+z=5$. **D.** $(\beta):3x-3y+z=0$.

Câu 15. Cho không gian $Oxyz$, viết phương trình đoạn chắn mặt phẳng đi qua điểm $A(2,0,0);\ B(0,-3,0);\ C\ (0,0,2)$

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{2}=1$. **C.** $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. 243π. **B.** 81π. **C.** $\dfrac{81}{2}\pi$. **D.** $\dfrac{243\pi}{2}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào **đúng**?

A. $a+b=0$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=-2$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn B**

Ta có VTCP của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{i},\vec{m}\right]=(0;-1;1)$ với $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{m}=(0;1;1)$.

Suy ra đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;1)$, có vtcp $\overrightarrow{u_d}=(0;-1;1)$ nên có phương trình tham số là: $d:\begin{cases}x=1\\y=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
$z=1+t$

Tương tự, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(0;1;1)$, có vtcp $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\vec{i},\vec{n}\right]=(0;1;1)$ với $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{n}=(0;1;-1)$ nên có phương trình tham số là: $d':\begin{cases}x=0\\y=1+t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$.
$z=1+t'$

Ta có $\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right].\overrightarrow{MM'}=2\neq 0\Rightarrow$ d,d' chéo nhau.

Do đó mặt cầu tiếp xúc với cả d và d' có đường kính nhỏ nhất bằng khoảng cách giữa d và d'.

Ta có: $d(d,d')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right|}=1$.

Suy ra, bán kính bé nhất R của mặt cầu tiếp xúc với cả d và d' là: $R=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. **Chọn D**

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Xét đáp án D ta thấy: $a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=10\ \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d=-1<0$ nên chọn D

Câu 3. **Chọn A**

Ta có $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$

$\Leftrightarrow(x+2m)^2+(y+m)^2+(z-m)^2=28-3m^2\ (1)$.

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28-3m^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{28}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Câu 4. **Chọn C**

Gọi mặt phẳng cần tìm là (α).

Do (α) đi qua điểm $M(1;4;-3)$ và chứa trục Oy nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{j},\overrightarrow{OM}\right]=(-3;0;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α): $-3(x-1)+0(y-4)-(z+3)=0\Leftrightarrow 3x+z=0$.

Câu 5. **Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1), \overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;-8).$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;2;-4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Theo giả thiết , mặt phẳng (ABC) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ nên $\overrightarrow{n_2}=(a;b;c)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC). Do đó tồn tại số thực $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho $\overrightarrow{n_2}=k.\overrightarrow{n_1}\Leftrightarrow\begin{cases}a=k\\b=2k\\c=-4k\end{cases}$. Vì $a>0$ nên $k=a>0.$

Vì $C(-2;0;1)\in(ABC)$ nên ta có: $-2k-4k+d=0\Leftrightarrow d=6k$.

Lại có $a+b^2+c^2=21$ nên $k+4k^2+16k^2=21\Leftrightarrow 20k^2+k-21=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}k=1 & \text{(nhan)}\\ k=-\frac{21}{20} & \text{(loai)}\end{array}\right.$.

Với $k=1$ thì $a+b+c+d=k+2k-4k+6k=5k=5.$ Vậy $a+b+c+d=5.$

Câu 6. **Chọn C**

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $r=3$. Thể tích của (S) là: $V=\frac{4}{3}.\pi.3^3=36\pi$.

Câu 7. **Chọn C**

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $r=3$. Thể tích của (S) là: $V=\frac{4}{3}.\pi.3^3=36\pi$.

Câu 8. **Chọn D**

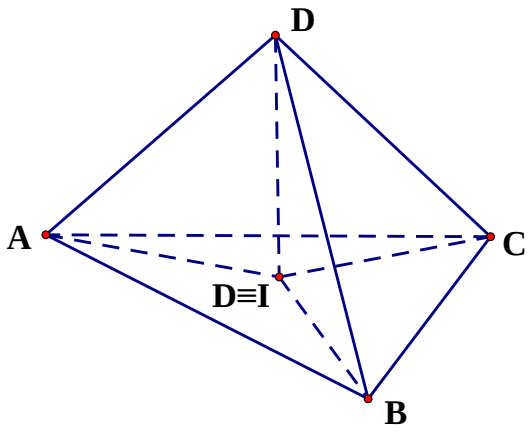
Đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;0)$.

Khi đó $\overrightarrow{AI}=(0;0;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}\right]=(2;4;0),\ \left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}\right]\right|=2\sqrt{5}$.

Do (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d nên bán kính mặt cầu (S) là $R=d(I;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 9. **Chọn D**

Gọi D là tâm mặt cầu (S) thì $AD=BD=CD=R+1$.Suy ra điểm D thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra R nhỏ nhất khi và chỉ khi D trùng với tâm I đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vì $D\in mp(ABC)$ có phương trình: $z=-1$ nên ta đặt $D(x,y,-1)$, ta có hệ sau:



$\begin{cases} x^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \\ x^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(1;0;-1)$. Vậy $R=AD-1=\sqrt{10}-1$.

Câu 10. Chọn C

Ta có $\begin{cases} -2a=-2m \\ -2b=4 \\ -2c=2m \\ d=m^2+5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=m \\ b=-2 \\ c=-m \\ d=m^2+5m. \end{cases}$

Để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu thì $a^2+b^2+c^2-d>0$

$\Leftrightarrow m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Câu 11. Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-4;4)$ là một VTPT của mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;3;0)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm I và có VTPT $\vec{n}=(2;-4;4)$ nên có phương trình là: $2(x-2)-4(y-3)+4(z-0)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z+4=0$.

Câu 12. Chọn A

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là :

$2(x-1)-1(y-2)+3(z+3)=0 \Leftrightarrow 2x-y+3z+9=0$.

Câu 13. Chọn D

Mặt phẳng Oxz có một véctơ pháp tuyến là véctơ $\vec{j}=0;1;0$.

Nếu một đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz thì véctơ chỉ phương của mặt phẳng đó phải vuông góc với véctơ $\vec{j}$, khi đó đáp án C và D thỏa mãn

Mặt khác, lấy $A(1;3;5) \in (d_4)$, vì $A \notin (Oxz)$ nên nhận đáp án D.

Câu 14. Chọn C

Đường thẳng (d) có một véctơ chỉ phương là véctơ $\vec{u}=(1;2;3)$, và đi qua điểm $A(-1;-2;-3)$.

Mặt phẳng (α) và (β) đều có véctơ pháp tuyến vuông góc với véctơ $\vec{u}$, và $A \notin (\alpha)$, nên mặt phẳng (α) song song đường thẳng (d) .

Câu 15. Chọn B

Ta có: phương trình đoạn chắn mặt phẳng đi qua điểm $A(2,0,0)$; $B(0,-3,0)$; $C(0,0,2)$ là:

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1$.

Câu 16. Chọn D

Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Do H là trực tâm tam giác ABC nên $a,b,c \neq 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mà $H(1;2;-2)\in(\alpha)$ nên: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}-\frac{2}{c}=1$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1-a;2;-2)$, $\overrightarrow{BH}=(1;2-b;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

Lại có H là trực tâm tam giác ABC, suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}b=-c\\ a=-2c\end{cases}$ (2) .

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{-2c}+\frac{2}{-c}-\frac{2}{c}=1\Leftrightarrow c=-\frac{9}{2}$, khi đó $a=9, b=\frac{9}{2}$.

Vậy $A(9;0;0)$, $B\left(0;\frac{9}{2};0\right)$, $C\left(0;0;-\frac{9}{2}\right)$.

Khi đó, giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình là: $x^2+y^2+z^2-2a'x-2b'y-2c'z+d=0$. Với $(a')^2+(b')^2+(c')^2-d>0$

Vì 4 điểm O, A, B, C thuộc mặt cầu nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}d=0\\ -18a'+d=-81\\ -9b'+d=-\frac{81}{4}\\ 9c'+d=-\frac{81}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=0\\ a'=\frac{9}{2}\\ b'=\frac{9}{4}\\ c'=-\frac{9}{4}\end{cases}.$$

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là: $x^2+y^2+z^2-9x-\frac{9}{2}y+\frac{9}{2}z=0$, có tâm $I\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4};-\frac{9}{4}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2-0}=\frac{9\sqrt{6}}{4}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tự diện $OABC$ là $S=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{243\pi}{2}$.

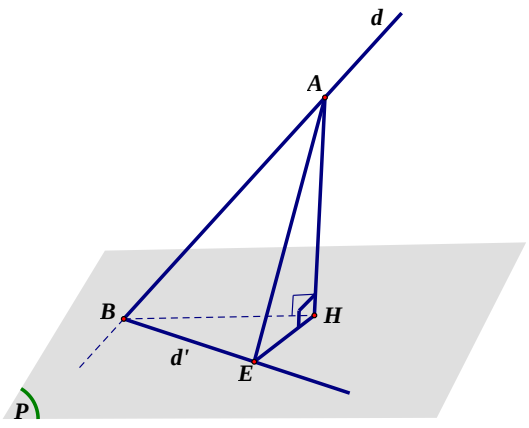
Câu 17. Chọn D

Cách 1

Gọi d' là giao tuyến của (P) và (Q), B là giao điểm của d và (P). Suy ra B cố định và $B\in d'$

Trên đường thẳng d lấy điểm A không trùng với B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), E là hình chiếu vuông góc của H lên d'.



Ta có $AH \perp (P); BE \subset (P) \Rightarrow AH \perp BE$. Mà $BE \perp EH$. Suy ra $BE \perp EA$

Vậy góc giữa (P) và (Q) là góc AEH

Ta có tam giác AEH vuông tại H và AH không đổi

Vì vậy, góc AEH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ EH lớn nhất. Mà $EH \le BH$; BH không đổi

Suy ra EH lớn nhất $\Leftrightarrow$ E trùng với $B \Leftrightarrow d'$ vuông góc với BH. Từ đó, d' vuông góc với d

Vậy (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa d và d'

Ta có $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P); $\overrightarrow{u_d} = (-1;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của d

$\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{u_d}\right] = (3;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = (1;0;1)$ là một vectơ chỉ phương của d'

$\left[\overrightarrow{u_{d'}};\overrightarrow{u_d}\right] = (-2;-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (-1;-1;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q)

Suy ra $a=-1; b=-1 \Rightarrow a+b=-2$.

Cách 2. Ta có: $\overrightarrow{u_d} = (-1;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của d

$\overrightarrow{n_Q} = (a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q)

$\overrightarrow{n_P} = (2;-1;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

(Q) là mặt phẳng chứa d nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow -a+2b+1=0 \Leftrightarrow a = 2b+1 \quad (1)$

Gọi α là góc giữa (P) và $(Q) \Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \dfrac{|2a-b-2|}{3.\sqrt{a^2+b^2+1}} \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta có

$$\cos\alpha = \frac{|4b+2-b-2|}{3\sqrt{4b^2+4b+1+b^2+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2+4b+2}} = \frac{1}{\sqrt{5+\frac{4}{b}+\frac{2}{b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{b}+1\right)^2+3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Góc α nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Khi đó $\dfrac{1}{b}+1=0 \Leftrightarrow b=-1$. Suy ra $a=-1$. Vậy $a+b=-2$.

DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;2;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm của tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $2x+y+3z+9=0.$ **B.** $2x+2y+3z+14=0$.

C. $2x+y+z-9=0$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Ox và đi qua điểm $M(2;-1;3)$.

A. $(\alpha):-y+3z=0$. **B.** $(\alpha):2x-z+1=0$.

C. $(\alpha):x+2y+z-3=0$. **D.** $(\alpha):3y+z=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$. **B.** $6x+3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z=0$. **D.** $6x+3y+2z-36=0$.

Câu 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;-3)$, biết (α) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC nhận M làm trực tâm

A. $2x+5y+z-6=0.$ **B.** $2x+y-6z-23=0.$

C. $2x+y-3z-14=0.$ **D.** $3x+4y+3z-1=0.$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):\ x+y+z=0$.

A. $x-y-z=0$. **B.** $x+y-3=0$. **C.** $x-y-1=0$. **D.** $x+y+z-4=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q):x-2y+3z+1=0$

A. $x-2y+3z+6=0$. **B.** $x-2y+3z+16=0$.

C. $x-2y+3z-6=0$. **D.** $x-2y+3z-16=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng vuông góc với trục Oz?

A. $2y+3=0$. **B.** $2z+3=0.$ **C.** $2x+2y+3=0$. **D.** $2x+3=0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4), B(-1;2;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là?

A. $4x+2y+12z+7=0$. **B.** $4x-2y+12z+7=0$.

C. $4x+2y-12z-17=0$. **D.** $4x-2y-12z-17=0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;1), B(1;2;4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P):2x-3y-3z-16=0.$ **B.** $(P):2x-3y-3z-6=0.$

C. $(P):-2x+3y+3z-6=0.$ **D.** $(P):-2x+3y+3z-16=0.$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x+y-2z+1=0.$ **B.** $2x+y-2z=0.$ **C.** $2x-y-2z=0.$ **D.** $2x-y+2z=0.$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng $(Q):x+2y+2z-3=0$ một khoảng bằng 1; đồng thời (P) không qua O là

A. $x+2y+2z+1=0.$ **B.** $x+2y+2z=0.$

C. $x+2y+2z-6=0.$ **D.** $x+2y+2z+3=0.$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=5-4t\\z=-6+7t\end{cases};t\in\mathbb{R}$ và điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d là

A. $3x-4y+7z+10=0.$ **B.** $3x-4y+7z+16=0.$

C. $3x-4y+7z-16=0.$ **D.** $3x-4y+7z-10=0.$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với hai đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$, $\Delta':\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{1}$ có phương trình là

A. $x-y-4z+10=0.$ **B.** $x+y+4z-8=0.$ **C.** $x-y+4z-6=0.$ **D.** $x+y-4z+8=0.$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(1;0;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. (Q) là mặt phẳng song song với (P) đồng thời đường thẳng AB cắt (Q) tại C sao cho $CA=2CB$. Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x+y+z-\dfrac{4}{3}=0$ hoặc $x+y+z=0$. **B.** $x+y+z=0$.

C. $x+y+z-\dfrac{4}{3}=0$. **D.** $x+y+z-2=0$ hoặc $x+y+z=0$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$?

A. $2x+y-3z-14=0.$ **B.** $4x+5y-3z-22=0.$

C. $4x+5y-3z+22=0.$ **D.** $4x-5y-3z-12=0.$

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):2x-3y+z-2=0$ và chứa đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A. $x+y+z-1=0.$ **B.** $3x+y-z+3=0.$

C. $x-y+z-3=0.$ **D.** $2x+y-z+3=0.$

Câu 17. Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;-1;0)$, $B(0;1;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ và song song với đường thẳng AB. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (α)?

A. $M(6;-4;-1)$. **B.** $N(6;-4;2)$. **C.** $P(6;-4;3)$. **D.** $Q(6;-4;1)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* , cho mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2);B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z+3=0$. **B.** $x+y+z-2=0$. **C.** $3x-2y-z-3=0$. **D.** $-x+y=0$.

Câu 19. Trong không gian *Oxyz* , cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $D(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A. $2x+3y-6z+1=0$. **B.** $3x+2y-6z+1=0$.

C. $3x+2y-5z=0$. **D.** $6x+2y-3z-5=0$.

Câu 20. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng (P) chứa điểm $A(3;-1;2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=3-2t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $3x-5y-z+8=0$. **B.** $2x+y-2z-6=0$.

C. $x+y+z-4=0$. **D.** $x-2y+z-7=0$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* , cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$, $(Q):x-z+2=0$ .Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục *Ox* tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là:

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $x+y+z+3=0$. **C.** $-2x+z+6=0$. **D.** $-2x+z-6=0$.

Câu 22. Trong không gian *Oxyz* , cho hai điểm $A(3;1;-1),B(2;-1;4)$. Phương trình mặt phẳng (OAB) với O là gốc tọa độ là

A. $3x+14y+5z=0$. **B.** $3x-14y+5z=0$. **C.** $3x+14y-5z=0$. **D.** $3x-14y-5z=0$.

Câu 23. Trong không gian *Oxyz* , mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;2)$ và vuông góc với đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $2x+y-3z+8=0$. **B.** $2x-y+3z-8=0$. **C.** $2x-y+3z+8=0$. **D.** $2x+y-3z-8=0$.

Câu 24. Trong không gian *Oxyz* , phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$ và $(R):2x-y+z=0$ là:

A. $4x+5y-3z-22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z+22=0$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $ax+by+cz-18=0$ cắt ba trục toạ độ tại A,B,C sao cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-1;-3;2)$. Giá trị $a+c$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -5. **D.** -3.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm $A(1;3;2)$ có phương trình là

A. $x+y-4=0$. **B.** $y-3=0$. **C.** $3y-1=0$. **D.** $x-1=0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $(Q):2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+8=0$.

B. $(Q):2x+2y-z-1=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+11=0$.

C. $(Q):2x+2y-z-6=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+3=0$.

D. $(Q):2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+2=0$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

A. $2x+2y+z-1=0$. **B.** $2x+2y+z-3=0$.

C. $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x+2y+z-5=0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(a;b;c)$ với $a,b,c>0$. Mặt phẳng (P) chứa điểm H và lần lượt cắt các trục Ox,Oy,Oz tại A,B,C thỏa mãn H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$ **B.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3$.

C. $ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$. **D.** $a^2x+b^2y+c^2z-a^3-b^3-c^3=0$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P):x+2y+z-14=0$. **B.** $(P):x+2y+3z-14=0$.

C. $(P):x+2y+3z-11=0$. **D.** $(P):x+y+3z-14=0$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):ax+by+cz-27=0$ qua hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=2$. **B.** $S=-12$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-2$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$ $d:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z+4=0$ .Mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) góc với số đo nhỏ nhất có phương trình là

A. $x-z-2=0$. **B.** $x+z-2=0$. **C.** $3x+y+z-1=0$. **D.** $x+y-z+3=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(3;-1;5)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox, Oy và Oz lần lượt tại các điểm D, E và F. Biết thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-3y+4z\pm\sqrt[3]{36}=0$. **B.** $2x-3y+4z+\frac{3}{2}=0$.

C. $2x-3y+4z\pm12=0$. **D.** $2x-3y+4z\pm6=0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M(4;-4;1)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $(\alpha):3x-z=0$. **B.** $(\alpha):3x+z=0$.

C. $(\alpha):x-3z=0$. **D.** $(\alpha):3x+z+2=0$.

Câu 37. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=16$ và điểm $A(1;2;-1)$. Điểm $B(a;b;c)$ thuộc mặt cầu sao cho AB có độ dài lớn nhất. Tính $a+b+c$.

A. -6. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 12.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0),B(0;1;0)$. Mặt phẳng đi qua các điểm A,B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị $a+3b-2c$.

A. 16. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 6

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1):3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2):3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là:

A. $(P):3x-y+4z+10=0$. **B.** $(P):3x-y+4z+5=0$.

C. $(P):3x-y+4z-10=0$. **D.** $(P):3x-y+4z-5=0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ 1;2;1$, $B\ 3;4;0$, mặt phẳng $P: ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng P lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua ba điểm $A(1;3;2)$, $B(2;5;9)$, $C(-3;7;-2)$ có phương trình là $3x+ay+bz+c=0$. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. -6. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 6.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(10;1;1)$, $B(10;4;1)$ và $C(10;1;5)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 1; gọi (S_2) là mặt cầu có tâm B, bán kính bằng 2 và (S_3) là mặt cầu có tâm C, bán kính bằng 4. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A.4. **B.**7. **C.**2. **D.** 3.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $ax+by+cz-24=0$ qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P):3x-2y+z+4=0$, $(Q):5x-4y+3z+1=0$. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hinh lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ biết $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A_1(0;0;1)$. Gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ là phương trình mặt phẳng chứa CD_1 và tạo với mặt phẳng (BB_1D_1D) một góc có số đo nhỏ nhất. Giá trị của $T=a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;2;4)$; $N(0;1;2)$; $P(2;1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+Ay+Bz+C=0$. Biết (α) song song với OP và đi qua hai điểm M, N. Giá trị của biểu thức $A+B-C$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 0.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $ax+by+cz+5=0$ qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và vuông góc với $(P):2x-y+3z+4=0$. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P); các điểm A,B,C phân biệt di động trên (S) sao cho AM,BM,CM là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;-1;3)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. **D.** $(0;3;-1)$.

Câu 48. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng

A. 12. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 18.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có $SC=AB=3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{-1}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Khi ba điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+y-4z-14=0$. **C.** $x-2y-7z-8=0$. **D.** $x+y-4z+14=0$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;0;-2)$, $C(2;-1;0)$, $D(-2;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng song song với AB,CD và cắt 2 đường thẳng AC,BD lần lượt tại M,N thỏa mãn $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn B**

Ta có $\left.\begin{matrix} OA\perp OB \\ OA\perp OC \end{matrix}\right\}\Rightarrow OA\perp (OBC)\Rightarrow OA\perp BC$

Mặt khác $BC\perp AM$ suy ra $BC\perp (OAM)\Rightarrow BC\perp OM$.

Ta có $\left.\begin{matrix} OB\perp OA \\ OB\perp OC \end{matrix}\right\}\Rightarrow OB\perp (OAC)\Rightarrow OB\perp AC$

Mặt khác $AC\perp BM$ suy ra $AC\perp (OBM)\Rightarrow AC\perp OM$.

Từ đó, ta có $OM\perp (ABC)$ hay $OM\perp (P)$ nên (P) nhận $\overrightarrow{OM}=(2;2;3)$ làm một véctơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P): $2(x-2)+2(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow 2x+2y+3z-17=0$.

Trong các đáp án, ta chọn mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) là mặt phẳng có phương trình $2x+2y+3z+14=0$. Các đáp án A, C, D loại vì các mặt phẳng đó không nhận $\overrightarrow{OM}=(2;2;3)$ làm một véctơ pháp tuyến.

Câu 2. **Chọn D**

Cách 1: Ta có $\begin{cases} \vec{i}=(1;0;0) \\ \overrightarrow{OM}=(2;-1;3) \end{cases}\Rightarrow \left[\vec{i},\overrightarrow{OM}\right]=(0;-3;-1)$.

Do đó (α) qua điểm O và có 1 véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;3;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $3(y-0)+(z-0)=0$ hay $3y+z=0$.

Vậy chọn phương án **D**.

Cách 2

Mặt phẳng (α) chứa Ox nên loại B và C.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình ở phương án **A** và **D**. Suy ra chọn phương án **D**.

Câu 3. **Chọn A**

Phương trình $mp(ABC)$: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên phương trình có dạng:

$$6x+3y+2z+d=0,\ d\neq -12.$$

Mặt phẳng (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC)

$\Leftrightarrow d\left((ABC),(P)\right)=d\left(D,(P)\right)\Leftrightarrow d\left(A,(P)\right)=d\left(D,(P)\right)$

$\Leftrightarrow \frac{|6.2+d|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|6.2+3.4+2.6+d|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}\Leftrightarrow |d+12|=|d+36|\Leftrightarrow d=-24$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 4. **Chọn C**

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), abc\neq 0.$

Khi đó mặt phẳng (α) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Do $M\in(\alpha)\Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{c}=1 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2-a;1;-3), \overrightarrow{BM}=(2;1-b;-3), \overrightarrow{BC}=(0;-b;c), \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Do M là trực tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b-3c=0\\ -2a-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3c\\ a=-\frac{3c}{2}\end{cases} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có: $-\frac{4}{3c}-\frac{1}{3c}-\frac{3}{c}=1\Leftrightarrow c=-\frac{14}{3}\Rightarrow a=7, b=14.$

Do đó $(\alpha): \frac{x}{7}+\frac{y}{14}-\frac{3z}{14}=1\Leftrightarrow 2x+y-3z-14=0.$

Câu 5. **Chọn C**

$\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-4)$. Một vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;1)$.

Vì $\begin{cases}(P)\supset AB\\ (P)\perp(Q)\end{cases}$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;-1;0)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Vậy phương trình (P) là: $1(x-2)-1(y-1)+0(z-1)=0\Leftrightarrow x-y-1=0$.

Câu 6. **Chọn C**

$(P)//(Q)\Rightarrow \vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;3).$

$(P)\begin{cases}\text{qua } M(1;2;3)\\ \text{VTPT } \vec{n}_{(P)}=(1;-2;3)\end{cases}\Rightarrow (P):(x-1)-2(y-2)+3(z-3)=0\Rightarrow (P): x-2y+3z-6=0$

.

Câu 7. **Chọn B**

Mặt phẳng (α) vuông góc với trục Oz có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.

Trong 4 đáp án chỉ có mặt phẳng $2z+3=0$ là có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.

Câu 8. **Chọn C**

Ta có trung điểm của đoạn thẳng AB là $I\left(0;\frac{5}{2};-1\right)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB}(-2;-1;6)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB đi qua I nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTPT có phương trình:

$-2(x-0)-1\left(y-\frac{5}{2}\right)+6(z+1)=0\Leftrightarrow 4x+2y+12z-17=0$.

Câu 9. **Chọn B**

Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;3;3)$ làm vecto pháp tuyến, do đó, phương trình mặt phẳng (P) là $-2(x-3)+3(y+1)+3(z-1)=0$

$\Leftrightarrow -2x+3y+3z+6=0$ hay $2x-3y-3z-6=0.$

Câu 10. Chọn B

Gọi mặt phẳng phải tìm là (P). Khi đó véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;\ 1;\ -2)$.

Phương trình của (P) là $2x+y-2z=0$.

Câu 11. Chọn C

Vì $(P)//(Q)$ nên $\vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(1;\ 2;\ 2)$; $(Q):x+2y+2z+d=0$.

$$d_{(P)/(Q)}=1\Leftrightarrow\frac{|-3-d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1\Leftrightarrow|-3-d|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3-d=3\\-3-d=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-6\\d=0\end{array}\right.$$

Vì (P) không qua O nên $c=-6$ suy ra $(Q):x+2y+2z-6=0$. Vậy đáp án C đúng.

Câu 12. Chọn D

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Ta có: đường thẳng d có một VTCP $\vec{u}_d=(3;-4;7)$

Và $(P)\perp d\Rightarrow(P)$ có một VTPT $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=(3;-4;7)$

Khi đó (P) qua điểm $A(-1;2;3)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(3;-4;7)$ làm VTPT có phương trình là

$3(x+1)-4(y-2)+7(z-3)=0\Leftrightarrow 3x-4y+7z-10=0$.

Câu 13. Chọn D

Vì (α) song song với Δ và Δ' nên (α) có cặp VTCP $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)\\\overrightarrow{u_2}=(1;3;1)\end{cases}$

Suy ra (α) có một VTPT $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-1;-1;4)$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ và có một VTPT $\vec{n}=(-1;-1;4)$ có phương trình là:

$-1(x+1)-1.(y-1)+4(z-2)=0\Leftrightarrow -x-y+4z-8=0\Leftrightarrow x+y-4z+8=0$.

Câu 14. Chọn A

Vì A, B, C thẳng hàng và $CA=2CB$ nên

$$\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CB}\\\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{CB}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\3\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C(2;-1;-1)\\C\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\end{array}\right.$$

Mặt phẳng (Q) qua C song song với mặt phẳng (P) nên phương trình của mặt phẳng (Q) là:

$x+y+z-\frac{4}{3}=0$ hoặc $x+y+z=0$.

Câu 15. Chọn B

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(1;1;3)$ và mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến là $\vec{b}=(2;-1;1)$.

(P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) nên một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(4;5;-3)$. (P) qua $M(2;1;-3)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình $4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0$ hay $4x+5y-3z-22=0$.

Câu 16. Chọn A

Đường thẳng d đi qua $M(0;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1;2;-1)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(2;-3;1)$.

Giả sử (β) là mặt phẳng vuông góc với (α) và chứa d.

Khi đó (β) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}\perp\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}\perp\vec{u}$.

$\Rightarrow(\beta)$ đi qua $M(0;-1;2)$ và nhận $\left[\overrightarrow{n_\alpha},\vec{u}\right]=(1;1;1)$ là một vectơ pháp tuyến.

$\Rightarrow$ phương trình $(\beta):x+y+z-1=0$.

Câu 17. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$; $\vec{u}_d=(2;-1;1)$.

Theo giả thiết $\begin{cases}AB//(\alpha)\\ d\subset(\alpha)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}_{(\alpha)}\\ \vec{u}_d\perp\vec{n}_{(\alpha)}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}_d\right]\Rightarrow\vec{n}_{(\alpha)}=(3;3;-3)=3(1;1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $x+(y+1)-z=0\Rightarrow x+y-z+1=0$.

Thay từng tọa độ điểm M, N, P, Q vào phương trình mặt phẳng (α), suy ra điểm P thuộc (α).

Câu 18. Chọn A

Mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của (Q), do (Q) vuông góc với (P) nên $\vec{n}$ có giá vuông góc với $\overrightarrow{n_p}$, mặt khác véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có giá nằm trong mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}$ cũng vuông góc với $\overrightarrow{AB}$

Mà $\vec{n}_p$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương nên ta có thể chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}\right]=(-3;2;1)$, mặt khác (Q) đi qua $A(1;-1;2)$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) là:

$-3(x-1)+2(y+1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Câu 19. Chọn B

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{(-1)}=1\Leftrightarrow 3x+2y-6z-6=0$.

Do (P) song song với (ABC) nên phương trình của (P) có dạng $3x+2y-6z+d=0$ $(d\neq-6)$.

Mặt khác (P) đi qua điểm $D(1;1;1)$ suy ra $-1+d=0\Leftrightarrow d=1$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $3x+2y-6z+1=0$.

Câu 20. Chọn C

$\overrightarrow{u_d}=(1;1;-2)$ là VTCP của d và $M(0;1;3)\in d$.

$\overrightarrow{MA}=(3;-2;-1)$.

$\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{MA}\right]=\left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\right)=(-5;-5;-5)=-5(1;1;1)$.

Vậy phương trình của (P) đi qua $A(3;-1;2)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;1)$ là

$1(x-3)+1(y+1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+z-4=0$.

Câu 21. Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là

$\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ nên (α) có phương trình:

$x+y+z-3=0$.

Câu 22. Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(3;1;-1),\overrightarrow{OB}=(2;-1;4)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(3;-14;-5)$ là VTPT của (OAB)

Mặt phẳng (OAB) có VTPT là $(3;-14;-5)$ và đi qua $O(0;0;0)$ nên có phương trình:

$3x-14y-5z=0$.

Câu 23. Chọn B

Vécto $\vec{u}=(2;-1;3)$ là một vécto chỉ phương của đường thẳng d, vì $(P)\perp d$ nên (P) nhận $\vec{u}=(2;-1;3)$ làm một vécto pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$2(x-1)-(y-0)+3(z-2)=0\Leftrightarrow 2x-y+3z-8=0$.

Câu 24. Chọn A

$\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R).

Vì mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) nên ta chọn vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Mà mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0 \Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Câu 25. Chọn D

Giả sử mặt phẳng $(P): ax+by+cz-18=0$ cắt 3 trục toạ độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C.

Do $A \in Ox \Rightarrow A(x_A;0;0)$; $B \in Oy \Rightarrow B(0;y_B;0)$; $C \in Oz \Rightarrow C(0;0;z_C)$.

Vì $G(-1;-3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC nên :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A+0+0}{3}=-1 \\ \dfrac{0+y_B+0}{3}=-3 \\ \dfrac{0+0+z_C}{3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-3 \\ y_B=-9 \\ z_C=6 \end{cases} \Rightarrow A(-3;0;0), B(0;-9;0), C(0;0;6).$$

Do $A, B, C \in (P)$ nên mp(P) có phương trình: $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-9}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow -6x-2y+3z-18=0$.

Suy ra: $a=-6; c=3$. Vậy $a+c=-3$.

Câu 26. Chọn A

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Từ đó ta có $OA=|a|$, $OB=|b|$, $OC=|c|$

Mặt phẳng qua các điểm A, B, C có phương trình theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (P).

Vì $M \in (P)$ nên $\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1$. Vì $OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ |a|=|b|=|c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ |a|=|b| \\ |b|=|c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=c \\ b=-c \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ a=b=c \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ a=b=-c \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ a=-b=c \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ a=-b=-c \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=-c=-4 \\ a=-b=c=6 \\ a=-b=-c=2 \end{array}\right.$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

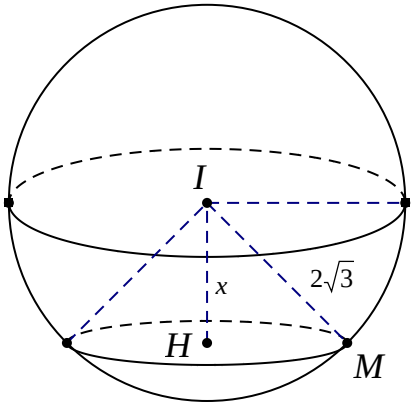
Câu 27. Chọn B

Gọi I là tâm của mặt cầu. Khi đó $I(1;0;2)$.

Mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $A(1;3;2)$ nên nhận $\overrightarrow{IA}=(0;3;0)$ làm véctơ pháp tuyến.

Mặt khác mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;3;2)$ nên có phương trình tổng quát $(\alpha): y-3=0$.

Câu 28. Chọn B



$(\alpha)//(P)\Rightarrow(\alpha): 2x+2y-z+d=0 (d\neq -3)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Gọi (H) là khối nón thỏa đề bài với đường sinh $l=R=2\sqrt{3}$.

Đặt $x=h=d(I,(\alpha))$. Khí đó bán kính đường tròn đáy hình nón : $r=\sqrt{12-x^2}$.

Thể tích khối nón: $V_{(H)}=\frac{1}{3}\pi(12-x^2)x$, với $0<x<2\sqrt{3}$.

Xét sự biến thiên của hàm số : $f(x)=\frac{1}{3}\pi(12-x^2)x$ trên $0<x<2\sqrt{3}$.

x	0		2		$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$, hay $d(I,(\alpha))=2$

$$\text{Vậy}: d(I,(\alpha))=2\Leftrightarrow\frac{|2.1+2.(-2)-3+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}d-5=6\\d-5=-6\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}d=11\\d=-1\end{bmatrix}.$$

Câu 29. Chọn D

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=4$ có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=2$.

Do AB, AC, AD là ba tiếp tuyến của mặt cầu (S) với B, C, D là các tiếp điểm nên:

$$\begin{cases}AB=AC=AD\\IB=IC=ID=R\end{cases}\Rightarrow IA \text{ là trục của đường tròn ngoại tiếp } \Delta BCD\Rightarrow IA\perp(BCD).$$

Khi đó mặt phẳng (BCD) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$.

Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow J\in IA$ và $IJ\perp BJ$.

Ta có: ΔIBA vuông tại B và $BJ\perp IA$ nên: $IB^2=IJ.IA\Rightarrow IJ=\dfrac{IB^2}{IA}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA}$.

Đặt $J(x;y;z)\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=(x;y;z-1)$, $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$. $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA}\Rightarrow J\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $J\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{13}{9}\right)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;1)$ có phương trình:

$$2\left(x-\frac{8}{9}\right)+2\left(y-\frac{8}{9}\right)+\left(z-\frac{13}{9}\right)=0\Rightarrow 2x+2y+z-5=0.$$

Câu 30. Chọn C

Cách 1:

Gọi $A(x_0;0;0)$, $B(0;y_0;0)$, $C(0;0;z_0)$. Khi đó mặt phẳng (P) có phương trình theo đoạn chắn là: $\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}+\dfrac{z}{z_0}=1$.

Ta có : $\overrightarrow{AH}=(a-x_0;b;c)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-y_0;z_0)$, $\overrightarrow{BH}=(a;b-y_0;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-x_0;0;z_0)$.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ:

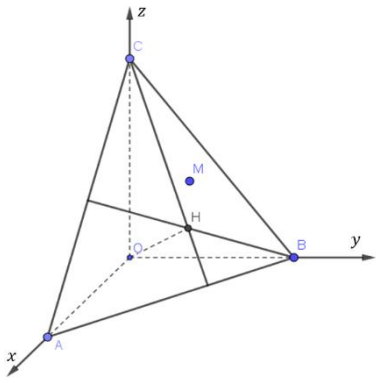
$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-by_0+cz_0=0\\ -ax_0+cz_0=0\\ \dfrac{a}{x_0}+\dfrac{b}{y_0}+\dfrac{c}{z_0}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=\dfrac{c}{b}z_0\\ x_0=\dfrac{c}{a}z_0\\ \dfrac{a}{\frac{c}{a}z_0}+\dfrac{b}{\frac{c}{b}z_0}+\dfrac{c}{z_0}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{b}\\ x_0=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a}\\ z_0=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{c}\end{cases}$$

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $\dfrac{ax}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{by}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{cz}{a^2+b^2+c^2}=1$.

Hay $(P):ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$.

Cách 2 : Ta chứng minh được $OH\perp(ABC)$ hay $OH\perp(P)$. Do đó mặt phẳng (P) qua H và nhận $\overrightarrow{OH}(a;b;c)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình là :

$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$.



Câu 31. Chọn B

Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$.

Ta có: $\begin{cases}BH\perp AC\\ OB\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBH)\Rightarrow AC\perp OH\,(1)$.

Chứng minh tương tự ta có: $BC \perp OH\,(2)$. Từ $(1),(2) \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$.

Vậy để biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất.

Mà $OH \le OM$ nên suy ra OH đạt giá lớn nhất bằng OM hay $H \equiv M$.

Vậy $OM \perp (ABC) \Rightarrow (P)$ có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Câu 32. Chọn B

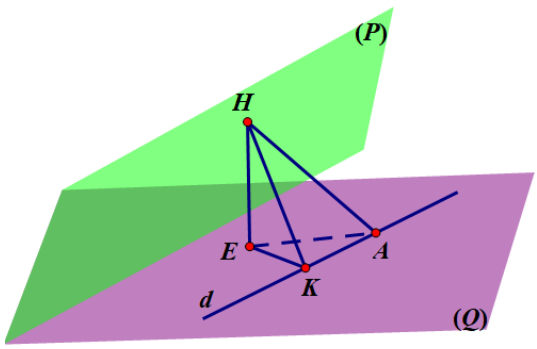
Do (P) đi qua A nên $3a+2b+c-27=0$; Do (P) đi qua B nên $-3a+5b+2c-27=0$

Do $(P) \perp (Q)$ nên $3a+b+c=0$

Từ đó , ta có hệ phương trình $\begin{cases}3a+2b+c=27\\-3a+5b+2c=27\\3a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\b=27\\c=-45\end{cases}$.

Khi đó $S=a+b+c=6+27-45=-12$.

Câu 33. Chọn D



Lấy điểm $A(0;-1;2)$ thuộc đường thẳng d.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Gọi E,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên mặt phẳng (Q) và đường thẳng d.

Ta có: $AH \perp (P), HE \perp (Q) \Rightarrow \big((P),(Q)\big)=AHE=\alpha$. Xét $\cos\alpha=\frac{HE}{HA} \le \frac{HK}{HA}$

Để α có số đo nhỏ nhất khi $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow E \equiv K$. Lúc đó mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (HAK).

Mặt phẳng (AHK) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông với mặt phẳng (P) $\Rightarrow \vec{n}_{AHK}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AHK)

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) $\Rightarrow \vec{n}_Q = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{AHK}\right] = (-6;-6;6)$ $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (Q): $x+y-z+3=0$.

Câu 34. Chọn D

Vì $AB \perp (P)$ nên mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (2;-3;4)$, do đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x-3y+4z+d=0$, từ đây tìm được $D(-\frac{d}{2};0;0)$, $E(0;\frac{d}{3};0)$, $F(0;0;-\frac{d}{4})$ suy ra $OD=\frac{|d|}{2}$, $OE=\frac{|d|}{3}$, $OF=\frac{|d|}{4}$. Mặt khác tứ diện $ODEF$ có OD, OE, OF đôi một vuông góc nên $V_{ODEF}=\frac{1}{6}OD.OE.OF \Leftrightarrow \frac{(|d|)^3}{144}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow |d|=6 \Leftrightarrow d=\pm 6$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $2x-3y+4z\pm 6=0$.

Câu 35. Chọn C

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và các trục tọa độ.

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Theo giả thiết có: $\begin{cases} M \in (P) \\ OC=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{4}OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a}-\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ |c|=\frac{1}{2}|b|=\frac{1}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8, b=-4, c=2 \\ a=8, b=-4, c=-2 \\ a=16, b=-8, c=4 \end{array}\right.$.

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 36. Chọn A

(S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$. Đường tròn thiết diện có bán kính $r=4$.

$\Rightarrow$ mặt phẳng (α) qua tâm I.

(α) chứa $Oy \Rightarrow (\alpha): ax+cz=0$. Mà $I \in (\alpha) \Rightarrow a+3c=0 \Rightarrow a=-3c$.

Chọn $c=-1 \Rightarrow a=3 \Rightarrow (\alpha): 3x-z=0$.

Câu 37. Chọn A

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-5)$ và bán kính $R=4$.

+ Gọi Δ là đường thẳng đi qua 2 điểm A và I. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{IA}=(0;0;4)$.

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1+4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

+ Vì $A(1;2;-1)$ thuộc mặt cầu (S) nên AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow$ AB là đường kính $\Leftrightarrow$ B là giao điểm còn lại của đường thẳng Δ và mặt cầu (S).

+ $B \in \Delta \Rightarrow B(1;2;-1+4t)$. $B \in (S) \Rightarrow (1-1)^2+(2-2)^2+(-1+4t+5)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$.

+ Với $t=0\Rightarrow B(1;2;-1)$.

+ Với $t=-2\Rightarrow B(1;2;-9)$.

Vậy $a+b+c=1+2-9=-6$.

Cách 2: Vì $A(1;2;-1)$ thuộc mặt cầu (S) nên AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow$ AB là đường kính, tức là I là trung điểm của đoạn AB.

Câu 38. Chọn D

Mặt phẳng đi qua các điểm A,B đồng thời cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$, $c>0$ có phương trình là $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt khác: $V_{OABC}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{6}.OA.OB.OC=\frac{1}{6}\Leftrightarrow c=1$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1\Leftrightarrow x+y+z-1=0$.

Vậy $a=b=1$, $c=-1\Rightarrow a+3b-2c=1+3.1+2=6$.

Câu 39. Chọn B

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) cần tìm.

Ta có $d\left(M,(Q_1)\right)=d\left(M,(Q_2)\right)\Leftrightarrow\frac{|3x-y+4z+2|}{\sqrt{26}}=\frac{|3x-y+4z+8|}{\sqrt{26}}\Leftrightarrow 3x-y+4z+5=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $3x-y+4z+5=0$.

Câu 40. Chọn B

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (P).

Khi đó theo giả thiết ta có: $AB=3$, $AH=6$, $BK=3$.

Do đó A,B ở cùng phía với mặt phẳng (P)

Lại có: $AB+BK\geq AK\geq AH\Rightarrow H\equiv K$.

Suy ra A,B,H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5;6;-1)$.

Vậy mặt phẳng P đi qua $H(5;6;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$ là VTPT có nên phương trình $2(x-5)+2(y-6)-1(z+1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0$.

Theo bài ra thì $(P):-4x-4y+2z+46=0$, nên $a=-4,b=-4,c=2$.

Vậy $T=a+b+c=-6$.

Câu 41. Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(1;2;7)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;4;-4)$.

Mặt phẳng (ABC) qua điểm $A(1;3;2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-36;-24;12)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) : $-36(x-1)-24(y-3)+12(z-2)=0$ hay $3x+2y-z-7=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-7 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=-6.$$

Câu 42. Chọn C

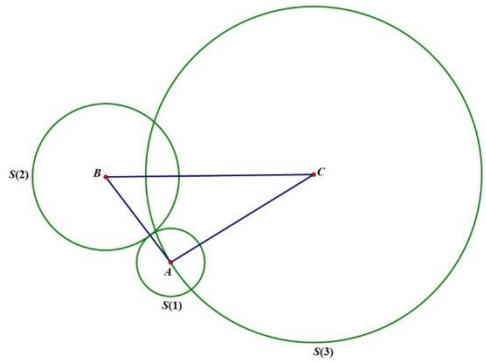
Giả sử $mp(P)$ là mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

Xét vị trí tương đối giữa 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính lần lượt là 1, 2, 4.

$AB=3=R_1+R_2=1+2 \Rightarrow$ Mặt cầu (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài.

$AC=4<R_1+R_3=1+4 \Rightarrow$ Mặt cầu (S_1) và (S_3) cắt nhau.

$BC=5<R_2+R_3=2+4 \Rightarrow$ Mặt cầu (S_2) và (S_3) cắt nhau.



Từ vị trí trên ta có nhận xét: tâm của cả ba mặt cầu phải nằm về cùng 1 phía so với $mp(P)$.

$\Rightarrow$ Có hai $mp(P)$ thỏa mãn đề bài $\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 43. Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm và $\vec{n}_{(\alpha)}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Mặt phẳng $(P):3x-2y+z+4=0$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(3;-2;1)$; mặt phẳng $(Q):5x-4y+3z+1=0$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(5;-4;3)$.

Ta có: $\begin{cases} (\alpha)\perp(P) \\ (\alpha)\perp(Q) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(-2;-4;-2).$

Mặt phẳng (α) qua A có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)}$ nên có phương trình là:

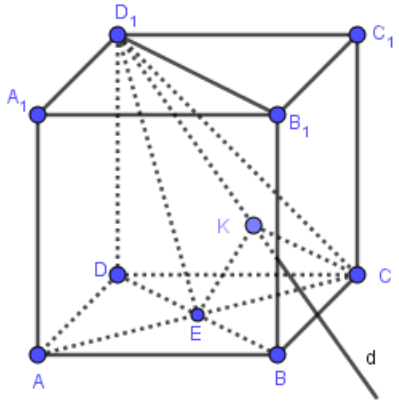
$-2(x-1)-4(y-2)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow -2x-4y-2z+16=0 \Leftrightarrow (\alpha):3x+6y+3z-24=0.$

Vậy $a+b+c=3+6+3=12.$

Câu 44. Chọn C

Từ giả thiết ta có $C(1;1;0)$, $B_1(1;0;1)$, $D_1(0;1;1)$.

Gọi d là giao tuyến của (P) và (BB_1D_1D), E là trung điểm của AC; K là hình chiếu vuông góc của E trên d. Ta có $\begin{cases} d\perp CE \\ d\perp EK \end{cases} \Rightarrow d\perp(ECK) \Rightarrow ((P),(BB_1D_1D))=EKC.$



Do đó $\sin\left((P),(BB_1D_1D)\right)=\sin EKC=\dfrac{CE}{CK}\geq\dfrac{CE}{CD_1}=\dfrac{1}{2}$ suy ra góc giữa mặt phẳng (P) và (BB_1D_1D) nhỏ nhất bằng 30°. Dấu "=" xảy ra khi d vuông góc với CD_1, mặt khác d vuông góc với AC suy ra d cùng phương với $\left[\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AC}\right]$. Do đó

$\overrightarrow{CD_1}=(-1;0;1);\ \overrightarrow{AC}=(1;1;0);\ \vec{n}_P=\left[\left[\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{CD_1}\right]=(1;2;1)$

Vậy $(P):x+2y+z-3=0$, do đó $a+b+c=4$.

Câu 45. **Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{OP}=(2;1;3)$; $\overrightarrow{MN}=(-1;-1;-2)$

Từ đề bài ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{MN}\right]=(1;1;-1)$

Mặt phẳng (α) đi qua $M(1;2;4)$ và nhận $\vec{n}=(1;1;-1)$ vectơ pháp tuyến nên phương trình tổng quát (α) là:

$(x-1)+(y-2)-(z-4)=0\Leftrightarrow x+y-z+1=0$.

Vậy $A=1,B=-1,C=1\Rightarrow A+B-C=-1$.

Câu 46. **Chọn A**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;5)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;3)$. Gọi $(\alpha):ax+by+cz+5=0$.

Ta có: mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(-1;13;5)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó $(\alpha):-x+13y+5z+D=0$.

Mặt phẳng (α) qua $A(3;1;-1)$ nên: $-3+13.1+5.(-1)+D=0\Leftrightarrow D=-5$.

$\Rightarrow(\alpha):-x+13y+5z-5=0$ hay $(\alpha):x-13y-5z+5=0$.

Suy ra $a=1$; $b=-13$; $c=-5$.

Vậy $a-b+c=9$.

Câu 47. **Chọn D**

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a;b;c);A(x;y;z)$ ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12\\ AI^2+AM^2=IM^2\\ a-2b+2c+11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12\ (1)\\ 12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ (2)\\ a-2b+2c+11=0\ (3)\end{cases}$$

Lấy – theo vế có:

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-\left[12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]=12-\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow (a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0$.

Vậy mặt phẳng qua ba tiếp điểm là $(Q):(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0$.

Kết hợp với suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định $(0;3;-1)$.

Câu 48. Chọn D

Từ giả thiết ta có $a>0,b>0,c>0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mà $M\in(P)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Rightarrow abc\geq 27$.

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc\geq\frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

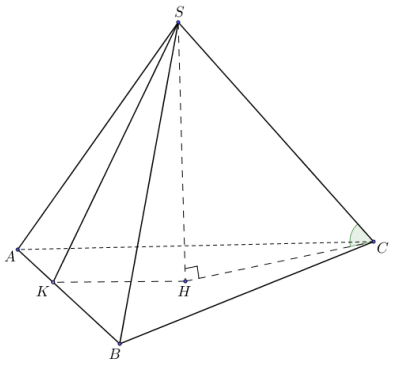
Vậy $\min_{V_{OABC}}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=b=c=3$. Khi đó $a+2b+3c=18$.

Câu 49. Chọn C

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) và đường thẳng AB.

$\Rightarrow$ góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc $SCH=60°$.

$\Rightarrow SH=SC.\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$



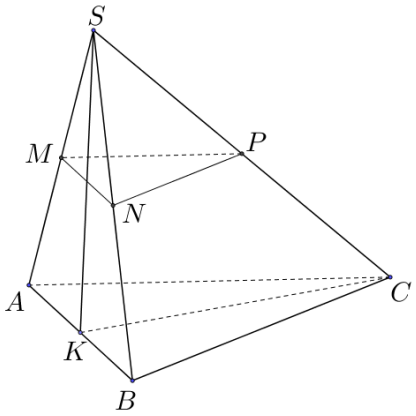
Gọi $K(1+t;4t;-1-t)\in AB\Rightarrow \overrightarrow{SK}=(t;4t-3;-3-t)$.

Gọi $\overrightarrow{u_{AB}}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB. Theo đề ra $\overrightarrow{u_{AB}}=(1;4;-1)$.

Ta có $SK\perp AB\Rightarrow \overrightarrow{SK}.\overrightarrow{u_{AB}}=0\Leftrightarrow t+16t-12+3+t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow K\left(\frac{3}{2};2;-\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SK}=\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{7}{2}\right)\Rightarrow SK=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{49}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow SK=SH\Rightarrow H\equiv K$.

Khi đó $SK\perp(ABC)$. Chọn vecto pháp tuyến của $mp(ABC)$ là $\vec{n}=\overrightarrow{SK}=\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{7}{2}\right)$, ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)-(y-2)-\frac{7}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow x-2y-7z-8=0$



Cách 2: (ABC) chứa điểm $M(1;0;-1)$ nên loại đáp án B, D. Vecto pháp tuyến của (ABC) vuông góc với vecto chỉ phương của đường thẳng AB nên chọn C. Phương án nhiễu kém!

Nhận xét: Khi 6 điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì các mặt bên của hình chóp cụt là hình thang cân suy ra $SA=SB=SC$. Mà $SK\perp(ABC)$ nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó ΔABC vuông tại C nên tâm mặt cầu qua 6 điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ là K. Đề nên hỏi phương trình mặt cầu đi qua 6 điểm trên.

Câu 50. Chọn D

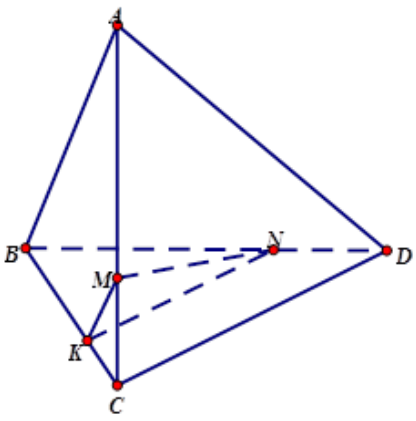
Cách 1:

Ta dễ dàng chứng minh được 4 điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện. Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm, ta xác định mặt phẳng (α) như sau:

Xét (α) và (ABC) có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap AB\\(\alpha)//AB\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của (α) và (ABC) là Mx trong đó $Mx//AB$, $Mx\cap AB=K$

Tương tự ta có giao tuyến của (α) và (BCD) là Ky trong đó $Ky//CD$, $Ky\cap BD=N$

$\Rightarrow(\alpha)\equiv(KMN)$



Ta có: $\frac{BN}{BD}=\frac{BK}{BC}=\frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{BD}=\frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{AM}=\frac{BD}{AC}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$

Vậy từ giả thiết: $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1 \Rightarrow AM^2=6 \Rightarrow AM=\sqrt{6}=AC$.

$\Rightarrow M$ là điểm đối xứng của C qua A.

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Ta dễ dàng chứng minh được 4 điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện.

Vì mặt phẳng (α) song song với AB,CD và cắt 2 đường thẳng AC,BD lần lượt tại M,N nên theo định lí Talet trong không gian ta có: $\frac{BN}{AM}=\frac{BD}{AC}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$

Vậy từ giả thiết: $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1 \Rightarrow AM^2=6 \Rightarrow AM=\sqrt{6}=AC$.

$\Rightarrow M$ là điểm đối xứng của C qua A.

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 3. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-1=0$. Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

A. $H\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $H(1;4;-4)$. **C.** $H(-1;2;0)$. **D.** $H(3;6;4)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;7;3)$, $B(2;1;9)$. Trung điểm M của AB có tọa độ là:

A. $M\left(\frac{3}{2};4;6\right)$. **B.** $M(3;8;12)$. **C.** $M(1;-6;6)$. **D.** $M\left(\frac{1}{2};-3;3\right)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là

A. $(1;2;0)$. **B.** $(1;0;3)$. **C.** $(0;2;3)$. **D.** $(0;0;3)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tìm tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oyz).

A. $A(1;-2;3)$. **B.** $A(1;-2;0)$. **C.** $A(1;0;3)$. **D.** $A(0;-2;3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-z-6=0$. Điểm nào sau đây **không thuộc** mặt phẳng (P)?

A. $(0;3;-3)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(3;1;1)$. **D.** $(3;2;-2)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$ **D.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Câu 7. Cho 4 điểm $A(-2;-1;3)$, $B(2;3;1)$, $C(1;2;3)$, $D(-4;1;3)$. Hỏi có bao nhiêu điểm trong bốn điểm đã cho thuộc mặt phẳng $(\alpha): x+y+3z-6=0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $3x-5y+z-2=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(1;2;-1)$. **B.** $N(1;1;-1)$. **C.** $P(2;0;-3)$. **D.** $Q(1;0;-1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x-2y+3z-10=0$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng

A. 10. **B.** -10. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $Q(2;-1;5)$. **B.** $P(0;0;-5)$. **C.** $M(1;1;6)$. **D.** $N(-5;0;0)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi đó $a+2b+c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x-y+2z-3=0$, $(Q):x-y+2z+3=0$ có bao nhiêu điểm M có hoành độ nguyên thuộc Ox sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng (P), (Q) bằng khoảng cách giữa (P) và (Q).

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y-z+5=0$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (P) một góc $45°$ là

A. $C\left(0;-\frac{2+\sqrt{2}}{0};0\right)$. **B.** $C\left(0;\frac{1}{4};0\right)$. **C.** $C\left(0;\frac{2+\sqrt{2}}{2};0\right)$. **D.** $C\left(0;-\frac{1}{4};0\right)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-1;-1;0)$, $B(0;1;0)$, $M(a;b;c)$ với $(b<0)$ thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ sao cho $AM=\sqrt{2}$ và mặt phẳng (ABM) vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó $T=2a-4b^2+c$ bằng

A. -8. **B.** 7. **C.** 28. **D.** -17.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;1;-1)$. và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(4;1;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $(OA+OB+OC)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ điểm $I(0;1;3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $d=\frac{34}{5}$. **B.** $d=\frac{36}{5}$. **C.** $d=\frac{24}{7}$. **D.** $d=\frac{30}{7}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(0;1;1)$; $B(1;1;0)$; $C(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$. Thể tích khối chóp $M.ABC$ là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA=MB=MC$. Tính $T=a+2b+3c$.

A. $T=5$. **B.** $T=4$. **C.** $T=3$. **D.** $T=2$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+37=0$ và các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$. Biết rằng có điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) để biểu thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biểu thức $a^2+b^2-c^2$ có giá trị là

A. 69. **B.** 61. **C.** 18. **D.** 22.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. Chọn C

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Vì $MH\perp(\alpha)$ nên đường thẳng MH có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng MH là: $\begin{cases}x=1+t\\y=4+t\\z=2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Rightarrow H(1+t;4+t;2+t)$.

Mà $H\in(\alpha)\Leftrightarrow 1+t+4+t+2+t-1=0\Leftrightarrow t=-2$. Vậy $H(-1;2;0)$.

Câu 2. Chọn A

Trung điểm M của AB có tọa độ là: $\left(\frac{1+2}{2};\frac{7+1}{2};\frac{3+9}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};4;6\right)$.

Câu 3. Chọn A

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z=0$. Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) là : $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=t\end{cases}$

Gọi I là giao điểm của (d) và mặt phẳng (Oxy). Vì $I\in(d)$ nên $I(1;2;t)$.

Do $I\in(Oxy)\Rightarrow t=0\Rightarrow I(1;2;0)$. Vậy hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oxy) là $I(1;2;0)$.

Câu 4. Chọn D

Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oyz) là $A(0;-2;3)$.

Câu 5. Chọn D

Ta có: $2.3+2-(-2)-6=4\neq 0$ nên điểm $(3;2;-2)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Câu 6. Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases}18-6a-6b+d=0\\18-6a-6c+d=0\\18-6b-6c+d=0\\27-6a-6b-6c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6a-6b+d=-18\\-6a-6c+d=-18\\-6b-6c+d=-18\\-6a-6b-6c+d=-27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=\frac{3}{2}\\c=\frac{3}{2}\\d=0\end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Câu 7. **Chọn B**

Thay lần lượt 4 điểm vào phương trình mặt phẳng ta thấy:

$A(-2;-1;3)$: $-2-1+3.3-6=0 \Rightarrow A$ thuộc mặt phẳng (α).

$B(2;3;1)$: $2+3+3.1-6=2 \Rightarrow B$ không thuộc mặt phẳng (α).

$C(1;2;3)$: $1+2+3.3-6=6 \Rightarrow C$ không thuộc mặt phẳng (α).

$D(-4;1;3)$: $-4+1+3.3-6=0 \Rightarrow D$ thuộc mặt phẳng (α).

Vậy có 2 điểm trong 4 điểm trên thuộc mặt phẳng (α).

Câu 8. **Chọn D**

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng.

Ta nhận thấy tọa độ điểm Q thỏa mãn phương trình, suy ra điểm Q thuộc mặt phẳng đã cho.

Câu 9. **Chọn A**

Gọi $(P)\cap Ox=A(x_A;y_A;z_A) \Rightarrow y_A=0$ và $z_A=0$.

$A\in(P)\Rightarrow x_A-2.0+3.0-10=0\Leftrightarrow x_A=10$.

Câu 10. **Chọn C**

Thay tọa độ các điểm Q, P, M, N vào phương trình mặt phẳng (P)

Ta có với tọa độ của điểm M thì $1-2.1+6-5=0$.Vậy $M\in(P)$.

Câu 11. **Chọn C**

Giả sử $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$ với $(b,c>0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A, B, C là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $M(1;1;1)\in(P)\Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b+c=\frac{bc}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;b;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;0;c)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4(b^2+c^2)}$.

Mặt khác, $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\geq bc\Leftrightarrow\left(\frac{bc}{4}\right)^2-bc\geq 0\Rightarrow bc\geq 16$; $b^2+c^2\geq 2bc\geq 32$.

Do đó, $S_{ABC}\geq\frac{1}{2}\sqrt{16^2+4.32}\Leftrightarrow S_{ABC}\geq 4\sqrt{6}$. Vậy $S_{ABC\,\min}=4\sqrt{6}$.

Câu 12. **Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;1)$.

Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;2;-1)$ đi qua A có phương trình là: $-1(x-1)+2y-z=0\Leftrightarrow -x+2y-z+1=0$.

Ta có

$$\begin{cases} IA = IB \\ IB = IC \\ I \in mp(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c-1)^2 \\ a^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \\ -a + 2b - c + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2c = 0 \\ 4a + 2b = 5 \\ -a + 2b - c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(1; \frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow a + 2b + c = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Câu 13. Chọn D

Do $M \in Ox \Rightarrow M(a;0;0)$, $a \in \mathbb{Z}$.

Lấy $A(0;-3;0) \in (P)$. Do $(P)//(Q) \Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(Q)) = \dfrac{|-(-3)+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{6}$.

Ta có : $d(M,(P)) + d(M,(Q)) = d((P),(Q)) \Leftrightarrow \dfrac{|a-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} + \dfrac{|a+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow |a-3| + |a+3| = 6$ (1).

+ TH1 : Với $a \le -3$ thì $(1) \Leftrightarrow 3 - a - a - 3 = 6 \Leftrightarrow a = -3$ (tm).

+ TH2 : Với $-3 < a < 3$ thì $(1) \Leftrightarrow -a + 3 + a + 3 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$ luôn đúng.

Do $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

+ TH3 : Với $a \ge 3$ thì $(1) \Leftrightarrow a - 3 + a + 3 = 6 \Leftrightarrow a = 3$ (tm).

Vậy có 7 điểm M có hoành độ nguyên thuộc Ox thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Chọn A

Gọi $M(a;b;c)$ với $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (a-3;b-1;c-7)$ và $\overrightarrow{BM} = (a-5;b-5;c-1)$.

Vì $\begin{cases} M \in (P) \\ MA = MB = \sqrt{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = 35 \end{cases}$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2a - b - c + 4 = 0 \\ (a-3)^2 + (b-1)^2 + (c-7)^2 = (a-5)^2 + (b-5)^2 + (c-1)^2 \\ (a-3)^2 + (b-1)^2 + (c-7)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = -4 \\ 4a + 8b - 12c = -8 \\ (a-3)^2 + (b-1)^2 + (c-7)^2 = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ c = a + 2 \\ (a-3)^2 + (b-1)^2 + (c-7)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ c = a + 2 \\ 3a^2 - 14a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}, (\text{do } a \in \mathbb{Z}).$$

Ta có $M(2;2;0)$. Suy ra $OM = 2\sqrt{2}$.

Câu 15. Chọn D

Gọi $C(0;c;0)\in Oy$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;c;0)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là: $\overrightarrow{n_{ABC}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-c;-1;-c)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\overrightarrow{n_P}=(2;-2;-1)$.

Theo giả thiết ta có:

$\cos\left[(ABC),(P)\right]=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{ABC}},\overrightarrow{n_P}\right)\right|=\cos 45°$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|-c.2+(-1).(-2)+(-c).(-1)\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}.\sqrt{(-c)^2+(-1)^2+(-c)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|-c+2|}{3\sqrt{2c^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{(c-2)^2}{9(2c^2+1)}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 16c^2+8c+1=0\Leftrightarrow(4c+1)^2=0\Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy tọa độ điểm C là: $C\left(0;-\dfrac{1}{4};0\right)$.

Câu 16. Chọn D

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;2;0)\\ \overrightarrow{AM}=(a+1;b+1;c)\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_{(ABM)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(2c;-c;-2a+b-1)$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}M(a;b;c)\in(P)\\ AM=\sqrt{2}\\ \vec{n}_{(ABM)}.\vec{n}_{(P)}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c+2=0 \quad (1)\\ (a+1)^2+(b+1)^2+c^2=2 \quad (2)\\ -2a+b+c-1=0 \quad (3)\end{cases}$

Từ (1) và (3) suy ra $a=-1$. Do đó: $\begin{cases}b+c=-1\\ b^2+c^2+2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1-b\\ 2b^2+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ b=-2\end{cases}(b<0)$

Vậy $M(-1;-2;1)$ nên $T=2a-4b^2+c=-17$.

Câu 17. Chọn B

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-m;-n;2-p);\overrightarrow{IB}=(3-m;1-n;-1-p)$.

$$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-m)-2(3-m)=0\\ 3(-n)-2(1-n)=0\\ 3(2-p)-2(-1-p)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\ n=-2\\ p=8\end{cases}\Rightarrow I(-3;-2;8).$$

Ta có $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\left|3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Khi đó, $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M\in(P)\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M\in(P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Khi đó Δ nhận vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vecto chỉ phương $\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\end{cases}$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\\x+y+z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{11}{3}\\y=-\dfrac{8}{3}\\z=\dfrac{22}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{11}{3}\\b=-\dfrac{8}{3}\\c=\dfrac{22}{3}\end{cases} \Rightarrow S=9a+3b+6c=3.$

Câu 18. Chọn C

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Ta có phương trình $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ và $(OA+OB+OC)=a+b+c$.

Vì $M(4;1;9)\in(P)\Rightarrow \dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{9}{c}=1$ (1).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (Bunhiacôpxki) ta có

$$(2+1+3)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{a}}.\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}.\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{c}}.\sqrt{c}\right)^2\le\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c).$$

Kết hợp với (1) suy ra $a+b+c\ge 36$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{c}\\\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{9}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=12\\b=6\\c=18\end{cases}$.

Do đó $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 36 khi và chỉ khi $a=12,b=6,c=18$.

Khi đó phương trình $(P):\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{18}=1$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $d=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{18}-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{12}\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(\dfrac{1}{18}\right)^2}}=\dfrac{24}{7}$.

Nhận xét.

Có thể sử dụng hệ quả bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dưới dạng sau

$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ và $x,y,z>0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

Khi đó $1=\frac{2^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{3^2}{c}\ge\frac{(2+1+3)^2}{a+b+c}=\frac{36}{a+b+c}$ suy ra $a+b+c\ge 36$.

Câu 19. Chọn C

Gọi điểm $M(x;y;z)$.

Vì điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$ nên

$$\begin{cases}M\in(P)\\MA=MB\\MA=MC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z-1=0\\x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2\\x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-z=0\\x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow M(1;1;1)$$

Ta có

$\overrightarrow{MA}=(1;0;0);\ \overrightarrow{MB}=(0;0;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]=(0;-1;0);\ \overrightarrow{MC}=(0;1;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right].\overrightarrow{MC}=-1$

$V_{M.ABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right].\overrightarrow{MC}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 20. Chọn B

Ta có: $\begin{cases}M\in(P)\\AM^2=BM^2\\AM^2=CM^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c-2=0\\(a-2)^2+b^2+(c-1)^2=(a-1)^2+b^2+c^2\\(a-2)^2+b^2+(c-1)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=2\\-2a-2c=-4\\-2a+2b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=2\\a+c=2\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1\end{cases}$. Vậy $T=a+2b+3c=1+0+3=4$.

Câu 21. Chọn B

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I(2;1;2)$.

Khi đó ta có $P=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)$

$=3MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}=3MI^2+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}$.

Vậy P đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với $(P)\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=1-3t\\z=2+2t\end{cases}$.

Ta có $M\in\Delta$ nên $M(2+3t;1-3t;2+2t)$.

Vì $M\in(P)$ nên $3(2+3t)-3(1-3t)+2(2+2t)+37=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow M(-4;7;-2)$

Vậy $a^2+b^2-c^2=61$.

DẠNG 4. GÓC – KHOẢNG CÁCH LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng P là $H\ 2;-1;-2$. Số đo góc giữa mặt phẳng P với mặt phẳng $Q: x-y-5=0$ là

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):-\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox.

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 120^0. **D.** 150^0.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A=(1;2;1)$, $B=(2;1;3)$, $C=(3;2;2)$, $D=(1;1;1)$. Độ dài chiều cao DH của tứ diện bằng

A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\alpha: 4x-3y+2z+28=0$ và điểm $I\ 0;1;2$. Viết phương trình của mặt cầu S có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng α.

A. $S: x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=29$. **B.** $S: x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\sqrt{29}$.

C. $S: x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=841$. **D.** $S: x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=29$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$. Điểm M là giao của mặt phẳng (P) với trục Oz. Khoảng cách từ M tới mặt phẳng (Q) bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa $(P): x+2y+2z=0$ và $(Q): x+2y+2z-12=0$ bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-2z-4=0$ và $(\beta): -4x+2y+4z-4=0$ bằng

A. 6. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 9. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, tất cả các điểm M nằm trên Oz có khoảng cách đến mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$ bằng 2 là

A. $M(0;0;-4)$. **B.** $M(0;0;0), M(0;0;-2)$.

C. $M(0;0;2)$. **D.** $M(0;0;2), M(0;0;-4)$

Câu 10. Phương trình mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $(P):\ 2x-y+2z+4=0$ là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\frac{400}{9}$. **B.** $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\frac{20}{3}$.

C. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\frac{400}{9}$. **D.** $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\frac{20}{3}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;6)$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;-3;-4)$ đến mặt phẳng (ABC).

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ song song với mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Khoảng cách giữa d và (P) bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$ có bán kính bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 9.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $d=\frac{5}{9}$. **B.** $d=\frac{5}{29}$. **C.** $d=\frac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0,0,3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mp (ABC) bằng

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{6}{7}$.

Câu 16. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Xét là mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A. Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến mặt phẳng bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $3\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $4\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 17. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng thay đổi đi qua điểm M, cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C. Tìm GTNN của $Q=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{14}}$. **C.** 14. **D.** $\frac{1}{14}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$ và $(Q):x+2y+3z+6=0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$ **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$ **C.** 14 **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;2;3); B(3;-1;1)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{37}{101}$. **B.** $\frac{5}{77}$. **C.** $\frac{37}{\sqrt{101}}$ **D.** $\frac{5\sqrt{77}}{77}$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-2y-z+5=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và song song với (P). Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $\frac{9}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{9}{14}$. **C.** $\frac{3}{14}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng:

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+3=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Gọi $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $AM=4$. Tính $a+b+c$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 12.

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$ và $D(1;1;1)$. Độ cao của tứ diện kẻ từ D bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 1/2

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d với (α), A thuộc d sao cho $AM=\sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ A đến (α).

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d với (α), A thuộc d và cách (α) một khoảng bằng 3. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

A. $\frac{2\sqrt{14}}{3}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm A thuộc đường thẳng $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-12}{-1}$ và cắt mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-3=0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Biết rằng giao điểm M của d với (α) cũng thuộc (S), tính bán kính của (S)

A. $\frac{2\sqrt{14}}{3}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x-y+z=0$ và $2x-y+z-7=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $7\sqrt{6}$. **B.** $\frac{7}{\sqrt{6}}$. **C.** 7. **D.** $6\sqrt{7}$.

Câu 28. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y-2z-4=0$ và $(\beta): 2x-y-2z+2=0$ là

A. 2. **B.** 6. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 29. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;\ 1;\ 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$ là

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m-1-t \end{cases}$. Tổng các giá trị thực của tham số m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B và các tiếp diện của (S) tại A, B tạo với nhau một góc lớn nhất bằng

A. $-1,5$. **B.** 3. **C.** -1. **D.** $-2,25$.

Câu 32. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=3$, $AD=4$, $BAD=120°$. Cạnh bên $SA=2\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC, α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A. $\alpha \in (60°;90°)$. **B.** $\alpha \in (0°;30°)$. **C.** $\alpha \in (30°;45°)$. **D.** $\alpha \in (45°;60°)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α).

A. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **D.** $9\sqrt{21}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;2;1)$, $B(6;0;3)$, $C(2;1;1)$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng trung trực của đoạn AB bằng

A. $\frac{7}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{6}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{11}}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):6x+3y+2z-1=0$ và $(Q):x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+8=0$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1,-2,0)$; $B(3,3,2)$; $C(-1,2,2)$; $D(3,3,1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{9}{7\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{9}{7}$ **C.** $\frac{9}{14}$ **D.** $\frac{9}{\sqrt{2}}$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho $M(1;2;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $27\sqrt{6}\pi$. **B.** $216\sqrt{6}\pi$. **C.** 972π. **D.** $\frac{243\pi}{2}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;5)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C sao cho OA,OB,OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $\frac{16}{\sqrt{91}}$. **B.** $\frac{24}{\sqrt{91}}$. **C.** $\frac{32}{\sqrt{91}}$. **D.** $\frac{18}{\sqrt{91}}$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m):mx+m(m+1)y+(m-1)^2z-1=0$ (m là tham số) và đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (Oxy), Δ vuông góc với d và cắt mặt phẳng (P_m) tại một điểm cố định. Tính khoảng cách h từ $A(1;-5;0)$ đến đường thẳng Δ.

A. $h=5\sqrt{2}$. **B.** $h=\sqrt{19}$. **C.** $h=\sqrt{21}$. **D.** $h=2\sqrt{5}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;2)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;5;1)$, $D(3;1;1)$ và $E(0;-1;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều năm điểm đã cho?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn D**

Gọi α là góc giữa mặt phẳng P với mặt phẳng Q

Ta có $\overrightarrow{OH} = 2;-1;-2$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng P

$\vec{n} = 1;-1;0$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng Q

và $\cos\alpha = \left|\cos\ \overrightarrow{OH},\vec{n}\ \right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{OH}.\vec{n}}{\left|\overrightarrow{OH}\right|.\left|\vec{n}\right|}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$

Câu 2. **Chọn A**

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(-\sqrt{3};1;0\right)$; trục Ox có véc tơ chỉ phương $\vec{i} = (1;0;0)$

Ta có: $\sin\left((P);Ox\right) = \left|\cos\left(\vec{n};\vec{i}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{i}\right|} = \dfrac{\left|-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4}.\sqrt{1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left((P);Ox\right) = 60^{0}.$

Câu 3. **Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC} = (2;0;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (-1;3;2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC). Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là

$-1(x-1)+3(y-2)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow -x+3y+2z-7=0$.

Độ dài chiều cao DH của tứ diện $ABCD$ là khoảng cách từ D đến (ABC). Suy ra

$$DH = d\left(D,(ABC)\right) = \frac{\left|-1.1+3.1+2.1-7\right|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

Câu 4. **Chọn A**

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) nên có bán kính là:

$$R = d(I,(\alpha)) = \frac{\left|4.0-3.1+2.2+28\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+2^2}} = \sqrt{29}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + \left(y-1\right)^2 + \left(z-2\right)^2 = 29$.

Câu 5. **Chọn B**

Điểm M là giao điểm của $(P): x+2y+2z-10=0$ với trục $Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. Suy ra $M(0;0;5)$.

$$d\left(M,(Q)\right) = \frac{\left|0+2.0+2.5-3\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Câu 6. **Chọn C**

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=d\left(I,(P)\right)=3$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 7. **Chọn D**

Lấy $O(0;0;0)\in(P)$. Vì $(P)//(Q)$, nên $d\left((P),(Q)\right)=d\left(O,(Q)\right)=\dfrac{|-12|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$.

Câu 8 **Chọn B**

Ta thấy: $\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-2}{4}\neq\dfrac{-4}{-4}$. Do đó (α) song song với (β).

Điểm $M(2;0;0)$ thuộc (α), khi đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng

$$d\left(M,(\beta)\right)=\frac{|-4\cdot2+2\cdot0+4\cdot0-4|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+4^2}}=\frac{12}{6}=2.$$

Câu 9. **Chọn D**

$M\in Oz\Rightarrow M(0;0;a)$

Vì M nằm trên Oz có khoảng cách đến mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ bằng 2 nên ta có

$$d\left(M;(\mathrm{P})\right)=2\Leftrightarrow\frac{|2.0-0-2.a-2|}{\sqrt{9}}=2\Leftrightarrow|-2.a-2|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2a-2=6\\-2a-2=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-4\\a=2\end{array}\right.$$

$\Rightarrow M(0;0;2),M(0;0;-4)$.

Câu 10. **Chọn C**

Vì mặt cầu tiếp xúc với (P) nên

$$\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=R\Rightarrow R=\frac{|2.3+2+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{20}{3}.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{400}{9}$.

Câu 11. **Chọn B**

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow2x+2y-z+6=0$.

Suy ra $d\left(M,(ABC)\right)=\dfrac{|2.1+2.(-3)+4+6|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2.$

Câu 12. **Chọn D**

Nhận thấy: $d//(P)$. Gọi $M(1;0;0)\in d$ suy ra $d\left(d;(P)\right)=d\left(M;(P)\right)$.

Ta có: $d\left(M;(P)\right)=\dfrac{|1+0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$. Vậy $d\left(d;(P)\right)=\sqrt{3}$.

Câu 13. **Chọn A**

Mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$

$$\Leftrightarrow R=d(I,(P))=\frac{|1-2.2+2(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2.$$

Câu 14. Chọn C

Khoảng cách d từ A đến (P) là $d(A,(P))=\dfrac{|3x_A+4y_A+2z_A+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{|3-8+6+4|}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow d(A,(P))=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Câu 15. Chọn D

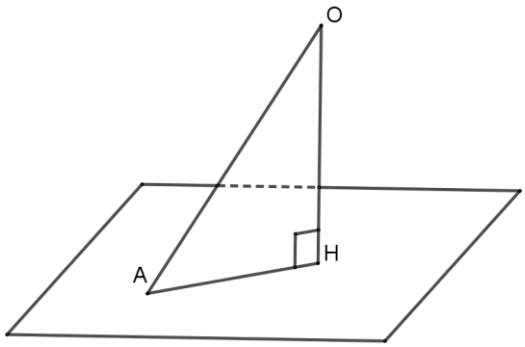
Cách 1: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0),\overrightarrow{AC}=(-1;0;3)\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(6;3;2)$ là một véc tơ pháp tuyến của mp(ABC). Phương trình mp(ABC) là: $6(x-1)+3y+2z=0\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0$.

Do đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến mp(ABC) bằng: $d(O;(ABC))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{6}{7}$.

Cách 2: Viết phương trình của mp(ABC) theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ hay $6x+3y+2z-6=0$.

Do đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến mp(ABC) bằng: $d(O;(ABC))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{6}{7}$.

Câu 16. Chọn A



Xét (P) là một mặt phẳng đi qua A, gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó, $d(0,(P))=OH\le OA=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Câu 17. Chọn D

Xét (P) là một mặt phẳng đi qua M, gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó, $d(0,(P))=OH\le OM=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

Dễ thấy $OABC$ là tứ diện vuông nên $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}\ge\dfrac{1}{14}$

Câu 18. Chọn A

$(P):x+2y+3z-1=0$ $(Q):x+2y+3z+6=0$. Ta có: $\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{2}=\dfrac{3}{3}\ne\dfrac{-1}{6}$

$(P)//(Q)$ nên chọn $A(1;0;0)\in(P)$. Vì $(P)//(Q)$ nên $d(A,(Q)) = \dfrac{|1+2.0+3.0+6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Các giải trắc nghiệm:

Công thức tính nhanh: $(P): Ax+By+Cz+D_1=0; (Q)\, Ax+By+Cz+D_2=0$

$$d((P);(Q)) = \frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$(P)//(Q)$ áp dụng công thức: $d((P);(Q)) = \dfrac{|-1-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 19. Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-2)$

Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P), VTCP của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;1)$

Theo đề bài ta có $\begin{cases} A\in(P); B\in(P) \\ d//(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_d} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AB}\right] = (5;6;-4)$

Mặt phẳng (P) qua A có phương trình là: $5(x-1)+6(y-2)-4(z-3)=0$

$\Leftrightarrow 5x+6y-4z-5=0$. Khi đó $d(O,(P)) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{(5)^2+(6)^2+(-4)^2}} = \dfrac{5\sqrt{77}}{77}$.

Câu 20. Chọn A

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;7;3)$.

Do (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và song song với (P) nên :

$$d((Q);(P)) = d(A;(P)) = \frac{|-9|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$

Câu 21. Chọn A

Vì $\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{2}=\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{-10}{-3}$ nên $(P)//(Q)$. Chọn $M(0;0;5)\in(P)$.

$$d((P),(Q)) = d(M,(Q)) = \frac{|0+2.0+2.5-3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{7}{3}.$$

Câu 22. Chọn A

Ta có: $d(A,(P)) = \dfrac{|2+4+3+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}} = 4 = AM \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

$\Rightarrow M\in(P)$ và $\overrightarrow{AM}=(a-1;b+2;c-3)$ cùng phương với VTPT của (P) $\vec{n}=(2;-2;1)$.

$\Rightarrow$ Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2a-2b+c+3=0 \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b+2}{-2}=\dfrac{c-3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{3} \\ b=\dfrac{2}{3} \\ c=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=\dfrac{2}{3}$.

Câu 23. Chọn A

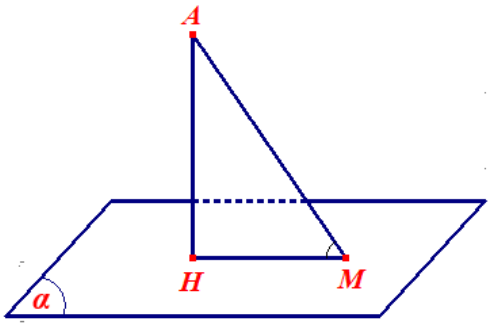
Ta có: $\overrightarrow{AB}(-3;0;-4), \overrightarrow{AC}(4;0;-3), \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-25;0)$.

Chọn vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}(0;1;0)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $y+2=0$.

Độ cao h của tứ diện kẻ từ D bằng khoảng cách từ D đến (ABC). Vậy $h=\dfrac{|1+2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=3$.

Câu 24. Chọn B



(α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$ và d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Gọi φ là góc giữa (α) và d, H là hình chiếu của A trên (α).

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AH=AM\sin\varphi=\sqrt{14}.\dfrac{|1.2+2.2+(-3)(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\sqrt{14}.\dfrac{9}{\sqrt{14}.3}=3$

Câu 25. Chọn D

(α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$ và d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Gọi φ là góc giữa (α) và d, H là hình chiếu của A trên (α).

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AM=\dfrac{AH}{\sin\varphi}=\dfrac{3}{\dfrac{|1.2+2.2+(-3)(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}}=\sqrt{14}$

Câu 26. Chọn D

(α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$ và d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Gọi φ là góc giữa (α) và d, H là hình chiếu của A trên (α).

Ta có $MH=\sqrt{5}$ và $\sin\varphi=\dfrac{|\vec{n}.\vec{d}|}{|\vec{n}|.|\vec{d}|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$.

Mà $\cos\varphi=\dfrac{MH}{AM}\Rightarrow AM=\dfrac{MH}{\cos\varphi}=\dfrac{\sqrt{5}}{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}}=\sqrt{14}$.

Câu 27. Chọn B

Ta có $d\left((P);(Q)\right)=\dfrac{|7-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$.

Câu 28. Chọn A

Nhận thấy hai mặt phẳng trên là song song nhau.

Lấy điểm $A(0;0;-2)\in(\alpha)$.

Ta có $d\left((\alpha);(\beta)\right)=d\left(A;(\beta)\right)=\dfrac{|6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=2$.

Câu 29. Chọn D

Ta có H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (P) nên $OH\perp(P)$. Do đó $\overrightarrow{OH}=(2;\,1;\,2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;\,1;\,0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{OH}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|2.1+1.1+2.0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là $45°$.

Câu 30. Chọn C

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases}b-1=0\\a-1=0\end{cases}\Rightarrow a=b=1$.

Và (P) tạo với (Oyz) góc $60°$ nên $\cos\left((P),(Oyz)\right)=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$ (*).

Thay $a=b=1$ vào phương trình được $\sqrt{2+c^2}=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$.

Khi đó $a+b+c=2-\sqrt{2}\in(0;3)$.

Câu 31. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau một góc lớn nhất (bằng $90°$)

$\Leftrightarrow IA\perp IB\Leftrightarrow d(I,d)=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;m-1)$ và có một VTCP $\vec{u}=(-1;1;-1)$.

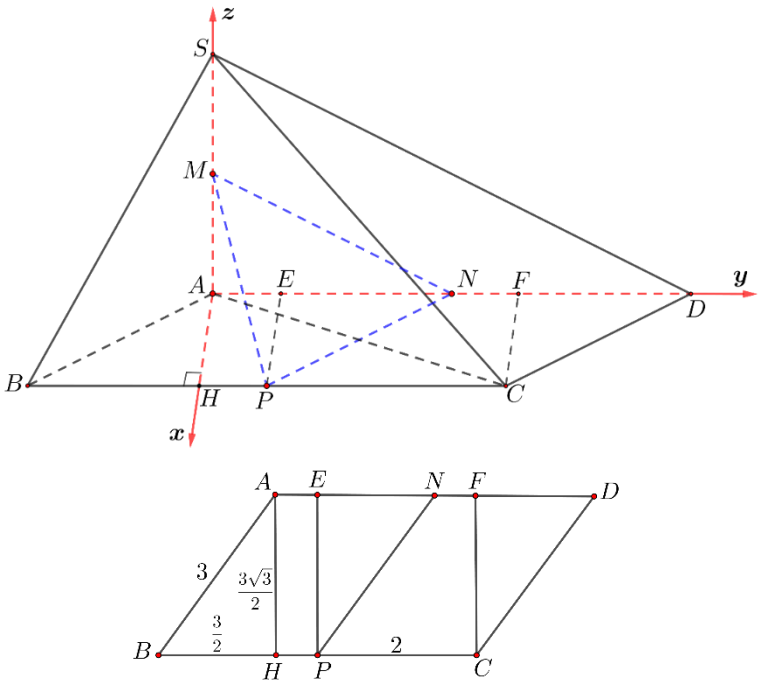
Suy ra: $\overrightarrow{IM}=(1;0;m+1)$, $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-m-1;-m;1)$.

$$d(I,d)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2m^2+2m+2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị thực của tham số m bằng -1.

Câu 32. Chọn A

Cách 1:



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng tia $Ax\perp AD$ nên $Ax\perp BC$ tại H.

ΔABH vuông tại H có: $\begin{cases}BH=AB.\cos ABH=3.\cos 60^\circ=\dfrac{3}{2}\\AH=AB.\sin ABH=3.\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

$HP=BP-BH=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$, $HC=BC-BH=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Dựng hình chữ nhật $AHPE$ và hình chữ nhật $AHCF$ nên $AE=HP=\dfrac{1}{2}$, $AF=HC=\dfrac{5}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ.

Ta có: $A(0;0;0)$, $S\left(0;0;2\sqrt{3}\right)$, $M\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, $N(0;2;0)$, $C\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$, $P\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AS}=\left(0;0;2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$, $\overrightarrow{NM}=\left(0;-2;\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{NP}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};-\dfrac{3}{2};0\right)$.

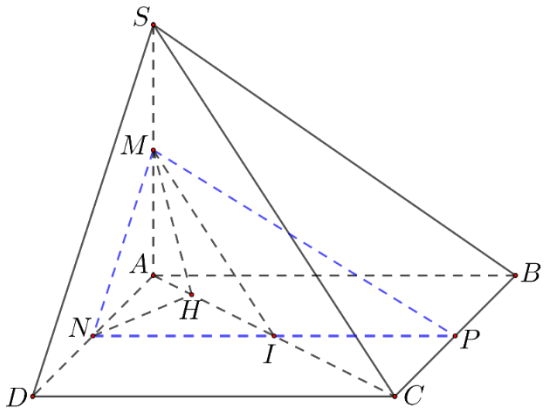
Chọn $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-5\sqrt{3};9;0\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (SAC) $\Rightarrow\left|\vec{n_1}\right|=2\sqrt{39}$.

Chọn $\vec{n_2}=\left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}\right]=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{9}{2};3\sqrt{3}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (MNP) $\Rightarrow\left|\vec{n_2}\right|=3\sqrt{6}$.

Khi đó: $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\left|-5\sqrt{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+9.\dfrac{9}{2}+0.3\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{39}.3\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Vậy: $\alpha \approx 78°41'24"$.

Cách 2:



Gọi $I = AC \cap NP$ và dựng $NH \perp AC$ tại H.

Ta có: $NH \perp AC, NH \perp SA \Rightarrow NH \perp (SAC)$ tại H.

Khi đó: ΔHMI là hình chiếu vuông góc của ΔNMI lên mặt phẳng (SAC).

Do đó: $S_{HMI} = S_{MNI}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{S_{HMI}}{S_{MNI}}$.

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos ABC = 16+9-2.3.4.\cos 60° = 13 \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12+16} = 2\sqrt{7}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{12+13} = 5$.

$MN = \dfrac{SD}{2} = \sqrt{7}$, $MI = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{5}{2}$, $NI = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{3}{2}$, $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $AN = \dfrac{AD}{2} = 2$.

$S_{NAI} = \dfrac{1}{2}.NA.NI.\sin ANI = \dfrac{1}{2}.NH.AI \Rightarrow HN = \dfrac{NA.NI.\sin 60°}{AI} = \dfrac{2.\dfrac{3}{2}.\sin 60°}{\dfrac{\sqrt{13}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

$MH = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \sqrt{7 - \dfrac{36}{13}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$, $HI = \sqrt{NI^2 - NH^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{36}{13}} = \dfrac{3}{2\sqrt{13}}$.

$* p_1 = \dfrac{NM + MI + NI}{2} = \dfrac{\sqrt{7} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{7}+4}{2}$

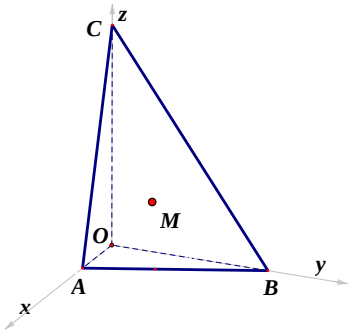
$\Rightarrow S_{MNI} = \sqrt{p_1.(p_1 - MN).(p_1 - MI).(p_1 - NI)} = \sqrt{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

$* p_2 = \dfrac{MI + IH + HM}{2} = \dfrac{\dfrac{5}{2} + \dfrac{8}{\sqrt{13}} + \dfrac{3}{2\sqrt{13}}}{2} = \dfrac{65+19\sqrt{13}}{52}$

$\Rightarrow S_{MIH} = \sqrt{p_2.(p_2 - MI).(p_2 - HI).(p_2 - MH)} = \sqrt{\dfrac{27}{208}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}$.

Vậy: $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Suy ra: $\alpha \approx 78°41'24"$.

Câu 33. Chọn C



Đặt $OA = a\,(a>0)$. Khi đó $OB = 2a$, $OC = 4a$.

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (α) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{4a}=1$.

Do $M(1;2;1)\in(\alpha)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}+\frac{1}{4a}=1 \Leftrightarrow \frac{9}{4a}=1 \Leftrightarrow a=\frac{9}{4}$ (thỏa mãn $a>0$).

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là: $4x+2y+z-9=0$.

Suy ra: $d(O;(\alpha)) = \frac{|4.0+2.0+0-9|}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Câu 34. Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB nên (α) qua $I(3;1;2)$ là trung điểm AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (6;-2;2)$ là một vectơ pháp tuyến.

Phương trình (α) có dạng $3(x-3)-1(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-y+z-10=0$.

$$d(C;(\alpha)) = \frac{|3x_C - y_C + z_C - 10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|3.2-1+1-10|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{11}}.$$

Câu 35. Chọn A

Vì $\frac{6}{1}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{3}}\neq\frac{-1}{8} \Rightarrow (P)//(Q)$ nên $d((P);(Q)) = d(M;(Q))$ với $M(0;1;-1)\in(P)$

$$d((P);(Q)) = d(M;(Q)) = \frac{\left|x_M + \frac{1}{2}y_M + \frac{1}{3}z_M + 8\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left|0+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+8\right|}{\sqrt{\frac{49}{36}}} = 7.$$

Câu 36. Chọn A

Ta có:

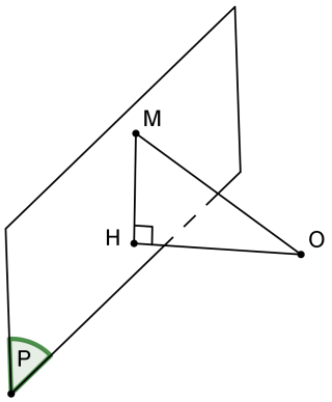
Mặt phẳng (ABC) có $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1,-4,9)$ là véc-tơ pháp tuyến (ABC) và đi qua điểm $A(1,-2,0)$ nên có phương trình dạng:

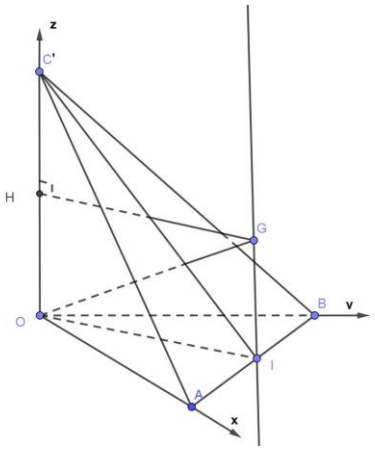
$1(x-1)-4(y+2)+9(z-0)\Leftrightarrow x-4y+9z-9=0$

Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ điểm D:

$$d\left(D,(ABC)\right)=\frac{\left|x_D-4y_D+9z_D-9\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+9^2}}=\frac{\left|3-4.3+9.1-9\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+9^2}}=\frac{9}{7\sqrt{2}}$$

Câu 37. Chọn D





Gọi H là hình chiếu của O mặt phẳng (P). Khi đó: $d\left(O,(P)\right)=OH$.

Trong tam giác vuông OHM : $OH\le OM$ nên $d\left(O,(P)\right)$ đạt giá trị lớn nhất khi $d\left(O,(P)\right)=OM$ hay $OM\perp(P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $M(1;2;-1)$ và nhận $\overrightarrow{OM}=(1;2;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến là $x+2y-z-6=0$.

(P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(6;0;0),B(0;3;0),C(0;0;-6)$.

Xét tứ diện $OABC'$ với $OC'=6,OA=6,OB=3$.

Gọi I là trung điểm của AB, trong mp (OAB). Gọi d qua I và song song trục Oz.

Lấy H là trung điểm OC'. Mặt phẳng trung trực của OC' qua H cắt d tại G.

Suy ra : $GC'=GO=GA=GB=R$.

Tam giác vuông OAB: $OI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2}=\frac{\sqrt{45}}{2}\Rightarrow OI=HG=\frac{\sqrt{45}}{2}$.

$OH=\frac{1}{2}OC'=3$.

Tam giác vuông OHG: $R=OG=\sqrt{HG^2+OH^2}=\frac{9}{2}$.

Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC'$ là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{243\pi}{2}$ (đvtt).

Câu 38. Chọn C

Vì (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt ở A, B, C nên ta gọi tọa độ các điểm là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì $M(2;3;5)\in(P) \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}=1$.

Vì đô dài các đoạn OA, OB, OC lập thành cấp số nhân với công bội bằng 3

$$\Rightarrow \begin{cases} b=3a \\ c=3b=9a \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{3}{3a}+\frac{5}{9a}=1 \Leftrightarrow a=\frac{32}{9} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{32}{3} \\ c=32 \end{cases}$$

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{\frac{32}{9}}+\frac{y}{\frac{32}{3}}+\frac{z}{32}=1$

Hay $(P): 9x+3y+z-32=0$. Do đó: $d(O;(P))=\frac{|-32|}{\sqrt{9^2+3^2+1^2}}=\frac{32}{\sqrt{91}}$.

Bình luận:

Bài này có thể dùng cách khác như sau:

Khoảng cách từ O đến (ABC): $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(3a)^2}+\frac{1}{(9a)^2} \Rightarrow h=\frac{9a}{\sqrt{91}}$

Mà $a=\frac{32}{9}$ (theo trên). từ đó tìm được $h=\frac{32}{\sqrt{91.}}$.

Câu 39. Chọn C

+ Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ đi qua điểm $M(1;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3)$.

+ Mặt phẳng $(P): 2x+y-z=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;1;-1)$.

+ Gọi $\vec{n}_{(Q)}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Vì mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\begin{cases} \vec{n}_{(Q)}\perp\vec{u} \\ \vec{n}_{(Q)}\perp\vec{n}_{(P)} \end{cases}$ và (Q) đi qua điểm $M(1;0;-1)$.

Do đó mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=\vec{u}\wedge\vec{n}_{(P)}=(-4;8;0)=-4(1;-2;0)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $1.(x-1)-2(y-0)=0 \Leftrightarrow x-2y-1=0$.

+ Vậy khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

$$d(O;(Q))=\frac{|0-2.0-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 40. Chọn C

Ta có $mx+m(m+1)y+(m-1)^2z-1=0 \Leftrightarrow m^2(y+z)+m(x+y-2z)+z-1=0$.

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm cố định mà mặt phẳng (P_m) luôn đi qua.

$\Leftrightarrow m^2(y_0+z_0)+m(x_0+y_0-2z_0)+z_0-1=0\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0+z_0=0 \\ x_0+y_0-2z_0=0 \\ z_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=3 \\ y_0=-1 \\ z_0=1 \end{cases}$. Suy ra $M(3;-1;1)$.

Vì Δ cắt mặt phẳng (P_m) tại một điểm cố định và M là điểm cố định mà mặt phẳng (P_m) luôn đi qua nên $M(3;-1;1)\in\Delta$.

Mặt phẳng (Oxy) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.

Vì $\begin{cases} \Delta // (Oxy) \\ \Delta \perp d \end{cases}$ nên Δ có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(2;-1;0)$.

Vậy Δ đi qua $M(3;-1;1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;0)$.

Do vậy ta có $h=\mathrm{d}(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\sqrt{21}$.

Câu 41. Chọn D

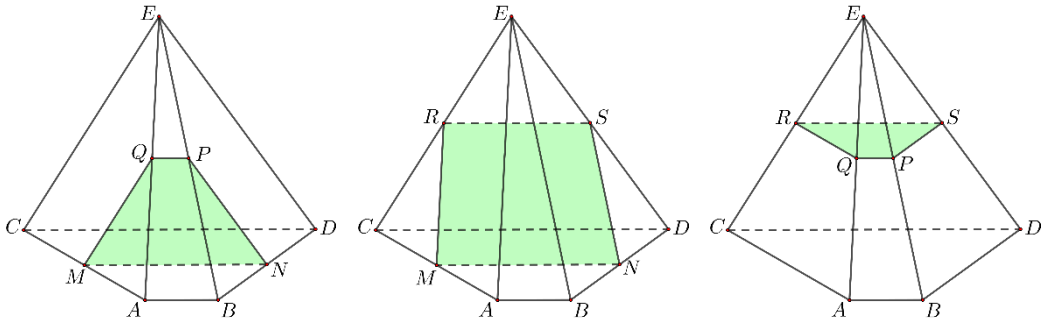
Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$, $\overrightarrow{CD}=(4;-4;0)$, $\overrightarrow{AD}=(2;-1;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-3;4;-1)$. Nhận thấy $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$ và $AD<BC$ bốn điểm A,B,C,D tạo thành một hình thang hai đáy là AB và CD

Mặt khác $\overrightarrow{AC}=-2;3;-1$ và $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;1)$ nên $(ABC):x+y+z-5=0$

Suy ra $E\notin(ABC)$. Vậy 5 điểm A,B,C,D,E tạo thành hình chóp có đỉnh là E.

Gọi M,N; P,Q; R,S lần lượt là trung điểm của AC,BD; EB,EA; EC,ED.

Ta dễ chứng minh được các mặt phẳng $(MNQP)$, $(MNSR)$, $(PQRS)$ là các mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có 3 mặt phẳng cách đều 5 điểm đã cho.



DẠNG 5. VÍ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA 2 MẶT PHẲNG, MẶT CẦU VỚI MẶT PHẲNG

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$, $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Cắt nhau.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-6x+4y-12=0$. Mặt phẳng nào sau đây cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$?

A. $4x-3y-z-4\sqrt{26}=0$. **B.** $2x+2y-z+12=0$.

C. $3x-4y+5z-17+20\sqrt{2}=0$. **D.** $x+y+z+\sqrt{3}=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-1=0$ và $(\beta):2x-y+mz-m+1=0$, với m là tham số thực. Giá trị của m để $(\alpha)\perp(\beta)$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -4.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho điểm $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng (P): $2x+2y+z+5=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π.

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt $(S):x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-m+4=0$. Tìm số thực m để mặt phẳng $(P):2x-2y+z+1=0$ cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=4$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;-1;4)$ và mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=1$. Phương trình của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S_1) là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4$. **B.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=16$.

C. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$. **D.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=2$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu số thực m để mặt phẳng $(P):x+2y-2z-1=0$ song song với mặt phẳng $(Q):2x+(m+2)y-2mz-m=0$?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ tâm mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z-1=0$ đến mặt phẳng $(P):x+2y+2z-10=0$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 9. Cho mặt cầu (S) có đường kính 10 cm và mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng 4cm. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. (P) và (S) có vô số điểm chung. **B.** (P) tiếp xúc với (S).

C. (P) cắt (S) theo một đường tròn bán kính 3cm. **D.** (P) cắt (S).

Câu 10. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}-\frac{z}{6}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$. **C.** $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}-\frac{z}{6}=0$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{z}{6}=1$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=12$. Mặt phẳng nào sau đây cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn?

A. $(P_1): x+y-z+2=0$. **B.** $(P_2): x+y-z-2=0$.

C. $(P_3): x+y-z+10=0$. **D.** $(P_4): x+y-z-10=0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=13$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng $(P): 4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.

C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Câu 14. Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và cắt mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$ theo đường tròn có bán kính bằng 3 là

A. $x+y=0$. **B.** $x-y=0$. **C.** $x+2y=0$. **D.** $x-2y=0$.

Câu 15. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d\left((P);(Q)\right)=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+2z+3=0$. **B.** $x+2y+2z=0$.

C. $x+2y+2z+1=0$. **D.** $x+2y+2z-6=0$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x+my+z-3m-1=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-2$.

C. $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=-1$

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc BC với là

A. $2x-y-1=0$. **B.** $-y+2z-3=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $y+2z-5=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y-2z-3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của (C)

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=2$. **C.** $r=2\sqrt{2}$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $2x+by+4z-3=0$ và (Q): $ax+3y-2z+1=0$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Với giá trị nào của a và b thì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

A. $a=1;\ b=-6$. **B.** $a=-1;\ b=-6$. **C.** $a=-\frac{3}{2};\ b=9$. **D.** $a=-1;\ b=6$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: x+2y-2z+1=0$; hai điểm $A\ 1;0;0$, $B\ -1;2;0$ và mặt cầu $S: x-1^{\ 2}+\ y-2^{\ 2}+z^2=25$. Viết phương trình mặt phẳng α vuông góc với mặt phẳng P, song song với đường thẳng AB, đồng thời cắt mặt cầu S theo đường tròn có bán kính bằng $r=2\sqrt{2}$.

A. $2x+2y+3z+11=0; 2x+2y+3z-23=0$. **B.** $2x-2y+3z+11=0; 2x-2y+3z-23=0$.

C. $2x-2y+3z-11=0; 2x-2y+3z+23=0$. **D** $2x+2y+3z-11=0; 2x+2y+3z+23=0$.

Câu 21. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$ cắt d_1 và vuông góc với d_2.

A. $\Delta: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{4}$. **B.** $\Delta: \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{-4}$.

C. $\Delta: \frac{x-5}{-2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-2}{4}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-4}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và điểm $M(3;1;2)$. Điểm A di chuyển trên mặt cầu (S) thỏa mãn $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MA}=-3$ thì điểm A thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $x+y+6z-2=0$. **B.** $3x+y+2z-3=0$.

C. $5x+y-2z-4=0$. **D.** Không tồn tại mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ và điểm $M(3;1;2)$. Điểm A di chuyển trên mặt cầu (S) thỏa mãn $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MA}=2$ thì điểm A thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $x+y+6z-2=0$. **B.** $3x+y+2z-3=0$.

C. $5x+y-2z-4=0$. **D.** $2x-4z-1=0$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z+2=0$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (α) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=3$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=9$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P): $2x-2y+z-17=0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S): $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $2x-2y+z+7=0$. **B.** $2x-2y+z+17=0$.

C. $x-y+2z-7=0$. **D.** $2x-2y+z-17=0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-3=0$ và điểm $I(1;3;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn cho chu vi bằng 2π. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\sqrt{5}$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3$. **D.** $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=5$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$ **B.** $T=5$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

A. $M(6;0;1)$. **B.** $N(-3;1;4)$. **C.** $J(-2;-1;5)$. **D.** $K(4;-1;-2)$.

Câu 31. Cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=6$ và $(S_2):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$. Biết rằng mặt phẳng $(P): ax+by+cz+6=0 (a>0)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+2y+z-1=0$ đồng thời tiếp xúc với cả hai mặt cầu đã cho. Tích abc bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx+(m-1)y+z-10=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x+y-2z+3=0$. Với giá trị nào của m thì và vuông góc với nhau?

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx+(m-1)y+z-10=0$ và mặt phẳng $(Q): 2x+y-2z+3=0$. Với giá trị nào của m thì và vuông góc với nhau?

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A và B. Gọi $H(a;b;c)$ là trung điểm AB. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-7=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 6π có phương trình là

A. $(Q): 2x+2y-z+17=0$. **B.** $(Q): 2x+2y-z+7=0$.

C. $(Q): 2x+2y-z-19=0$. **D.** $(Q): 2x+2y-z-17=0$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c \neq 0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng:

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right), B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 42. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(2;-5;-2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y+2z-1=0$. Phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

A. $(x-2)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=16$. **B.** $(x-2)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=4$.

C. $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(x-2)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=2$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Câu 44. Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A.7. **B.**-9. **C.**-7. **D.**9.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $M(2;5;-2)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha):x=1$, $(\beta):y=1$, $(\gamma):z=-1$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 46. Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm $I(-1;2;1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y-2z-2=0$ có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Giá trị $T=a+b+c+d$ bằng

A. 11. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 13.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oz. Biết mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng $(\alpha):z=2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính 2 và 4. Phương trình của (S)

A. $x^2+y^2+(z-2)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+(z-4)^2=16$.

C. $x^2+y^2+(z-4)^2=20$. **D.** $x^2+y^2+(z-2)^2=20$.

Câu 48. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(4;9;16)$ tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y+9)^2+(z+16)^2=4$. **B.** $(x-4)^2+(y-9)^2+(z-16)^2=4$.

C. $(x+4)^2+(y+9)^2+(z+16)^2=16$. **D.** $(x-4)^2+(y-9)^2+(z-16)^2=16$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P):2x+4y-z-7=0$, $(Q):4x+5y+z-14=0$, $(R):x+2y-2z-2=0$ và $(S):x+2y-2z+4=0$.

Biết mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=D$ có tâm nằm trên (P) và (Q), cùng tiếp xúc với (R) và (S). Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng thay đổi luôn đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Hãy tìm bán kính của đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng thay đổi luôn đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Hãy tìm bán kính của đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$; $(S_2):x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

A. $\frac{7}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{9}\pi$. **C.** $\frac{9}{7}\pi$. **D.** $\frac{7}{6}\pi$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho (P) $x+2y-2z+5=0$ và 2 mặt cầu (S_1): $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$, (S_2): $(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Gọi M,A,B lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và hai mặt cầu (S_1), (S_2). Tìm giá trị nhỏ nhất $S=MA+MB$.

A. $S_{\min}=11$. **B.** $S_{\min}=2\sqrt{14}-3$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{15}-3$. **D.** $S_{\min}=3\sqrt{6}-3$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn C**

Đường thẳng d_1 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-2)$ và đi qua điểm $M_1(1;0;-2)$.

Đường thẳng d_2 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-2;-1;2)$.

Do $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ nên ta có $\left[\begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{array}\right.,(1)$.

Thay tọa độ M_1 vào phương trình d_2 ta được: $\frac{1+2}{-2}=\frac{-1}{-1}=\frac{-2}{2}$, (mệnh đề sai).

Suy ra $M_1 \notin d_2,(2)$. Từ (1) và (2), ta có $d_1 // d_2$.

Câu 2. **Chọn C**

Mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-6x+4y-12=0$ có tâm $I(3;-2;0)$ và bán kính $R=5$.

Ta gọi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới các mặt phẳng ở các đáp án là h, khi đó để mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$ thì $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Đáp án **A** loại vì $h=\frac{\left|18-4\sqrt{26}\right|}{\sqrt{26}} \neq 4$.

Đáp án **B** loại vì $h=\frac{14}{3} \neq 4$.

Chọn đáp án **C** vì $h=4$.

Đáp án **D** loại vì $h=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \neq 4$.

Câu 3. **Chọn A**

Mặt phẳng (α) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ và (β) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}=(2;-1;m)$

$(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow 1+m=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Câu 4. **Chọn C**

Ta có: $d=d(I;(P))=\frac{|2.1+2.2-2+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$.

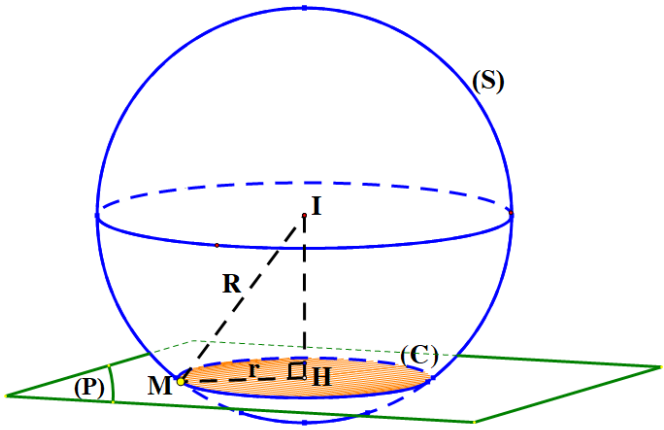
Bán kính của đường tròn giao tuyến là: $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\sqrt{16}=4$.

Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn nên ta có:

$R^2=d^2+r^2=9+16=25 \Rightarrow R=5$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm I, bán kính $R=5$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

Câu 5. **Chọn A**



$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-m+4=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2.(-1).x-2.(-2).y-2.3.z+(-m+4)=0$

$a=-1,\ b=\text{-}2,\ c=3,\ d=\text{-}m+4$

Điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow 10+m>0 \Leftrightarrow m>-10$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{10+m}$.

$$d(I,(P))=\frac{|2.(-1)-2.(-2)+3+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2.$$

(P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $3 \Leftrightarrow d(I,(P))=\sqrt{R^2-3^2}$.

$$\Leftrightarrow 2=\sqrt{(m+10)-3^2}.$$

$\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. **Chọn C**

Gọi I_1 là tâm mặt cầu (S_1) và R_1 là bán kính mặt cầu (S_1).

Tính được khoảng cách $II_1=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3>R_1=1$ nên điểm I nằm ngoài mặt cầu (S_1)

Suy ra bán kính của mặt cầu (S) là $R=II_1-R_1=2$.

Câu 7. **Chọn B**

Mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$ có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-2)$.

Mặt phẳng $(Q): 2x+(m+2)y-2mz-m=0$ có 1 VTPT là $\vec{n}_Q=(2;m+2;-2m)$.

Để $(P)//(Q)$ thì $\frac{1}{2}=\frac{2}{m+2}=\frac{-2}{-2m}\neq\frac{-1}{-m} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Rightarrow m\in\varnothing$.

Suy ra không có giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. **Chọn C**

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;2)$, do đó $d(I,(P))=\frac{|2+4+4-10|}{\sqrt{1+4+4}}=0.$

Câu 9. **ChọnB**

Vì bán kính của mặt cầu là $R=5$, $d=d(I;(P))=4<R$ **(**với I là tâm mặt cầu**)**

Do đó (P) cắt (S) theo một đường tròn bán kính là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Vậy (P) **không** tiếp xúc với (S).

Câu 10. Chọn B

Gọi điểm $A(a;0;0)$ là giao điểm của mặt cầu và trục hoành trong đó $a\neq 0$.

Khi đó $a^2-2a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\ (l)\\a=2\ (n)\end{array}\right.$. Do đó $A(2;0;0)$.

Gọi điểm $B(0;b;0)$ là giao điểm của mặt cầu và trục tung trong đó $b\neq 0$.

Khi đó $b^2-4b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\ (l)\\b=4\ (n)\end{array}\right.$. Do đó $B(0;4;0)$.

Gọi điểm $C(0;0;c)$ là giao điểm của mặt cầu và trục Oz trong đó $c\neq 0$.

Khi đó $c^2-6c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\ (l)\\c=6\ (n)\end{array}\right.$. Do đó $C(0;0;6)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$.

Câu 11. Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{12}$.

Ta có: $d\left(I,(P_1)\right)=\frac{|-2-1-1+2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}<\sqrt{12}=R$.

Vậy mặt phẳng (P_1) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn.

Câu 12. Chọn B

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x=0$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên:

$$d_{(I,(Oyz))}=R\Leftrightarrow\frac{|1.1+0.2+0.(-3)|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=R\Leftrightarrow R=1\ .$$

Khi đó phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$.

Câu 13. Chọn C

Ta có mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow\frac{|4.2-3.(-1)-m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2\Leftrightarrow|11-m|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=21\end{array}\right.$.

Câu 14. Chọn A

Vì mặt phẳng (P) chứa trục Oz nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by=0$ $\left(a^2+b^2>0\right)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$ và bán kính $R=3$. Mặt khác mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 nên mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1;-1;1)$ của mặt cầu.

Ta có $I\in(P)\Rightarrow a.1+b.(-1)=0\Leftrightarrow a=b$. Vì $a^2+b^2>0$ nên chọn $a=1\Rightarrow b=1$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y=0$.

Câu 15. Chọn D

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+d=0$ Với $d\neq 0; d\neq -3$.

Có $d\left((P);(Q)\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{|d+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\d=-6\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow(P)$ có dạng: $x+2y+2z-6=0$.

Câu 16. Chọn A

Mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ có tâm $I(2;4;1)$, bán kính $R=2$.

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2+4m+1-3m-1|}{\sqrt{1+m^2+1}}=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+2}}$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến $r=1$.

Ta có $R^2=d^2\left(I,(P)\right)+r^2\Leftrightarrow 4=\dfrac{(m+2)^2}{m^2+2}+1\Leftrightarrow m^2+4m+4=3(m^2+2)\Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0$

$\Leftrightarrow m=1$.

Câu 17. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-4;2;0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm.

Vì mặt phẳng đi qua A nên có phương trình: $-4(x-0)+2(y-1)=0\Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Câu 18. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-1)$, bán kính $R=3$.

Khi đó, ta có $d(I;(P))=\dfrac{|2.2-0-2(-1)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1$ và $r^2=R^2-d^2(I;(P))=8\Rightarrow r=2\sqrt{2}$.

Câu 19. Chọn B

Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q). Ta có :

$\overrightarrow{n_P}=(2;b;4)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(a;3;-2)$.

Cách 1.

Ta có $(P)//(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=k\overrightarrow{n_Q}\\-3\neq k.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2;b;4)=k(a;3;-2)\\-3\neq k.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=k.a\\b=3.k\\4=-2.k\\-3\neq k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-2\\a=-1\\b=-6\end{cases}$.

Cách 2.

Ta có $(P)//(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = \vec{0} \\ -3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (-2b-12; 4a+4; 6-ab) = (0;0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \end{cases}$.

Câu 20. Chọn A

Mặt cầu $S: x-1^{2}+y-2^{2}+z^{2}=25$ có tâm $I\ 1;2;0$ và bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng α là $d\ I,\ \alpha\ =\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{17}$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng P là $\vec{n}=\ 1;2;-2\ $, vectơ $\overrightarrow{AB}=\ -2;2;0\ $.

Vì mặt phẳng α vuông góc với mặt phẳng P và song song với đường thẳng AB nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng α là $\overrightarrow{n'}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=\ 4;4;6\ $.

Suy ra, phương trình mặt phẳng α có dạng $\alpha: 2x+2y+3z+D=0$.

Ta có: $d\ I,\ \alpha\ =\dfrac{|D+6|}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sqrt{17}=\dfrac{|D+6|}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D+6=17 \\ D+6=-17 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D=11 \\ D=-23 \end{bmatrix}$.

Do đó, phương trình mặt phẳng α là $2x+2y+3z+11=0$ hoặc $2x+2y+3z-23=0$.

Dễ thấy, $A \notin \alpha$ nên α song song với đường thẳng AB.

Vậy phương trình mặt phẳng α là $2x+2y+3z+11=0$ hoặc $2x+2y+3z-23=0$.

Câu 21. Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm $A(1;0;2)$ và vuông góc với d_2.

Phương trình mặt phẳng $(P): 1(x-1)+2(y-0)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-5=0$

Phương trình tham số của đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases}$

Gọi B là giao điểm của (P) và đường thẳng d_1, khi đó tọa độ điểm B thỏa hệ:

$$\begin{cases} x+2y+2z-5=0 \\ x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ x=3 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow B(3;3;-2).$$

Vì đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 nên đường thẳng Δ đi qua 2 điểm A và B. $\overrightarrow{AB}=(2;3;-4)$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua B nhận $\overrightarrow{AB}=(2;3;-4)$ làm vecto chỉ phương là:

$$\Delta: \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{-4}.$$

Câu 22. Chọn B

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;1;1)$.

Mặt phẳng $(Q): x-y-z-2=0$ có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;-1)$.

Mà $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=2-1-1=0\Rightarrow\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\Rightarrow(P)\perp(Q)$.

Vậy mặt phẳng $x-y-z-2=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 23. Chọn D

Cách 1

Gọi A có tọa độ là $A(x;y;z)$. $\overrightarrow{OA}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{MA}=(x-3;y-1;z-2)$.

Vì $A(x;y;z)$ thuộc mặt cầu (S) nên ta có $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$.

Ta có $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MA}=-3\Leftrightarrow x(x-3)+y(y-1)+z(z-2)=-3$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-y-2z+3=0$ $\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z+2)^2-4-x-y-6z+2=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z+2)^2-4=x+y+6z-2$ $\Leftrightarrow x+y+6z-2=0$.

Điểm A thuộc mặt phẳng $(\alpha): x+y+6z-2=0$ (1)

Ta thấy $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(1;0;-2)$ bán kính $R=2$

$d(I,(\alpha))=\dfrac{13}{\sqrt{38}}>2=R$ suy ra $(S)\cap(\alpha)=\varnothing$ suy ra (1) vô lý. Vậy không có mặt phẳng chứa điểm A thỏa mãn yêu cầu A di chuyển trên mặt cầu (S) và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MA}=-3$.

Cách 2

Gọi A có tọa độ là $A(x;y;z)$. $\overrightarrow{OA}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{MA}=(x-3;y-1;z-2)$.

Vì $A(x;y;z)$ thuộc mặt cầu (S) nên ta có $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$.

Ta có $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MA}=-3\Leftrightarrow x(x-3)+y(y-1)+z(z-2)=-3$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-y-2z+3=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra A thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$ bán kính $R'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(1;0;-2)$ bán kính $R=2$

Ta thấy $II'=\dfrac{\sqrt{38}}{2}>2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=R+R'$ suy ra $(S)\cap(S')=\varnothing$.

Vậy không có mặt phẳng chứa điểm A thỏa mãn yêu cầu A di chuyển trên mặt cầu (S) và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MA}=-3$.

Câu 24. Chọn C

Mặt cầu (S) có: tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2+2}=4$.

Vì $(\alpha)\|(\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x+3y-12z+d=0,(d\neq10)$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên:

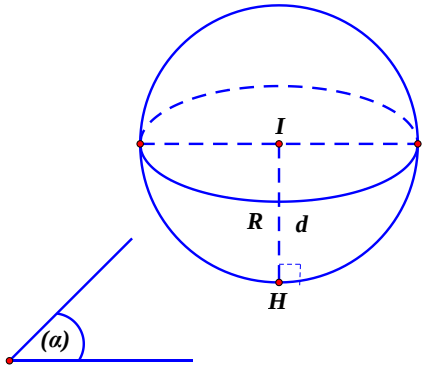
$$d_{(I,(\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4.1+3.2-12.3+d|}{\sqrt{4^2+3^2+(-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d-26| = 52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-26 \\ d=78 \end{array}\right.$$

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d=78$.

Vậy mp (β): $4x+3y-12z+78=0$.

Câu 25. Chọn A

Câu 26. Chọn C



Từ tọa độ tâm $I(1;2;5)$ ta loại được hai đáp án B, D.

Mặt khác theo bài ta có $R = d(I,(\alpha)) = \frac{|1-2.2+2.5+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3$ nên đáp án A loại.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=9$.

Vậy chọn C

Câu 27. Chọn A

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) có dạng: $2x-2y+z+D=0,\ (D\neq -17)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=5$.

Đường tròn giao tuyến có chu vi bằng 6π, suy ra: $2\pi r = 6\pi \Leftrightarrow r=3$.

Do đó: $d(I,(Q)) = \sqrt{R^2-r^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{|2.0-2.(-2)+1+D|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = 4 \Leftrightarrow |D+5| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=7\ (TM) \\ D=-17\ (L) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $2x-2y+z+7=0$.

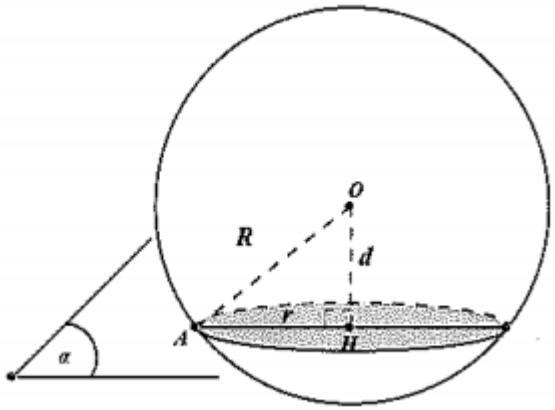
*** Phân tích bài toán**

- Đây là bài toán về sự tương giao của mặt cầu với mặt phẳng.

- Để giải quyết bài toán này chúng ta cần nhớ lại kiến sau:

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (α) và $d=d(O,(\alpha))=OH$. Khi đó

Nếu $d<R$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là một đường tròn có tâm H và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.



Câu 28. Chọn D

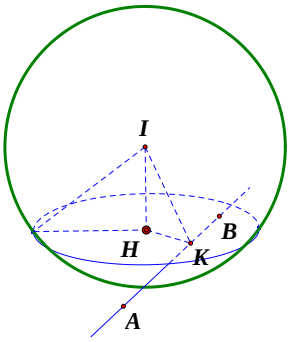
Bán kính của đường tròn là: $r=\dfrac{2\pi}{2\pi}=1$.

Khoảng cách từ I đến (P) là: $d=\dfrac{|2.1-3+2.(-1)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{r^2+d^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=5$.

Câu 29. Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0)\in(P):b-2=0\Leftrightarrow b=2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB, H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K\in AB\Rightarrow K(t;1-t;2t)\Rightarrow \overrightarrow{IK}=(t-1;-t-1;2t-3)$

$IK\perp AB\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}=0\Rightarrow t=1\Rightarrow \overrightarrow{IK}=(0;-2;-1)$.

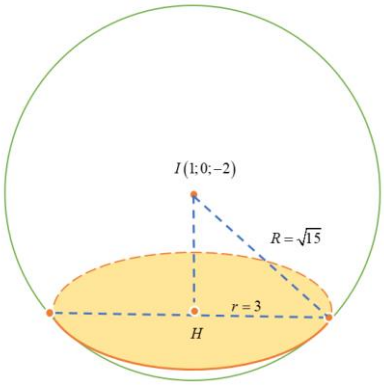
$r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P)\right)}=\sqrt{25-d^2\left(I,(P)\right)}=\sqrt{25-IH^2}$.

Ta có: $r_{\min}\Leftrightarrow IH_{\max}$.

Mà $IH\le IK\Rightarrow IH_{\max}=IK\Leftrightarrow H\equiv K\Rightarrow (P)\perp IK\Rightarrow \vec{n}_P$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_P=k.\overrightarrow{IK}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-2k\\c=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\k=-1\\c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\c=1\end{cases}\Rightarrow t=a+b+c=0+2+1=3.$$

Câu 30. Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2), R=\sqrt{15}$.

Gọi đường tròn giao tuyến của (S) và (Q) có bán kính là r, theo đề bài $C=2\pi r=6\pi\Rightarrow r=3$.

$IH=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{15-9}=\sqrt{6}$.

$(P)//(Q)\Rightarrow (Q):x-2y+z+D=0(D\neq 7)$.

$$d\left(I,(Q)\right)=IH\Leftrightarrow\frac{|1-2+D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Rightarrow\begin{bmatrix}D=7(l)\\D=-5(t/m)\end{bmatrix}\Rightarrow (Q):x-2y+z-5=0.$$

Thay các điểm ở đáp án vào phương trình $(Q)\Rightarrow J$ thỏa mãn.

Câu 31. Chọn A

Ta có: (S_1) có tâm $I_1(0;0;0)$ và bán kính $R_1=\sqrt{6}$

(S_2) có tâm $I_2(1;1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{6}$

Mặt phẳng $(P):ax+by+cz+6=0(a>0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)(a>0)$

Mặt phẳng $(Q):3x+2y+z-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(3;2;1)$

Vì Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc nhau $\Rightarrow \vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}=0\Leftrightarrow 3a+2b+c=0(1)$

Mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với cà hai mặt cầu nên $\begin{cases}d(I_1;(P))=R_1\\ d(I_2;(P))=R_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{|6|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{6}\\ \dfrac{|a+b+c+6|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a+b+c+6|=6\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\ a+b+c=-12\end{array}\right.\ (2)\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}$$

Từ (1) và (2)

TH1: $\begin{cases}3a+2b+c=0\\ a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a\\ b=-2a\\ a^2+4a^2+a^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ b=-2\\ a=1\end{cases}\Rightarrow abc=-2$

TH2: $\begin{cases}3a+2b+c=0\\ a+b+c=-12\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a-24\\ b=12-2a\\ a^2+(12-2a)^2+(a-24)^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a-24\\ b=12-2a\\ 5a^2-96a+684=0(\text{VN})\end{cases}$

Ta chọn đáp án A.

Cách khác :

Ta có: (S_1) có tâm $I_1(0;0;0)$ và bán kính $R_1=\sqrt{6}$

(S_2) có tâm $I_2(1;1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{6}$; Mặt phẳng $(Q):3x+2y+z-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(3;2;1)$.

Vì $I_1I_2=\sqrt{3}<\sqrt{6}$ nên hai mặt cầu cắt nhau mà $R_1=R_2=\sqrt{6}$ nên mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu khi (P) song song với I_1I_2.

Ta lại có mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (P) nhận $\left[\overrightarrow{I_1I_2},\vec{n}_{(Q)}\right]=(-1;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

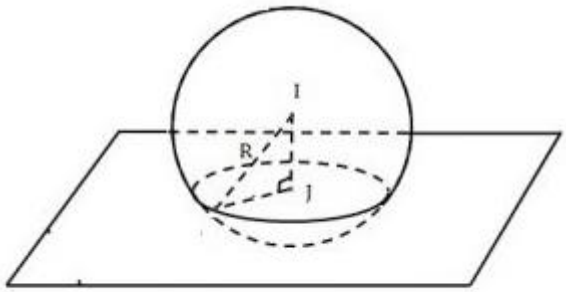
Vì (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)(a>0)$ nên $\dfrac{a}{-1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-1}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ c=a\end{cases}$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được viết lại là: $ax-2ay+az+6=0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S_1) nên $d(I_1,(P))=R_1\Leftrightarrow\dfrac{6}{a\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow a=1$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P):1x-2y+z+6=0$. Vậy tích $abc=-2$

Câu 32. Chọn B



Gọi J là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P) ta có $\mathrm{IJ}=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2.1-2+2(-1)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$.

Mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$ ta có bán kính mặt cầu $R=\sqrt{8+\mathrm{IJ}^2}=3$.

Phương trình mặt cầu cần tìm $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 33. Chọn C

$(P): mx+(m-1)y+z-10=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(m;m-1;1)$.

$(Q): 2x+y-2z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(2;1;-2)$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 2m+m-1-2=0\Leftrightarrow m=1$.

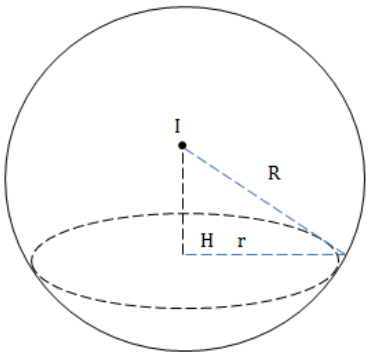
Câu 34. Chọn C

$(P): mx+(m-1)y+z-10=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(m;m-1;1)$.

$(Q): 2x+y-2z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(2;1;-2)$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 2m+m-1-2=0\Leftrightarrow m=1$.

Câu 35. Chọn D

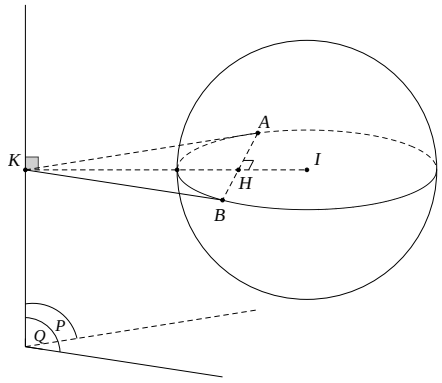


Ta có: $IH=d\left(I;(P)\right)=\dfrac{|2.2+1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{9}{3}=3$,

Suy bán kính mặt cầu $R=\sqrt{IH^2+r^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Phương trình mặt câu: $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Câu 36.



Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d có phương trình:

$1(x-1)+1(y-0)-1(z+1)=0\Leftrightarrow x+y-z-2=0$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, do $K\in d\Rightarrow K(t;2+t;-t)$ và $K\in(P)\Rightarrow t+2+t-(-t)-2=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow K(0;2;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt (S) theo đường tròn lớn (C), có $A,B\in(C)$ và $H=IK\cap AB$.

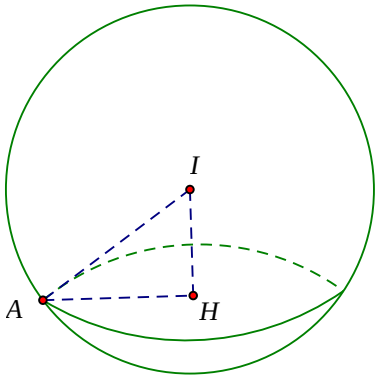
$IK=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(0+1)^2}=\sqrt{6}$

$IH.IK=IA^2=1\Rightarrow\dfrac{IH}{IK}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{IK}$ (vì $\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IK}$ cùng hướng).

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=\dfrac{1}{6}(0-1)\\ b-0=\dfrac{1}{6}(2-0)\\ c+1=\dfrac{1}{6}(0+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{6}\\ b=\dfrac{1}{3}\\ c=-\dfrac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=\dfrac{1}{3}.$$

Câu 37. Chọn D

Từ $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ta có tâm $I=(2;1;0)$ bán kính $R=3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P)\cap(S)=C(H;r)$ với $r=2$



Ta có $IH=d(I;(P))\Leftrightarrow IH=\dfrac{|2m+2-0+1|}{\sqrt{m^2+4+1}}=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$

Theo yêu cầu bài toán ta có $R^2=IH^2+r^2\Leftrightarrow 9=\dfrac{(2m+3)^2}{m^2+5}+4$

$$\Leftrightarrow m^2-12m+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6-2\sqrt{5}\\ m=6+2\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Câu 38. Chọn A

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1+4+9+11}=5$.

Đường tròn (C) có chu vi bằng 6π nên có bán kính là: $r_C=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3$.

Mặt phẳng (Q) song song với mp (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) là:

$2x+2y-z+D=0\ \ (D\neq -7)$.

Vì (Q) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) nên

$r_C=\sqrt{R^2-d^2(I,(Q))}\Leftrightarrow 3=\sqrt{25-d^2(I,(Q))}\ \Leftrightarrow d(I,(Q))=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2.1+2(-2)-3+D|}{\sqrt{4+4+1}}=4\Leftrightarrow |D-5|=12\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=17\\D=-7\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $D\neq -7$ ta có phương trình (Q):$2x+2y-z+17=0$.

Câu 39. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;2)$ bán kính $R=1$.

Ta có $IM=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2}=1=R$

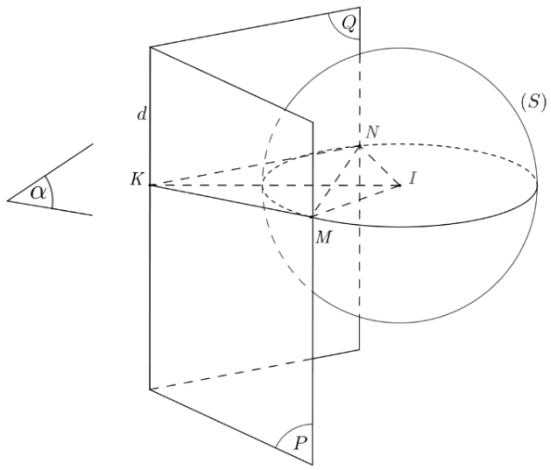
Suy ra mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M.

Nên mặt phẳng (ABC) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):1\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+2\left(y-\dfrac{4}{3}\right)+2\left(z-\dfrac{4}{3}\right)=0\Leftrightarrow \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$.

Suy ra $a=6;b=3;c=3$. Vậy $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}|abc|=9$.

Câu 40. Chọn B



d nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) nên d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đó

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d có phương trình:

$2(x-1)-1(y-2)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y+4z-4=0$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, do $K\in d \Rightarrow K(2+2t;-t;4t)$ và $K\in(\alpha)$ $\Rightarrow 2.(2+2t)+t+4.4t-4=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow K(2;0;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn (C). Ta có $M,N\in(C)$ và gọi $H=IK\cap MN$. Suy ra H là trung điểm của MN.

$IK=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{6}$.

Ta có $IH.IK=IM^2=2 \Rightarrow IH=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ nên $MN=2HM=2\sqrt{IM^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}=2\sqrt{2-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 41. Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) .Vì $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ nên

$(x+2)^2+y^2+\left(z+2\sqrt{2}\right)^2+x^2+y^2+z^2+4x+4y=16$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+8x+4y+4\sqrt{2}z+12=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (S').

Ta thấy rằng tọa độ M thỏa phương trình (S') cũng là phương trình mặt cầu.

Như vậy điểm M nằm trên giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S'),đó là một đường tròn.

Để tìm bán kính của đường tròn giao tuyến ta làm như sau:

Bằng cách khử đi x^2,y^2,z^2 từ phương trình (S) và (S') ta được phương trình $y=0$ (P)

Phương trình (P) là phương trình của một mặt phẳng.

Như vậy điểm M nằm trên giao tuyến của mặt cầu (S) (hoặc của (S') cũng được) với mặt phẳng (P).

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;-\sqrt{2})$ và bán kính $R=3$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d=d(I,(P))=1$.

Vậy bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.

Câu 42. Chọn B

Ta có: $d(I;(P))=\dfrac{|2.2+(-5)+2(-2)-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{6}{3}=2$.

Mặt cầu có tâm $I(2;-5;-2)$ và có $R=2$ nên $(S):(x-2)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=4$.

Câu 43. Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{17-m}$ (điều kiện $m<17$).

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (β) là: $d(I,(\beta))=2.$

Đường tròn giao tuyến có bán kính là: $r=\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

Ta có $R^2=d^2(I,(\beta))+r^2 \Leftrightarrow 17-m=4+16 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Câu 44. ChọnB

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O.

Vì (α) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+b+c+d=0\\-2b+2c+d=0\end{cases} \quad (*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại $M(-d;0;0), N\left(0;\dfrac{-d}{b};0\right)$.

Vì M,N cách đều O nên $OM=ON$. Suy ra: $|d|=\left|\dfrac{d}{b}\right|$.

Nếu $d=0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d|=\left|\dfrac{d}{b}\right| \Leftrightarrow b=\pm 1$.

- Với $b=1$, $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=-2\\2c+d=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4\\d=-6\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (P): $x+y+4z-6=0$
- Với $b=-1$, $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=0\\2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2\\d=2\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (Q): $x-y-2z+2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Cách 2 ; $\overrightarrow{AB}=(-1;-3;1)$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O lần lượt tại M,N. Vì M,N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a;0;0), N(0;a;0)$ với $a\neq 0$ khi đó (α) chính là (P). Ta có $\overrightarrow{MN}=(-a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_1}=(-1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_1}\right]=(-1;-1;-4)$,

suy ra $(P): x+y+4z+d_1=0$

TH2: $M(-a;0;0), N(0;a;0)$ với $a\neq 0$ khi đó (α) chính là (Q). Ta có $\overrightarrow{MN}=(a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_2}=(1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_2}\right]=(-1;1;2)$,

suy ra $(Q): x-y-2z+d_2=0$. Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Câu 45. Chọn D

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S).

Do (S) tiếp xúc với cả ba mặt phẳng (α), (β), (γ) nên ta có $|a-1|=|b-1|=|c+1|=R$.

Mặt khác, ta lại có $R=IM=\sqrt{(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2}$.

Do đó ta có hệ:

$$\begin{cases}(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2=(a-1)^2\\(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2=(b-1)^2\\(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2=(c+1)^2\end{cases}(1).$$

Quan sát ta thấy rằng $\begin{cases}(a-1)^2>(a-2)^2\Leftrightarrow a>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a-1>0\\(b-1)^2>(b-5)^2\Leftrightarrow b>3\Leftrightarrow b-1>0\\(c+1)^2>(c+2)^2\Leftrightarrow c<-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow c+1<0\end{cases}$.

Do đó $|a-1|=|b-1|=|c+1|\Rightarrow a-1=b-1=-c-1$.

Từ $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=b-1=-c-1\\(a-2)^2+(b-5)^2+(c+2)^2=(a-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=4\\c=-4\end{cases}$. Vậy $R=IM=3$.

Câu 46. Chọn A

Gọi R là bán kính mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên ta có:

$d(I,(P))=R\Rightarrow\dfrac{|-1-2.2-2.1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=R\Leftrightarrow R=3$. Suy ra $d=9$.

Từ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$ và tâm $I(-1;2;1)$ suy ra $a=-1;\ b=2;\ c=1$.

Vậy $T=a+b+c+d=-1+2+1+9=11$.

Câu 47. Chọn C

Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R và có tâm $I(0;0;c)$ (vì tâm I thuộc trục Oz).

Ta có: $d(I;(Oxy))=|c|$ và $d(I;(\alpha))=|c-2|$.

Vì mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 2 nên $R=\sqrt{(d(I;(Oxy)))^2+4}=\sqrt{c^2+4}$.

Vì mặt phẳng (α) : $z=2$ cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 4 nên $R=\sqrt{(d(I;(\alpha)))^2+16}=\sqrt{(c-2)^2+16}$.

Suy ra: $c^2+4=(c-2)^2+16\Leftrightarrow 4c=16\Leftrightarrow c=4\Rightarrow I(0;0;4)$ và $R=\sqrt{20}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+(z-4)^2=20$.

Câu 48. Chọn D

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x=0$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) có bán kính $R=d(I,(Oyz))=4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-4)^2+(y-9)^2+(z-16)^2=16$.

Câu 49. Chọn C

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu $(S'):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=D$.

Vì I nằm trên (P) và (Q) nên: $\begin{cases}2a+4b-c-7=0\\4a+5b+c-14=0\end{cases}$ (1)

Mặt khác, (S') cùng tiếp xúc với (R) và (S) nên:

$$d(I,(R))=d(I,(S)) \Rightarrow \frac{|a+2b-2c-2|}{3}=\frac{|a+2b-2c+4|}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+2b-2c-2=a+2b-2c+4\\a+2b-2c-2=-a-2b+2c-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2=4\\a+2b-2c+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow a+2b-2c+1=0 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ: $\begin{cases}2a+4b-c-7=0\\4a+5b+c-14=0\\a+2b-2c+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\\c=3\end{cases} \Rightarrow a+b+c=5.$

Câu 50. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm là $I(0;1;1)$ bán kính $R=3$. Vì $IA=\sqrt{5}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn thiết diện.

Khi đó, ta luôn có $r^2=R^2-IH^2\geq R^2-IA^2=4$ (vì H trùng với A hoặc ΔAIH vuông tại H nên $IH\leq IA$).

Vậy đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì có bán kính nhỏ nhất $r=2$ khi A trùng với H.

Câu 51. Chọn C

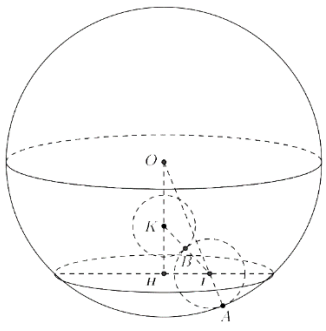
Mặt cầu (S) có tâm là $I(0;1;1)$ bán kính $R=3$. Vì $IA=\sqrt{5}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn thiết diện.

Khi đó, ta luôn có $r^2=R^2-IH^2\geq R^2-IA^2=4$ (vì H trùng với A hoặc ΔAIH vuông tại H nên $IH\leq IA$).

Vậy đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì có bán kính nhỏ nhất $r=2$ khi A trùng với H.

Câu 52. Chọn B



Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1=5$. Mặt cầu (S_2) có tâm $K(-2;0;2)$, bán kính $R_2=1$, mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;-1)$.

Vì $\overrightarrow{OK}=(-2;0;2)$ cùng phương với $\vec{n}_{(P)}=(1;0-1)$ nên $\overrightarrow{OK}$ vuông góc với mặt phẳng (P)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) nên O, K, H thẳnghàng.

Ta có $OH=d\left(O;(P)\right)=3\sqrt{2}<R_1$, $KH=d\left(K;(P)\right)=\sqrt{2}>R_2$, $OK=2\sqrt{2}$, $OK+R_2<R_1\Rightarrow$ (P) cắt (S_1) và (P) không cắt (S_2) và (S_1) chứa (S_2).

Do đó mặt cầu tâm I phải tiếp xúc trong với (S_1) tại A và tiếp xúc ngoài với (S_2) tại B.

Gọi R là bán kính với mặt cầu tâm I.

Suy ra: $OI=R_1-R=5-R$ và $KI=R_2+R=1+R$.

Ta có $IH^2=OI^2-OH^2=KI^2-KH^2\Leftrightarrow IH^2=(5-R)^2-18=(1+R)^2-2\Leftrightarrow 12R=8$

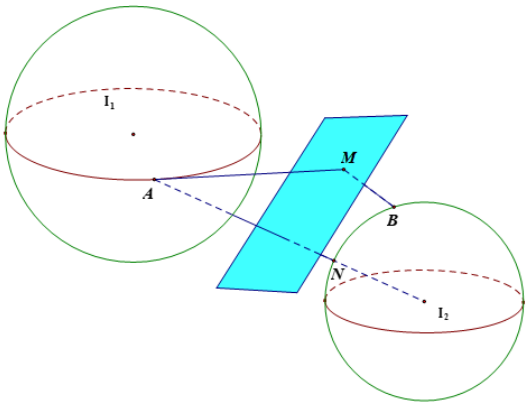
$\Leftrightarrow R=\dfrac{2}{3}\Rightarrow IH^2=\left(1+\dfrac{2}{3}\right)^2-2=\dfrac{7}{9}\Leftrightarrow IH=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Khi đó I thuộc mặt cầu (S_3) tâm H, bán kính $R_3=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Mà I thuộc mặt phẳng (P) nên I thuộc đường tròn giao tuyến và có bán kính là $r=R_3=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

Vậy diện tích là $\pi r^2=\dfrac{7}{9}\pi$.

Câu 53. Chọn B



Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;-2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(2;0;-1)$ và bán kính $R_1=1$

Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(-4;-2;3)$ và bán kính $R_2=2$.

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2}=(-6;-2;4)\Rightarrow I_1I_2=2\sqrt{14}>R_1+R_2$ suy ra (S_1), (S_2) nằm ngoài nhau.

Ta có $\left(x_{I_1}+2y_{I_1}-2z_{I_1}+5\right)\left(x_{I_2}+2y_{I_2}-2z_{I_2}+5\right)<0$ nên I_1, I_2 nằm về hai phía đối với mặt phẳng (P).

Ngoài ra $d\left[I_1,(P)\right]=3>R_1$, $d\left[I_2,(P)\right]=3>R_2$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_2 với hai mặt cầu (S_1) và (S_2).

Ta có

$MA+MB+AI_1+BI_2\ge I_1I_2\Leftrightarrow MA+MB+NI_1+PI_2\ge I_1N+NP+PI_2\Leftrightarrow MA+MB\ge NP$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A\equiv N$, $B\equiv P$ và M, N, P thẳng hàng.

Khi đó $(MA+MB)_{\min}=NP=I_1I_2-R_1-R_2=2\sqrt{14}-3$.

DẠNG 6. CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=5$. **C.** $P_{\min}=25$. **D.** $P_{\min}=27$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(-2;8;3)$ và điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy). Khi $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a+b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(-3;5;-5), B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A. $M(-2;1;1)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $M(6;-18;12)$. **D.** $M(-6;18;12)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P);2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 145. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 135.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Câu 6. Cho $A(4;5;6); B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+1=0$. Khi đó $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là?

A. $\sqrt{77}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{85}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y-2z-15=0$. Gọi $M\ a;b;c$ là điểm thuộc mặt phẳng P sao cho tổng các bình phương khoảng cách từ M đến A, B, C nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -5. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tập hợp các điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x-7y-4z+14=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x-7y-4z+5=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

Câu 11. Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Gía trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua điểm $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $T=a-2b+3c+12$ bằng

A. -16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;1;1)$, $N(4;3;4)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-9}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác IMN nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=\frac{23}{3}$. **B.** $T=29$. **C.** $T=19$. **D.** $T=\frac{40}{3}$.

Câu 15. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(5;-1;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Xét các điểm M thuộc (P), giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA-MB|$ bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{6}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-3)^2+(z-6)^2=45$ và $M(1;4;5)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng luôn đôi một vuông góc tại O cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là A, B, C. Khoảng cách lớn nhất từ M đến mặt phẳng (ABC) là

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và mặt phẳng $(P):(m^2+2m)x-(m^2+4m-1)y+2(3m-1)z+m^2+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

A. 5. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\sqrt{21}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;4)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(2;3;4)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=100$. Phương trình mặt phẳng qua hai điểm A,B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất là

A. $x+y-2z+3=0$. **B.** $x-z+2=0$. **C.** $y-z+1=0$. **D.** $x-2y+z=0$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M là điểm thay đổi trong mặt phẳng $(P):2x+2y+z+2019=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|AM-BM|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0),B(3;-1;4)$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ điểm $M\in(\alpha)$ sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(1;3;-1)$. **B.** $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $M(0;2;1)$.

Câu 22. Cho mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z-1=0$ và hai điểm $A(0;-1;1),B(1;1;-2)$. Biết $M\in(\alpha)$ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hoành độ x_M của điểm M là

A. $x_M=\dfrac{1}{3}$. **B.** $x_M=-1$. **C.** $x_M=-2$. **D.** $x_M=\dfrac{2}{7}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P):x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tổng $A+B+C$ bằng

A. 6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\dfrac{a}{b^2+c^2}-\dfrac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$. **B.** $3x+12y+12z-1=0$.

C. $x+4y+4z=0$. **D.** $3x+12y+12z+1=0$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P):x+2y+3z-8=0$. **B.** $(P):\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

C. $(P):x+y+z-4=0$. **D.** $(P):x+2y+z-6=0$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(3;2;4)$, $D(-2;-1;-3)$. Mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn qua D và không cắt cạnh nào của tam giác ABC. Khi tổng các khoảng cách từ A, B, C đến (P) là lớn nhất thì (P) có một phương trình dạng $ax+by+cz+29=0$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 14.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z-3=0$. Biết điểm $M(a;b;c)\in(P)$ thỏa mãn $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=0$. **D.** $S=-\frac{1}{2}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;6)$, $B(2;4;0)$ và $C(0;4;6)$. Biết M là điểm để biểu thức $MA+MB+MC+MO$ đạt giá trị nhỏ nhất, phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $H(3;0;-1)$ và M là

A. $\Delta:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-3}$. **B.** $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$.

C. $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2)$, $B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2MA^2+3NB^2$ bằng

A. $49,8$. **B.** 45. **C.** 53. **D.** $55,8$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):mx+(m+1)y-z-2m-1=0$, với m là tham số. Gọi (T) là tập hợp các điểm H_m là hình chiếu vuông góc của điểm $H(3;3;0)$ trên (P). Gọi a,b lần lượt là khoảng cách lớn nhất, khoảng cách nhỏ nhất từ O đến một điểm thuộc (T). Khi đó, $a+b$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. Chọn D

Gọi $I(x;y;z)$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\vec{0}\quad(1)$.

Ta có: $\begin{cases}3(1-x)+5(-1-x)-7(3-x)=0\\3(1-y)+5(2-y)-7(-1-y)=0\\3(1-z)+5(0-z)-7(2-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-23\\y=20\\z=-11\end{cases}$. Suy ra $I(-23;20;-11)$.

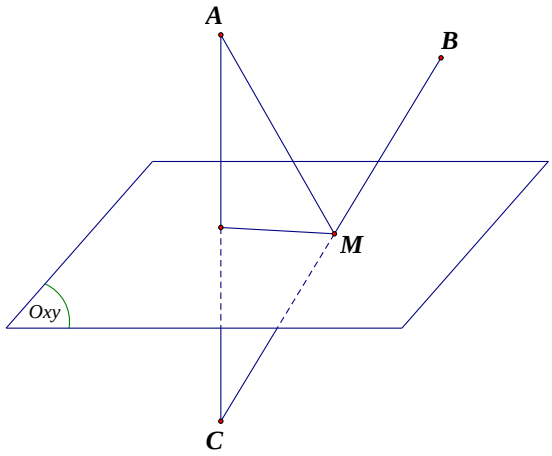
Xét $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$.

$P=\left|\overrightarrow{MI}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)\right|$. Từ (1) ta có $P=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

$P_{\min}$ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α).

Khi đó: $P_{\min}=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2.(-23)-20+2.(-11)+7\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=27$.

Câu 2. Chọn B



Dễ thấy hai điểm A,B nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi C là điểm đối xứng với A qua (Oxy) suy ra $C(2;0;-1)$.

Đường thẳng BC đi qua $C(2;0-1)$ và $\vec{u}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}=(-1;2;1)$ làm vecto chỉ phương có phương trình là: $\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=-1+t\end{cases}$. Khi đó $MA+MB=MC+MB\geq BC=4\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, B, C thẳng hàng.

Suy ra $\min(MA+MB)=4\sqrt{6}\Leftrightarrow M=(Oxy)\cap BC$ nên tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn hệ:

$\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=-1+t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=0\end{cases}$. Vậy $M(1;2;0)\Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=0\Rightarrow a+b+3c=3$.

Câu 3. Chọn C

Cách 1.

Gọi $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ nên ta có $a+b+c=0$

$MA^2-2MB^2=(-3-a)^2+(5-b)^2+(-5-c)^2-2\left[(5-a)^2+(-3-b)^2+(7-c)^2\right]$

$=-a^2-b^2-c^2+26a-22b+38c-107=-\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]+544$.

Theo bất đẳng thức Bunnhia ta có

$a+b+c=0\Rightarrow|-21|=|(a-13)+(b+11)+(c-19)|\le\sqrt{3\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]}$

$\Rightarrow(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\ge147$

$MA^2-2MB^2=-\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]+544\le397$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{a-13}{1}=\frac{b+11}{1}=\frac{c-19}{1}=-7\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=-18\\c=12\end{cases}\Rightarrow M(6;-18;12).$$

Cách 2.

(Căn cứ vào đề cho đáp án sẵn tọa độ điểm M)

M thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ nên loại **B**, **D.**

Với $M(-2;1;1)\Rightarrow MA^2-2MB^2=-149$, với $M(6;-18;12)\Rightarrow MA^2-2MB^2=397$

Từ đó loại **A.** Vậy đáp án là **C.**

Cách 3.

Ta có thể dùng tâm tỷ cự như sau:

Gọi I thỏa mãn

$\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}-2\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow I(13;-11;19)$.

Khi đó: $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=-MI^2+\left(IA^2-2IB^2\right)$ lớn nhất khi I là hình chiếu vuông góc của M lên $(P)\Rightarrow M(6;-18;12)$.

Câu 4. Chọn D

Gọi I là điểm thỏa điều kiện : $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó $I(-1;1;1)$.

T= $2MA^2+3MB^2=2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2=2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2$.

T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min}$.

Mà $M\in(P)$ nên $MI_{\min}\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

$\Leftrightarrow MI=d(\mathrm{I},(P))=\dfrac{|2.(-1)-1+2.1-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$.

Khi đó: $T_{\min}=5MI^2+2IA^2+3IB^2=135$.

Câu 5. Chọn A

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow I\left(2;-2;2\right)$.

$MA^2+MB^2+MC^2$ $=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2$.

Mà $M\in\left(Oyz\right)\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên $\left(Oyz\right)$ $\Leftrightarrow M\left(0;-2;2\right)$. Vậy $P=0-2+2=0$.

Câu 6. **Chọn B**

Ta có $\left|MA-MB\right|\le AB$ với mọi điểm $M\in\left(P\right)$

Vì $\left(2.4+5+2.6+1\right).\left(2.1+1+2.2+1\right)=208>0$ nên hai điểm A,B nằm cùng phía với $\left(P\right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M=AB\cap\left(P\right)$

Khi đó, $\left|MA-MB\right|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB=\sqrt{\left(4-1\right)^2+\left(5-1\right)^2+\left(6-2\right)^2}=\sqrt{41}$.

Câu 7. **Chọn C**

Ta có trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(1;0;2\right)$. Khi đó: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min}\Leftrightarrow MG_{\min}\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng $\left(P\right)$.

Gọi d là đường thẳng qua G và vuông góc với $\left(P\right)$, ta có phương trình đường thẳng d là:

$\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=2+t\end{cases}$. Giá trị t ứng với tọa độ điểm M là nghiệm của phương trình:

$\left(1+t\right)-\left(-t\right)+\left(2+t\right)+3=0\Leftrightarrow 3t+6=0\Leftrightarrow t=-2$.

Vậy $M\left(-1;2;0\right)$. Khi đó: $a+2b+3c=-1+2.2+3.0=3$.

Câu 8. **Chọn C**

Do M, N, P không trùng với gốc tọa độ nên $m\ne 0$, $n\ne 0$, $p\ne 0$.

Phương trình mặt phẳng $\left(MNP\right)$ là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1\Leftrightarrow\frac{1}{m}x+\frac{1}{n}y+\frac{1}{p}z-1=0$

$\Rightarrow d\left(O,\left(MNP\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương m^2, n^2, p^2 và ba số dương $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{p^2}$ ta có:

$m^2+n^2+p^2\ge 3\sqrt[3]{m^2n^2p^2}$ và $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{m^2n^2p^2}}$

$\Rightarrow\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)\ge 9$; Mà $m^2+n^2+p^2=3$ suy ra:

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\ge 3\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}\ge\sqrt{3}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow d\left(O,(MNP)\right)\le\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m^2=n^2=p^2=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) là $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Chọn **C**

Câu 9. **Chọn C**

Ta có: $I\ (1;2;2)$ là trọng tâm của tam giác *ABC*.

MA, MB, MC là khoảng cách từ *M* đến các điểm *A, B, C*.

Xét $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}^2\ \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}^2$

$=3\ \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$ (do *I* là trọng tâm của tam giác *ABC* nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$)

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2$.

Mà $IA^2+IB^2+IC^2$ có giá trị không đổi nên $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi *MI* ngắn nhất. Khi đó *M* là hình chiếu vuông góc của *I* lên mặt phẳng P.

Gọi d là đường thẳng đi qua *M* và *I*, vuông góc với mặt phẳng P.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $I(1;1;1)$, nhận véc tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(3;-3;-2)$ là một véc tơ chỉ phương nên phương trình tham số của d là $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=2-3t\\z=2-2t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$.

$M=P\cap d$. $M\in d\Rightarrow M\ (1+3t;2-3t;2-2t)$.

Mặt khác $M\in(P)$ nên: $3\ (1+3t)-3\ (2-3t)-2\ (2-2t)-15=0\Leftrightarrow t=1$.

Do đó $M\ (4;-1;0)$. Suy ra $a+b+c=3$.

Câu 10. **Chọn C**

Ta có: $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}d_{(M;(AB))}AB$.

Ta có: Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất $\Leftrightarrow d_{(M;(AB))}$ nhỏ nhất.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$; $\vec{n}_{(P)}=(3;1;-1)\Rightarrow \vec{n}_{(P)}.\overrightarrow{AB}=0.$

$\Rightarrow$ AB song song với mặt phẳng (P).

Mà $d_{(M;(AB))}$ ngắn nhất, $M\in(P)$. Nên M thuộc giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Với (Q) là mặt phẳng vuông góc với (P) và đi qua AB.

Mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) đi qua AB $\Rightarrow \vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{n}_{(P)};\overrightarrow{AB}\right]=(1;-7;-4).$

$A\in(Q)\Rightarrow(Q):x_A-7y_A-4z_A+c=0\Rightarrow 1-7.0-4.2+c=0\Rightarrow c=7\Rightarrow(Q):x-7y-4z+7=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}M\in(Q)\\M\in(P)\end{cases}\Rightarrow M\in\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}.$$

Câu 11. Chọn B

Gọi $G(x_1;y_1;z_1)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}.$

Vậy $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG.$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}x_1=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{-1+2-4}{3}=-1\\ y_1=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{3+6-12}{3}=-1\\ z_1=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{5-1+5}{3}=3\end{cases}\Rightarrow G(-1;-1;3).$

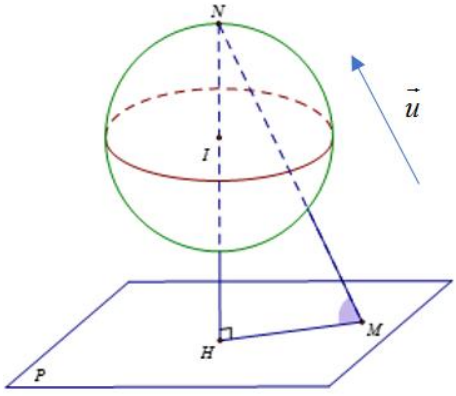
Vì G cố định nên $S=3MG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Tức là $MG\perp(P)$.

Ta có: $d(G,(P))=\dfrac{\left|-1.1+2.(-1)-2.3-5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{14}{3}=MG.$

Vậy giá trị nhỏ nhất $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG=3.\dfrac{14}{3}=14.$

Câu 12. Chọn C

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{\left|-1-2.2+2.1-3\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2>R.$



Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

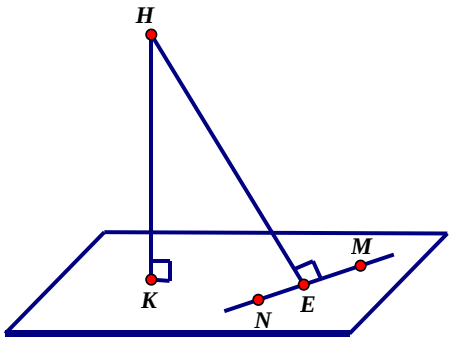
Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha = HNM$.

Có $HN = MN.\cos\alpha \Rightarrow MN = \dfrac{1}{\cos\alpha}.HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất $\Leftrightarrow$ $HN = d\left(I,(P)\right)+R = 3$.

Có $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \dfrac{1}{\cos\alpha}HN = 3\sqrt{2}$.

Câu 13. Chọn D

Gọi K là hình chiếu của H lên (P), E là hình chiếu của H lên MN.



Ta có : $d\left(H;(P)\right) = HK$ và $d\left(H;MN\right) = HE$, $HK \le HE$ (không đổi).

Vậy $d\left(H;(P)\right)$ lớn nhất khi $K \equiv E$, với E là hình chiếu của H lên $MN \Rightarrow E\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{-1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE} = \left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua $M \Rightarrow (P): -x-y+z-3=0$. Vậy $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow T = 16$.

Câu 14. Chọn C

Cách 1.

Ta có $I \in \Delta$; $I(7+t;3-2t;9+t)$.

Ta tính: $MI = \sqrt{6t^2+16t+84}$; $NI = \sqrt{6t^2+16t+34}$; $MN = \sqrt{14}$.

Gọi C là chu vi tam giác IMN; $C = \sqrt{6\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{220}{3}} + \sqrt{6\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{70}{3}} + \sqrt{14}$.

Hay $C \ge \sqrt{\dfrac{220}{3}} + \sqrt{\dfrac{70}{3}} + \sqrt{14}$.

Chu vi tam giác IMN nhỏ nhất khi $t = -\dfrac{4}{3}$; khi đó $I\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{17}{3};\dfrac{23}{3}\right)$ hay $T = 19$.

Cách 2.

Gọi véc tơ $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của Δ ta có $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.

Đường thẳng MN vuông góc với Δ.

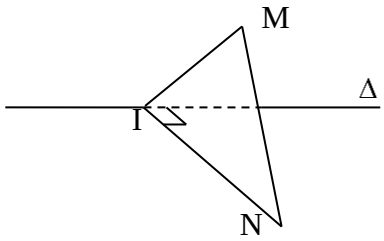
Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và vuông góc với Δ.

Phương trình mặt phẳng (α) chứa MN vuông góc với Δ là: $x-2y+z-2=0$.

Mặt phẳng (α) cắt Δ tại $H\left(\frac{17}{3};\frac{17}{3};\frac{23}{3}\right)$.

Gọi điểm $I\in\Delta$; Gọi C là chu vi tam giác IMN. Ta có:

$$C=MI+NI+MN\geq MH+NH+\sqrt{14}=\sqrt{\frac{220}{3}}+\sqrt{\frac{70}{3}}+\sqrt{14}.$$



Vậy chu vi tam giác IMN nhỏ nhất khi $I\equiv H$. Hay $I\left(\frac{17}{3};\frac{17}{3};\frac{23}{3}\right)$. Vậy $T=19$.

Câu 15. Chọn C

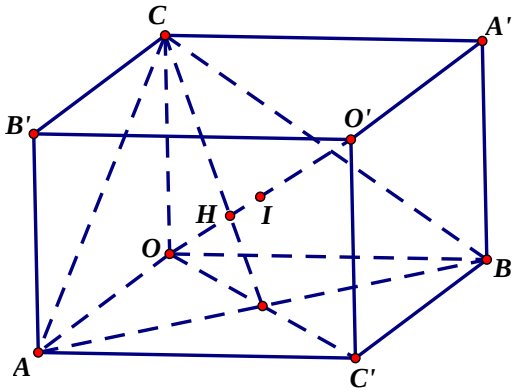
Nhận xét: $(x_A+y_A+z_C-1)(x_B+y_B+z_C)<0$ suy ra A và B khác phía với mặt phẳng (P)

Áp dụng công thức tính nhanh:Tọa độ điểm đối xứng của $M(x_0;y_0;z_0)$ qua $(P):ax+by+cz+d=0$ là điểm $M'(x_1;y_1;z_1)$ với $\begin{cases}x_1=x_0-\dfrac{2a(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\\ y_1=y_0-\dfrac{2b(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\\ z_1=z_0-\dfrac{2c(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}\end{cases}$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (P) suy ra $B'\left(\frac{13}{3};\frac{-5}{3};\frac{-8}{3}\right)$

Ta có $|MA-MB|=|MA-MB'|\leq AB'=2\sqrt{5}$

Câu 16. Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;6)$, bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Tứ diện $OABC$ vuông đỉnh O và nội tiếp mặt cầu (S) nên gọi O', A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với O, A, B, C qua tâm I thì $OBA'C.AC'O'B'$ là hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu (S) và đường chéo OO' của hình hộp cắt mặt chéo tam giác ABC tại trọng tâm H của tam giác ABC và $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OO'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OI}\Rightarrow H(0;2;4)$.

Mặt phẳng (ABC) thay đổi, luôn đi qua $H(0;2;4)$ nên $d(M,(ABC))\le MH=\sqrt{6}$.

$d(M,(ABC))=\sqrt{6}$ khi mặt phẳng (ABC) vuông góc với MH.

Câu 17. Chọn C

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm cố định mà mặt phẳng (P) luôn đi qua.

Ta có

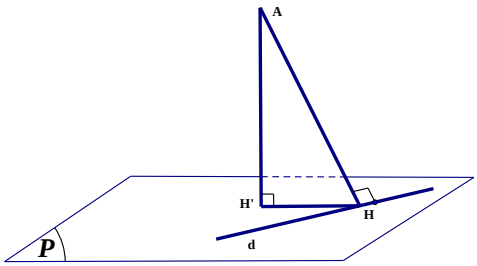
$(m^2+2m)x_0-(m^2+4m-1)y_0+2(3m-1)z_0+m^2+1=0\ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0-y_0+1)m^2+(2x_0-4y_0+6z_0)m+y_0-2z_0+1=0\ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-y_0+1=0 \\ 2x_0-4y_0+6z_0=0 \\ y_0-2z_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=-1 \\ z_0=0 \end{cases} \Rightarrow M(-2;-1;0)$. Ta có $d(A,(P))\le AM$

Do đó khoảng cách từ khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $AM=\sqrt{29}$ khi $AM\perp(P)$ tại M.

Câu 18. Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d, H' là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Ta có $AH'\le AH$. Vậy mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu đề bài phải chứa d và vuông góc với AH.

Gọi $H(1+2t;-2+t;2t), t\in\mathbb{R}$. Ta có $\overrightarrow{AH}=(2t-1;1+t;2t-4)$, $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 9t-9=0\Leftrightarrow t=1$.

Vậy mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AH}=(1;2;-2)$ và đi qua điểm $B(1;-2;0)\in d$.

Phương trình mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1), R=2\sqrt{5}$. Ta có $d(I,(P))=4<R$.

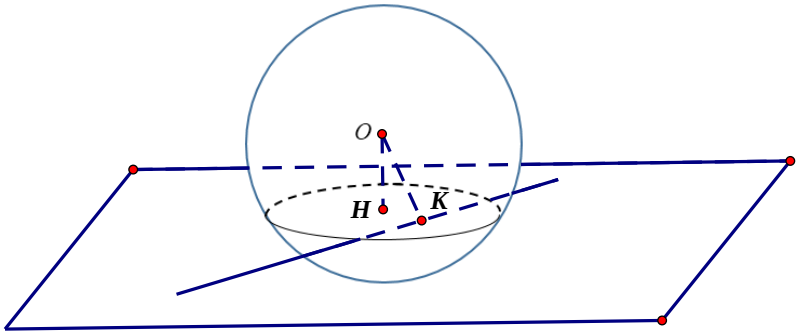
Vậy (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{20-16}=2$

Phân tích: Bài có nhiều hướng giải,như đưa về phương trình chùm mặt phẳng rồi đánh giá max – min, tuy nhiên dùng hình học là đơn giản hơn cả.

Yêu cầu các em nắm vững được vị trí tương đối của điểm, đường, mặt và mặt cầu trong không gian.

Trong các dạng bài chứa điểm, chứa đường, thỏa mãn khoảng cách max thì nhìn chung khoảng cách max chính là khoảng cách từ điểm- đường ,điểm – điểm theo dữ kiện đề bài.

Câu 19. Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và có bán kính $R=10$.

Ta có $OA=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}<R$ suy ra A nằm trong mặt cầu, nên đường thẳng AB luôn cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm, r là bán kính đường tròn giao tuyến, H là hình chiếu vuông góc của O lên (P) và K là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng AB.

Do $r^2+OH^2=R^2=100$ nên r nhỏ nhất khi OH lớn nhất.

Từ $OH\le OK$ suy ra OH lớn nhất khi $H\equiv K$ và (P) là mặt phẳng qua A nhận $\overrightarrow{OK}$ làm vectơ pháp tuyến.

Ta có:

+ $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$ nên đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}(t\in\mathbb{Z})$.

+ Gọi $K(1+t;2+t;3+t)$ thì $\overrightarrow{OK}=(1+t;2+t;3+t)$, do $\overrightarrow{OK}\perp\overrightarrow{AB}$ nên

$$\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 1+t+2+t+3+t=0\Leftrightarrow t=-2$$

Suy ra $K(-1;0;1)$.

+ (P) qua $A(1;2;3)$ và nhận $\overrightarrow{OK}(-1;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$-x+z-2=0\Leftrightarrow x-z+2=0.$$

Câu 20. Chọn A

Ta có: $(2x_A+2y_A+z_A+2019)(2x_B+2y_B+z_B+2019)>0$ nên các điểm A,B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) và đường thẳng AB luôn cắt mặt phẳng (P) tại một điểm cố định.

Từ bất đẳng thức véc tơ $\left|\,|\vec{u}|-|\vec{v}|\,\right|\le|\vec{u}-\vec{v}|$. Ta có $|AM-BM|\le AB$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

Do đó $|AM-BM|_{Max}=AB=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$, đạt được khi $M=AB\cap(P)$.

Câu 21. Chọn B

Ta có: $(x_A-y_A+z_A+1)(x_B-y_B+z_B+1)=(1-1+0+1)(3+1+4+1)>0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α).

Ta có $|MA-MB|\le AB=2\sqrt{6}$, nên $|MA-MB|$ lớn nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap(\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\\z=4t\end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\\z=4t\\x-y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{8}\\x=\dfrac{3}{4}\\y=\dfrac{5}{4}\\z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$ Do đó $M\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 22. Chọn D

Ta có: $(x_A-y_A+2z_A-1)(x_B-y_B+2z_B-1)=(0+1+2.1-1)(1-1-4-1)<0$ nên hai điểm A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (α). Nên $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M=AB\cap(\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1-3t\end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

trình $\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1-3t\\x-y+2z-1=0\end{cases}\begin{cases}t=2/7\\x=2/7\\y=-3/7\\z=1/7\end{cases}$. Do đó $M\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{1}{7}\right)$, $x_M=\frac{2}{7}$.

Câu 23. Chọn D

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $d(M;(P))\le d(M;Oz)$.

Suy ra $d\left(M;(P)\right)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $d\left(M;Oz\right)=MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz.

Dễ có $H\left(0;0;3\right)$. Vậy (P) đi qua $H\left(0;0;3\right)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}\left(-1;-2;0\right)$.

$(P):-x-2y=0\Leftrightarrow x+2y=0\Rightarrow A=2;B=C=0\Rightarrow A+B+C=2$

Câu 24. Chọn B

Đặt $t=b+c\left(t>0\right)$; $b^2+c^2\geq\frac{t^2}{2}$; $bc\leq\frac{t^2}{4}$.

$5\left(a^2+b^2+c^2\right)=9\left(ab+2bc+ca\right)\Leftrightarrow 5a^2+5\left(b+c\right)^2-9a\left(b+c\right)=28bc\Rightarrow 5a^2+5t^2-9at\leq 7t^2$

$\Leftrightarrow\left(5a+t\right)\left(a-2t\right)\leq 0\Leftrightarrow a\leq 2t$. Vậy $Q\leq\frac{4}{t}-\frac{1}{27t^3}=f\left(t\right)$ với $t>0$.

Ta có $f'\left(t\right)=-\frac{4}{t^2}+\frac{1}{9t^4}=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{6}$ (vì $t>0$). Ta có bảng biến thiên

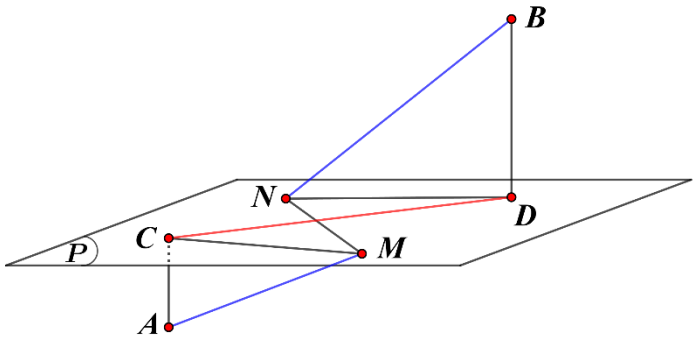
x	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	16	↘	0

Vậy $Q_{max}=16\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$; $b=c=\frac{1}{12}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{12};\frac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$; $N\left(0;\frac{1}{12};0\right)$; $P\left(0;0;\frac{1}{12}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) $\frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{12}}+\frac{z}{\frac{1}{12}}=1\Leftrightarrow 3x+12y+12z-1=0$.

Câu 25. Chọn A



• Xét hệ $\begin{cases}\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+z^2=4\\ x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0\\ x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases}\Rightarrow x=0$

Vậy $(P):x=0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P). Suy ra $AC=1$, $BD=2$, $CD=5$.

• Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, ta được

$$AM+BN=\sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2}$$
$$\geq\sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2}$$
$$\geq\sqrt{9+(CM+DN)^2}$$

Lại có $CM+MN+ND\geq CD=5$ nên suy ra $CM+ND\geq 4$. Do đó $AM+BN\geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM}=\frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0;\frac{4}{5};\frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0;\frac{7}{5};\frac{28}{15}\right)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là 5.

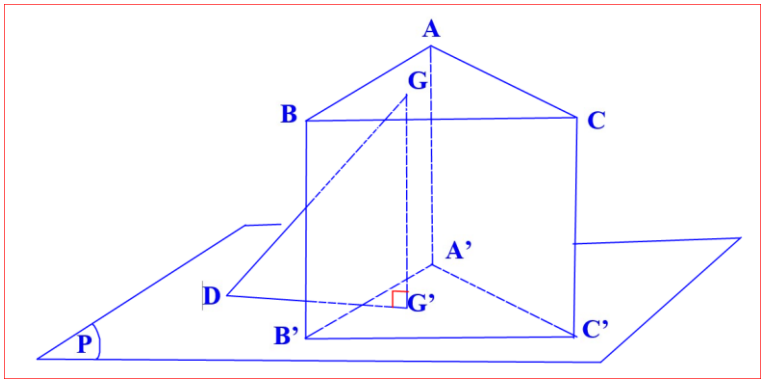
Câu 26. Chọn D

Gọi H là hình chiếu của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P), do tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông tại O nên ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi OH lớn nhất.

Mặt khác $OH=d(O,(P))\leq OM$.

Vậy mặt phẳng $(P):\begin{cases}M(1;2;1)\\ \vec{n}=\overrightarrow{OM}=(1;2;1)\end{cases}\Leftrightarrow(P):x+2y+z-6=0$.

Câu 27. Chọn C



* Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C xuống (P).

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow G(2;2;3)$.

Gọi G' là hình chiếu của G xuống mặt phẳng (P).

* Tổng khoảng cách từ A, B, C xuống (P), theo giả thiết thì $(P)//(ABC)$ nên $d=AA'+BB'+CC'=3GG'\Rightarrow d_{\max}\Leftrightarrow(GG')_{\max}$.

Mà $GG'\leq GD$ (mối quan hệ đường xiên – hình chiếu)

$\Rightarrow d_{\max} \Leftrightarrow G' \equiv D \Rightarrow (P)$ qua $D(-2;-1;-3)$ nhận $\overrightarrow{DG} = (4;3;6)$ là véc tơ pháp tuyến nên có phương trình: $4(x+2)+3(y+1)+6(z+3)=0$ hay $(P): 4x+3y+6z+29=0$. Từ đó suy ra $a=4;\ b=3;\ c=6$. Vậy $a+b+c=4+3+6=13$.

Câu 28. Chọn C

Cách 1:

Ta có

$$T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{4a^2+4b^2+4c^2} = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge 2\sqrt{\frac{(a+b-2c)^2}{1^2+1^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$$

$T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{6}$ $\begin{cases} \frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{-2} \\ a+b-2c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=-1 \end{cases}$

Cách 2:

Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của IC. Tính được $I(-1;-3;1), J(0;0;0)$.

Khi đó $T = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}\right| = 4\left|\overrightarrow{MJ}\right| = 4MJ$. Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của J trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua J và vuông góc với (P). Khi đó Δ có phương trình $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-2z-3=0 \\ x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$$

Câu 29. Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó

$$MA^2+MB^2+MC^2 = \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$
$$= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$ Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

Câu 30. Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\end{aligned}$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$ Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

Câu 31. Chọn D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.

Do $\cos(\vec{a};\vec{b})\le 1$ nên: $|\vec{a}|.|\vec{b}|\ge\vec{a}.\vec{b}$. Dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Gọi G là là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GO}=\vec{0}$. Khi đó, tọa độ G là

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_O}{4}=1\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_O}{4}=2\Rightarrow G(1;2;3)\Rightarrow GA=GB=GC=GO=\sqrt{14}.\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_O}{4}=3\end{cases}$$

Đặt $T=MA+MB+MC+MO$.

$\Rightarrow\sqrt{14}T=\sqrt{14}MA+\sqrt{14}MB+\sqrt{14}MC+\sqrt{14}MO=GA.MA+GB.MB+GC.MC+GO.MO$

$\ge\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{MO}$

$=\overrightarrow{GA}.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\overrightarrow{GB}.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\overrightarrow{GC}.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GO}.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GO}\right)$

$=GA^2+GB^2+GC^2+GO^2+\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GO}\right)$

$=GA^2+GB^2+GC^2+GO^2=56\Rightarrow T\ge 4\sqrt{14}$.

Giá trị nhỏ nhất $T=MA+MB+MC+MO$ bằng $4\sqrt{14}$ khi 4 cặp véc tơ: $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{GC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{GO}$ và $\overrightarrow{MO}$ cùng hướng. Khi đó M trùng với G.

$\Rightarrow M(1;2;3)$. Đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MH}=(1;-1;-2)$.

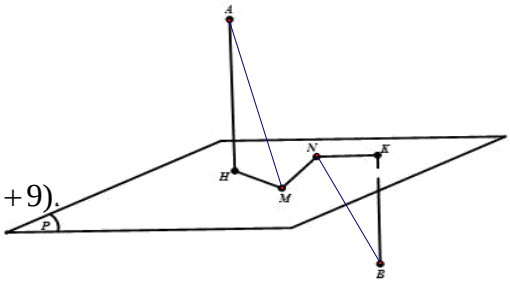
Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Câu 32. Chọn A

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P).

Theo định lí Pitago có

$$\begin{cases} MA^2 = MH^2 + HA^2 = MH^2 + d^2(A,(P)) = MH^2 + 9 \\ NB^2 = NK^2 + KB^2 = NK^2 + d^2(B,(P)) = NK^2 + 9 \end{cases}.$$



Đặt $MH = a, NK = b \Rightarrow 2MA^2 + 3NB^2 = 2(a^2+9) + 3(b^2+9)$.

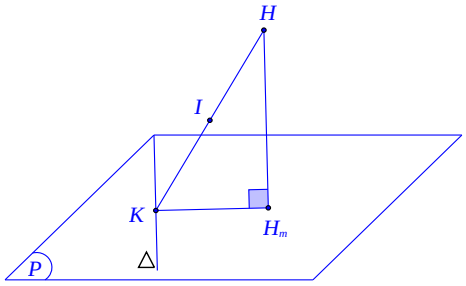
Mặt khác theo bất đẳng thức đường gấp khúc ta có:

$HM + MN + NK \ge HK = 3 \Rightarrow a + 1 + b \ge 3 \Leftrightarrow b \ge 2 - a.$

Do đó $2MA^2 + 3NB^2 \ge 2\left(a^2+9\right) + 3\left((2-a)^2+9\right) = 5a^2 - 12a + 57 \ge 49{,}8.$

Vậy giá trị nhỏ nhất $2MA^2 + 3NB^2$ bằng $49{,}8$ khi $a = 1{,}2; b = 0{,}8$ và các điểm M, N thuộc đoạn thẳng HK.

Câu 33. Chọn D



Ta có $(P): mx + (m+1)y - z - 2m - 1 = 0,\ \forall m$

$(P): m(x+y-2) + y - z - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}.$

Vậy mặt phẳng (P) luôn chứa đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}.$

Gọi $K(2-t; t; -1+t)$ là hình chiếu của H lên đường thẳng (Δ), $\overrightarrow{HK} = (-1-t; t-3; -1+t)$.

Vì $HK \perp (\Delta)$ nên: $-(-1-t) + t - 3 - 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow K(1;1;0)$.

Gọi mặt phẳng (α) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với đường thẳng (Δ).

$\Rightarrow (\alpha): -x + y + z = 0 \Rightarrow O \in (Q)$. Vậy: H_m thuộc mặt cầu đường kính HK.

+ $H_m \in (Q)$.

$\Rightarrow (T)$ là một đường tròn tâm $I(2;2;0)$, bán kính $R = \dfrac{HK}{2} = \sqrt{2}$ và $OI = 2\sqrt{2}$.

Vậy: $a = OI + R = 3\sqrt{2}$; $b = OI - R = \sqrt{2} \Rightarrow a + b = 4\sqrt{2}$.

CHỦ ĐỀ 3 : PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

LÍ THUYẾT

❖ Phương trình ttham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_o;z_o)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{a}\neq\vec{0}$ có dạng là : $\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ (t $\in$ R) .

❖ Nếu a_1,a_2,a_3 đều khác không .Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

❖ Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

- Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}\qquad d':\begin{cases}x=x_o'+a_1't'\\y=y_o'+a_2't'\\z=z_o'+a_3't'\end{cases}$$ có VTCP $\vec{u}$ đi qua M_o và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_o'

- $(d)\,||\,(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_o\notin d'\end{cases}$ $\qquad$ $(d)\equiv(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\in d'\end{cases}$
- (d) cắt $(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]\neq 0\\[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{M_oM_0'}=0\end{cases}$ $\qquad$ (d) chéo $(d')\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{M_0M_0'}\neq 0$

❖ Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

- Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d đi qua điểm $M(x_o;y_o;z_o)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$
  - (d) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}\neq 0$
  - (d) // $(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\notin(\alpha)\end{cases}$
  - (d) nằm trên mặt phẳng $(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\in(\alpha)\end{cases}$

❖ Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

- Khoảng cách từ $M_o(x_o;y_o;z_o)$ đến mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ cho bởi công thức

$$d(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

❖ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

- Khoảng cách từ đường thẳng d đi qua điểm M_o có VTCP $\vec{u}$ đến điểm M cho bởi công thức

$$d(M,\Delta)=\frac{|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

❖ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d đi qua $M\left(x_o;y_o;z_o\right)$; có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và đường thẳng d' đi qua $M'\left(x_o';y_o';z_o'\right)$ có VTCP $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng này là : $d(d,d')=\dfrac{\left|[\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{a'}]\right|}=\dfrac{V_{hop}}{S_{day}}$

❖ Góc giữa hai đường thẳng:

- Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

  (Δ) đi qua $M\left(x_o;y_o;z_o\right)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

  (Δ') đi qua $M'\left(x_o';y_o';z_o'\right)$ có VTCP $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

- Khi đó góc giữa hai đường thẳng này được cho bởi công thức sau đây:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{\left|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

❖ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

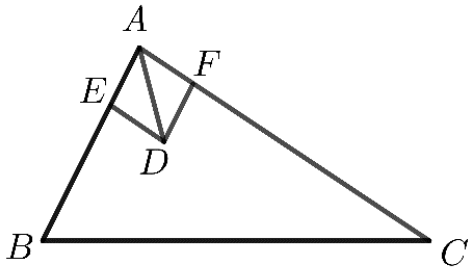
- Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

  (Δ) đi qua M_o có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

- Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mặt phẳng (α), khi đó góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là

$$\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

- **NOTE:** Cho tam giác ABC



- Đường phân giác trong của góc BAC có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(1;0;2)$ **B.** $\vec{u}=(2;2;-1)$ **C.** $\vec{u}=(25;-29;-6)$ **D.** $\vec{u}=(2;1;6)$

Lời giải

Cách 1

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d, B' là hình chiếu của B lên (P)

Khi đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB' và $\vec{u}=\overrightarrow{B'A}$

Ta có $(P):\begin{cases}Qua\ \ A(-2;-2;1)\\ VTPT\ \ \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)\end{cases}\Rightarrow (P):2x+2y-z+9=0$

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song $d'\Rightarrow d':\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

B' là giao điểm của d' và $(P)\Rightarrow B'(-3;-2;-1)\Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{B'A}=(1;0;2)\Rightarrow$ **Chọn A**

Cách 2: TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0

Không cần viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d.

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song $d'\Rightarrow d':\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

$B'\in d'\Rightarrow \overrightarrow{B'A}=(-2t-3;-2t-4;t+4)$

$AB'\perp d\Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{B'A}=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{B'A}=(1;0;2)$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0;5;3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1;1;0)$ thuộc đường thẳng AC. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng AC.

A. $\vec{u}=(0;1;-3)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;3)$. **C.** $\vec{u}=(0;1;3)$. **D.** $\vec{u}=(0;-2;6)$

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc $A:\begin{cases}x=t\\ y=6-4t\\ z=6-3t\end{cases}$. (d)

Gọi D là điểm đối xứng với M qua (d). Khi đó $D\in AC\Rightarrow$ đường thẳng AC có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{ND}$. Ta xác định điểm D.

Gọi K là giao điểm MD với (d). Ta có $K(t;6-4t;6-3t)$; $\overrightarrow{MK}=(t;1-4t;3-3t)$.

Ta có $\overrightarrow{MK}\perp\vec{u}_d$ với $\vec{u}_d=(1;-4;-3)$ nên $t-4(1-4t)-3(3-3t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

$K\left(\dfrac{1}{2};4;\dfrac{9}{2}\right)$. K là trung điểm MD nên $\begin{cases}x_D=2x_K-x_M\\y_D=2y_K-y_M\\z_D=2z_K-z_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=3\\z_D=6\end{cases}$ hay $D(1;3;6)$.

Một vectơ chỉ phương của AC là $\overrightarrow{DN}=(0;-2;-6)$. Hay $\vec{u}=(0;1;3)$ là vectơ chỉ phương.

VÍ DỤ 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

B. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

D. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ có một VTCP $\vec{u}=(3;-5;-1)$.

Mặt phẳng $(P):2x+z-2=0$ vó một VTPT $\vec{n}(2;0;1)$.

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{a}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=-5(1;1;-2)$.

Đường thẳng Δ có phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-3=0$ đồng thời đi qua điểm $M(1;2;0)$ và cắt đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Một vectơ chỉ phương của Δ là.

A. $\vec{u}=(1;1;-2)$ **B.** $\vec{u}=(1;0;-2)$ **C.** $\vec{u}=(-1;1;2)$ **D.** $\vec{u}=(-1;-1;2)$

Lời giải

Chọn A

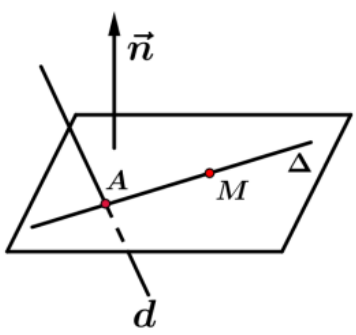
Cách 1:

Gọi $A(2+2t;2+t;3+t)\in d$ là giao điểm của Δ và d.

$\overrightarrow{MA}=(1+2t;t;3+t)$, VTPT của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;1;1)$.

$\Delta\subset(\alpha)\Rightarrow\overrightarrow{MA}\perp\vec{n}_{(\alpha)}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}.\vec{n}_{(\alpha)}=0\Leftrightarrow1+2t+t+3+t=0\Leftrightarrow t=-1$.



Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm "TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"
B LEARN

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}(-1;-1;2)=-1(1;1;-2)$. Vậy $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-2)$.

Cách 2:

Gọi $B=d\cap(\alpha)$. $B\in d\Rightarrow B(2+2t;2+t;3+t)$.

$B\in(\alpha)\Rightarrow 2+2t+2+t+3+t-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow B(0;1;2)$. $\overrightarrow{BM}(1;1;-2)\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(1;1;-2)$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):2x+3y-4z+5=0$ là

A. $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=-4-5t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=-5+4t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=-5-4t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=4+5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):2x+3y-4z+5=0$ nên nhận $\vec{u}=(2;3;-4)$ là véctơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng d là $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=-5-4t\end{cases}$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2;2;-3)$ và $N(-4;2;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, nhận vecto $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|$, $|b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a|+|b|+|c|$ bằng:

A. 14. **B.** 13. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2;2;-3)$ và song song với mặt phẳng (P).

Suy ra $(Q):2x+y+z-3=0$. Do Δ // (P) nên $\Delta\subset(Q)$.

$d(N,\Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow\Delta$ đi qua N', với N' là hình chiếu của N lên (Q).

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc (P), $d:\begin{cases}x=-4+2t\\y=2+t\\z=1+t\end{cases}$.

Ta có $N'\in d\Rightarrow N'(-4+2t;2+t;1+t)$; $N'\in(Q)\Rightarrow t=\frac{4}{3}\Rightarrow N'\left(-\frac{4}{3};\frac{10}{3};\frac{7}{3}\right)$.

$\vec{u}=(a;b;c)$ cùng phương $\overrightarrow{MN'}=\left(-\frac{10}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Do $|a|$, $|b|$ nguyên tố cùng nhau nên chọn $\vec{u}=(-5;2;8)$. Vậy $|a|+|b|+|c|=15$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P):x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases}x=12-t\\y=5\\z=-9+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=6-t\\y=\dfrac{5}{2}\\z=-\dfrac{9}{2}+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=6\\y=\dfrac{5}{2}-t\\z=-\dfrac{9}{2}+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=6-2t\\y=\dfrac{5}{2}+t\\z=-\dfrac{9}{2}+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$A\in d_1\Rightarrow A(1+2a;a;-2-a);B\in d_2\Rightarrow B(1+b;-2+3b;2-2b)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(b-2a;3b-a-2;-2b+a+4)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

Vì $\Delta//(P)$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow b=a-1$.Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-a-1;2a-5;6-a)$

$$AB=\sqrt{(-a-1)^2+(2a-5)^2+(6-a)^2}=\sqrt{6a^2-30a+62}=\sqrt{6\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\ge\frac{7\sqrt{2}}{2};\forall a\in\mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\dfrac{5}{2}\Rightarrow A\left(6;\dfrac{5}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{7}{2};0;\dfrac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6;\dfrac{5}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;0;1)$

VÍ DỤ 5: Cho 2 mặt cầu $(S_1):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$, $(S_2):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u}=(a;1;b)$ là một vectơ chỉ phương của d thì tổng $S=2a+3b$ bằng bao nhiêu?

A. $S=0$ **B.** $S=4$ **C.** $S=2$ **D.** $S=1$

Lời giải

Chọn C

(S_1) có tâm $I_1(3;2;2)$, bán kính $R_1=2$. (S_2) có tâm $I_2(1;0;1)$, bán kính $R_2=1$.

Ta có: $I_1I_2=3=R_1+R_2$, do đó (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Vì d tiếp xúc với hai mặt cầu, đồng thời cắt đoạn thẳng nối hai tâm I_1I_2 nên d phải tiếp xúc với hai mặt cầu tại $A\Rightarrow d\perp I_1I_2$. Mặt khác $d=d(O;d)\le OA\Rightarrow d_{\max}=OA$ khi $d\perp OA$.

Khi đó, d có một vectơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{I_1I_2},\overrightarrow{OA}\right]=(6;-3;-6)\Rightarrow\vec{u}=(-2;1;2)$.Vậy $S=2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1. TÌM VECTO CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y-6=0$ và (Q). Biết rằng điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q). Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{3}$ và đi qua điểm $A(3;-4;5)$ là

A. $-3x+4y-5z-26=0$. **B.** $x-2y+3z+26=0$.

C. $3x-4y+5z-26=0$. **D.** $-x+2y-3z+26=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véctơ nào trong 4 phương án dưới đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{3y}{2}=\frac{3-z}{1}$.

A. $\vec{a}=\left(3;\frac{3}{2};1\right)$. **B.** $\vec{a}=(9;2;-3)$. **C.** $\vec{a}=(3;2;1)$. **D.** $\vec{a}=\left(3;\frac{2}{3};1\right)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véctơ nào trong 4 phương án dưới đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{3y}{2}=\frac{3-z}{1}$.

A. $\vec{a}=\left(3;\frac{3}{2};1\right)$. **B.** $\vec{a}=(9;2;-3)$. **C.** $\vec{a}=(3;2;1)$. **D.** $\vec{a}=\left(3;\frac{2}{3};1\right)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Biết rằng $\vec{u}=(m;n;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. $T=5$. **B.** $T=10$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ và một mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P), d' nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ là một vec tơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$

A. 2019. **B.** -2020. **C.** 2018. **D.** -2019.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d lớn nhất, $\vec{u}=(1;a;b)$ là vectơ chỉ phương của d. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. -2. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, gọi d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d' ?

A. $\vec{u}=(2;3;0)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;1)$. **C.** $\vec{u}=(-2;3;0)$. **D.** $\vec{u}=(2;-3;0)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y-2z+2=0$, điểm $A(1;1;-2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3}$. Đường thẳng Δ qua A cắt d và (P) lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $AM=2AN$, khi đó một vectơ chỉ phương của Δ là?

A. $\vec{u}=(-8;4;-3)$. **B.** $\vec{u}=(-8;-4;-9)$. **C.** $\vec{u}=(8;-4;-9)$. **D.** $\vec{u}=(8;-4;9)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Hỏi Δ nhận vecto nào dưới đây là vecto chỉ phương ?

A. $\vec{u}=(6;3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(6;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(6;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(6;-3;-5)$.

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và mặt phẳng (P): $x+y+z+3=0$. Điểm $M(x;y;z)\in(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $x+y+z$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 12. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1):\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$, $(d_2):\frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-3}$ và điểm $M(1;0;2)$. A, B là hai điểm lần lượt trên (d_1) và (d_2) sao cho tam giác MAB vuông tại M. Khi A, B thay đổi thì trung điểm I của đoạn AB sẽ thuộc một đường thẳng. Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

A. $\vec{u}=(-5;9;17)$. **B.** $\vec{u}=(-3;1;5)$. **C.** $\vec{u}=(1;5;9)$. **D.** $\vec{u}=(1;4;4)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$ và 2 điểm $A(6;3;-2)$, $B(1;0;-1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua B, vuông góc với d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến Δ là nhỏ nhất. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ

A. $(1;1;-3)$. **B.** $(1;-1;-1)$. **C.** $(1;2;-4)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3^2$, mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P). Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=4$. Gọi $\vec{u}=(1;b;c)$, $(c>0)$ là một vecto chỉ phương của Δ, tổng $b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 45.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$,\

$\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h;k;1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -2.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn A**

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;0)$.

Vì $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q) nên (Q) nhận $\overrightarrow{OH}(2;-1;-2)$ là vectơ pháp tuyến.

Ta có $\cos((P),(Q)) = \left|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{OH}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{OH}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{OH}\right|}$

$= \dfrac{|1.2+(-1).(-1)+0.(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng $45°$.

Câu 2. **Chọn D**

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

(P) qua $A(3;-4;5)$ và có VTPT $\vec{n} = \vec{u}_d(1;-2;3)$ (do $(P) \perp d$).

Vậy (P) có phương trình: $1(x-3)-2(y+4)+3(z-5)=0 \Leftrightarrow x-2y+3z-26=0$.

Câu 3. **Chọn B**

Ta có $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{3y}{2} = \dfrac{3-z}{1} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$

Vậy một véc tơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{a} = (9;2;-3)$.

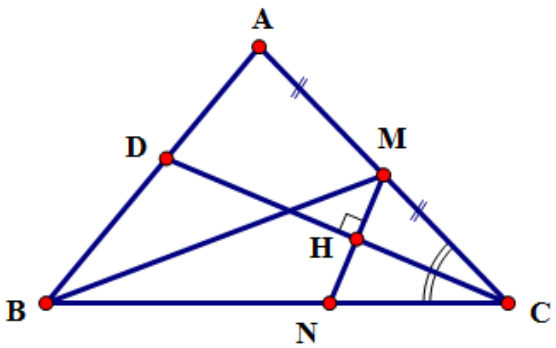
Câu 4. **Chọn B**

Ta có $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{3y}{2} = \dfrac{3-z}{1} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$

Vậy một véc tơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{a} = (9;2;-3)$.

Câu 5. **Chọn D**

Cách 1:



Đặt $BM: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ và $CD: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$

Giả sử $C(2+2c;4-c;2-c) \Rightarrow M\left(2+c;\dfrac{7-c}{2};\dfrac{5-c}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AC

Vì $M \in BM$ nên $\dfrac{2+c-3}{-1}=\dfrac{\dfrac{7-c}{2}-3}{2}=\dfrac{\dfrac{5-c}{2}-2}{-1}\Rightarrow c=1\Rightarrow C(4;3;1), M(3;3;2)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm M và vuông góc với đường phân giác CD

$\Rightarrow (\alpha): 2x-y-z-1=0$. Khi đó $CD\cap(\alpha)=H\left(3;\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Gọi N là điểm đối xứng với M qua $CD\Rightarrow N(3;4;1)\Rightarrow \overrightarrow{CN}=(-1;1;0)$

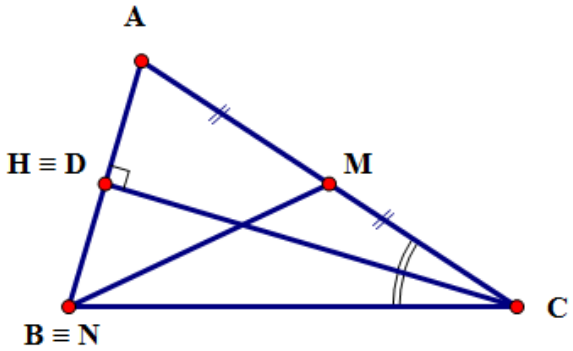
Do CD là đường phân giác trong của góc C nên $N\in BC\Rightarrow$ phương trình tham số của cạnh BC đi qua điểm C và nhận vectơ $\overrightarrow{CN}$ làm VTCP là: $\begin{cases}x=4-t\\y=3+t\\z=1\end{cases}$

$\Rightarrow BM\cap BC=B(2;5;1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0;2;-2)$

Do đó đường thẳng AB có một VTCP là $\vec{u}=(0;1;-1)=(m;n;-1)$

Vậy $T=m^2+n^2=1$.

Cách 2:



Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $CD\Rightarrow (P): 2x-y-z+2=0$

$\Rightarrow CD\cap(P)=H(2;4;2)$. Gọi N là điểm đối xứng với A qua $CD\Rightarrow H$ là trung điểm của AN

$\Rightarrow N(2;5;1)$

Do CD là đường phân giác trong của góc C nên điểm $N\in BC$

Thay tọa độ điểm N vào phương trình đường trung tuyến BM, ta được: $\dfrac{2-3}{-1}=\dfrac{5-3}{2}=\dfrac{1-2}{-1}$

$\Rightarrow N\in BM$ mà $BM\cap BC=B\Rightarrow B\equiv N$

Nên đường thẳng AB nhận vectơ $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}=(0;1;-1)=(m;n;-1)$. Vậy $T=m^2+n^2=1$.

Câu 6. **Chọn D**

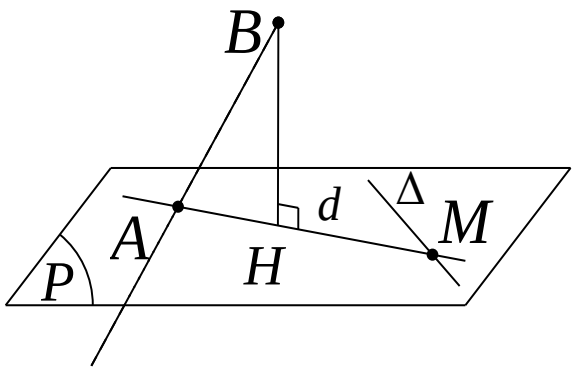
Ta có $\overrightarrow{u_d}=(2;1;3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Mặt phẳng (P') chứa d và hình chiếu d' có VTPT $\overrightarrow{n_{P'}}=\left[\overrightarrow{u_d};\vec{i}\right]=(0;3;-1)$.

VTCP $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_{P'}}.\overrightarrow{n_P}\right]=(4;-1;-3)=(-2692;673;2019)$. Vậy $a+b=-2019$.

Câu 7. **Chọn A**

Cách 1:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng d.

Khi đó $d(B,d)=BH\le AB=\sqrt{29}\Rightarrow \max\left(d(B,d)\right)=\sqrt{29}$ đạt được khi $H\equiv A\Leftrightarrow d\perp AB$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và đi qua A. Lấy điểm $E(-1;0;-1)$ thuộc đường thẳng Δ.

(P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\frac{1}{2}\left[\vec{u_\Delta},\overrightarrow{EA}\right]=(1;-1;-1)$.

Vì đường thẳng d đi qua A và cắt Δ nên d nằm trong (P).

Suy ra đường thẳng d nhận $\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(1;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Vậy $\frac{a}{b}=-2$.

Cách 2:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng d.

Khi đó $d(B,d)=BH\le AB\Rightarrow \max\left(d(B,d)\right)=AB$ đạt được khi $d\perp AB\Leftrightarrow H\equiv A$.

Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ. Suy ra $M(-1+2t;3t;-1-t)$.

Ta được $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$, $\overrightarrow{AM}=(-2+2t;3t-2;-t)$.

Do $d\perp AB$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow 2(-2+2t)-3(3t-2)+4t=0\Leftrightarrow t=2$.

Suy ra một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=(1;2;-1)$. Vậy $\frac{a}{b}=-2$.

Câu 8. **Chọn A**

Tọa độ giao điểm I của d và (Oxy) là nghiệm của hệ : $\begin{cases}\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}\\ z=0\end{cases}$.

Giải hệ trên ta được $I(5;11;0)$. Gọi $M(-1;2;-3)\in d$. Khi đó hình chiếu của M lên (Oxy) là $M'(-1;2;0)$. Do đó d' là đường thẳng IM' có $\overrightarrow{IM'}=(-6;-9;0)$. Suy ra $\vec{u}=(2;3;0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d'.

Câu 9. **Chọn D**

Ta có $\Delta\cap d=\{M\}\Rightarrow M\in d\Rightarrow M(-1+2t;2-t;-2+3t)$; $\overrightarrow{AM}=(-2+2t;1-t;3t)$.

Vì $AM=2AN\Rightarrow\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AN}\Rightarrow\begin{cases}-2+2t=-2(x_N-1)\\1-t=-2(y_N-1)\\3t=-2(z_N+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=2-t\\y_N=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\z_N=-2-\frac{3}{2}t\end{cases}$

$\Rightarrow N\left(2-t;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t;-2-\frac{3}{2}t\right)$.

Mặt khác $\Delta\cap(P)=\{N\}\Rightarrow N\in(P)\Rightarrow(2-t)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)-2\left(-2-\frac{3}{2}t\right)+2=0\Leftrightarrow t=-3$.

Với $t=-3\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-8;4;-9)$. Vậy một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(8;-4;9)$.

Câu 10. Chọn D

Gọi (Q) chứa Δ và song song với (P). Suy ra (Q) có phương trình: $x-1+2(y-1)=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$.

Khi đó $d(B;\Delta)_{\min}=BH$ với H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (Q).

Đường thẳng BH đi qua B, vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình $\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ giao điểm H của đường thẳng BH và mặt phẳng (Q) là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2\end{cases}\\x+2y-3=0\end{cases}$. Giải hệ trên ta được $H\left(-\frac{1}{5};\frac{8}{5};2\right)$.

Do đó Δ là đường thẳng AH có $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5};-\frac{3}{5};-1\right)$.

Suy ra $\vec{u}=(6;-3;-5)$ cũng là một vecto chỉ phương của Δ.

Câu 11. Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ thì I là trung điểm của AB. Suy ra $I(5;2;5)$.

Khi đó: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Gọi (d) là đường thẳng đi qua I và vuông góc (P). Suy ra $M=(d)\cap(P)$

$(d):\begin{cases}x=5+t\\y=2+t\\z=5+t\end{cases}\Rightarrow M(5+t;2+t;5+t)$.

$M\in(P)$ nên $5+t+2+t+5+t+3=0\Leftrightarrow 3t+15=0\Leftrightarrow t=-5\Rightarrow M(0;-3;0)$.

Vậy $x+y+z=-3$.

Trắc nghiệm: Vì $M\left(x;y;z\right)\in\left(P\right)$ nên $x+y+z+3=0\ \Rightarrow x+y+z=-3$.

Câu 12. Chọn A

Gọi $A(t+2;3t;2t-1)\in(d_1)$ và $B(3t'-1;t'+5;-3t')\in(d_2)$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}=(t+1;3t;2t-3)$, $\overrightarrow{MB}=(3t'-2;t'+5;-3t'-2)$.

Vì tam giác MAB vuông tại M nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow 9t+12t'+4=0\Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}t'-\frac{4}{9}$.

Do đó $A\left(-\frac{4}{3}t'+\frac{14}{9};-4t'-\frac{4}{3};-\frac{8}{3}t'-\frac{17}{9}\right)$.

Tọa độ trung điểm I của AB là $\begin{cases} x=\frac{5}{18}+\frac{5}{6}t' \\ y=\frac{11}{6}-\frac{3}{2}t' \\ z=-\frac{17}{8}-\frac{17}{6}t' \end{cases}$.

Suy ra điểm I thuộc một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{v}=\left(\frac{5}{6};-\frac{3}{2};-\frac{17}{6}\right)$.

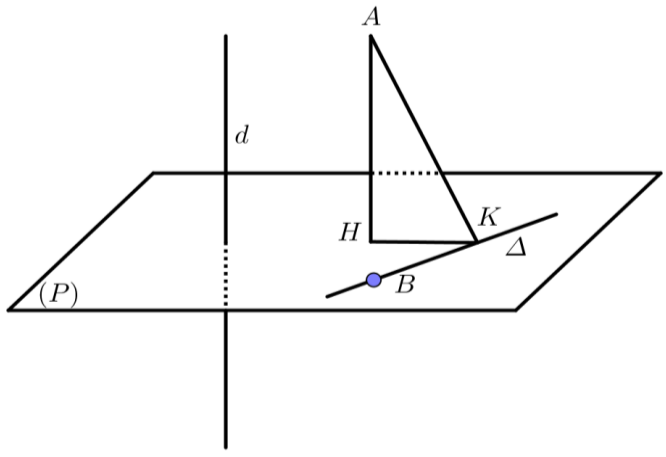
Chọn vec tơ chỉ phương khác là $\vec{u}=-6\vec{v}$ hay $\vec{u}=\left(-5;9;17\right)$.

Câu 13. Chọn A

Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua B và vuông góc với d nên $\left(P\right):2x+y+z-1=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $\left(P\right)$, ta có: $H\left(2;1;-4\right)$

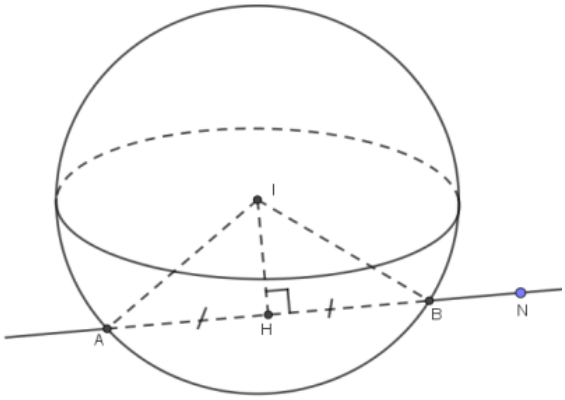
Ta có: $\Delta\subset\left(P\right)$ nên $d\left(A;\Delta\right)\geq d\left(A;\left(P\right)\right)$.



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\in\Delta$.

Vậy một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{BH}=\left(1;1;-3\right)$.

Câu 14. Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và bán kính $R=3$. Gọi H là trung điểm AB.

Đường thẳng Δ đi qua N và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;b;c)$ ta có phương trình:

$$\Delta:\begin{cases}x=1+t\\ y=bt\\ z=-4+ct\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).\qquad \Delta\subset(P)\Rightarrow 1-b+c=0\Rightarrow b=1+c.$$

Ta có: $IH=\sqrt{R^2-HB^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{IN}=(0;-2;-5)$.

$$IH=d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IN},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}\Leftrightarrow\sqrt{5}=\frac{\sqrt{9c^2+30c+54}}{\sqrt{2c^2+2c+2}}$$

$$\Leftrightarrow 10c^2+10c+10=9c^2+30c+54\Leftrightarrow c^2-20c-44=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=22\\ c=-2\end{array}\right.$$

Vì $c>0$ nên ta chọn $c=22$. Vậy vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;23;22)$.

Câu 15. Chọn A

Gọi $H\in\Delta_1\Rightarrow H(3+2t;t;1+t)$; Gọi $K\in\Delta_2\Rightarrow K(1+m;2+2m;m)$.

Tính được $\overrightarrow{HK}=(m-2t-2;2m-t+2;m-t-1)$.

Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-2)$.

Vì $\Delta\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{HK}=0\Leftrightarrow m-t+2=0\Leftrightarrow m=t-2\Rightarrow\overrightarrow{HK}=(-t-4;t-2;-3)$.

Tính được $HK^2=(-t-4)^2+(t-2)^2+(-3)^2=2(t+1)^2+27\geq 27,\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $minHK=\sqrt{27}$, đạt được khi $t=-1$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HK}=(-3;-3;-3)$, suy ra $\vec{u}(1;1;1)\Rightarrow h=k=1\Rightarrow h-k=0$.

DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $z=0$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3); B(3;0;1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình tổng quát là

A. $x-y-z+4=0$. **B.** $x-y-z+1=0$. **C.** $x-y-z-2=0$. **D.** $x+y-z-1=0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+1=0$. Viết đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P)

A. $\Delta: \begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=1-2t \end{cases}$. **B.** $\Delta: \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\Delta: \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\Delta: \begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+2t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\alpha: 3x+y+z=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình của đường thẳng d nằm trong mặt phẳng α, cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là:

A. $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=2-5t \\ z=-1-7t \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x=1+4t \\ y=-5t \\ z=-3-7t \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x=4+t \\ y=-5 \\ z=-7-3t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x=1+4t \\ y=5t \\ z=-3+7t \end{cases}$.

Câu 6. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=-1-3t \end{cases}$.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=3+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+3z-2=0$.

Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc đường thẳng d có phương trình là:

A. $d:\begin{cases}x=5+7t\\y=-6+5t\\z=-5+t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=5+7t\\y=-6-5t\\z=-5+t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+7t\\y=-2+5t\\z=3+t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=-1+7t\\y=5t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z-12=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P)

A. $d':\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-2}$ **B.** $d':\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+3}{1}$

.C. $d':\frac{x}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{1}$. **D.** $d':\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-2}{1}$.

Câu 9. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$; $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$

Phương trình đường thẳng Δ cắt d_1,d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất là

A. $\begin{cases}x=t\\y=3-2t\\z=2-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2-t\\y=-1+2t\\z=-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=2-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1\\y=2+7t\\z=3+t\end{cases}$. Phương trình đường phân giác của góc nhọn giữa d_1 và d_2 là

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-12}=\frac{z-3}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;0;1)$ và vuông góc với hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=-4+t\\z=3-t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-2t\\y=-3+2t\\z=4-t\end{cases}$ là:

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-4}$. **C.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-2z=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}$. Đường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$.
B. $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{2}$.
C. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-1}{-2}$.
D. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P) có phương trình là:

A. $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-2}{-13}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-2}{5}$. **C.** $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-7}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-5}$.

Câu 14. Cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P):\ x-y-z-2=0$. Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P) là

A. $\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-2-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-2+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1-2t\\z=-2-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;-1)$ và $B(4;-1;3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $x+y+2z-9=0$. **B.** $x+y+2z+3=0$. **C.** $x+y+2z-3=0$. **D.** $2x+2y+4z-3=0$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) là:

A. $\Delta:\begin{cases}x=5t\\y=-1+t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4-2t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=4+t\end{cases}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;1;-1)$, $B(-2;3;1)$ và $C(0;-1;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ **.B.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

Câu 19. Đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

A. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ **C.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=t\\y=t\left(t\in\mathbb{R}\right).\\z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=0\\y=2+t\left(t\in\mathbb{R}\right).\\z=0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=0\\y=0\left(t\in\mathbb{R}\right).\\z=t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=t\\y=0\left(t\in\mathbb{R}\right).\\z=0\end{cases}$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M\left(1;2;3\right)$ và song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(P\right):3x+y-3=0$, $\left(Q\right):2x+y+z-3=0$.

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t.\\z=3+t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t.\\z=3-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2-3t.\\z=3+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t.\\z=3+t\end{cases}$

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(-1;0;1\right)$, $B\left(-2;1;1\right)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $x-y+2=0$. **B.** $x+y+1=0$. **C.** $-x+y-1=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Câu 23. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M\left(3;1;1\right)$, nằm trong mặt phẳng $\left(\alpha\right):x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=4+3t\\z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=1\\y=-t'.\\z=2t'\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=8+5t'\\y=-3-4t'.\\z=2+t'\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+2t'\\y=1-t'\\z=3-2t'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t'\\y=1-4t'.\\z=3+2t'\end{cases}$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua $A\left(1;2;4\right)$ song song với $\left(P\right):2x+y+z-4=0$ và cắt đường thẳng $d:\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{5}$ có phương trình:

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=4-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=4+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1-2t\\y=2\\z=4+4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-2\\z=4+2t\end{cases}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $\left(P\right):x+y-3z-2=0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong $\left(P\right)$, cắt và vuông góc với d. Đường thẳng d' có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{1}$. **B.** $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{1}$. **C.** $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{1}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;3;-1)$ và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{1}$. Đường thẳng qua M vuông góc với d và cắt d có phương trình là

A. $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+1}{32}$ **B.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{32}$ **C.** $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+1}{32}$ **D.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-32}$

Câu 27. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$ và $d_2:\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=-1-3t\end{cases}$.

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-2}$. **B.** $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{1}$.

Câu 28. rong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z-3=0$, phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), cắt d và vuông góc với d là

A. $\begin{cases}z=2-2t\\y=1-5t\\z=-5-6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}z=-2-2t\\y=-1-5t\\z=5-6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}z=-2+2t\\y=-1+5t\\z=5-6t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}z=-2-2t\\y=1-5t\\z=5+6t\end{cases}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng qua $M(1;2;-1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P):x+y-z-8=0$, $(Q):2x-y+5z-3=0$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{-3}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+1}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-1}{-3}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$. **B.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{1}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d là:

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2m+1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{m-2}, m\notin\left\{-\dfrac{1}{2},2\right\}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$. Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P). Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng Δ vuông góc với giá của véctơ $\vec{a}=(-1;0;1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-3z+4=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d nằm trong (P), cắt và vuông góc đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases}x=-3+2t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=-2+3t\\z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3-3t\\y=1+2t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3+t\\y=1-2t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 34. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M, N. Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$. **B.** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Câu 35. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;4)$ và hai điểm M,B thoả mãn $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{1}$. Khi đó điểm B thay đổi trên đường thẳng có phương trình là:

A. $d_1:\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+12}{1}$. **B.** $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$.

C. $d_3:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $d_4:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-12}{1}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$, $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=-2t'\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d và d' có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{2}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$, $d_2:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $d_1:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. **D.** $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}$. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-2+3t\\y=-2+2t\\z=-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2-t\\y=2+2t\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 và mặt phẳng (α) có phương trình:

$d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $d_2:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$, $(\alpha):x+y-z-2=0$.

Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α), cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+3}{1}$ **B.** $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$ **C.** $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+3}{-1}$ **D.** $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của MN.

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=2-2t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-3-t\\z=2-2t\end{cases}$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;2),B(-2;3;1),C(3;-1;4)$. Viết phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh B

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=3+t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2-t\\y=3+t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-4z+1=0$. Đường thẳng (d) đi qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d).

A. $\begin{cases} x=1+5t \\ y=2-6t \\ z=3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+6t \\ z=3+t \end{cases}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;5)$ và hai mặt phẳng $(P):2x+y+3z-7=0$, $(Q):3x-2y-z+1=0$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) và điểm N nằm trên mặt phẳng (Q) thỏa mãn $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AM}$. Khi M di động trên mặt phẳng (P) thì quỹ tích điểm N là một đường thẳng có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-3-5t \\ y=-8+11t \\ z=6-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=7+11t \\ y=-8-5t \\ z=6-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=7+11t \\ y=-8-5t \\ z=-8-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+5t \\ y=3+11t \\ z=-1-7t \end{cases}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,1;-1;2$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$; $d_2:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2-5t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với d_1 và d_2.

A. $\begin{cases} x=-4+5t \\ y=-3+2t \\ z=-5+7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-7t \\ y=-1+11t \\ z=2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-7+t \\ y=11-t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\ 2;1;0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{1}$. **B.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{1}$. **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{-2}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-2z+12=0$. Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của (α) với ba trục tọa độ, đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với (α) có phương trình là

A. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-2}$ **B.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{2}$ **C.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-2}$. **D.** $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-2}$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=3+t\\y=1\\z=2-t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=3+2t'\\y=3+t'\\z=0\end{cases}$. Phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$.

B. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $d_2:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường phân giác của những góc tù tạo bởi d_1,d_2.

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-5}=\frac{z-3}{4}$.

B. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0)$, $B(3;0;2)$, $C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

A. $\begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=0\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=t\end{cases}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn D**

Oz có vec tơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;0;1)$, đối chiếu 4 phương án, chỉ có D là phương án thích hợp.

Câu 2. **Chọn D**

Gọi A là giao điểm của d và Δ. Ta có $A\in d \Rightarrow A(2t-1;\, t;3t-2)$

$\Delta\subset(P)$, mà $A\in\Delta$ nên $A\in(P)\Leftrightarrow(2t-1)+2.t+(3t-2)-4=0\Leftrightarrow t=1$. Vậy $A(1;1;1)$.

(P) có vtpt $\vec{n}=(1;2;1)$ và đường thẳng d có vtcp $\overrightarrow{u_d}=(2;1;3)$.

Ta có $\begin{cases}\Delta\perp d\\ \Delta\subset(P)\end{cases}$ suy ra Δ có 1 vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\vec{n},\overrightarrow{u_d}\right]=(5;-1;-3)$

Δ đi qua $A(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(5;-1;-3)$ làm vtcp.

Vậy Δ có phương trình $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 3. **Chọn B**

Gọi I là trung điểm đoạn thẳng $AB\Rightarrow I(2;1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}=(1;-1;-1)$.

(α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB\Rightarrow(\alpha)$ đi qua $I(2;1;2)$ và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $x-y-z+1=0$.

Câu 4. **Chọn A**

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P):2x-y+2z+1=0$ nên ta chọn véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(2;-1;2)$ làm véc tơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ đi qua $A(2;-1;1)$

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t\\ z=1-2t\end{cases}$.

Câu 5. **Chọn B**

Phương trình tham số của đường thẳng $\triangle:\begin{cases}x=3+t\\ y=-4-2t\\ z=1+2t\end{cases}$.

Đường thẳng $\triangle$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\ 1;-2;2\ $.

Mặt phẳng $\ \alpha\ $ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\ 3;1;1\ $.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng $\triangle$ và mặt phẳng $\ \alpha$

Xét phương trình $3\ 3+t\ +\ -4-2t\ +\ 1+2t\ =0\Leftrightarrow t=-2$. Suy ra tọa độ điểm $I\ 1;0;-3\ $.

Vì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng α, cắt đường thẳng Δ nên đường thẳng d đi qua điểm $I\ 1;0;-3$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng α, vuông góc với đường thẳng Δ nên đường thẳng d có một vecto chỉ phương là $\vec{v}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=\ -4;5;7$.

Vậy phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+4t\\y=-5t\\z=-3-7t\end{cases}$.

Câu 6. Chọn A

Gọi: $\Delta\cap d_1=M\left(1+t';3-t';2+2t'\right)$, $\Delta\cap d_2=N\left(-3t;t;-1-3t\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(-3t-1-t';t-3+t';-3-3t-2t'\right)$.

d_1,d_2 lần lượt có 2 vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=\left(1;-1;2\right),\overrightarrow{u_2}=\left(-3;1;-3\right)$.

Vì Δ là đường vuông góc chung của $d_1;d_2$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6t'-10t=4\\10t'+19t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\t=-1\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(2;2;4\right),N\left(3;-1;2\right),\overrightarrow{MN}=\left(1;-3;-2\right)$. Vậy phương trình $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Câu 7. Chọn A

Gọi $A=\Delta\cap d\Rightarrow A\left(1-t;-2+t;3+2t\right)$.

Vì $\Delta\subset\left(P\right)\Rightarrow A\in\left(P\right)$ nên $1-t-2\left(-2+t\right)+3\left(3+2t\right)-2=0\Rightarrow t=-4\Rightarrow A\left(5;-6;-5\right)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{u}_d=\left(-1;1;2\right)\\\vec{n}_{(P)}=\left(1;-2;3\right)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=\left(7;5;1\right)$.

Đường thẳng d có phương trình là $:\begin{cases}x=5+7t\\y=-6+5t,t\in\mathbb{R}\\z=-5+t\end{cases}$.

Câu 8. Chọn B

Ta có : $\mathrm{d}//(\mathrm{P})$ nên $d'//d$. Do đó $\vec{u}_{d'}=\vec{u}_d=\left(3;-4;1\right)$.

$M\left(-1;3;-1\right)\in d$. M' là hình chiếu vuông góc của M trên $\left(P\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với $\left(P\right)$.

Khi đó đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+t\\z=-1-2t\end{cases}$.

Tọa độ điểm M' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+t\\z=-1-2t\\2x+y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\\z=-3\end{cases}$.

Phương trình đường thẳng d' là $d': \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$

Câu 9. Chọn A

Ta có AB ngắn nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Gọi $A(2+a;2+a;-a)\in d_1;\ B(2+b;-1+2b;-3b)\in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b-a;2b-a-3;-3b+a)$.

d_1, d_2 lần lượt có các véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{d_1}}=(1;1;-1)$ và $\overrightarrow{u_{d_2}}=(1;2;-3)$

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1(b-a)+1(2b-a-3)-1(-3b+a)=0\\ 1(b-a)+2(2b-a-3)-3(-3b+a)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6b-3a-3=0\\ 14b-6a-6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;1;1)\\ B(2;-1;0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$$

Do $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta loại 2 đáp án B, D.

Thay tọa độ 2 điểm A, B vào đáp án A và C ta chỉ thấy đáp án A thỏa mãn.

Câu 10. Chọn D

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right), \overrightarrow{u_2}=\left(0;\dfrac{7}{5\sqrt{2}};\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right)$.

Khi đó đường phân giác của góc nhọn giữa d_1 và d_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=5\sqrt{2}\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)=(5;12;1)$ (Từ đây có thể chọn được đáp án D).

Ta có hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại $M(1;2;3)$ nên phương trình đường phân giác của góc nhọn giữa d_1 và d_2 là $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 11. Chọn D

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt nhận $\overrightarrow{u_1}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(-2;2;-1)$ làm véctơ chỉ phương.

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 nên véctơ chỉ phương của d là: $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;3;4)$.

Phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Câu 12. Chọn A

$$d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}\Leftrightarrow d_1:\begin{cases}x=-1-t\\ y=6+2t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow M\in d_1\Leftrightarrow M(-1-t;6+2t;t)$$

$$d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}\Leftrightarrow d_2:\begin{cases}x=1-3t'\\ y=2-t'\\ z=-4+4t'\end{cases}\Rightarrow N\in d_1\Leftrightarrow N(1-3t';2-t';-4+4t')$$

$\overrightarrow{MN}=(2+t-3t';-4-2t-t';-4-t+4t')$

$(P):3x+y-2z=0$ có VTPT $\vec{n}(3;1;-2)$

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$$\overrightarrow{MN}=k\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}2+t-3t'=3k\\-4-2t-t'=k\\-4-t+4t'=-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t'=1\\k=-1\end{cases}\Rightarrow M(1;2;-2)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+3s\\y=2+s\\z=-2-2s\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

Chọn $s=-1\Rightarrow A(-2;1;0)\in d\Rightarrow d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$.

Câu 13. Chọn B

Ta có vtcp của đường thẳng d là $\vec{u}=2;-1;3$.

Vtpt của mặt phẳng P là $\overrightarrow{n_P}=1;1;1$

Gọi Q là mặt phẳng chứa d và vuông góc với P . Khi đó

$\begin{cases}\overrightarrow{n_Q}\perp\vec{u}\\\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{u};\overrightarrow{n_P}\right]=-4;1;3$.Điểm $M\ -2;-1;0\ \in d\Rightarrow M\in Q$.

Phương trình mặt phẳng $Q:-4\ x+2\ +\ y+1\ +3z=0\Leftrightarrow 4x-y-3z+7=0$

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P) là $d'=P\cap Q$.

Khi đó vtcp của d' là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=2;-7;5$.Điểm $N\ 0;1;2\ \in\ P\cap Q$

Câu 14. Chọn A

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;-3;2)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;-1)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P);

Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P), $d'=(P)\cap(Q)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_{d'}},\overrightarrow{n_P}\right]=(5;4;1)$

Véc tơ chỉ phương của d' là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;-6;9)=-3(-1;2;-3)$

Ta thấy đường thẳng d' thuộc (P) nên điểm $M_0\in d'\Rightarrow M_0\in(P)$. Thay tọa độ điểm $M_0(1;1;-2)$ ở đáp án **A** thấy thỏa mãn phương trình (P).

Câu 15. Chọn C

Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow M(3;-2;1)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;4)=2(1;1;2)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB qua $M(3;-2;1)$ và có một véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;2)$ có phương trình là: $1.(x-3)+1.(y+2)+2(z-1)=0\Leftrightarrow x+y+2z-3=0$.

Câu 16. Chọn B

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;-2)$. Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Gọi $M(a;0;0)$ là điểm thuộc trục Ox mà đường thẳng Δ đi qua, suy ra $\overrightarrow{MA}=(1-a;2;3)$ là một véc tơ chỉ phương của Δ. Vì đường thẳng Δ vuông góc với d nên:

$\overrightarrow{MA}\perp\vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (1-a).2+2.1+3.(-2)=0 \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow M(-1;0;0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-1;0;0)$, nhận $\overrightarrow{MA}=(2;2;3)$ làm một véc tơ chỉ phương suy ra Δ có phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Cách 2:

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với d nên (P) nhận vectơ chỉ phương của d $\vec{u}_d=(2;1;-2)$ làm một vetơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P): $2(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+2=0$.

Tọa độ giao điểm M của trục Ox và mặt phẳng (P) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\\2x+y-2z+2=0\end{cases} \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(-1;0;0).$$

Đường thẳng cần tìm đi qua hai điểm A, M nên nhận vectơ $\overrightarrow{AM}=(-2;-2;-3)=-(2;2;3)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình tham số: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Câu 17. Chọn C

Ta thấy : $A\in(P)$. Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$, đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$

Vì đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) nên đường thẳng Δ có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}\right]=(5;0;5)$ hay $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;0;1)$

Khi đó, phương trình tham số của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$.

Câu 18. Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;2;2)\Rightarrow AB=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$; $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;4)\Rightarrow AC=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$

$BC=\sqrt{4+16+4}=2\sqrt{6}$

Vậy tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm $G(0;1;1)$.

Do đó phương trình đường thẳng d qua $G(0;1;1)$

có véctơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=12.(1;1;1)$ hay, $d:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$ nên chọn B.

Câu 19. Chọn C

$(P):x+z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(1;0;1)$.

$(Q):x-2y-z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;-2;-1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;2;-2)$.

Gọi $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ, thì $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}$ và $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]$. Chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Lấy $M(2;1;3)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q).

Đường thẳng Δ đi qua $M(2;1;3)$ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Vậy phương trình Δ là: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$.

Nhận xét: Với 4 đáp án của đề, sau khi chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$ thì ta đã có thể chọn **C** là đáp án.

Câu 20. Chọn B

Đường thẳng Oy đi qua điểm $A(0\,;\,2\,;\,0)$ và nhận vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;\,1;\,0)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases}x=0+0.t\\y=2+1.t\\z=0+0.t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 21. Chọn D

Gọi đường thẳng cần tìm là d.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;0)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(2;1;1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;-3;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=3+t\end{cases}$.

Câu 22. Chọn A

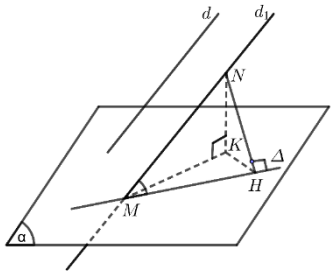
Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó I có tọa độ là: $I\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua điểm I và nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Nên mặt phẳng trung trực đoạn AB có dạng: $-\left(x+\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -x+y-2=0$

$\Leftrightarrow x-y+2=0$.

Câu 23. Chọn B



Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n}=0.1+3.1+(-2).(-1)=5\neq 0$ nên d cắt (α).

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1 // d$, suy ra d_1 có phương trình: $\begin{cases}x=3\\y=1+3t\\z=1-2t\end{cases}$.

Lấy $N(3;4;-1)\in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có: $(d,\Delta)=NMH$ và $\sin NMH=\frac{NH}{MN}\geq\frac{NK}{MN}$.

Do vậy (d,Δ) nhỏ nhất khi $K\equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK.

Đường thẳng NK có phương trình: $\begin{cases}x=3+t\\y=4+t\\z=-1-t\end{cases}$.

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$(3+t)+(4+t)-(-1-t)-3=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}$. Suy ra $K\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MK}=\left(-\frac{5}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}(5;-4;1)\Rightarrow$ Chọn **B**

Câu 24. Chọn A

Ta có: $\vec{n}_P=(2;1;1)$ là một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=2+3t\\y=2+t\\z=2+5t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Gọi M là giao điểm của Δ và $d\Rightarrow M(2+3t;2+t;2+5t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(1+3t;t;-2+5t)$

Do $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow 2(1+3t)+t+(-2+5t)=0 \Leftrightarrow 12t=0 \Leftrightarrow t=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(1;0;-2)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;4)$ và nhận $\overrightarrow{AM}=(1;0;-2)$ là một vec tơ chỉ phương là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=4-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Câu 25. Chọn B

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u}(2;1;-1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1;1;-3)$.

Do đường thẳng d' là đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d, nên đường thẳng d' có vectơ chỉ phương là: $\vec{u}'=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-2;5;1)$.

Gọi N là giao điểm của d và $d' \Rightarrow \mathrm{N}(-3+2t;-1+t;-t)$.

Do đường thẳng d' nằm trong (P) nên $N\in(P) \Rightarrow N(-1;0;-1)$.

Phương trình chính tắc của d' là: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{1}$.

Câu 26. Chọn D

Cách 1:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;4;1)$ và đi qua điểm $A(0;0;3)$, $\overrightarrow{AM}=(2;3;-4)$

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và cắt d.

Khi đó $\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right].\vec{u}=0$ hay $\vec{u}\perp\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]$ và $\vec{u}\perp\overrightarrow{u_d}$.

Gọi $\vec{v}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]=(-19;10;-2)$, $\left[\vec{v},\overrightarrow{u_d}\right]=(18;15;-96)$, chọn $\vec{u}=(6;5;-32)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-32}$.

Cách 2:

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc $d \Rightarrow (\alpha): 2x+4y+z-15=0$.

Gọi $H=d\cap(\alpha) \Rightarrow H\left(\frac{8}{7};\frac{16}{7};\frac{25}{7}\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua M vuông góc với d và cắt d. Khi đó $\Delta\equiv MH$.

Ta có $\overrightarrow{MH}=\left(-\frac{6}{7};-\frac{5}{7};\frac{32}{7}\right)$, chọn $\vec{u}=(6;5;-32)$ làm vectơ chỉ phương của Δ.

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-32}$.

Cách 3:

Gọi Δ là đường thẳng qua M vuông góc với d và cắt d tại H. Khi đó $\Delta \equiv MH$.

Ta có $d:\begin{cases} x=2t \\ y=4t \\ z=3+t \end{cases} \Rightarrow H(2t;4t;3+t)$, $\overrightarrow{MH}=(2t-2;4t-3;4+t)$.

$d\perp\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{MH}=0 \Leftrightarrow 2(2t-2)+4(4t-3)+1(4+t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{4}{7}$.

Suy ra $\overrightarrow{MH}=\left(-\frac{6}{7};-\frac{5}{7};\frac{32}{7}\right)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(6;5;-32)$ làm vectơ chỉ phương của Δ.

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-32}$.

Câu 27. Chọn A

Gọi: $\Delta\cap d_1=M(1+t';3-t';2+2t')$, $\Delta\cap d_2=N(-3t;t;-1-3t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-3t-1-t';t-3+t';-3-3t-2t')$.

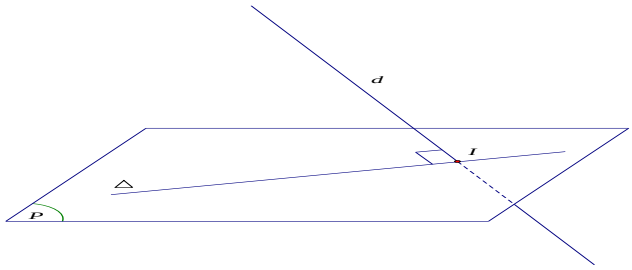
d_1,d_2 lần lượt có 2 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2),\overrightarrow{u_2}=(-3;1;-3)$.

Vì Δ là đường vuông góc chung của $d_1;d_2$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t'-10t=4 \\ 10t'+19t=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=1 \\ t=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow M(2;2;4), N(3;-1;2), \overrightarrow{MN}=(1;-3;-2)$

Vậy phương trình $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{-2}$.

Câu 28. Chọn B



Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d đi qua $M(-1;1;3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-2)$ nên phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=3-2t \end{cases}$. Gọi $I=\Delta\cap d \Rightarrow \begin{cases} I\in\Delta \\ I\in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\in(P) \\ I\in d \end{cases} \Rightarrow I=d\cap(P)$.

Vì $I\in d\Rightarrow I(-1+t;1+2t;3-2t)$, mà $I\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow I(-2;-1;5)$.

Gọi $\vec{v}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ.

Vì $\begin{cases} \Delta\subset(P) \\ \Delta\perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}\perp\vec{n} \\ \vec{v}\perp\vec{u} \end{cases}$ nên ta chọn $\vec{v}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-2;-5;-6)$.

Vậy Δ đi qua $I(-2;-1;5)$ và có VTCP $\vec{v}=(-2;-5;-6)$ nên có PT tham số là: $\begin{cases} z=-2-2t \\ y=-1-5t \\ z=5-6t \end{cases}$.

Câu 29. Chọn A

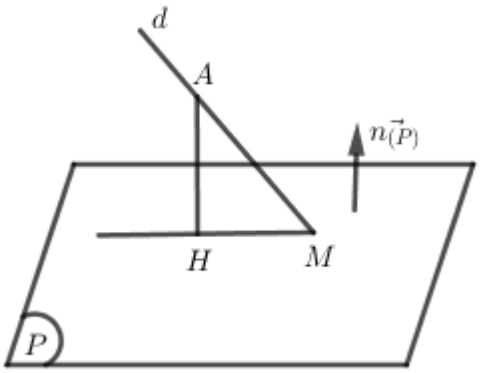
Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;5)$.

Đường thẳng d song song với (P) và (Q) có vectơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;-7;-3)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;-1)$ nên phương trình của đường thẳng d là $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{-3}$.

Câu 30. Chọn C



Phương trình đường thẳng d qua $A(0;-1;2)$, có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2;-1)$ là $\begin{cases} x=t_1 \\ y=-1+2t_1 \\ z=2-t_1 \end{cases} (t_1\in R)$.

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $M(t_1;-1+2t_1;2-t_1)\in d$ và $M\in(P)\Rightarrow t_1+(-1+2t_1)+(2-t_1)-3=0\Leftrightarrow t_1=1\Rightarrow M(1;1;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng chứa AH đi qua $A(0;-1;2)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ của (P) làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x=t_2 \\ y=-1+t_2 \\ z=2+t_2 \end{cases} (t_2\in R)$.

Lại có $H(t_2;-1+t_2;2+t_2)\in(AH)$ và $H\in(P)\Rightarrow t_2+(-1+t_2)+(2+t_2)-3=0\Leftrightarrow t_2=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}(1;4;-5)$.

Hình chiếu cần tìm là đường thẳng (MH), đi qua $M(1;1;1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{b}=(1;4;-5)$ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

Câu 31. Chọn B

Gọi $\overrightarrow{u_d}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d \Rightarrow \overrightarrow{u_d}=(1;1;2)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và d. Vì $B\in d$ nên $B(t+1;t;2t-1)$.

Khi đó vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$.

Vì Δ vuông góc với d nên $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow t+t+(2t-3).2=0\Leftrightarrow 6t=6\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-1)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Câu 32. Chọn B

Cách 1:

Ta có VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2m+1;2;m-2)$.

VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(1;1;1)$

Gọi $\begin{cases}(Q)\supset d\\(Q)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_Q=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]=(4-m;-m-3;2m-1).$

Khi đó $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow \vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-3m-2;3m-5;7).$

Vì Δ vuông góc với giá của vécto $\vec{a}$ nên ta có $\vec{u}_\Delta.\vec{a}=0\Leftrightarrow -1(-3m-2)+7=0\Leftrightarrow m=-3.$

Cách 2:

Ta có: d có VTCP là $\vec{u}_d=(2m+1;2;m-2)$.

Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) và vuông góc với giá của véc tơ $\vec{a}$ nên d vuông góc với giá của véc tơ $\vec{a}$.

Khi đó $\vec{a}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow -(2m+1)+m-2=0\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 33. Chọn D

Gọi $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(1;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-3)$.

Vì đường thẳng d nằm trong (P) và vuông góc đường thẳng Δ nên $\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta\\\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}$.

Suy ra $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta,\vec{n}_{(P)}\right]=(-1;2;1)$.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1} \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;1;1)$.

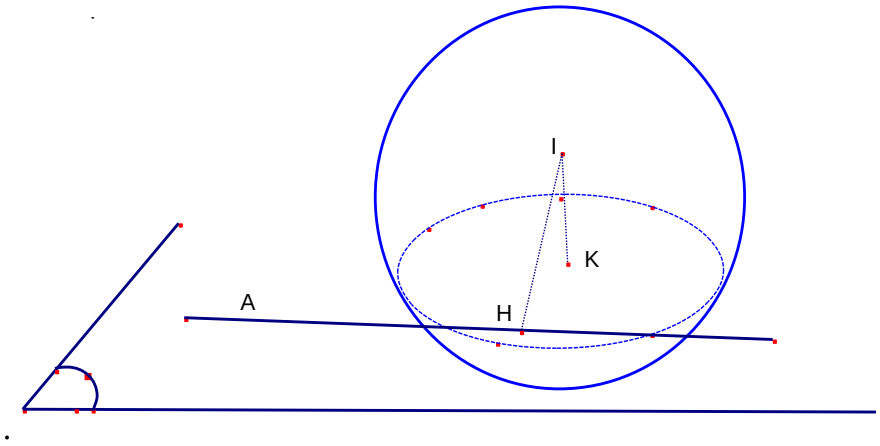
Vì đường thẳng d nằm trong (P) và cắt đường thẳng Δ nên đường thẳng d đi qua điểm I.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lưu ý: Đây là câu hỏi trắc nghiệm nên chỉ cần tính vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ là có thể chọn đáp án.

Câu 34. Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ bán kính $R=10$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là.

Phương trình tham số đường thẳng IK: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;7;3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \geq IK$. Do đó, IH nhỏ nhất khi H trùng với K.

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất. Khi đó, đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Câu 35. Chọn A

Từ $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ta suy ra M, A, B thẳng hàng. Hơn nữa:

$$MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow MA.\overrightarrow{MA}=-MB.\overrightarrow{MB}\Rightarrow\left|MA.\overrightarrow{MA}\right|=\left|-MB.\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow MA^2=MB^2$$

Vậy M là trung điểm AB.

Vì $M\in d$ nên toạ độ $M\left(-3+2t;1+2t;-4+t\right)\ \left(t\in\mathbb{R}\right)$. Đặt toạ độ $B\left(x;y;z\right)$ ta có:

$$\begin{cases}1+x=2\left(-3+2t\right)\\2+y=2\left(1+2t\right)\\4+z=2\left(-4+t\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+7=4t\\y=4t\\z+12=2t\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x+7}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+12}{1}.$$ Vậy $B\in d_1$.

Câu 36. Chọn A

<u>Tổng quát bài toán</u>: Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$, cắt hai đường thẳng d và d' cho trước.

Gọi $A=\Delta\cap d\Rightarrow$ tọa độ điểm A theo t, $B=\Delta\cap d'\Rightarrow$ tọa độ điểm B theo t'.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương suy ra được t và t'.

Tìm được tọa độ A và B suy ra phương trình đường thẳng Δ.

Lời giải

Mặt phẳng $\left(P\right)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(1;1;1\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A=\Delta\cap d$ có $A\in d$ nên $A\left(-1-2t;t;-1+3t\right)$, $B=\Delta\cap d'$ có $B\in d'$ nên $B\left(2+t';-1+2t';-2t'\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(t'+2t+3;2t'-t-1;-2t'-3t+1\right)$.

Do $\Delta\perp\left(P\right)$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow\frac{t'+2t+3}{1}=\frac{2t'-t-1}{1}=\frac{-2t'-3t+1}{1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3t-t'=-4\\2t+4t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A\left(1;-1;-4\right)\\B\left(3;1;-2\right)\end{cases}.$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=\left(1;1;1\right)$ nên có phương trình $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

Câu 37. Chọn C

Hai đường thẳng d_1 , d_2 có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=\left(3;2;-2\right)$ và $\overrightarrow{u_2}=\left(2;2;-1\right)$.

Lấy điểm $A\ 1+3t;-1+2t;2-2t\ \in d_1$ và $B\ 4+2u;4+2u;-3-u\ \in d_2$

AB là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 , d_2 khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12u-17t=-29\\ 9u-12t=-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-1\\ t=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A\ 4;1;0\\ B\ 2;2;-2\\ \overrightarrow{AB}\ -2;1;-2\end{cases}$$ .Vậy phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 , d_2 là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{2}$.

Câu 38. Chọn C

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P)

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;-1;-5)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;6)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-5)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P)\Rightarrow(P)\cap(Q)=d'$.

Véc tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_d\right]=(11;-16;-1)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là : $11x-16y-z-10=0$.

Do $(P)\cap(Q)=d'$ nên véc tơ chỉ phương của đường thẳng d' là $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_{(Q)},\vec{n}_{(P)}\right]=(-81;-54;-27)=-27(3;2;1)$,

suy ra d' có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;1)$.

Kiểm tra với điểm $B(1;0;1)$ thuộc đường thẳng ở khẳng định C ta thấy $B\in(P),B\in(Q)$.

Do đó phương trình của d' là : $\begin{cases}x=1+3t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

Câu 39. Chọn A

Vì đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 nên ta gọi M và N lần lượt là giao điểm của Δ với d_1 và d_2. Hơn nữa, vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) nên $M,N\in(\alpha)$.

Tìm tọa độ điểm M.

Vì $M\in d_1$ nên tọa độ điểm M có dạng $M(1+3t;2+t;-1+2t)$ với $t\in\mathbb{R}$.

Vì $M(1+3t;2+t;-1+2t)\in(\alpha)$ nên $1+3t\ +\ 2+t\ -\ -1+2t\ -2=0\Leftrightarrow t=-1$.

Do đó $M(-2;1;-3)$.

Tìm tọa độ điểm N.

$d_2:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-2}\Rightarrow d_2:\begin{cases}x=2-3t'\\y=0+2t'\\z=4-2t'\end{cases}\left(t'\in\mathbb{R}\right).$

Vì $N\in d_2$ nên tọa độ điểm N có dạng $N\left(2-3t';2t';4-2t'\right)$ với $t'\in\mathbb{R}$.

Vì $N\left(2-3t';2t';4-2t'\right)\in(\alpha)$ nên $\left(2-3t'\right)+\left(2t'\right)-\left(4-2t'\right)-2=0\Leftrightarrow t'=4$.

Do đó $N\left(-10;8;-4\right)$. Ta có: $\overrightarrow{NM}=8;-7;1$.

Đường thẳng Δ đi qua $M\left(-2;1;-3\right)$ và nhận $\overrightarrow{NM}=8;-7;1$ làm vectơ chỉ phương nên Δ có phương trình là $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 40. Chọn A

Gọi $N\left(2t+1;t;-t-1\right)$. Vì A là trung điểm của MN, suy ra $M\left(1-2t;6-t;5+t\right)$.

Điểm M nằm trong mặt phẳng $\left(P\right)$, suy ra $1-2t+6-t-5-t+2=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra tọa độ điểm $N\left(3;1;-2\right)$. Ta có $\overrightarrow{NA}=\left(-2;2;4\right)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(1;-1;-2\right)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua A, có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}$ là $\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$.

Câu 41. Chọn B

Cách 1.Gọi $H\left(a;b;c\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AC.

Ta có : $\overrightarrow{BH}=\left(a+2;b-3;c-1\right),\overrightarrow{AC}=\left(2;-2;2\right),\overrightarrow{AH}=\left(a-1;b-1;c-2\right)$

H là hình chiếu vuông góc của B trên $AC\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\H\in AC\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2\left(a+2\right)-2\left(b-3\right)+2\left(c-1\right)=0\\\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-1}{-2}=\dfrac{c-2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+c=-4\\a+b=2\\a-c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=0\end{cases}$

Nên $H\left(-1;3;0\right),\overrightarrow{BH}=\left(1;0;-1\right)$

Đường cao BH đi qua B và có VTCP $\overrightarrow{BH}=\left(1;0;-1\right)$ có phương trình là: $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$

Cách 2. Đường thẳng AC đi qua A và có VTCP $\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$ hay ta có thể chọn véc tơ chỉ phương của AC là $\vec{U}=(1;-1;1)$ nên phương trình của đường thẳng AC là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC nên ta gọi $H(1+t;1-t;2+t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BH}=(3+t;-2-t;1+t)$

Ta có: $BH\perp AC\Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 2(3+t)+(-2)(-2-t)+2(1+t)=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow H(-1;3;0);\overrightarrow{BH}=(1;0;-1)$

Vậy đường thẳng BH đi qua B và có VTCP $\overrightarrow{BH}=(1;0;-1)$ có PT là: $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Câu 42. Chọn B

Giả sử đường thẳng (d) cắt trục Oz tại điểm $B(0;0;a)$ (a là số thực).

Suy ra đường thẳng (d) nhận $\overrightarrow{BA}(1;2;3-a)$ là một vecto chỉ phương.

Mà (d) song song với mặt phẳng (P) và $\vec{n}(2;1;-4)$ là một vecto pháp tuyến của (P) nên:

$\overrightarrow{BA}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}.\vec{n}=0\Rightarrow 2.1+1.2-4(3-a)=0\Leftrightarrow a=2$.

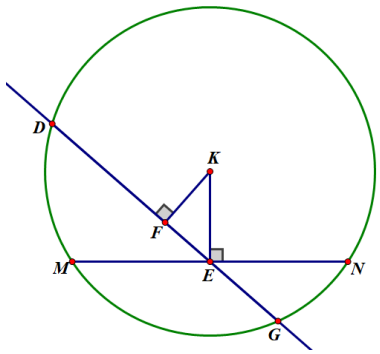
Suy ra đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;2;3)$ và nhận $\overrightarrow{BA}(1;2;1)$ là một vecto chỉ phương có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$.

Từ dữ kiện (d) nhận $\overrightarrow{BA}(1;2;1)$ là một vecto chỉ phương ta loại được đáp án A, C, D.

Thử lại thấy điểm $(0;0;2)$ thuộc đường thẳng $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$ nên đáp án B là đáp án đúng.

Câu 43. Chọn C

Cách 1:



Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ nên phương trình (P) là $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0$. Dễ thấy $E\in(P)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Giả sử K là hình chiếu của I lên (P), ta có: $IK=d_{I/(P)}=\frac{|2.3+2.2-5-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}$.

Do đó $IK<R$ nên (S) và (P) cắt nhau và giao tuyến của chúng là đường tròn tâm K.

Lại có $IE=\sqrt{(2-3)^2+(1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{6}\Rightarrow IE<R$, nên E nằm trong mặt cầu (S). Mà $E\in(P)$ nên E nằm trong đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

Giả sử Δ cắt (S) tại D và G, F là hình chiếu của K lên Δ. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với EK, nằm trên (P), cắt (S) tại M và N. Ta có $KF\le KE\Rightarrow DG\ge MN$ (theo tính chất mối quan hệ giữa dây cung và khoảng cách từ dây cung tới tâm).

Mà MN không đổi nên DG nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\equiv F$. Khi đó $\Delta\perp KE$, ngoài ra $IK\perp(P)\Rightarrow\Delta\perp IK$, do đó $\Delta\perp(IKE)\Rightarrow\Delta\perp IE$.

Vậy $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}$, mà $\overrightarrow{IE}=(-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{n_P}\right]=(5;-5;0)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;0)$.

Vì Δ đi qua $E(2;1;3)$ nên phương trình Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$.

Cách 2:

Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ nên phương trình (P) là $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0$. Dễ thấy $E\in(P)$.

Thay tọa độ điểm E vào vế trái của phương trình (S) ta được : $1^2+1^2+2^2=6<36$. Do đó E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi M,N là giao điểm của Δ và mặt cầu (S). Khi đó ta có:

$MN=2\sqrt{R^2-(d(I,\Delta))^2}$, với R,I lần lượt là bán kính và tâm của mặt cầu (S).

Do đó MN nhỏ nhất khi $d(I,\Delta)$ lớn nhất.

Ta lại có: $d(I,\Delta)\le IE$, với IE cố định.

Do đó: $\max d(I,\Delta)=\text{IE}$. Khi đó: $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}$, mà $\overrightarrow{IE}=(-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{n_P}\right]=(5;-5;0)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;0)$.

Ngoài ra Δ đi qua $E(2;1;3)$ nên phương trình Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$.

Câu 44. Chọn D

Ta có phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến điểm M thành điểm N mà M là điểm nằm trên mp (P)

Suy ra điểm N nằm trên mp (P') là ảnh của mặt phẳng (P) qua phép vị tự tâm A tỉ số 2.

Ta có $B(2;0;1)\in(P)$, phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến B thành $B'(6;1;-3)\in(P')$ và $(P)//(P')$

$\Rightarrow (P'): 2x+y+3z-4=0$

Do đó N thuộc hai mặt phẳng (Q) và (P') nên N thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (Q) và (P') với $\vec{n_1}(2;1;3), \vec{n_2}(3;-2;-1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P') và (Q)

$\Rightarrow C(2;3;-1)\in d$ và d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]=(5;11;-7) \Rightarrow d: \begin{cases} x=2+5t \\ y=3+11t \\ z=-1-7t \end{cases}$.

Câu 45. Chọn B

Đường thẳng d_1 có vtcp $\vec{u_1}=(2;1;1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\vec{u_2}=(1;2;-5)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với d_1 và d_2 nên nhận $\vec{u}=\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]=(-7;11;3)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-7t \\ y=-1+11t \\ z=2+3t \end{cases}$.

Câu 46. Chọn D

Gọi $N(1+2t;-1+t;-t)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng d.

Lúc đó đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MN}=(2t-1;t-2;-t)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt khác Δ vuông góc với đường thẳng d nên ta có: $2(2t-1)+t-2+t=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$.

Với $t=\frac{2}{3}$ đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$ hoặc $\vec{u}=(1;-4;-2)$ làm vtcp.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{-2}$.

Câu 47. Chọn C

Cách 1:

Ta có: mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0 \Rightarrow \begin{cases} Ox\cap(\alpha)=A(-6;0;0) \\ Oy\cap(\alpha)=B(0;-4;0) \\ Oz\cap(\alpha)=C(0;0;6). \end{cases}$

Mà đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng d là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh A,B,C trong không gian $\Rightarrow$ đường thẳng d là giao tuyến của các mp trung trực của các đoạn thẳng AB, AC, BC.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow$ Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm $M(-3;-2;0)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AM}=(3;-2;0)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (P) là: $3x-2y+5=0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AC \Rightarrow$ Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $N(-3;0;3)$ của AC và nhận $\overrightarrow{AN}=(3;0;3)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $x+z=0$.

Lấy điểm $E(-1;y;z)$ thuộc đường thẳng d, vì đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên tọa độ điểm E thỏa mãn hệ: $\begin{cases}-3-2y+5=0\\-1+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\z=1\end{cases} \Rightarrow E(-1;1;1)$

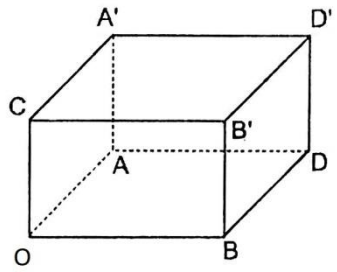
Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0$ nên đường thẳng d có 1 véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;-2)$, đồng thời d đi qua điểm $E(-1;1;1)$ nên phương trình của d là $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Cách 2:

Ta có: mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0 \Rightarrow \begin{cases}Ox\cap(\alpha)=A(-6;0;0)\\Oy\cap(\alpha)=B(0;-4;0)\\Oz\cap(\alpha)=C(0;0;6).\end{cases}$

Mà đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng d là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh A,B,C trong không gian.

Nhận xét: 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc $\Rightarrow$ dựng hình hộp chữ nhật $OADB.CA'D'B'$



Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là trung điểm I của đường chéo OD'

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD'}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OI}=(-3;-2;3) \Rightarrow I(-3;-2;3).$

Mà I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp $\Rightarrow$ I cách đều 3 đỉnh $A, B, C \Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng d cần tìm.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0$ nên đường thẳng d có 1 véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;-2)$, đồng thời d đi qua điểm $E(-1;1;1)$ nên phương trình của d là $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Câu 48. Chọn D

Đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_{d_1}}=(1;0;-1)$.

Giả sử (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $d_1 \Rightarrow (P): x-2-z+1=0 \Leftrightarrow x-z-1=0$

Gọi B là giao điểm của (P) và d_2. Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=3+2t' \\ y=3+t' \\ z=0 \\ x-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(1;2;0).$$

Đường thẳng cần tìm là đường thẳng AB:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-1)$ hay VTCP của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}=(1;-1;1)$

Đường thẳng cần tìm đi qua $B(1;2;0)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;-1;1)$

Suy ra phương trình đường thẳng cần tìm: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Cách 2:

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Δ cắt d_2 tại B.

Ta có $B \in d_2 \Rightarrow B(3+2t';3+t';0)$.

Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(1+2t';2+t';-1)$, d_1 có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;0;-1)$.

Ta có $\Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0 \Leftrightarrow 1+2t'+0+1=0 \Leftrightarrow t'=-1$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-1)$.

Đường thẳng cần tìm đi qua $B(1;2;0)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;-1;1)$

Suy ra phương trình đường thẳng cần tìm: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Câu 49. Chọn D

Ta viết phương trình tham số của $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), d_2: \begin{cases} x=1-2s \\ y=-4s \\ z=3+2s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$.

Tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Ta có $\begin{cases} t=1-2s \\ 1-t=-4s \\ 1+2t=3+2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ s=0 \end{cases}$ suy ra $I(1;0;3)$ là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lấy $A(0;1;1) \in d_1 \Rightarrow IA=\sqrt{6}$. Gọi $B(1-2s;-4s;3+2s) \in d_2$ sao cho $IB=\sqrt{6}$.

Ta có $IB=\sqrt{6}\Leftrightarrow 4s^2+16s^2+4s^2=6\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{2}$. Vậy có 2 điểm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}B(0;-2;4)\\B(2;2;2)\end{array}\right.$

.

Với $B(0;-2;4)$ ta có $\overrightarrow{IA}(-1;1;-2),\overrightarrow{IB}(-1;-2;1)\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-3<0\Rightarrow AIB$ là góc tù

Theo yêu cầu bài toán ta viết phương trình của đường phân giác của góc AIB với $B(0;-2;4)$ (không cần xét trường hợp kia) .

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, khi đó phương trình đường phân giác cần tìm là phương trình đường thẳng đi qua hai điêm $I(1;0;3)$ và $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, chọn $\vec{u}=-2\overrightarrow{IM}\Rightarrow\vec{u}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương của đường phân giác. Vậy đường phân giác đi qua điểm $I(1;0;3)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Nhận xét: Có thể tìm vectơ chỉ phương của đường phân giác như sau:

Ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2);\overrightarrow{u_2}=(2;4;-2)$ lần lượt là véctơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1 và d_2.

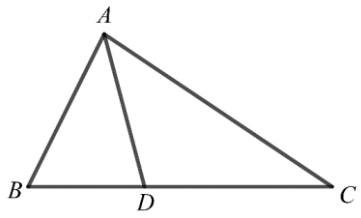
Vì $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=-6<0$ nên góc giữa hai vectơ đó là góc tù.

Xét $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2);\overrightarrow{u_2}=(2;4;-2)$. Ta có $\left|\overrightarrow{u_1}\right|=\sqrt{6}$, $\left|\overrightarrow{u_2}\right|=2\sqrt{6}$.

Đặt $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right);\ \vec{b}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\overrightarrow{u_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ nên có thể chọn $\vec{u}=(2;1;1)$ là VTCP của đường phân giác.

Câu 50. Chọn C



Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$

Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

Khi đó: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow DB=\frac{1}{2}DC\Rightarrow\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*) (vì D nằm giữa B và C).

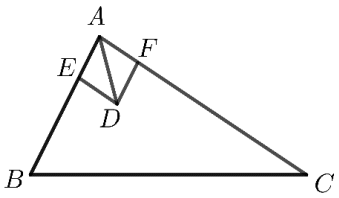
Gọi $D(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{DB}=(3-x;-y;2-z)$, $\overrightarrow{DC}=(4-x;3-y;-4-z)$.

Thay vào (*) ta được hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l}3-x=-\frac{1}{2}(4-x)\\-y=-\frac{1}{2}(3-y)\\2-z=-\frac{1}{2}(-4-z)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{10}{3}\\y=1\\z=0\end{array}\right.$. Vậy $D\left(\frac{10}{3};1;0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{4}{3};0;0\right)$.

Đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Cách 2:



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{6}$.

Lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $AE=1$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $AF=1$. Khi đó $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Dựng hình bình hành $AEDF$, ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};0;0\right)$.

Vì $AE=AF=1$ nên hình bình hành $AEDF$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AD}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{AD}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Cách 3:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$.

Gọi I là trung điểm AC. Ta có $I=(3;2;-2)$ và $AI=\sqrt{6}$.

Dựng hình bình hành $ABKI$, ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}=(2;0;0)$.

Vì $AB=AI=\sqrt{6}$ nên hình bình hành $ABKI$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AK}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có VTCP là $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

DẠNG 3. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và điểm $M(1;2;m)$. Tìm giá trị tham số m để điểm M thuộc đường thẳng d.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-5=0$. Tọa độ giao điểm của d và (P) là

A. $(2;1;-1)$. **B.** $(3;-1;-2)$. **C.** $(1;3;-2)$. **D.** $(1;3;2)$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và điểm $A(-4;1;1)$. Gọi A' là hình chiếu của A trên Δ. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với AA'?

A. $x-2y-2=0$. **B.** $4x-y+7z-1=0$. **C.** $-x+3y+z+3=0$. **D.** $x-y+4z+1=0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=3-t\end{cases}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(3;-1;4)$. **B.** $N(-1;1;2)$. **C.** $M(1;0;3)$. **D.** $P(3;-1;2)$.

Câu 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+7=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Điểm $H(a;b;-1)$ là hình chiếu vuông góc của (A) trên (P). Tổng $a+b$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** -3.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào ?

A. $(0;1;3)$. **B.** $(2;3;3)$. **C.** $(5;6;8)$ **D.** $(1;-2;0)$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-2t\\y=-3+t\\z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$, giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(4;-3;0)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-1)$. **D.** $(-2;0;-2)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\ -1;1;6$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=2t\end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ là

A. $M\ 3;-1;2$. **B.** $H\ 11;-17;18$. **C.** $N\ 1;3;-2$. **D.** $K\ 2;1;0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+at\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=-1-t'\\y=2+2t'\\z=3-t'\end{cases}$. Giá trị của a để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

A. $a=-2$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=0$. **D.** $a=1$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Đường thẳng $d\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ đi qua điểm nào sau sau đây?

A. $K(1;-1;1)$. **B.** $E(1;1;2)$. **C.** $H(1;2;0)$. **D.** $F(0;1;2)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-2;3)$, $B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Tọa độ giao điểm C của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là

A. $C(2;0;-1)$. **B.** $C(1;1;-1)$. **C.** $C(0;2;-1)$. **D.** $C(2;-1;0)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ hình chiếu B' của điểm $B(5;3;-2)$ trên đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

A. $B'(1;3;0)$. **B.** $B'(5;1;2)$. **C.** $B'(3;2;1)$. **D.** $B'(9;1;0)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y-2z+5=0$. Tìm điểm A trên d có hoành độ dương sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3.

A. $A(4;-2;1)$. **B.** $A(-2;1;-2)$. **C.** $A(2;-1;0)$. **D.** $A(0;0;-1)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm:

A. $M_3(3;0;0)$. **B.** $M_4(0;2;0)$. **C.** $M_1(0;0;-1)$. **D.** $M_2(3;2;0)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3;-2;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oxy) là điểm:

A. $M_3(-3;0;0)$. **B.** $M_4(0;-2;1)$. **C.** $M_1(0;0;1)$. **D.** $M_2(-3;-2;0)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{1}$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua d.

A. $B(-3;4;-4)$. **B.** $B(2;-1;3)$. **C.** $B(3;4;-4)$. **D.** $B(3;-4;4)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x+3y+z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

A. $\begin{cases}x=-6t\\y=-2-5t\\z=2+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=6t\\y=-2-5t\\z=2+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-6t\\y=-2+5t\\z=2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6t\\y=-2-5t\\z=2-3t\end{cases}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -5.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$ và $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABC vuông tại A. Giá trị của tổng $m+2n+p$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -5.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2. Nếu M có hoành độ âm thì tung độ của M bằng.

A. -3. **B.** -21. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1)$, $B(-3;2;0)$, $C(2;-2;3)$. Đường cao kẻ từ B của tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $P(-1;2;-2)$. **B.** $M(-1;3;4)$. **C.** $N(0;3;-2)$. **D.** $Q(-5;3;3)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(2;-1;1)$. Đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $P(0;4;4)$. **B.** $M(2;0;1)$. **C.** $N(-1;5;5)$. **D.** $Q(3;-2;2)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(-2;-3;1)$. Đường cao của tứ diện $ABCD$ kẻ từ D đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $P(4;0;3)$. **B.** $M(-8;-6;0)$. **C.** $N(8;3;5)$. **D.** $Q(2;5;-3)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi $H(5;5;2)$ là hình chiếu của điểm A lên cạnh BC. Mặt phẳng $(P)\,x+y+z-5=0$ đi qua đường phân giác trong AJ của góc A của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác ABC. Điểm $K(-2;-1;0)$ thuộc đường trung tuyến AM. Tìm tọa độ điểm A

A. $A\left(\frac{50}{3};\frac{29}{4};\frac{-64}{2}\right)$. **B.** $A\left(\frac{50}{3};\frac{29}{2};\frac{-64}{2}\right)$. **C.** $A\left(\frac{50}{9};\frac{29}{4};\frac{-64}{2}\right)$. **D.** $A\left(\frac{50}{3};\frac{29}{3};\frac{-64}{3}\right)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC cân tại A. Gọi $G\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng $(P)\,x+y+z-5=0$ đi qua cạnh BC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác ABC. Phương trình đường thẳng đi qua BG có dạng là $\begin{cases} x=\frac{5}{3}+t \\ y=\frac{4}{3}-t \\ z=\frac{1}{3}-4t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm C

A. $C\left(\frac{5}{3};\frac{9}{4};\frac{-3}{2}\right)$. **B.** $C\left(\frac{50}{3};\frac{9}{2};5\right)$. **C.** $C\left(3;\frac{9}{4};\frac{-7}{2}\right)$. **D.** $C\left(\frac{16}{3};3;-1\right)$.

Câu 27. Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z-3=0$. Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm $A(-1;0;3)$ qua mặt phẳng $(P):x+3y-2z-7=0$.

A. $A'(-1;-6;1)$. **B.** $A'(0;3;1)$. **C.** $A'(1;6;-1)$. **D.** $A'(11;0;-5)$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ và điểm $A(5;0;1)$. Điểm đối xứng của A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(1;1;1)$. **B.** $(-5;5;3)$. **C.** $(4;-1;0)$. **D.** $(3;-2;-1)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thoi $ABCD$ với $A(-1;2;1), B(2;3;2)$. Tâm I của hình thoi thuộc đường thẳng $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Đỉnh nào sau đây là đỉnh D của hình thoi?

A. $D(0;1;2)$. **B.** $D(-2;-1;0)$. **C.** $D(0;-1;-2)$. **D.** $D(2;1;0)$.

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $P:2x-y+2z-2=0$. Có bao nhiêu điểm M thuộc d sao cho M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng P ?

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn B**

$M \in d \Rightarrow \begin{cases} 1=1+2t \\ 2=2-t \\ m=-2+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=0 \\ m=-2 \end{cases}$.

Vậy $m=-2$ thì điểm M thuộc đường thẳng d.

Câu 2. **Chọn D**

Xét hệ: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=2t \\ x+2y-z-5=0 \end{cases} \Rightarrow 2-t+2(1+2t)-2t-5=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A(1;3;2)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Câu 3. **Chọn C**

Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-1)$ là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Giả sử $A'(1+2t;t;-2-t) \in \Delta$ là hình chiếu của A trên Δ.

Khi đó $\overrightarrow{AA'}=(5+2t;t-1;-3-t)$, theo đề bài ta có

$\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow 2(5+2t)+t-1+3+t=0 \Leftrightarrow 6t+12=0 \Leftrightarrow t=-2$

hay $A'(-3;-2;0)$ và $\overrightarrow{AA'}=(1;-3;-1)$. Mặt phẳng (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với AA' khi $\vec{n}=k.\overrightarrow{AA'}\ (k\neq 0)$.

Xét đáp án C có $\vec{n}=(-1;3;1)=-\overrightarrow{AA'}$ nên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. **Chọn D**

Thay tọa độ từng điểm vào phương trình đường thẳng d đã cho, ta thấy Q,N,M thuộc đường thẳng d.

Thay tọa độ điểm P vào phương trình đường thẳng d đã cho, ta có:

$\begin{cases} 3=1-2t \\ -1=t \\ 2=3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=1 \end{cases}$ (vô nghiệm). Vậy $P \notin d$.

Câu 5. **Chọn A**

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc mặt phẳng (P). Ta chọn một vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}=(2;-2;-1)$. Phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \\ z=-2-t \end{cases}, t \in R$

Gọi $H=(\Delta)\cap(P)$.

Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \\ z=-2-t \\ 2x-2y-z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=-1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow H(-1;3;-1)$

Vậy $a=-1$, $b=3$ nên tổng $a+b=2$.

Câu 6. **Chọn B**

$\overrightarrow{u_d}(1;1;2)$ là một VTCP của đường thẳng d

$\overrightarrow{n_\beta}(1;1;-2)$ là một VTPT của $(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-4;4;0)$; $A(2;3;0)\in d \Rightarrow A\in(\alpha)$

Phương trình mặt phẳng

$(\alpha): -4(x-2)+4(y-3)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow -4x+4y-4=0 \Leftrightarrow x-y+1=0$.

Giả sử $M(x;y;z)\in(\alpha)\cap(\beta)$. Khi đó tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$

Thay các đáp án vào hệ trên ta thấy $M(2;3;3)$ thỏa mãn. Chọn đáp án B.

Câu 7. **Chọn B**

Tọa độ giao điểm I của d với mặt phẳng (Oxy) là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x=4-2t \\ y=-3+t \\ z=1-t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases}$. Do đó $I(2;-2;0)$.

Câu 8. **Chọn A**

Gọi $M\ 2+t;1-2t;2t$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\ 3+t;-2t;2t-6$ và véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta=\ 1;-2;2$.

Có $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}_\Delta \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}_\Delta=0 \Leftrightarrow 3+t+4t+4t-12=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M\ 3;-1;2$.

Câu 9. **Chọn B**

Đường thẳng d có một VTCP $\vec{a}_d=(a;1;2)$; d' có một véctơ chỉ phương $\vec{a}_{d'}=(-1;2;-1)$.

Nhận thấy $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-1}$ nên $\vec{a}_d$, $\vec{a}_{d'}$ không cùng phương nên $\left[\vec{a}_d,\vec{a}_{d'}\right]=(-5;a-2;2a+1)$.

Lấy $M(1;0;-1)\in d$, $N(-1;2;3)\in d' \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-2;2;4)$.

d cắt d' khi và chỉ khi $\left[\vec{a}_d,\vec{a}_{d'}\right].\overrightarrow{MN}=0 \Leftrightarrow (-5).(-2)+2(a-2)+4(2a+1)=0 \Leftrightarrow a=-1$.

Câu 10. **Chọn D**

Thay tọa độ của $K(1;-1;1)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1=t \\ -1=1-t \\ 1=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \\ t=-1 \end{cases}$: không tồn tại t.

Do đó, $K\notin d$.

Thay tọa độ của $E(1;1;2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases}1=t\\1=1-t\\2=2+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=0\\t=0\end{cases}$: không tồn tại t.

Do đó, $E\notin d$.

Thay tọa độ của $H(1;2;0)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases}1=t\\2=1-t\\0=2+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-1\\t=-2\end{cases}$: không tồn tại t.

Do đó, $H\notin d$.

Thay tọa độ của $F(0;1;2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases}0=t\\1=1-t\\2=2+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t=0\\t=0\end{cases}\Leftrightarrow t=0.$

Do đó, $F\in d$. Vậy, ta chọn **D**.

Câu 11. Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;-4)$. Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+2t\\z=3-4t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$.

Gọi C là giao điểm của AB và $(P)\Rightarrow C(1+t;-2+2t;3-4t)$ mà $C\in(P)$ nên:

$1+t-2+2t+3-4t-1=0\Leftrightarrow t=1$.

Vậy $C(2;0;-1)$.

Câu 12. Chọn C

Đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{1}$ có VTCP $\vec{u}=(2;-1;1)$, có PT tham số là: $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=t\end{cases}$.

$B'\in d\Rightarrow B'(1+2t;3-t;t)$, để B' là hình chiếu của B trên d thì $\overrightarrow{BB'}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{BB'}.\vec{u}=0$.

$\Rightarrow 2(2t-4)+t+t+2=0\Leftrightarrow 6t=6\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B'(3;2;1)$.

Câu 13. Chọn C

Vì $A\in d\Rightarrow A(2t,-t,-1+t);\ t>0$. Ta có: $d(A,(\alpha))=3\Leftrightarrow\dfrac{|2t+7|}{3}=3\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-8\end{cases}$

Vì $t>0$ nên chọn t = 1. Vậy $A(2;-1;0)$

Câu 14. Chọn C

Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ lên trục Oz là điểm $(0;0;c)$ nên chọn C

Câu 15. Chọn D

Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ lên trục Oxy là điểm $(a;b;0)$ nên chọn D

Câu 16. Chọn D

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) và (R) lần lượt là $\begin{cases}\overrightarrow{n_Q}=(1;1;3)\\ \overrightarrow{n_R}=(2;-1;1)\end{cases}$.

$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_R}\end{cases}\Rightarrow VTPT\ \overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_R}\right]=(4;5;-3).$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ và véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(4;5;-3)$ có phương trình:

$4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Câu 17. Chọn D

Từ phương trình đường thẳng d ta có véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u}(2;1;1)$

Gọi H là hình chiếu của A trên d, suy ra $H(6+2t;1+t;5+t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}(5+2t;-1+t;3+t)$. Khi đó $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(5+2t)+(-1+t)+(3+t)=0\Leftrightarrow t=-2$.Với $t=-2$ thì $H(2;-1;3)$

Gọi B là điểm đối xứng với A qua d thì H là trung điểm $AB\Rightarrow B(3;-4;4)$.

Câu 18. Chọn A

Gọi $I=d\cap(P)$, khi đó toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}x=6+2t\\y=1+t\\z=5+t\\2x+3y+z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\x=0\\y=-2\\z=2\end{cases}\Rightarrow I(0;-2;2)$.

Lấy $A(6;1;5)\in d$, gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) suy ra PT đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases}x=6+2t\\y=1+3t\\z=5+t\end{cases}$. Gọi $J=\Delta\cap(P)$, ta tính được $J\left(-\frac{18}{7};-\frac{29}{7};\frac{23}{7};\right)$.

Khi đó đường thẳng d' đi qua 2 điểm I, J có PTTS là: $\begin{cases}x=-6t\\y=-2-5t\\z=2+3t\end{cases}$.

TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0 giải nhanh như sau:

Cho (α) : $ax+by+cz+d=0$; $A(m;n;k)$. Gọi H là hình chiếu của A lên (α).

Khi đó $\begin{cases}h=-\dfrac{am+bn+ck+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\H(m+ah;n+bh;k+ch)\end{cases}$

Câu 19. Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2-t\end{cases}$.

Vì C thuộc d nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t;t;2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;-2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t;t-3;1-t)$ .Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3t-7;-3t-1;3t-3)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(3t-7)^2+(-3t-1)^2+(3t-3)^2}$.

Theo bài ra ta có $S_{\Delta ABC}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}=2\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow 27t^2-54t+59=32\Leftrightarrow(t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ thì $C(1;1;1)$ nên $m=1;n=1;p=1$. Vậy giá trị của tổng $m+n+p=3$

Câu 20. Chọn A

Vì $C\in d$ nên tọa độ của C có dạng $C(-1+2t;t;2-t)$

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;-2)$ và $\overrightarrow{AC}(2t;t-3;1-t)$

Vì ΔABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 2t-t+3-2+2t=0\Leftrightarrow 3t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{-1}{3}$.

$$C\left(\frac{-5}{3};\frac{-1}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{-5}{3}\\ n=\frac{-1}{3}\\ p=\frac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow m+2n+p=\frac{-5}{3}+\frac{-2}{3}+\frac{7}{3}=0.$$

Câu 21 . Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\\ z=-2+3t\end{cases}$

Vì $M\in d$ nên tọa độ của M có dạng $M(t;-1+2t;-2+3t)$.

Vì khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 nên

$$\frac{\left|t+2(-1+2t)-2(-2+3t)+3\right|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}}=2\Leftrightarrow\frac{\left|t-2+4t+4-6t+3\right|}{\sqrt{1+4+4}}=2$$

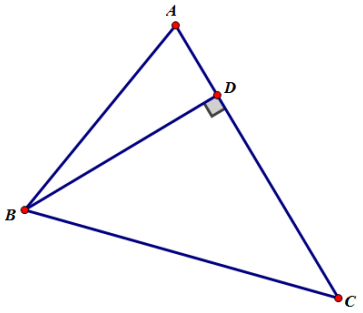
$$\Leftrightarrow\frac{|5-t|}{3}=2\Leftrightarrow|5-t|=6\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5-t=6\\ 5-t=-6\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=-1\Rightarrow M(-1;-3;-5)\\ t=11\Rightarrow M(11;21;31)\end{bmatrix}$$

Vì M có tung độ âm nên $M(-1;-3;-5)$

Câu 22. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;2)\Rightarrow\left[\vec{n},\overrightarrow{AC}\right]=(12;0;-12)$.

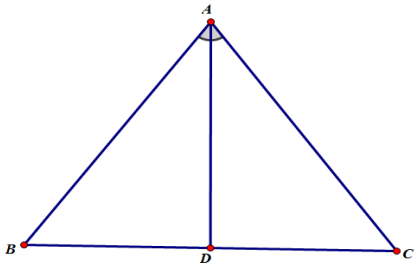
Một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ B của tam giác ABC là $\vec{u}=\frac{1}{12}\left[\vec{n},\overrightarrow{AC}\right]=(1;0;-1)$.



Phương trình đường cao kẻ từ B là: $\begin{cases}x=-3+t\\y=2\\z=-t\end{cases}$.

Ta thấy điểm $P(-1;2;-2)$ thuộc đường thẳng trên.

Câu 23. Chọn A



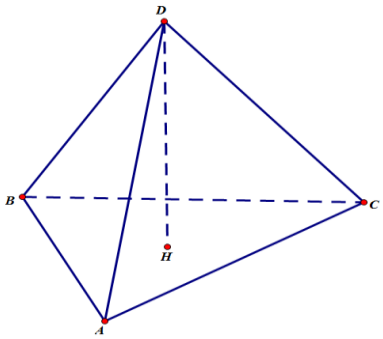
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-3;-2)\Rightarrow AB=AC=\sqrt{14}$ tức tam giác ABC cân tại A.

Do đó gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ A thì D cũng là trung điểm BC nên $D\left(\frac{5}{2};-1;\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\left(\frac{3}{2};-3;-\frac{3}{2}\right)$. Chọn một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong AD là $\vec{u}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=(1;-2;-1)$. Vậy phương trình AD là : $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$.

Ta thấy điểm $P(0;4;4)$ thuộc đường thẳng trên.

Câu 24. Chọn A

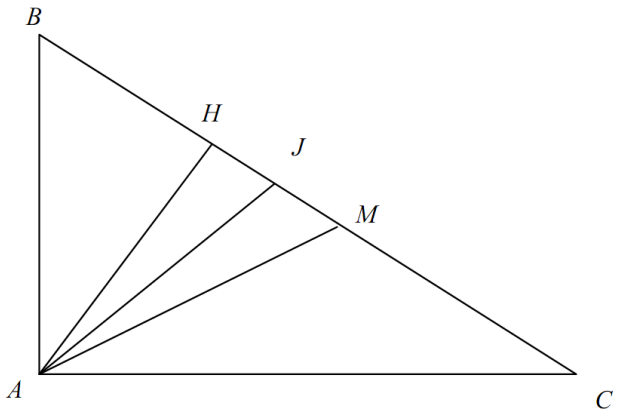
Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0\Rightarrow\vec{n}=(6;3;2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).



Đường cao của tứ diện $ABCD$ kẻ từ D đi qua $D(-2;-3;1)$ và nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}=(6;3;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x=-2+6t \\ y=-3+3t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Ta thấy điểm $P(4;0;3)$ thuộc đường thẳng trên.

Câu 25. Chọn D



Do tam giác ABC vuông tại A và AM là đường trung tuyến nên ta có

$MA=MC=MB$ và $MCA=MAC=BAH$ mà AJ là phân giác nên dễ dàng có được $HAJ=MAJ$

Hay AJ cũng là phân giác của tam giác HAM. Vậy ta có điểm đối xứng của H qua AJ sẽ thuộc AM. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm đối xứng với H qua AJ ta có tọa độ điểm E bằng cách giải hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-2}{1} \\ \dfrac{x+5}{2}+\dfrac{y+5}{2}+\dfrac{z+2}{2}-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{-8}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{-8}{3}\right)$$

Phương trình đường thẳng AM đi qua K và E nên có dạng $\begin{cases} x=-2+\dfrac{7}{3}t \\ y=-1+\dfrac{4}{3}t \\ z=\dfrac{-8}{3}t \end{cases}$

Ta có A là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng AM. Vậy

$$\left(-2+\frac{7}{3}t\right)+\left(-1+\frac{4}{3}t\right)-\frac{8}{3}t-5=0 \Leftrightarrow t=8 \Rightarrow A\left(\frac{50}{3};\frac{29}{3};\frac{-64}{3}\right)$$

Câu 26. Chọn D

Ta có B chính là giao điểm của đường thẳng BG và mặt phẳng (P)

$$\left(\frac{5}{3}+t\right)+\left(\frac{4}{3}-t\right)+\left(\frac{1}{3}-4t\right)-5=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow B\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$$

Gọi M là trung điểm của BC, ta có GM vuông góc với đường thẳng BC vậy nó cũng vuông góc với mặt phẳng (P). Vậy phương trình đường thẳng GM là $\begin{cases}x=\frac{5}{3}+t\\ y=\frac{4}{3}+t\\ z=\frac{1}{3}+t\end{cases}$

Ta có điểm M chính là giao điểm của GM với mặt phẳng (P).Vậy ta có tọa độ điểm M

$$\left(\frac{5}{3}+t\right)+\left(\frac{4}{3}+t\right)+\left(\frac{1}{3}+t\right)-5=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}\Rightarrow M\left(3;\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$$

Mà M lại là trung điểm BC vậy ta có tọa độ của C là $C\left(\frac{16}{3};3;-1\right)$

Câu 27. Chọn D

Tọa độ $M(a;b;c)$ thỏa hệ phương trình $\begin{cases}\frac{a+1}{1}=\frac{b-1}{2}=\frac{c-3}{-2}\\ 2a-2b+c-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=-3\\ b+c=4\\ 2a-2b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-1\\ c=5\end{cases}.$

Vậy $T=a+b+c=2$.

Câu 28. Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P).

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=-1+t\\ y=3t\\ z=3-2t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P). Suy ra $H=\Delta\cap(P)$.

Tham số t ứng với tọa độ điểm H là nghiệm của phương trình

$(-1+t)+3.3t-2(3-2t)-7=0\Leftrightarrow t=1$.

Do đó $H(0;3;1)$.

Điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) khi và chỉ khi H là trung điểm của đoạn thẳng AA'. Suy ra $A'=(1;6;-1)$.

Câu 29. Chọn D

Cách 1.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng d.

Ta có phương trình mặt phẳng (P) là $3(x-5)-2y-(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-14=0$.

Gọi H là hình chiếu của A trên d, dễ có $H=d\cap(P)$.Vì $H\in d$ nên $H(1+3t;1-2t;1-t)$.

Lại có $H\in(P)$ nên $3(1+3t)-2(1-2t)-(1-t)-14=0 \Leftrightarrow 14t=14 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $H(4;-1;0)$, mà H là trung điểm của AA' nên $A'(3;-2;-1)$.

Cách 2.

Gọi H là hình chiếu của A trên d, ta có $H(1+3t;1-2t;1-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(3t-4;1-2t;-t)$.

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-2;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 3(-4+3t)-2(1-2t)-(-t)=0 \Leftrightarrow 14t=14 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $H(4;-1;0) \Rightarrow A'(3;-2;-1)$.

Câu 30. Chọn B

Gọi $I(-1-t;-t;2+t)\in d$ là tâm của hình thoi $ABCD$.

Xét $\overrightarrow{IA}=(t;t+2;-t-1); \overrightarrow{IB}=(t+3;t+3;-t)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $IA\perp IB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow 3t^2+9t+6=0 \Leftrightarrow t=-2; t=-1$.

Do D đối xứng B qua I nên:

Với $t=-1 \Rightarrow I(0;1;1) \Rightarrow D(-2;-1;0)$. (Đáp án B)

Với $t=-2 \Rightarrow I(1;2;0) \Rightarrow D(0;1;-2)$.

Câu 31. Chọn D

Vì $M\in d$ nên $M(-2t;1+t;t)$; $MO=\sqrt{6t^2+2t+1}$

$$d\ M,\ P\ =\frac{|2\ -2t\ -1-t+2t-2|}{\sqrt{2^2+\ -1\ ^2+2^2}}=|t+1|.$$

M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng P nên $MO=d\ M,\ P$ hay

$\sqrt{6t^2+2t+1}=|t+1| \Leftrightarrow 6t^2+2t+1=\ t+1\ ^2 \Leftrightarrow t=0$. Vậy có 1 điểm M.

Câu 32. Chọn C

Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2), AB=2\sqrt{3}$. Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=1+t'\\y=4+t'\\z=2-t'\end{cases}$.

Gọi N là hình chiếu của M lên trên đường thẳng AB. Khi đó $S_{AMB}=\frac{1}{2}AB.MN$

Suy ra, S_{AMB} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất, hay MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và d.

$M\in d \Rightarrow M(5-4t;2+2t;4+t)$; $N\in AB \Rightarrow N(1+t';4+t';2-t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(4t+t'-4;-2t+t'+2;-t-t'-2)$.

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và d nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{AB}}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t+t'=0\\ -21t-3t'+18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\ t'=-1\end{cases}\Rightarrow MN=\sqrt{6}.$$

$\Rightarrow \min S_{AMB}=\frac{1}{2}.2\sqrt{3}.\sqrt{6}=3\sqrt{2}\,(dvdt)$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$; $M\in d\Rightarrow M(5-4t;2+2t;4+t)$. $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(4-4t;-2+2t;2+t)$.

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|(-6t;12-6t;12-12t)\right|=3\sqrt{t^2+(2-t)^2+(2-2t)^2}$$

$$=3\sqrt{6t^2-12t+8}=3\sqrt{6(t-1)^2+2}\ge 3\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $M(1;4;5)$. Vậy $\min S_{AMB}=3\sqrt{2}\,(dvdt)$.

Câu 33. Chọn D

Có $\overrightarrow{AD}=\frac{DO}{BO}.\overrightarrow{AB}+\frac{DB}{BO}.\overrightarrow{AO}=\frac{AO}{AO+AB}.\overrightarrow{AB}+\frac{AB}{AB+AO}.\overrightarrow{AO}$

(trong đó D là chân đường phân giác trong hạ từ A xuống OB)

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{3}{8}.\left(\frac{5}{3};\frac{-2}{3};\frac{14}{3}\right)+\frac{5}{8}.(-1;-2;2)=\left(0;-\frac{12}{8};\frac{24}{8}\right)$

Chọn $\vec{u}=(0;-1;2)$ là vecto chỉ phương của đường thẳng AD

$\Rightarrow$phương trình đường thẳng AD là: $\begin{cases}x=1\\ y=2-t\\ z=-2+2t\end{cases}$.

Tương tự: $\overrightarrow{OT}=\frac{OB}{OA+OB}.\overrightarrow{OA}+\frac{OA}{OA+OB}.\overrightarrow{OB}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OT}=\frac{4}{7}.(1;2;-2)+\frac{3}{7}.\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)=\left(\frac{12}{7};\frac{12}{7};0\right)$.

(trong đó T là chân đường phân giác trong hạ từ O xuống cạnh AB).

Chọn $\vec{v}=(1;1;0)$ là vecto chỉ phương của đường thẳng OT.

$\Rightarrow$phương trình đường thẳng OT là: $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$.

I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $OAB\Rightarrow I$ là giao điểm của AD và OT.

Xét hệ phương trình giao điểm của AD và OT: $\begin{cases}1=s\\ 2-t=s\\ -2+2t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=1\\ t=1\end{cases}\Rightarrow I(1;1;0)$.

Vậy $a-b+c=1-1+0=0$.

Cách 2

Ta có $I(a;b;c)$; $OA=3$; $OB=4$; $AB=5$.

Sử dụng kết quả: $BO.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IO}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4.(1-x)+3.\left(\frac{8}{3}-x\right)+5.(-x)=0\\4.(2-y)+3.\left(\frac{4}{3}-y\right)+5.(-y)=0\\4.(-2-z)+3.\left(\frac{8}{3}-z\right)+5.(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow I(1;1;0).$$

Vậy $a-b+c=1-1+0=0$.

Câu 34. **Chọn C**

Vì $d(B;(P))=2d(A;(P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên

$$\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\begin{cases}a-5=-2(a-1)\\b+4=-2(b-2)\\c+1=-2(c-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{3}\\b=0\\c=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=4.$$

Câu 35. **Chọn B**

Mặt cầu (S_1): $x^2+y^2+z^2=9$ có tâm $O(0;\ 0;\ 0)$, bán kính $R_1=3$.

$M\in d\Leftrightarrow M(1+a;\ 1+2a;\ 2-3a)$.

Do MA, MB, MC là những tiếp tuyến tại A, B, C với mặt cầu (S_1).

Suy ra $MA^2=MB^2=MC^2=OM^2-9$.

Khi đó A, B, $C\in(S_2)$ có tâm là M, bán kính $R_2=\sqrt{OM^2-9}$.

Ta có phương trình (S_2): $(x-(a+1))^2+(y-(2a+1))^2+(z-(2-3a))^2=OM^2-9$.

$\Leftrightarrow(S_2)$: $x^2+y^2+z^2-2(a+1)x-2(2a+1)y-2(2-3a)z+9=0$.

Mặt khác theo giả thiết A, B, C cùng thuộc mặt cầu (S_1).

Suy ra tọa độ A, B, C thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-9=0\\x^2+y^2+z^2-2(a+1)x-2(2a+1)y-2(2-3a)z+9=0\end{cases}$.

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2(a+1)x+2(2a+1)y+2(2-3a)z-18=0$.

$D\in(ABC)\Leftrightarrow 2(a+1)+2(2a+1)+4(2-3a)-18=0\Leftrightarrow a=-1$.

Với $a=-1$, ta có $M(0;-1;5)$. Khi đó $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2=26$.

Câu 32. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ đường thẳng $d:\begin{cases}x=5-4t\\y=2+2t\\z=4+t\end{cases}$ và điểm M thuộc d. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMB.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;\,1;\,2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

DẠNG 4. GÓC – KHOẢNG CÁCH LIÊN QUAN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 135^0.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 135^0.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):3x+4y+5z+8=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) có số đo là:

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Câu 4. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$ có phương trình là:

A. $z+1=0$. **B.** $y+z=0$. **C.** $x+z=0$. **D.** $x-y=0$.

Câu 5. Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;-1;4)$ và song song với giá của hai vécto $\vec{u}=(3;2;1),\vec{v}=(-3;0;1)$ là?

A. $x-2y+3z-14=0$. **B.** $x-y-z+3=0$.

C. $x-3y+3z-15=0$. **D.** $x-3y+3z-9=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha):-x+2y-3z=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α). Khi đó, góc φ bằng

A. 0^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$. Khi đó, giá trị $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-y+z+1=0$ bằng:

A. $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** 0.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$ bằng

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** 3.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+4t\\y=-1-2t\\z=2+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{87}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{174}}{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{174}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{87}}{3}$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+4=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Khoảng cách giữa Δ và (P) bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;0)$, $B(3;0;1)$ và song song với $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Tính khoảng cách giữa Δ và mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{1}$ và $d_2:\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-5}{m}$ tạo với nhau góc $60°$, giá trị của tham số m bằng

A. $m=-1$. **B.** $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=1$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-z.\sin\alpha+\cos\alpha=0;(Q):y-z.\cos\alpha-\sin\alpha=0;\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa (d) và trục Oz là:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{3}$. **C.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-3}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d_1:\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$ và $d_2:\frac{x}{-6}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$. Khoảng cách giữa chúng bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng nhỏ nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(3;4;-4)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(1;0;2)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$. Biết điểm $A(a;b;c)$ $(c<0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d và cách (P) một khoảng bằng 1. Tính tổng $S=a+b+c$

A. $S=2$. **B.** $S=-\frac{2}{5}$. **C.** $S=4$. **D.** $S=\frac{12}{5}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{533}{\sqrt{2765}}$. **B.** $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. **C** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;2;0)$ và $M(-1;3;4)$. Gọi d là đường thẳng qua B vuông góc với AB đồng thời cách M một khoảng nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d có dạng $\vec{u}(2;a;b)$. Tính tổng $a+b$.

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn B**

Đường $\Delta_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{2}$ có VTCP $\vec{u_1}=(-2;1;2)$

Đường $\Delta_2:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-4}$ có VTCP $\vec{u_2}=(1;1;-4)$

$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u_1},\vec{u_2})\right|=\frac{|\vec{u_1}.\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\Delta_1,\Delta_2)=45^o$.

Câu 2. **Chọn B**

Véc tơ chỉ phương của Δ_1 là $\vec{u_1}=(-2;1;2)$

Véc tơ chỉ phương của Δ_2 là $\vec{u_2}=(1;1;-4)$

$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u_1},\vec{u_2})\right|=\frac{|\vec{u_1}.\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|}=\frac{|(-2).1+1.1+2.(-4)|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{9}{3.3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là 45^0.

Câu 3. **Chọn D**

Δ có VTCP $\vec{u}=(2;1;1)$. (α) có VTPT $\vec{n}=(3;4;5)$.

Ta có: $\sin(\Delta,\alpha)=\left|\cos(\vec{n};\vec{u})\right|=\frac{|3.2+4.1+5.1|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{2^2+1^2+1^1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(\Delta;\alpha)=60°$.

Câu 4. **Chọn B**

Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$.

Khi đó : $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{i},\overrightarrow{OA}\right]=(0;1;1)$, với $\vec{i}(1;0;0)$, $\overrightarrow{OA}(1;1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α): $y+z=0$.

Câu 5. **Chọn C**

Phương trình mặt phẳng (P), đi qua $A(0;-1;4)$ có *VTPT* $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(2;-6;6)=2(1;-3;3)$

$(P):x-3y+3z-15=0.$

Câu 6. **Chọn A**

d có VTCP là $\vec{u}=(1;2;-1)$ và (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;-1;2)$.

$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{|1.1-2.1-1.2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^0.$

Câu 7. Chọn C

d có VTCP là $\vec{u}=(1;-2;3)$ và (α) có VTPT là $\vec{n}=(-1;2;-3)$.

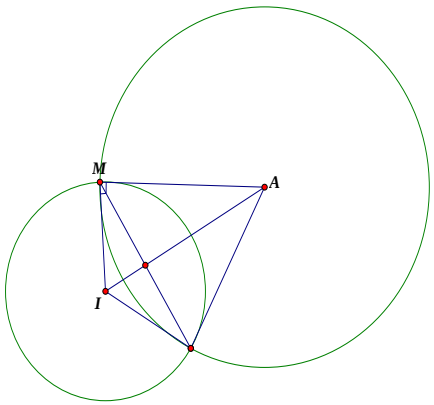
Vì $\vec{u}=-\vec{n}$ nên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):-x+2y-3z=0.$

Câu 8. Chọn C

d có VTCP là $\vec{u}=(1;2;-1)$ và (P) có VTPT là $\vec{n}=(2;1;1)$.

Vì α là góc không tù nên từ $\sin\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{|1.2+2.1-1.1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 9. Chọn B



(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=1$.

Do $IA=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}>R$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

ΔAMI vuông tại M: $AM=\sqrt{AI^2-IM^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$.

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S') có tâm A bán kính $\sqrt{2}$.

Ta có phương trình $(S'):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$. Ta có $M\in(S)\cap(S')$.

Tọa độ của M thỏa hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2\end{cases}(I).$

Ta có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+10=0\end{cases}\Rightarrow 2x+2y+2z-8=0\Leftrightarrow x+y+z-4=0$

Suy ra $M\in(P):x+y+z-4=0$.

Câu 10. Chọn B

Đường thẳng d có VTCP là : $\vec{u}(2;3;1)$ và đi qua điểm $M(1;2;-3)$

Mặt phẳng (P) có VTPT là : $\vec{n}(1;-1;1)$. Ta có : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d//(P)$

Câu 11. Chọn A

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;2;3)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;2)$.

Ta có: $\vec{u}.\vec{n}=(-2)-4+6=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n} \Rightarrow d$ song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P).

Lấy $A(-1;2;-3)\in(d)$, ta thấy $A\notin(P)$ nên $d\,||\,(P)$. Khi đó:

$$d\left[d,(P)\right]=d\left[A,(P)\right]=\frac{\left|-1-2.2+2.(-3)-5\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{16}{3}.$$

Câu 12. Chọn B

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1;-1;2)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;2)$.

Do $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và $M\notin d_2$ nên $d_1//d_2$ từ đó $d(d_1;d_2)=d(N;d_1)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;1;2)$, $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]=(-3;-4;2)$ suy ra $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+2^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Vậy $d(d_1;d_2)=\dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Câu 13. Chọn B

Mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;2)$, đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;1)$. Ta thấy $\vec{n}.\vec{u}=2-4+2=0$ nên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ song song hoặc đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P).

Do $M(1;3;2)\in\Delta$ mà $M\notin(P)$ nên đường thẳng Δ song song (P).

Vậy $d(\Delta,(P))=d(M,(P))=\dfrac{\left|1-6+4+4\right|}{\sqrt{1+4+4}}=1$.

Câu 14. Chọn A

Đường thẳng Δ qua $M(1;-2;1)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;2;1)$; mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-2;2)$

Ta có $\vec{n}.\vec{u}=0$ và $M\notin(P)$ nên đường thẳng $\Delta//(P)$

Suy ra $d(\Delta,(P))=d(M,(P))=\dfrac{\left|1-2(-2)+2.1+1\right|}{\sqrt{9}}=\dfrac{8}{3}$

Câu 15. Chọn D

Đường thẳng d qua $M(1;0;0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Ta có: $\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=1.1+1.1-2.1=0\\ M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d//(P).$

$d\left(d,(P)\right)=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|1+0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}.$

Câu 16. Chọn D

Đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ đi qua $M(1;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;0)$, $B(3;0;1)$ và song song với Δ nhận hai vectơ $\overrightarrow{BA}=(-1;1;-1)$ và $\vec{u}=(1;-1;2)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên (P) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA},\vec{u}\right]=(1;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó, mặt phẳng (P) có phương trình: $(P):x+y-3=0$

Khoảng cách giữa Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ $M(1;-1;0)$ tới mặt phẳng (P)

$d\left(\Delta,(P)\right)=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}.$

Câu 17. Chọn A

Ta có vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=\left(1;\sqrt{2};1\right)$ và $\overrightarrow{u_2}=\left(1;\sqrt{2};m\right)$.

Theo công thức tính góc tạo bởi hai đường thẳng thì $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$ với $\varphi=(d_1,d_2)$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{1}{2}=\dfrac{|3+m|}{2\sqrt{m^2+3}}\Leftrightarrow\sqrt{m^2+3}=|3+m|\Leftrightarrow m^2+3=m^2+6m+9\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 18. Chọn B

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;0;-\sin\alpha)$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(0;1;-\cos\alpha)$

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên vectơ chỉ phương của (d) là: $\overrightarrow{u_{(d)}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(\sin\alpha;\cos\alpha;1)$; vectơ chỉ phương của (Oz) là $\overrightarrow{u_{(Oz)}}=(0;0;1)$

$\Rightarrow\cos(d,Oz)=\dfrac{|0.\sin\alpha+0.\cos\alpha+1.1|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1^2}.\sqrt{0+0+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(d,Oz)=45°$

Vậy góc giữa (d) và trục (Oz) là: $45°$.

Câu 19. Chọn D

Mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;-1)$.

Đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}=(1;-2;2)$.

Giả sử đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Do $0°\le(d,\Delta)\le90°$ mà theo giả thiết d tạo Δ góc lớn nhất $\Rightarrow(d,\Delta)=90°\Rightarrow\vec{u}_d\perp\vec{u}_{\Delta}$.

Lại có d // (P) nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)}$. Do đó chọn $\vec{u}_d = \left[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(P)}\right] = (4;\ 5;\ 3)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$.

Câu 20. Chọn D

Cách 1: Đường thẳng d_1 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-4;1;1)$ và đi qua điểm $A(3;-2;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-6;1;2)$ và đi qua điểm $B(0;1;2)$.

Gọi mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 là (P).

Ta có: $\overrightarrow{u_P} = \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (1;2;2)$.

Vì (P) chứa d_1 nên $A \in (P)$, ta suy ra phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(x-3)+2(y+2)+2(z+1)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z+3=0.$$

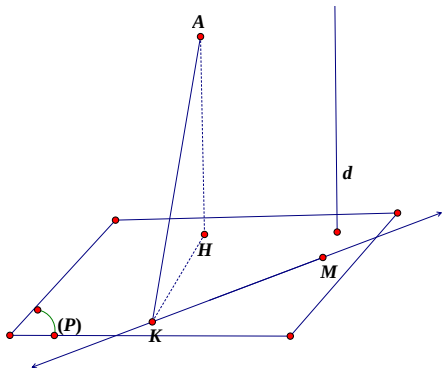
Ta suy ra: $d(d_1;d_2) = d(d_2;(P)) = d(B;(P)) = \dfrac{|0.1+2.1+2.2+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$.

Cách 2: Đường thẳng d_1 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-4;1;1)$ và đi qua điểm $A(3;-2;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-6;1;2)$ và đi qua điểm $B(0;1;2)$.

Có: $\overrightarrow{AB} = (-3;3;3)$; $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (1;2;2)$. Vậy $d(d_1;d_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right|}{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right|} = 3$.

Câu 21. Chọn D



Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa M và vuông góc với đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu kẻ từ A xuống mặt phẳng (P). Gọi K là hình chiếu vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng Δ. Suy ra $d(A;\Delta) = AK$. Vì $AH \perp (P) \Rightarrow AH \perp HK$ nên $AK \geq AH \Rightarrow d(A/\Delta) \geq AH$.

Do đó khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ đạt giá trị nhỏ nhất khi K trùng với H, khi đó đường thẳng cần tìm là MH.

Phương trình của mặt phẳng (P) là

$(P): 2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$

Phương trình đường thẳng AH là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{cases}$

Vì $H=(P)\cap AH$ nên tọa độ của H là bộ ba $(x;y;z)$ thỏa hệ $\begin{cases} x=1=2t & (1) \\ y=2+2t & (2) \\ z=-3-t & (3) \\ 2x+2y-z+9=0 & (4) \end{cases}$.

Thay $(1),(2),(3)$ vào (4) ta được

$2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow 9t+18=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;-2;-1)$

Vậy vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{HM}=(1;0;2)$.

Câu 22. Chọn A

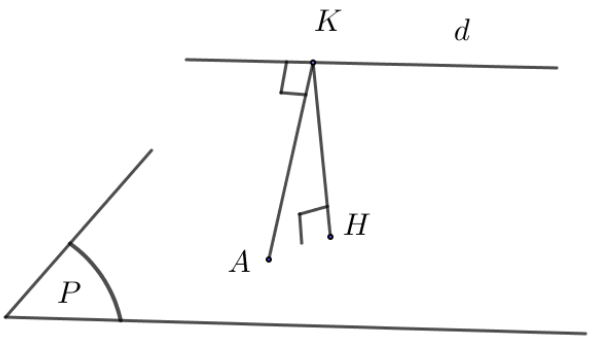
Ta có $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases}$. Gọi $A(1+t;-1+2t;-t)\in d$

$d\left(A,(P)\right)=\dfrac{|1+t-2(-1+2t)+2(-t)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|2-5t|}{3}$ mà $d\left(A,(P)\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{|2-5t|}{3}=1$

$\Leftrightarrow|2-5t|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2-5t=3 \\ 2-5t=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{5} \\ t=1 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} A\left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5}\right) \\ A(2;1;-1) \end{array}\right.$. Vì $c<0\Rightarrow A(2;1;-1)$

Vậy $S=2$.

Câu 23. Chọn A



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d và H là hình chiếu vuông góc của K lên mặt phẳng (P). Vì $K\in d$ nên ta đặt $K(1+2t;t;1+3t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(2t-9;t-2;3t)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;3)$.

Vì $AK\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(2t-9)+1.(t-2)+3.3t=0\Leftrightarrow 14t-20=0\Leftrightarrow t=\dfrac{10}{7}$.

Vậy $\overrightarrow{AK}=(-\dfrac{43}{7};-\dfrac{4}{7};\dfrac{30}{7})$. Khoảng cách giữa d và (P) là độ dài đoạn thẳng

HK mà $HK \le AK$ nên khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất bằng AK khi H trùng A, lúc đó $AK \perp (P)$ nên (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AK} = (-\frac{43}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{30}{7})$,

ta chọn véctơ pháp tuyến (P) là $\overrightarrow{n_p} = (43; 4; -30)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là

$43(x-10)+4(y-2)-30.(z-1)=0 \Leftrightarrow 43x+4y-30z-408=0$.

Vậy ta có $d(M;(P)) = \frac{533}{\sqrt{2765}}$.

Câu 24. Chọn C

Cách 1.

$\overrightarrow{AB} = (0;0;-3)$; $\overrightarrow{u_d} = (2;a;b)$.

$d \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (2;a;0)$

$\overrightarrow{BM} = (-2;1;4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{u_d}\right] = (-4a; 8; -2a-2) \Rightarrow d = d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$

$= \sqrt{\frac{16a^2+64+(2a+2)^2}{4+a^2}} = \sqrt{\frac{20a^2+8a+68}{a^2+4}} = 2.\sqrt{\frac{5a^2+2a+17}{a^2+4}} = 2\sqrt{f(a)}$

Xét $f(a) = \frac{5a^2+2a+17}{a^2+4}$ có $f'(a) = \frac{-2a^2+6a+8}{(a^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=4 \end{array}\right.$

Vì hàm $f(a)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(a)$ có GTNN $= \{f(-1), f(4)\}$; $f(-1)=4$, $f(4)=5,25$.

Vậy $d_{\min} \Leftrightarrow f(a)$ đạt GTNN $\Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow a+b=-1 \Rightarrow C$

Cách 2.

$d \perp AB$ nên d nằm trong mặt phẳng (P) qua B và vuông góc $\overrightarrow{AB} = (0;0;-3)$

Có phương trình: $0(x-1)+0(y-2)-3(z-0)=0$ hay $(P): z=0 \Rightarrow (P)$ trùng (xOy)

Khoảng cách từ $M(-1;3;4)$ đến (P) nhỏ nhất khi và chỉ khi (d) đi qua H là hình chiếu của $M(-1;3;4)$ xuống $(xOy) \Rightarrow H(-1;3;0)$. Vậy (d) có vtcp là $\overrightarrow{BH} = (-2;1;0)$

Gt cho (d) có vtcp dạng $\vec{u}(2;a;b) // -(2;-1;0) \Rightarrow a=-1,\ b=0 \Rightarrow a+b=-1 \Rightarrow C$.

DẠNG 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z-5=0,$ mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $d\,//(\alpha)$. **B.** $d\subset(\alpha)$.

C. d cắt (α) và d không vuông góc với (α). **D.** $d\perp(\alpha)$.

Câu 2: Tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ là

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;0;-2)$. **C.** $(1;1;6)$. **D.** $(12;9;1)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=-t\end{cases}$ với mặt phẳng $(P):x-y-z-4=0$.

A. $M(1;-2;0)$. **B.** $M(4;0;0)$. **C.** $M(3;0;-1)$. **D.** $M(2;-1;-1)$.

Câu 4: Cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ nằm trong mặt phẳng $mx+ny+3z+3=0$. Tổng $m+n$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 5: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+9}{8}=\dfrac{z+2}{m^2}$ $(m\neq 0)$. Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d_1\,//\,d_2$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=2-2t'\\y=-2+t'\\z=1+3t'\end{cases}$.

Tìm tọa độ giao điểm M của d và d'.

A. $M=(0;-1;4)$. **B.** $M=(-1;0;4)$. **C.** $M=(4;0;-1)$. **D.** $M=(0;4;-1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-5=0$. Tọa độ giao điểm của d và (P) là

A. $(2;1;-1)$. **B.** $(3;-1;-2)$. **C.** $(1;3;-2)$. **D.** $(1;3;2)$.

Câu 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\quad \Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2. **C.** Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Câu 9: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P).
C. d song song với (P).
B. d vuông góc với (P).
D. d nằm trong (P).

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;-3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(3;-3;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$ và hai vectơ này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P).

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Hỏi d song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x+y+3z+4=0$. **B.** $x+2y+4z+7=0$. **C.** $3x+y+7z+5=0$. **D.** $3x+y+4z+5=0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x-y-2z+3=0$. Mặt phẳng đi qua điểm A, vuông góc với mặt phẳng (P) và song song với trục Oz có phương trình là

A. $x+y-2z+1=0$. **B.** $z-1=0$. **C.** $x-y-1=0$. **D.** $x+y-3=0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng có phương trình $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Xét mặt phẳng $(P):x+my+(m^2-1)z-7=0$, với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **D.** $m=2$.

Câu 13: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x-my-2z+19=0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) là

A. $\{2\}$. **B.** $\{1;2\}$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q):x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

A. $(2;-2;1)$. **B.** $(1;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-5)$. **D.** $(-2;2;-1)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{m}=\frac{y+2}{2m-1}=\frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng (P): x+3y-2z+1=0. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P).

A. m = 2. **B.** m = -1. **C.** m = 1. **D.** m = 0.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=1+t\\z=-1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ và hai mặt phẳng $(P):x-y+z+1=0,(Q):2x+y-z-4=0.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d//(P)$. **B.** $d//(Q)$. **C.** $(P)\cap(Q)=d$. **D.** $d\perp(P)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\ \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-1+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+3y+z-2=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (α).

B. Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α).

C. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).

D. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (α).

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1)$, $M(3;0;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M, nằm trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ điểm A đến Δ là nhỏ nhất. Gọi véc tơ $\vec{u}=(a;b;c)$ là một véc tơ chỉ phương của Δ (a,b,c là các số nguyên có ước chung lớn nhất là 1). Tính $P=a+b+c$

A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0,\ (P):2x+y-z+2=0,$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $\Delta_2:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P);(Q)$ và cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K. Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 6. **D.** $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M, cắt và vuông góc với Δ là

A. $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-4t\\z=2t\end{cases}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ và $d_2:\frac{x-m}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng d_1, d_2 có đúng một điểm chung?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2m+1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{m-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$, hai điểm $A(2;2;2)$, $B(1;2;3)$ thuộc (P). Giá trị của m để AB vuông góc với hình chiếu của d trên (P) là?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$; $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Xét các điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

B. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;9;8)$.

C. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$.

D. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$.

Câu 25: rong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1, tạo với d_2 một góc $45°$ và nhận vectơ $\vec{n}(1;b;c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 4 hoặc 0. **D.** -4 hoặc 0.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z+9=0$. Xét điểm M thuộc (α) sao cho tam giác AMB vuông tại M và độ dài đoạn thẳng MB đạt giá trị lớn nhất. Phương trình đường thẳng MB là

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2-t\\z=1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$; $d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=m\end{cases}$.

Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases}$;

$d_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1;d_2$ lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0),B(0;4;0),C(0;0;c)$ với c là số thực thay đổi khác 0. Khi c thay đổi thì trực tâm H của tam giác ABC luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{12}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d có phương trình là

A. $(P):x-y+2z=0$. **B.** $(P):x-2y-2=0$.

C. $(P):x-y-2z=0$. **D.** $(P):x+y+2z=0$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=9$. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x-y+2z-5=0$. **B.** $x-y+2z-7=0$. **C.** $2x-y+z-7=0$. **D.** $x+y+2z-5=0$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Ta có $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+t\end{cases},t\in\mathbb{R}.$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+2t(1)\\y=2+4t(2)\\z=3+t(3)\\x-y+2z-5=0(*)\end{cases}$.

Thay,, vào ta được $1+2t-(2+4t)+2(3+t)-5=0$. Phương trình này có vô số nghiệm. Do đó, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α).

Câu 2: **Chọn B**

Gọi $M\left(4t+12;3t+9;t+1\right)\in d$.

Ta có: $M\in(P)\Rightarrow 3(4t+12)+5(3t+9)-(t+1)-2=0\Rightarrow t=-3\Rightarrow M\left(0;0;-2\right)$.

Câu 3: **Chọn D**

Gọi $M\left(t+1;-2+t;-t\right)\in d$.

Ta có: $M\in(P)\Rightarrow(t+1)-(-2+t)-(-t)-4=0\Rightarrow t=1\Rightarrow M\left(2;-1;-1\right)$.

Câu 4: **Chọn D**

Lấy 2 điểm $A(1;-1;2)$ và $B(3;0;4)$ thuộc đường thẳng Δ.

Đặt mặt phẳng $(P):mx+ny+3z+3=0$.

Vì $\Delta\subset(P)$ nên A, B thuộc (P). Thay tọa độ A, B vào phương trình mặt phẳng (P) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}m-n+9=0\\3m+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=4\\m=-5\end{cases}$. Vậy $m+n=-1$.

Câu 5: **Chọn B**

Đường thẳng d_1 qua $A(1;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;2;1)$.

Đường thẳng d_2 qua $B(-3;-9;-2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=\left(4;8;m^2\right)$.

Đường thẳng $d_1//d_2$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau.

Ta thấy điểm $B(-3;-9;-2)$ nằm trên d_2 và $\frac{-3-1}{1}=\frac{-9+1}{2}=\frac{-2-2}{1}$ nên B cũng nằm trên đường thẳng d_1

Do đó hai đường thẳng này luôn có điểm chung nên không thể song song.

Câu 6: **Chọn A**

Tọa độ giao điểm M của d và d' ứng với t và t' là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}1+t=2-2t'\\2+3t=-2+t'\\3-t=1+3t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+2t'=1\\3t-t'=-4\\t+3t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=1\end{cases}$. Vậy $M=(0;-1;4)$.

Câu 7: **Chọn D**

Giả sử $d\cap(P)=M\Rightarrow M(2-t;1+2t;2t)$.

Vì $M\in(P)\Rightarrow 2-t+2(1+2t)-2t-5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;3;2)$.

Câu 8: **Chọn C**

Vì $\frac{2}{-1}\neq\frac{2}{-2}$ nên vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;2;3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;-2;1)$ của Δ_2. Tức là Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2.

Lấy $M(1;-1;0)\in\Delta_1$, $N(3;3;-2)\in\Delta_2$. Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;4;-2)$.

Khi đó: $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$. Suy ra $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

Câu 9: **Chọn A**

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;-3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(3;-3;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$ và hai vectơ này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P).

Câu 10: **Chọn C**

Ta có: d có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2;1;-1)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$.

$d\,\|\,(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0\\A\notin(P)\end{cases}\quad(*)$

Kiểm tra điều kiện $(*)$ ta thấy mp $(P):3x+y+7z+5=0$ thỏa mãn.

Câu 11: **Chọn D**

Giả sử (α) là mặt phẳng cần tìm và (α) có 1 VTPT là $\vec{n}$.

Mặt phẳng $(P):x-y-2z+3=0$ có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;-2)$.

Trục Oz có 1 VTCP $\vec{k}=(0;0;1)$. Ta có: $(\alpha)\perp(P)$ nên $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}$.

$(\alpha)//Oz$ nên $\vec{n}\perp\vec{k}$.

Do đó, ta có thể chọn VTPT của mặt phẳng (α): $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\vec{k}\right]=(-1;-1;0)$.

Vậy mặt phẳng (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT $\vec{n}$ nên phương trình mặt phẳng (α) là:

$-(x-2)-(y-1)=0\Leftrightarrow x+y-3=0$.

Câu 12: **Chọn C**

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}=(1;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;m;m^2-1)$.

$$d//(P)\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 1+m-m^2+1=0\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=2\end{array}\right.$$

Câu 13: Chọn A

Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;3;-1)$.

Vectơ pháp tuyến mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(m^2;-m;-2)$.

Gọi $M(1;2;9)\in d$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) khi:

$$\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ M\notin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2=0\\ m^2-2m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2\end{array}\right.\\ m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

Câu 14: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$x-2y+z+D=0$, $D\neq -5$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$$d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}\Leftrightarrow d(I;(P))=\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{|1-2.0-2+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|D-1|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} D-1=6\\ D-1=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} D=7\\ D=-5\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta được $D=7$. Do đó phương trình mặt phẳng (P): $x-2y+z+7=0$.

Nhận thấy điểm có tọa độ $(-2;2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 15: Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương $\overrightarrow{u_d}(m;2m-1;2)$ cùng phương $\overrightarrow{n_P}(1;3;-2)$ hay

$$\frac{m}{1}=\frac{2m-1}{3}=\frac{2}{-2}=-1\Rightarrow m=-1$$

Câu 16: Chọn C

Ta có đường thẳng d đi qua $M(1;1;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;1)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;1;-1)$.

Nhận xét: $\vec{u}.\vec{n}_{(P)}=0-1+1=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{n}_{(P)}$. Hơn nữa $M\in(P)$ nên $d\subset(P)$. Tương tự $d\subset(Q)$.

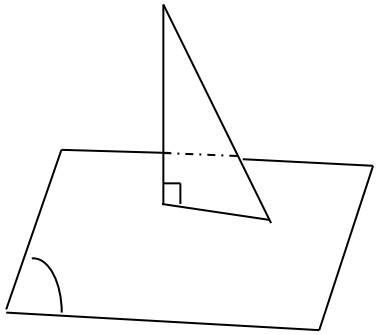
Vậy $d=(P)\cap(Q)$.

Câu 17: Chọn B

Thay $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ vào phương trình $x+3y+z-2=0$ ta được:

$t+3(1-t)-1+2t-2=0 \Leftrightarrow 0t+0=0 \Rightarrow$ đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α).

Câu 18: Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Khi đó AH là khoảng cách từ A đến (P). Suy ra đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng nằm trong (P) đi qua M và H

Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases}$ (t là tham số)

Ta có $H=(P)\cap d$ thay phương trình tham số d vào phương trình mặt phẳng ta được $3+t+2+t+1+t-3=0 \Leftrightarrow t=-1$

Vậy $H(2;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (P)

Đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MH}$ làm véc tơ chỉ phương. $\overrightarrow{MH}=(-1;1;0) \Rightarrow a+b+c=0$

Câu 19: Chọn A

Tính $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-1;-1;-3)$

Gọi $H(2t;1+t;-1+2t); K(m;2-m;1+2m)$ nên $\overrightarrow{HK}=(m-2;1-m-t;2+2m-2t)$

+Vì song song với 2 mặt phẳng $(P);(Q)$ nên $\overrightarrow{HK}=k.\vec{u}$ suy ra

$\frac{m-2t}{1}=\frac{1-m-t}{1}=\frac{2+2m-2t}{3}$ tính ra được $m=\frac{2}{7}; t=\frac{-3}{7}$. Suy ra $HK=\frac{8\sqrt{11}}{7}$.

Câu 20: Chọn A

Vecto chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-1)$.

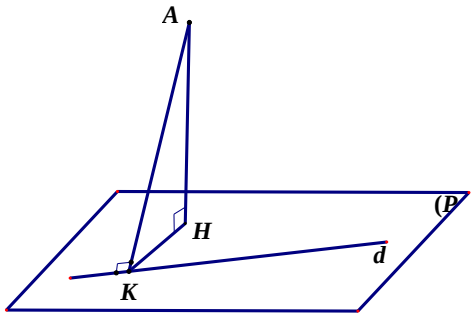
Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của M lên Δ, suy ra tọa độ của H thỏa

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \\ H\in\Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2).2+(y-1).1+z.(-1)=0 \\ x-1=2(y+1) \\ y+1=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-2y=3 \\ y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{MH}=\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$, suy ra vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{n_d}=(1;-4;-2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n_d}=(1;-4;-2)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$ là $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$.

Câu 21: Chọn A



Gọi K là hình chiếu của A lên đường thẳng d. H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Khi đó $d(A,(P))=AH\le AK$ không đổi.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất khi $H\equiv K$. Khi đó $AK\perp(P)$.

Giả sử $K(1+2t;t;2+2t)\in d$. Suy ra $\overrightarrow{AK}=(-1+2t;-5+t;-1+2t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow 2(-1+2t)-5+t+2(-1+2t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow K(3;1;4)$ và $\overrightarrow{AK}=(1;-4;1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình:

$(x-1)-4(y-0)+(z-2)\Leftrightarrow x-4y+z-3=0\Rightarrow d(O;(P))=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 22: Chọn C

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;3;-1)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(m;-1;3)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(2;-2;1)$.

Ta có $\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(1;1;0)\\\overrightarrow{M_1M_2}=(m-1;-4;4)\end{cases}$; d_1 cắt d_2 khi $\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(1;1;0)\neq\vec{0}\\\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=m-5=0\end{cases}\Leftrightarrow m=5$.

Câu 23: Chọn D

Ta có $\overrightarrow{u_d}=(2m+1;2;m-2)$, $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1)$.

Giả sử d vuông góc với (P), khi đó $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương

$\Rightarrow\frac{2m+1}{1}=\frac{2}{1}=\frac{m-2}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1=2\\m-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\m=4\end{cases}$.

Vậy d không vuông góc với (P).

Khi đó với $AB\subset(P)$, AB vuông góc với hình chiếu của d lên (P) khi và chỉ khi AB vuông góc với $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow(-1)\cdot(2m+1)+0\cdot 2+1\cdot(m-2)=0\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 24: Chọn A

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=3a\\y=1-a\\z=-1+a\end{cases}$ (a là tham số, $a\in\mathbb{R}$)

Phương trình tham số của đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=2+b\\y=1-2b\\z=-3+b\end{cases}$ (b là tham số, $b\in\mathbb{R}$)

Ta có: $A\in d_1\Rightarrow A(3a;1-a;-1+a)$; $B\in d_2\Rightarrow B(2+b;1-2b;-3+b)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b-3a+2;a-2b;b-a-2)$.

Theo GT: $AB//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\A,B\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(b-3a+2)-(a-2b)+2(b-a-2)=0\\a\neq 0\\b\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{3a}{2}\\a\neq 0\\b\neq 0\end{cases}$.

Suy ra $B\left(2+\dfrac{3a}{2};1-3a;-3+\dfrac{3a}{2}\right)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có:

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{3a+2+\dfrac{3a}{2}}{2}\\y_I=\dfrac{1-a+1-3a}{2}\\z_I=\dfrac{-1+a-3+\dfrac{3a}{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=1+\dfrac{9}{4}a\\y_I=1-2a\\z_I=-2+\dfrac{5}{4}a\end{cases}$$ hay $I=\left(1+\dfrac{9}{4}a;1-2a;-2+\dfrac{5}{4}a\right)$.

Suy ra tập hợp điểm I là đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+\dfrac{9}{4}a\\y=1-2a\\z=-2+\dfrac{5}{4}a\end{cases}$

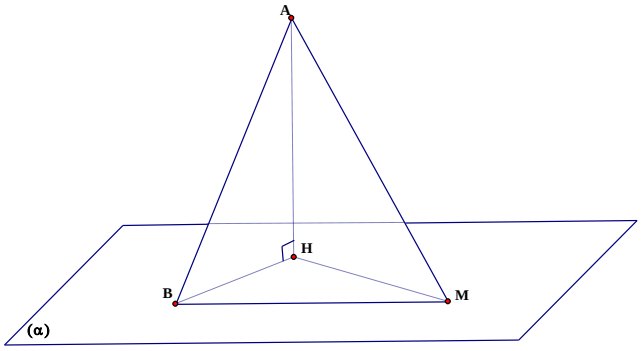
Đường thẳng (Δ) có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

Câu 25: Chọn A

$\overrightarrow{u_1}=(2;-2;-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1;0;-1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{u_1}=0\\\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\sin\left(d_2;(P)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2.1+(-2)b+(-1)c=0\\\dfrac{|1.1+0.b+(-1)c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2-2b\\(c-1)^2=1+b^2+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}.$$

Câu 26: Chọn C



Ta có $B\in(\alpha)$ và gọi H là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α). Khi đó, tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+2y-z+9=0\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}\end{cases}\Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Xét hai tam giác vuông $\Delta AHB;\Delta AMB$ có $MB=\sqrt{AB^2-AM^2}\le\sqrt{AB^2-AH^2}=BH=\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv H\Rightarrow\overrightarrow{MB}=(1;0;2)$.

Vậy phương trình đường thẳng MB là $\begin{cases}x=-2+t\\ y=-2\\ z=1+2t\end{cases}$.

Câu 27: Chọn C

d_1 đi qua điểm $M(1;0;0)$, có VTCP $\vec{u}_1=(2;1;3)$.

d_2 đi qua điểm $N(1;2;m)$, có VTCP $\vec{u}_2=(1;1;0)$. $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;3;1)$; $\overrightarrow{MN}=(0;2;m)$.

d_1 và d_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\ne0\Leftrightarrow m\ne-6$.

Mặt khác $d(d_1,d_2)=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\dfrac{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\right|}{\left\|[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\right\|}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\dfrac{|m+6|}{\sqrt{19}}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-11\end{array}\right.$.

Khi đó tổng các phần tử của m là -12.

Câu 28: Chọn C

$B\in d_1\Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. PT tham số của $d_2:\begin{cases}x=5+2s\\ y=11+4s\\ z=5+2s\end{cases}$.

$C\in d_2\Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(1-t;-1-t;2t+1);\overrightarrow{AC}=(2s;4s+14;2s)$.

Do A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t-1=2ks\\ -t-1=4ks+14k\\ 2t+1=2ks\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\ s=-3\\ k=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Do đó: $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn B

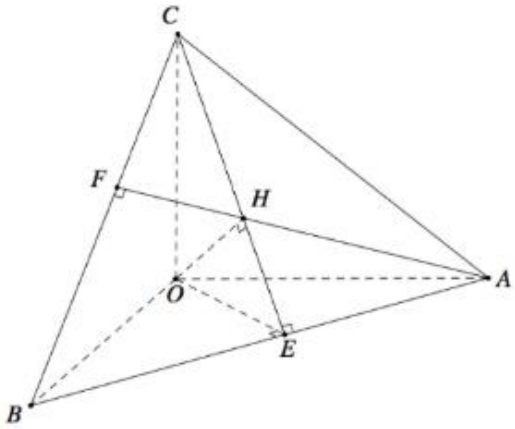
Ta có phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ và d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;2)$. Gọi B là giao điểm của Δ và d khi đó tọa độ của $B(1+t;t;-1+2t)$.

$\overrightarrow{AB}=(t;t;-3+2t)$

Vì $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ hay $t+t+2(-3+2t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;1;1)$.

Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua $B(2;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ nên có phương trình đường thẳng Δ là $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 30: Chọn D



Kẻ $CE\perp AB,\ AF\perp BC\Rightarrow H=CE\cap AF$ và $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp HE$; $AB\perp(OCE)\Rightarrow AB\perp OE$.

Vì điểm O và điểm E cố định nên H di động trên đường tròn đường kính OE nằm trong mặt phẳng $(OCE)=(OE,Oz)$.

Tam giác vuông OAB vuông tại O và có $OE\perp AB$ nên ta có:

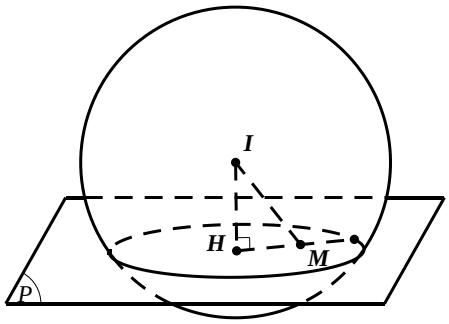
$OE=\dfrac{OA.OB}{AB}=\dfrac{3.4}{5}=\dfrac{12}{5}\Rightarrow R=\dfrac{OE}{2}=\dfrac{6}{5}$.

Câu 31: Chọn A

(P) vuông góc với d nên VTCP của d là một VTPT của (P): $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=(1;-1;2)$

Phương trình mặt phẳng $(P):x-2-y+2(z+1)=0\Leftrightarrow(P):x-y+2z=0$.

Câu 32: Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$, bán kính $R=3$.

Giả sử đường tròn giao tuyến có tâm H, bán kính r. Khi đó H là hình chiếu của I trên (P)

Ta có $\overrightarrow{IM}=(1;-1;2)\Rightarrow IM=\sqrt{6}$.

Do $r^2=R^2-IH^2=R^2-\left(IM^2-MH^2\right)=R^2-IM^2+MH^2=3+MH^2\geq 3$. Suy ra r nhỏ nhất bằng 3 khi và chỉ khi MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow M\equiv H$.

Khi đó (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với IM.

Phương trình mặt phẳng (P) là $1.(x-2)-1.(y+1)+2.(z-2)=0$ hay $x-y+2z-7=0$

DẠNG 6. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG, MẶT CẦU

Câu 1: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P):3x+3y+3z-10=0$.
B. $(P):x+y+z-1=0$.
C. $(P):x+y+z-10=0$.
D. $(P):x+y+z+10=0$.

Câu 2: Tính khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$.

A. $\dfrac{7}{3}$.
B. $\dfrac{8}{3}$.
C. $\dfrac{5}{3}$.
D. $\dfrac{1}{3}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $((S):x^2+y^2+(z+2)^2=17$ cắt trục Oz tại hai điểm A,B. Độ dài đoạn AB bằng

A. $4\sqrt{13}$.
B. $2\sqrt{17}$.
C. $2\sqrt{3}$.
D. $\sqrt{17}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
B. $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
D. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$.

Câu 5: Bán kính mặt cầu tâm $I(1;3;5)$ và tiếp xúc đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1-t\\z=2-t\end{cases}$ là

A. $\sqrt{14}$.
B. 14.
C. $\sqrt{7}$.
D. 7.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;1)$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-3=0$. Phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với Δ và song song với mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases}x=1+3t\\y=3-6t\\z=1-5t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=1+3t\\y=3+6t\\z=1+5t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=1-3t\\y=3-6t\\z=1+5t\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=1-3t\\y=3+6t\\z=1+5t\end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Tính bán kính của mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d.

A. $5\sqrt{2}$.
B. $4\sqrt{5}$.
C. $2\sqrt{5}$.
D. $10\sqrt{2}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -11. **D.** 1.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+3z-7=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+2}{-4}; d_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc với (P) và cắt cả hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình là.

A. $\frac{x+7}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{3}$. **B.** $\frac{x+5}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. **D.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng d.

A. $(T):x+y+2z+1=0$. **B.** $(P):x-2y+z+1=0$.

C. $(Q):x-2y-z+1=0$. **D.** $(R):x+y+z+1=0$.

Câu 11: Biết rằng hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z+1=0$ và $(Q):(m+1)x+(m+3)y+6z+1=0$ song song với nhau. Giá trị của m bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa A và d.

A. $x+y+z=0$. **B.** $2x+3y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-1=0$. **D.** $x+2y+z+1=0$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):2x+y+2z-1=0$, $A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $\frac{14\sqrt{5}}{3}$. **B.** $r=\frac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$. **C.** $r=\frac{2\sqrt{244651}}{9}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2024}}{3}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta): 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-4$. **B.** $m=-1$ **C.** $m=-2$. **D.** $m=-3$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):(1+m)x+(1-m)y-(1+3m)z-(2-8m)=0$ và điểm $A(-4;-2;7)$. Khi m thay đổi, biết tập hợp hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) là một đường tròn, đường kính của đường tròn đó bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $7\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, biết (P) là mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $M\left(\frac{1}{2};1;0\right)$. **B.** $N\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $P\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$. **D.** $Q\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$. **C.** $x+y+2z+9=0$. **D.** $x-y+2z+9=0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$, $(Q):x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại B,C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $x-2y+2z+5=0$. **B.** $x-y+2z+3=0$. **C.** $2x-2y+4z+3=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P), biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz. Tính $\frac{a}{c}$.

A. $\frac{a}{c}=2$. **B.** $\frac{a}{c}=-2$. **C.** $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{7}$.
B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{7}$.
C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.
D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$; $(d_2): \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$. Biết mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ nhận đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) làm đường kính. Giá trị $a+2b+c$ bằng

A. 6.
B. 8.
C. 7.
D. 5.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 25: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$.

A. $R=2$.
B. $R=4$.
C. $R=1$.
D. $R=3$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với cả hai đường thẳng đã cho.

A. $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=24$.
B. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.
C. $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$.
D. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-2=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\Delta_3: \frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-5}{1}$.
B. $\Delta_1: \frac{x+2}{-3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+4}{-1}$.
C. $\Delta_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{3}$.
D. $\Delta_4: \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với (P) có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.
C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Câu 29: Trong không gian tọa độ Oxyz ,cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$ là

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

C. $(x+2)^2+y^2+z^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z+2)^2=16$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ và hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$, $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính bằng 1 và song song với d và Δ.

A. $y+z+3=0$. **B.** $x+y+1=0$. **C.** $x+z-1=0$. **D.** $x+z+1=0$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=4$.

Câu 32: Cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz , cho điểm $M(2;1;1)$, mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M và nằm trong (α) cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $(4;-3;3)$. **B.** $(4;-3;-3)$. **C.** $(4;3;3)$. **D.** $(-4;-3;-3)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0.$ **B.** $x+y-z=0.$

C. $-3x-2y-10z+23=0.$ **D.** $2x-y+3z+4=0.$

Câu 36: Cho mặt cầu: $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+m=0$. Tìm m để cắt đường thẳng $(\Delta): \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-2}$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông.

A. $m=-1.$ **B.** $m=10.$ **C.** $m=-20.$ **D.** $m=-\frac{4}{9}.$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1+3t \end{cases}$; $d': \begin{cases} x=2+t' \\ y=-1+2t' \\ z=-2t' \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d, d' có phương trình là

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}.$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-4}.$

C. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}.$ **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{2}.$

Câu 38: Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $(d_1): \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}, (d_2): \frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{-1}$ và $(d_3): \frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{6}.$ **B.** $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}.$

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{6}.$ **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{6}.$

Câu 39: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{16}{17}\pi.$ **B.** $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi.$ **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi.$ **D.** $\frac{4}{17}\pi.$

Câu 40: Trong không gian *Oxyz*, cho tam giác đều *ABC* với $A(6;3;5)$ và đường thẳng BC có phương trình tham số $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác *ABC* và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(-1;-12;3)$. **B.** $N(3;-2;1)$. **C.** $P(0;-7;3)$. **D.** $Q(1;-2;5)$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(3;0;5)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-2y+2z-10=0$ sao cho tam giác *MAB* cân tại *M* và có diện tích bằng $11\sqrt{2}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=\frac{7}{3}$. **B.** $S=\frac{19}{3}$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-\frac{1}{3}$.

Câu 42: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A\ 2;1;3$, $B\ 6;5;5$. Gọi S là mặt cầu đường kính *AB*. Mặt phẳng P vuông góc với *AB* tại *H* sao cho khối nón đỉnh *A* và đáy là hình tròn tâm *H* có thể tích lớn nhất, biết rằng $P: 2x+by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=18$. **B.** $S=-18$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=24$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): y-4=0$. Có bao nhiêu đường thẳng d song song với ba mặt phẳng (xOy), (zOx), (P) đồng thời cách đều 3 mặt phẳng đó.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 44: Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $M(2;-3;4)$, mặt phẳng $(P): x-2y+z-12=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua *M*, nằm trong (P) và cắt (S) theo dây cung dài nhất?

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \\ z=4+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3-9t \\ z=4+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-2t \\ z=1+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+t \\ z=5+t \end{cases}$.

Câu 45: Trong không gian *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Xét hai điểm M,N thay đổi với $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$. Độ dài đoạn *MN* lớn nhất bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 46: Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua *E*, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm *A*, *B* sao cho *OAB* là tam giác đều. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+4y+5z+1=0$ và ba điểm $A(2;5;-3), B(-2;1;1), C(2;0;1)$. Tìm điểm $D(a;b;c)(b>0)$ là điểm nằm trên (P) sao cho có vô số mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm C, D và thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Q) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (Q). Tính $T=abc$.

A. 0. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

Câu 48: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-m}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn thẳng EF lớn nhất khi $m=m_0$. Hỏi m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$. Biết rằng d_1, d_2 nằm trong mặt phẳng (P), cắt Δ_2 và cách Δ_1 một khoảng bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Gọi $\vec{u_1}=(a;b;1), \vec{u_2}=(1;c;d)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2. Tính $S=a+b+c+d$.

A. $S=0$. **B.** $S=2$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Câu 53: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm tổng $T=a+b+c$ khi biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$.

A. $T=-2$. **B.** $T=\dfrac{1}{2}$. **C.** $T=8$. **D.** $T=0$.

Câu 54: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;2)$ và mặt cầu $x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Gọi S là tập hợp các đường thẳng trong không gian đi qua điểm A cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt B,C thỏa mãn $AB+AC=12$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$ và điểm $A(2;11;-5)$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của 2 mặt cầu đó bằng:

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 57: Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2\\y=t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a+b.c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2y+2z+1=0$ và hai điểm $A(2;0;0)$, $B(3;1;-1)$. Hai mặt phẳng (P) và (P') chứa đường thẳng AB, tiếp xúc với (S) tại T và T'. $H(a;b;c)$ là trung điểm đoạn TT'. Tính $a+b+2c$.

A. $a+b+2c=\dfrac{2}{3}$. **B.** $a+b+2c=-\dfrac{2}{3}$. **C.** $a+b+2c=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a+b+2c=\dfrac{1}{2}$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Tính $2a+b+c$.

A. $\frac{134}{25}$. **B.** $\frac{116}{25}$. **C.** $\frac{84}{25}$. **D.** $\frac{62}{25}$.

Câu 60: Trong không gian Oxyz , cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2+y^2+z^2=25; (S_2): x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8 . Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d ?

A. $\overrightarrow{u_1}=\left(1;1;\sqrt{3}\right)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=\left(1;1;\sqrt{6}\right)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=\left(1;1;-\sqrt{3}\right)$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz , cho hai mặt phẳng song song $(P):2x-y+2z-1=0$, $(Q):2x-y+2z+5=0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng này. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với cả (P) và (Q). Biết khi (S) thay đổi thì tâm I của nó luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Diện tích hình tròn giới hạn bởi (C) là

A. $\frac{2\pi}{3}$. **B.** $\frac{4\pi}{9}$. **C.** $\frac{16\pi}{9}$. **D.** $\frac{8\pi}{9}$.

Câu 62: Trong không gian Oxyz, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 . **B.** 3 . **C.** 9 **D.** 12 .

Câu 63: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Xét các khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C). Biết rằng khi thể tích của khối nón lớn nhất thì mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+d=0$. Tính $P=a-b-d$.

A. $P=-4$. **B.** $P=8$. **C.** $P=0$. **D.** $P=4$.

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)\ (x_0>0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được 3 tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều. Tính giá trị của biểu thức $P=x_0+y_0+z_0$.

A. $P=6$. **B.** $P=16$. **C.** $P=12$. **D.** $P=8$.

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P,Q,R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz sao cho $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}=\frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S)cố định. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và cắt (S)tại hai điểm A,B phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác AOB là

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho có duy nhất một mặt phẳng chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

A. 1. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 2.

Câu 67: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ và $(S_2):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn với tâm là $I(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

A. $\dfrac{7}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** 1.

Câu 68: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. **B.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

C. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$. **D.** $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{8}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Ta có: $d\left(M,(P)\right)\le MA$

Nên $d\left(M,(P)\right)_{max}=MA$ khi A là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P).

Suy ra $AM\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

(P) đi qua $A(1;7;2)$ và nhận $\overrightarrow{AM}=(-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$-3(x-1)-3(y-7)-3(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+z-10=0$.

Câu 2: **Chọn B**

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)\\ \overrightarrow{n_P}=(1;2;-2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=2.1+1.2+2.(-2)=0$.

Do đó đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;-3)$ và song song với mặt phẳng (P) nên ta có khoảng cách giữa d và (P) là $d(d;(P))=d(M;(P))=\dfrac{|1+2.0-2.(-3)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{8}{3}$.

Câu 3: **Chọn B**

Gọi M là giao điểm của (S) với trục Oz .Ta có $M\in Oz\Rightarrow M(0;0;t)$. Mà $M\in(S)$ nên:

$0^2+0^2+(t+2)^2=17\Leftrightarrow(t+2)^2=17\Leftrightarrow|t+2|=\sqrt{17}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2-\sqrt{17}\\ t=-2+\sqrt{17}\end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ các giao điểm là: $A\left(0;0;-2-\sqrt{17}\right)$, $B\left(0;0;-2+\sqrt{17}\right)\Rightarrow AB=2\sqrt{17}$.

Câu 4: **Chọn C**

Ta có $\vec{u}_d=(3;-5;-1)$ là véc tơ chỉ phương của d .

$\vec{n}_{(P)}=(2;0;1)$ là véc tơ pháp tuyến của (P). $\left[\overrightarrow{u_d},n_{(p)}\right]=(-5;-5;10)$.

Do Δ vuông góc với d và song song với (P) nên $\vec{u}=(1;1;-2)$ là véctơ chỉ phương của Δ .

Khi đó, phương trình của Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Câu 5: **Chọn A**

Đường thẳng d đi qua $M(0;-1;2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;-1)$.

$\overrightarrow{MI}(1;4;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]=(-1;4;-5)$.

$\Rightarrow R=d(I;d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(-1)^2+4^2+(-5)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{14}$.

Câu 6: **Chọn C**

Đường thẳng Δ có vec tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;3)$.

Mặt phẳng (P) có vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;0)$.

Gọi (d) là đường thẳng đi qua A, vuông góc với Δ và song song với mặt phẳng (P).

Gọi $\overrightarrow{u_d}$ là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng (d), ta có:

$\begin{cases}\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\\ \overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;6;-5)$.

Đường thẳng (d) qua $A(1;3;1)$ và cũng nhận $\vec{a}=(-3;-6;5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases}x=1-3t\\ y=3-6t\\ z=1+5t\end{cases}(t\in R)$.

Câu 7: **Chọn A**

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;-3)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;1;-1)$.

Bán kính của mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d là $R=d(A,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(-2;4;-6)$, $\vec{a}=(2;1;-1)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\vec{a}\right]=(2;-14;-10)$.

Vậy $R=d(A,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}=\dfrac{\sqrt{2^2+(-14)^2+(-10)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=5\sqrt{2}$.

Câu 8: **Chọn A**

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ có tâm $A(1;2;-1)$ và bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ nên I là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P).

Đường thẳng AI đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) nên AI có vectơ chỉ phương là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Phương trình đường thẳng AI có dạng: $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=-1-t\end{cases}$.

Tọa độ của I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=-1-t\\ x+y-z-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\\ x=4\\ y=5\\ z=-4\end{cases}\Rightarrow I(4;5;-4)$.

Ta có $a+b+c=4+5-4=5$.

Câu 9: Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Giả sử Δ cắt $d_1;d_2$ lần lượt tại A và B

Do $A\in d_1\Rightarrow A(-3+2a;-2-a;-2-4a)$; $B\in d_2\Rightarrow B(-1+3b;-1+2b;2+3b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(2-2a+3b;1+a+2b;4+4a+3b)$

Do $\Delta\perp(P)\Rightarrow \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_P}(1;2;3)\Rightarrow\begin{cases}2-2a+3b=k\\1+a+2b=2k\\4+4a+3b=3k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\\k=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(-5;-1;2)\\B(-7;-5;-4)\end{cases}$

Đường thẳng Δ đi qua A và nhận vecto $\overrightarrow{n_P}$ làm vecto chỉ phương có phương trình là: $\frac{x+5}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$.

Câu 10: Chọn B

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu vectơ chỉ phương của đường thẳng cùng phương với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;\ -2\ ;\ 1)$.

Mặt phẳng (T) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_T}=(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$. Do $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{2}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_T}$. Do đó d không vuông góc với (T).

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$. Do $\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}=\frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$. Do đó d vuông góc với (P).

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=(1\ ;\ -2\ ;\ -1)$. Do $\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{1}{-1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_Q}$. Do đó (d) không vuông góc với (Q).

Mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_R}=(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$. Do $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_R}$. Do đó (d) không vuông góc với (R).

Câu 11: Chọn B

Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_1}=(1;2;3)$ làm véctơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (Q) nhận $\overrightarrow{n_2}=(m+1;m+3;6)$ làm véctơ pháp tuyến.

Theo giả thiết ta có $(P)//(Q)\Leftrightarrow\frac{m+1}{1}=\frac{m+3}{2}=\frac{6}{3}\neq\frac{1}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

Câu 12: Chọn A

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;1;0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-3)$.

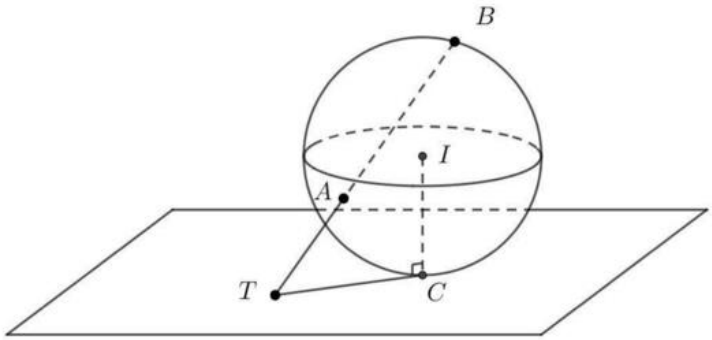
$\overrightarrow{MA}=(2;-2;0)$. Ta có: $\left[\overrightarrow{MA};\vec{u}\right]=(6;6;6)$ cùng phương với $\vec{n}=(1;1;1)$.

chứa d và đi qua A nên nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ làm một véc tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $1.(x-1)+1.(y+1)+1.(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y+z=0$.

Câu 13: Chọn A

Cách 1:



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x=3t \\ y=t \\ z=4-2t \end{cases}$.

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t;t;4-2t)$. Do $T \in (P): 2x+y+2z-1=0 \Rightarrow t=\dfrac{-7}{3}$.

Khi đó

$T\left(-7;\dfrac{-7}{3};\dfrac{26}{3}\right); \overrightarrow{TA}\left(7;\dfrac{7}{3};\dfrac{-14}{3}\right) \Rightarrow TA=\dfrac{7\sqrt{14}}{3}; \overrightarrow{TB}\left(10;\dfrac{10}{3};\dfrac{-20}{3}\right) \Rightarrow TB=\dfrac{10\sqrt{14}}{3}$.

Ta có $TC^2=TA.TB=\dfrac{980}{9} \Rightarrow TC=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

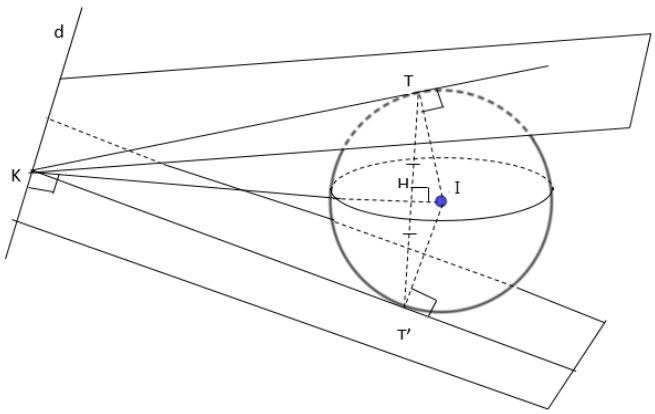
Ta có $\dfrac{TA}{TB}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{7}{10}$; $AB=\sqrt{14}$.

Giả sử AB cắt (P) tại T. Suy ra A nằm giữa B và T.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} TB-TA=\sqrt{14} \\ TA=\dfrac{7}{10}TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA=\dfrac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB=\dfrac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2=TA.TB=\dfrac{980}{9} \Rightarrow TC=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$$

Câu 14: Chọn C



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d.

$K\in d$ nên ta có thể giả sử $K(t;2+t;-t)$

$\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0.\Rightarrow K(0;2;0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2=IH.IK$.

$\Leftrightarrow IH=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(IK=\sqrt{6}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{1}{6}.(-1)\\ y-0=\dfrac{1}{6}.2\\ z+1=\dfrac{1}{6}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{6}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{-5}{6}\end{cases}$$ Vậy $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{-5}{6}\right)$

Câu 15: Chọn D

Mặt cầu (S) có: Tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{17-m}$.

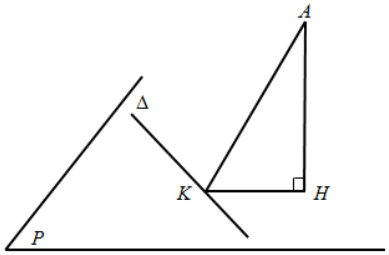
Khoảng cách $d\left(I;(\beta)\right)=\dfrac{|-2-2+6-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2$.

$(\beta)\cap(S)\Leftrightarrow d\left(I;(\beta)\right)<R\Leftrightarrow\sqrt{17-m}>2\Leftrightarrow m<13\,(*)$

Mặt khác, $(\beta)\cap(S)=C(H,r)$ có chu vi bằng 8π nên $r=4$.

hay $\sqrt{R^2-d^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{13-m}=4\Leftrightarrow m=-3$ thỏa mãn $(*)$. Vậy $m=-3$.

Câu 16: Chọn D



Gọi Δ là đường thẳng cố định nằm trong mặt phẳng (P).

Ta có $m(x-y-3z+8)+(x+y-z-2)=0$ nên phương trình Δ thỏa mãn hệ sau:

$\begin{cases} x-y-3z+8=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$. Chọn $z=t$ suy ra Δ có phương trình $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-t+5 \\ z=t \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên Δ.

$K\in\Delta\Rightarrow K(2t-3;-t+5;t)\Rightarrow \overrightarrow{AK}=(2t+1;-t+7;t-7)$.

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Rightarrow 2(2t+1)+(-1)(-t+7)+t-7=0\Rightarrow t=2\Rightarrow K(1;3;2)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P). Ta có $\Delta\perp(AHK)$ mà Δ cố định, điểm A cố định nên mặt phẳng (AHK) cố định.

Khi m thay đổi ta luôn có AHK là một góc vuông. Do AK cố định nên điểm H luôn nằm trên đường tròn đường kính $AK=5\sqrt{3}$.

Câu 17: Chọn B

d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $A(2;0;0)$.

d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=(2;-1;-1)$ và đi qua điểm $B(0;1;2)$.

Ta có: $[\vec{u},\vec{v}]=(0;1;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$, $[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{AB}=-1\neq 0\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau $\Rightarrow$ có duy nhất một mặt phẳng (P) song song và cách đều d_1,d_2.

(P) đi qua trung điểm $I\left(1;\frac{1}{2};1\right)$ của đoạn AB và nhận $[\vec{u},\vec{v}]=(0;1;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến, vậy $(P):2y-2z+1=0$, chỉ có điểm $N\in(P)$,

Câu 18: Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Đường thẳng d_1, d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;-1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(1;1;-1)$.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Do $\begin{cases} (P)//d_1 \\ (P)//d_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{n}\perp\overrightarrow{u_1} \\ \vec{n}\perp\overrightarrow{u_2} \end{cases}$. Suy ra $\vec{n}$ cùng phương với $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]$.

Có $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(2;2;4)$, nên chọn $\vec{n}=(1;1;2)$.

Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng: $x+y+2z+d=0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|1+0+2.(-2)+d|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}$

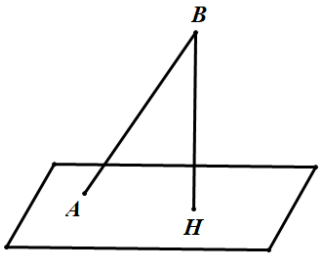
$\Leftrightarrow|d-3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} d=9 \\ d=-3 \end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn đề là (P_1): $x+y+2z-3=0$ và (P_2): $x+y+2z+9=0$.

Câu 19: Chọn C

Điểm B thuộc mặt (P) nên $B(2c-b-1;b;c)$ vì $M(1;2;3)$ là trung điểm BC nên $C(3-2c+b;4-b;6-c)$. Do C thuộc mặt (Q) nên $3c-c-7=0\Leftrightarrow c=3b-7$. Khi đó $B(5b-15;b;3b-7)$, $C(-5b+17;4-b;13-3b)$. $\overrightarrow{BC}(-10b+32;-2b+4;-6b+20)$. ABC cân tại A nên $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow 20b-60=0\Leftrightarrow b=3\Rightarrow B(0;3;2)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;3)$ và $B(0;3;2)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 20: Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)\Rightarrow AB=2\sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P).

Ta có $d(B,(P))=BH\le BA=2\sqrt{6}\Rightarrow maxd(B,(P))=2\sqrt{6}$, đạt được khi $H\equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)$ là véctơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1)-2(y-2)+4(z+1)=0\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Câu 21: Chọn A

Ta có $A(2;-1;3)\in\Delta$, $A(2;-1;3)\notin Oz$. Mà Δ đồng phẳng và không song song với Oz nên Δ cắt Oz tại một điểm. Gọi $M(0;0;z_0)$ là giao điểm của Δ và Oz.

Khi đó Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}(-2;1;z_0-3)$.

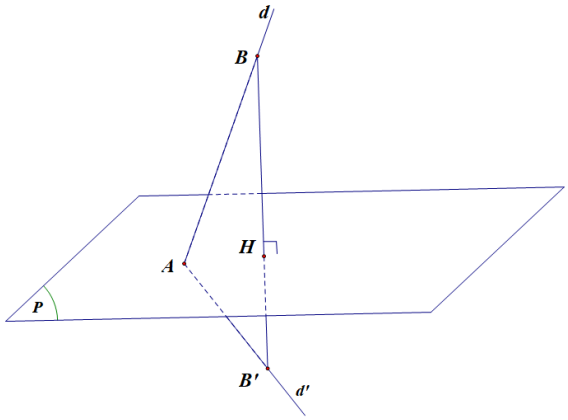
$(P):x+y-z-4=0$ suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;-1)$.

Vì $\Delta//(P)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0\Leftrightarrow(-2).1+1.1+(z_0-3).(-1)=0\Leftrightarrow z_0=2$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(-2;1;-1)$. $\vec{u}=(a;b;c)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ nên ta có:

$\dfrac{a}{-2}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{-1}\Leftrightarrow\dfrac{a}{c}=2$. Vậy $\dfrac{a}{c}=2$.

Câu 22: Chọn C



Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Giả sử A là giao điểm của d và $(P) \Rightarrow$ tọa độ của A là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;1)$.

Lấy điểm $B(0;-1;2) \in d$, Gọi H là hình chiếu của B trên (P).

Đường thẳng Δ chứa BH vuông góc với (P) có phương trình $\Delta: \begin{cases} x=t' \\ y=-1+t' \\ z=2+t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$.

Khi đó $H = \Delta \cap (P) \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x=t' \\ y=-1+t' \\ z=2+t' \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua $(P) \Rightarrow B'\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B' có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;7) \Rightarrow d'$ có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{7}$.

Câu 23: Chọn B

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2), $M \in (d_1)$; $N \in (d_2)$.

Khi đó $M(1+t;0;-5+t)$, $N(0;4-2t';5+3t')$ và $MN \perp (d_1), MN \perp (d_2)$.

Đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;0;1)$, đường thẳng

$(d_2): \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (0;-2;3)$.

$\overrightarrow{MN} = (-t-1;\ 4-2t';-t+3t'+10)$.

$MN \perp (d_1), MN \perp (d_2)$ suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t+3t' = -9 \\ -3t+13t' = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t'=-1 \end{cases}$.

Suy ra $M(4;0;-2)$, $N(0;6;2)$.

Mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ có đường kính MN suy ra tâm $I(2;3;0)$ là trung điểm của MN. Suy ra $a=2; b=3; c=0 \Rightarrow a+2b+c=8$.

Câu 24: Chọn C

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2)\Rightarrow AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

$M\in AB\Rightarrow M(1+t;2;3+t)$; $M\in(P)\Rightarrow 1+t+2+3+t=0\Leftrightarrow t=-3$.

Vậy $M(-2;2;0)\Rightarrow \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3$.

Cách 2: Do $AB\cap(P)=M\Rightarrow \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{|1+2+3|}{|-1+2+1|}=3$.

Câu 25: Chọn D

Tâm I nằm trên d nên $I(1+t;2-2t;2+t)$.

Mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $AI=d(I;(P))=R$.

$$AI=d(I;(P))\Leftrightarrow\sqrt{t^2+4t^2+(t+1)^2}=\frac{|1+t-4+4t+4+2t+1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6t^2+2t+1}=\frac{|7t+2|}{3}\Leftrightarrow 9(6t^2+2t+1)=(7t+2)^2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;0;3).$$

Vậy bán kính mặt cầu $R=AI=3$.

Câu 26: Chọn C

Mặt cầu tiếp xúc đồng thời hai đường thẳng và có bán kính nhỏ nhất chính là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.

Gọi $\begin{cases}A(4+3a;1-a;-5-2a)\in d_1\\B(2+b;-3+3b;b)\in d_2\end{cases}$ là chân đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.

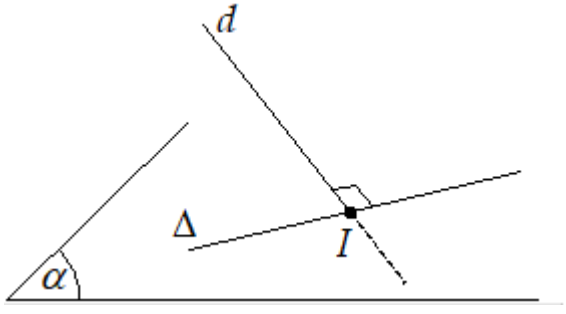
Ta có $\overrightarrow{AB}=(b-3a-2;3b+a-4;b+2a+5)$ và

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(b-3a-2)-1(3b+a-4)-2(b+2a+5)=0\\1(b-3a-2)+3(3b+a-4)+1(b+2a+5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}.$$

Khi đó $A(1;2;-3),B(3;0;1)\Rightarrow I(2;1;-1),R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2+4^2}}{2}=\sqrt{6}.$

Vậy: $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6.$

Câu 27: Chọn A



Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Ta có: $I\in d\Rightarrow I(1+t;2+2t;3+t)$.

Mặt khác $I\in(\alpha)\Leftrightarrow 1+t+2+2t-3-t-2=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;4;4)$.

Vì đường thẳng cần tìm Δ nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d nên Δ đi qua điểm $I(2;4;4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\vec{n},\overrightarrow{u_d}\right]=(3;-2;1)$.

Phương trình chính tắc của Δ: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$.

Đối chiếu đáp án ta thấy đường thẳng Δ_3 của đáp án A có vtcp $(3;-2;1)$, và khi thay toạ độ $I(2;4;4)$ vào phương trình Δ_3 thì thỏa mãn. Vậy **Chọn A**

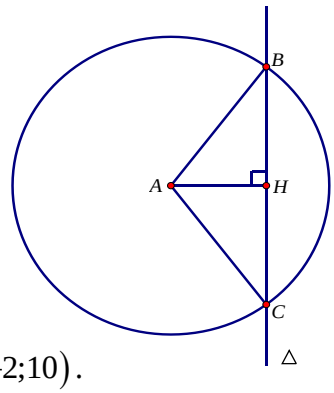
Câu 28: Chọn A

Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với (P) nên có bán kính: $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.1-(-2)+2.3-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3.$

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3$ là:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

Câu 29: Chọn B



Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;2)$.

Gọi là H trung điểm $BC\Rightarrow AH\perp BC$.

Ta có: $AH=d_{(A,\Delta)}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.Với $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(2;-2;1)\\ \vec{u}=(2;3;2)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]=(-7;-2;10)$.

$$\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=3.$$

+Bán kính mặt cầu (S) là: $R=AB=\sqrt{AH^2+HB^2}=\sqrt{3^3+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

Câu 30: Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Đường thẳng d và Δ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-1)$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α): $d(I,(\alpha))=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}$.

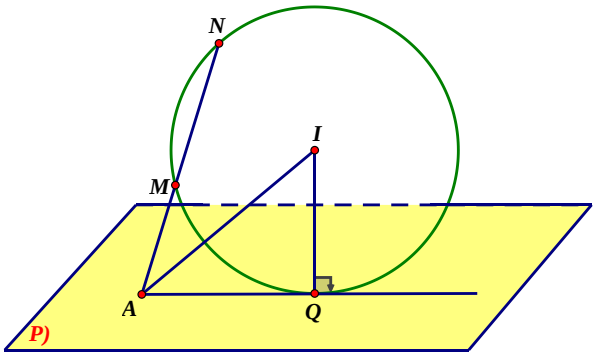
Vì (α) song song với d và Δ nên (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]=(1;0;1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x+z+d=0$.

Ta có: $d(I,(\alpha))=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|-1-2+d|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|d-3|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d-3=2\\d-3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=5\\d=1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $x+z+5=0$ hoặc $x+z+1=0$.

Câu 31: Chọn B



Từ tọa độ các điểm M và N suy ra phương trình đường thẳng MN là: $x=y=z$.

Gọi $A=MN\cap(P)$, tọa độ A là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x+y-z-3=0\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=3$.

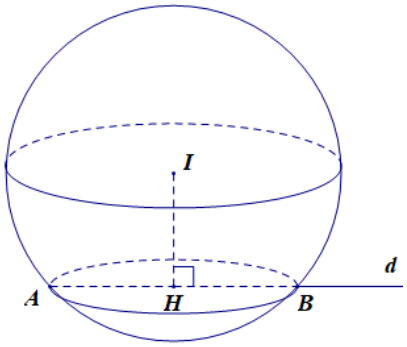
Suy ra $A(3;3;3)$.

Các điểm M, N, Q cùng thuộc một đường tròn nên ta có $AM.AN=AQ^2$.

Với $AM=2\sqrt{3}$, $AN=6\sqrt{3}$ thì $AQ^2=36\Leftrightarrow AQ=6$.

Vậy điểm Q luôn thuộc một đường tròn cố định có tâm $A(3;3;3)$ và bán kính $R=6$.

Câu 32: Chọn D



Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2;2)$.

$\overrightarrow{IM}=(-2;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(6;13;4)$. Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow IH\perp AB$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{36+169+16}}{\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}$.

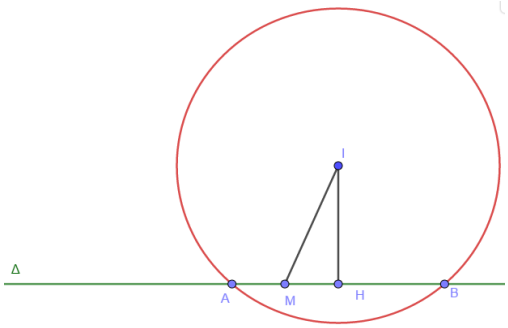
Suy ra bán kính $R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{13+3}=4$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và có bán kính $R=4$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 33: Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;3;4)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1),\overrightarrow{MI}=(1;2;3)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ. Khi đó $d(I,\Delta)=IH\le IM$.



Để Δ cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,\Delta)$ lớn nhất khi $\Delta\perp IM$.

Khi đó Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{MI}\right]=(1;-2;1)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}$.

Do đó đường thẳng đi qua điểm có tọa độ $(4;-3;3)$.

Câu 34: Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;1;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2;-3;0)$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-3(x+1)-2(y-3)-10(z-2)=0$ $\Leftrightarrow -3x-2y-10z+23=0$.

Câu 35: Chọn C

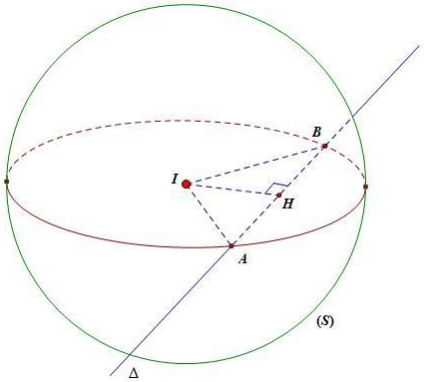
Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;1;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2;-3;0)$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-3(x+1)-2(y-3)-10(z-2)=0$ $\Leftrightarrow -3x-2y-10z+23=0$.

Câu 36: Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{14-m}$, (1). Điều kiện: $14-m>0\Leftrightarrow m<14$.

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(-1;0;2)$, có vecto chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-2), \overrightarrow{IM}=(0;-2;5)$

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng (Δ) là $d=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{65}}{3}=IH$, với H là trung điểm AB.

Vì tam giác IAB vuông cân, ta có $IBA=45^0$. Trong tam giác vuông IHB có:

$\sin 45^0=\dfrac{IH}{IB}=\dfrac{d}{R}\Rightarrow R=\dfrac{d}{\sin 45^0}=\dfrac{\sqrt{130}}{3}$, (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow\sqrt{14-m}=\dfrac{\sqrt{130}}{3}\Leftrightarrow 14-m=\dfrac{130}{9}\Leftrightarrow m=\dfrac{-4}{9}$. Thỏa mãn điều kiện

Vậy $m=\dfrac{-4}{9}$.

Câu 37: Chọn A

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A=\Delta\cap d$, $B=\Delta\cap d'$

Vì $A\in d$, $B\in d'$ nên gọi $A(-1-2t;\ t;\ -1+3t)$ và $B(2+t';\ -1+2t';\ -2t')$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t'+2t+3;\ 2t'-t-1;\ -2t'-3t+1)$.

Do $\Delta\perp(P)$ nên $\overrightarrow{AB},\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{t'+2t+3}{1}=\dfrac{2t'-t-1}{1}=\dfrac{-2t'-3t+1}{1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3t-t'=-4\\2t+4t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;-1;-4)\\B(3;\ 1;\ -2)\end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;1;1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Câu 38: Chọn B

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Phương trình tham số của d_1 là $(d_1):\begin{cases}x=3+2a\\y=-1+a\\z=2-2a\end{cases}$

Phương trình tham số của d_2 là $(d_2):\begin{cases}x=-1+3b\\y=-2b\\z=-4-b\end{cases}$

-Gọi $A=d\cap d_1\Rightarrow A(3+2a;-1+a;2-2a)$; $B=d\cap d_2\Rightarrow B(-1+3\text{b};-2b;-4-\text{b})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-4+3b-2a;-2\text{b}+1-a;-6-b+2a)$

-Véc tơ chỉ phương của d_3 là $\overrightarrow{u_3}=(4;-1;6)$

Vì d song song với d_3 nên ta có $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_3}$

$$\Rightarrow \frac{-4+3b-2a}{4}=\frac{-2\text{b}+1-a}{-1}=\frac{-6-b+2a}{6}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-4+3b-2a}{4}=\dfrac{-2\text{b}+1-a}{-1}\\\dfrac{-2\text{b}+1-a}{-1}=\dfrac{-6-b+2a}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow A(3;-1;2);B(-1;0;-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-4;1;-6)\Rightarrow(d):\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}$$

Câu 39: Chọn D

Gọi $A;B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường. Gọi M là trung điểm AB. Dễ có mặt cầu tâm M bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A;B$ lần lượt là:

$A(2t_1-1;t_1-1;2t_1-1)$ và $B(2t_2+1;2t_2+1;t_2+1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(2t_2-2t_1+2;2t_2-t_1+2;t_2-2t_1+2)$.

Có $\overrightarrow{u_1}(2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2;2;1)$ lần lượt là 2 vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).1+(t_2-2t_1+2).2=0\\(2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).2+(t_2-2t_1+2).1=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8t_2-9t_1+10=0\\9t_2-8t_1+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{10}{17}\\t_2=\dfrac{-10}{17}\end{cases}\Rightarrow A(\frac{3}{17};\frac{-7}{17};\frac{3}{17});\text{B}(\frac{-3}{17};\frac{-3}{17};\frac{7}{17})\ \overrightarrow{AB}(\frac{-6}{17};\frac{4}{17};\frac{4}{17}).$$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{(-6)^2+4^2+4^2}}{17}=\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Diện tích mặt cầu cần tính là $S=4\pi.R^2=4.\pi.\dfrac{1}{\sqrt{17}^2}=\dfrac{4\pi}{17}$.

Câu 40: Chọn D

Gọi $M(1-t;2+t;2t)\in BC$ là trung điểm của cạnh BC.

$\overrightarrow{AM}=(-t-5;t-1;2t-5)$; $\vec{u}_d=(-1;1;2)$.

Vì tam giác ABC đều nên $AM\perp BC$ và $G\in AM$, suy ra $\overrightarrow{AM}.\vec{u}_d=0$.

$\Rightarrow t+5+t-1+4t-10=0\Rightarrow t=1$, suy ra $M(0;3;2)$; $\overrightarrow{AM}=(-6;0;-3)$.

Vì G là trọng tâm tam giác nên

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Rightarrow(x_G-x_A;y_G-y_A;z_G-z_A)=\frac{2}{3}(-6;0;-3)\Rightarrow G(2;3;3)$

Phương trình mp ABC có một vtpt là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM};\vec{u}_d\right]=(3;15;-6)=3(1;5;-2)$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-3}{-2}$.

Thử từng tọa độ điểm vào ptdt Δ thì điểm Q thỏa mãn.

Câu 41: Chọn D

Tam giác MAB cân tại $M\Rightarrow MA=MB\Rightarrow M$ nằm trên mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $I(2;1;2)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB}(2;-2;6)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là: $(Q):x-y+3z-7=0$.

Khi đó M nằm trên đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow$ tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}x-2y+2z-10=0\\x-y+3z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+3z-7=0\\y+z+3=0\end{cases}$.

Đặt $z=t\Rightarrow y=-3-t;x=4-4t\Rightarrow M(4-4t;-3-t;t)$. $\overrightarrow{AM}(3-4t;-5-t;t+1)$; $\overrightarrow{AB}(2;-2;6)$

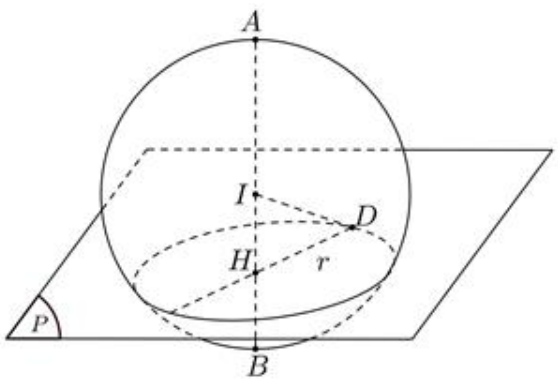
$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(-4t-28;26t-16;10t+4)$.

Diện tích tam giác MAB: $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\sqrt{198t^2-132t+264}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{198t^2-132t+264}=11\sqrt{2}\Leftrightarrow 9t^2-6t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Với $t=\frac{1}{3}$ ta được điểm $M\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$. Vậy $S=\frac{8}{3}-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.

Câu 42: Chọn B



Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$. Điểm H thuộc đoạn AB và không trùng với hai đầu mút nên ta giả sử $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB},(0<t<1)$.

Khi đó tọa độ của điểm H là $H(2+4t;1+4t;3+2t)$ và $AH=tAB=6t$.

Tâm của mặt cầu là trung điểm của AB có tọa độ $I(4;3;4)$, bán kính $R=IA=3$.

Bán kính đường tròn đáy của nón là $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{9-9(2t-1)^2}=6\sqrt{t-t^2}$.

Thể tích khối nón:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2AH=\frac{1}{3}\pi.36.(t-t^2).6t=36\pi t^2(2-2t)\le 36\pi.\left(\frac{t+t+2-2t}{3}\right)^3=\frac{32}{3}\pi$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2-2t\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$. Khi đó $H\left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$.

Mặt phẳng (P) qua H, nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình:

$$2\left(x-\frac{14}{3}\right)+2\left(y-\frac{11}{3}\right)+\left(z-\frac{13}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-21=0.$$

Do đó: $\begin{cases}b=2\\c=1\\d=-21\end{cases}\Rightarrow b+c+d=-18.$

Cách 2

Ta có $\overrightarrow{AB}=4;4;2$.

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I\ 4;3;4$. Bán kính mặt cầu là $R=IA=3$.

Giả sử $IH=t$. Xét điểm H' đối xứng với H qua I thì mặt phẳng qua H,H' cắt mặt cầu với đường tròn có cùng bán kính nên thể tích khối nón sẽ lớn hơn nếu H nằm khác phía A so với điểm I. Khi đó chiều cao của nón là $AH=3+t\ \ 0<t<3$.

Bán kính mặt nón là: $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{9-t^2}$.

Thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi\ 9-t^2\ \ 3+t\ =\frac{\pi}{3}\ -t^3-3t^2+9t+27$.

Xét hàm số $f\ t\ =-t^3-3t^2+9t+27$

Có $f'\ t\ =-3t^2-6t+9=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-3\quad loai\end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	0		1		3
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	27	↗	32	↘	0

$\Rightarrow \max\limits_{0;3} f\ t\ =f\ 1\ =32$. Khi đó $IH=1\Rightarrow AH=4.$

Đường thẳng AB nhận $\vec{u}\ 2;2;1$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+2t \\ z=3+t \end{cases}$

Suy ra $H\ 2+2t;1+2t;3+t$.

Mà $IH=\sqrt{(2t-2)^2+(2t-2)^2+(t-1)^2}=1\Leftrightarrow 9t^2-18t+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{4}{3} \\ t=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

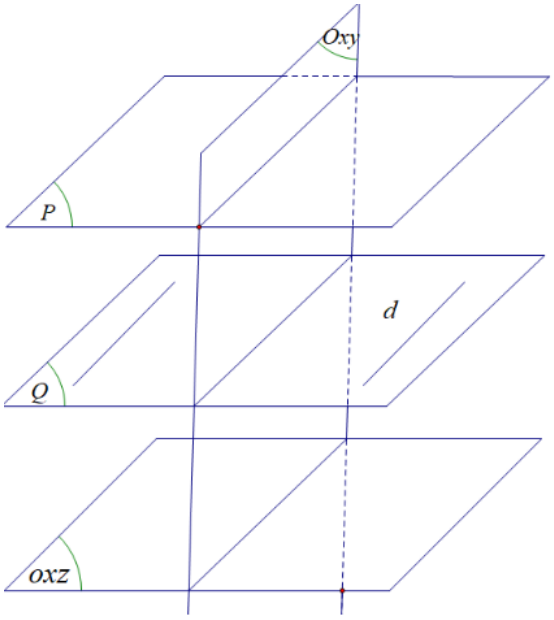
Với $t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow H\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{11}{3}\right)\Rightarrow AH=2.$ Với $t=\dfrac{4}{3}\Rightarrow H\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{13}{3}\right)\Rightarrow AH=4.$

Khi đó, mặt phẳng P đi qua $H\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{13}{3}\right)$ và nhận vectơ $\vec{u}\ 2;2;1$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$2\left(x-\dfrac{14}{3}\right)+2\left(y-\dfrac{11}{3}\right)+\left(z-\dfrac{13}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-21=0.$

Do đó: $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \\ d=-21 \end{cases}\Rightarrow b+c+d=-18..$

Câu 43: Chọn B



Vì $(P)//(xOz)$ nên đường thẳng d sẽ nằm trên mặt phẳng cách đều 2 mặt phẳng $(P);(xOz)$.

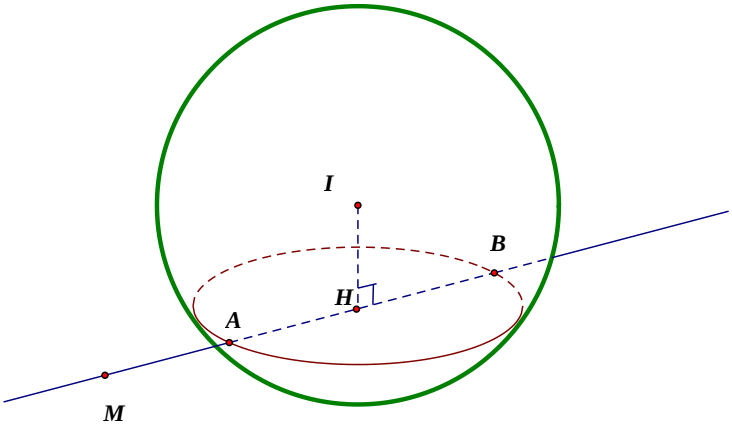
Do đó d thuộc mặt phẳng $(Q):y-2=0$.

Mà mặt phẳng (xOy) vuông góc với hai mặt phẳng $(P);(xOz)$. Do đó có 2 đường thẳng d thỏa mãn đề bài.

Câu 44: Chọn D

Thay tọa độ $M(2;-3;4)$ vào phương trình của (P), dễ thấy $M\in(P)$.

Ta có $d_{(I,(P))}=\dfrac{|1-4+3-12|}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}<5$, do đó mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Vậy đường thẳng đi qua qua M, nằm trong (P) và cắt (S) theo dây cung dài nhất khi và chỉ khi đường thẳng đó qua tâm H của đường tròn giao tuyến.

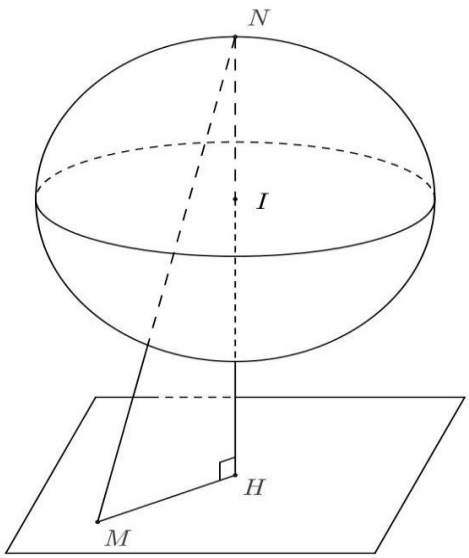


Đường thẳng IH đi qua $I(1,2,3)$ nhận VTPT của (P) $\vec{n}(1;-2;1)$ làm VTCP: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$.

Do vậy ta có $H=IH\cap(P)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+t\\x-2y+z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\x=3\\y=-2\\z=5\end{cases}$ hay $H(3;-2;5)$.

Vậy đường thẳng cần tìm qua $H(3;-2;5)$ nhận $\overrightarrow{MH}(1;1;1)$ làm vtcp có dạng $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+t\\z=5+t\end{cases}$.

Câu 45: Chọn B



(S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=1$.

Đường thẳng MN nhận $\vec{u}=(1;0;1)$ làm VTCP, (P) nhận $\vec{n}_p=(1;-2;2)$ làm VTPT.

$\sin\left(MN,(P)\right)=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}_p\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{n}_p\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(MN,(P)\right)=45°$.

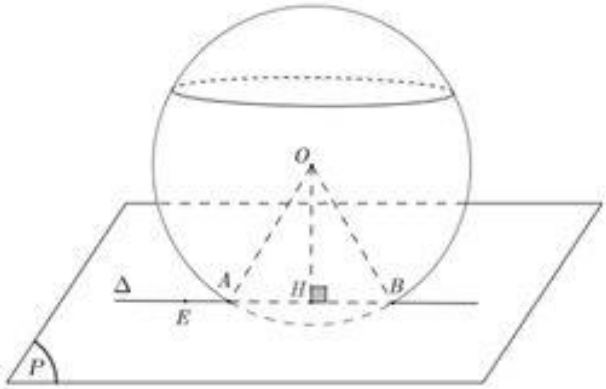
Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên (P).

Suy ra ΔMNH vuông cân tại $H\Rightarrow MN=NH\sqrt{2}$. Do đó MN lớn nhất khi NH lớn nhất.

Mà NH lớn nhất khi NH đi qua tâm I của (S), khi đó $NH=NI+IH=R+IH$.

$IH=d\left(I,(P)\right)=2$ nên $NH_{max}=1+2=3$. Vậy $MN_{max}=3\sqrt{2}$.

Câu 46: Chọn C



Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của đường thẳng Δ $(a^2+b^2+c^2>0)$.

+) Vì $\Delta\subset(P)$ nên $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_P}\Rightarrow a-3b+5c=0\Rightarrow a=3b-5c$.

+) Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB.

Ta có OAB là tam giác đều cạnh R nên $OH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Hay khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng $OH=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{OE}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow(a+b+c)^2=0\Leftrightarrow a+b+c=0$.

Thay vào ta được

$3b-5c+b+c=0\Leftrightarrow b=c\Rightarrow a=-2c$.

Chọn $c=-1$, khi đó $b=-1$ và $a=2$. Ta được một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;-1;-1)$.

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 47: Chọn B

Trường hợp 1: A,B cùng phía với (Q): Gọi $M(x;y;z)$ thỏa $\overrightarrow{AM}=3.\overrightarrow{BM}$

Suy ra: $\begin{cases}x-2=3(x+2)\\y-5=3(y-1)\\z+3=3(z-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-1\\z=3\end{cases}\Rightarrow M(-4;-1;3)$

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Đường thẳng MC qua $C(2;0;1)$ và có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{MC}=(6;1;-2)$.Phương trình $MC:\begin{cases}x=2+6t\\y=t\\z=1-2t\end{cases}$

Gọi $D(2+6t;t;1-2t)\in MC.$

$D\in(P)\Rightarrow 3(2+6t)+4.t+5(1-2t)+1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow D(-4;-1;3)$

Trường hợp 2: A,B khác phía với (Q): Gọi $M(x;y;z)$ thỏa $\overrightarrow{AM}=-3.\overrightarrow{BM}$

Suy ra: $\begin{cases}x-2=-3(x+2)\\y-5=-3(y-1)\\z+3=-3(z-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-1;2;0)$

Đường thẳng MC qua $C(2;0;1)$ và có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{MC}=(3;-2;1)$.Phương trình $MC:\begin{cases}x=2+3t\\y=-2t\\z=1+t\end{cases}$

Gọi $D(2+3t;-2t;1+t)\in MC.$

$D\in(P)\Rightarrow 3(2+3t)+4.(-2t)+5(1+t)+1=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow D(-4;4;-1)\Rightarrow abc=16..$

Câu 48: Chọn B

Có $A(1;1;1),B(2;2;1)\Rightarrow$ Phương trình AB: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P)\Rightarrow K(-1;-1;1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại $H\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2=\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}=12\Rightarrow KH=2\sqrt{3}$ không đổi

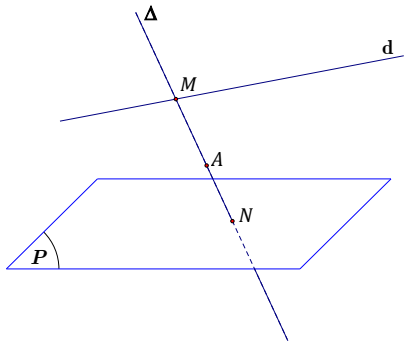
$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 49: Chọn A

Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;m)$ và có một vtcp $\vec{u}=(1;1;2)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;2)$ và bán kính $R=3$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d thì K cũng là trung điểm EF. Khi đó: $IK^2+\frac{EF^2}{4}=R^2=9$. Để EF lớn nhất thì IK nhỏ nhất. Mà $IK=d(I,d)=\frac{\left|[\vec{u},\overrightarrow{IM}]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{2m^2+12}}{\sqrt{6}}$ nên IK nhỏ nhất khi $m=0$.

Câu 50: Chọn B

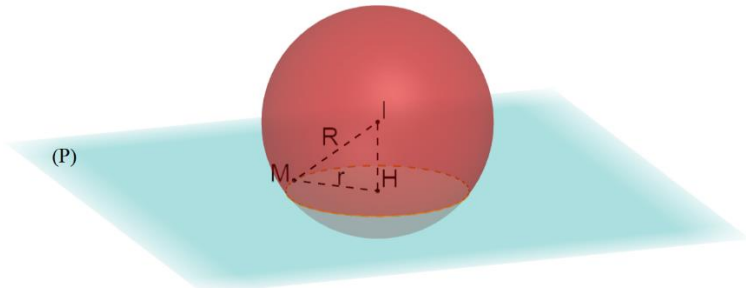


Ta có $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Do đó $M\in d\Rightarrow M\left(-1+2t;t;2+t\right)$.

Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm $MN\Rightarrow N\left(3-2t;-2-t;2-t\right)$.

Mặt khác $N\in(P)\Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M\left(3;2;4\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2;3;2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Câu 51: Chọn D



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2=R^2=d^2_{(I;(P))}+r^2\qquad(*)$$

Ta có: $d_{(I;(P))}=\dfrac{\left|-1-2.2+2.(-1)-2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3=IH.$

Từ $(*)\Rightarrow R^2=3^2+5^2=34$. Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34.$

Câu 52: Chọn A

Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $\Delta_2\Rightarrow M(0;0;-1)$

Do d_1, d_2 nằm trong mặt phẳng (P) nên: $\begin{cases} \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_P}=0 \\ \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{n_P}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1=0 \ (1) \\ c-d+1=0 \ (2) \end{cases}$

Từ $\Delta_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1} \Rightarrow \overrightarrow{u_{\Delta_1}}(-1;-1;1), N(1;0;0)$

$$d(d_1,\Delta_1)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{|2b-a+1|}{\sqrt{(b+1)^2+(a+1)^2+(b-a)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (3)$$

$$d(d_2,\Delta_1)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{|d+2c-1|}{\sqrt{(d+1)^2+(1-c)^2+(c+d)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (4)$$

Từ $(1) \Rightarrow b=1-a$.

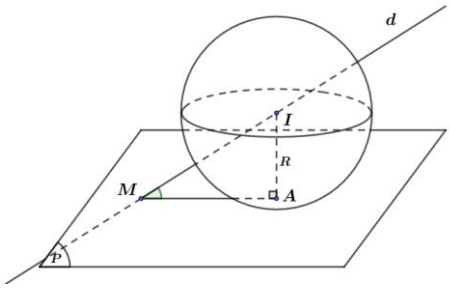
Thay vào (3) $\dfrac{|3-3a|}{\sqrt{(2-a)^2+(a+1)^2+(1-2a)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow |6-6a|=\sqrt{36a^2-36a+36} \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow b=1$

Từ $(2) \Rightarrow d=c+1$

Thay vào (4) $\Rightarrow \dfrac{|3c|}{\sqrt{(c+2)^2+(1-c)^2+(2c+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow |6c|=\sqrt{36c^2+36c+36} \Leftrightarrow c=-1 \Rightarrow d=0$

Vậy $S=a+b+c+d=0$.

Câu 53: Chọn D



Đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$ có vtcp $\vec{u}_d=(2;1;-1)$. Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_P=(1;2;1)$

Khi đó: Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là IMA

$$\sin IMA=\frac{|\vec{u}_d.\vec{n}_P|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_P|}=\frac{|2.1+1.2-1.1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow IMA=30^\circ.$$

Ta có: $IA=R \Rightarrow MA=\dfrac{IA}{\tan 30^\circ}=R\sqrt{3}$.

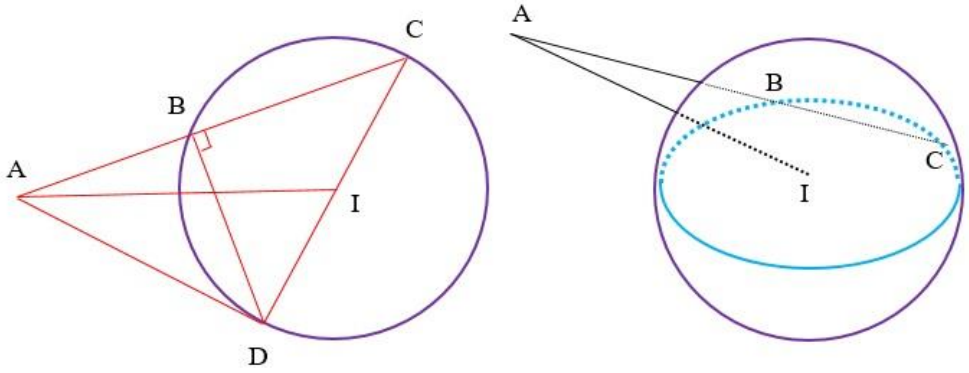
Mà $S_{\Delta IAM}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}IA.MA=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2=3\sqrt{3} \Leftrightarrow R=\sqrt{6}$.

Mặt khác: $I(1+2t;1+t;-t)\in d$ và $d(I,(P))=R$

$$\Rightarrow \frac{|1+2t+2(1+t)+(-t)-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow |3t-3|=6 \Leftrightarrow |t-1|=2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=3 & \Rightarrow I(7;4;-3) \\ t=-1 & \Rightarrow I(-1;0;1) \end{bmatrix} (L)$$

$\Rightarrow a=-1, b=0, c=1$. Vậy $T=a+b+c=0$.

Câu 54: Chọn C



Từ giả thiết ta có mặt cầu tâm $I(0;0;-2), R=1$. Tính được $AI=6>R$, suy ra A nằm ngoài mặt cầu. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và cắt mặt cầu tại hai điểm B,C.

Xét mặt phẳng (AI,Δ) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C).

Ta chứng minh $AB.AC=AI^2-R^2$.

Thật vậy, gọi là điểm D đối xứng với C qua I, ta có $DB\perp AC$.

Ta có $AB.AC=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ (1).

Mặt khác $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{ID}\right)=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{ID}^2=AI^2-R^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB.AC=AI^2-R^2=35$ (3).

Theo giả thiết và (3) ta có $\begin{cases}AB+AC=12\\AB.AC=35\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=5\\AC=7\end{cases}\vee\begin{cases}AB=7\\AC=5\end{cases}$.

Suy ra $BC=|AC-AB|=2=2R$.

Từ trên suy ra Δ đi qua tâm I, như vậy có 1 đường thẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 55: Chọn B

Giả sử mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \text{ với } R>0.$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$ và đi qua điểm $A(2;11;-5)$ nên

$$\begin{cases}(2-a)^2+(11-b)^2+(-5-c)^2=R^2 & (1)\\ d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|2ma+\left(m^2+1\right)b+\left(m^2-1\right)c-10\right|}{\sqrt{4m^2+\left(m^2+1\right)^2+\left(m^2-1\right)^2}}=R & (2)\end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow\left|m^2(b+c)+2ma+b-c-10\right|=\sqrt{2}.R\left(m^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2\left(b+c-\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10-\sqrt{2}R=0\\ m^2\left(b+c+\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10+\sqrt{2}R=0\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $m^2\left(b+c-\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10-\sqrt{2}R=0$

Vì với mọi m tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên

$$\begin{cases} b+c-\sqrt{2}R=0 \\ 2a=0 \\ b-c-10-\sqrt{2}R=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=\sqrt{2}R \\ b-c-10-b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-5 \\ b=\sqrt{2}R+5 \end{cases}.$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4+\left(6-\sqrt{2}R\right)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2-12\sqrt{2}R+40=0$.

Vậy tổng bán kính của 2 mặt cầu là $12\sqrt{2}$.

Trường hợp 2: $m^2\left(b+c+\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10+\sqrt{2}R=0$

Vì với mọi m tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên

$$\begin{cases} b+c+\sqrt{2}R=0 \\ 2a=0 \\ b-c-10+\sqrt{2}R=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=-\sqrt{2}R \\ b-c-10-b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-5 \\ b=5-\sqrt{2}R \end{cases}$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4+\left(6+\sqrt{2}R\right)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2+12\sqrt{2}R+40=0 \Leftrightarrow R=-10\sqrt{2} \vee R=-2\sqrt{2}$.

Vậy tổng bán kính của 2 mặt cầu là $12\sqrt{2}$.

Câu 56: Chọn C

Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I \in (C)$ và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (MNP).

Ta có: (S) tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM

$\Leftrightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM) \Leftrightarrow d(H,MN)=d(H,NP)=d(H,PM)$

$\Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP.

(MNP) có phương trình là $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+y+z-6=0$.

$(C)=(S_1)\cap(S_2) \Rightarrow$ Tọa độ các điểm thuộc trên (C) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y-z=0.$$

Do đó, phương trình chứa mặt phẳng chứa (C) là $(\alpha): 3x-2y-z=0$.

Vì $1.3+1.(-2)+1.(-1)=0 \Rightarrow (MNP)\perp(\alpha)$. (1). Có: $MN=NP=PM=6\sqrt{2} \Rightarrow \Delta MNP$ đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow G(2;2;2)$ và G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Thay tọa độ của điểm G vào phương trình mặt phẳng (α), ta có: $G\in(\alpha)$.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với (MNP) tại G. Vì $\begin{cases} (MNP)\perp(\alpha) \\ G\in(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta\subset(\alpha)$.

Khi đó: $\forall I\in\Delta \Rightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM)=r$

$\Rightarrow$ Mặt cầu tâm I bán kính r tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, MP, PM.

Câu 57: Chọn B

Do d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) khi đó d' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-3;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(-2;0;2)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(-3;2;-1)$ là $3x-2y+z+4=0$.

Do Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P) khi đó Δ' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;-2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $B(3;1;4)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=(0;-2;-2)$ là $y+z-5=0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+y-z+2=0\\3x-2y+z+4=0\\y+z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=3\end{cases}$.

Vậy $M(-1;2;3)\Rightarrow a+b.c=-1+2.3=5$.

Câu 58: Chọn C

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ có dạng: $AB:\begin{cases}x=2+t\\y=+t\\z=-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. (S) có tâm $I(0;1;-1)$ và bán kính $R=1$.

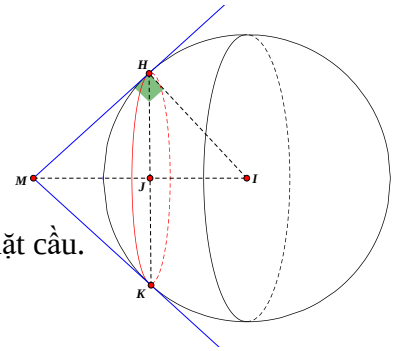
$\begin{cases}IT\perp AB\\IT'\perp AB\end{cases}\Rightarrow(ITT')\perp AB$. Gọi $K=(ITT')\cap AB\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0\\K\in AB\end{cases}$.

$K(2+t;t;-t)\in AB,\overrightarrow{IK}=(2+t;t-1;-t+1)$, $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=2+t+t-1+t-1=0\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow K\equiv A$.

Ta có, $IA=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$, $IA\perp TT'$ và $I;A;H$ thẳng hàng. Mặt khác, $\Delta IAT'$ vuông tại T' nên theo hệ thức lượng $IH=\dfrac{IT'^2}{IA}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\dfrac{IH}{IA}\cdot\overrightarrow{IA}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot\overrightarrow{IA}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6}\right)\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6};-\dfrac{5}{6}\right)$.

Vậy $a+b+2c=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 59: Chọn C



Ta có: $(S):\begin{cases}I(1;-1;2)\\R=3\end{cases}$. Khi đó $IM=5>R\Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên $MI:\begin{cases}x=1\\y=-1+4t(t\in\mathbb{R})\\z=2-3t\end{cases}$ nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

Xét tam giác MHI vuông tại H có: $MI=5; IH=3 \Rightarrow MH=\sqrt{MI^2-HI^2}=4$.

$\frac{1}{HJ^2}=\frac{1}{HM^2}+\frac{1}{HI^2} \Rightarrow HJ=\frac{12}{5}$. $MJ.MI=MH^2 \Rightarrow MJ=\frac{16}{5}$.

Mặt khác, $\begin{cases} M(1;3;-1) \\ J(1;-1+4t;2-3t) \end{cases} \Rightarrow MJ=\sqrt{(-4+4t)^2+(3-3t)^2}=\frac{16}{5}$.

$\Leftrightarrow (-4+4t)^2+(3-3t)^2=\frac{256}{25} \Leftrightarrow 16-32t+16t^2+9-18t+9t^2=\frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 25t^2-50t+\frac{369}{25}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{25} \\ t=\frac{41}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right) \\ J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right) \end{array}\right.$.

Với $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{9}{5}<IM$. Với $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{\sqrt{1097}}{5}>IM$.

Vậy $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ nên: $2a+b+c=\frac{84}{25}$.

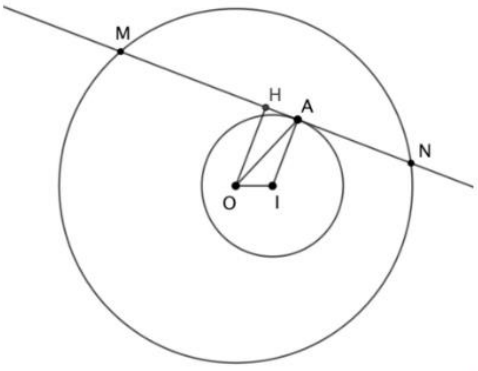
Câu 60: Chọn C

Hai mặt cầu , có tâm lần lượt là là gốc toạ độ O, điểm I và bán kính lần lượt là $R_1=5; R_2=2$.

Gọi A là tiếp điểm của d và , ta có IA = R2 = 2.

Vì d cắt (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8 nên

$d(\mathrm{O};\mathrm{d})=\sqrt{R_1^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3.$



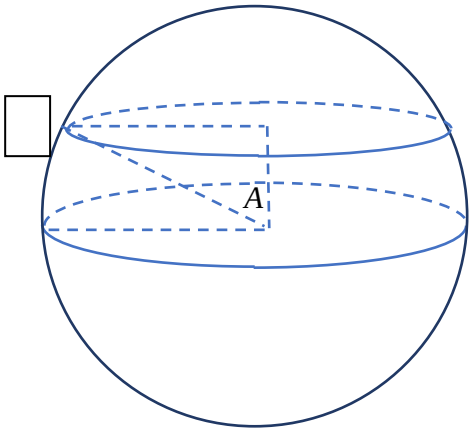
Vì $d \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{u}_d=(1;1;x)$, ta có:

$OI+IA \geq OA \geq d(O,d) \rightarrow 1+2 \geq \mathrm{OA} \geq 3 \Rightarrow O,I,A$ thẳng hàng.

$\overrightarrow{OA}=\frac{OA}{OI}\overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OI}=(0;0;3) \Rightarrow A(0;0;3).$

Do đó $d(O;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}=3 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow \vec{u}_d=(1;1;0).$

Câu 61: Chọn D



Bán kính mặt cầu (S): $R=d\left((P),(Q)\right)=\frac{1}{2}.\frac{\left|5-(-1)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên mặt phẳng (R) cách đều (P) và (Q).

Phương trình mặt phẳng (R): $2x-y+2z+2=0$

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên mặt cầu (S') có tâm A bán kính $R=IA=1$

Gọi K là hình chiếu của A trên $(R)\Rightarrow AK=d\left(A,(R)\right)=\frac{\left|2.(-1)-1+2.1+2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3}$

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S') và mặt phẳng (R) có tâm K và bán kính $r=KI=\sqrt{AI^2-AK^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Diện tích hình tròn giới hạn bởi (C) là: $\pi r^2=\frac{8\pi}{9}$.

Câu 62: ChọnC

Ta có $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}-1=0\Leftrightarrow(\beta):(1-m)x+my+(m-m^2)z-m+m^2=0.$

Gọi $I(x_0;y_0;z_0)$ là tâm, R là bán kính mặt cầu tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Khi đó: $R=d\left(I,(\alpha)\right)=d\left(I,(\beta)\right)$.

$$d\left(I,(\beta)\right)=\frac{\left|(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2\right|}{\sqrt{(1-m)^2+m^2+(m-m^2)^2}}=\frac{\left|(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2\right|}{\sqrt{\left(m^2-m+1\right)^2}}$$

$$=\frac{\left|(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2\right|}{m^2-m+1}$$

Đặt $\frac{(m-1)x_0+my_0+\left(m-m^2\right)z_0-m+m^2}{m^2-m+1}=k\Rightarrow R=|k|$

Ta cần tìm $(x_0;y_0;z_0)$ sao cho

$(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2=k(m^2-m+1),\forall m$

$\Leftrightarrow (1-z_0)m^2+(-x_0+y_0+z_0-1)m+x_0=km^2-km+k,\forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-z_0=k\\-x_0+y_0+z_0-1=-k\\x_0=k\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=k\\y_0=k\\z_0=1-k\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}I(k;k;1-k)\\R=|k|\end{cases}$

Khi đó: $R=d(\mathrm{I},(\alpha))=d(\mathrm{I},(\beta))\Leftrightarrow |k|=\dfrac{|2k-k+2(1-k)+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\Leftrightarrow \dfrac{|12-k|}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12-k=-3k\\12-k=3k\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=-6\\k=3\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}I_1(-6;-6;7),R_1=6\\I_2(3;3;-2),R_2=3\end{array}\right.$.

Tổng bán kính của hai mặt cầu bằng $6+3=9$.

Câu 63: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Vì (α) đi qua 2 điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ nên ta có $\begin{cases}a.0+b.0+4+d=0\\a.2+b.0-0+d=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}d=-4\\a=2\end{cases}$.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối nón. Khi đó thể tích của khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Ta có $h=d(I,(\alpha))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{27-r^2}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{27-r^2}$.

Đặt $t=\sqrt{27-r^2}\Rightarrow r^2=27-t^2$, điều kiện: $0<t<3\sqrt{3}$.

Khi đó $V=\dfrac{1}{3}\pi(27-t^2)t$, $(0<t<3\sqrt{3})$.

Ta có $V'=\dfrac{1}{3}\pi(27-3t^2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3(n)\\t=-3(l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		3		$3\sqrt{3}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	18π	↘	0

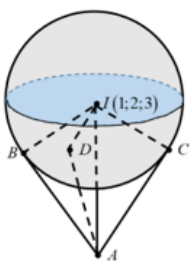
Thể tích khối nón lớn nhất khi $t=3\Rightarrow r^2=18\Rightarrow h=3$.

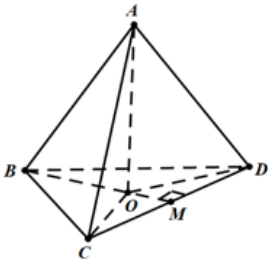
Mặt khác $h=d(I,(\alpha))=\dfrac{|a-2b-3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=3$

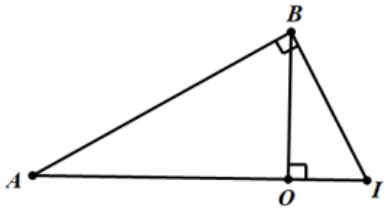
Mà $\begin{cases}a=2\\d=-4\end{cases}\Rightarrow |-2b-5|=3\sqrt{5+b^2}\Leftrightarrow b^2-4b+4=0\Leftrightarrow b=2$.

Vậy $P=a-b-d=2-2+4=4$.

Câu 64: Chọn C







Gọi I là tâm của mặt cầu $\Rightarrow I(1;2;3)$. Gọi O là giao điểm của mặt phẳng (BCD) và đoạn AI. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Đặt $AI = x\left(x > \sqrt{\frac{14}{3}}\right)$. Ta có $AB = \sqrt{AI^2 - IB^2} = \sqrt{x^2 - \frac{14}{3}}$, $IB^2 = IO.IA \Rightarrow IO = \frac{14}{3x}$

$\Rightarrow OB = \sqrt{IB^2 - IO^2} = \sqrt{\frac{14}{3} - \left(\frac{14}{3x}\right)^2}$

$\Rightarrow BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2OB.OD.\cos 120° = 3OB^2 \Rightarrow BD = \sqrt{3}OB = \sqrt{3\left(\frac{14}{3} - \frac{196}{9x^2}\right)}$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $AB = BD \Rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{14}{3}} = \sqrt{3\left(\frac{14}{3} - \frac{196}{9x^2}\right)} \Leftrightarrow x^2 - \frac{14}{3} = 14 - \frac{196}{3x^2}$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 56x^2 + 196 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{14}{3} \\ x^2 = 14 \end{array}\right. \Rightarrow x = \sqrt{14}$. Gọi tọa độ điểm $A(4+3t;4+2t;4+t)$.

Suy ra $AI = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{(4+3t-1)^2 + (4+2t-2)^2 + (4+t-3)^2} = \sqrt{14}$

$\Leftrightarrow 14t^2 + 28t + 14 = 14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(4;4;4) \\ A(-2;0;2) \end{array}\right.$

Do $x_0 > 0$ nên điểm A có tọa độ $A(4;4;4) \Rightarrow P = 12$.

Câu 65: Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR).

Dễ thấy $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2}$ suy ra $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{8}$ hay $OH = 2\sqrt{2}$.

Khi đó suy ra mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $OM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0} = 1 < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác OAB cân tại O nên $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OI.AB$.

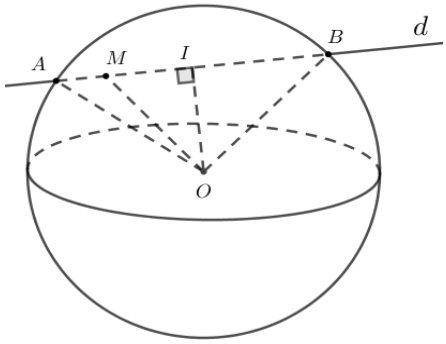
Đặt $OI = x$, vì $OI \le OM$ nên $0 < x \le 1$ và $AB = 2\sqrt{8 - x^2}$.

Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}x.2\sqrt{8-x^2} = x\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

Xét hàm số $f(x) = 8x^2 - x^4$ với $0 < x \le 1$.

Có $f'(x)=16x-4x^3=4x(4-x^2)>0$ với mọi $x\in(0;1]\Rightarrow f(x)\le f(1)=7$.

Suy ra diện tích của tam giác OAB lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB.



Cách 2. $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OI.AB=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}=\sqrt{7x^2+x^2(1-x^2)}\le\sqrt{7}$ với $\forall x\in(0;1]$.

Câu 66: Chọn D

Điều kiện của m để (S) là phương trình mặt cầu là

$$2^2+(-m)^2+(m+1)^2-(m^2+2m+8)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\sqrt{3}\\m<-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-m;m+1)$, $R=\sqrt{m^2-3}$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính $R_{(C)}=1$ thì mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b;c)$ với $(a^2+b^2+c>0)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ nên $\vec{n}.\vec{u}_\Delta=0$

$\Leftrightarrow a+3b-c=0\Leftrightarrow c=a+3b\Rightarrow\vec{n}=(a;b;a+3b)$

Mặt khác $A(3;1;2)\in(P)\Rightarrow(P):a(x-3)+b(y-1)+(a+3b)(z-2)=0$

Hay $(P):ax+by+(a+3b)z-5a-7b=0.$

Theo giả thiết $d(I,(P))=\sqrt{R^2-R_{(C)}^2}=\sqrt{m^2-3-1}=\sqrt{m^2-4}$

Vậy có điều kiện:

$$\frac{|2a-bm+(a+3b)(m+1)-5a-7b|}{\sqrt{a^2+b^2+(a+3b)^2}}=\sqrt{m^2-4}\Leftrightarrow\frac{|(m-2)(a+2b)|}{\sqrt{2a^2+10b^2+6ab}}=\sqrt{m^2-4}$$

- Nếu $m=2$ đẳng thức luôn đúng, tức vô số mặt phẳng.
- Nếu $m\neq2$ ta có

$$(m-2)(a+2b)^2=(m+2)(2a^2+10b^2+6ab)$$

$$\Leftrightarrow(m+6)a^2+2(m+10)ab+(6m+28)b^2=0$$

- Nếu $m=-6\Rightarrow 8ab-8b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\b=0\end{array}\right.$ có hai mặt phẳng.
- Nếu $m\neq-6$, điều kiện là

$$\Delta'_a = 0 \Leftrightarrow (m+10)^2 - (m+6)(6m+28) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-\dfrac{34}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị thực của tham số m thoả mãn.

Câu 67: Chọn D

Cách 1: Mặt cầu (S_1) có tâm là $I_1(1;1;2)$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16 \\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0 \quad (1) \\ x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-3=0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy trừ ta được: $4x-2y+6z+7=0 \quad (P) \Rightarrow$ đường tròn tâm I thuộc mặt phẳng (P).

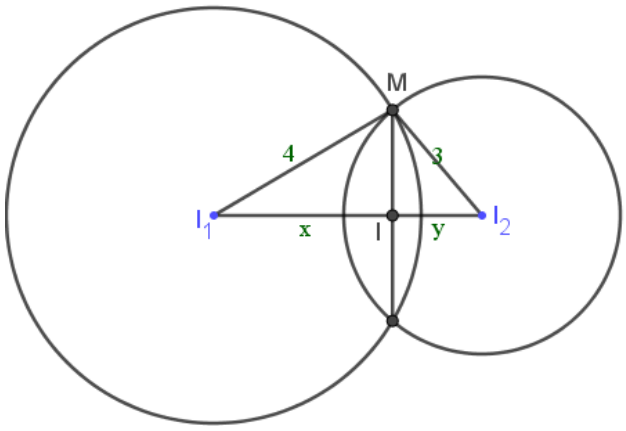
Gọi d là đường thẳng đi qua I_1 và vuông góc với mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2+3t \end{cases}$. Khi đó, $I = d \cap (P)$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 4x-2y+6z+7=0 \\ x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{7}{4} \\ z=-\dfrac{1}{4} \\ t=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$

$$\Rightarrow a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=1.$$

Cách 2: Mặt cầu (S_1) có tâm là $I_1(1;1;2)$, bán kính $R_1=4$; mặt cầu (S_2) có tâm là $I_2(-1;2;-1)$ bán kính $R_2=3 \Rightarrow I_1I_2=\sqrt{14}$



Giả sử M là điểm thuộc đường tròn tâm I, $x=II_1, y=II_2$. Khi đó, $x+y=I_1I_2=\sqrt{14}$ và

$$4^2-x^2=3^2-y^2\Leftrightarrow x^2-y^2=7\Leftrightarrow (x+y)(x-y)=7\Rightarrow x-y=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{14}\\ x-y=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{14}}{4}\Rightarrow \overrightarrow{I_1I}=\frac{3}{4}\overrightarrow{I_1I_2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I-1=\dfrac{3}{4}.(-2)\\ y_I-1=\dfrac{3}{4}.1\\ z_I-2=\dfrac{3}{4}.(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=-\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{7}{4}\\ z_I=\dfrac{-1}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=1.$$

Câu 68: Chọn B

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$d(I,(\alpha))=\dfrac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R\Rightarrow(\alpha)\cap(S)=C(H;r)$, H là hình chiếu của I lên (α).

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha)\Rightarrow\Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-2;1)$.

$\Rightarrow$ PTTS $\Delta_1:\begin{cases}x=2+2t\\ y=3-2t\\ z=5+t\end{cases}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=2+2t\\ y=3-2t\\ z=5+t\\ 2x-2y+z+15=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=7\\ z=3\end{cases}$

$\Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C)\Leftrightarrow\Delta\equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$.

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

DẠNG 7. CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.

C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;-4)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z=0$. **C.** $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Câu 5: **4** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$. **B.** $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{2}$.

C. $d:\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{2}$. **D.** $d:\frac{x+3}{-26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) chứa d sao cho $d(A,(P))$ lớn nhất. Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $(1;1;1)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(1;-1;1)$. **D.** $(0;1;1)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$, $(Q): x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

A. $M(2019;-1;1)$. **B.** $M(0;-2019;0)$. **C.** $M(-2019;1;1)$. **D.** $M(0;0;-2019)$.

Câu 8: Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x-4y+z-12=0$ và cách $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=4-t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có đường phân giác trong góc A song song với đường thẳng $(d): \begin{cases} x=2 \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$. Đường thẳng AC có một véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$. Biết đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 14.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. Xét M là điểm thay đổi thuộc d, giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 14. **B.** 160. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** 18.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $(Oxyz)$ cho ba điểm $A(1;0;3)$; $B(-3;1;3)$; $C(1;5;1)$. Gọi $M(x_o;y_o;z_o)$ thuộc mặt phẳng tọa độ (Oxy) sao cho biểu thức $T=2\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị x_o-y_o?

A. $x_o-y_o=-\dfrac{8}{5}$. **B.** $x_o-y_o=\dfrac{8}{5}$. **C.** $x_o-y_o=-2$. **D.** $x_o-y_o=2$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{2}=z+2$ và hai điểm $A(4;3;0)$, $B(1;9;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây:

A. $(9;10)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(7;8)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;-2;1), B(1;2;-3)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(25;-29;-6)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, vuông góc với d đồng thời khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất. Biết $\vec{v}=(a;b;4)$ là một véc- tơ chỉ phương của Δ. Tính giá trị $a+b$.

A. 2. **B.** –8. **C.** –2. **D.** –4.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;2)$. Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) và trục oy. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), đi qua M sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất.

A. $d:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{-1}$. **B.** $d:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{1}$.

C. $d:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{-1}$. **D.** $d:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-3}$.

Câu 17: Cho hai số z_1, z_2 thoả mãn điều kiện $|z-3-4i|=2; |z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $P=|z_1|^2-|z_2|^2$ là

A. $-6-2\sqrt{5}$. **B.** -5. **C.** $-\sqrt{85}$. **D.** -10.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;4), B(3;2;6), C(3;-2;6)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$, thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong (α) và cắt (S) tại hai điểm B, C. Để độ dài BC lớn nhất thì Δ có phương trình là

A. $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$. **B.** $\Delta:\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các mặt phẳng $(\alpha):x=2$, $(\beta):z=2$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x=1-15t\\y=4-18t\\z=2-19t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-5t\\y=4+8t\\z=2-9t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=4-8t\\z=2-9t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+15t\\y=4+18t\\z=2-19t\end{cases}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2-t\\z=1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$, điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A song song với (P) sao cho khoảng cách giữa d và Δ lớn nhất.

A. $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1+29t\\z=2+69t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1-29t\\z=2+11t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1+21t\\y=-1+10t\\z=2+31t\end{cases}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;3);B(-1;0;2)$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua B, cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{4}$. **B.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-4}$. **C.** $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{8}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-14}$.

Câu 25: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và $A(1;1;0)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-1;1;-2)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $M(1;-1;2)$.

Câu 26: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** $8+\sqrt{33}$. **C.** $8+\frac{\sqrt{33}}{3}$. **D.** $8+\frac{4\sqrt{33}}{3}$.

Câu 27: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;1;-3)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{3}$. **B.** $T_{\max}=2\sqrt{3}$. **C.** $T_{\max}=3\sqrt{3}$. **D.** $T_{\max}=\sqrt{2}$.

Câu 28: Cho mặt phẳng $(\alpha):x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;1;0), B(3;-1;4)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $P=MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của P là:

A. $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=7$. **D.** $P=8$.

Câu 29: Cho mặt phẳng $(\alpha):x+y-3z-5=0$ và hai điểm $A(1;-1;2), B(-5;-1;0)$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

A. $T=5$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=-7$. **D.** $T=-9$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(9;6;11)$, $B(5;7;2)$ và điểm M di động trên mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ bằng

A. $\sqrt{105}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{102}$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;9)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$. Gọi (C) là giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

A. $(5;5;0)$. **B.** $\left(-\frac{1}{5};4;0\right)$. **C.** $\left(\frac{12}{5};-3;0\right)$. **D.** $(4;6;0)$.

Câu 32: Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1;1;3)$, $B(21;9;-13)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** −18.

Câu 33: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Biết rằng phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất, có dạng $ax+by+cz-3=0$. Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** −3. **C.** −2. **D.** −5.

Câu 34: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P):y-1=0$, đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1\\y=2-t\\z=1\end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M,N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M;\Delta)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Điểm M nằm trên (S) có tọa độ dương, mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A,B,C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng d, đồng thời cách A một khoảng bé nhất. Khoảng cách bé nhất đó là

A. $\sqrt{29}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** $\dfrac{\sqrt{34}}{9}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$ tâm I. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z}{1}$ và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh I, đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết (α) không đi qua gốc tọa độ, gọi $H(x_H,y_H,z_H)$ là tâm của đường tròn (C). Giá trị của biểu thức $T=x_H+y_H+z_H$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 39: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(0;3;-4)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{35}$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Điểm I thuộc d sao cho $AI+BI$ nhỏ nhất. Hoành độ của điểm I là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) có tọa độ là

A. $\left(4;3;5\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(4;3;10\sqrt{2}\right)$. **C.** $\left(4;3;5\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(4;3;10\sqrt{10}\right)$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;2;2),B(2;4;-6),C(0;2;-8)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Xét các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $AMB=90°$, đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất bằng

A. $2\sqrt{15}$. **B.** $2\sqrt{17}$. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và 2 điểm $A(6;3;-2)$, $B(1;0;-1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua B, vuông góc với d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến Δ là nhỏ nhất. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ

A. $(1;1;-3)$. **B.** $(1;-1;-1)$. **C.** $(1;2;-4)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\dfrac{51}{5}$. **B.** $S=\dfrac{49}{4}$. **C.** $S=\dfrac{49}{5}$. **D.** $S=\dfrac{51}{4}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-;3;4)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $\mathrm{A}(0;1;1)$, $\mathrm{B}(3;0;-1)$, $\mathrm{C}(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. $a+b+c=\dfrac{14}{5}$. **B.** $a+b+c=0$. **C.** $a+b+c=\dfrac{12}{5}$. **D.** $a+b+c=12$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$.

Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):-x+2y-2z+6=0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 6. **B.** -2. **C.** 12. **D.** -6.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng:

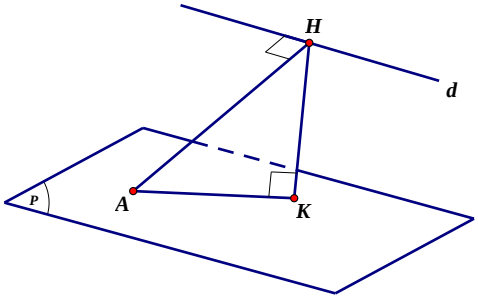
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 1.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta suy ra $H(1;1;1)$.

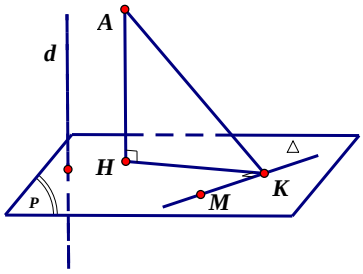
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d. Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P). Do d // (P) nên ta có $d(d,(P))=d(H,(P))=HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \le HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH. Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH}=(-1;2;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2;-1;-2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x-2y-3z-10=0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x+z+2=0$.

Câu 2: Chọn C



Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P)\perp d$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$ nên có phương trình: $(P):2x+2y-z+9=0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ. Khi đó: $AK \ge AH = const$ nên $AK_{\min}$ khi và chỉ khi $K \equiv H$. Đường thẳng AH đi qua $A(1,2,-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$ nên AH có phương trình tham số: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{cases}$.

Vì $H \in AH \Rightarrow H(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Lại $H\in(P)\Rightarrow 2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Vậy $\vec{u}=\overrightarrow{HM}=(1;0;2)$.

Câu 3: **Chọn B**

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases}x=1+t\\y=-7+2t\\z=-8-t\end{cases}$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB.

Ta tìm được điểm $K(3;-3;-10)$. Ta luôn có bất đẳng thức $d(M,(P))=MH\le MK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv K$. Khi đó $\overrightarrow{MH}=(-4;-2;-8)=-2(2;1;4)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;4)$. Vậy ta có $a+b=3$.

Câu 4: **Chọn B**

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và d. Khi đó ta có $AH\le AK$.

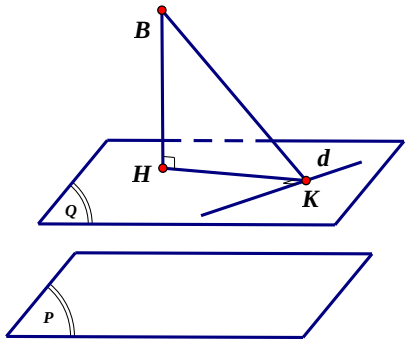
Vì $H\in d$ nên $H(2-t;-1+2t;1+t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1-t;2t;1+t)$.

Do $AH\perp d$ nên ta có $-(-1-t)+2.2t+1+t=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AH=AK$. Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$. Vậy (α): $1(x-2)+1(y+1)-1(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-z=0$.

Vẫn là đánh giá bất đẳng thức $AH\le AK$ nói trên, nhưng bài toán sau đây lại phát biểu hơi khác một chút.

Câu 5: **Chọn A**



Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và (Q) // (P). Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P). Ta lập được phương trình mặt phẳng (Q): $x-2y-2z+1=0$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d. Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B;d)=BK\ge BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH.

Đường thẳng d bây giờ đi qua A,H nên có phương trình $\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Câu 6: **Chọn A**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) và K là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Ta có: $d(A,(P))=AH\le AK$.

Suy ra: $d(A,(P))$ lớn nhất bằng AK khi và chỉ khi H trùng K.

Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\overrightarrow{AK}$.

Lấy $K(-1-2t;t;1+t)\in d$ và $\overrightarrow{AK}=(-2t-2;t-2;t-2)$.

Lại có: $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow(-2t-2)(-2)+1.(t-2)+1.(t-2)=0\Leftrightarrow t=0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AK}=(-2;-2;-2)$. Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $(1;1;1)$.

Câu 7: **Chọn C**

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Vì $0°\le\alpha\le 90°$ nên α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ lớn nhất.

Ta có $\cos\alpha=\frac{|1+2m-2(m-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{m^2-m+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\sqrt{6}}{3},\forall m$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Khi đó $(Q):x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+2019=0$. Dễ thấy điểm $M(-2019;1;1)$ thuộc mặt phẳng (Q).

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(-2019;1;1)$.

Câu 8: **Chọn D**

$\overrightarrow{AM}=(6;-7;1)$, vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(3;-4;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên a.

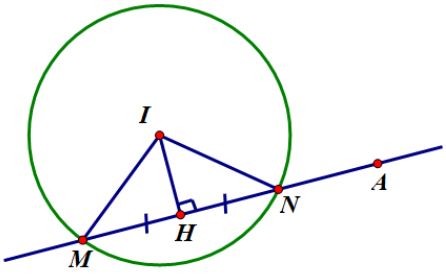
$d(A;a)=AH\le AM=\sqrt{86}\Rightarrow d(A;a)$ lớn nhất khi $H\equiv M$.

Khi đó a là đường thẳng đi qua M, song song với (α) và vuông góc với AM.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của $a\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AM}\end{cases}$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{n}\right]=(-3;-3;-3)=-3(1;1;1)$.

Chọn $\vec{u}=(1;1;1)$. Đáp án **D** thỏa mãn.

Câu 9: Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2-(-3)}=3.$

Ta có: $AI=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

Ta lại có: $S=AM+4AN$. Đặt $AM=x$ với $x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$

Mà $AM.AN=AI^2-R^2=34-9=25$ suy ra: $AN=\dfrac{25}{AM}$

Do đó: $S=f(x)=x+\dfrac{100}{x}$ với $x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$

$f'(x)=1-\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{x^2-100}{x^2}<0,\forall x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$

Do đó: $\min\limits_{\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]}f(x)=f\left(\sqrt{34}+3\right)=5\sqrt{34}-9.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A,M,N,I$ thẳng hàng và $AM=\sqrt{34}+3;AN=\sqrt{34}-3.$

Câu 10: Chọn B

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}_d=(0;1;-1)$.

Đường thẳng AC có một VTCP là $\vec{u}_1=(1;2;-1)$.

Đường thẳng AB có một VTCP là $\vec{u}_2=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0\ (*)$

Do d là đường phân giác của góc A nên ba véc tơ $\vec{u}_d,\vec{u}_1,\vec{u}_2$ đồng phẳng

Suy ra $\left[\vec{u}_d,\vec{u}_1\right].\vec{u}_2=0\Leftrightarrow a-b-c=0\Leftrightarrow a=b+c$.

Do tam giác ABC nhọn nên $(AC,d)<45^0,(AB,d)<45^0$.

Ta có $\left|\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_d)\right|=\left|\cos(\vec{u}_2,\vec{u}_d)\right|>\cos 45^0$.

$\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{2}.\sqrt{6}}=\dfrac{|b-c|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=2\left(b^2-2bc+c^2\right).$

Từ và suy ra $3(b+c)^2+b^2+c^2+4bc=0\Leftrightarrow 2b^2+5bc+2c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-2c\\c=-2b\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $b=-2c$ ta được $a=-c$.

Khi đó $P=a^2+b^2+c^2=6c^2$. Do điều kiện và $c\in\mathbb{Z}$ ta được $P=6c^2\geq 6$. Nên $P_{\min}=6$.

Trường hợp 2: Với $c=-2b$ ta được $a=-b$.

Khi đó $P=a^2+b^2+c^2=6b^2$. Tương tự trên ta có $P_{\min}=6$.

Câu 11: Chọn B

Ta có $M \in d \Rightarrow M\left(5+2t;2-t;-t\right),\ (t\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(3+2t;4-t;-4-t\right),\ \overrightarrow{BM}=\left(8+2t;-1-t;1-t\right)$.

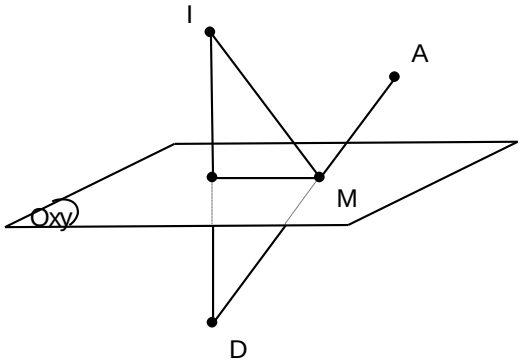
$$2MA^2+3MB^2=2\left[\left(3+2t\right)^2+\left(4-t\right)^2+\left(-4-t\right)^2\right]+3\left[\left(8+2t\right)^2+\left(-1-t\right)^2+\left(1-t\right)^2\right]$$

$$=30t^2+120t+280=30\left(t+2\right)^2+160\geq 160$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng 160.

Câu 12: Chọn C



Trung điểm của BC là $I\ -1;3;2$ suy ra $T=2\left|\overrightarrow{MA}\right|+2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2\ MA+MI$.

Điểm đối xứng với I qua mặt phẳng Oxy là $D\ -1;3;-2$.

Nhận xét: A,I cùng phía so với mặt phẳng Oxy nên D,A khác phía với Oxy .

Ta có $T=2\ MA+MI\ =2\ MA+MD\ \geq AD$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi A, M, D thẳng hàng với M nằm giữa A và D.

$\Rightarrow M=AD\cap Oxy$.

Đường thẳng (AD) qua điểm $A(1;0;3)$, có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{DA}=(2;-3;5)$ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3t\\z=3+5t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng $Oxy\ :z=0$.

Lúc đó $M\left(1+2t;-3t;3+5t\right)\in\left(AD\right)$ và $M\in\left(Oxy\right)\Rightarrow t=-\frac{3}{5}$.

$\Rightarrow M\left(\frac{-1}{5};\frac{9}{5};0\right)\Rightarrow x_0-y_0=-2$.

Câu 13: Chọn D

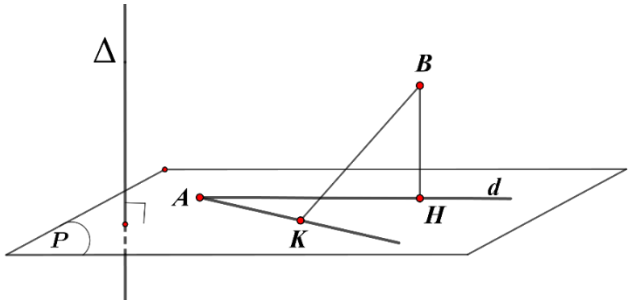
Ta có: $M\in d\Rightarrow M\left(2t+3;2t+5;t-2\right)$.

$$T=MA+MB=AM+BM=\sqrt{\left(2t-1\right)^2+\left(2t+2\right)^2+\left(t-2\right)^2}+\sqrt{\left(2t+2\right)^2+\left(2t-4\right)^2+\left(t-5\right)^2}$$

$=\sqrt{9t^2+9}+\sqrt{9t^2-18t+45}=3\left(\sqrt{t^2+1^2}+\sqrt{(1-t)^2+2^2}\right)\geq 3.\sqrt{(t+1-t)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{10}$.

Do đó: $T_{\min}=3\sqrt{10}\Leftrightarrow\dfrac{t}{1-t}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{17}{3};-\dfrac{5}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=\dfrac{23}{3}\approx 7,7\in(7;8)$.

Câu 14: Chọn B



• Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ. Chọn $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_{\Delta}=(2;2;-1)$.

$\Rightarrow(P)$ có phương trình: $2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$.

Khi đó mọi đường thẳng d đi qua A và vuông góc Δ thì d nằm trong (P).

• Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d và (P).

Ta có khoảng cách từ B đến d là $BK\geq BH=d\left(B,(P)\right)=6$.

Dấu bằng xảy ra khi d đi qua A và H.

• Tìm H là hình chiếu vuông góc của B trên (P).

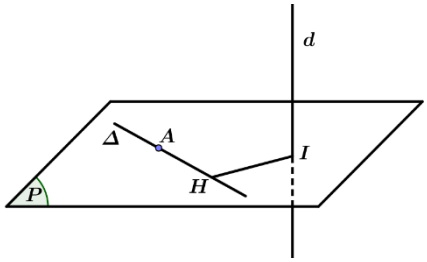
Đường thẳng a đi qua $B(1;2;-3)$ và vuông góc với (P), có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$.

Có $H=a\cap(P)\Rightarrow 2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow 9t+18=0\Leftrightarrow t=-2$

$\Rightarrow H(-3;-2;-1)$ và $\overrightarrow{AH}=(-1;0;-2)$ là một véctơ chỉ phương của d.

Vậy một véctơ chỉ phương của d là $\vec{u}(1;0;2)$.

Câu 15: Chọn B



Gọi (P) là mặt phẳng qua A, vuông góc với $d\Rightarrow(P):-x+2y+z-2=0$. Suy ra $\Delta\subset(P)$

Gọi $I=d\cap(P)\Rightarrow I(1;1;1)$, , H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ.

Ta có $d(d;\Delta)=IH\leq IA$. Dấu bằng xảy ra khi $H\equiv A$.

d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$, $\overrightarrow{IA}=(1;0;1)$

Vậy $\max d(d,\Delta)=IA$ khi Δ có 1 VTCP là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{IA}\right]=(2;2;-2)$ mà $\vec{v}=(a;b;4)$ là 1 VTCP

của Δ nên $\vec{v}=-2\vec{u}\Rightarrow a=-4,b=-4\Rightarrow a+b=-8$.

Câu 16: Chọn A

$M=(P)\cap oy\Rightarrow M(0;3;0)$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A lên đường thẳng d

Ta có $AH=d(A;d)$. Xét trong tam giác vuông AHM có $AH\le AM\Rightarrow AH$ max $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ M

$\Rightarrow d(A;d)$ max $\Leftrightarrow$ AM $\perp d$. Suy ra vecto chỉ phương của d: $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{n_P}\right]$.

$\overrightarrow{n_P}=(2;1;1)$, $\overrightarrow{AM}=(-1;1;-2)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=(-3;3;3)=-3(1;-1;-1)$.

Câu 17: Chọn D

$|z-3-4i|=2\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=2$.

Đặt $z_1=a+bi$, $z_2=c+di,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b),N(c;d)$.

$|z_1-z_2|=1\Rightarrow MN=1$. $P=|z_1|^2-|z_2|^2=OM^2-ON^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2$

$\Rightarrow P=\overrightarrow{OI}^2+2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2-\left(\overrightarrow{OI}^2+2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IN}^2\right)=2\left(\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IN}\right)=$

$\Rightarrow P=2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right)=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{NM}\ge-2.OI.MN\Rightarrow P\ge-10$

Dấu bằng xảy ra khi $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{NM}$ ngược hướng.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $P=|z_1|^2-|z_2|^2$ là -10.

Câu 18: Chọn A

Với điểm $M(x;y;z)\in(S)$ thì $x^2+y^2+z^2-4=0$ và điểm $I(3;0;6)$ là trung điểm BC và

$MA+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=MA+2\left|\overrightarrow{MI}\right|=MA+2MI$

$=\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}+2\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z-6)^2}$

$=\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2+3\left[x^2+y^2+z^2-4\right]}+2\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z-6)^2}$

$=2\left[\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z-6)^2}\right]$

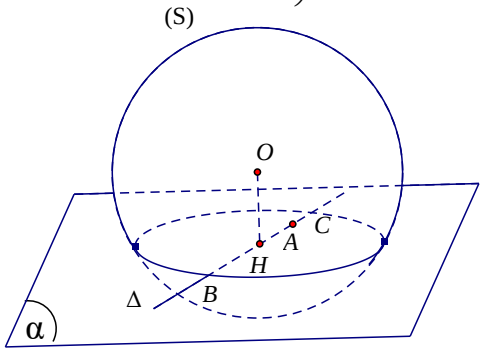
$\ge2\sqrt{(x+3-x)^2+(y-y)^2+(z-1+6-z)^2}=2\sqrt{34}$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases}\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{z-1}{6-z}=k>0\\ y=0\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(\dfrac{3\sqrt{127}-15}{34};0;\dfrac{9+5\sqrt{127}}{34}\right)$.

Câu 19: Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α),



Khi đó, BC lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến tâm $H\Rightarrow BC$ đi qua A, H

Phương trình IH đi qua I và vuông góc $(\alpha)\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$ thay vào $(\alpha)\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;7;3)$

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$. Vậy phương trình của Δ là $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Câu 20: Chọn A

Gọi $M(2;a;b)\in(\alpha)$; $N(c;d;2)\in(\beta)$ khi đó trung điểm của MN là $K\left(\dfrac{c+2}{2};\dfrac{a+d}{2};\dfrac{b+2}{2}\right)$.

Vì K thuộc Δ nên $\dfrac{c+2}{4}=\dfrac{a+d-2}{-2}=\dfrac{b}{-2}=t(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}a+d=2-2t\\b=-2t\\c=4t-2\end{cases}$.

Khi đó $MN=\sqrt{(c-2)^2+(a-d)^2+(b-2)^2}=\sqrt{(4t-4)^2+(a-d)^2+(2t+2)^2}$

$=\sqrt{20t^2-24t+20+(a-d)^2}=\sqrt{4\left(\sqrt{5}t-\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{64}{5}+(a-d)^2}\geq\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+d=2-2t\\b=-2t\\c=4t-2\\a-d=0\\t=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=d=\dfrac{2}{5}\\b=-\dfrac{6}{5}\\c=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(2;\dfrac{2}{5};-\dfrac{6}{5}\right),\ N\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{2}{5};2\right)$$

. Đối chiếu chọn đáp án A.

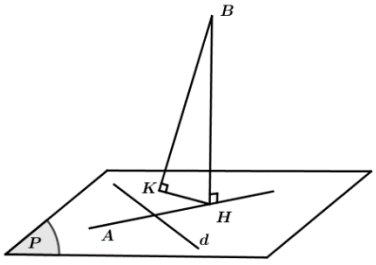
Câu 21: Chọn D

Đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và nhận $\vec{u}=(-1;1;2)$ làm một véc tơ chỉ phương.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và A. Khi đó $\vec{u}=(-1;1;2)$ và $\overrightarrow{AM}=(0;-6;-2)$ không cùng phương và có giá song song hoặc chứa trong (P). Suy ra có véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]=(10;-2;6)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):5x-y+3z-7=0$

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và Δ, ta luôn có $BH\geq BK$, suy ra BH nhỏ nhất khi H trùng K.



Đường thẳng qua B vuông góc với (P) có phương trình: $(BK):\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\end{cases}\ (t\in R)$.

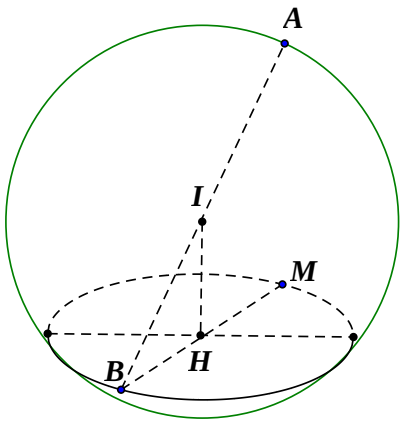
Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\\5x-y+3z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\\5(-1+5t)-2+t+3(4+3t)-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{2}{35}\\x=-\dfrac{5}{7}\\y=\dfrac{68}{35}\\z=\dfrac{146}{35}\end{cases}\Rightarrow K\left(-\frac{5}{7};\frac{68}{35};\frac{146}{35}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AK}=\left(-\frac{12}{7};-\frac{72}{35};\frac{76}{35}\right)$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;4;2)$, nhận $\vec{u}_\Delta=-\frac{35}{4}\overrightarrow{AK}$ hay $\vec{u}_\Delta=(15;18;-19)$ làm một véc tơ chỉ phương, suy ra có phương trình $(\Delta):\begin{cases}x=1+15t'\\y=4+18t'\\z=2-19t'\end{cases}\ (t'\in R)$

.

Câu 22: Chọn C



Ta có $M\in(\alpha)$ và $AMB=90°$ suy ra M nằm trên đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng α và mặt cầu (S) đường kính AB.

Lại có $B\in(\alpha)$ suy ra B và M cùng nằm trên đường tròn C.

Khi đó MB lớn nhất khi và chỉ khi MB là đường kính của đường tròn (C).

Gọi I là tâm mặt cầu (S) suy ra $I\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$, H là tâm đường tròn (C).

α có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}(2;2;-1)$.

Đường thẳng IH vuông góc với (α) nên nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}(2;2;-1)$ là vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng $IH:\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+2t\\y=2t\\z=-1-t\end{cases}$.

Ta có $H\left(-\frac{1}{2}+2t;2t;-1-t\right)$.

$H\in(\alpha)\Leftrightarrow 2\left(-\frac{1}{2}+2t\right)+2(2t)-(-1-t)+9=0\Leftrightarrow t=-1$. Suy ra $H\left(-\frac{5}{2};-2;0\right)$.

Phương trình đường thẳng BM đi qua B nhận $\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)=-\frac{1}{2}(1;0;2)$ làm vectơ chỉ phương là: $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$.

Câu 23: Chọn A

Mặt phẳng α qua A và song song với (P) có phương trình: $x+y-z+2=0\Rightarrow d\subset(\alpha)$.

Đường thẳng Δ có vtcp là $\vec{u}=(2;1;-3)$, (α) có vtpt là $\vec{n}_\alpha=(1;1;-1)$.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=4-3t\end{cases}$.

Gọi B là giao điểm của Δ và α. Tọa độ điểm B ứng với t là nghiệm phương trình: $-1+2t+t-(4-3t)+2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow B\left(0;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Xét đường thẳng Δ_1 là đường thẳng đi qua A song song với Δ. Phương trình của Δ_1 là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=2-3t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $\Delta_1\Rightarrow H(1+2t,-1+t,2-3t)$

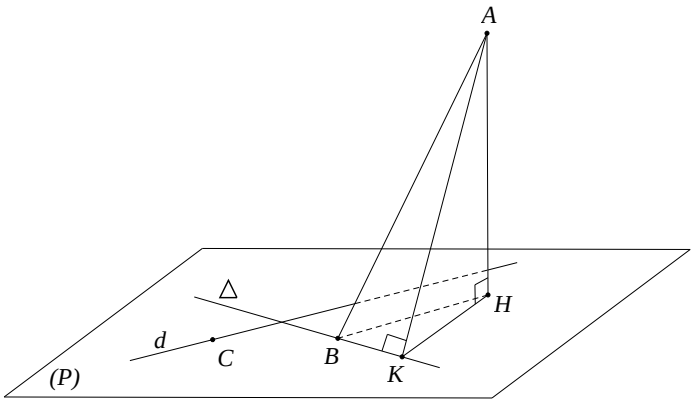
$\overrightarrow{BH}=\left(1+2t;t-\frac{3}{2};-3t\right)$. Ta có $\overrightarrow{BI}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2+4t+t-\frac{3}{2}+9t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{28}$.

Khi đó $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{13}{14};\frac{-43}{28};\frac{3}{28}\right)=\frac{1}{28}(26;-43;3)=\frac{1}{28}\vec{u}_1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=[\vec{u}_1;\vec{n}_\alpha]=(40;29;69)$.

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1+29t\\z=2+69t\end{cases}$.

Câu 24: Chọn D



Ta có: $C \in d \Rightarrow C(1;0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2;0;-3), \overrightarrow{u_d} = (2;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa B và đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu kẻ từ A xuống mặt phẳng (P) và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{u_d}\right] = (3;-4;2)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng Δ. Suy ra $d(A;\Delta) = AK$.

Ta thấy ΔABK vuông tại K nên $AK \le AB$.

$\Rightarrow AK$ đạt giá trị lớn nhất khi K trùng với B, khi đó $AK = AB$.

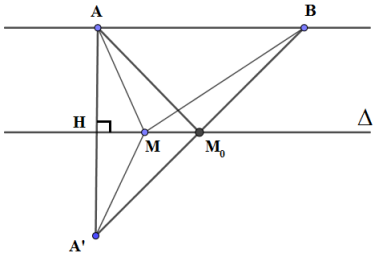
Do đó: $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{BA}; \vec{n}\right] = (-8;1;14)$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{-14}$.

Câu 25. Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2;-2;4)$ cùng phương với $\vec{u}(1;-1;2)$ và $A(1;1;0) \notin \Delta$

$\Rightarrow AB // \Delta \Rightarrow AB$ và Δ đồng phẳng.



Xét mặt phẳng chứa AB và Δ:

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ; (α) là mặt phẳng qua A, vuông góc với Δ

Khi đó, giao điểm H của Δ với (α) là trung điểm của AA'

(α) có phương trình: $x - y + 2z = 0$

Giả sử $H(-1+t;1-t;-2+2t)$, $H \in (\alpha) \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(0;0;0)$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1;-1;0)$

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \ge A'B \Rightarrow (MA+MB)_{\min} = A'B$ khi và chỉ khi M trùng với M_0 là giao điểm của $A'B$ và Δ

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;-1;0)$, có phương trình: $\begin{cases} x=-1+t' \\ y=-1 \\ z=t' \end{cases}$. Mà $\Delta:\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=-2+2t \end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -1+t=-1+t' \\ 1-t=-1 \\ -2+2t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=t' \\ t=2 \\ -2+2t=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=2 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow M_0(1;-1;2)$

Vậy, để $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $M(1;-1;2)$.

Câu 26. Chọn D

Δ qua $C(-1;1;-2)$, và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AB}=(-2;-1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\overrightarrow{AC}\neq 0$ nên $AB;\Delta$ không đồng phẳng

Vì điểm M thuộc Δ nên ta có $M(-1+t;1-t;-2+2t)$, $t\in\mathbb{R}$. Lúc đó

$$P=|MA-MB|=\left|\sqrt{(t-2)^2+t^2+(2t-2)^2}-\sqrt{(-t)^2+(t-1)^2+(2t-3)^2}\right|$$

$$=\left|\sqrt{6t^2-12t+8}-\sqrt{6t^2-14t+10}\right|.\ P=\sqrt{6}\left|\sqrt{(t-1)^2+\frac{1}{3}}-\sqrt{\left(t-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{6}}\right|$$

Đặt $\vec{u}=\left(t-1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{v}=\left(t-\frac{7}{6};\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$. Ta có $\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|\le|\vec{u}-\vec{v}|$.

Tức là $P\le\sqrt{6}.\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t-1}{t-\frac{7}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\Leftrightarrow t=3+\frac{\sqrt{33}}{3}$.

Với ta có $a-b+c=4t-4=8+\frac{4\sqrt{33}}{3}$.

Câu 27. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;\ -1;\ 5)$, phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x=-t \\ y=1-t \\ z=-3+5t \end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

Xét vị trí tương đối giữa AB và Δ ta có AB cắt Δ tại $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow C$ là trung điểm AB.

$T=\left|MA-MB\right|\le AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M\equiv A$ hoặc $M\equiv B$. Do đó $T_{\max}=AB=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

Câu 28. Chọn B

Ta có: $\left(x_A-y_A+z_A+1\right)\left(x_B-y_B+z_B+1\right)=\left(1-1+0+1\right)\left(3+1+4+1\right)>0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α).PT đường thẳng $AH:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$.

Do đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=t\\x-y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{3}\\x=\frac{2}{3}\\y=\frac{4}{3}\\z=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

Do đó $H\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$. Gọi A' đối xứng với A qua (α), suy ra $A'\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Ta có $MA+MB=MA'+MB\ge A'B\Rightarrow P=A'B=6$.

Câu 29. Chọn C

Ta có: $\left(x_A+y_A-3z_A-5\right)\left(x_B+y_B-3z_B-5\right)=\left(1-1-3.2-5\right)\left(-5-1-3.0-5\right)>0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng $AH:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+t\\z=2-3t\end{cases}$.

Do đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=1+t\\y=-1+t\\z=2-3t\\x+y-3z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\x=2\\y=0\\z=-1\end{cases}$.

Do đó $H(2;0;-1)$.

Gọi A' đối xứng với A qua (α), suy ra $A'(3;1;-4)$.

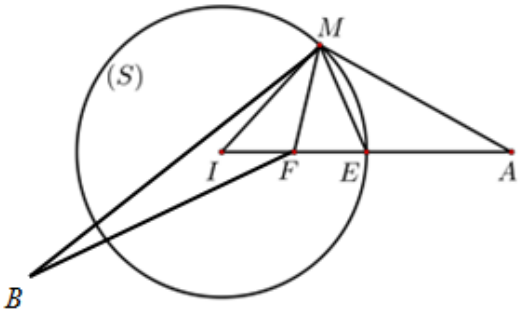
Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất khi $M=A'B\cap(\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $A'B:\begin{cases}x=3-4t\\y=1-t\\z=-4+3t\end{cases}$.

Do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=3-4t\\y=1-t\\z=-4+3t\\x+y-3z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{12}{11}\\x=-\dfrac{15}{11}\\y=-\dfrac{1}{11}\\z=-\dfrac{20}{11}\end{cases}$.

Do đó $M\left(-\frac{15}{11};-\frac{1}{11};-\frac{20}{11}\right)$, $T=a+2b+3c=-7$.

Câu 30. Chọn C



Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=6$.

Nhận xét $IA=12=2R$.

Gọi E là giao điểm của IA và mặt cầu (S) suy ra E là trung điểm của IA nên $E(5;4;7)$.

Gọi F là trung điểm của IE suy ra $F(3;3;5)$.

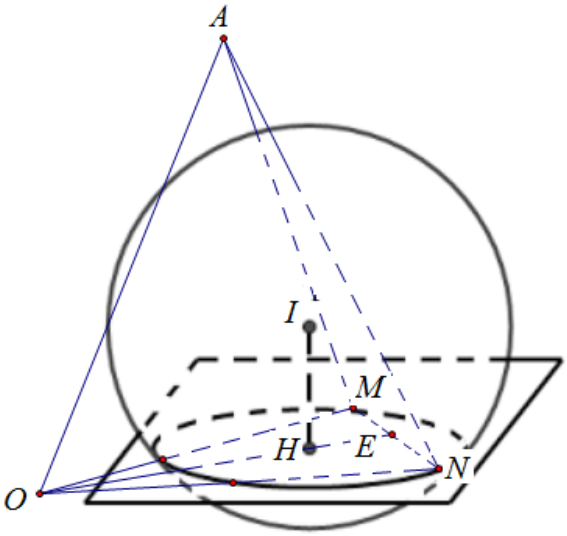
ΔMIF và ΔAIM có góc AIM chung và có $\frac{IF}{IM}=\frac{IM}{IA}=\frac{1}{2}$.

Nên ΔAIM đồng dạng $\Delta MIF(c.g.c)\Rightarrow\frac{MA}{MF}=\frac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

$MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2BF=2\sqrt{29}$.

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm FB và mặt cầu (S).

Câu 31. Chọn A



$(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$ có tâm $I(3;4;4)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(Oxy)\Rightarrow H(3;4;0)$.

Đường tròn (C) có tâm là $H(3;4;0)$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{25-16}=3$.

Gọi E là trung điểm của MN, suy ra $ME=\sqrt{5}$ và $HE\perp MN$.

$OH=5, HE=\sqrt{r^2-ME^2}=2$. Suy ra O nằm ngoài (C).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên MN.

$V_{OAMN}=\frac{1}{3}d\left(A;(Oxy)\right).S_{\Delta OMN}=\frac{1}{3}.9.\frac{1}{2}OK.MN=3\sqrt{5}.OK\le 3\sqrt{5}.OE\le 3\sqrt{5}.(OH+HE)=21\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $K\equiv E$ và O,H,E thẳng hàng (H nằm trong đoạn OE).

Khi đó: $\overrightarrow{OE}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OH}\Rightarrow E\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$.

MN đi qua điểm $E\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$ và nhận $\vec{u}=\vec{k}\wedge\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{28}{5};\frac{21}{5};0\right)$ làm một vectơ chỉ phương.

Do đó MN có phương trình: $\begin{cases}x=\frac{21}{5}-\frac{28}{5}t\\ y=\frac{28}{5}+\frac{21}{5}t\\ z=0\end{cases}$. Vậy, MN đi qua điểm $(5;5;0)$.

Câu 32. Chọn B

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(6\,;3\,;-1)$.

Khi đó $3MA^2+MB^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=4MI^2+3IA^2+IB^2$.

Do $3IA^2+IB^2$ không đổi vì ba điểm $A;B;I$ cố định nên $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S), ($J(2;1;3)$ là tâm của mặt cầu (S)). Ta có phương trình đường thẳng IJ là $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3-2t\end{cases}\Rightarrow IJ\cap(S)=\begin{bmatrix}M_1(4;2;1)\\M_2(0;0;5)\end{bmatrix}$.

Kiểm tra $IM_1<IM_2\,(3<9)$ nên $M_1(4;2;1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T=a.b.c=8$.

Câu 33. Chọn C

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), đường thẳng d.

Ta có: $AH\geq AK$.

Suy ra, mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất khi và chỉ khi (P) đi qua điểm H và vuông góc AH. Gọi $H(1+2t;t;2+2t)\in d$ ta có:

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0$ với $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d\Rightarrow t=1\Rightarrow H(3;1;4)$.

Nên (P) đi qua điểm $H(3;1;4)$ nhận $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $x-4y+z-3=0$. Vậy $T=a+b+c=1-4+1=-2$.

Câu 34. Chọn A

Ta có $\begin{cases}\Delta\perp(P)\\\Delta\cap(P)=\{I(1;1;1)\}\end{cases}$.

Vì $d(M;\Delta)=2$ nên điểm M thuộc mặt trụ tròn xoay (H) có trục là đường thẳng Δ.

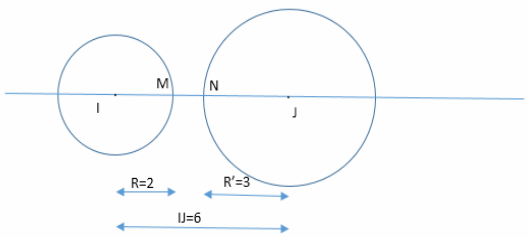
Khi đó M nằm trên giao của mặt phẳng (P) và mặt trụ (H) là đường tròn (C) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=2$. Giả sử $N(x;y;z)$.

Do $NA=2NB\Leftrightarrow NA^2=4NB^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-14z+42=0$.

Suy ra N nằm trên mặt cầu (S) có tâm $J(1;1;7)$ và bán kính $R'=3$.

Mặt khác: $\begin{cases}N\in(P)\\J\in(P)\end{cases}$, do đó N nằm trên giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là đường tròn (C') có tâm $J(1;1;7)$và bán kính $R'=3$.

Bài toán đã cho trở thành: 'Trên mặt phẳng (P) cho hai điểm M,N. Biết M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=2$ và N thuộc đường tròn (C') có tâm $J(1;1;7)$, bán kính $R'=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN."



Từ hình vẽ trên, dễ thấy $MN_{\min}=\text{IJ}-(IM+JN)=6-(2+3)=1$.

Câu 35. Chọn C

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)\ (a>0, b>0, c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow bcx+acy+abz-abc=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên $d(O,(P))=R$ hay $d(O,(ABC))=1$.

Khi đó $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=1 \Leftrightarrow a^2b^2c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ (1)$.

Ta có :

$T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$.

$T=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2c^2$.

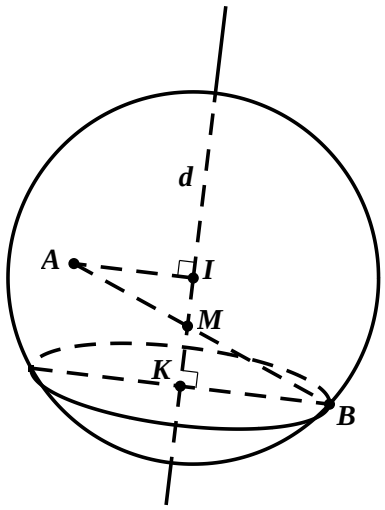
$T\ge 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}+a^2b^2c^2=\left(1+\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^3$.

Mặt khác từ suy ra $a^2b^2c^2\ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} \Leftrightarrow a^6b^6c^6\ge 27a^4b^4c^4 \Leftrightarrow a^2b^2c^2\ge 27$.

Suy ra $T\ge\left(1+\sqrt[3]{27}\right)^3=64$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 64 khi: $\begin{cases} a=b=c \\ a^2=b^2=c^2 \\ a^2b^2c^2=27 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 36.



Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4)\Rightarrow d\perp(P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I\in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB\perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2)\Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0\Rightarrow IA\perp d$.

Ta tính được $IK=\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107\right|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Do M di động trên đường thẳng d và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap d$.

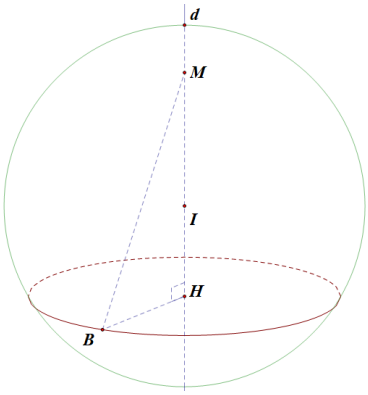
Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30}\Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R=27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3;-4;-5)$ và vuông góc với (P).

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r=2$. $M\in d\Leftrightarrow M(1+2t;2+3t;3+4t)$.

Ta có $T=MA+MB=MA+\sqrt{MH^2+r^2}$.

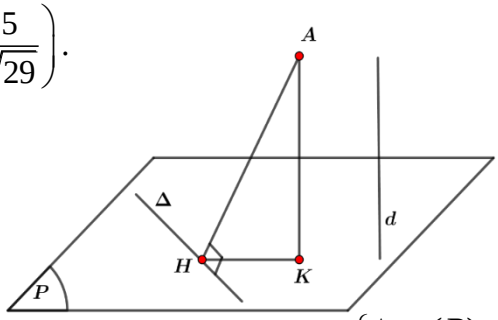
Lại có $MH=d(M;(P))=\dfrac{|29t-87|}{\sqrt{29}}=\left|\sqrt{29}t-3\sqrt{29}\right|$.

Suy ra $T=\sqrt{29t^2+116t+125}+\sqrt{29(t-3)^2+4}=\sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2+\dfrac{9}{29}}+\sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2+\dfrac{4}{29}}$.

Xét $\vec{u}=\left(t+2;\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right),\vec{v}=\left(3-t;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=\left(5;\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Do đó $T=\sqrt{29}\left(|\vec{u}|+|\vec{v}|\right)\geq\sqrt{29}|\vec{u}+\vec{v}|=5\sqrt{50}$.

Câu 37. Chọn B



Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ qua M và vuông góc với đường thẳng d, khi đó $\begin{cases}\Delta\subset(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}$.

Với $\vec{u}_d=(2;2;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=(2;2;-1)$. Ta có $(P):\ 2x+2y-z+9=0.$

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên mp(P) và đường thẳng Δ.

Ta thấy $d\left(A;\Delta\right)=AH\geq AK.$ Nên $Min\ d\left(A;\Delta\right)=AK$ khi và chỉ khi $H\equiv K$.

Mà $AK=d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|2.1+2.2+3+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=6.$ Vậy $Min\ d\left(A;\Delta\right)=6$.

Câu 38. Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Gọi x là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) , $0<x<\sqrt{6}$. Khi đó, thể tích khối nón đỉnh I , đáy là đường tròn (C) là: $V=\dfrac{1}{3}x\ 6-x^2\ =-\dfrac{x^3}{3}+2x$

Xét hàm số $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+2x,$ với $0<x<\sqrt{6}$ có $f'(x)=-x^2+2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[0;\sqrt{6}\right]$, có $f(0)=f(\sqrt{6})=0,\ f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, nên $\underset{0;\sqrt{6}}{Max}\ f(x)=\sqrt{2}$

đạt được khi $x=\sqrt{2}$.

Gọi $\vec{u}=(1;-4;1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d. Vì $IH\perp(\alpha)$ nên tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{IH}=k\vec{u}$, suy ra $\left|\overrightarrow{IH}\right|=|k|.\left|\vec{u}\right|\Rightarrow|k|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow k=\pm\dfrac{1}{3}$.

Với $k=\dfrac{1}{3}:\ \overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{3}\vec{u}\Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{7}{3};\dfrac{4}{3}\right)\Rightarrow(\alpha):x-4y+z-6=0$

Với $k=-\dfrac{1}{3}:\ \overrightarrow{IH}=-\dfrac{1}{3}\vec{u}\Rightarrow H\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow(\alpha):x-4y+z=0$. Vậy $x_H+y_H+z_H=\dfrac{1}{3}$

Câu 39. Chọn A

Có góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (Oxy) là $\left(d;(\mathrm{Oxy})\right)$

góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (Oxy) là $\left((\alpha);(\mathrm{Oxy})\right)$.

Ta có $\left(d;(\mathrm{Oxy})\right)\leq\left((\alpha);(\mathrm{Oxy})\right)\Rightarrow\left((\alpha);(\mathrm{Oxy})\right)_{\min}\Leftrightarrow\left(d;(\mathrm{Oxy})\right)=\left((\alpha);(\mathrm{Oxy})\right)$

$$\sin\left(d,(\alpha)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\cos\left(d,(\alpha)\right)=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

Gọi VTPT của (α) là $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2\neq 0$

Vì $d\subset(\alpha)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n}\Rightarrow 2a-b-c=0\Rightarrow c=2a-b$

$$\cos\left((Oxy),(\alpha)\right)=\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2+(2a-b)^2}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$$

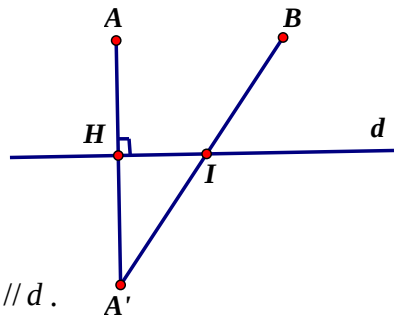
$$\Leftrightarrow 36\left(4a^2-4ab+b^2\right)=30\left(5a^2-4ab+2b^2\right)$$

$\Leftrightarrow 6a^2+24ab+24b^2=0\Leftrightarrow 6(a+2b)^2=0\Leftrightarrow a=-2b$. Chọn $\vec{n}=(2;-1;5)$.

Vậy (α) đi qua $A(-1;1;2)\in d$ và có VTPT $\vec{n}=(2;-1;5)\Rightarrow(\alpha):2x-y+5z-7=0$.

$$d_{(M,(\alpha))}=\frac{30}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}.$$

Câu 40. Chọn A



Đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(3;-2;2)$.

Ta thấy $A\notin d$ và $\overrightarrow{AB}=(6;-4;4)=2(3;-2;2)$. Suy ra $AB//d$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. Ta có $AI+BI=A'I+BI\geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi A', I, B thẳng hàng.

Vậy $\min(AI+BI)=A'B$ trong đó $I=A'B\cap d$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d. Ta tìm được $H(-1;2;2)$

Do H là trung điểm AA' nên suy ra $A'(-3;2;5)$.

Do $AB//d$ nên I là trung điểm $A'B$ nên suy ra $I(2;0;4)$.

Cách 2: Tìm tọa độ điểm H trong bài này từ nhận xét sau:

Từ phương trình đường thẳng d ta thấy d đi qua điểm $H(-1;2;2)$.

Có $\overrightarrow{AH}=(-4;0;6)$ và $\overrightarrow{u_d}=(3;-2;2)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow AH\perp d$.

Vậy H là hình chiếu của A lên đường thẳng d.

Câu 41. Chọn A

Theo đề $\begin{cases}M\in Oz\Rightarrow M(0;0;m)\\ N\in d\Rightarrow N(4-3t;3+4t;0).\\ d\subset(Oxy)\end{cases}$

Vì A là hình chiếu vuông góc của O trên d nên tìm được $A(4;3;0)$. I là trung điểm đoạn thẳng $OA\Rightarrow I\left(2;\frac{3}{2};0\right)$.

Mặt khác $MN=OM+AN\Rightarrow\sqrt{(3t-4)^2+(4t+3)^2+m^2}=|m|+5|t|\quad(*)$

$\Leftrightarrow 2|mt|=5\Leftrightarrow |mt|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow |m|=\frac{5}{2|t|}(t\neq 0)$.

Trên tia đối của tia Oz, lấy điểm H thỏa $OH=AN$. Ta chứng minh được $\Delta IMH=\Delta IMN$.

Khi đó $S_{\Delta IMN}=S_{\Delta IMH}=\frac{1}{2}IO.MH=\frac{5}{4}MN=\frac{5}{4}(|m|+5|t|)$ do(*).

$=\frac{5}{4}\left(\frac{5}{2|t|}+5|t|\right)=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{2|t|}+|t|\right)\geq\frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Dấu "=" đạt tại $\frac{1}{2|t|}=|t|\Leftrightarrow|t|=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow|m|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Vậy $M\left(0;0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=\left(4;3;-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right);\overrightarrow{u_d}=(-3;4;0)$.

Mặt phẳng (M,d) có một VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MA};\overrightarrow{u_d}\right]=\left(10\sqrt{2};\frac{15\sqrt{2}}{2};25\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(4;3;5\sqrt{2}\right)$.

Câu 42. Chọn B

Vì $AMB=90°$ nên ta có điểm M thuộc mặt cầu (S).

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-2)$ là trung điểm của AB và bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\sqrt{17}$.

Mặt khác điểm M thuộc mặt phẳng (P) nên ta có tập hợp điểm M là đường tròn $(C)=(S)\cap(P)$.

Đường tròn (C) có tâm O là hình chiếu của điểm $I(2;3;-2)$ lên mặt phẳng (P) và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{17-3}=\sqrt{14}$.

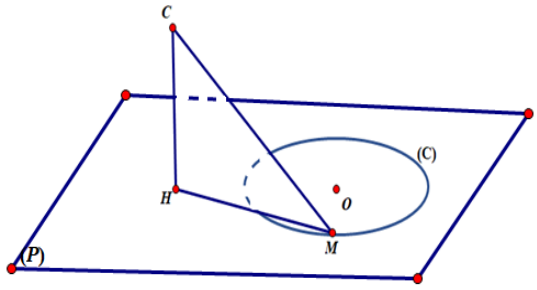
Tìm tọa độ điểm O:

Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P). Phương trình đường thẳng (d) là: $\begin{cases}x=2+t\\y=3+t\\z=-2+t\end{cases}$.

Vì O là hình chiếu của điểm $I(2;3;-2)$ lên mặt phẳng (P) nên $O=(d)\cap(P)$.

Xét $(2+t)+(3+t)+(-2+t)=0\Leftrightarrow 3t+3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow O(1;2;-3)$.

Vậy đường tròn (C) nằm trên mặt phẳng (P) có tâm $O(1;2;-3)$ bán kính $r=\sqrt{14}$.



Gọi H là hình chiếu của điểm C lên mặt phẳng (P). Tương tự tìm tọa độ điểm O ta có $H(2;4;-6)$. Ta có $CM=\sqrt{CH^2+HM^2}=\sqrt{12+HM^2}$.

Do đó CM đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi HM lớn nhất.

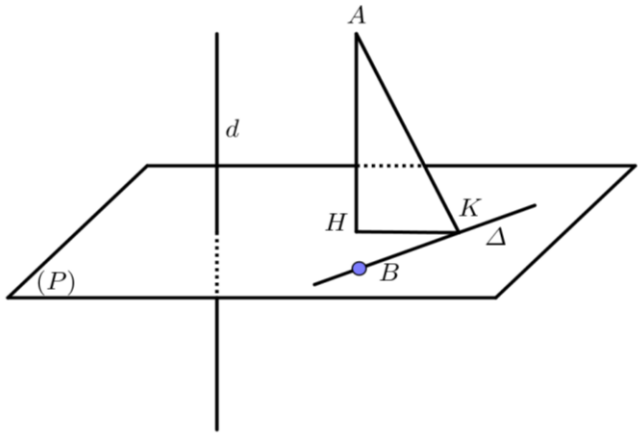
Ta có $HM\le HO+r\le 2\sqrt{14}\Rightarrow HM_{\max}=2\sqrt{14}\Rightarrow CM_{\max}=\sqrt{12+\left(2\sqrt{14}\right)^2}=2\sqrt{17}$.

Câu 43. Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với d; $(P):2x+y+z-1=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên (P), ta có: $H(2;1;-4)$

Ta có: $\Delta\subset(P)$ nên $d(A;\Delta)\ge d(A;(P))$;



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\in\Delta$.

Một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{BH}=(1;1;-3)$.

Câu 44. Chọn B

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Leftrightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.

$$d(O;(ABC))=\frac{\left|\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=P.\ P_{\max}\Leftrightarrow T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ min.$$

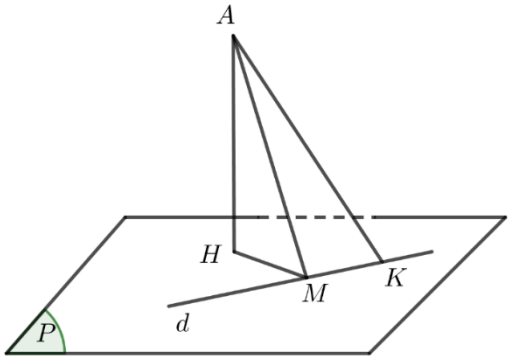
$$T=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{16c^2}\ge\frac{(1+2+4)^2}{a^2+4b^2+16c^2}=\frac{7^2}{49}=1.$$

$S_{\min}=1$. Dấu bằng xảy ra $\frac{1}{a^2}=\frac{2}{4b^2}=\frac{4}{16c^2}\Rightarrow 2b^2=a^2;\ 4c^2=a^2$.

$$a^2+4b^2+16c^2=49\Leftrightarrow a^2+4\frac{a^2}{2}+16\frac{a^2}{4}=49\Leftrightarrow a^2=7,\ b^2=\frac{7}{2},\ c^2=\frac{7}{4}.$$

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=\frac{49}{4}$.

Câu 45. Chọn D



Ta có:

d đi qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(2;1;2)$.

(S) có tâm $I(3;2;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Ta có: $d(A;(P))\le d(A;d)$. Dấu "=" xảy ra khi (P) chứa d và vuông góc với AK.

Khi đó: (P) có VTPT là $\vec{n}_P=\left[\vec{n}_{(AKM)},\vec{u}_d\right]$.

Vì $\vec{n}_{(AKM)}=\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{AM}\right]=(-6;6;3)\Rightarrow\vec{n}_P=(9;18;-18)=9(1;2;-2)$.

$\Rightarrow(P):(x-1)+2(y+2)-2z=0\Rightarrow(P):x+2y-2z+3=0$. Ta có: $d=d(I;(P))=4$.

Vậy bán kính đường tròn cần tìm: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{20-16}=2$.

Câu 46. Chọn A

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ có tâm $I(1;1;1)$. Gọi $G(x;\,y;\,z)$ là điểm thỏa mãn

$$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(0-x)+2(3-x)+(0-x)=0\\3(1-y)+2(0-y)+(21-y)=0\\3(1-z)+2(-1-z)+(-19-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\\z=-3\end{cases}\Rightarrow G(1;\,4;-3).$$

Ta có:

$$T=3MA^2+2MB^2+MC^2$$
$$=3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+3GA^2+2MG^2+4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+2GB^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+GC^2$$
$$=6MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+3GA^2+2GB^2+GC^2=6MG^2+3GA^2+2GB^2+GC^2$$

$T_{\min}\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu (S), sao cho M và G cùng phía với I

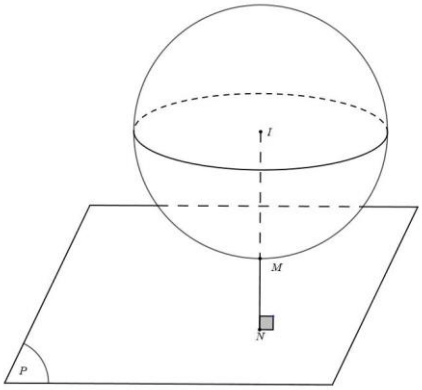
Phương trình đường thẳng $IG:\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\end{cases}$

$M = IG \cap (S)$ nên tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{5} \\ t = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right. . \text{ Khi đó : } \left[\begin{array}{l} M_1\left(1; \dfrac{8}{5}; \dfrac{1}{5}\right) \\ M_2\left(1; \dfrac{2}{5}; \dfrac{9}{5}\right) \end{array}\right.$$

Vì $M_1G < M_2G$ nên điểm $M \equiv M_1\left(1; \dfrac{8}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$. Vậy $a + b + c = \dfrac{14}{5}$.

Câu 47. Chọn B



Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108$. Vậy điểm M thuộc mặt cầu tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R = 6\sqrt{3}$.

Vậy MN nhỏ nhất khi M, N thuộc đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Gọi (d) là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó $(d): \begin{cases} x = -6 - t \\ y = 6 + 2t \\ z = -6 - 2t \end{cases}$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -6 - t \\ y = 6 + 2t \\ z = -6 - 2t \\ -x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 - t \\ y = 6 + 2t \\ z = -6 - 2t \\ 6 + t + 12 + 4t + 12 + 4t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 2 \\ t = -4 \end{cases} .$$

$\Rightarrow N(-2;-2;2)$. Do đó $T = -2 - 2 + 2 = -2$.

Câu 48. Chọn D

Vì $M \in d$ nên $M(-1+t; t; 1+t)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (-1+t; t+1; t-1)$, $\overrightarrow{AB} = (1;2;0)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = (2-2t; t-1; t-3)$. Diện tích tam giác MAB:

$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2-2t\right)^2+\left(t-1\right)^2+\left(t-3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-16t+14}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{6\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{10}{3}}\ge\sqrt{\frac{5}{6}}$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{4}{3}$.

Do đó diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Khi đó $T=a+2b+3c=10$.

Câu 49. Chọn D

Vì $M\in d$ nên $M\left(-1+t;t;1+t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(-1+t;t+1;t-1\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(1;2;0\right)$. Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=\left(2-2t;t-1;t-3\right)$

Diện tích tam giác MAB: $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2-2t\right)^2+\left(t-1\right)^2+\left(t-3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-16t+14}$

$=\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow t=\frac{4}{3}$. Do đó $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Khi đó $T=a+2b+3c=10$.

Câu 50. Chọn C

Vì $M\in d$ nên $M\left(-1+t;t;1+t\right)$. Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(-1+t;t+1;t-1\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(1;2;0\right)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=\left(2-2t;t-1;t-3\right)$. Diện tích tam giác MAB:

$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2-2t\right)^2+\left(t-1\right)^2+\left(t-3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-16t+14}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{5}{3}\end{array}\right.$.

Do đó $M\left(0;1;2\right)$ hoặc $M\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Vậy có hai điểm M thuộc d để tam giác MAB có diện tích bằng 1.

CHỦ ĐỀ 4 : TỌA ĐỘ HÓA VÀ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

LÍ THUYẾT

➢ LƯU Ý MỘT SỐ CÔNG THỨC SAU ĐÂY

❖ Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$

- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ $\quad$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
- Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$
- Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

❖ Góc giữa hai mặt phẳng:

- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(0^o\le\varphi\le 90^o\right)$

$(P):Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q):A'x+B'y+C'z+D'=0$

- $\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

❖ Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

$$d(M_0,\alpha)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

❖ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

❖ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$$d(d,d')=\frac{\left|[\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{a'}]\right|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}$$

❖ Góc giữa hai đường thẳng:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{\left|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

❖ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

$$\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

❖ Mẹo nhớ công thức về góc trong hình học Oxyz:

- Cùng loại dùng Cos (Góc giữa đường thẳng với đường thẳng, mặt phẳng với mặt phẳng)
- Khác loại dung Sin (Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng)

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM. Biết $HB=HC$, $HBC=30°$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng $60°$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

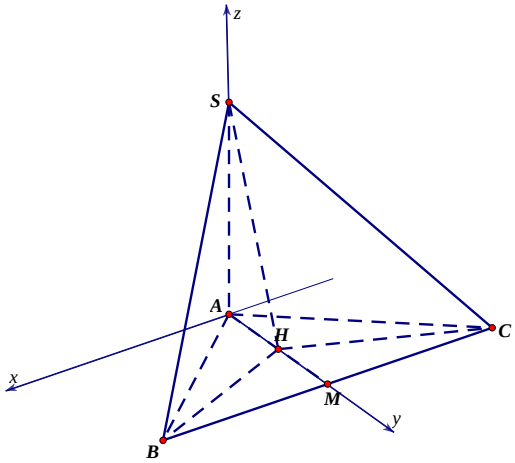
Lời giải

Chọn B

Từ M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM, $HB=HC$ suy ra $AM\perp BC$, hay tam giác ABC cân đỉnh A.

Đặt $BC=a\Rightarrow BM=\frac{a}{2}$. Do $HBC=30°$ suy ra $HM=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Đặt $SA=b$.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có $A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$; $H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $S(0;0;b)$.

Ta có $\overrightarrow{HC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$; $\overrightarrow{SH}=\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};-b\right)$.

Nên $\left[\overrightarrow{HC},\overrightarrow{SH}\right]=\left(-\frac{ab\sqrt{3}}{6};-\frac{ab}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right)$.

Suy ra (SHC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=\left(2b\sqrt{3};6b;a\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng (HBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng $60°$ nên

$$\cos\left((SHC),(HBC)\right)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{k}\right|}\Leftrightarrow\cos 60°=\frac{\left|a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12b^2+36b^2+3a^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{12b^2+36b^2+3a^2}=2\left|a\sqrt{3}\right|\Leftrightarrow b=a\sqrt{3}/4.$$

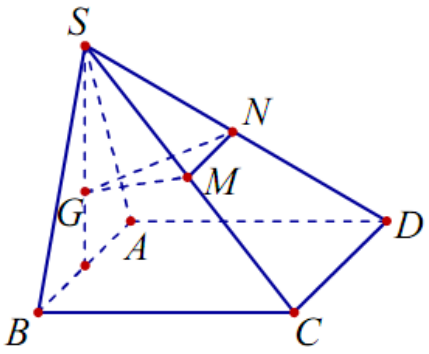
Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm "TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"
B LEARN

Khi đó $\vec{n}_1=\left(\frac{3a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$, đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương $\vec{i}=(1;0;0)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC), ta có

$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}_1.\vec{i}|}{|\vec{n}_1|.|\vec{i}|}=\frac{\left|\frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{27a^2}{4}+3a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Do đó $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

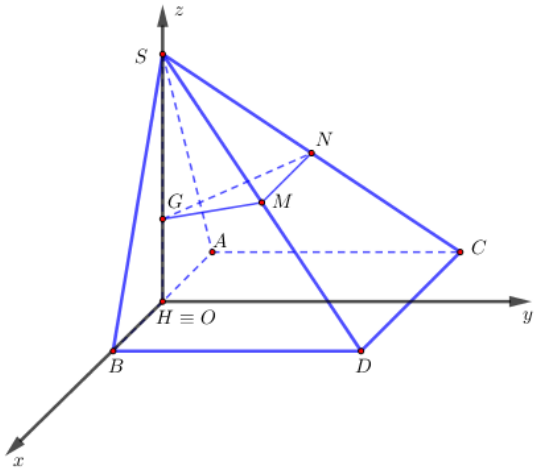
VÍ DỤ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M,N lần lượt là trung điểm của SC,SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{2\sqrt{39}}{39}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$

suy ra $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GN}\right]=\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{24};\frac{a}{4}\right)$

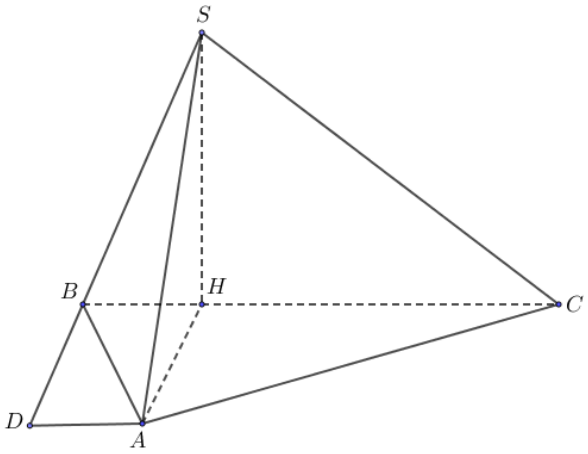
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có $\cos\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

VÍ DỤ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ABC=60^o$, $BC=2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC=4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60°. Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AH^2=BH^2+BA^2-2.BH.BA.\cos 60^o=\frac{a^2}{4}+a^2-2.\frac{a}{2}.a.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\tan 60^o=\frac{SH}{AH}\Rightarrow SH=AH.\sqrt{3}=\frac{3a}{2}$.

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$,

$B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{SD}=\left(-\frac{3}{4};0;-\frac{9}{4}\right)\Rightarrow D\left(-\frac{3}{4};0;-\frac{3}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{DA}=\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right)\Rightarrow\vec{u}=\left(\sqrt{3};2;\sqrt{3}\right)$ là một vtcp của AD.

$\overrightarrow{SC}=\left(\frac{3}{2};0;-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\vec{v}=(1;0;-1)$ là một vtcp của SC. Ta có $\vec{u}.\vec{v}=0\Rightarrow AD\perp SC$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng 90°.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

VÍ DỤ 4: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

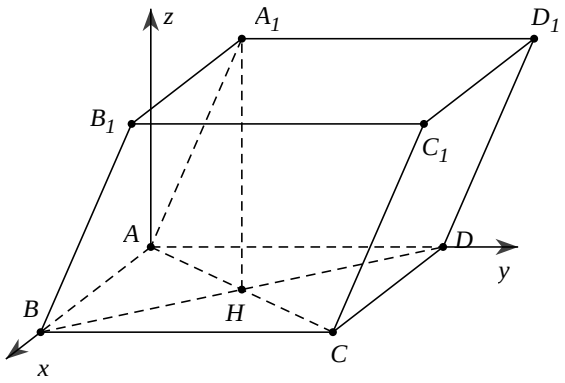
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là tâm của đáy $ABCD$ và đặt $A_1H=x$.

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a\sqrt{3};0), C\left(a;a\sqrt{3};0\right), H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right), \overrightarrow{AD}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AD}\right]=\left(ax\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}=(2x;0;a)$$ là VTPT của (A_1AD)

Và $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của $(ABCD)$ nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0\Rightarrow 2a=\sqrt{4x^2+a^2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right), \overrightarrow{A_1D}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{A_1D}\right]=\left(a\sqrt{3}x;ax;0\right)$$

Phương trình $(A_1BD): x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}=0$. Vì $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

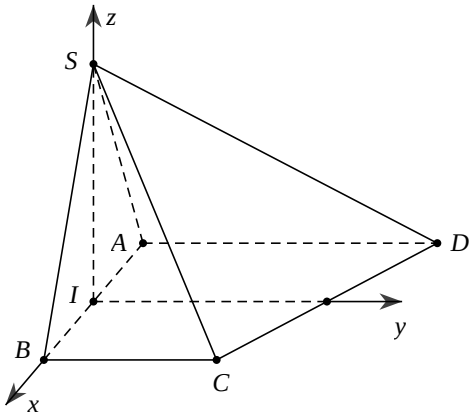
Vậy $d\left(B_1,(A_1BD)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

VÍ DỤ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = AD = 2a, CB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chop $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Vì hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy

nên $SI \perp (ABCD)$.

Đặt $SI = x, x > 0$, tọa độ các điểm là: $I(0;0;0), A(-a;0;0)$,

$B(a;0;0), C(a;a;0), D(-a;2a;0)$,

$S(0;0;x)$. Suy ra $\overrightarrow{SC} = (a;a;-x)$,

$\overrightarrow{CD} = (-2a;a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}\right] = (ax;2ax;3a^2)$

Nên $\overrightarrow{n_1} = (x;2x;3a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCD).

Mà $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2+9a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{AB(BC+AD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $AA'=h$ $(a,h>0)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a, h.

A. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$. **B.** $\frac{ah}{\sqrt{5a^2+h^2}}$. **C.** $\frac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. **D.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):3x+y-4z-12=0$ cắt trục Ox tại A, cắt trục Oz tại B. Chu vi tam giác OAB bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 5.

Câu 3: Xác định m để bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(5;-1;3)$, $C(2;2;m)$ và $D(3;1;5)$ tạo thành tứ diện.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\neq 4$. **C.** $m\neq 6$. **D.** $m<0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;-3), B(-4;2;5), M(a;2;1)$ với a là tham số. Biết rằng điểm M thuộc đường thẳng AB, tìm a.

A. $a=-\frac{3}{2}$. **B.** $a=-6$. **C.** $a=6$. **D.** $a=\frac{3}{2}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm M,N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$.. **B.** $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$.. **C.** $R=6$. **D.** $R=4$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz ,cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$ $C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$ và tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ là

A. $16x-40y-44z+39=0$. **B.** $16x-40y-44z-39=0$.

C. $16x+40y+44z-39=0$. **D.** $16x+40y-44z+39=0$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S: x-1^2+y-2^2+z-3^2=4$. Xét đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-mt\\z=(m-1)t\end{cases}$ với m là tham số thực. Giả sử P và P' là hai mặt phẳng chứa

d, tiếp xúc với S lần lượt tại T và T'. Khi m thay đổi, tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng TT'.

A. 2. **B.** $\frac{2\sqrt{11}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{13}}{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A, B, C. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng tại A lấy một điểm S. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Biết khi S di động trên d thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định D. Tính độ dài đoạn thẳng AD.

A. $AD = 3\sqrt{3}$. **B.** $AD = 6\sqrt{2}$. **C.** $AD = 3\sqrt{6}$. **D.** $AD = 6\sqrt{3}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ $A(1;2;1)$, $C'(3;6;-3)$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 1$. Tính tổng các khoảng cách từ điểm M đến tất cả các mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** 12.

Câu 13: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;2)$, $B(2;-3;1)$, $C(3;2;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (α). D' là điểm sao cho $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Diện tích hình bình hành $A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{22}}$ **B.** $\frac{4}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{6}{\sqrt{22}}$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;-1;1)$. Mặt cầu tiếp xúc 6 cạnh của tứ diện $ABCD$ cắt (ACD) theo thiết diện có diện tích S. Chọn mệnh đề đúng?

A. $S = \frac{\pi}{3}$. **B.** $S = \frac{\pi}{6}$. **C.** $S = \frac{\pi}{4}$. **D.** $S = \frac{\pi}{5}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $AB = 2a$, $AA' = a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ bằng $60°$. Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB'. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

A. $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$. **B.** $\frac{a\sqrt{74}}{37}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{37}$.

Câu 16: Cho tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng, $SA=AB=3cm$, $BC=5cm$ và diện tích tam giác SAC bằng $6cm^2$. Một mặt phẳng (α) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện cắt các cạnh AS, AB, AC lần lượt tại M,N,P. Tính giá trị nhỏ nhất T_m của biểu thức $T=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AP^2}$.

A. $T_m=\frac{8}{17}$. **B.** $T_m=\frac{41}{144}$. **C.** $T_m=\frac{1}{10}$. **D.** $T_m=\frac{1}{34}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

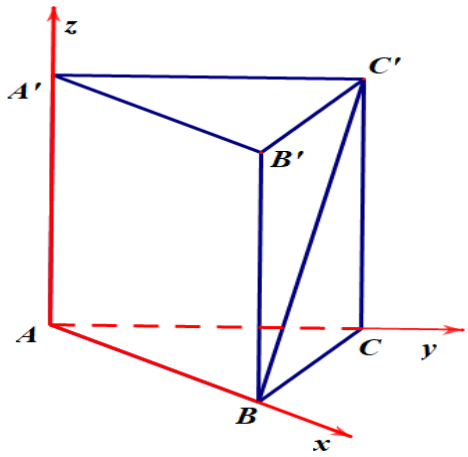
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $P:2x-y-2z-2=0$ và mặt phẳng $Q:2x-y-2z+10=0$ song song với nhau. Biết $A(1;2;1)$ là điểm nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Gọi (S) là mặt cầu qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Biết rằng khi (S) thay đổi thì tâm của nó luôn nằm trên một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $r=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$A(0;0;0)$; $A'(0;0;h)$; $C(0;a;0)$; $B(a;0;0)$; $B'(a;0;h)$; $C'(0;a;h)$.

$\overrightarrow{AB'}=(a;0;h)$; $\overrightarrow{BC'}=(-a;a;h)$; $\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right]=(-ah;-2ah;a^2)$; $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$.

$$\mathrm{d}(AB';BC')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right]\right\|}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}.$$

Câu 2: Chọn B

Ta có:

$A=(P)\cap Ox\Rightarrow A(4;0;0)$; $B=(P)\cap Oz\Rightarrow B(0;0;-3)$.

$\overrightarrow{OA}=(4;0;0)\Rightarrow OA=\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{4^2+0^2+0^2}=4$.

$\overrightarrow{OB}=(0;0;-3)\Rightarrow OB=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{0^2+0^2+(-3)^2}=3$.

$\overrightarrow{BA}=(4;0;3)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5$.

Khi đó chu vi tam giác OAB bằng: $OA+OB+AB=4+3+5=12$.

Câu 3: Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;m-4)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;1)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-2;-6;4)$

4 điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow$ 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AC}\neq 0\Leftrightarrow -2.1+(-6).1+4(m-4)\neq 0\Leftrightarrow m\neq 6$

Vậy $m\neq 6$.

Câu 4: Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;0;8)$; $\overrightarrow{AM}=(a-1;0;4)$.

Vì điểm M thuộc đường thẳng AB nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AM}$.

Cách 1:

Áp dụng tính chất của tích có hướng giữa 2 vec tơ ta có:

$\vec{a},\vec{b}$ cùng phương với nhau tương đương $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AM}$ tương đương $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (0;8a+12;0)=\vec{0}\Rightarrow 8a+12=0\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$.

Cách 2:

Vì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}$ nên ta có: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5k=a-1 \\ 0k=0\ (luôn\ đúng) \\ 8k=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ -5.\frac{1}{2}=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}.$$

Vậy $a=-\frac{3}{2}$.

Câu 5: Chọn C

Phương trình đường thẳng $MN:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$

Gọi $\{E\}=MN\cap(P)$. Suy ra tọa độ điểm E thỏa hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1} \\ x+y-z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow E(3;3;3).$$

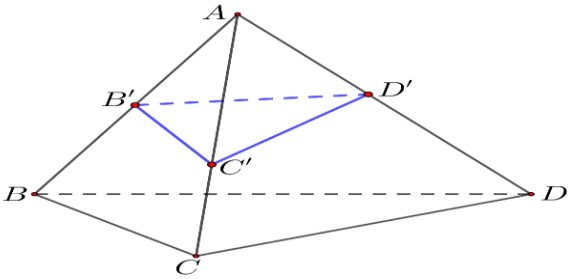
Suy ra $EM=2\sqrt{3};\ EN=6\sqrt{3}.$

Ta có ΔEQM và ΔENQ đồng dạng, suy ra $\frac{EQ}{EN}=\frac{EM}{EQ}\Rightarrow EQ^2=EM.EN=36$

$\Rightarrow EQ=6$. Do đó điểm Q thuộc đường tròn tâm E, bán kính $R=6.$

Câu 6: Chọn D

Trên các cạnh AB, AC, AD của tứ diện $ABCD$ lần lượt có các điểm B', C', D'. Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'}{AB}\cdot\frac{AC'}{AC}\cdot\frac{AD'}{AD}$.



Từ giả thiết $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{AB}{AB'}.\frac{AC}{AC'}.\frac{AD}{AD'}}=3.\sqrt[3]{\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}}$

$\Leftrightarrow 64\ge 27.\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}\Leftrightarrow V_{AB'C'D'}\ge\frac{27}{64}V_{ABCD}.$

Do V_{ABCD} cố định nên $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow V_{A'B'C'D'}=\frac{27}{64}V_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{AD}{AD'}=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4}$

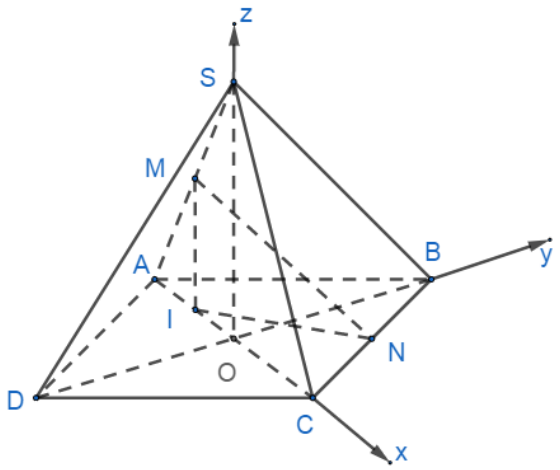
$\Leftrightarrow (B'C'D')$ song song với (BCD) và đi qua điểm B' thoả $\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Có $\overrightarrow{BC}=(-3;-1;-2)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;3;2)$, suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(B'C'D')$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(4;10;-11)$.

Có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;1)$, giả sử $B'(x;y;z)$. Do $\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ nên $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Vậy phương trình $(B'C'D')$ là: $16x+40y-44z+39=0$.

Câu 7: Chọn B



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO.

Khi đó $CI=\frac{3}{4}AC=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Xét ΔCNI có: $CN=\frac{a}{2}$, $NCI=45^o$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$NI=\sqrt{CN^2+CI^2-2CN.CI.\cos 45^o}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{8}-2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Xét ΔMIN vuông tại I nên $MI=\sqrt{MN^2-NI^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}-\frac{5a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI//SO, MI=\frac{1}{2}SO\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $O(0;0;0)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$,

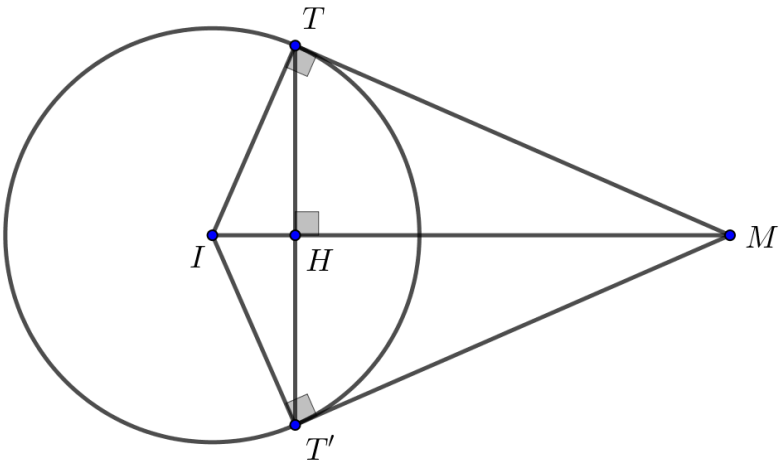
$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến mặt phẳng (SBD): $\vec{n}=\overrightarrow{SB}\wedge\overrightarrow{SD}=\left(-\sqrt{7};0;0\right)$.

Suy ra $\sin\left(MN,(SBD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{7}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{7}.\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=2$. Mặt phẳng (ITT') cắt d tại điểm M. Gọi H là giao điểm của TT' và MI.

Vì $\Delta TIH\sim\Delta MIT$ nên ta có:

$$\frac{TH}{TM}=\frac{TI}{MI}\Rightarrow TH=\frac{TM.TI}{MI}=\frac{R\sqrt{MI^2-R^2}}{MI}=R\sqrt{1-\frac{R^2}{MI^2}}$$

Do $TT'=2TH$ nên $TT'_{\min}\Leftrightarrow TH_{\min}\Leftrightarrow MI_{\min}$

Nhận xét rằng với $\begin{cases}x=1+t\\y=-mt\\z=(m-1)t\end{cases}$ ta có: $x+y+z=1+t-mt+(m-1)t=1$

nên khi m thay đổi ta luôn có $(d)\subset(P):x+y+z-1=0$ cố định. Vì thế

$$MI_{\min}=d\left(I,(P)\right)=\frac{|1+2+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Từ đó ta có: $TT'_{\min}=2TH_{\min}=2R\sqrt{1-\frac{R^2}{MI^2_{\min}}}=2.2\sqrt{1-\frac{2^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{4\sqrt{13}}{5}$

Ta kiểm tra điều kiện đủ của bài toán, tức là chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của I lên (P) thuộc vào đường thẳng d.

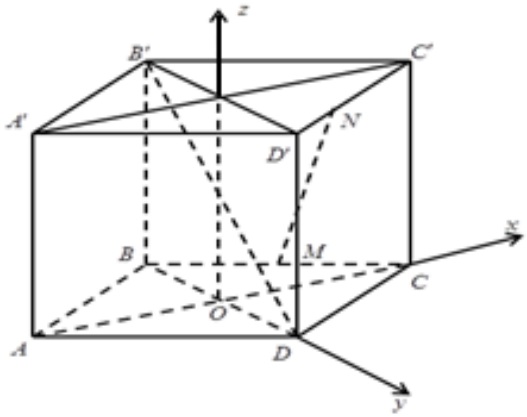
Gọi d' là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) ta có: $d':\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P) ta có: $M=d'\cap(P)$ suy ra:

$$(1+t)+(2+t)+(3+t)-1=0\Leftrightarrow t=\frac{-5}{3}\Rightarrow M\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$$

Xét hệ: $\begin{cases}\frac{-2}{3}=1+t\\\frac{1}{3}=-mt\\\frac{4}{3}=(m-1)t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{-5}{3}\\m=\frac{1}{5}\end{cases}$. Vậy với $m=\frac{1}{5}$ thì độ dài của TT' nhỏ nhất.

Câu 9: Chọn A



Đặt cạnh hình thoi $ABCD$ là 1, chiều cao hình hộp $=h\ (h>0)$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình thoi.

Tam giác ABD đều $\Rightarrow AO=\frac{\sqrt{3}}{2}=CO$, $BD=AB=1$, $BO=DO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$.

Ta có $B'\left(0;\frac{-1}{2};h\right)$, $D\left(0;\frac{1}{2};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{B'D}(0;1;-h)$.

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{-1}{4};0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4};h\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}\left(0;\frac{1}{2};h\right)$.

Vì $MN\perp B'D\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{B'D}\Rightarrow h^2=\frac{1}{2}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 10: Cách 1:

Đường thẳng d qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;-2)$ và trục Oy có véc tơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$.

Gọi $\vec{n}=(A;B;C)\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vì $d\subset(P)\Rightarrow\vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 1.A+(-1).B+(-2).C=0\Leftrightarrow A=B+2C\ \Rightarrow\vec{n}=(B+2C;B;C)$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy $\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{j}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{j}\right|}=\dfrac{|B|}{\sqrt{(B+2C)^2+B^2+C^2}}=\sqrt{\dfrac{B^2}{2B^2+4BC+5C^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2+4.\left(\dfrac{C}{B}\right)+5\left(\dfrac{C}{B}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{5\left(\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{6}{5}}}$ $(B\neq 0)$.

Vì hàm số $\sin\varphi$ tăng liên tục trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên φ đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\varphi$ lớn nhất

Lúc đó $5\left(\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{6}{5}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{6}{5}$ khi và chỉ khi $\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}=0$.

Chọn $B=5\Rightarrow C=-2;\ A=1\Rightarrow\vec{n}=(1;5;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;-2)$ là $1.(x-1)+5.(y+2)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x+5y-2z+9=0$.

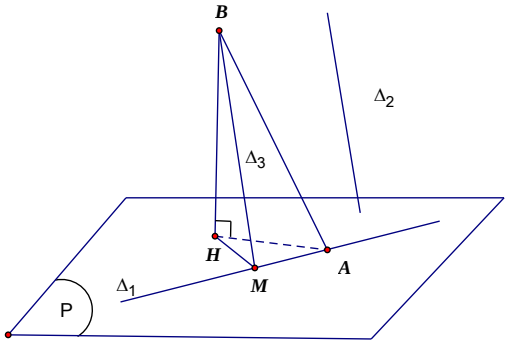
Thế tọa độ $N(-1;-2;-1)$ vào phương trình mặt phẳng (P): $-1+5(-2)-2(-1)+9=0$.

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Cách 2:

Xét bài toán tổng quát: Cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

Phương pháp giải:



- Vẽ một đường thẳng Δ_3 bất kỳ song song với Δ_2 và cắt Δ_1 tại M. Gọi B là điểm cố định trên Δ_3 và H là hình chiếu vuông góc của B lên mp (P), kẻ $BA\perp\Delta_1$
- $(\Delta_2,(P))=BMH$. $\sin BMH=\dfrac{HB}{BM}\leq\dfrac{BA}{BM}$ không đổi

Suy ra BMH lớn nhất khi $H\equiv A$

Khi đó $BMH=(\Delta_1,\Delta_2)$ và (P) chứa Δ_1 và vuông góc với mặt phẳng (Δ_1,Δ_2).

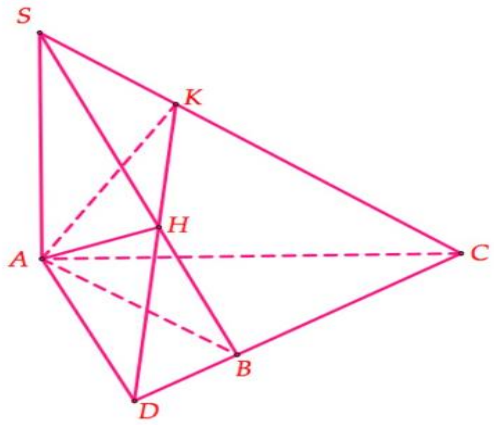
Vậy (P) có VTPT là: $\left[\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right],\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right]$

Áp dụng:

$\overrightarrow{u_d}=(1;-1;-2)$; $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{n}=\left[\left[\overrightarrow{u_d},\vec{j}\right],\overrightarrow{u_d}\right]=(1;5;-2)$. Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;-2)$ là $x+5y-2z+9=0$

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 11: Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;0;3), AB=3\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC}=(2;-1;2), BC=3$; $\overrightarrow{AC}=(-1;-1;5), AC=3\sqrt{3}$

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B

Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp (SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

Ta có: $\begin{cases} AH\perp SB \\ AH\perp BC \end{cases}\Rightarrow AH\perp (SBC)\Rightarrow AH\perp SC$.

Ta có: $\begin{cases} SC\perp AH \\ SC\perp AK \end{cases}\Rightarrow SC\perp (AHK)$.

Do đó: Gọi D là giao điểm của HK và BC thì $SC\perp AD$

Ta có: $\begin{cases} AD\perp SA \\ AD\perp SC \end{cases}\Rightarrow AD\perp (SAC)\Rightarrow AD\perp AC$

Vì D nằm trong mặt phẳng và D là giao điểm của BC và đường thẳng vuông góc với AC tại A nên D cố định.

Trong ΔDAC vuông tại A, ta có: $AD=AC.\tan C=AC.\dfrac{AB}{BC}=3\sqrt{3}.\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{6}$. Đáp án C

Câu 12: Chọn C

Ta có $AC'=6$ nên $AB=2\sqrt{3}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$ trùng với tâm hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và có bán kính $R=1<\dfrac{AB}{2}$ nên mặt cầu (S) nằm trong hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Với mọi điểm M nằm trong hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tổng các khoảng cách từ điểm M đến 6 mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $3AB=6\sqrt{3}$.

Vậy từ một điểm M bất kỳ thuộc mặt cầu (S), tổng các khoảng cách từ điểm M đến 6 mặt của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $6\sqrt{3}$.

Câu 13: Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-4;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;0)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{ABC}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-1;4)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos\left((ABC),(\alpha)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_{ABC}}.\overrightarrow{n_{\alpha}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{ABC}}\right|\left|\overrightarrow{n_{\alpha}}\right|}=\frac{4\sqrt{22}}{33}\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.\cos\left((ABC),(\alpha)\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{4\sqrt{22}}{33}=\frac{4}{\sqrt{11}}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'D'}=2S_{\Delta A'B'C'}=\frac{8}{\sqrt{11}}.$$

Câu 14: Chọn B

Nhận thấy $AB=AC=BC=DA=DB=DC=\sqrt{2}$ nên $ABCD$ là tứ diện đều cạnh $\sqrt{2}$.

Theo giả thiết giao tuyến của mặt cầu tiếp xúc 6 cạnh của tứ diện với (ACD) là đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Gọi r là bán kính hình tròn nội tiếp tam giác ACD, $p=\frac{AC+CD+AD}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

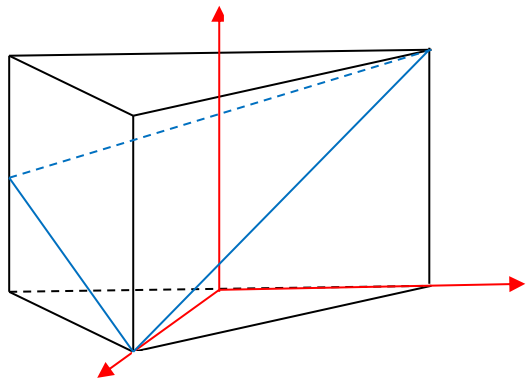
Khi đó diện tích tam giác đều ACD, $S_{\Delta ACD}=pr\Leftrightarrow\frac{AC^2\sqrt{3}}{4}=pr\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.r\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Diện tích thiết diện $S=\pi r^2=\pi.\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{\pi}{6}$.

Cách 2:

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên (ACD) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn nội tiếm ΔACD. Suy ra tâm đường tròn này trùng với trọng tâm tam giác đều ACD và bán kính $r=\frac{1}{3}\frac{AC\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. Diện tích thiết diện $S=\pi r^2=\pi.\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{\pi}{6}$.

Câu 15: Chọn A



Gọi H,K lần lượt là là trung điểm cạnh $A'B'$và AB. Từ giả thiết ta có:

$$HB'=a\Rightarrow HB=a\sqrt{2}\Rightarrow HC'=HB.\tan 60^o=a\sqrt{6}$$

Mặt khác: HC', HB' và HK đôi một vuông góc nhau.

Tọa độ hóa: $H(0;0;0)$, $C'(0;a\sqrt{6};0)$, $A'(-a;0;0)$, $A(-a;0;a)$, $N\left(-a;0;\frac{a}{2}\right)$, $B'(a;0;0)$, $B(a;0;a)$, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

Xét mặt phẳng $(BC'N)$ có $\begin{cases}\overrightarrow{C'B}=(a;-a\sqrt{6};a)\\ \overrightarrow{BN}=\left(-2a;0;-\frac{a}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow vtpt\ \vec{n}=(\sqrt{6};-3;-4\sqrt{6})$

Phương trình $(BC'N)$ là: $\sqrt{6}(x+a)-3y-4\sqrt{6}\left(z-\frac{a}{2}\right)=0$.

Khoảng cách từ M đến $(BC'N)$ là:

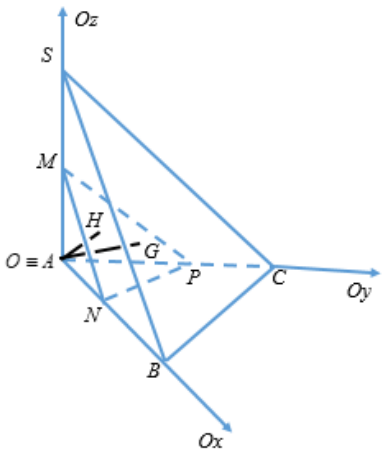
$$d(M;(BC'N))=\frac{\left|\sqrt{6}(a+a)-3.0-4\sqrt{6}(\frac{a}{2}-\frac{a}{2})\right|}{\sqrt{6+9+96}}=\frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{111}}=\frac{2a\sqrt{74}}{37}.$$

Câu 16: Chọn A

Vì tam giác SAC vuông tại $A\Rightarrow AC=\frac{2S_{\Delta SAC}}{SA}=4cm$.

Vì $AC^2+AB^2=BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ



Ta có $A(0;0;0), B(3;0;0), C(0;4;0), S(0;0;3)$.

Vì G là trọng tâm của tứ diện $SABC$ nên ta có:

$$\begin{cases}x_G=\frac{x_S+x_A+x_B+x_C}{4}=\frac{3}{4}\\ y_G=\frac{y_S+y_A+y_B+y_C}{4}=1\Rightarrow G\left(\frac{3}{4};1;\frac{3}{4}\right).\\ z_G=\frac{z_S+z_A+z_B+z_C}{4}=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α). Theo tính chất của tam diện vuông ta có:

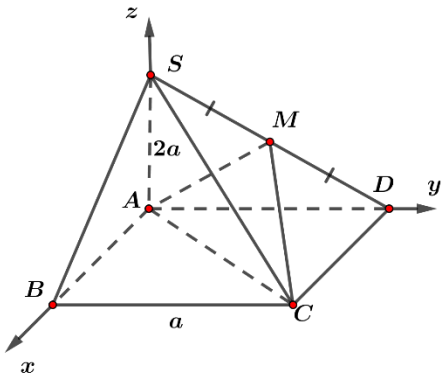
$T=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AP^2}=\dfrac{1}{AH^2}$.

mà $AH\le AG\Rightarrow\ T=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AP^2}=\dfrac{1}{AH^2}\ge\dfrac{1}{AG^2}\Rightarrow T\ge\dfrac{8}{17}$.

Dấu "=" xảy ra khi $H\equiv G$ tức mặt phẳng (α) đi qua điểm G và vuông góc với đường thẳng OG. Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\dfrac{8}{17}$.

Câu 17: Chọn D

Để thuận tiện trong việc tính toán ta chọn $a=1$.



Trong không gian, gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho gốc O trùng với điểm A, tia Ox chứa đoạn thẳng AB, tia Oy chứa đoạn thẳng AD, tia Oz chứa đoạn thẳng AS. Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ $S(0;0;2)$, $D(0;1;0)$.

Vì M là trung điểm SD nên tọa độ M là $M\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{SB} &= (1;0;-2)\\ \overrightarrow{BC} &= (0;1;0)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{BC}]=(2;0;1)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AM} &= \left(0;\dfrac{1}{2};1\right)\\ \overrightarrow{AC} &= (1;1;0)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(AMC)}=[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}]=\left(-1;1;\dfrac{-1}{2}\right)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

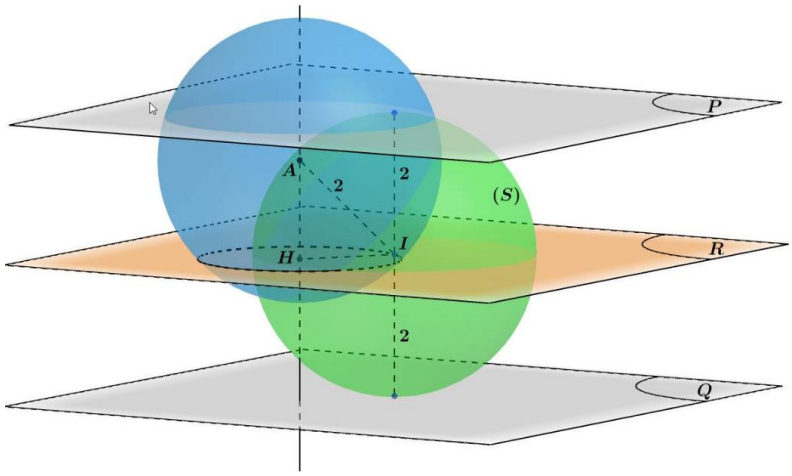
Suy ra $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{n}_{(SBC)};\vec{n}_{(AMC)}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_{(SBC)}.\vec{n}_{(AMC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|.\left|\vec{n}_{(AMC)}\right|}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Mặt khác, $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}$. Vậy $\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}-1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Chọn A

Điểm $M(1;0;0)$ là 1 điểm thuộc (P).

Vì $(P)//(Q)$ nên $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|2+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{12}{3}=4$.



Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm của (S). Vì (S) tiếp xúc với cả (P) và (Q) nên bán kính mặt cầu (S) là $R=\dfrac{d((P),(Q))}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.

Do đó $IA=2$ nên I luôn thuộc mặt cầu (T) tâm A, bán kính 2.

Ngoài ra $d(I,(P))=d(I,(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|2a-b-2c-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2a-b-2c+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$

$\Leftrightarrow|2a-b-2c-2|=|2a-b-2c+10|\Leftrightarrow 2a-b-2c-2=-(2a-b-2c+10)$

$\Leftrightarrow 2a-b-2c+4=0$. Do đó I luôn thuộc mặt phẳng $(R):2x-y-2z+4=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (R). Vì $A,(R)$ cố định nên H cố định.

Ta có: $AH=d(A,(R))=\dfrac{|2.1-2-2.1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Mà $AH\perp(R)\Rightarrow AH\perp HI$, do đó ΔAHI vuông tại H nên

$HI=\sqrt{AI^2-AH^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy I luôn thuộc đường tròn tâm H, nằm trên mặt phẳng (R), bán kính $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P):x+y+2z+5=0$, $(Q):2x-y+z-5=0$ lần lượt tại A và B. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-3;0)$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+6)^2+z^2=50$ tâm I. Xét các điểm M thuộc sao cho góc AMI lớn nhất, M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $x-3y-10=0$. **B.** $x-2y-10=0$. **C.** $x-y-10=0$. **D.** $2x-y-10=0$.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình: $\begin{cases}\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0\\ x^2+y^2+2x-9=0\end{cases}$ có hai nghiệm thực phân biệt $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;2)$, mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_{(Q)}=(2;-1;1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) suy ra đường thẳng d nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;2)$ làm một véctơ chỉ phương. Phương trình tham số của đường thẳng d là $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\{A\}=d\cap(P)\Rightarrow A\in d$ nên ta gọi $A(1+t;2+t;-1+2t)$.

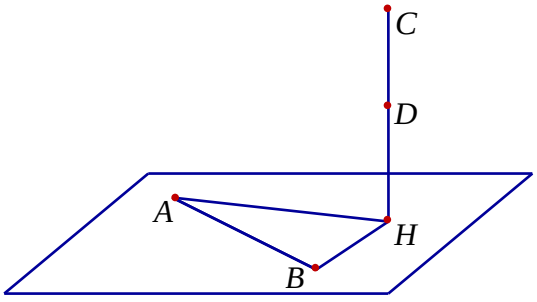
Vì $A\in(P)$ nên ta có: $1+t+2+t+2(-1+2t)+5=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow A(0;1;-3)$.

Gọi d' là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (Q). Suy ra đường thẳng d' nhận $\vec{n}_{(Q)}=(2;-1;1)$ làm một véctơ chỉ phương. Phương trình tham số của đường thẳng d' là $d':\begin{cases}x=1+2t'\\y=2-t'\\z=-1+t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$. Ta có: $\{B\}=d'\cap(Q)\Rightarrow B\in d'$ nên ta gọi $B(1+2t';2-t';-1+t')$.

Vì $B\in(Q)$ nên ta có: $2(1+2t')-(2-t')+(-1+t')-5=0\Leftrightarrow t'=1\Rightarrow B(3;1;0)$.

Vậy $AB=\sqrt{(3-0)^2+(1-1)^2+(0+3)^2}=3\sqrt{2}$.

Câu 2: Chọn A



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM.

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)\Rightarrow AB=\sqrt{113}$

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-2+12-10=0\Rightarrow AB\perp CD$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD.

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1;1;6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)$ là:

$x-4y+z-1=0$.

Phương trình đường thẳng $CD:\begin{cases}x=1+t\\y=2-4t\\z=-1+t\end{cases}$.

$H\in CD\Leftrightarrow H\left(1+t;2-4t;-1+t\right)$.

$H\in\left(P\right)\Leftrightarrow 1+t-4\left(2-4t\right)-1+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Với $\forall M\in CD$, ta có $\begin{cases}AM\geq AH\\BM\geq BH\end{cases}\Rightarrow AM+BM\geq AH+BH$.

$C_{ABM}=AB+AM+BM\geq\sqrt{113}+AH+BH$, $\forall M\in CD$.

Suy ra $minC_{ABM}=\sqrt{113}+AH+BH$, đạt được $M\equiv H\Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 3: **Chọn A**

Mặt cầu có tâm $I(2;-6;0), R=5\sqrt{2}$ và $IA=\sqrt{10}$.

Ta có

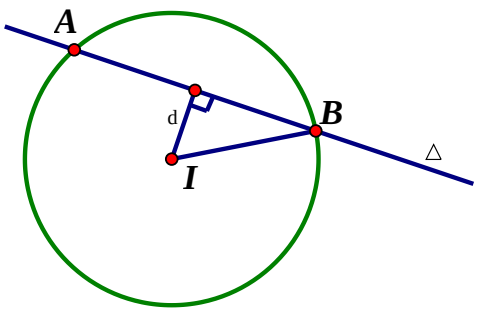
$$\cos AMI=\frac{MA^2+MI^2-IA^2}{2MA.MI}=\frac{MA^2+R^2-IA^2}{2MA.R}=\frac{MA^2+40}{10\sqrt{2}MA}\geq\frac{2\sqrt{MA^2.40}}{10\sqrt{2}MA}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Do đó $AMI\leq\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. Dấu "=" xảy ra khi $MA^2=40\Leftrightarrow MA=2\sqrt{10}$.

Gọi $M\left(x;y;z\right)\Rightarrow\begin{cases}M\in(S)\\MA=2\sqrt{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y+6)^2+z^2=50\\(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=40\end{cases}\Rightarrow x-3y-10=0.$

Vậy $M\in(P):x-3y-10=0.$

Câu 4: **Chọn C**



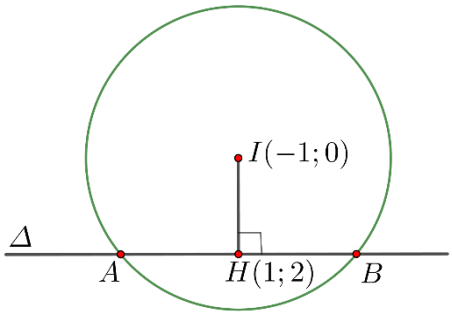
Xét $\begin{cases}\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0\ \ (1)\\x^2+y^2+2x-9=0\ \ (2)\end{cases}$

Do $\left(m^2+2m\right)^2+\left(1-m^2\right)^2>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (1) là phương trình của đường thẳng Δ và phương trình (2) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I\left(-1;0\right)$, bán kính $R=\sqrt{10}$ Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)\Leftrightarrow d\left(I;\Delta\right)<R$ (*)

Ta có $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ nhỏ nhất khi $d(I;\Delta)$ lớn nhất

Có $d(I;\Delta)=\dfrac{2|2m+1|}{\sqrt{(m^2+2m)^2+(1-m^2)^2}}=\dfrac{2|(m^2+2m)+(1-m^2)|}{\sqrt{(m^2+2m)^2+(1-m^2)^2}}\le 2\sqrt{2}<R$. Dấu bằng xảy ra khi $m^2+2m=1-m^2\Leftrightarrow 2m^2+2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ m=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$. Do đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng -1.



• Xét $\begin{cases}(m^2+2m)x+(1-m^2)y+m^2-2m-2=0\ (1)\\ x^2+y^2+2x-9=0\ (2)\end{cases}$

Do $(m^2+2m)^2+(1-m^2)^2>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên (1) là phương trình của đường thẳng Δ và phương trình (2) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ Nghiệm của hệ phương trình là tọa độ giao điểm của Δ và (C).

• Ta có: $(m^2+2m)x+(1-m^2)y+m^2-2m-2=0\Leftrightarrow m^2(x-y+1)+2m(x-1)+y-2=0$

Thấy: $\begin{cases}x-y+1=0\\ x-1=0\\ y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ thì phương trình luôn đúng với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Suy ra: Đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $H(1;2)$.

Mà $IH=\sqrt{8}<\sqrt{10}=R$ nên điểm H nằm trong đường tròn (C).

Khi đó, đường thẳng Δ đi qua H luôn cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

• Ta có: $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AB$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AB\perp IH$ hay $\overrightarrow{IH}=(2;2)$ là một véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ

$$\Leftrightarrow \frac{m^2+2m}{2}=\frac{1-m^2}{2} \Leftrightarrow 2m^2+2m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$ nên tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng -1.

Nhận xét: Phương trình $2m^2+2m-1=0$ (a,c trái dấu) có 2 nghiệm phân biệt nên theo Vi-et, tổng hai nghiệm đó bằng -1.

ĐỀ THI: TỔNG HỢP HÌNH HỌC OXYZ

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}-2\vec{j}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(-3;4;0)$, $\vec{c}=(-1;-2;0)$.

B. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(-3;4;0)$, $\vec{c}=(0;-2;0)$.

C. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(0;-3;4)$, $\vec{c}=(-1;-2;0)$.

D. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}=(-1;-2;1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(0;1;3)$ và $\vec{b}=(-2;3;1)$. Nếu $2\vec{x}+3\vec{a}=4\vec{b}$ thì tọa độ của vectơ $\vec{x}$ là:

A. $\vec{x}=\left(-4;\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\vec{x}=\left(4;-\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\vec{x}=\left(4;\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\vec{x}=\left(-4;-\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(-2;1;3)$, $\vec{c}=(3;2;-1)$, $\vec{d}=(9;0;-11)$. m, n, p là ba số thực sao cho $m.\vec{a}+n.\vec{b}+p\vec{c}=\vec{d}$. Khi đó tổng $m+n+p$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(2;0;-1)$, khi đó $\cos\varphi$ bằng:

A. 0. **B.** $-\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và $\vec{b}=\left(0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Tất cả giá trị của m để hai vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc là.

A. $\frac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\pm 26+\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{26\pm\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;3;1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $3\sqrt{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho năm điểm tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác với $A(0;0;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(3;2;4)$, $D(1;3;5)$, $E(4;2;1)$. Đỉnh của hình chóp tương ứng là.

A. Điểm C. **B.** Điểm A. **C.** Điểm B. **D.** Điểm D.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tọa độ các đỉnh $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$ và $A'(0;0;2a)$. Gọi D là trung điểm cạnh BB' và M di động trên cạnh AA'. Diện tích nhỏ nhất của tam giác MDC' là.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;1;0)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;1)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=100$. Biết rằng (L) là một mặt cầu, mặt cầu đó có bán kính R bằng bao nhiêu?

A. $R=10$. **B.** $R=\sqrt{21}$. **C.** $R=3$. **D.** $R=\sqrt{13}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M\left(0;3;-\frac{1}{2}\right)$, $N\left(2;1;-\frac{3}{2}\right)$ và mặt phẳng $(P):x-y-z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P), các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ. Biết rằng khi $MH=NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là:

A. $\begin{cases}x=-3-t\\y=1-t\\z=-7\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-3+t\\y=1+t\\z=-7\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-3-t\\y=1-t\\z=-7\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3-t\\y=1+t\\z=-7\end{cases}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z+4=0$ và các điểm $A(2;1;2)$, $B(3;-2;2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C).

A. $\left(\frac{74}{27};-\frac{97}{27};\frac{62}{27}\right)$. **B.** $\left(\frac{10}{3};-3;\frac{14}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{17}{21};-\frac{17}{21};\frac{17}{21}\right)$. **D.** $\left(\frac{32}{9};-\frac{49}{9};\frac{2}{9}\right)$.

Câu 13. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1;1;2)$, $B(1;-3;2)$ là

A. $y-1=0$. **B.** $y+3=0$. **C.** $y-2=0$. **D.** $y+1=0$.

Câu 14. Phương trình mặt phẳng (P) qua ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;5;4)$ và $C(3;0;5)$ là

A. $4x-y-5z-13=0$. **B.** $8x-2y-10z-25=0$.

C. $8x-2y-10z+25=0$. **D.** $4x-y-5z+13=0$.

Câu 15. Phương trình mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(3;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y+3z-4=0$ là

A. $x+y-z+6=0$. **B.** $x+y-z+12=0$. **C.** $x+y-z-12=0$. **D.** $x+y-z-6=0$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-4y+z-8=0$. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục Oy là

A. $M(0;2;0)$. **B.** $M(0;0;8)$. **C.** $M\left(\frac{8}{3};0;0\right)$. **D.** $M(0;-2;0)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;1)$. (P) là mặt phẳng qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $4x+y+4z-12=0$. **B.** $4x+y+3z-12=0$. **C.** $4x+y+4z+12=0$. **D.** $4x+y+4z-12=0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$. (P) là mặt phẳng chứa d_1 và tạo với d_2 một góc lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $13x-10y+7z+36=0$. **B.** $13x-10y+7z-36=0$.

C. $13x+10y+7z-36=0$. **D.** $-13x-10y+7z+36=0$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z=1$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P). Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

A. $x-2y+2z+3=0$. **B.** $x-2y+2z+1=0$.

C. $x-2y+2z-3=0$. **D.** $x-2y+2z+2=0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$, $N(-1;1;3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

A. $\vec{n}=(1;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;1;-1)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;1)$. **D.** $\vec{n}=(2;1;-1)$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(12;0;0)$. **B.** $(6;0;0)$. **C.** $(0;6;0)$. **D.** $(0;0;12)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$ và $(Q): 2x+y+z+5=0$. Mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) có véc tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(3;2;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;-4)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;0)$. **D.** $\vec{n}=(-2;1;3)$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-5=0$ và $(Q): -x+2y-2z+7=0$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến hai mặt phẳng trên và song song với trục Oy là

A. $5x+6z-17=0$. **B.** $3y+17=0$.

C. $5x+6z+17=0$. **D.** $5x+3y+6z+17=0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P), hãy tính tích $m.n$ biết m, n là các số nguyên.

A. $m.n=2$. **B.** $m.n=-2$. **C.** $m.n=4$. **D.** $m.n=-4$.

Câu 25. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$. Điểm nào thuộc đường thẳng d.

A. $M(0;5;-1)$. **B.** $N(1;2;-1)$. **C.** $P(2;0;1)$. **D.** $Q(-1;1;-2)$.

Câu 26. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho MA^2+2MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;0;-2)$. **B.** $M(3;1;-3)$. **C.** $M(-1;-1;-1)$. **D.** $M(5;2;-4)$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$ và mặt phẳng $(P):2x-3z-9=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5-9t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=5-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-2t \\ z=-3+5t \end{cases}$.

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):3x-y+z+4=0$ và $(Q):2x-5y+6=0$. Lập phương trình đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=2t \\ z=5-13t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=-2t \\ z=5-13t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=1+2t \\ z=5-13t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+5t \\ y=2t \\ z=5-13t \end{cases}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, mặt phẳng $(P):2x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=9$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm B, C sao cho $BC=3$. Phương trình đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x=\frac{5}{2}+t \\ y=\frac{1}{2}+t \\ z=-\frac{1}{2}-6t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=\frac{5}{2}+6t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+t \\ z=\frac{5}{2}+6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=-\frac{5}{2}+6t \end{cases}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d biết d song song với $d':x-4=\frac{y-7}{4}=\frac{z-3}{-2}$, đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 với

$d_1:\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$ (t: tham số) và $d_2:x=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3}$.

A. $\begin{cases} x=2+u \\ y=3+4u \\ z=2-2u \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+u \\ y=3-4u \\ z=2-2u \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2-u \\ y=3+4u \\ z=2-2u \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+u \\ y=3+4u \\ z=2+2u \end{cases}$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 với $d_1:\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+t \\ z=4-2t \end{cases}$ (t: tham số) và $d_2:\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1 và d_2, đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\begin{cases} x=3+3u \\ y=-2-u \\ z=2-2u \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+3u \\ y=-2u \\ z=2-2u \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+3u \\ y=-2+u \\ z=2-2u \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-3u \\ y=-2-u \\ z=2-2u \end{cases}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=-1+t\\y=-2+2t\\z=t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+2t'\\y=1+t'\\z=1+t'\end{cases}$ (t và t': tham số) và mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$. Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tại A, B sao cho độ dài AB đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x=1+u\\y=-u\\z=u\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+u\\y=2+u\\z=2+u\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2u\\y=2u\\z=u\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-4u\\y=-2u\\z=-u\end{cases}$.

Câu 34. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1;4;2)$ và vuông góc với hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-2}{3}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$ có phương trình là

A. $\Delta:\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x+1}{-7}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Câu 35. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-3;-1;2)$, vuông góc với đường thẳng $d_1:\dfrac{x-7}{-3}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-9}{-2}$ và cắt đường thẳng $d_2:\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$ có phương trình là

A. $\Delta:\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x+6}{-3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$.

Câu 36. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;1;1)$, và cắt đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+5}{-2}$ tại điểm M có tọa độ thỏa mãn $S_{\Delta ABM}=3\sqrt{5}$ với $B(-3;-1;2)$. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\Delta:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z+1}{3}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $A'(0;0;3)$. Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương có phương trình là

A. $(S):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=9$. **B.** $(S):(x-1)^2+(x-1)^2+(x-1)^2=18$.

C. $(S):(x-1)^2+(x-1)^2+(x-1)^2=9$. **D.** $(S):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z+5=0$. Mặt cầu (S) có bán kính $R=4$ và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm $H(1;-2;-4)$ bán kính $r=\sqrt{13}$, biết rằng tâm mặt cầu (S) có hoành độ dương. Phương trình mặt cầu (S) là:

A. $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=16$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=13$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-3)$ và điểm $M(-1;-2;1)$ sao cho từ M có thể kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB=60°$; $\angle BMC=90°$; $\angle CMA=120°$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-13=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+13=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$.

Câu 40. Cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(5;4;-2)$. Tìm phương trình mặt cầu đi qua điểm A và có tâm là giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy).

A. $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=65$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=64$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=65$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt mặt phẳng $(P):2x+y-2z+10=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;3)$. Biết mặt mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 4. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=36$. **B.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=25$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=25$. Đường thẳng d đi qua A và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt M, N. Độ dài nhỏ nhất của MN là

A. 8. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-m=0$ có bán kính $R=5$. Tìm giá trị của m.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=16$. **D.** $m=-16$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình

A. $x^2+y^2+z^2+2x+y-z=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x+2y-2z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x-y+z=0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+5=0$ và các điểm $A(0;0;4)$, $B(2;0;0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua $A; B; O$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có tâm là

A. $(1;2;2)$. **B.** $\left(1;-\dfrac{19}{4};2\right)$. **C.** $(1;-2;2)$. **D.** $\left(1;\dfrac{19}{4};2\right)$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

A. $T=8$. **B.** $T=62$. **C.** $T=13$. **D.** $T=\sqrt{5}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho phương trình hai đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ và $\Delta':\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.Gọi M là điểm thuộc Δ và N là điểm thuộc thuộc Δ' sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(P):x-y+z=0$ và độ dài $MN=\sqrt{2}$. Số cặp điểm $M;N$ thỏa mãn bài toán là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-m}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+m^2}{1}$ và hai điểm $M(-1;4;1),N(3;-2;0)$. Gọi $H(a;b;c)$, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên Δ sao cho khối tứ diện $HKNM$ có thể tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T=a-2b+c$ bằng

A. -3. **B.** 5. **C.** -8. **D.** 8.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$và điểm C nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Điểm C có tọa độ là

A. $(1;2;3)$. **B.** $(1;2;1)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(1;1;0)$.

Câu 50. Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2=0$ và mặt phẳng $(P):x+z+1=0$. Mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có tọa độ tâm là

A. $(1;-1;0)$. **B.** $(0;-1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC. Toạ độ các điểm B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $B(3;1;0),C(0;0;-3)$. **B.** $B(1;3;0),C(0;0;-3)$.

C. $B(3;-3;0),C(0;0;1)$. **D.** $B(1;-3;0),C(0;0;1)$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;5;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=2$. Biết điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu (S) và thỏa mãn giá trị của $T=\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $P=x+y+z$ bằng:

A. $P=3$. **B.** $P=\frac{5}{2}$. **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=-3$.

Câu 53. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua $A(-1;2;0)$ và cách điểm $B(1;-2;-2)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là $ax+by+cz+d=0$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Nếu $a=1$ thì giá trị của d bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 54. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng (P): $2x+y-z+6=0$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 4.

Câu 55. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ sao cho $a^2+b^2+c^2=12$ và diện tích tam giác ABC lớn nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây?

A. $(2;0;2)$. **B.** $(3;0;3)$. **C.** $(2;2;0)$. **D.** $(1;0;1)$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$, có SC vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông tại A, các điểm M, N lần lượt thuộc SA, BC sao cho $AM = CN$. Biết $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$. Tìm giá trị của MN ngắn nhất?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 57. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, $2AA' = AB$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Tìm M thuộc cạnh AB sao cho $A'MC'$ là góc lớn nhất?

A. $M(1;0;0)$. **B.** $M(1;0;1)$. **C.** $M(0;1;0)$. **D.** $M(0;0;1)$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông, đường cao $AB = a, BC = 2a, SA = a$ và vuông góc với đáy, $SC \perp BD$. Gọi M thuộc SA, DE là đường cao tam giác BDM .Giả sử $MA = x(0 \le x \le a)$, xác định x để DE lớn nhất.

A. $x = 2a$. **B.** $x = \frac{a}{2}$. **C.** $x = 3a$. **D.** $x = a$.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$ và $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+2t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Δ cắt d và Δ vuông góc với d. **B.** Δ và d chéo nhau, Δ vuông góc với d.

C. Δ cắt d và Δ không vuông góc với d. **D.** Δ và d chéo nhau nhưng không vuông góc.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+m}{2} = \frac{z-n}{1}$ và $d: \begin{cases} x = 1+6t \\ y = 3-6t \\ z = 6-3t \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $K = m^2 + n^2$, biết hai đường thẳng Δ và d trùng nhau.

A. $K = 30$. **B.** $K = 45$. **C.** $K = 55$. **D.** $K = 73$.

Câu 61. Viết phươngg trình mặt cầu (S) tâm $I(4,2,-1)$ nhận đường thẳng $(D): \frac{x-2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{2}$ làm tiếp tuyến.

A. $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$ **B.** $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$

C. $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ **D.** $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

Câu 62. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 4+t \\ y = 3-2t \\ z = 1-t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Bán kính mặt cầu (S).

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực khác 0, mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;4;5)$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi 8π. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 40. **B.** 4. **C.** 20. **D.** 30.

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;1;-1)$, $B(3;4;-3)$, $C(2;1;-2)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (α). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α). Giá trị lớn nhất của $T=d_1+d_2+d_3$ là

A. $T_{\max}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $T_{\max}=\dfrac{\sqrt{354}}{2}$. **C.** $T_{\max}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $T_{\max}=\dfrac{\sqrt{203}}{2}$.

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=2+t\\ y=2+m+(m-1)t\\ z=-2+2m+(2m-3)t\end{cases}$ $(m,t\in\mathbb{R})$. Gọi $I(a,b,c)\in(P):2x+2y+z-8=0$ là tâm mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với $(d), \forall m\in\mathbb{R}$. Biết (S) có bán kính là R. Tính $T=a+2b+c-R^2$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 66. Cho $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4, I(2;1;2), A(4;-3;-4), B(4;-3;-2)$. Gọi M là điểm nằm trên (S) và cách đều A, B. Biết $MI_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right), a,b\in\mathbb{N}, a<b$. Tính $T=b-10a$.

A. 56. **B.** 57. **C.** 58. **D.** 59.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)\,(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $AMB=60°$, $BMC=90°$, $CMA=120°$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

A. $a^3+b^3+c^3=\dfrac{173}{9}$. **B.** $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}$. **C.** $a^3+b^3+c^3=-8$. **D.** $a^3+b^3+c^3=\dfrac{23}{9}$.

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau và D khác phía với O so với (ABC); đồng thời A, B, C lần lượt là giao điểm của các trục Ox, Oy, Oz và $(\alpha):\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m+2}+\dfrac{z}{m-5}=1$ (với $m\neq-2, m\neq0, m\neq5$). Tìm khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu ngoại tiếp I của tứ diện $ABCD$ đến O.

A. $\sqrt{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn C**

$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(2;3;-5)$. $\vec{b}=-3\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow\vec{b}=(0;-3;4)$.

$\vec{c}=-\vec{i}-2\vec{j}\Rightarrow\vec{c}=(-1;-2;0)$.

Câu 2. **Chọn A**

$2\vec{x}+3\vec{a}=4\vec{b}\Leftrightarrow\vec{x}=2\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{a}=(-4;6;2)-\left(0;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)=\left(-4;\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Câu 3. **Chọn A**

$m.\vec{a}+n.\vec{b}+p\vec{c}=\vec{d}$

$\Leftrightarrow(m;0;-2m)+(-2n;n;3n)+(3p;2p;-p)=(9;0;-11)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m-2n+3p=9\\n+2p=0\\-2m+3n-p=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=-2\\p=1\end{cases}\Rightarrow m+n+p=1.$

Câu 4. **Chọn D**

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$.

Câu 5. **Chọn D**

$\overrightarrow{MN}=(-3;-2;2)$; $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0\Leftrightarrow-6-2m+4+2=0\Leftrightarrow m=0$.

Câu 6. **Chọn A**

$\vec{a}.\vec{b}=-3\sqrt{2}$; $\vec{a}.\vec{a}=9$; $\vec{b}.\vec{b}=4$.

Hai vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc

$\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow2m\vec{a}.\vec{a}-2\vec{a}.\vec{b}+3m^2\vec{a}.\vec{b}-3m\vec{b}.\vec{b}=0\Leftrightarrow18m+6\sqrt{2}-9\sqrt{2}m^2-12m=0$

$\Leftrightarrow-3\sqrt{2}m^2+2m+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$.

Câu 7. **Chọn B**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;1;1)\Rightarrow AB=AC=\sqrt{6}$; có $BC=\sqrt{14}$.

Lại có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-5;-1)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{35}}{2}$.

Ta lại có công thức $S_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4R_{ABC}}\Rightarrow R_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}=\frac{\sqrt{6}.\sqrt{6}.\sqrt{14}}{4.\frac{\sqrt{35}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Câu 8. **Chọn A**

Xét đáp án A chọn điểm C là đỉnh, ta có:

$\overrightarrow{AB}=(2;-1;-3)$, $\overrightarrow{AD}=(1;3;2)$, $\overrightarrow{AE}=(4;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;2;1)$.

Với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(7;-7;7)\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AE}=4.7-2.7-2.7=0\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AC}=3.7-2.7+1.7=14\end{cases}$

Suy ra A, B, D, E đồng phẳng. Vậy điểm C là đỉnh của hình chóp.

Câu 9. **Chọn C**

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow C'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a\right)$, $D(0;a;a)$ và $M(0;0;t)$ $(0<t<2a)$.

Ta có $\overrightarrow{DC'}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{DM}=(0;-a;t-a)$.

Vì vậy $S_{MDC'}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{DC'},\overrightarrow{DM}\right]\right|=\frac{a\sqrt{4t^2-12at+15a^2}}{4}=\frac{a\sqrt{(2t-3a)^2+6a^2}}{4}\geq\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra $MinS_{\Delta MDC'}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ khi $t=\frac{3}{2}a$.

Câu 10. Chọn B

Giả sử $M(x;y;z)$. Khi đó:

$MA^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$, $MB^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2$,

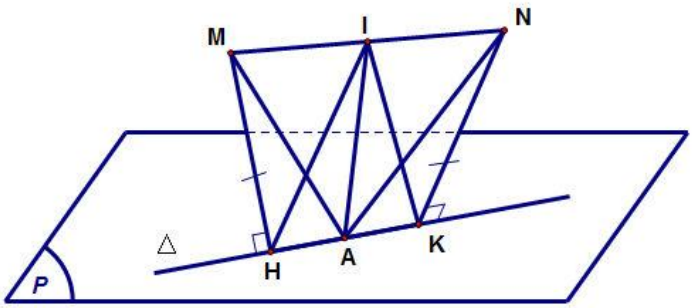
$MC^2=(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$, $MD^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=100\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-8x-8y-8z+28=100$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=21\Rightarrow MI=\sqrt{21}$, với $I(1;1;1)$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức đã cho là mặt cầu tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=\sqrt{21}$.

Câu 11. Chọn C



Gọi I, A lần lượt là trung điểm của MN và HK.

Ta có $\Delta HAM=\Delta KAN$ $(c.g.c)\Rightarrow AM=AN$

$\Rightarrow$ tam giác MAN cân tại A

$\Rightarrow AI\perp MN\Rightarrow AI$ luôn thuộc mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow\Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;-2;-1)$, $I(1;2;-1)$. Phương trình mặt phẳng $(Q):2x-2y-z+1=0$.

$d=(P)\cap(Q)$ nên d có một véctơ chỉ phương $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P;\vec{n}_Q\right]=(-1;-1;0)$ và d đi qua điểm $E(-3;1;-7)$. Do đó phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=-3-t\\y=1-t\\z=-7\end{cases}$.

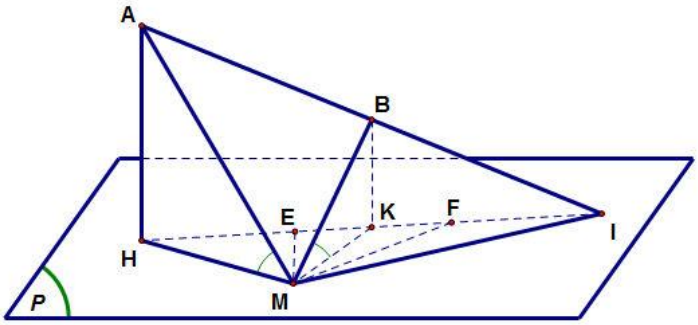
Câu 12. Chọn A

Cách 1:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên $(P)\Rightarrow AMH=BMK$.

Ta có: $AH=d(A;(P))=\frac{|4+2-2+4|}{3}=\frac{8}{3}$; $BK=d(B;(P))=\frac{|6-4-2+4|}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow AH=2.BK$

$\Rightarrow HM=2.MK$ (do ΔAHM đồng dạng với ΔBKM (g.g) vì giả thiết cho $AMH=BMK$).



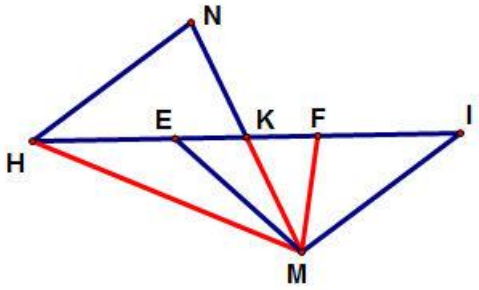
Lấy điểm I là điểm đối xứng của H qua K; E thuộc đoạn HK sao cho $HE=2KE$; F thuộc đoạn KI sao cho $FI=2KF$.

Khi đó: A, B, I, H, E, K, F đều là các điểm cố định.

*** Ta chứng minh: M di chuyển trên đường tròn tâm F, đường kính IE:**

Gọi N là điểm đối xứng của M qua $K \Rightarrow \Delta HMN$ cân tại M.

E nằm trên trung tuyến HK và $HE=\dfrac{2}{3}HK \Rightarrow E$ là trọng tâm $\Delta HMN \Rightarrow ME \perp HN$.



Mà $HN // MI \Rightarrow ME \perp MI$.

Dễ dàng chứng minh F là trung điểm của EI

$\Rightarrow$ M di chuyển trên đường tròn tâm F đường kính EI (thuộc mặt phẳng (P)).

*** Tìm tọa độ điểm F:**

Phương trình đường cao AH là: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$.

Khi đó ta gọi $H(2+2t_1;1+2t_1;2-t_1) \in AH$.

Ta có: $H \in (P) \Rightarrow 2(2+2t_1)+2(1+2t_1)-(2-t_1)+4=0 \Leftrightarrow t_1=-\dfrac{8}{9} \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{9};-\dfrac{7}{9};\dfrac{26}{9}\right)$.

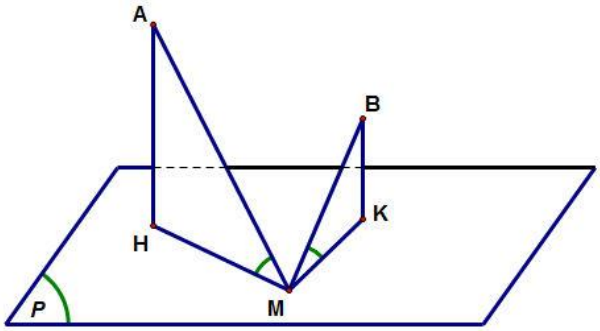
Phương trình đường cao BK là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+2t \\ z=2-t \end{cases}$.

Khi đó ta gọi $K(3+2t_2;-2+2t_2;2-t_2)$.

$K \in (P) \Rightarrow 2(3+2t_2)+2(-2+2t_2)-(2-t_2)+4=0 \Leftrightarrow t_2=-\dfrac{4}{9} \Rightarrow K\left(\dfrac{19}{9};\dfrac{-26}{9};\dfrac{22}{9}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{HF}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{HK} \Rightarrow \begin{cases} x_F-\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{3}.\dfrac{17}{9} \\ y_F+\dfrac{7}{9}=\dfrac{4}{3}.\dfrac{-19}{9} \\ z_F-\dfrac{26}{9}=\dfrac{4}{3}.\dfrac{-4}{9} \end{cases} \Rightarrow F\left(\dfrac{74}{27};\dfrac{-97}{27};\dfrac{62}{27}\right)$.

Cách 2:



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên (P).

Khi đó ta có $AMH = BMK$. Suy ra $\Delta AMH \backsim \Delta BMK$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AH}{BK} = \dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = 2 \Rightarrow MA = 2MB.$

Gọi $M(x;y;z)$. Khi đó ta có:

$MA = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{20}{3}x+6y-4z+59=0 \quad (S).$

Suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của (P) với mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\dfrac{10}{3};-3;2\right)$.

Tâm H của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Từ đó ta tìm được $H\left(\dfrac{74}{27};-\dfrac{97}{27};\dfrac{62}{27}\right)$.

Câu 13. Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(1;-1;2)$.

Khi đó mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB qua I và nhận $\overrightarrow{AB} = (0;-4;0) = -4(0;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Ta có phương trình: $(P): 0.(x-1)+1.(y+1)+0.(z-2)=0 \Leftrightarrow (P): y+1=0$.

Câu 14. Chọn D

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ta có $\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$ nên chọn $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8;-2;-10) = 2(4;-1;-5)$. Khi đó mặt phẳng (P) qua $A(1;2;3)$ và nhận $\vec{n} = (4;-1;-5)$ làm vectơ pháp tuyến.

Ta có phương trình: $(P): 4.(x-1)-1.(y-2)-5.(z-3)=0 \Leftrightarrow (P): 4x-y-5z+13=0$.

Câu 15. Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ta có

$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{n_Q}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_Q}\right] = (-1;-1;1) = -1(1;1;-1)$

Khi đó mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và nhận $\vec{n} = (1;1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Ta có phương trình: $(P): (x-2)+(y-1)-(z+3)=0 \Leftrightarrow (P): x+y-z-6=0$.

Câu 16. Chọn D

Ta có phương trình trục $Oy: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm M của (P) và trục Oy là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases} \Rightarrow t=2 \Rightarrow M(0;2;0).$$

Câu 17. **Chọn A**

Gọi $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ lần lượt là tọa độ các điểm A, B, C $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V=\frac{1}{6}abc$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Điểm $M(1;4;1)\in(P) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow 1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{abc}} \Rightarrow abc\geq 108$.

$\Rightarrow V\geq 18$. Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{4}{b}=\frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=12 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 4x+y+4z-12=0$.

Câu 18. **Chọn B**

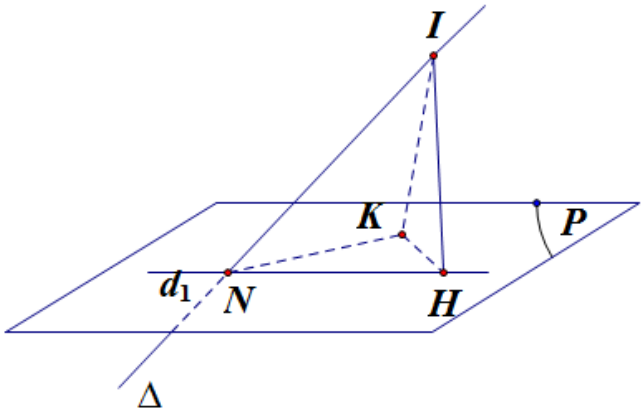
Ta có d_1 đi qua $N(2;-1;0)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}=(1;2;1)$, d_2 có vtcp $\overrightarrow{u_2}=(2;-2;1)$.

Gọi là Δ đường thẳng qua $N(2;-1;0)$ và song song với $d_2 \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$.

Khi đó $(d_2;(P))=(\Delta;(P))$.

Gọi $I(4;-3;1)\in\Delta$, $H(2+t;-1+2t;t)$ là hình chiếu của I lên d_1.

$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_1}=0 \Leftrightarrow t-2+4t+4+t-1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6} \Rightarrow \overrightarrow{IH}=-\frac{1}{6}(13;-10;7)$.



Gọi K là hình chiếu của I lên (P).

Khi đó: $INK=(\Delta;(P))$ và $INK=\frac{IK}{IN}\leq\frac{IH}{IN}$ (Không đổi).

Vậy $(\Delta;(P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$

$\Rightarrow (P):13(x-2)-10(y+1)+7(z-6)=0 \Leftrightarrow 3x-10y+z-36=0$.

Câu 19. **Chọn A**

Ta có véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-2;2)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1;3;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) là $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-2t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) ta có $N(1+t;3-2t;-1+2t)$.

Thay tọa độ N vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $9t-8=0 \Leftrightarrow t=\frac{8}{9} \Rightarrow N\left(\frac{17}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$

Gọi I là trung điểm của MN khi đó ta có $I\left(\frac{13}{9};\frac{19}{9};\frac{-1}{9}\right)$.

Do mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN song song với mặt phẳng (P) nên véc tơ pháp tuyến của (P) cũng là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN đi qua $I\left(\frac{13}{9};\frac{19}{9};-\frac{1}{9}\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;2)$ là $x-2y+2z+3=0$.

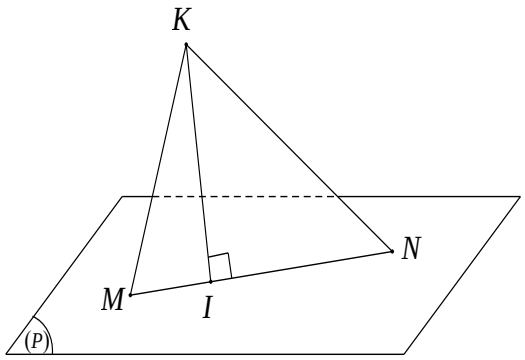
Cách 2. TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0

Lấy $K(1;0;0)\in(P)$, gọi $E\left(1;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm MK. Mặt phẳng cần tìm đi qua E và có cùng vectơ pháp tuyến với (P) nên có phương trình:

$\left(x-1\right)-2\left(y-\frac{3}{2}\right)+2\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z+3=0$.

Câu 20. **Chọn B**

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(-1;2;1)$.



Đường thẳng (d) qua hai điểm M, N có phương trình tham số $\begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của K lên đường thẳng $d \Rightarrow I(-t;-1+2t;2+t)$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{KI}=(-t;-1+2t;t)$.

Do $KI \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{KI}.\overrightarrow{MN}=0 \Leftrightarrow t-2+4t+t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{KI}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}(1;1;-1)$.

Ta có $d\left(K;(P)\right)\le KI\Rightarrow d\left(K;(P)\right)_{max}=KI\Leftrightarrow KI\perp(P)\Rightarrow\vec{n}=(1;1;-1)$.

Câu 21. **Chọn B**

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox$, $B(0;b;0)\in Oy$, $C(0;0;c)\in Oz$ và $(a,b,c>0)$.

Ta có $OA+OB+OC=a+b+c$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(1;4;9)\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$.

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\ge(1+2+3)^2$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge(1+2+3)^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ a+b+c=(1+2+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}\Rightarrow(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$ (Thỏa).

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $(6;0;0)$.

Câu 22. **Chọn D**

$$\begin{cases}(R)\perp(Q)\\ (R)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}_{(R)}\perp\vec{n}_{(Q)}\\ \vec{n}_{(R)}\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_{(R)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(-2;1;3).$$

Câu 23. **Chọn A**

Cách 1:

Vì trắc nghiệm nên mình nêu phương pháp cũ: Phương trình chùm mp.

Phương tình mặt phẳng (α) có dạng: $m(2x+y+2z-5)+n(-x+2y-2z+7)=0$

$\Leftrightarrow(2m-n)x+(m+2n)y+(2m-2n)z-5m+7n=0\,(*)$.

Vì (α) song song với Oy nên hệ số y trong phương trình (*) bằng 0, tức $m+2n=0$.

Ta chọn $m=-2$, $n=1$ nên ta có phương trình của (α) là $5x+6z+17=0$.

Cách 2:

Do (α) chứa giao tuyến d của hai mặt phẳng nên

$\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(Q)}\\ \vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(-6;2;5)$ là một vec tơ chỉ phương của d.

Oy có véc tơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$.

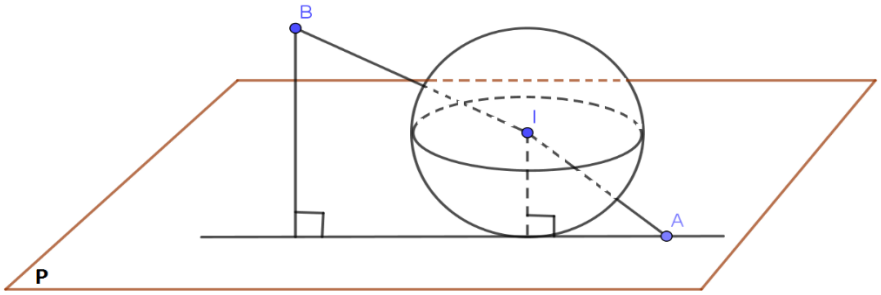
Do mặt phẳng (α) chứa d và song song trục Oy nên véc tơ pháp tuyến được xác định:

$\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{u}_d,\vec{j}\right]=(-5;0;-6)$.

Chọn điểm $M\left(-2;0;\frac{9}{2}\right)$ thuộc giao tuyến hai mặt phẳng.

Mp (α) qua $M\left(-2;0;\frac{9}{2}\right)$ và nhận $\vec{n}_{(\alpha)}=(-5;0;-6)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình: $5x+6z-17=0$.

Câu 24. **Chọn D**



Cách 1.

Mặt cầu (S) có tâm $I(5;-3;7)$ và bán kính $R=6\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{IA}=(-5;11;-5) \Rightarrow IA=\sqrt{171}>6\sqrt{2}$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu.

$\overrightarrow{IB}=(4;-4;16) \Rightarrow IB=12\sqrt{2}>6\sqrt{2}$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu.

A, I, B không thẳng hàng. Mặt phẳng (P) qua A và tiếp xúc với (S) nên khi (P) thay đổi thì tập hợp các đường thẳng qua A và tiếp điểm tạo thành hình nón

Gọi $(AB,(P))=\alpha \Rightarrow d\left(B,(P)\right)=AB.\sin\alpha$ đạt giá trị lớn nhất A,B,I,H đồng phẳng $\Leftrightarrow (AIB)\perp(P)$.(H là hình chiếu của B lên (P))

Mặt phẳng (P) qua A và nhận $\vec{n}=(1;m;n)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình:

$x+my-nz-8m-2n=0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|5n-11m+5|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow (5n-11m+5)^2=72\left(1+m^2+n^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 49m^2-47n^2-110mn+50n-110m-47=0 \quad (1).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right]=(156;70;-24)$.

Gọi $\vec{n}_1$ là véc tơ pháp tuyến của mp (AIB), Chọn $\vec{n}_1=(13;5;-2)$.

Do $(AIB)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 13+5m-2n=0 \quad (2)$.

Thế (2) vào (1) ta được phương trình:

$$2079m^2+8910m+6831=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{-6831}{2079} \quad (loai) \end{array}\right.$$

Thay $m=-1$ vào (2) suy ra $n=4$.

Vậy $m.n=-4$.

Cách 2. TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0

Mặt cầu (S) có tâm $I(5;-3;7)$ và bán kính $R=6\sqrt{2}$.

Mặt phẳng (P) qua A và nhận $\vec{n}=(1;m;n)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình:

$x+my+nz-8m-2n=0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{|5n-11m+5|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow d\left(B,(P)\right)=\frac{|21n-15m+9|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\frac{|5n-11m+5-4m+16n+4|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$$

$$\le \frac{|5n-11m+5|+4|4n-m+1|}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \le 6\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{(4^2+(-1)^2+1^2)(n^2+m^2+1)}}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=18\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{n}{4}=\frac{m}{-1}=\frac{1}{1}\Leftrightarrow m=-1;n=4$. Vậy $m.n=-4$

Câu 25. **Chọn A**

Thay tọa độ điểm $M(0;5;-1)$ vào đường thẳng d ta được $\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=1$. Vậy điểm $M(0;5;-1)$ thuộc đường thẳng d.

Câu 26. **Chọn C**

$M\in\Delta\Rightarrow M(2t+1;\ t;\ -2-t)$, khi đó

$MA^2+2MB^2=(2t+1)^2+(t+1)^2+(t+5)^2+2\left[(2t)^2+(t+2)^2+(t+3)^2\right]$

$=18t^2+36t+53=18(t+1)^2+35\geq 35$. Dấu bằng xảy ra khi $t=-1\Rightarrow M(-1;-1;-1)$

Câu 27. **Chọn A**

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t>0:\overrightarrow{MN}=t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t.|\vec{a}|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t=5$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$.

Gọi $A'(x';y';z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x'+4=4\\y'-7=-5\\z'-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1\\y'=2\\z'=3\end{cases}\Rightarrow A'(1;\ 2;\ 3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ suy ra $AM=A'N$ nên $|AM-BN|=|A'N-BN|\leq A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM-BN|=A'B=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$, đạt được khi $N=A'B\cap(Oxy)$.

Câu 28. **Chọn C**

Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên d nhận véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) làm một véc tơ chỉ phương.

Do đó đường thẳng d đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;0;-3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2\\z=5-3t\end{cases}$.

Câu 29. **Chọn A**

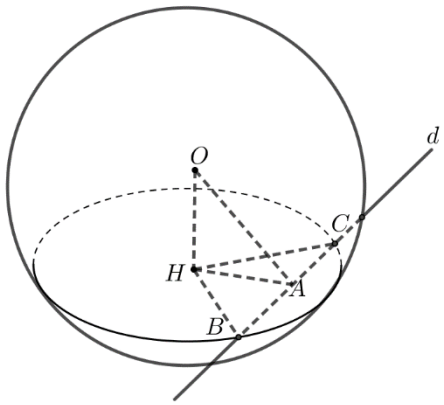
Mặt phẳng (P) và (Q) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(3;-1;1)$; $\overrightarrow{n_2}=(2;-5;0)$.

Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), $\vec{u}$ là một véc tơ chỉ phương của d.

Khi đó $\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(5;2;-13)$.

Gọi $A\in d\Rightarrow$ Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}3x-y+z+4=0\\2x-5y+6=0\end{cases}\Rightarrow A(-3;0;5)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=2t \\ z=5-13t \end{cases}$.



Câu 30. Chọn B

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$;

$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$.

$OA=\frac{3\sqrt{3}}{2}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Gọi E là hình chiếu của O lên BC. Vì $BC=3=R=OB=OC$ nên tam giác OBC là tam giác đều $\Rightarrow OE=\frac{R.\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=OA$.

Suy ra $E\equiv A \Rightarrow BC\perp OA \Rightarrow d$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{n_P}\right]=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-3\right)$

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x=\frac{5}{2}+t \\ y=\frac{1}{2}+t \\ z=\frac{-1}{2}+6t \end{cases}$.

Ta thấy đường thẳng d đi qua điểm $E\left(3;1;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 31. Chọn A

d' có VTCP $\vec{u}=(1;4;-2)$, d_2 có phương trình tham số: $\begin{cases} x=t' \\ y=1-2t' \\ z=1+3t' \end{cases}$.

Giả sử A và B lần lượt là giao điểm của d với d_1 và $d_2 \Rightarrow A(t;-1+2t;t)$ và $B(t';1-2t';1+3t')$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(t'-t;2-2t'-2t;1+3t'-t)$.

Do $d\,//\,d'$ nên vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{t'-t}{1}=\frac{2-2t'-2t}{4}=\frac{1+3t'-t}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t'=1 \end{cases}$.

Do đó, $A(2;3;2)$.

Vậy d là đường thẳng đi qua $A(2;3;2)$ và nhận $\vec{u}=(1;4;-2)$ là VTCP nên d có phương trình là $\begin{cases} x=2+u \\ y=3+4u \\ z=2-2u \end{cases}$ (u : tham số).

Câu 32. Chọn C

Ta có: d_1 có VTCP $\vec{u}=(3;1;-2)$ và $A(2;-3;4)\in d_1$.

d_2 có VTCP $\vec{u}=(3;1;-2)$ và $B(4;-1;0)\in d_2$.

Thực hiện sưu tầm và biên soạn: ***nhóm admin luyện thi Đại học.***
Một sản phẩm của nhóm **"TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0"**
B LEARN

Dễ thấy $A \notin d_2$. Do đó, $d_1 // d_2$.

Do $d_1 // d_2$ và d cách đều d_1 và d_2 nên d có VTCP là VT $\vec{u} = (3;1;-2)$.

Gọi I là trung điểm của AB nên $I(3;-2;2) \in d$.

Vậy d là đường thẳng đi qua I và có VTCP là vecto $\vec{u} = (3;1;-2)$ nên d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 3 + 3u \\ y = -2 + u \\ z = 2 - 2u \end{cases} (u \text{ : tham số}).$$

Câu 33. **Chọn B**

Vì $A \in d_1; B \in d_2 \Rightarrow A(-1+t;-2+2t;t)$ và $B(2+2t';1+t';1+t')$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3+2t'-t;3+t'-2t;1+t'-t)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (1;1;-2)$; $AB // (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \\ A \notin (P) \end{cases}$.

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3+2t'-t+3+t'-2t-2(1+t'-t) = 0 \Leftrightarrow t' = t-4$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (t-5;-t-1;-3)$.

Do đó, $AB = \sqrt{(t-5)^2 + (-t-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{2(t-2)^2 + 27} \geq 3\sqrt{3}$.

$\Rightarrow \min AB = 3\sqrt{3}$ khi $t = 2$.

Khi đó, $A(1;2;2) \notin (P)$; $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;-3)$.

Vậy d là đường thẳng đi qua A và có VTCP là vecto $\vec{u} = (1;1;1)$ nên d có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2 + u \\ z = 2 + u \end{cases} (u \text{ : tham số}).$$

Câu 34. **Chọn A**

Đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (2;5;3)$.

Đường thẳng d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (2;2;4)$.

Vì $\begin{cases} \Delta \perp d_1 \\ \Delta \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (14;-2;-6)$ là một VTCP của đường thẳng Δ.

$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -1 + 14t \\ y = 4 - 2t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$ (Với t là tham số) hay $\Delta: \dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$.

Câu 35. **Chọn B**

Ta có: VTCP của đường thẳng d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (-3;6;-2)$.

VTCP của đường thẳng d_2 là $\overrightarrow{u_2} = (5;3;2)$.

Gọi $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(3+5t;1+3t;-1+2t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (6+5t;2+3t;-3+2t)$.

Vì $\begin{cases} B \in \Delta \\ \Delta \perp d_1 \end{cases}$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0$.

$\Rightarrow -3(6+5t) + 6(2+3t) - 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (6;2;-3)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-3;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(6;2;-3)$ làm VTCP nên có phương trình là $\Delta:\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$.

Câu 36. Chọn D

Ta có: $M=\Delta\cap d\Rightarrow M(-2+t;1+3t;-5-2t)$.

$\overrightarrow{AB}=(-1;-2;1);\overrightarrow{AM}=(t;3t;-6-2t)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(12+t;-6-t;-t)$

Ta có: $S_{\Delta ABM}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]\right|=3\sqrt{5}$.

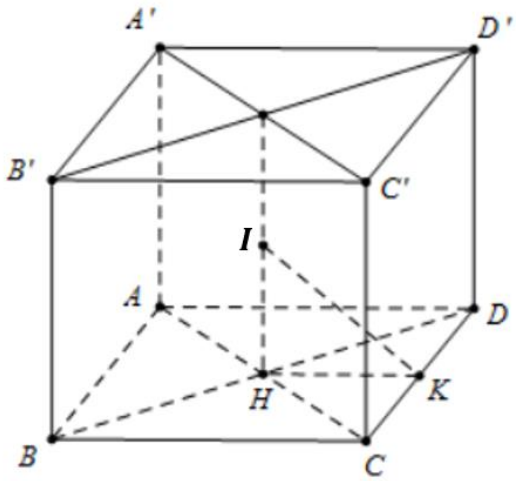
$\Leftrightarrow\sqrt{(12+t)^2+(-6-t)^2+t^2}=6\sqrt{5}\Leftrightarrow 3t^2+36t+180=180\Leftrightarrow t^2+12t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-12\end{array}\right.$.

+ Với $t=0\Rightarrow M(-2;1;-5)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(0;0;-6)\Rightarrow\Delta:\left\{\begin{array}{l}x=-2\\y=-1\\z=1-t\end{array}\right.$ (Với t là tham số).

+ Với $t=-12\Rightarrow M(-14;-35;19)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-12;-36;18)\Rightarrow$ VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;6;-3)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 37. Chọn D



Tâm I của mặt cầu là tâm I hình lập phương. Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(3;3;0)$ và I là trung điểm $A'C\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\right)$. Bán kính là $IK=\sqrt{IH^2+HK^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương có phương trình là $(S):\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 38. Chọn A

Gọi $I(a;b;c)\,(a>0)$ là tâm mặt cầu (S).

(P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{HI}=(a-1;b+2;c+4)$ cùng phương $\overrightarrow{n_1}$ và $d\left[I,(P)\right]=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$.

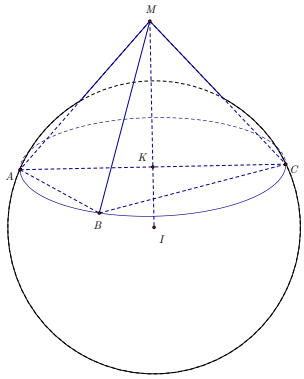
$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=b+2 \\ a-1=c+4 \\ \dfrac{|a+b+c+5|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a-c=5 \\ a+b+c=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=3 \\ a-c=5 \\ a+b+c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1(n) \\ c=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=0 \\ b=-3(l) \\ c=-5 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(2;-1;-3)$ Vậy: $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=16$.

Câu 39. Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính R.

Đặt $MA=a$, do $\angle AMB=60°$; $\angle BMC=90°$; $\angle CMA=120°$ nên $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $AC=a\sqrt{3}\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại $B\Rightarrow$ Tâm K đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm AC.



$MK^2=MC^2-KC^2=a^2-\dfrac{3a^2}{4}=\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow MK=\dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông MIC ta có $MK.MI=MC^2\Leftrightarrow MI=\dfrac{a^2}{\dfrac{a}{2}}=2a$.

$MI=6\Rightarrow a=3$

$MI^2=MC^2+R^2\Leftrightarrow R^2=3a^3=27\Rightarrow R=3\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu (S) là $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$.

Câu 40. Chọn D

Gọi I là tâm mặt cầu. Theo giả thiết, ta có $I(-1;-1;0)$.

Bán kính $IA=\sqrt{(5+1)^2+(4+1)^2+(-2)^2}=\sqrt{65}$.

Câu 41. Chọn D

$d(I;(P))=\dfrac{|4+1-6+10|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3$. Khi đó bán kính mặt cầu bằng $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Câu 42. Chọn A

Mặt cầu có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=5$.

Ta có: $IA=3<R$ nên A nằm trong mặt cầu. Gọi H là trung điểm đoạn MN, ta có: $MN=2MH$ và $MH^2=R^2-IH^2$. Nên $MN_{\min}$ khi $IH_{\max}$. Ta luôn có $IH\le IA$ nên $IH_{\max}=IA=3$.Ta có: $MH^2=25-9=16\Rightarrow MH=4\Rightarrow MN=8$.

Câu 43. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$.

Theo đề bài ta có: $R=\sqrt{1+4+4+m}=5\Leftrightarrow m=16$.

Câu 44. Chọn C

Ta có $\vec{u_1}(3;-1;-2);\vec{u_2}(1;3;1)$ lần lượt là véctơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2.

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 là mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 là đường kính.

Gọi $A(4+3a;1-a;-5-2a)\in d_1$ và $B(2+b;-3+3b;b)\in d_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b-3a-2;3b+a-4;b+2a+5)$. AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a+b+6=0\\ 2a+11b-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$

Suy ra $A(1;2;-3);B(3;0;1)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ là trung điểm của AB, có bán kính $R=IA=\sqrt{6}$.

Vậy phương trình $(S):x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z=0$.

Câu 45. Chọn A

Gọi $I(1;0;2)$ là trung điểm của AB suy ra I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với $(OAB)\equiv(Oxz)$, suy ra d có phương trình $\begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=2\end{cases}$. Gọi E là tâm mặt cầu (S), suy ra $E\in d\Rightarrow E(1;t;2)$

Ta có: $EB=\sqrt{t^2+5}$ và $d(E;(P))=\dfrac{|-t+11|}{3}$.

Khi đó $\sqrt{t^2+5}=\dfrac{|-t+11|}{3}\Leftrightarrow 8t^2+22t-76=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{19}{4}\end{array}\right.$

Với $t=2\Rightarrow E(1;2;2)\Rightarrow R=EB=3$.

Với $t=-\dfrac{19}{4}\Rightarrow E\left(1;-\dfrac{19}{4};2\right)\Rightarrow R=EB=\dfrac{\sqrt{441}}{4}>3$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 46. Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=1+2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

$H\in d\Rightarrow H(1+t;2+t;1+2t)$.

Độ dài $AH=\sqrt{(t-1)^2+(t+1)^2+(2t-3)^2}=\sqrt{6t^2-12t+11}=\sqrt{6(t-1)^2+5}\geq\sqrt{5}$.

Độ dài AH nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t=1\Rightarrow H(2;3;3)$.

Vậy $a=2$, $b=3$, $c=3\Rightarrow a^3+b^3+c^3=62$.

Câu 47. Chọn B

Ta có: $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ đi qua $O(0;0;0)$ và có một VTCP là $\vec{u}=(1;1;2)$.

$\Delta':\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ đi qua $M(-1;0;1)$ và có một VTCP là $\vec{u}'=(-2;1;1)$.

Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(t;t;2t)$, $N\in\Delta'\Rightarrow N(-1-2u;u;1+u)$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;-1;1)$. Vì MN song song với (P) nên $\overrightarrow{MN}.\vec{n}=0\Rightarrow t=-u$.

$MN=\sqrt{14u^2+8u+2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 14u^2+8u+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=-\dfrac{4}{7}\end{array}\right.$.

+) $u=0\Rightarrow M(0;0;0)\in(P)$ (loại).

+) $u=-\frac{4}{7}\Rightarrow M\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{8}{7}\right)$; $N\left(\frac{1}{7};-\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$. $M\notin(P)$ (tm).

Câu 48. Chọn C

Mặt phẳng (P) qua điểm M vuông góc Δ là $x-2y+z+8=0$. Mặt phẳng (Q) qua N vuông góc với Δ là $x-2y+z-7=0$. Do đó $HK=d((P),(Q))=\frac{|8-(-7)|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{6}}$.

Đường thẳng Δ qua điểm $A(m;-1;-m^2)$ và véctơ chỉ phương $\vec{u}(1;-2;1)$.

Đường thẳng MN qua điểm $M(-1;4;1)$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{MN}(4;-6;-1)$.

Góc giữa hai đường thẳng này là $\cos\alpha=\frac{|\vec{u}.\overrightarrow{MN}|}{|\vec{u}|.|\overrightarrow{MN}|}=\frac{15}{\sqrt{6}\sqrt{53}}=\frac{15}{\sqrt{318}}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{\frac{31}{106}}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và HK là $d=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MN}\right]\right|}=\frac{|2m^2-8m+19|}{\sqrt{93}}\geq\frac{11}{\sqrt{93}}$.

Do đó $V_{HKMN}=\frac{1}{6}HK.MN.d.\sin\alpha\geq\frac{1}{6}.\frac{15}{\sqrt{6}}.\sqrt{53}.\frac{11}{\sqrt{93}}.\sqrt{\frac{31}{106}}=\frac{55}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m=2$. Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+4}{1}$.

Đường thẳng Δ véctơ chỉ phương $\vec{u}(1;-2;1)$. Vì H là hình chiếu của M lên Δ nên $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow H(\frac{2}{3};\frac{5}{3};-\frac{16}{3})$. $T=a-2b+c=-8$.

Câu 49. Chọn C

Do C nằm trên Oxy nên $C(x;y;0)$

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{0-1}{-2}$

Suy ra $x=1, y=2$

Chọn đáp án **C.**

Câu 50. Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1,0,0)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với $(P)\Rightarrow$ pt $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Gọi H là tâm đường tròn giao tuyến. Ta có $H=\Delta\cap(P)\Rightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hệ pt:

$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=t\\x+z+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow H(0;0;-1)$.

Câu 51. Chọn A

Giả sử $B(x;y;0)\in(Oxy),(x>0),C(0;0;z)\in Oz$.

H là trực tâm của tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\ đồng\ phẳng\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-7=0 \\ x-3y+yz-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$ (Vì $x>0$). Vậy $B(3;1;0), C(0;0;-3)$.

Câu 52. Chọn C

Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, khi đó $I\left(1;\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

$T=\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=6\left|\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

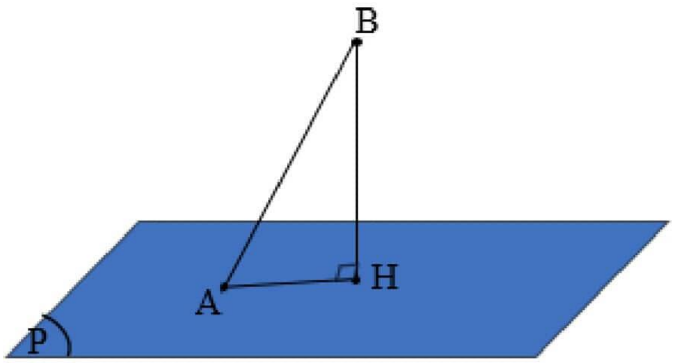
Do đó T nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là một trong hai giao điểm của đường thẳng qua IE và mặt cầu (S) với $E\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$ là tâm của (S).

$(IE):\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=-\frac{1}{2}-t \end{cases}$. $M=IE\cap(S)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1\left(1;2;-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow IM_1=\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ M_2\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow IM_2=\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Vậy $M_1\left(1;2;-\frac{3}{2}\right)$ là điểm cần tìm. $P=x+y+z=\frac{3}{2}$.

Câu 53. Chọn B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P).



Khi đó: $d(B;(P))=BH\le BA=const$.

Vậy $d(B;(P))$ lớn nhất khi H trùng A.

$\Rightarrow (P)$ đi qua $A(-1;2;0)$ và vuông góc với đoạn thẳng AB nên (P) nhận $\overrightarrow{AB}(2;-4;-2)$ làm một VTPT. Hay $\vec{n}(1;-2;-1)$ cũng là một VTPT của (P).

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $(x+1)-2(y-2)-z=0\Leftrightarrow x-2y-z+5=0$.

Dựa vào phương trình của (P) ta có khi $a=1$ thì $d=5$.

Câu 54. Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó I là trung điểm của AB nên $I(3;3;3)$.

$MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}\right)^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2$.

$=IA^2+IB^2+2IM^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=IA^2+IB^2+2IM^2$.

Vì IA^2+IB^2 không đổi nên MA^2+MB^2 nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất.

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên (P).

Khi đó đường thẳng IM qua $I(3;3;3)$ và vuông góc với (P) nên có phương trình: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=3-t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng IM và (P) ứng với t là nghiệm của phương trình:

$2(3+2t)+(3+t)-(3-t)+6=0 \Leftrightarrow 6t+12=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Giao điểm tìm được chính là hình chiếu của I lên (P). Vậy $M(-1;1;5)$ nên $a+b+c=5$.

Câu 55. **Chọn D**

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Khi đó: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AI.BC$.

Ta có ΔOBC vuông tại O nên: $BC=\sqrt{b^2+c^2}$, $\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2} \Rightarrow OI^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$.

Ta có ΔIOC vuông tại O nên: $IA^2=OI^2+OA^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}+a^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{b^2+c^2}$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{b^2+c^2}}.\sqrt{b^2+c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$.

Vì $a^2+b^2+c^2=12 \Rightarrow 12^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$.

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=\frac{12^2-(a^4+b^4+c^4)}{2}$. (1)

Mà: $3(a^4+b^4+c^4)\geq(a^2+b^2+c^2)^2 \Rightarrow (a^4+b^4+c^4)\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=\frac{12^2}{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=\frac{12^2-(a^4+b^4+c^4)}{2}\leq\frac{12^2}{3}=48$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\leq\frac{1}{2}\sqrt{48}=2\sqrt{3}$.

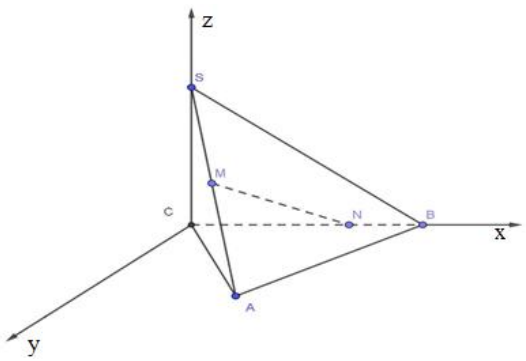
S_{ABC} nhỏ nhất khi: $a=b=c=\sqrt{\frac{12}{3}}=2$.

Vậy (P) đi qua 3 điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ có phương trình là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$.

Kiểm tra thấy (P) đi qua điểm $(1;0;1)$.

Câu 56. **Chọn B**

Cho hệ trục tọa độ $Cxyz$, $B\in Cx, S\in Cz$.



Khi đó $A(a;a;0), B(2a;0;0), C(0;0;0), S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$

Phương trình đường thẳng SA là: $\begin{cases} x = a - t \\ y = a - t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$M\left(a-t;a-t;\sqrt{2}t\right) \in SA$

Giả sử $AM = u$ nên $u^2 = AM^2 = t^2 + t^2 + 2t^2 = 4t^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{2}$

$M\left(a-\dfrac{u}{2};a-\dfrac{u}{2};\dfrac{u\sqrt{2}}{2}\right)$; $N \in BC \Rightarrow N(u;0;0)$ do $NC = AM$

$MN^2 = \left(a-\dfrac{3u}{2}\right)^2 + \left(a-\dfrac{u}{2}\right)^2 + \dfrac{u^2}{2} = 3\left(u-\dfrac{2a}{3}\right)^2 + \dfrac{2a^2}{3} \ge \dfrac{2a^2}{3}$.

Min $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác: TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0

Lấy $M\left(a-t_0;a-t_0;\sqrt{2}t_0\right); t_0 \in [0;a]$, $\overrightarrow{AM} = \left(-t_0;-t_0;\sqrt{2}t_0\right) \Rightarrow AM = 2t_0$

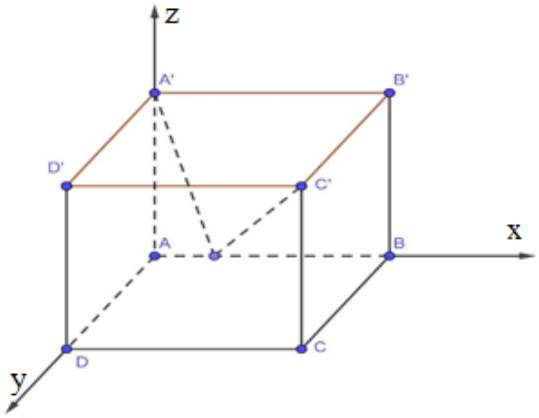
Vì $N \in BC$ và $NC = AM$ nên $N(2t_o;0;0)$

$\overrightarrow{MN} = \left(3t_o - a; t_o - a; -\sqrt{2}t_o\right) \Rightarrow MN = 12t_0^2 - 8at_o + 2a^2, \left(t_0 \in [0;a]\right)$

Suy ra Min $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t_o = \dfrac{2a}{3}$

Câu 57. Chọn A

Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ



$AB = 2 \Rightarrow AA' = 1$; $B \in Ax \Rightarrow B(2;0;0)$

$D \in Ay \Rightarrow D(0;2;0)$; $A' \in Az \Rightarrow A'(0;0;1)$; $C(2;2;0)$;

$M \in AB \Rightarrow M(x;0;0)$ $0 \le x \le 2$

$\overrightarrow{MA'}(-x;0;1)$; $\overrightarrow{MC'}(2-x;2;1)$

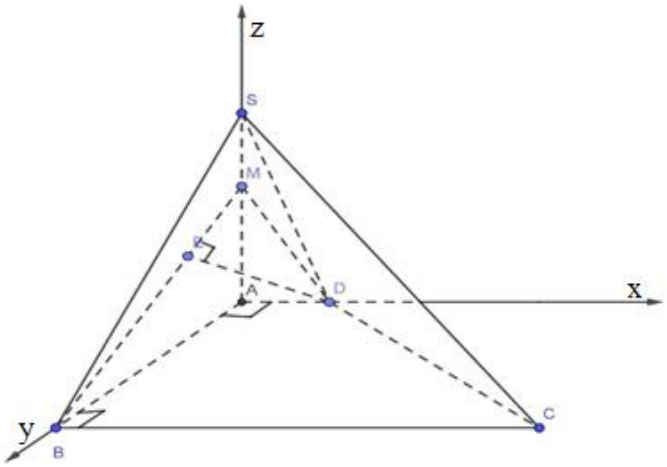
$\cos A'MC' = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MA'}\right|.\left|\overrightarrow{MC'}\right|} = \dfrac{-x(2-x)+1}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{(2-x)^2+4+1}} = \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{(2-x)^2+5}} \ge 0$.

$A'MC' \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \max A'MC' = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 1.$

$\Rightarrow M\left(1;0;0\right)$ là trung điểm AB.

Nhận xét: Hình vẽ trên hệ trục lại chọn sai so với lời giải

Câu 58. Chọn D



Cho hệ trục Axyz như hình vẽ, $D\in Ax, B\in Ay, S\in Az$.

$\Rightarrow A\left(0;0;0\right), B\left(0;a;0\right), C\left(a;2a;0\right), S\left(0;0;a\right).\ \left(a>0\right)$

Gọi $D\left(x_D;0;0\right)$ ta có: $\overrightarrow{SC}\left(2a;a;-a\right)$; $\overrightarrow{BD}\left(x_D;-a;0\right)$.

$SC\perp BD\Rightarrow \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow 2a.x_D-a^2=0\Leftrightarrow x_D=\dfrac{a}{2}.$

Vì $M\in SA$ và $AM=x$ nên $M\left(0;0;x\right)$.

$DE=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BM}\right|}=\dfrac{a}{2}\sqrt{5-\dfrac{4a^2}{x^2+a^2}}.$

Ta có DE lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{4a^2}{x^2+a^2}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow x^2+a^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow x=a$

Nhận xét: Một lần nữa hình vẽ lại chọn sai tọa độ so với lời giải

Câu 59. Chọn B

Δ đi qua điểm $A\left(1;1;-1\right)$, có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(1;-2;2\right)$.

d đi qua điểm $B\left(1;-1;1\right)$, có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=\left(2;2;1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d}=1.2-2.2+2.1=0\Leftrightarrow\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_d}$ suy ra Δ vuông góc với d.

Mặt khác $\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]=\left(-6;3;6\right), \overrightarrow{AB}=\left(0;-2;2\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right].\overrightarrow{AB}=-6.0+3.\left(-2\right)+6.2=6\neq 0$.

Suy ra Δ và d chéo nhau.

Vậy Δ và d chéo nhau, Δ vuông góc với d.

Câu 60. Chọn B

Δ đi qua điểm $A\left(1;-m;n\right)$ có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(-2;2;1\right)$.

d có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=\left(6;-6;-3\right)$.

Vì $\dfrac{-2}{6}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{1}{-3}$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.

Vậy đường thẳng Δ và d trùng nhau khi và chỉ khi $A\left(1;-m;n\right)$ nằm trên Δ.

Dó đó $\dfrac{1-1}{6}=\dfrac{-m-3}{-6}=\dfrac{n-6}{-3}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\n=6\end{cases}$

Suy ra $K = m^2 + n^2 = 6^2 + (-3)^2 = 45$.

Câu 61. **Chọn B**

(D) qua $A(2,-1,1)$ có vecto chỉ phương $\vec{a} = (2,1,2) \Rightarrow |\vec{a}| = 3$

$\overrightarrow{AI} = (2,3,-2) \Rightarrow [\vec{a}, \overrightarrow{AI}] = (-8,8,4) \Rightarrow \left|[\vec{a}, \overrightarrow{AI}]\right| = 12$

$\Rightarrow R = d(I,(D)) = \dfrac{12}{3} = 4 \Rightarrow (S): (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$. Chọn B

Câu 62. **Chọn B**

$A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1;2+t;-t)$, $B \in \Delta_2 \Rightarrow B(4+t';3-2t';1-t')$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3+t';1-2t'-t;1-t'+t)$

VTCP của đường thẳng Δ_1 là $\overrightarrow{u_1} = (0;1;-1)$.

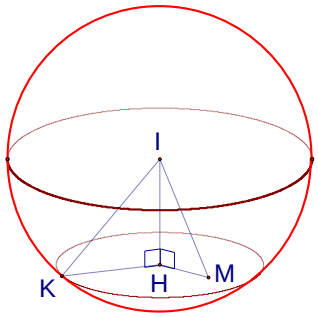
VTCP của đường thẳng Δ_2 là $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;-1)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t'-t-(1-t'+t) = 0 \\ 3+t'-2(1-2t'-t)-(1-t'+t) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -t'-2t = 0 \\ 6t'+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3;1;1) \Rightarrow AB = \sqrt{11}$.

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có đường kính bằng độ dài đoạn AB nên có bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 63. **Chọn A**



Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;4;5)$ nên ta có $\dfrac{2}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{5}{c} = 1$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{c}\right)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (1;2;2)$ nên $IM = 3$ (1)

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó giao tuyến của (ABC) với mặt cầu (S) là đường tròn tâm H có chu vi bằng 8π suy ra bán kính $r = 4$.

Ta có $IH = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (2)

Vì $IH \perp (ABC)$ và $M \in (ABC)$ nên $IM \geq IH$ (3)

Từ (1), (2) ta có $IM = IH = 3$. Do đó (3) phải xảy ra đẳng thức hay $M \equiv H$.

Khi đó $IM \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{IM}$ là vectơ pháp tuyến của (ABC).

Suy ra $\vec{n} = k\overrightarrow{IM}\ (k \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = k \\ \frac{1}{b} = 2k \\ \frac{1}{c} = 2k \end{cases}$.

Vì $\frac{2}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = 1$ nên $2k + 8k + 10k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{20}$. Từ đó suy ra $a = 20,\ b = 10,\ c = 10$.

Vậy $a + b + c = 40$.

Câu 64. Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $G(1;2;-2)$.

Ta có $T = d_1 + d_2 + d_3 = 3d(G;(\alpha))$ (Theo tính chất hình thang)

Do đó $T = 3d\left(G;(\alpha)\right) \le 3d\left(G;(\Delta)\right)$.

Gọi $H(1+t;1-2t;1-t)$ là hình chiếu của G lên đường thẳng Δ, ta có $\overrightarrow{GH} = (t;-2t-1;3-t)$.

$\overrightarrow{GH}.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t - 2(-2t-1) - (3-t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$. Vậy $T_{\max} = 3GH = \frac{\sqrt{354}}{2}$.

Câu 65. Chọn B

$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-2-m}{m-1} = \frac{z+2-2m}{2m-3}$

$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)x - 2m + 2 = y - 2 - m \\ (2m-3)x - 4m + 6 = z + 2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(x-1) = y + x - 4 (1) \\ 2m(x-1) = z + 3x - 4 (2) \end{cases}$.

(1), (2) đúng $\forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \\ 3x + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$.

$\Rightarrow (d)$ luôn đi qua điểm $M(1;3;1)$.

Lấy $2(1) - (2)$ ta được: $2y - z - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z + 4 = 0$.

$\Rightarrow (d) \subset (\alpha): x - 2y + z + 4 = 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow (S)$ tiếp xúc (d) tại M.

$\Rightarrow IM$ qua M và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow IM: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}$

$I = IM \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ điểm I thỏa: $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1} \\ 2x + 2y + z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;2), R = d(I,(\alpha)) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

.

$\Rightarrow T = 2 + 1.2 + 2 - 6 = 0$.

Câu 66. Chọn B

$(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$ có tâm $J(-1;-2;-3)$, bán kính $R = 2$.

M cách đều $A, B \Rightarrow M \in (\alpha)$ là mặt phẳng trung trực của AB.

$\Rightarrow (\alpha)$ qua $N(0;0;-3)$ là trung điểm AB và có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-8;6;2) = -2(4;-3;-1)$.

$\Rightarrow (\alpha): 4x - 3y - z - 3 = 0$

$M \in (\alpha) \cap (S) \Rightarrow M \in (C)$: đường tròn tâm H là hình chiếu của J trên (α).

(Vì $d(J,(\alpha)) = \frac{|-4+6+3-3|}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{26}} < R$ nên $\exists M$).

Ta có $I \in (\alpha)$ (Vì 4.2-3.1-2-3=0) $\Rightarrow IM_{\max} = IH + r$.

IH qua J và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow IH: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z+3}{-1}$.

$H = IH \cap (\alpha) \Rightarrow$ Tọa độ của H thỏa: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z+3}{-1} \\ 4x-3y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{17}{13}; -\dfrac{23}{13}; -\dfrac{38}{13}\right)$.

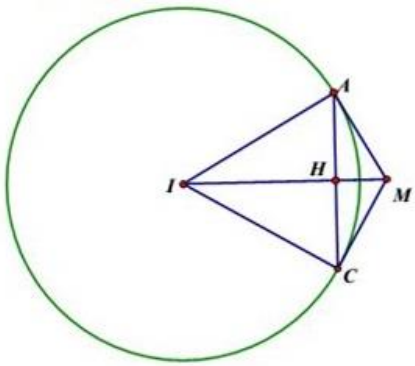
$r = \sqrt{R^2 - d^2(J,(\alpha))} = \sqrt{4 - \dfrac{4}{26}} = \sqrt{\dfrac{50}{13}}$, $IH = \sqrt{\dfrac{557}{13}}$.

$\Rightarrow IM_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(\sqrt{50} + \sqrt{557}) \Rightarrow a = 50, b = 557 \Rightarrow T = 57$.

Câu 67. Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R = 3\sqrt{3}$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S).



Đặt $MA = MB = MC = x$ khi đó $AB = x$, $BC = x\sqrt{2}$, $CA = x\sqrt{3}$ do đó ΔABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

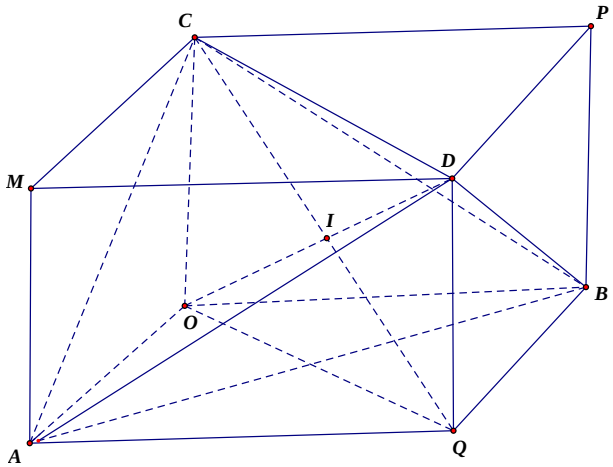
Vì $AMC = 120°$ nên ΔAIC đều do đó $x\sqrt{3} = R \Leftrightarrow x = 3$ suy ra $IM = 2AM = 2x = 6$.

Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t; -2+t; 1+t)$, $(t > 1)$.

Mà $IM = 6$ nên $(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Do $a > 0$ nên $t = \dfrac{4}{3}$ suy ra $H\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$. Vậy $a^3 + b^3 + c^3 = \dfrac{112}{9}$.

Câu 68. Chọn D



Dựng hình hộp chữ nhật $OAQB.CMDP$. Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình hộp, dễ thấy I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

Ta có $A(m;0;0)$, $B(0;m+2;0)$, $C(0;0;m-5)$ suy ra $D(m;m+2;m-5)$.

Bán kính $R = \dfrac{1}{2}OD = \dfrac{1}{2}\sqrt{3m^2 - 6m + 29} \geq \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.