



CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Câu 1.** Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$
- A. $y(3) = 2$. B. $y(3) = 11$.
C. $y(3) = 0$. D. $y(3) = -3$
- Câu 2.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?
- A. $M(0;-1)$. B. $Q(-1;10)$. C. $P(1;0)$. D. $N(1;-10)$.
- Câu 3.** Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 0. B. 2018. C. 1. D. 2019.
- Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng
- A. 10. B. 0. C. 9. D. 1.
- Câu 5.** Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là:
- A. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 6.** Gọi A , B , C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng
- A. $\sqrt{2} + 1$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. 1.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .
- A. $S = 2$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = 4$.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2 ; -1 ; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 10.** Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, $x \in (-\pi; \pi)$ là
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.



Câu 11. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là.

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 13. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

- A. 12,4. B. 6,4. C. 4,4. D. 27.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f'(x) - x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 16. Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y			2		3		2
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$
			-1	-1			

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

- A. 7. B. 5. C. 6. D. 8.



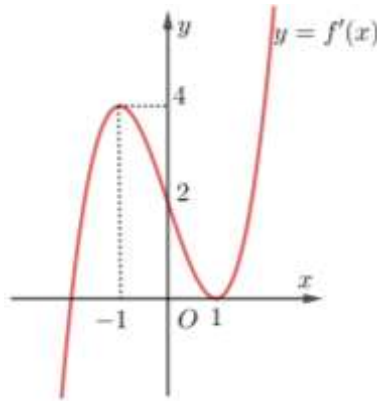
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = -3$.

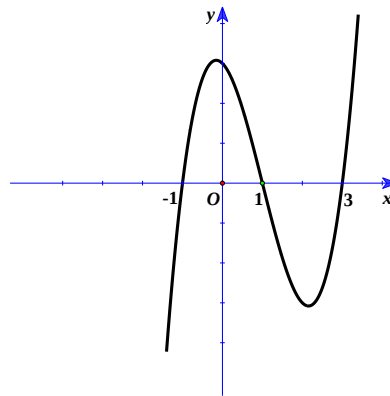
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

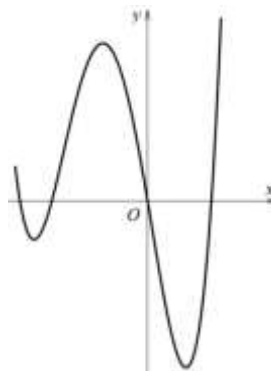
- A. 3. B. 4. **N.C.Đ. C. 1.** D. 2.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$ là



- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:





Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} - 2019^{f(x)}$

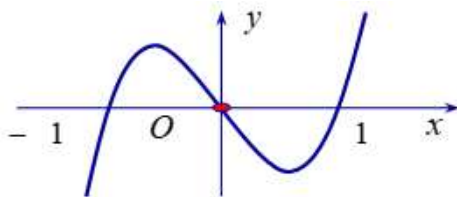
A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

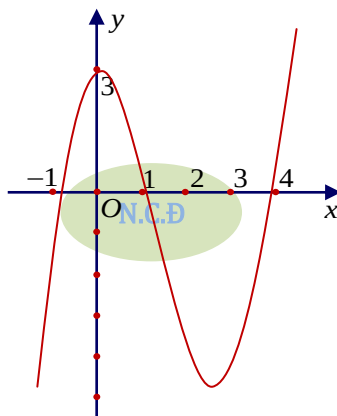
A. 7.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



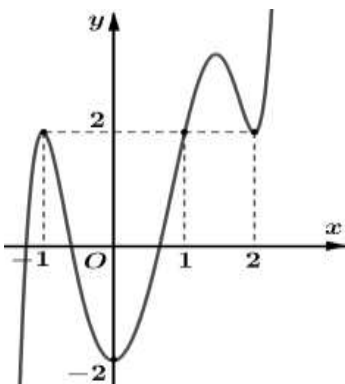
A. 2.

B. 8.

C. 10.

D. 6.

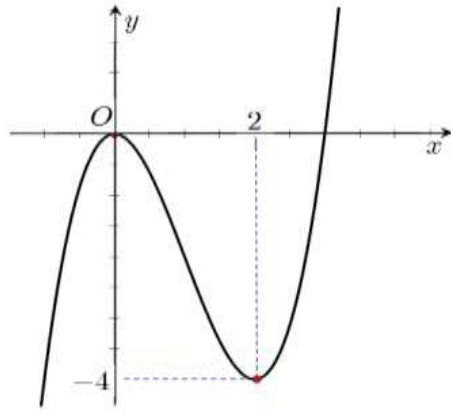
Câu 26. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x = 1$.B. $x = 0$.C. $x = 2$.D. $x = -1$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ là



A. 2.

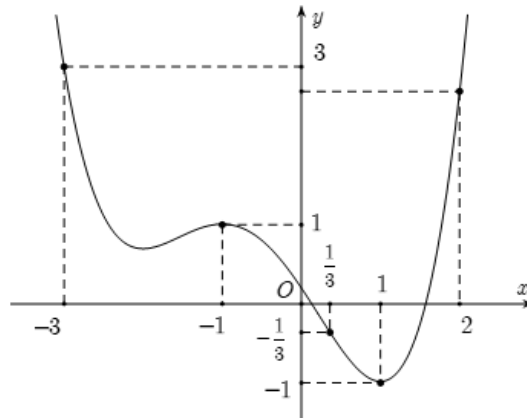
B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi)?$$



A. 9.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2 - 2mx + m + 6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Vậy $m \in [-2; 3] \cup \{7\}$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 7\}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2(f(x))^3 + 4(f(x))^2 + 1$ là

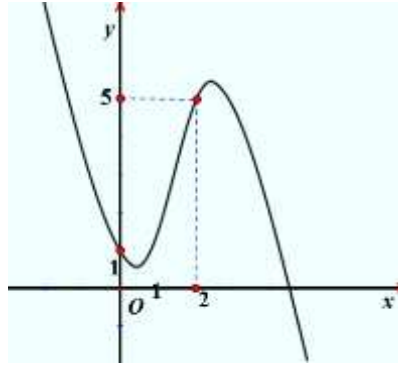
A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 3

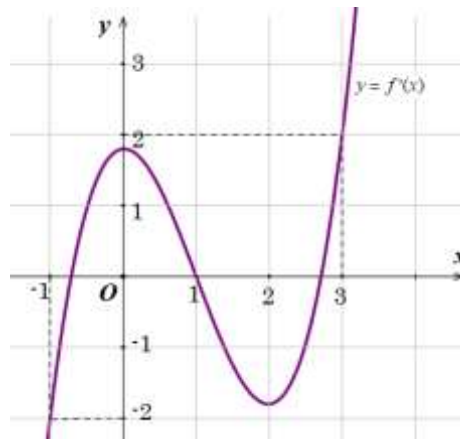
Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.
- D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị tại $x = 0$.

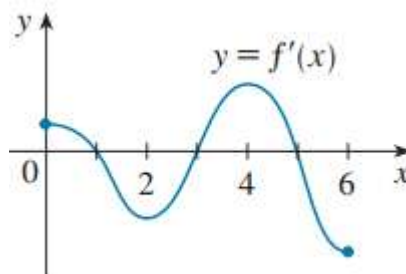
Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.
- D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 6]$.



A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x-4|) + 2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5.

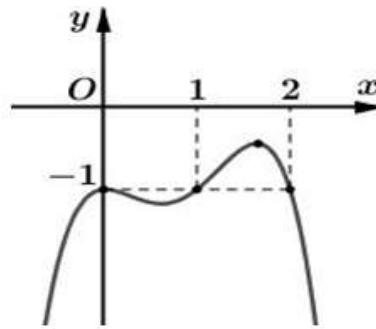
B. 1.

C. 9.

D. 2.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm.

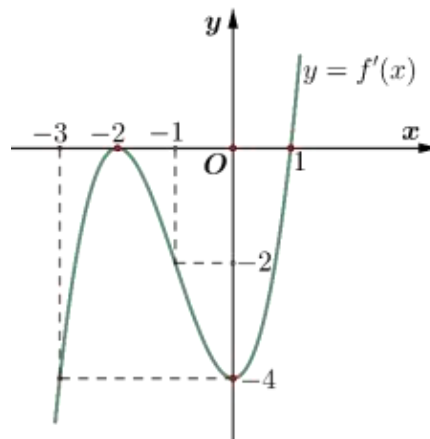


A. $x=1$.

B. $x=2$.

C. không có điểm cực tiểu. D. $x=0$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

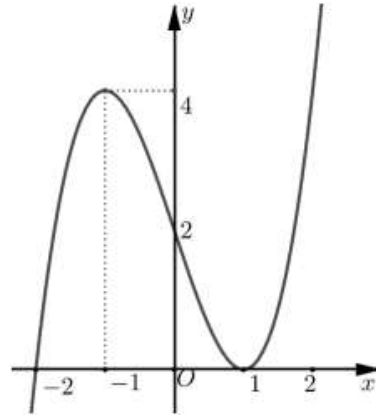
A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

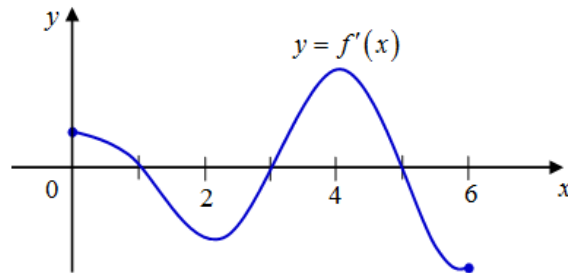
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ là

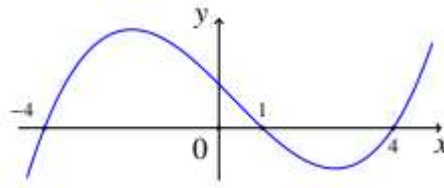
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



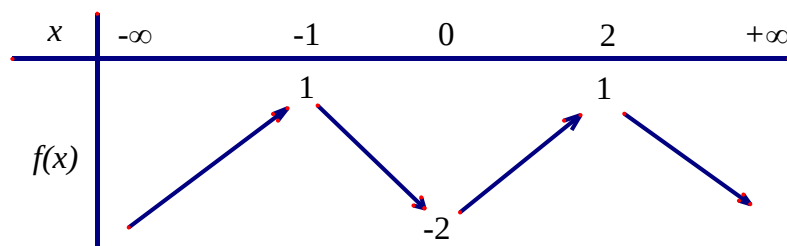
- A. 7. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



- A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(-x + 3)$ đạt cực đại tại

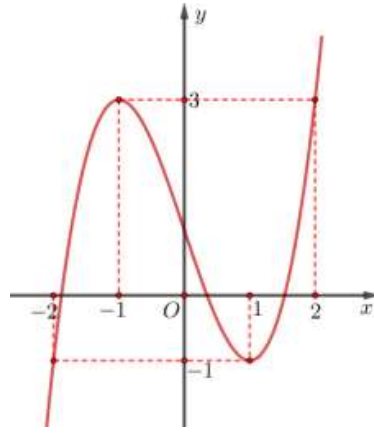


- A. $x = -1$ B. $x = 2$ C. $x = 0$ D. $x = 3$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$



có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



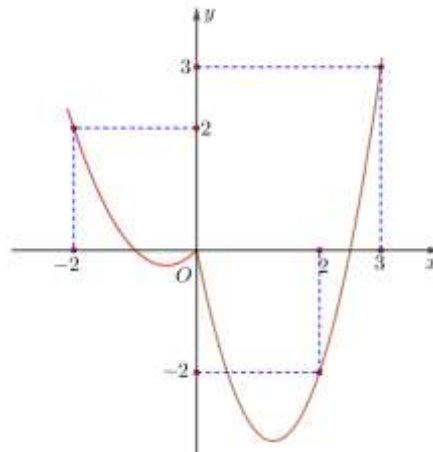
A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?



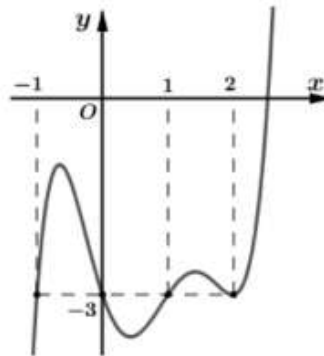
A. 6.

B. 8.

C. 3.

D. 5.

Câu 43. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

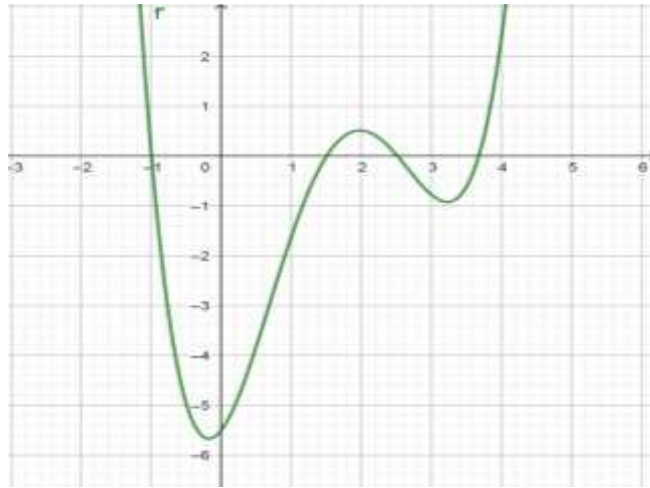
Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$		

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

- A. 4. B. 9. C. 5. D. 3.

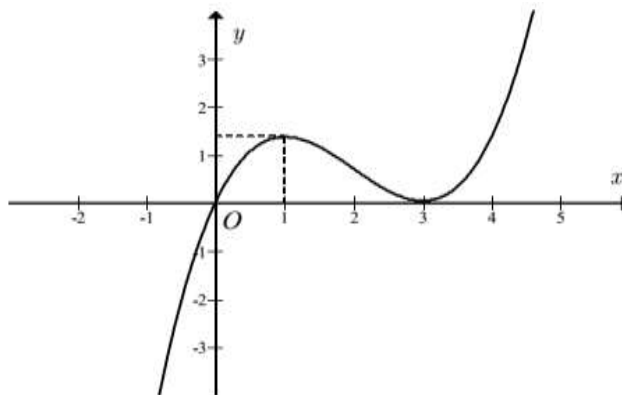
Câu 45. Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r$, ($m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - (m + n + p + q + h + r)|$ là

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới

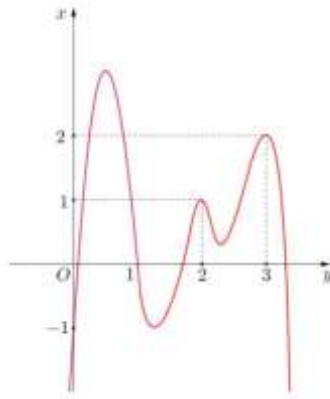


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

- A. 5047. B. 5049. C. 5050. D. 5043.

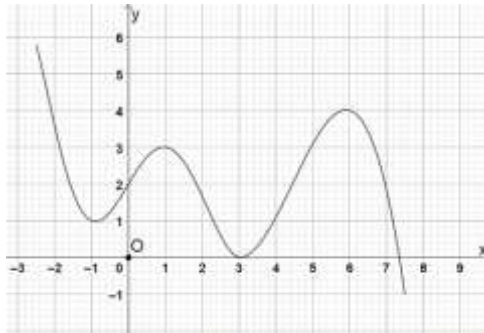


Câu 47. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



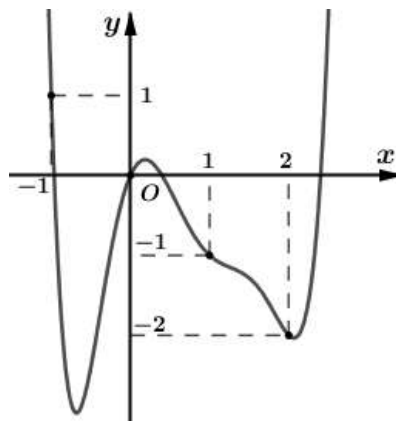
- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2019^{f(x)-1}$.



- A. 13. B. 11. C. 10. D. 12.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 3$

A. $y(3) = 2$.

B. $y(3) = 11$.

C. $y(3) = 0$.

D. $y(3) = -3$

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(3) = 2 \end{aligned}$$

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $M(0;-1)$.

B. $Q(-1;10)$.

C. $P(1;0)$.

D. $N(1;-10)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) \cdot f'(x) - 8x - 2$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$.

Suy ra $\begin{cases} y_A = f(x_A) = -8x_A - 2 \\ y_B = f(x_B) = -8x_B - 2 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng AB là $y = -8x - 2$.

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB . **Chọn D**

Cách 2: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3;-26)$ và $B(-1;6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-4;32)$ cùng phương với $\vec{u}(-1;8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(-1;6)$ và nhận $\vec{u}(-1;8)$ làm vectơ chỉ phương

là $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB . **Chọn D**

Câu 3. Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.**B. 2018.****C. 1.****D. 2019.****Lời giải****Chọn A**

Ta có: $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019} = (1+x)^{2019}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2019 \cdot (1+x)^{2018}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vì $x = -1$ là nghiệm bội chẵn nên $x = -1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 10.**B. 0.****C. 9.****D. 1.****Lời giải****Chọn D**

Áp dụng khai triển nhị thức Niu ton, ta có:

$$f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + \dots + C_{10}^{10} x^{10} = (1+x)^{10}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10(1+x)^9$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị $x = -1$.

Câu 5. Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.**B. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.****C. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.****D. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.****Lời giải****Chọn A**

Ta có: $y' = 1 + 2\cos 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Xét trên $(0; \pi)$ ta có $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ta có $y'' = -4\sin 2x$.

$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$ nên $x = \frac{\pi}{3}$ là điểm cực đại.

$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$ nên $x = \frac{2\pi}{3}$ là điểm cực tiểu.

Vậy giá trị cực đại là $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có $BC \cdot \vec{IA} + AC \cdot \vec{IB} + AB \cdot \vec{IC} = \vec{0}$.

Mà $AB = AC = \sqrt{2}$ và $BC = 2$ nên suy ra $I\left(0; \frac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là $y = 3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(I, BC) = \sqrt{2} - 1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{2} - 1$$

trong đó $a = BC = 2$; $b = c = AB = AC = \sqrt{2}$; $p = \frac{a+b+c}{2}$
N.C.Đ

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{2} - 1 \text{ với } \cos A = \frac{(-2)^3 + 8 \cdot 1}{(-2)^3 - 8 - 1} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC . Tính diện tích ΔABC .

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$$\vec{AB} = (-1; -1); \vec{AC} = (1; -1) \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2 ; -1 ; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm (đơn hoặc bội lẻ) là $x = -2; x = -1; x = 0$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số } g(x) \text{ có ba điểm cực trị.}$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$F'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 10. Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, $x \in (-\pi; \pi)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \cos x - \frac{1}{4}. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ x = x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

$$f(x_1) = \sin x_1 - \frac{x_1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_1}{4} < -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi}{8} < 0.$$

$$f(x_2) = \sin x_2 - \frac{x_2}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_2}{4} > \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{8} > 0.$$

BBT

x	$-\pi$		x_1		x_2		π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{4}$						

The graph shows the function $y = \sin x - \frac{x}{4}$ on the interval $(-\pi, \pi)$. The x-axis is marked with $-\pi$, x_1 , x_2 , and π . The y-axis is marked with $\frac{\pi}{4}$ and $-\frac{\pi}{4}$. The function starts at $(-\pi, 0)$, decreases to a local minimum at x_1 , increases to a local maximum at x_2 , and then decreases to $(\pi, 0)$. Arrows indicate the mapping from the x-axis labels to the corresponding points on the curve.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại

ba điểm phân biệt khác x_1, x_2 . Suy ra hàm số $y = \left| \sin x - \frac{x}{4} \right|$, với $x \in (-\pi; \pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

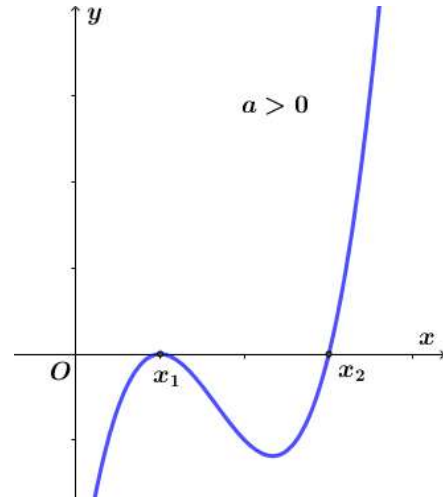
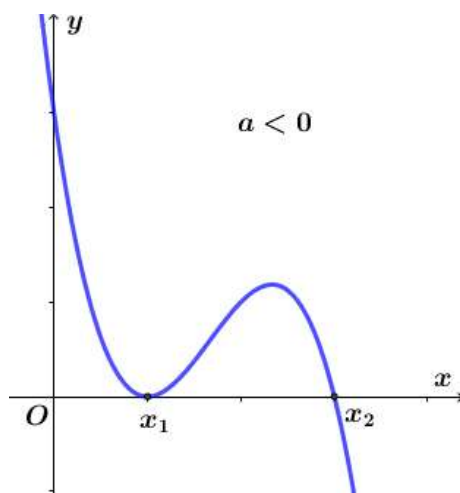
Lời giải

Chọn D

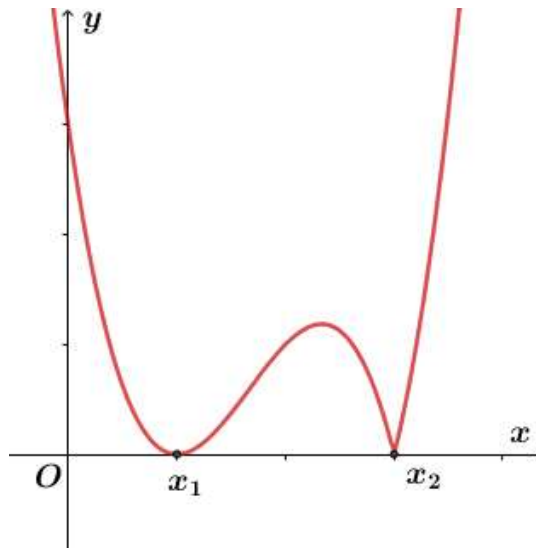
Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có thể viết dưới dạng $a(x - x_1)^2(x - x_2) = 0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2 .

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ứng với từng trường hợp $a > 0$ và $a < 0$:



Đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ ($a \neq 0$) có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-2x^2 + 4x)$ là.

- A. 3. B. 4. C. 2. **D. 5.**

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x = -2; x = 0$ vì vậy

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ có hai nghiệm } x = -2; x = 0 \text{ nên } f'(x) = 3a(x+2)x.$$

Ta có :

$$y' = [f(-2x^2 + 4x)]' = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 2x) = (-4x + 4)(-2x^2 + 4x)$$

$$= 3a(-4x + 4)(-2x^2 + 4x)(-2x^2 + 4x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y' = -48ax(x-2)(x-1)(x^2 - 2x - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{và dấu của } y' \text{ đổi khi } x \text{ qua mỗi nghiệm trên. Vậy hàm số đã cho có}$$

5 điểm cực trị.

Câu 13. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C).

Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. 12,4.

B. 6,4.

C. 4,4.

D. 27.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$y' = x - 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2,8794 \\ x_2 \approx 0,6527 \\ x_3 \approx -0,5321 \end{cases}.$$

N.C.Đ

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A \approx (2,879; -4,84), B \approx (0,653; -3,277), C \approx (-0,532; 3,617)$.

Gọi (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1) là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases} 5,758a - 9,68b - c \approx 31,71 \\ 1,306a - 6,554b - c \approx 11,17 \\ -1,064a + 7,234b - c \approx 13,37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 5,374 \\ b \approx 1,0833 \\ c \approx -11,25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R \approx \sqrt{a^2 + b^2 - c} \approx \sqrt{41,3} \approx 6,4 \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số

$y = f'(x) - x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A.

2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 3 \Rightarrow y' = f''(x) - 2x = -3x^2 + 4x + 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3};$$

$$y'' = -6x + 4; y''\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right) = -2\sqrt{13} < 0; y''\left(\frac{2 - \sqrt{13}}{3}\right) = 2\sqrt{13} > 0$$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.



Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0$, $c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.**Lời giải****Chọn D**

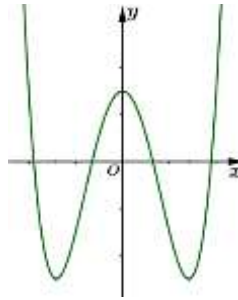
Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 2018 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow \text{hàm số } y = g(x) \text{ là hàm trùng phương}$$

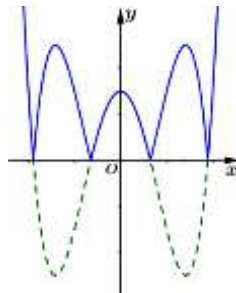
có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0) = c - 2018 \Rightarrow g(0) > 0$, $g(1) = a + b + c - 2018 < 0 \Rightarrow g(x_{CT}) \leq g(1) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y = g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox , phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox , ta được đồ thị hàm số $y = |g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 16. Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2 + 1} - m \right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.**Lời giải****Chọn D**

Xét hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} - m = 0 \Leftrightarrow mx^2 - x + m = 0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

Ta có $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \leq -1 \\ 1 \leq 3 - x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Có } y' &= -(12x^3 - 24x) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x \\ &= -12x(x^2 - 2) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^4 - x^2 - 2) \\ &= -12x(x^2 - 2) \cdot (f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Ta có $-x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq f'(-2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mà $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1$ vô nghiệm.

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	-1	3	2	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C) .

Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

+) Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.



+) Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	$+\infty$
$y = f(x) $	$+\infty$		2		1	1	3	$+\infty$
		↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘
		0		0		0		2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

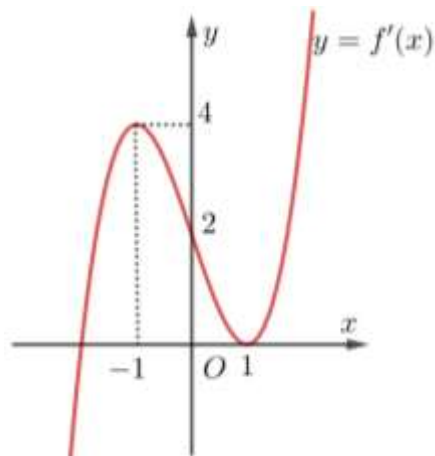
Ta có: $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2, x = 5$ và đạt cực đại tại $x = 2$, nên:
$$\begin{cases} f''(-2) > 0 \\ f''(2) < 0 \\ f''(5) > 0 \end{cases}$$

$$+ g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = -f'(2) + 0 = 0 \\ g'(3) = 0 \\ g'(2) = -f'(-1) - 3 < 0 \\ g'(-3) = -f'(4) + 12 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } g''(x) = f''(1-x) + 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} g''(-1) = f''(2) - 4 < 0 \\ g''(3) = f''(-2) + 4 > 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

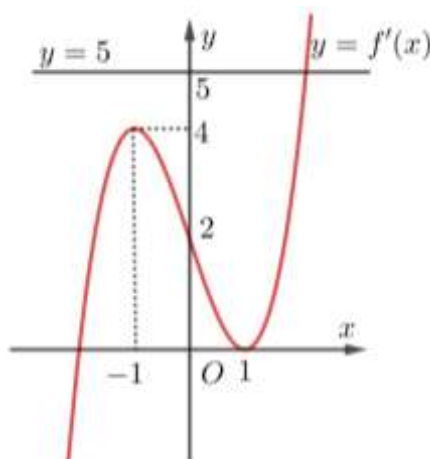
Lời giải

Chọn C

Ta có $y = f(x) - 5x$. Suy ra $y' = f'(x) - 5$.

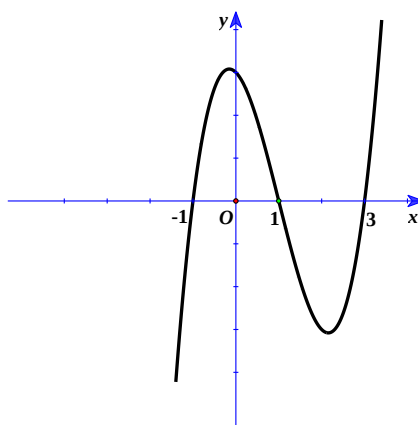
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$.

Ta có $y' = f'(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$.



Dựa vào đồ thị ta có $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = 5$ tại duy nhất một điểm. Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là 1.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$ là



A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(3)$		$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2019})$.

$$g'(x) = f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) \cdot \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2019}} = f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2019}}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2019}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) = 0 \\ \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2019}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = 3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2019} = -1 (vn) \\ x^2 + 2x + 2018 = 0 (vn) \\ x^2 + 2x + 2010 = 0 (vn) \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có: $x > 3$ thì $f'(x) > 0$.

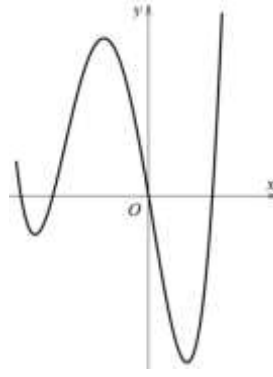
Mà $\sqrt{x^2 + 2x + 2019} \geq \sqrt{2018} > 3$ nên $f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2019}) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Vậy $g'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x = -1$. Số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} - 2019^{f(x)}$

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = g(x) = \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} - 2019^{f(x)}$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) \left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - f'(x) 2019^{f(x)} \ln 2019$

$$= f'(x) \left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)} \ln 2019 \right] \quad (1)$$

Ta có: $\left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)} \ln 2019 \right] < 0; \forall x \quad (2)$.

Xét phương trình:

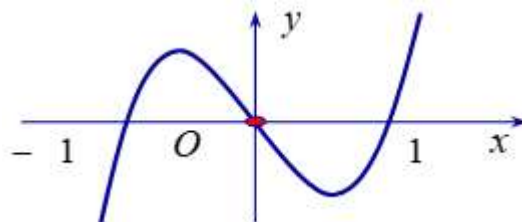
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \left[\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)} \ln\left(\frac{1}{2018}\right) - 2019^{f(x)} \ln 2019 \right] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

Mà từ (1) và (2) ta thấy $g'(x)$ trái dấu với $f'(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
Có đồ thị (như hình vẽ)



Số điểm cực trị của hàm số $y = f[f'(x)]$ là

A. 7.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị, nhận thấy đồ thị hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1.$$

Đặt: $g(x) = f(f'(x))$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } g'(x) &= (f[f'(x)])' = f'[f'(x)] \cdot f''(x) = [(x^3 - x)^3 - (x^3 - x)](3x^2 - 1) \\ &= x(x-1)(x+1)(x^3 - x - 1)(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = a (\approx 0,76) \\ x = b (b \approx -1,32) \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

N.C.Đ

Ta có bảng biến thiên:

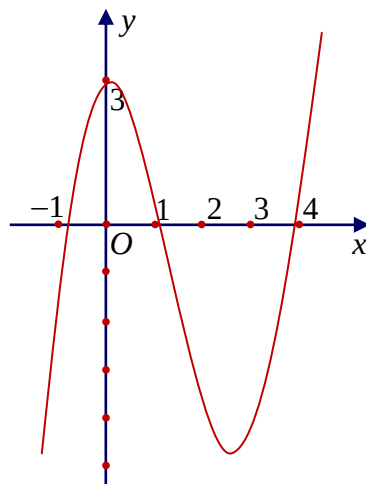
x	$-\infty$	b		-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		a	1	$+\infty$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g													

* **Cách xét dấu $g'(x)$** : chọn $x = 2 \in (1; +\infty)$ ta có: $g'(2) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in (1; +\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

* **Trắc nghiệm**: Số điểm cực trị bằng số nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ) của phương trình đa thức $g'(x) = 0$. PT $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2.

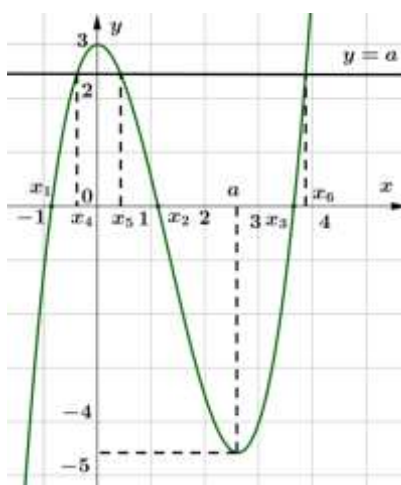
B. 8.

C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

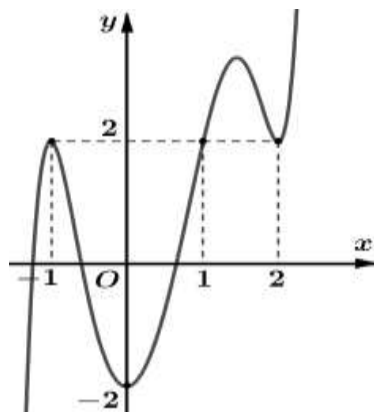
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, (2 < a < 3).$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 2$.

D. $x = -1$.

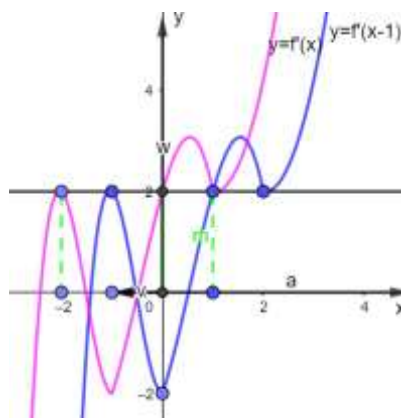
Lời giải:

Chọn B

Ta có: $y' = [2f'(x) - 4] \pi^{2f(x)-4x} \ln \pi$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2.$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị



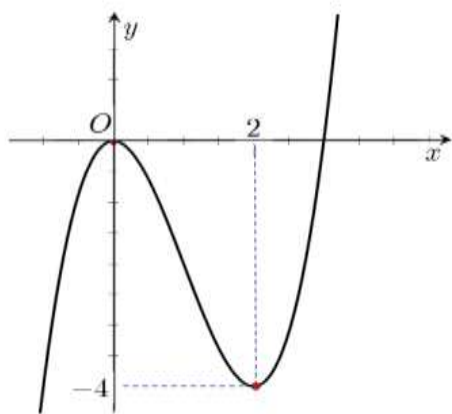
$$\text{nên } f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Do $x = -2$ và $x = 1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$					$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ là



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = |2f(x) + 5| + 3 = \sqrt{(2f(x) + 5)^2} + 3$. Khi đó $y' = \frac{2(2f(x) + 5)f'(x)}{\sqrt{(2f(x) + 5)^2}}$.

Xét $f'(x) = 0$ dựa vào đồ thị có hai nghiệm $x = 0$; $x = 2$.

Xét $2f(x) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{5}{2}$ dựa vào đồ thị có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$$x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3.$$

N.C.Đ

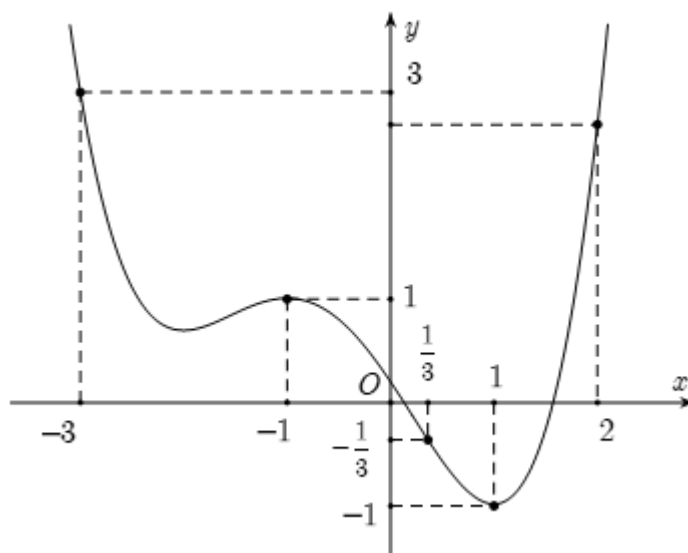
Khi đó hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	2	x_3	$+\infty$
y'	-		+	0	-		+
y							

Do đó hàm số $y = |2f(x) + 5| + 3$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi)?$$



A. 9.

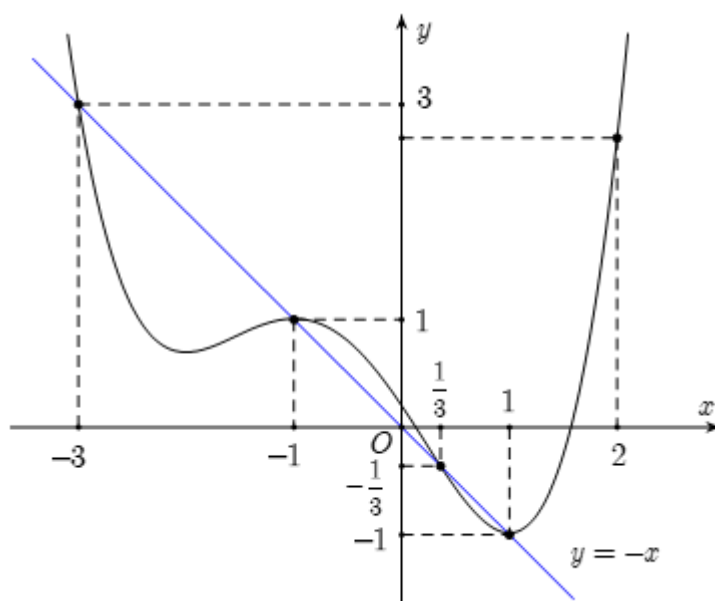
B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right)^2 + 3$

$$g'(x) = \frac{5\cos x}{2} \left[2f'\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \cos x = 0 \\ 2f'\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) = 0 \end{matrix}$$

Đặt $t = \frac{5\sin x - 1}{2}$ vì $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow t \in [-3; 2]$

$$\text{Khi đó: } 2f'\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) = 0 \text{ thành } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t=1 \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_2 \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_3 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_4 \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t = -1 \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_5 \in (0; 2\pi) \\ x = \alpha_6 \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

$$\square \quad \text{Với} \quad t = -3 \Rightarrow \frac{5\sin x - 1}{2} = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in (0; 2\pi)$$

$$\square \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \in (0; 2\pi) \\ x = \frac{3\pi}{2} \in (0; 2\pi) \end{cases}$$

Vì $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép nên không là điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2 - 2mx + m + 6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2mx + m + 6 = 0 \end{cases}$$

Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội chẵn và $x = 1$ là nghiệm bội lẻ.

Hàm số đã có một cực trị khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu một lần khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có một nghiệm bội lẻ.

+ Trường hợp 1: Phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép:

$$\text{Khi đó: } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 3.$$

+ Trường hợp 2: $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm $x_1 = 1$

$$\text{Với } x_1 = 1, \text{ ta có: } g(1) = 1 - 2m + m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 7.$$

$$\text{Với } m = 7 \Rightarrow g(x) = x^2 - 14x + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 13 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m \in [-2; 3] \cup \{7\}, \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 7\}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			-1			-2		$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2(f(x))^3 + 4(f(x))^2 + 1$ là

A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm: $g'(x) = 6f'(x)(f(x))^2 + 8f'(x)f(x)$.

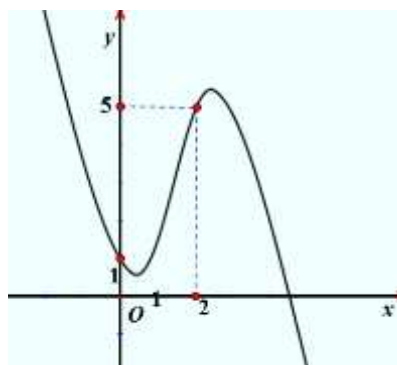
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = x_1 < -1 \\ x = x_2 > 1 \\ x = x_3 (-1 > x_3 > x_1) \\ x = x_4 (-1 < x_4 < 0) \\ x = x_5 (0 < x_5 < 1) \\ x = x_6 (1 < x_6 < x_2) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_3	-1	x_4	0	x_5	1	x_6	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị.

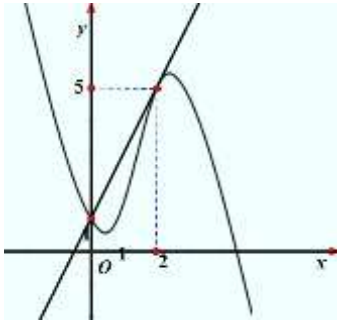
D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x + 2019$ không có cực trị tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = f'(x) - 2x - 1$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$ (1).

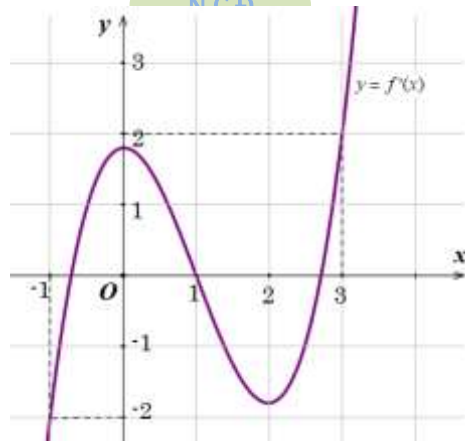


Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có thể nhận thấy phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

Xét dấu $x = 1 \in (0; 2)$, ta có $y'(1) = f'(1) - 5 < 0$ từ đó ta nhận định hàm số

$y = f(x) - x^2 - x + 2019$ đạt cực đại tại $x = 0$. Ta chọn đáp án A.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

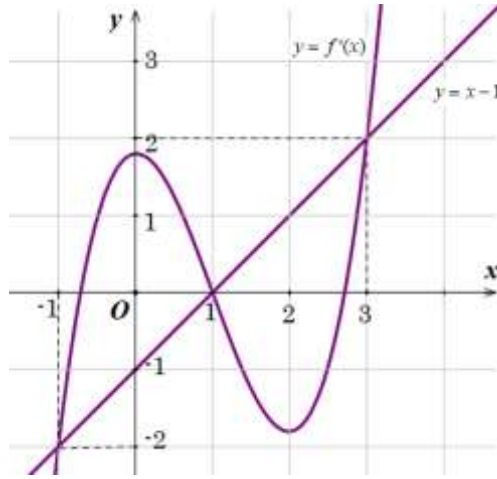
- A.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.
- B.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- C.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.
- D.** Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - (x - 1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$ đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$.

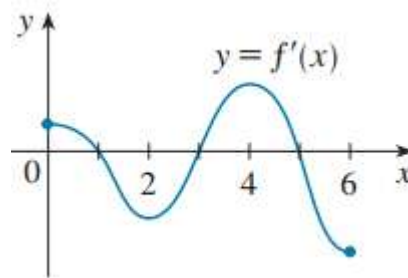


Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1, x = 3$
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$		$g(-1)$	$g(1)$	$g(3)$	

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2 + 2019$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0; 6]$.



A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2f(x)f'(x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$:

x	0	1	3	5	6			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$								

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt trong $[0;6]$ là $x_1 \in (0;1)$, $x_2 \in (1;3)$, $x_3 \in (3;5)$, $x_4 \in (5;6)$.

Vậy hàm số $y=[f(x)]^2+2019$ có tối đa 7 điểm cực trị trên đoạn $[0;6]$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	3	5	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	0	3	$-\infty$			

Xét hàm số $y=g(x)=f(|x-4|)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó hàm số $y=f(x-4)$ có đồ thị (C') với (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

Từ bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x-4)$ là :

x	$-\infty$	2	3	7	9	$+\infty$
$y = f(x-4)$	$+\infty$		1		3	
		-2		0		$-\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x-4|)$ là

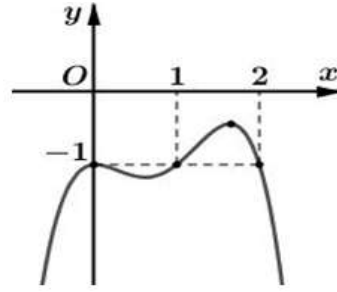
x	$-\infty$	-1	1	4	7	9	$+\infty$
$y=f(x-4)$							

Vậy hàm số $y=f(|x-4|)$ cho có 5 cực trị.

Do đó hàm số $y=g(x)=f(|x-4|)+2018^{2019}$ có 5 cực trị.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm.



A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. không có điểm cực tiểu. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$ (1).

Nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$ có

ba điểm chung có hoành độ là 0; 1; 2. Do đó $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

N.C.Đ

Trên $(-\infty; 1)$ đường thẳng $y = -1$ tiếp xúc hoặc nằm trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Trên $(1; 2)$ đường thẳng $y = -1$ nằm dưới đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

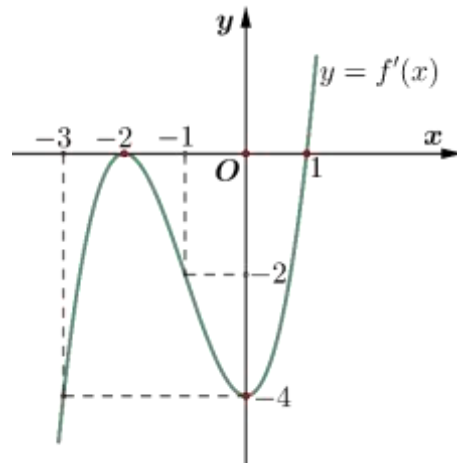
Trên $(2; +\infty)$ đường thẳng $y = -1$ nằm trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3 = 0 & (1) \\ f'(x^3 - 3x) = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Dựa vào đồ thị đã cho thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = -2 \\ x^3 - 3x = 1 \end{cases}$

Trong đó phương trình $x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

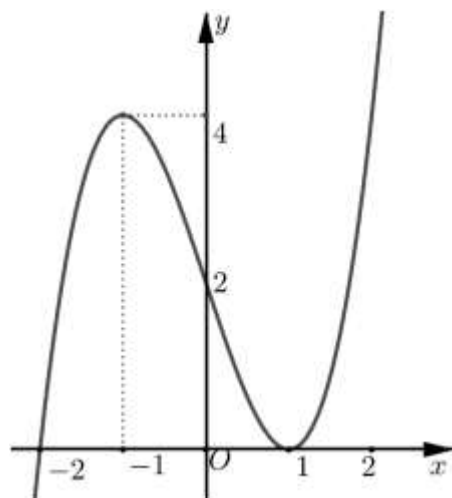
Còn phương trình: $x^3 - 3x = 1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$ và $1 < x_3 < 2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-2	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$								

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x^2 - 2|x|)$ có $[f(x^2 - 2|x|)]' = 2(x-1)f'(x^2 - 2|x|)$

$$\text{Cho } [f(x^2 - 2|x|)]' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(x^2 - 2|x|) = 0 \end{cases}$$

Dựa theo đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)$ có 2 cực trị tại $x = -1; x = 1$. Do đó

$$f'(x^2 - 2|x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x| = -1 \\ x^2 - 2|x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

+ Với $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ thì $0 < (x-1)^2 < 2 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 2|x| < 1$. Khi đó, $f'(x^2 - 2|x|) < 0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

+ Với $x < 1 - \sqrt{2}$ hay $x > 1 + \sqrt{2}$ thì $(x-1)^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| > 1$. Khi đó, $f'(x^2 - 2|x|) > 0$ (theo đồ thị hàm số $f(x)$)

Từ đó, ta có bảng xét dấu của $[f(x^2 - 2|x|)]'$

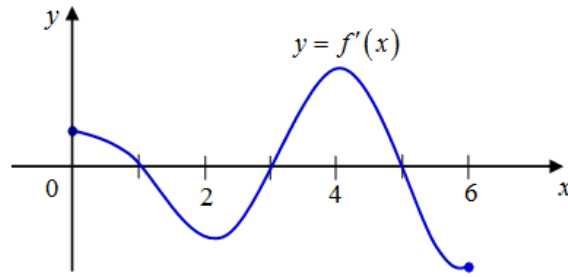
x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$[f(x^2 - 2 x)]'$	-	0	+	0	+
$f(x^2 - 2 x)$					

Bảng biến thiên của $y = f(x^2 - 2|x|)$ như sau

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	-1	0	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$y = f(x^2 - 2 x)$							

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có 5 cực trị.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?



A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = [f(x)]^2 \Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3; 5\}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ là

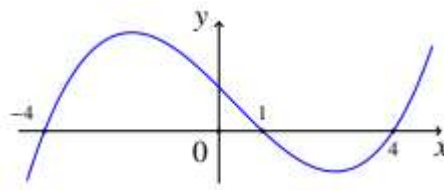
N.C.Đ

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa bốn nghiệm phân biệt với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 5 < x_4 < 6$.

Do đó, phương trình $y' = 0$ có tối đa 7 nghiệm phân biệt và đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 cực trị.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

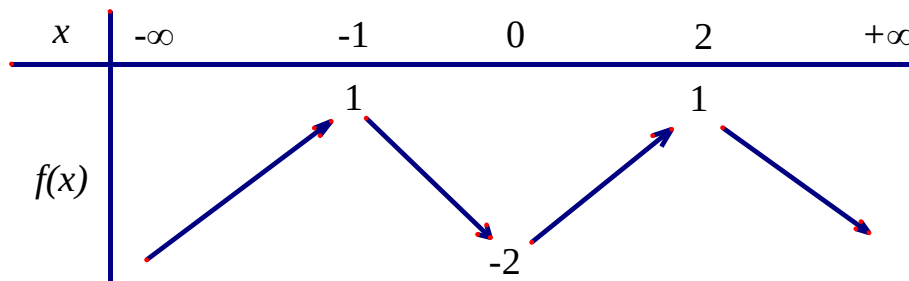
$$\text{Ta có: } y' = (2 - 2x) \cdot f'(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x - x^2 = -4 \\ 2x - x^2 = 1 \\ 2x - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	1	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$
$2-2x$	+	+	0	-	-
$f'(2x-x^2)$	-	0	+	0	-
y'	-	0	+	0	+

Suy ra hàm số có 1 cực đại.

Lưu ý: Ở bài toán này, vấn đề mấu chốt là chúng ta phải xét dấu được lượng $f'(2x-x^2)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại



A. $x = -1$

B. $x = 2$.

C. $x = 0$.

D. $x = 3$.

Lời giải

N.C.Đ

Chọn D

Đặt $-x+3=t$.

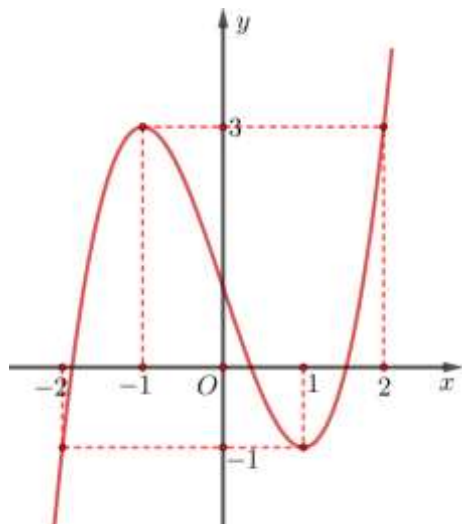
Ta thấy $[f(-x+3)]' = -f'(-x+3) = -f'(t)$ nên để hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại thì hàm số $y = f(t)$ phải đạt cực tiểu

Theo bảng biến thiên thì hàm số $y = f(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 0$

Suy ra hàm số $y = f(-x+3)$ đạt cực đại tại $-x+3=0$ hay $x=3$

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$

có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ lần lượt là $x_1; x_2; x_3$ trong đó

$$x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3.$$

$$y = \begin{cases} f(|x|) & \text{khi } f(|x|) \geq 0 \\ -f(|x|) & \text{khi } f(|x|) < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x), \forall x \in (0; x_2) \cup (x_3; +\infty) \\ -f(x), \forall x \in (x_2; x_3) \\ f(-x), \forall x \in (-\infty; -x_3) \cup (-x_2; 0) \\ -f(-x), \forall x \in (-x_3; -x_2) \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} f'(x), \forall x \in (0; x_2) \cup (x_3; +\infty) \\ -f'(x), \forall x \in (x_2; x_3) \\ -f'(-x), \forall x \in (-\infty; -x_3) \cup (-x_2; 0) \\ f'(-x), \forall x \in (-x_3; -x_2) \end{cases}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y' \text{ không xác định tại } \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm x_2 \\ x = \pm x_3 \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|)|$ như sau:

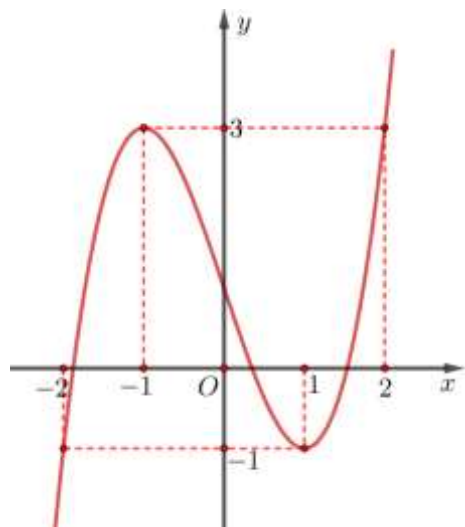
x	$-\infty$	$-x_3$	-1	$-x_2$	0	x_2	1	x_3	$+\infty$
y'		-	+	0	-	+	0	-	+
y									

Nên hàm số có 7 cực trị.

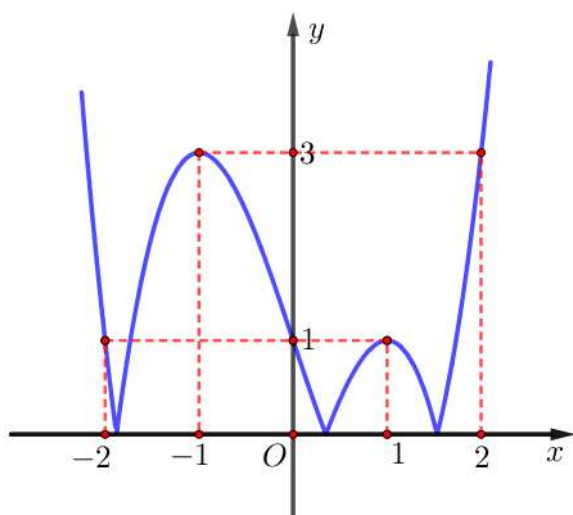
Cách 2:

Hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là $x = 1$ và phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị và phương trình $f(|x|) = 0$ có 4 nghiệm nên hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 cực trị.

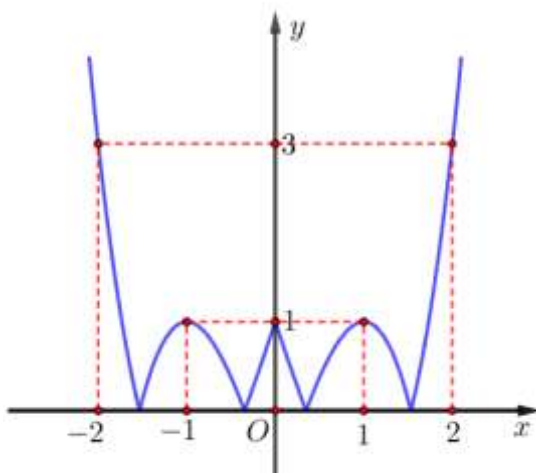
Cách khác: Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$



Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là:

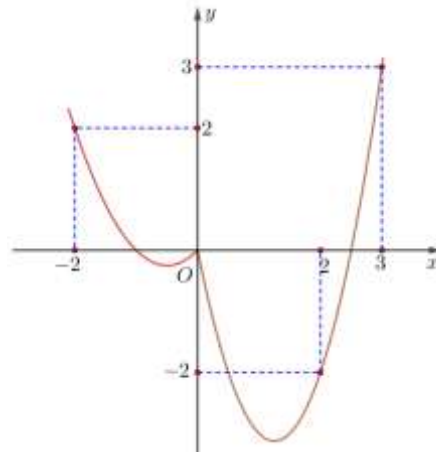


Và đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$?



A. 6.

B. 8.

C. 3.

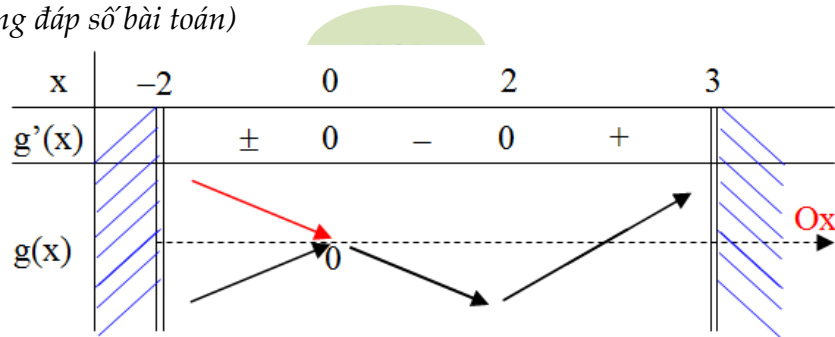
D. 5.

Bài giải

Đặt $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} - f(0)$

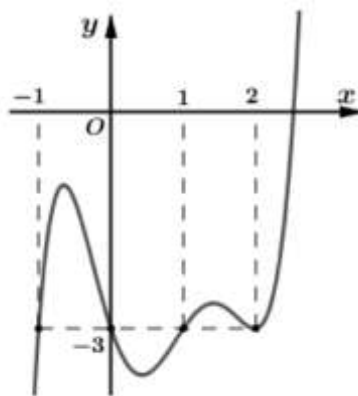
Ta có: $g'(x) = f'(x) + x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(L) \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

(Nhận xét: $x = 2$ là nghiệm bội lẻ, $x = 0$ có thể nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm bội chẵn tuy nhiên không ảnh hưởng đáp số bài toán)



Suy ra hàm số $y = |g(x)|$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$

Câu 43. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x) = f(x) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = f'(x) + 3, x \in \mathbb{R}.$$

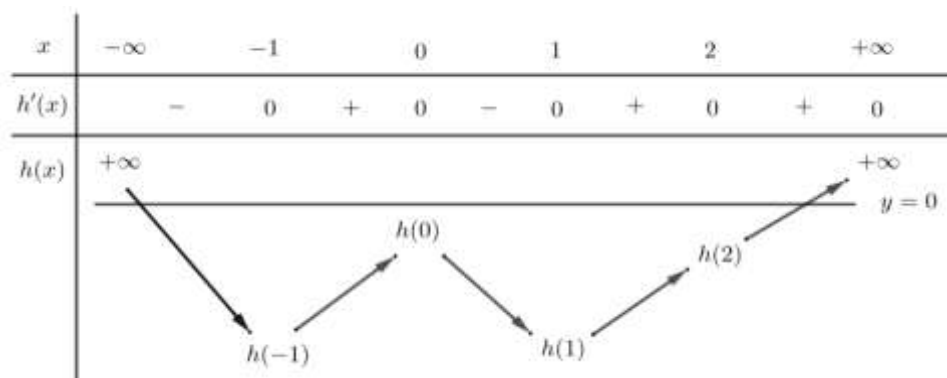
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Với $x = 2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x = 2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

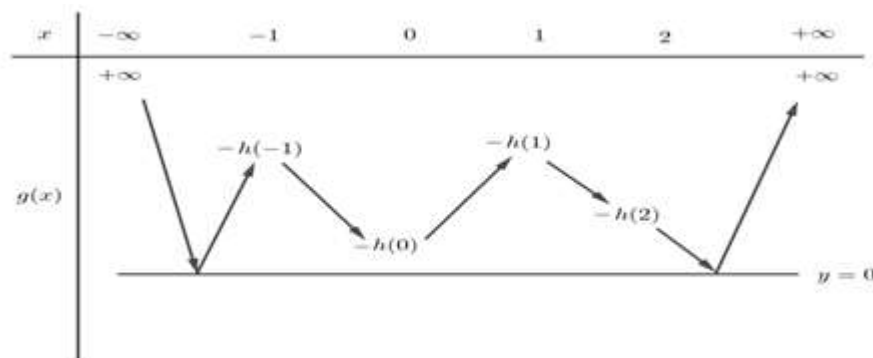
Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$, ta có: $\begin{cases} f'(x) < -3 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \\ f'(x) > -3 \quad \forall x \in (-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty) \end{cases}$.

Mặt khác $h(0) = f(0) + 3 \cdot 0 < 0$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x) = f(x) + 3x$:



Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |f(x) + 3x| = |h(x)|$:



$\Rightarrow$ Hàm số $g(x) = |f(x) + 3x| = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là



A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 6f'(x)f^2(x) + 8f'(x)f(x) = 2f'(x)f(x)(3f(x) + 4).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Suy ra $x_1 < -1$ và $1 < x_2$.

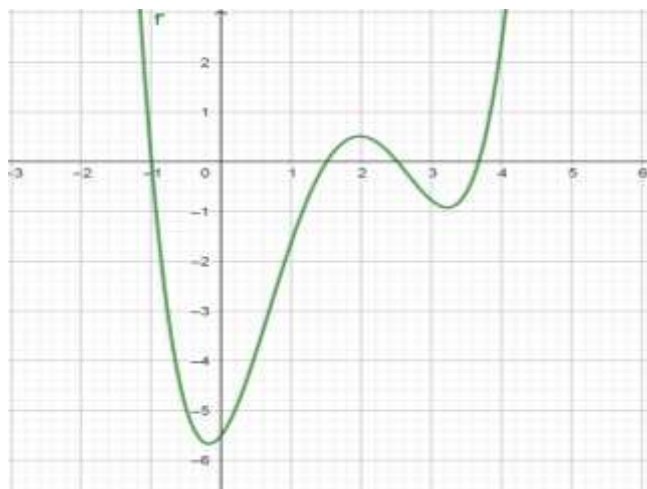
+ Phương trình $f(x) = -\frac{4}{3}$ có 4 nghiệm x_3, x_4, x_5, x_6 (giả sử $x_3 < x_4 < x_5 < x_6$). Và 4 giá trị thỏa mãn yêu cầu sau: $x_1 < x_3 < -1; -1 < x_4 < 0; 0 < x_5 < 1; 1 < x_6 < x_2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_3	-1	x_4	0	x_5	1	x_6	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$3f(x) + 4$	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$											

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 45. Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r$, ($m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ bên dưới) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{11}{3}$.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - (m + n + p + q + h + r)|$ là

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên:

$$f'(x) = 5mx^4 + 4nx^4 + 3px^2 + 2qx + h = 5m(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{11}{3}\right).$$

$$\text{Suy ra } 5mx^4 + 4nx^4 + 3px^2 + 2qx + h = 5m\left(x^4 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{43}{4}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{55}{4}\right).$$

$$\text{Đồng nhất hệ số, ta được } n = \frac{-25}{3}m; p = \frac{215}{12}m; q = \frac{35}{3}m; h = \frac{-275}{4}m.$$

$$\text{Suy ra } g(x) = \left| f(x) + \frac{93}{2}m - r \right|$$

$$\square \quad \text{Xét } h(x) = f(x) + \frac{93}{2}m - r.$$

$\Rightarrow h'(x) = f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt, nên $h(x)$ có bốn cực trị.

$$\square \quad \text{Xét } h(x) = 0 \Leftrightarrow mx^5 - \frac{25}{4}mx^4 + \frac{215}{12}mx^3 + \frac{35}{3}mx^2 - \frac{274}{4}mx + r = \frac{-93}{2}m + r$$

$$\Leftrightarrow x^5 - \frac{25}{4}x^4 + \frac{215}{12}x^3 + \frac{35}{3}x^2 - \frac{274}{4}x + \frac{93}{2} = 0.$$

$$\text{Đặt } k(x) = x^5 - \frac{25}{4}x^4 + \frac{215}{12}x^3 + \frac{35}{3}x^2 - \frac{274}{4}x + \frac{93}{2}.$$

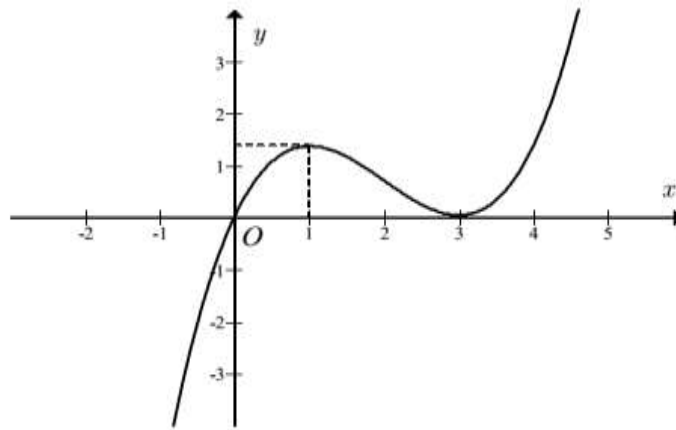
x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{3}$	$+\infty$	
$k'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$k(x)$	$-\infty$	$\frac{299}{3}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$k(\frac{11}{3}) < 0$	$+\infty$	



Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $h(x) = 0 \Leftrightarrow k(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. 5047 .

B. 5049 .

C. 5050 .

D. 5043 .

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \Rightarrow g'(x) = 2f(x+2) \cdot f'(x+2) + 4f'(x+2)$

$$g'(x) = 2f'(x+2) \cdot [f(x+2) + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2) = 0 \\ f(x+2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ x+2 = 3 \\ x+2 = a \in (-1; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = a - 2 \in (-3; -2) \end{cases} \text{ là 3 nghiệm đơn của } g'(x) = 0.$$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Đặt $t = f(x+2) \Rightarrow t \in \mathbb{R}$ và mỗi giá trị $t \in \mathbb{R}$ thì phương trình $t = f(x+2)$ luôn có nghiệm.

$$g(x) = f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m \Rightarrow h(t) = t^2 + 4t + 3m$$

Vì hàm số $g(x)$ có 3 cực trị nên để hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì.

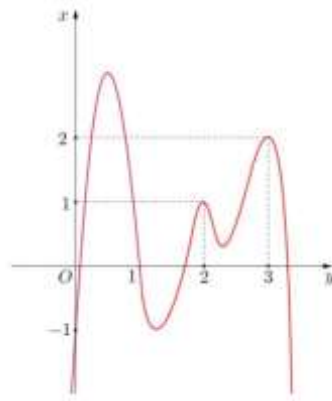
$$t^2 + 4t + 3m \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}. \text{ (Vì hàm } y = h(t) \text{ là hàm bậc hai có hệ số } a > 0)$$

Do $m \in [-100; 100]; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4, \dots, 100\}$.

Vậy tổng các giá trị của m là $2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 5049$.



Câu 47. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9.

B. 3.

C. 7.

D. 5.**Lời giải****Chọn D**

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.

♦ Tìm số điểm cực trị của $g(x)$

Ta có : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

N.C.Đ

Kẻ đường thẳng $y = x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ

$x=0; x=1; x=2; x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2; x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0; x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0; x=1$

♦ Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Bảng biến thiên:

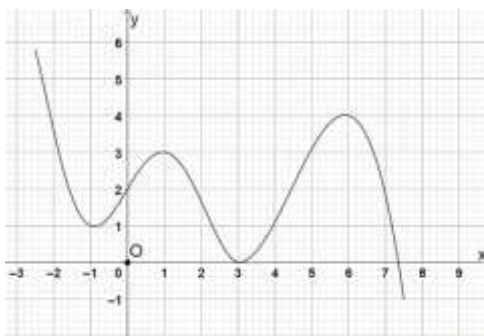
x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	-
$g(x)$	$+\infty$	$g(0)$	$g(1)$			$-\infty$	

The graph illustrates the function $g(x)$ and its derivative $g'(x)$. The x-axis is marked with $-\infty, 0, 1, 2, 3, +\infty$. The y-axis is marked with $+\infty, g(0), g(1), -\infty$. The curve $g(x)$ starts at $+\infty$ for $x = -\infty$, decreases to a local minimum at $x = 0$ (labeled $g(0)$), increases to a local maximum at $x = 1$ (labeled $g(1)$), and then decreases towards $-\infty$ as x approaches $+\infty$. The curve crosses the x-axis at $x = 0, 1, 3$.

Suy ra phương trình có tối đa ba nghiệm phân biệt.

♦ Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $2 + 3 = 5$ điểm cực trị.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13.

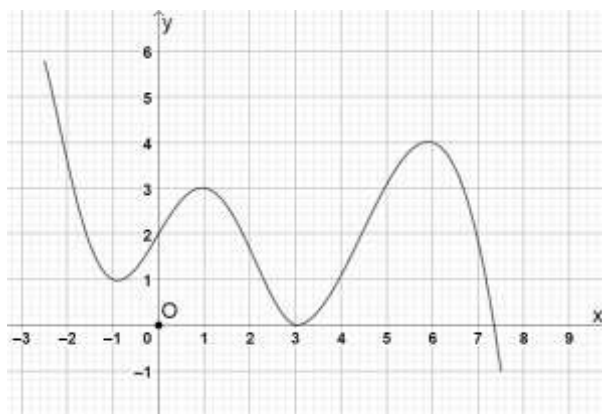
B. 11.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = f'(x) f'(f(x)-1) \ln 2019^{f(f(x)-1)}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } f'(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1 = -1 \\ f(x)-1 = 1 \\ f(x)-1 = 3 \\ f(x)-1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x) = 4 \\ f(x) = 7 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có

+) $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x_5 > 6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x) = 2$ có 5 nghiệm $x_6 < -1; -1 < x_7 < 1; 1 < x_8 < 3; 3 < x_9 < 6; 6 < x_{10} < x_5$ là các nghiệm bội 1,

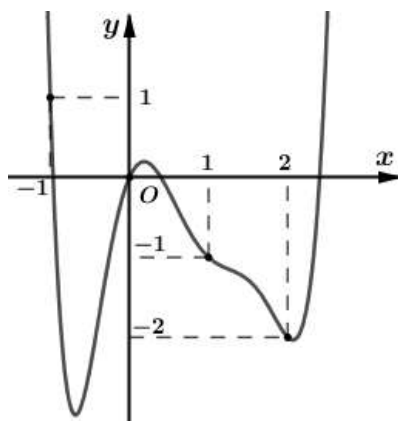
+) $f(x) = 4$ có 1 nghiệm $x_{11} < x_6$ là nghiệm bội 1,

+) $f(x) = 7$ có 1 nghiệm $x_{12} < x_{11}$ là nghiệm bội 1,

Suy ra $y' = 0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y = 2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

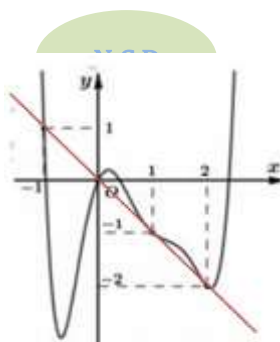
Chọn A

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2).$$

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.



N.C.Đ

**CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ HÀM SỐ****VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO****DẠNG 2****CỰC TRỊ HÀM BẬC BA, HÀM TRÙNG PHƯƠNG**

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.
- A. $-3 < m < 1$. B. $-\frac{7}{2} < m < -3$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-\frac{7}{2} < m < -2$.
- Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$?
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.
- Câu 3.** Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $(a; b)$. Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.
- A. 5. B. 2. C. 11. D. 4.
- Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.
- A. $m > 2$. B. $m \in \left(2; \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. C. $\frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < -1$. D. $m < -1$.
- Câu 6.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.
- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.
- Câu 7.** Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.
- A. 9. B. 4. C. 0. D. 8.



- Câu 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .
- A. $k = -3$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = 3$. D. $k = -\frac{1}{3}$.
- Câu 9.** Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?
- A. 18. B. 19. C. 21. D. 20.
- Câu 10.** Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).
- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm 1$.
- Câu 11.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?
- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 12.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là
- A. 3. B. 5. C. 1. D. 2.
- Câu 13.** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$?
- A. 12. B. 11. C. 13. D. 10.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.
- A. $\frac{2}{9}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
- Câu 15.** Xét các số thực với $a \neq 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:
- A. $\frac{15}{4}$. B. $\frac{27}{4}$. C. $\frac{4}{27}$. D. $\frac{4}{15}$.
- Câu 16.** Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị là
- A. $m < -2$. B. $-2 < m < 0$. C. $0 < m < 3$. D. $m > 3$.
- Câu 17.** Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.
- A. $\frac{7}{2}$. B. -1 . C. $\frac{1}{2}$. D. 5.



Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 5.

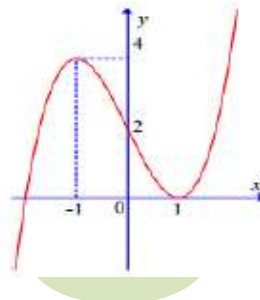
Câu 19. Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x - x^3 - 3x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 6.

Câu 20. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A. $m \in (-1; 1]$. B. $m \in (-3; -1]$. C. $m \in (3; 5]$. D. $m \in (1; 3]$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2018) - 2019x + 1$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 22. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

- A. $m_0 \in (3; 4)$. B. $m_0 \in (1; 2)$. C. $m_0 \in (0; 1)$. D. $m_0 \in (2; 3)$.

Câu 24. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-7; 7)$ để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có đúng ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3

Câu 25. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$

- A. $\sqrt{30}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $3 + \sqrt{6}$. D. $3\sqrt{3}$.



Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. C. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$. D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{3}{8}$. B. $\begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. C. $m = \frac{8}{3}$. D. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 1. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 29. Gọi S là tập giá trị nguyên $m \in [0;100]$ để hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S .

A. 10096. B. 10094. N.C.Đ. C. 4048. D. 5047.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C. $2+\sqrt{5}$. D. $-1+\sqrt{5}$.

Câu 31. Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k = -1; k = \frac{1}{2}$. B. $k = 1; k = \frac{1}{3}$.
C. $k = 1; k = \frac{1}{2}$. D. $k = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

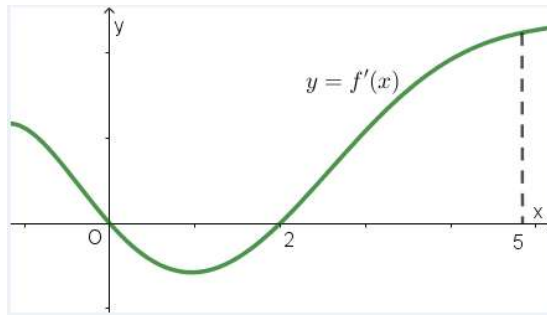
A. $m \geq 1$. B. $m \leq 1$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m = 2\sqrt{2}$. B. $m = 1$. C. $m = \sqrt[3]{3}$. D. $m = \sqrt[3]{4}$.



Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 36. Biết $m = m_0$; $m_0 \in \mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in (0; 3)$. B. $m_0 \in [-5; -3)$. C. $m_0 \in (-3; 0]$. D. $m_0 \in (3; 7)$.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + m + 1)x^2 + m$ có đồ thị (C) . Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \sqrt{3}$. D. $m = 0$.

Câu 38. Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(2; 3)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

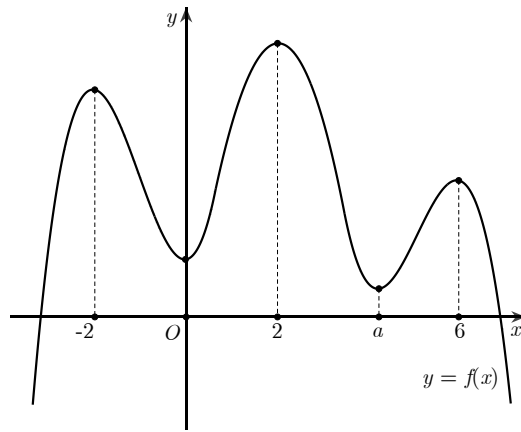
Câu 39. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 6. B. 8. C. 9. D. 7.

Câu 40. Cho hàm số $y = |x^4 - 2m - 1x^2 + 2m - 3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

- A. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus 2$. C. $1; +\infty \setminus 2$. D. $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là:

- A. 8. B. 11. C. 9. D. 7.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

- A. 1. B. 0. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

N.C.Đ



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

A. $-3 < m < 1$.

B. $-\frac{7}{2} < m < -3$.

C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$.

D. $-\frac{7}{2} < m < -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Đặt $t = x+1 \Leftrightarrow x = t-1$. Khi đó $y' = t^2 + 2(m+2)t + 2m+7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow t^2 + 2(m+2)t + 2m+7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0 \\ S = -2(m+2) > 0 \\ P = 2m+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3.$$

N.C.B

Cách 2

Ta có $y' = f(x) = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 1 - 2(m+3) + 4(m+3) > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m > -\frac{7}{2} \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3.$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 3mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Với điều kiện $m \neq 0$, giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0; \frac{1}{2}m^3\right)$, $B(m; 0)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(m; -\frac{1}{2}m^3\right)$ và $I\left(\frac{m}{2}; \frac{m^3}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{1}{2}m^3 = 0 \\ \frac{m}{2} = \frac{m^3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ m = 0 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 3. Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $(a; b)$.

Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1)$.

$$\text{Xét } 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{cases} \text{ N.C.Đ}$$

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m .

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị là $y = -2x + m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1) = 3m+2$, $y(-m+1) = 3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $(3m+2)(3m-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$.

Vậy $a + 2b = \frac{2}{3}$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5.

B. 2.

C. 11.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1; m-2)$, $B(-1; m+2)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -2x + m$ hay $2x + y - m = 0$

Theo giả thiết $d(O; AB) \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |-m| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m > 2$.

B. $m \in \left(2; \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

C. $\frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < -1$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0 \quad (1).$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là:

$$y = \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)x + \frac{1}{3}m(m+2).$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1 + y_2 > 0$ và đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2m$

$$\text{Nên } y_1 + y_2 > 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(2m) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3m + 6) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right) \quad (**).$$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \quad (2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0 \end{cases} \quad (3).$$

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi

$$\text{đó điều kiện là } \Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \quad (***)$$

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2: Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0 \quad (1).$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} \quad (*)$$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$

cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \quad (2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

N.C.Đ

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó

$$\text{điều kiện: } \Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \quad (**).$$

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương:

$$y' = x^2 - 2mx + m + 2, y'' = 2x - 2m$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m$$

$$\text{Ta có: } y(m) > 0 \Rightarrow \frac{m^3}{3} - m^3 + m(m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m(-2m^2 + 3m + 6) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right) \quad (***)$$

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Câu 6. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.

A. $m = -1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0 \quad (1).$$

Để hàm số có 2 cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Với điều kiện $m \neq 1$ ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 4m \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = -8 \Leftrightarrow 2m + 2 + 8m = -8 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 7. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.

A. 9.

B. 4.

C. 0.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10 \Rightarrow y' = x^2 - mx - 4.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0.$$

$\Delta = m^2 + 16 > 0, \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lí Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}.$$

$$S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1 x_2)^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 1 = 16 - (m^2 + 8) + 1 = 9 - m^2 \leq 9.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $k = -3$.

B. $k = \frac{1}{3}$.

C. $k = 3$.

D. $k = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-3m+2$		$-3m-2$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1; -3m+2)$.

Nhận xét: $y_M = -3m+2 = -3(m-1)-1 = -3x_M -1 \Rightarrow M \in (d): y = -3x-1, \forall m$.

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y = -3x-1$.

Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k = -3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

+ Do $m \in \mathbb{N}, m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị là A, B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24 (O là gốc tọa độ).

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x-2m)$.

$$y' = 0 \Rightarrow 3x(x-2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m \neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 3m^2), B(2m; 3m^2 - 4m^3)$.

Phương trình đường thẳng $OA: x = 0$.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot d(B; OA) = \frac{1}{2} 3m^2 \cdot |2m| = 24 \Rightarrow m^2 |m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2$ có $\Delta' = -2m^2 + 2m + 7$.

Để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

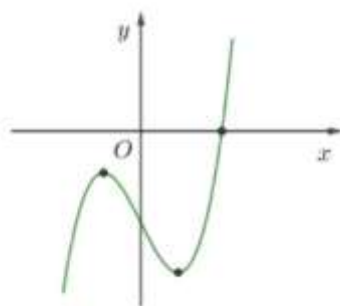
$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{15}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{15}}{2},$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên được $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm

(hình vẽ minh họa bên dưới), tức là, phương trình $x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3 = 0$ (*) có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m = -1$ thì phương trình (*) là $x^3 - x + 2 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m = -1$.

Xét $m = 0$ thì phương trình (*) là $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m = 0$.

Xét $m = 1$ thì phương trình (*) là $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt (dùng MTCT) nên không chọn $m = 1$.

Xét $m = 2$ thì phương trình (*) là $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực (dùng MTCT) nên chọn $m = 2$.

Đáp số: $m \in \{-1; 0; 2\}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 3.

B. 5.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị của hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Gọi n là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên miền $x > 0$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là $2n+1$.

$$+ \text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3(x-2)^5(x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (nghiệm bội lẻ)}$$

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên miền $x > 0$ là 1.

$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là $2.1+1=3$.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$?

A. 12.

B. 11.

C. 13.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

N.C.Đ

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$ thì phương trình $y' = 0$ hay $3x^2 - 6x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 3)$.

Cách 1:

Khi đó, đặt $f(x) = 3x^2 - 6x - m$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f(3) > 0 \\ a.f(-3) > 0 \\ -3 < \frac{S}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+3m > 0 \\ 45-m > 0 \\ 9-m > 0 \\ -3 < 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Khi đó, đặt $f(x) = 3x^2 - 6x - m$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3 < x_1 < x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+3m > 0 \\ -3 < \frac{3-\sqrt{9+3m}}{3} < \frac{3+\sqrt{9+3m}}{3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$



Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3) \Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ hay $3x^2 - 6x = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 3)$.

Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in (-3; 3)$. Ta có:

$$f'(x) = 6x - 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	-3	1	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	45	-3	9

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < m < 9$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0; 0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$.

B. $\sqrt{3}$.

N.C.Đ C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 4mx + m - 1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

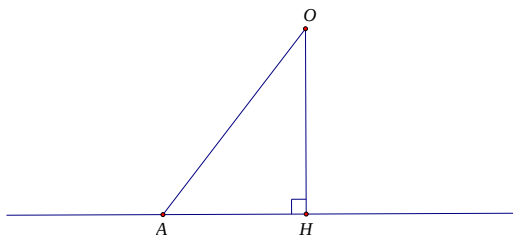
$$\text{Mà } y(x) = y'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{2m}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1.$$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ :

$$y = -\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1.$$

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ . Khi đó ta có $d(O; \Delta) = OH \leq OA$ (Hình vẽ)



Do đó khoảng cách lớn nhất khi $H \equiv A$ hay $\Delta \perp OA$.

$$\text{Vậy khoảng cách lớn nhất là } OA = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$



Câu 15. Xét các số thực với $a \neq 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{27}{4}$.

C. $\frac{4}{27}$.

D. $\frac{4}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = ax^3 - x^2 + b$ ($x \in \mathbb{R}$).

$$f'(x) = 3ax^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = b \\ x = \frac{2}{3a} \Rightarrow y = b - \frac{4}{27a^2} \end{cases}$$

Để phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thực khi và chỉ khi

$$y_{CD} \cdot y_{CT} \leq 0 \Leftrightarrow b \left(b - \frac{4}{27a^2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow b - \frac{4}{27a^2} \leq 0 \Leftrightarrow a^2b - \frac{4}{27} \leq 0 \Leftrightarrow a^2b \leq \frac{4}{27}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng $\frac{4}{27}$.

Câu 16. Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m < -2$. B. $-2 < m < 0$. C. $0 < m < 3$. D. $m > 3$.

Lời giải
N.C.Đ

Chọn D

Xét hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y' = x^2 - 2mx + (m+6) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. -1 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Tính được: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.



Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Nhận xét $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra:

$$|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 - m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

Suy ra hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị. Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là $-m - 4 < 0 < -m \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 19. Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x - 3x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9.

B. 7.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

• Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y = |f(1 - 2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1 - 2019x) = 0$ và số cực trị (không phải là nghiệm phương trình

$f(1 - 2019x) = 0$) của hàm số $y = f(1 - 2019x)$.

Ta có $f'(x) = x^2 - x - 3x = x^2 - 4x$.

$$[f(1 - 2019x)]' = -2019 f'(1 - 2019x).$$

Do đó

$$[f(1 - 2019x)]' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2019x^2 - 1 - 2019x - 1 - 2019x - \sqrt{3} - 1 - 2019x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2019} \\ x = 0 \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2019} \\ x = \frac{1+\sqrt{3}}{2019} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $y = f(1-2019x)$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2019}$	0	$\frac{1}{2019}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2019}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Do đó phương trình $f(1-2019x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y = f(1-2019x)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = |f(1-2019x)|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m \in (-1; 1]$.

B. $m \in (-3; -1]$.

C. $m \in (3; 5]$.

D. $m \in (1; 3]$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -3x^2 + 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m.$$

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0; -3m-1); B(2m; 4m^3-3m-1) \Rightarrow \overline{AB} = (2m; 4m^3)$.

Trung điểm I của AB có tọa độ: $I(m; 2m^3-3m-1)$.

Đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ có một VTCP $\vec{u} = (8; -1)$.

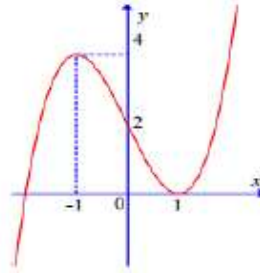
$$\text{và } B \text{ đối xứng với nhau qua } d \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ \overline{AB} \perp d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ \overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3 - 23m - 82 = 0 \\ 16m - 4m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3 - 23m - 82 = 0 \\ m = 0 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m \neq 0). \text{ Suy ra } m \in (1; 3].$$



Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2018) - 2019x + 1$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$y = f(x - 2018) - 2019x + 1 \Rightarrow y' = f'(x - 2018) - 2019.$$

$$\text{Do đó } y' = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2018) = 2019 \quad (1).$$

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với đường thẳng $y = 2019$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy (1) chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y = f(x - 2018) - 2019x + 1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 22. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và

$$B(2; -4 + m) \text{ Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2$$

$$\Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0 \in (3; 4)$.

B. $m_0 \in (1; 2)$.

C. $m_0 \in (0; 1)$.

D. $m_0 \in (2; 3)$.

Lời giải.

Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6m; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m.$$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow m > 0.$$

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{3} y' \cdot x - 4mx + 4.$$

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \\ y_1 = y(x_1) = \frac{1}{3} y'(x_1) \cdot x_1 - 4mx_1 + 4 \\ y_2 = y(x_2) = \frac{1}{3} y'(x_2) \cdot x_2 - 4mx_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4mx_1 + 4 \\ y_2 = -4mx_2 + 4 \end{cases}.$$

Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -4mx + 4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y = -4mx + 4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB

$$\Leftrightarrow 0 < d(I, d) < R \Leftrightarrow 0 < d(I, d) < \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2} \end{cases} (*).$$

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0; 4)$, $IK = \sqrt{17} > R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A, B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I .

$$\text{Do đó: } S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} IA \cdot IB.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I, d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1 \text{ (thỏa mãn (*))}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}.$$

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I . Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I, d) = t$ ($0 < t \leq l$), với l là độ dài đoạn thẳng IK , rồi tính $S_{IAB} = f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0; l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + y^2 = 2$ (C)



Xét hệ $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ y = -4mx + 4 \end{cases} \Rightarrow (16m^2 + 1)x^2 - 2(16m+1)x + 15 = 0 \quad (1).$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a, b
 $\Leftrightarrow (16m+1)^2 - 15(16m+1) > 0.$

Khi đó $A(a; -4ma + 4), B(b; -4mb + 4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (a-1; -4ma+4) \\ \overrightarrow{IB} = (b-1; -4mb+4) \end{cases}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = ab - (a+b) + 16[m^2ab - m(a+b) + 1] + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow ab - (a+b) + 16m^2ab - 16m(a+b) + 17 = 0 \Leftrightarrow (16m^2 + 1)ab - (16m+1)(a+b) + 17 = 0$
 $\Leftrightarrow 15 - \frac{2(16m+1)^2}{16m^2+1} + 17 = 0 \Leftrightarrow \frac{(16m+1)^2}{16m^2+1} = 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}.$

Câu 24. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-7; 7)$ để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có đúng ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3

Lời giải

Chọn D

Xét $y = x^4 - 3mx^2 - 4.$

$$y' = 4x^3 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3m}{2} \end{cases}$$

N.C.Đ

Trường hợp 1: $\frac{3m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0.$

Hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 3 cực trị: $A(0; -4), B\left(\sqrt{\frac{3m}{2}}; -\frac{9m^2}{4} - 4\right), C\left(-\sqrt{\frac{3m}{2}}; -\frac{9m^2}{4} - 4\right)$

Suy ra $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 2: $\frac{3m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ (1) suy ra hàm số $y = x^4 - 3mx^2 - 4$ có 1 cực tiểu là:

$A'(0; -4)$

Suy ra hàm số $y = |x^4 - 3mx^2 - 4|$ có 3 điểm cực trị là: $A(0; 4), B(x_1; 0), C(-x_1; 0)$, trong đó x_1 là nghiệm của phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$. ($x_1 \neq 0$) (do $ac = -4$ nên phương trình $x^4 - 3mx^2 - 4 = 0$ luôn có nghiệm) (2)

Diện tích tam giác ABC bằng: $S = \frac{1}{2} \cdot d(A; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2|x_1| = 4|x_1|.$

Do $S > 4 \Leftrightarrow |x_1| > 1$. Từ phương trình (2) suy ra $m = \frac{x_1^4 - 4}{3x_1^2} = \frac{x_1^2}{3} - \frac{4}{3x_1^2}$ với $|x_1| > 1$.

Do $|x_1| > 1 \Leftrightarrow x_1^2 > 1 \Leftrightarrow m = \frac{x_1^2}{3} - \frac{4}{3x_1^2} > -1$ kết hợp với (1) suy ra $-1 < m \leq 0$ suy ra chỉ có $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25. Biết hai hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1$ và $g(x) = -x^3 + bx^2 - 3x + 1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a| + |b|$

A. $\sqrt{30}$.

B. $2\sqrt{6}$.

C. $3 + \sqrt{6}$.

D. $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2$. Hàm số $y = f(x)$ có cực trị khi:

$$a^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow a < -\sqrt{6} \vee a > \sqrt{6} \quad (1).$$

$$g'(x) = -3x^2 + 2bx - 3. \text{ Hàm số } y = g(x) \text{ có cực trị khi } b^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow b < -3 \vee b > 3 \quad (2).$$

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2ax_0 + 2 = 0 \\ -3x_0^2 + 2bx_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{2x_0} \\ b = \frac{3}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{x_0} - \frac{3}{2}x_0 \\ b = \frac{3}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) \end{cases}$$

$$P = |a| + |b| = \left| \frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0 \right| + \left| \frac{3}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) \right| \geq \left| \frac{5}{2x_0} + 3x_0 \right|$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{25}{4x_0^2} + 9x_0^2 + 15 \geq 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2} \cdot 9x_0^2} + 15 = 30 \Rightarrow P \geq \sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0 \right) \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) > 0 \\ \frac{25}{4x_0^2} = 9x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{3}{2}x_0 \right) \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) > 0 \\ x_0 = \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases} \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Với hai giá trị x_0 , ta tìm được hai cặp giá trị a, b thỏa (1) và (2). Vậy $\min P = \sqrt{30}$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$.

D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

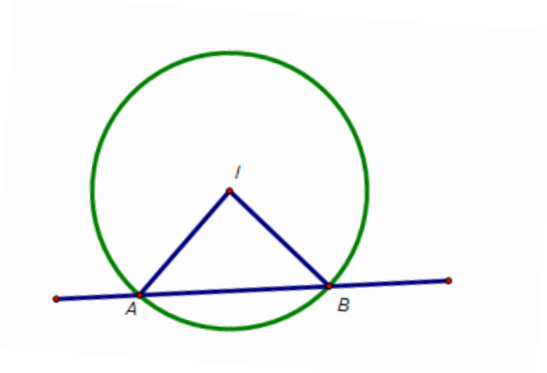
$$\text{Ta có } y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$$

Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } y' = 3x^2 - 3m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow m > 0 \quad (1)$$

Ta có $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \text{ luôn đúng do } m > 0$$

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \frac{1}{2} \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$d(I; \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn đk (1)}$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. Các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{3}{8}$.

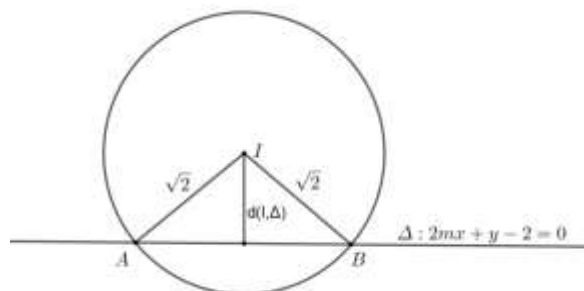
B. $\begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

C. $m = \frac{8}{3}$.

D. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m)$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 = m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Ta có $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

là $\Delta: y = -2mx + 2$ hay $\Delta: 2mx + y - 2 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi

$$d(I, \Delta) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 < 8m^2 + 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 2 > 0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB$.

$$\text{Mà } \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} R^2 = 1.$$

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$.

$$\text{Từ đó } d(I, \Delta) = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{3}{8}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 1.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + (m+3).$$

* Trường hợp 1: $m = 1$.

Lúc đó $f'(x) = -10x + 4$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị dương. Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $m \neq 1$.

Lúc này hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc ba. Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2$ hoặc $x_1 = 0 < x_2$.

☐ Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m-1) \cdot (m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

☐ Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x_1 = 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3=0 \\ \frac{10}{3(m-1)}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m>1 \end{cases}. \text{ Hệ phương trình này vô nghiệm.}$$

Kết hợp các trường hợp, ta có $-3 < m \leq 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 29. Gọi S là tập giá trị nguyên $m \in [0; 100]$ để hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S .

A. 10096.

B. 10094.

C. 4048.

D. 5047.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8$ có 2 cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox

Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8$

$$\text{Có: } y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 - 12m - 8 \\ x = 2m \Rightarrow y = -12m - 8 \end{cases}$$

Hai cực trị của hàm số $y = f(x)$ là: $A(0; 4m^3 - 12m - 8), B(2m; -12m - 8)$

Để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox khi và chỉ khi

$$(4m^3 - 12m - 8)(-12m - 8) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$$

Mà: $m \in [0; 100] \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; 6; \dots; 100\}$

Vậy tổng các giá trị của m là: $\frac{(3+100)98}{2} = 5047$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $2+\sqrt{5}$.

D. $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m); \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{m} \text{ với } m > 0$$

Gọi $A(0; 1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là 3 điểm cực trị của hàm số (1); khi đó tam giác

$\triangle ABC$ cân tại A, I là tâm đường tròn đi qua A, B, C nên $I \in Oy$, gọi $I(0; b)$

Ta có: $IA = R = 1 \Leftrightarrow 1 - b = 1 \Leftrightarrow b = 0$

$$IB = R = 1 \Leftrightarrow m + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-1)(m^2+m-1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ nên loại m_4 và m_1

Ta có $m_2^3 + m_3^3 = -1 + \sqrt{5}$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 31. Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k = -1; k = \frac{1}{2}$.

B. $k = 1; k = \frac{1}{3}$.

C. $k = 1; k = \frac{1}{2}$.

D. $k = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = k \end{cases} (1)$$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0; k), B(-\sqrt{k}; k - k^2), C(\sqrt{k}; k - k^2).$$

$$\text{Từ yêu cầu bài toán ta có: } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{k + (k - k^2) + (k - k^2)}{3}$$

$$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 32. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x(x^2 - m^2 + m - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 - m^2 + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác không

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Khi đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$x_1 = -\sqrt{m^2 - m + 1}, x_2 = \sqrt{m^2 - m + 1}, x_3 = 0.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	y_1	y_2	y_1	$+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B(-\sqrt{m^2 - m + 1}; y_1)$ và $C(\sqrt{m^2 - m + 1}; y_1)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{1}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

A. $m = 2\sqrt{2}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \sqrt[3]{3}$.

D. $m = \sqrt[3]{4}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số trùng phương có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1).

Gọi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là A, B, C với A là điểm thuộc trục tung.

Khi đó, $A(0; m^4 + 2m)$, $B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$, $C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$.

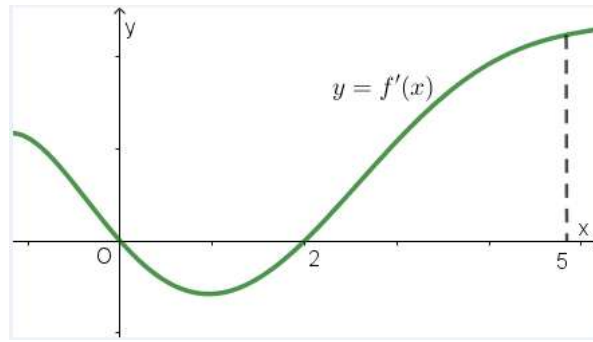
Vì đồ thị hàm số trùng phương nhận trục tung làm trục đối xứng. Ở bài này, hai điểm cực tiểu đối xứng nhau qua trục tung và điểm cực đại nằm trên trục tung nên $\triangle ABC$ cân tại A . Do đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều

$$\Leftrightarrow \triangle ABC \text{ có } AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m + m^4} = \sqrt{4m} \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m^4 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{cases}.$$

Từ điều kiện (1) kết luận $m = \sqrt[3]{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$.

$$\text{Khi } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}.$$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A(0; 3m - 2)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2)$ và $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 3m - 2)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36. Biết $m = m_0$; $m_0 \in \mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (0; 3)$.

B. $m_0 \in [-5; -3]$.

C. $m_0 \in (-3; 0]$.

D. $m_0 \in (3; 7)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$.

$$\text{Xét phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$, $C(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$.

Ta thấy $\triangle ABC$ cân tại A . Nên $\triangle ABC$ vuông khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(1 + m^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}. \text{ Kết hợp } m < 0 \text{ ta có } m = -1.$$

Cách 2. (Dùng công thức tính nhanh).

Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\triangle ABC \text{ vuông cân} \Rightarrow b^3 = -8a \Rightarrow (2m)^3 = -8 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1.$$

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + m + 1)x^2 + m$ có đồ thị (C) . Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = \sqrt{3}$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(m^2 + m + 1)x = 4x[x^2 - (m^2 + m + 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{m^2 + m + 1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{m^2 + m + 1} \end{cases}.$$

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	+
y	$+\infty$		y_{CT}		y_{CD}		$+\infty$

$$\text{Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: } d = |x_3 - x_1| = 2\sqrt{m^2 + m + 1} = 2\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 38. Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2; 3)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m}, (m > 0) \end{cases}$$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m-1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của cạnh } BC, \text{ ta có } \begin{cases} AH = m^2 \\ BC = 2\sqrt{m} \end{cases}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = m^2 \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{4}.$$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6.

B. 8.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Để hàm số } y = |f(x)| \text{ có đúng ba điểm cực trị thì: } \begin{cases} m \leq 0 \\ 4 - 2m^2 < 0 \\ m > 0 \\ 4 - 3m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{2} \\ 0 < m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy các số nguyên m thỏa mãn bài toán là $\{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; 1\}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = |x^4 - 2m - 1x^2 + 2m - 3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus 2$.

C. $1; +\infty \setminus 2$.

D. $\left(1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt: } f(x) = x^4 - 2m - 1x^2 + 2m - 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4m - 1x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{cases}$$

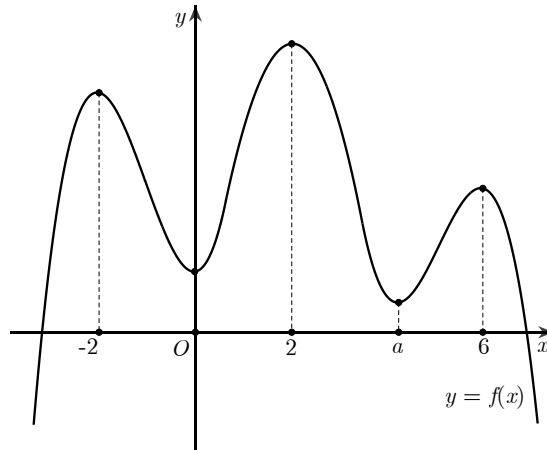
Vì hàm số $f(x)$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 5 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$

$$\text{phải có 3 cực trị thỏa } y_{cd} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$$

Vậy chọn D



Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là:

A. 8.

B. 11. **C. 9.**

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$$g(x) = f(x^6 - 3x^2).$$

$$g'(x) = (f(x^6 - 3x^2))' = (x^6 - 3x^2)' \cdot f'(x^6 - 3x^2) = (6x^5 - 6x) f'(x^6 - 3x^2).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (6x^5 - 6x) f'(x^6 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \quad (1) \\ x^6 - 3x^2 = 0 \quad (2) \\ x^6 - 3x^2 = 2 \quad (3) \\ x^6 - 3x^2 = a \quad (4) \\ x^6 - 3x^2 = 6 \quad (5) \end{cases}$$

$$x^6 - 3x^2 = -2(1) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$x^6 - 3x^2 = 0(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0(*) \\ x^4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt[4]{3} \end{cases}.$$

$$x^6 - 3x^2 = 2(3) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}.$$

Ta xét bảng biến thiên của hàm số:

$$y = h(x) = x^6 - 3x^2$$

$$y' = h'(x) = 6x^5 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow h(-1) = -2 \\ x = 1 \Rightarrow h(1) = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$			0					$+\infty$
		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$	
			-2		-2				

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $x^6 - 3x^2 = a$ (4) có một nghiệm biệt khác $\{0; -1; 1\}$ và khác nghiệm của phương trình (2); (3)

Phương trình $x^6 - 3x^2 = 6$ (5) có hai nghiệm phân biệt khác $\{0; -1; 1\}$ và khác nghiệm của phương trình (2); (3); (4). Ta có thể lấy nghiệm gần đúng như sau:

$$x^6 - 3x^2 = 6(5) \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m, m \approx 5,547, m \in (5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,355 \\ x \approx -2,355 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^6 - 3x^2 = a(4) \\ 4 < a < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x^6 - 3x^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} n < x^2 < \sqrt{m} \\ n \approx 2,195 \\ m \approx 2,355 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[4]{m} < x < -\sqrt{n} \\ \sqrt{n} < x < \sqrt[4]{m} \end{cases}$$

Vậy $y' = g'(x) = 0$ có:

- +) 2 nghiệm bằng $x = 1 \Rightarrow x = 1$ không là điểm cực trị.
- +) 2 nghiệm bằng $x = -1 \Rightarrow x = -1$ không là điểm cực trị.
- +) 3 nghiệm bằng $x = 0 \Rightarrow x = 0$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt[4]{3} \Rightarrow x = -\sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt[4]{3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{3}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt{m} \Rightarrow x = \sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt{m} \Rightarrow x = -\sqrt{m}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm bằng $x = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm x_1 và $x_1 \in (-\sqrt{m}; -\sqrt{n}) \Rightarrow x_1$ là 1 điểm cực trị.
- +) 1 nghiệm x_2 và $x_2 \in (\sqrt{n}; \sqrt{m}) \Rightarrow x_2$ là 1 điểm cực trị.

Vậy có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1. Tổng giá trị của các phần tử của S bằng

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

Hàm số có 3 cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases} (m > 0)$$

Tọa độ ba điểm cực trị: $A(0; m)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 + m)$, $C(\sqrt{m}; -m^2 + m)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $H(0; -m^2 + m)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \text{ (do } \Delta ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 2AH \cdot R \text{ trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ . Đối chiếu điều kiện ta được } S = \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Do đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

N.C.Đ



CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ HÀM SỐ
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3**CỰC TRỊ CÁC HÀM SỐ KHÁC**

- Câu 1.** Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2mx + 8$ cũng là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x - \frac{m^3}{3}$. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập hợp S .
- A. 8. B. 10. C. 18. D. 16.
- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 + 3x - 4)$. Gọi S là tập các số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng:
- A. 10. B. 5. C. 14. D. 4.
- Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị, tìm số tập con khác rỗng của S ?
- A. 127. B. 15. C. 63. D. 31.
- Câu 4.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị.
- A. $(1; +\infty)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. C. $(-\infty; 0]$. D. $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.
- Câu 5.** Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?
- A. 18. B. 17. C. 16. D. 15.
- Câu 6.** Cho hàm số $f(x) = 2001mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + 2019$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu?
- A. 0. B. vô số. C. 2. D. 1.
- Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?
- A. 3. B. 6. C. 5. D. 4.
- Câu 8.** Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y = |x^4 - 10x^2 + m|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S \cap \mathbb{Z}$ là

A. 24.

B. 23.

C. 26.

D. 25.

Câu 9. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -(x-1)^3 + 3m^2(x-1) - 2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

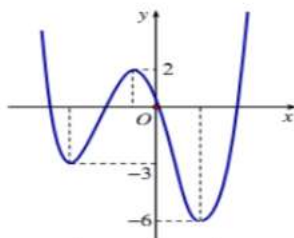
A. $m = \pm \frac{1}{3}$.

B. $m = \pm \frac{1}{2}$.

C. $m = -5$.

D. $m = 5$.

Câu 10. vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6.

B. 9.

C. 12.

D. 3.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y = \frac{x^2}{8} + \sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

N.C.Đ C. 2018.

D. 2019.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

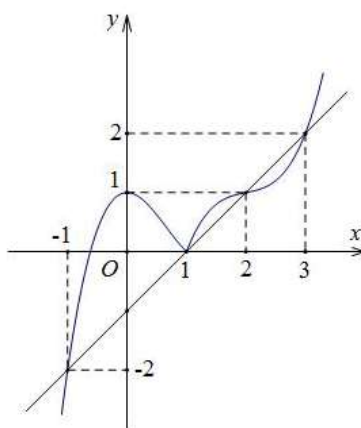
A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3) > 8$; $f(4) > \frac{9}{2}$; $f(2) < \frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



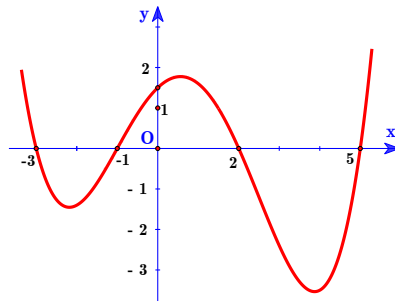
A. 2.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. vô số.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 19.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

- A. Vô số. B. 3. C. 2. D. 1.

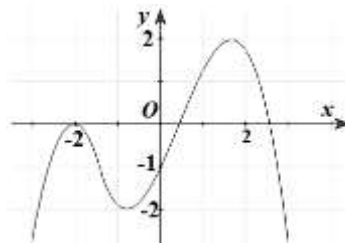
Câu 17. Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2 + 1} - m \right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

N.C.Đ

- A. 2. B. . C. 5. D. 4.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 7 điểm cực trị là $(a; b)$. Tính $T = 2b - a$.

- A. -2. B. 2. C. 0. D. 6.

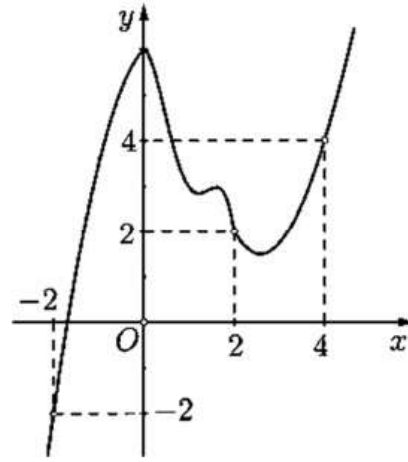


Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

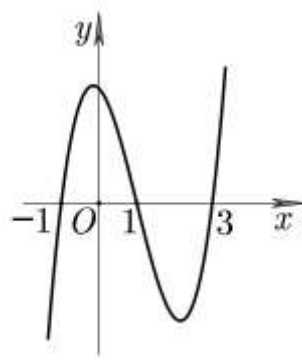
- A. 32. B. 31. C. 31. D. 34.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 7. C. 5. D. 6.



- Câu 21.** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị?
- A. 62. B. 63. C. 64. D. 65.
- Câu 22.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (8-m)x + 2$ với $m \in \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a; b)$. Tích $a.b$ bằng
- A. 12. B. 16. C. 10. D. 14.
- Câu 23.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 24.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?
- A. 7. B. 5. C. 8. D. 6.
- Câu 25.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là:
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.





Câu 26. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(mx^2 + 4mx - m + n - 2)$ với $m, n \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{7}{6}; 0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. Trên đoạn $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = -\frac{7}{2}$. B. $x = -\frac{3}{2}$. C. $x = -\frac{5}{2}$. D. $x = -\frac{5}{4}$.

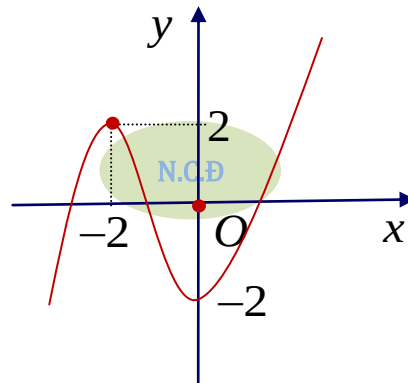
Câu 27. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 28. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ có 7 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 42. B. 50. C. 30. D. 63.

Câu 29. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(-x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$, trong đó $p \neq 0$, $p^2 + q^2 = 1$. Có bao nhiêu cặp $(p; q)$ sao cho khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên bằng $\sqrt{10}$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 31. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng:

- A. $m_0 \in (2; 3)$. B. $m_0 \in (3; 4)$. C. $m_0 \in (0; 1)$. D. $m_0 \in (1; 2)$.

Câu 32. Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 5}{x^2 + 1}$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB đi qua điểm $I(1; -3)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $0 < m_0 \leq 3$. B. $-5 < m_0 \leq -3$. C. $-3 < m_0 \leq 0$. D. $3 < m_0 \leq 5$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?



A. 3.

B. 4.

C. Vô số.

D. 5.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} - 2m - 1 x^4 - \frac{m}{3} x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $-2019; 2019$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5} x^5 + \frac{m+2}{4} x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 110.

B. 2016.

C. 100.

D. 10.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$. Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100) \sin^2 x - 1$, m là tham số nguyên và $m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 100.

B. 50.

C. 108.

D. 58.

N.C.Đ

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2mx + 8$ cũng là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x - \frac{m^3}{3}$. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của tập hợp S .

A. 8.

B. 10.

C. 18.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Vì $y = x^2 - 2mx + 8$ là một parabol nên có đỉnh là $I = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (m; -m^2 + 8)$ là một cực trị của đồ thị hàm số.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x - \frac{m^3}{3}$.

$$y' = x^2 - 2(m+1)x + m(m+2).$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì điểm I là cực trị của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + m(m+2)x - \frac{m^3}{3}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta'_y > 0 \\ y'(m) = 0 \\ y(m) = -m^2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - m(m+2) > 0 \\ m^2 - 2m(m+1) + m(m+2) = 0 \\ 2m^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow S = \{-2; 2\}.$$

Vậy tổng bình phương các phần tử của tập hợp S là: $(-2)^2 + 2^2 = 8$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 + 3x - 4)$. Gọi S là tập các số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng:

A. 10.

B. 5.

C. 14.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } y = g(x) = f(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = (2x-4)f'(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x^2 - 4x + m - 2)^2 = 0 \\ h_1(x) = x^2 - 4x + m - 1 = 0(1) \\ h_2(x) = x^2 - 4x + m + 4 = 0(2) \end{cases}$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình còn lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1(2) \neq 0 \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq m < 5 \\ m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 5$$

mà $m \in [-10; 10]$ do đó $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ có 5 phần tử.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị, tìm số tập con khác rỗng của S ?

A. 127.

B. 15.

C. 63.

D. 31.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi:

Trường hợp 1: Phương trình $x^2 + 2mx + 5 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$ (*).

Trường hợp 2: Phương trình $x^2 + 2mx + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là -1 . Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ (-1)^2 - 2m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 (**).$$

Từ (*), (**) suy ra $m \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \cup \{3\}$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ hay $S = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Suy ra số tập con khác rỗng của S bằng $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 63$.

Câu 4. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị.

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; \frac{1}{4})$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $(0; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$, có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$.

Hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \leq 0 < x_2$.

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$ thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \vee m < \frac{1}{4} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Thử lại: +) với $m < 0$ thì phương trình $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$ có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ (thỏa mãn).

$$+) \text{ với } m = 0 \text{ thì } f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m \in (-\infty; 0]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

Dấu của:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Vì $y' = (2x-10) \cdot f'(x^2 - 10x + m + 9)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 1 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 2(L) \\ x^2 - 10x + m + 9 = 3 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho có 5 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 1 \text{ (1) có 5 nghiệm phân biệt khác 5.} \\ x^2 - 10x + m + 9 = 3 \text{ (2)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Mỗi pt (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 5.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25 - (m+8) > 0 \\ 25 - (m+6) > 0 \\ m \neq 17 \\ m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$

Vậy các giá trị m nguyên dương thỏa mãn: $m \in \{1; 2; 3; \dots; 16\}$.



Câu 6. Cho hàm số $f(x) = 2001mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + 2019$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu?

A. 0.

B. vô số.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 8004mx^3 + 2(m^2 - 4)x = 2x(4002mx^2 + m^2 - 4)$$

+ TH1: $m = 0$ thì $f'(x) = -8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f''(0) = -8 < 0$. Hàm số chỉ có một cực đại tại $x = 0$ nên không thỏa mãn đề bài.

$$+ \text{ TH2: } m \neq 0 \text{ thì } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{4 - m^2}{4002m} \end{cases}$$

Để hàm số có 3 cực trị thì $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, khi đó

$$\frac{4 - m^2}{4002m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ 0 < m < 2 \end{cases}$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = 0; x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4 - m^2}{4002m}}$.

Nếu $0 < m < 2$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1		0		x_2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$		y_{CT}		y_{CD}		y_{CT}

Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại nên $0 < m < 2$ không thỏa mãn đề bài.

Nếu $m < -2$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1		0		x_2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$		y_{CD}		y_{CT}		y_{CD}

Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu nên $m < -2$ thỏa mãn đề bài.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta làm như sau

$$f'(x) = 8004mx^3 + 2(m^2 - 4)x = 2x(4002mx^2 + m^2 - 4)$$

+ Xét $m = 0$ thì $f'(x) = -8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f''(0) = -8 < 0$. Hàm số chỉ có một cực đại tại $x = 0$ nên không thỏa mãn đề bài.

+ Để hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu thì $\begin{cases} 2001m < 0 \\ 2001m(m^2 - 4) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m(m^2 - 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -2 \Leftrightarrow m < -2. \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$. Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$m-5$		m		$m-32$		$+\infty$

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục Ox tại 4

điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$. **N.C.Đ**

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m thỏa mãn đồ thị hàm số $y = |x^4 - 10x^2 + m|$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của tập hợp $S \cap \mathbb{Z}$ là

A. 24.

B. 23.

C. 26.

D. 25.

Lời giải

Chọn A

Gọi $f(x) = x^4 - 10x^2 + m$. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + m$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$m-25$		m		$m-25$		$+\infty$

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (không trùng với các điểm cực trị của hàm số). Do đó để hàm số $y = |x^4 - 10x^2 + m|$ có đúng 7 điểm cực trị thì $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 25$. Vậy $S \cap \mathbb{Z} = \{1; 2; \dots; 24\}$.

Câu 9. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -(x-1)^3 + 3m^2(x-1) - 2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

A. $m = \pm \frac{1}{3}$.

B. $m = \pm \frac{1}{2}$.

C. $m = -5$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3(x-1)^2 + 3m^2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3(x-1)^2 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = m \\ x-1 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+m \\ x = 1-m \end{cases}.$$

Để hàm số có 2 cực trị thì $m \neq 0$.

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là

$$x_A = 1+m; x_B = 1-m. \text{ Khi đó } A(1+m; 2m^3-2); B(1-m; -2m^3-2).$$

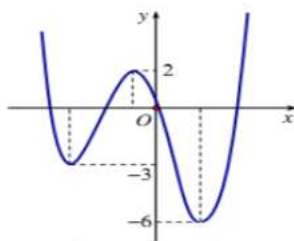
Hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ nên $OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 + (2m^3-2)^2 = (1-m)^2 + (-2m^3-2)^2 \Leftrightarrow 4m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (ktm) \\ m = \pm \frac{1}{2} (tm) \end{cases}.$$

Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$.

N.C.Đ

Câu 10. vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6.

B. 9.

C. 12.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x+1) + m$. Ta có $g'(x) = f'(x+1)$.

Vì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị do đó hàm số $g(x) = f(x+1) + m$ có 3 điểm cực trị.

Để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(x+1) = -m$ phải có 4 nghiệm đơn phân biệt hay $-3 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1, 2\}$, chọn **D.**

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y = \frac{x^2}{8} + \sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [-m-2; +\infty)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x+m+2}} \Leftrightarrow y' = \frac{x\sqrt{x+m+2} + 2}{4\sqrt{x+m+2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+m+2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+m+2} = -2 \quad (1)$$

Hàm số $y = \frac{x^2}{8} + \sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm

hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

Vì m nguyên dương nên $-m-2 < 0$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < x < 0 \\ x^2(x+m+2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < x < 0 \\ x^3 + (m+2)x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 < x < 0 \\ -m-2 = x - \frac{4}{x^2} = g(x) \end{cases}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-m-2$	-2	0
$g'(x)$		$+$	0
		$-$	
$g(x)$	$g(-m-2)$	-3	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ suy ra

$$(1) \text{ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép } \Leftrightarrow -m-2 \geq -3 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương nên suy ra $m = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách.

- Bỏ phần bên trái trục Oy.

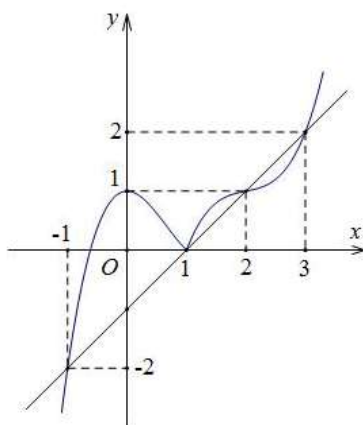
- Giữ và lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên phải trục Oy qua trục Oy.

Ta thấy $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$.

Do đó hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị khi phần đồ thị bên phải trục Oy có một điểm cực trị $\Rightarrow f'(x)$ đổi dấu 1 lần với $x > 0 \Rightarrow m > 0$.

Mà $m \in [-5; 5]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có $f(-3) > 8$; $f(4) > \frac{9}{2}$; $f(2) < \frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |2f(x) - (x-1)^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành.

Đặt $g(x) = |2f(x) - (x-1)^2|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $h(x) = 2f(x) - (x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x) = 2f'(x) - 2(x-1) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1$ (*)

Dựa vào đồ thị, nghiệm của phương trình (*) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$

và đường thẳng $y = x-1$, ta có: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	3	$+\infty$		
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$								

$\swarrow$ $h(-1)$ $\nearrow$ $h(2)$ $\searrow$ $h(3)$ $\nearrow$

Ta có:

$$h(2) = 2f(2) - (2-1)^2 < 0 \text{ vì } f(2) < \frac{1}{2}$$



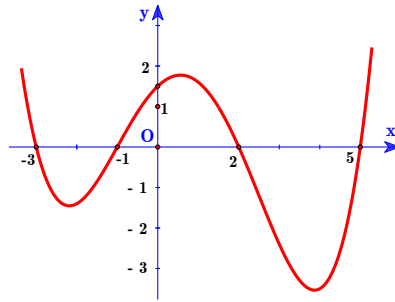
$$h(-3) = 2f(-3) - (-3-1)^2 > 0 \text{ vì } f(-3) > 8$$

$$h(4) = 2f(4) - (4-1)^2 > 0 \text{ vì } f(4) > \frac{9}{2}$$

Suy ra $h(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt $x_1 \in (-3; -1)$ và $x_2 \in (3; 4)$.

Suy ra $g(x) = |h(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$										

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Đồ thị của hàm số $y = g(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Để $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x+m)$ phải có đúng 3 điểm cực trị

phía bên phải trục tung $\Rightarrow -3 \leq m < -1$, do m nguyên nên $\begin{cases} m = -3 \\ m = -2 \end{cases}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm kép.}$$

$$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$$

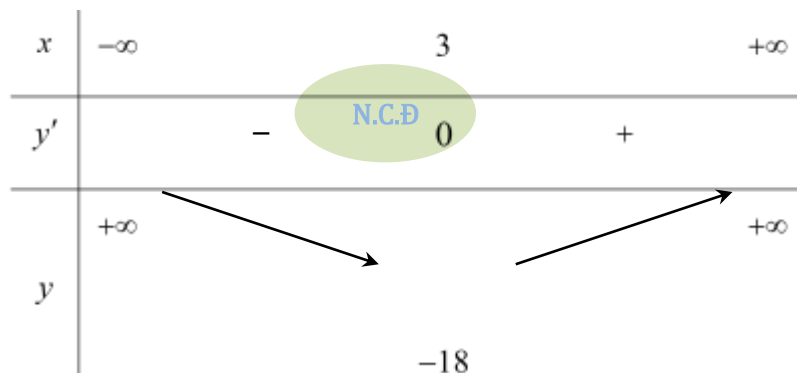
$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0 (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \quad (I) \\ 2x^2 - 12x = -m \quad (1) \\ 2x^2 - 12x = 4 - m \quad (2) \end{cases}$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $(*)$ nên ta loại phương trình $2x^2 - 12x + m = -1$)

Xét hàm số $y = 2x^2 - 12x$ có đồ thị (C): $y' = 4x - 12$

Ta có bảng biến thiên



Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1); (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.

Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

A. Vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$.



$$\begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ P = m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0. \text{ Vậy có vô số } m \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

Câu 17. Hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B..

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$

Số cực trị của hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ bằng tổng số cực trị của hàm $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $g(x) = 0$.

Ta có $g'(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$ $+\infty$	-1			1		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-m$	$-\frac{1}{2}-m$			$\frac{1}{2}-m$	$-m$	

Hàm số $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - m$ có 2 cực trị và phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm đơn

(hoặc bội lẻ). Do đó hàm số $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+1} - m \right|$ có nhiều nhất 4 điểm cực trị.

Bài toán tổng quát: Tìm số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$

+ Cơ sở lý thuyết: Số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số cực trị của hàm $y = f(x)$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

+ Khi giải bài toán học sinh đưa về hai bài toán cơ bản: tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Do đó học sinh có thể lập bảng biến thiên để xét đồng thời 2 bài toán đơn đó.

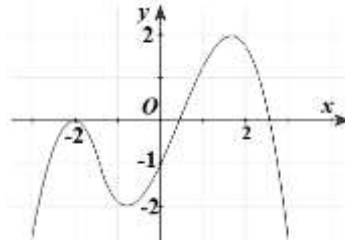
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 7 điểm cực trị là $(a; b)$. Tính $T = 2b - a$.

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. 6.



Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $g(x)$ bằng tổng số cực trị của hàm $y = f(x) - m$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Hàm số $y = f(x) - m$ có 3 điểm cực trị. Do đó hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 0 \Rightarrow T = 2$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 32.

B. 31.

C. 31.

D. 34.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = x^3 - 6x^2 + m$

Số cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số cực trị của hàm $y = f(x)$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow m$	$\searrow m - 32$	$\nearrow +\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 32 < 0 < m \Leftrightarrow 0 < m < 32$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 31 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

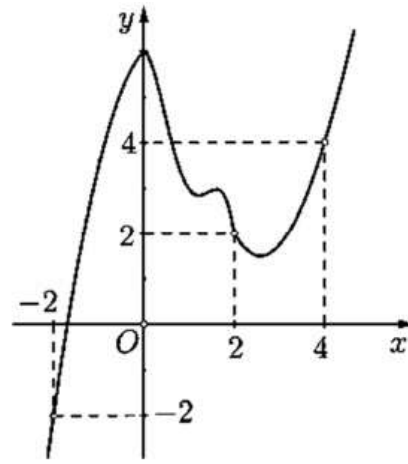
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 6.



Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$

Số cực trị của hàm số $g(x) = |h(x)|$ bằng tổng số cực trị của hàm $y = h(x)$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$

Nghiệm của phương trình $h'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và $y = x$.

Do đó phương trình có nghiệm -2; 2; 4.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = h(x)$ có 3 điểm cực trị và phương trình $h(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ hàm số $g(x) = |h(x)|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 21. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 62.

B. 63.

C. 64.

D. 65.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có: $g(-1) = \frac{m}{2}$; $g(3) = \frac{m}{2} - 32$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}-32$	$+\infty$	

Hàm số $g(x)$ có giá trị cực tiểu là $g(3) = \frac{m}{2} - 32$ và giá trị cực đại là $g(-1) = \frac{m}{2}$.

Hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow g(-1) \cdot g(3) < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 32 \right) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 64$.

Vì m là số nguyên nên có 63 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (8-m)x + 2$ với $m \in \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a; b)$. Tích $a.b$ bằng

A. 12.

B. 16.

C. 10.

D. 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2(2m-1)x + 8 - m$.

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn (do $f(|-x|) = f(|x|)$), nên đồ thị hàm $f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy.

Do đó, khi hàm $f(x)$ có hai cực trị dương thì hàm $f(|x|)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f(|x|)$ và trục Oy.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - (8-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 8-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 7 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{7}{4} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{7}{4}; 8 \right).$$

Vậy $a = \frac{7}{4}$, $b = 8$ và $ab = 14$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+) $x = 1$ là nghiệm bội ba của phương trình $(x-1)^3 = 0$.

+) Hàm $g(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Do đó hàm $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có nghiệm kép dương khác 1 (*) hoặc phương trình $x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khác 1 (**).

$$\text{Giải (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4m-5)^2 - 4(m^2 - 7m + 6) = 0 \\ 0 < \frac{-(4m-5)}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Giải (**)} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ 1 + (4m-5) + m^2 - 7m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (1; 6) \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m+18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

A. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m+18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m+18 = 0 \text{ (*)} \end{cases}$$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 3$$

$$\Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Trường hợp 2. Phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$.

Trường hợp 3. Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}.$$

$$\text{Theo định lí Viète ta có } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

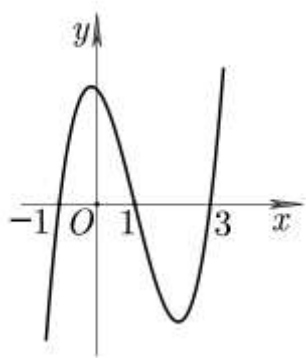
Câu 25. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.



Lời giải:

Chọn A

Đặt $y = g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2}).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-1 - 2\sqrt{2}$	-1	$-1 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị, trong đó có 1 điểm cực đại.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(mx^2 + 4mx - m + n - 2)$ với $m, n \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{7}{6}; 0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. Trên đoạn $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = -\frac{7}{2}$.

B. $x = -\frac{3}{2}$.

C. $x = -\frac{5}{2}$.

D. $x = -\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = (x-1)(4mx^2 + 10mx - 6m + 2n - 4)$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4mx^2 + 10mx - 6m + 2n - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4mx^2 + 10mx - 6m + 2n - 4 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Trên khoảng $\left(-\frac{7}{6}; 0\right)$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x_1 = -1$.

$$\Rightarrow m \neq 0 \text{ và } x_2 = -\frac{3}{2} \text{ (vì theo Vi-ét } x_1 + x_2 = -\frac{5}{2} \text{ và } x_1 = -1).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	CT	CĐ	CT	$+\infty$

Vậy trên đoạn $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -\frac{3}{2}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+) $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + (m+3)$.

+) Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Khi đó hàm số trở thành $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$. Hàm số có một điểm cực đại là $x = \frac{2}{5}$ khi

đó hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị: $x = -\frac{2}{5}; x = 0; x = \frac{2}{5}$ nên nhận $m = 1$.

+) Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$ có 2 cực trị thỏa $0 = x_1 < x_2$.

Khi đó $x = 0$ là nghiệm của phương trình: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = -3$ khi $m = -3$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị: $x = 0; x = -\frac{5}{6}$.

Khi đó hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị: $x = 0$. Loại $m = -3$.

+) Trường hợp 3: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ Hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$ có 2 cực trị thỏa $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $(m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

N.C.Đ

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 28. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ có 7 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S .

A. 42.

B. 50.

C. 30.

D. 63.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số

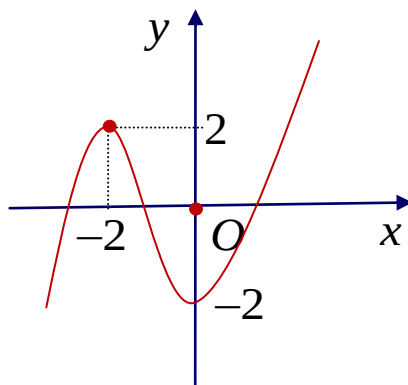
x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$-19-m$		$13-m$		$8-m$		$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13 - m > 0 \\ 8 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8 < m < 13.$$

Mà m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; 12\} = S$. Suy ra tổng tất cả các phần tử của tập S là 42.

Câu 29. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(-x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (-2x - 1)f'(-x^2 - x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 1 = 0 \\ f'(-x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ f'(-x^2 - x) = 0 \end{cases} \quad (1)$

Mà $y = f(x)$ có các điểm cực trị là $x = -2$ và $x = 0$ suy ra $f'(-2) = 0, f'(0) = 0 \quad (2)$.

Từ (1), (2) có: $\begin{cases} -x^2 - x = -2 \\ -x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - x + 2 = 0 \\ -x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$

Nên $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$

$g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $g(x) = f(-x^2 - x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$, trong đó $p \neq 0, p^2 + q^2 = 1$. Có bao nhiêu cặp $(p; q)$ sao cho khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên bằng $\sqrt{10}$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$D = \mathbb{R}.$$

$$y' = \frac{(2x+p) \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2+px+q)}{(x^2+1)^2} = \frac{-px^2 + 2(1-q)x + p}{(x^2+1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -px^2 + 2(1-q)x + p = 0 \quad (1).$$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Do $p \neq 0$ nên $ac = -p^2 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có phương trình đường đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = 1 + \frac{p}{2x}$.

Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 .

Khi đó hai điểm cực trị là $A\left(x_1; 1 + \frac{p}{2x_1}\right), B\left(x_2; 1 + \frac{p}{2x_2}\right)$.

$$\text{Theo bài ra: } AB = \sqrt{10} \Leftrightarrow AB^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{p}{2x_1} - \frac{p}{2x_2}\right)^2 = 10.$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + \frac{p^2}{4} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right)^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \left(1 + \frac{p^2}{4x_1^2 x_2^2}\right) = 10.$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \left(1 + \frac{p^2}{4x_1^2 x_2^2}\right) = 10 \quad (2).$$

$$\text{Theo định lý Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(1-q)}{p} \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}.$$

Thay vào phương trình (2) ta có

$$\left[4\left(\frac{1-q}{p}\right)^2 + 4\right] \left[1 + \frac{p^2}{4}\right] = 10 \Leftrightarrow 4\left[\frac{(1-q)^2}{p^2} + 1\right] \left(1 + \frac{p^2}{4}\right) = 10.$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{(1-q)^2}{1-q^2} + 1\right) \left(1 + \frac{p^2}{4}\right) = 10 \quad (\text{do } p^2 = 1 - q^2).$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1-q}{1+q} + 1\right) \left(1 + \frac{1-q^2}{4}\right) = 10 \Leftrightarrow 4\left(\frac{2}{1+q}\right) \left(\frac{5-q^2}{4}\right) = 10.$$

$$\Leftrightarrow 5 - q^2 = 5(1+q) \Leftrightarrow q^2 + 5q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -5 \\ q = 0 \end{cases}.$$

Với $q = -5 \Rightarrow p^2 = -24$ (vô nghiệm).

Với $q = 0 \Rightarrow p^2 = 1 \Leftrightarrow p = \pm 1$.

Vậy có 2 cặp số $(p; q)$ thỏa mãn là $(-1; 0); (1; 0)$. Chọn A

Câu 31. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng:

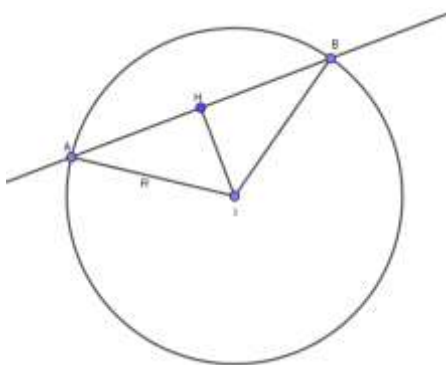
- A. $m_0 \in (2;3)$. B. $m_0 \in (3;4)$. C. $m_0 \in (0;1)$. D. $m_0 \in (1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6m$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$. Đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Do đó $m > 0$.

Ta có $y = \frac{x}{3} \cdot (3x^2 - 6m) - 4mx + 4 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm cực đại



và cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là: $y = -4mx + 4 \Leftrightarrow 4mx + y - 4 = 0$.

Đường thẳng (Δ) cắt đường tròn đã cho tại hai điểm phân biệt A, B sao cho I, A, B

là ba đỉnh của một tam giác $\Leftrightarrow 0 < d(I;(\Delta)) < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{|4m-4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2} \quad (*)$.

Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = IH \cdot AH = IH \cdot \sqrt{R^2 - IH^2} = IH \cdot \sqrt{2 - IH^2}$

$$= \sqrt{IH^2 \cdot (2 - IH^2)} \leq \frac{IH^2 + (2 - IH^2)}{2} = 1 \Rightarrow S_{IAB} \leq 1.$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất bằng 1 $\Leftrightarrow IH^2 = 2 - IH^2 \Leftrightarrow IH = 1$

$$\Leftrightarrow |4m-4| = \sqrt{16m^2+1} \Leftrightarrow (4m-4)^2 = 16m^2+1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*)).}$$

Vậy $m_0 = \frac{15}{32}$ nên $m_0 \in (0;1)$.

Câu 32. Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 5}{x^2 + 1}$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB đi qua điểm $I(1;-3)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $0 < m_0 \leq 3$. B. $-5 < m_0 \leq -3$. C. $-3 < m_0 \leq 0$. D. $3 < m_0 \leq 5$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}; y' = \frac{-mx^2 + 12x + m}{(x^2 + 1)^2}.$$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow mx^2 - 12x - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 36 + m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (1).$$

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow mx_0^2 - 12x_0 - m = 0$.

$$\text{Với } y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\text{Ta có } f'(x_0) = 0 \Rightarrow u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} \quad (v(x_0) \neq 0, v'(x_0) \neq 0).$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{2x_0 + m}{2x_0} = \frac{2x_0 + m + (mx_0^2 - 12x_0 - m)}{2x_0} = \frac{m}{2}x_0 - 5.$$

Do đó đường thẳng qua hai điểm cực trị A, B có phương trình $y = \frac{m}{2}x - 5$.

$$I(1; -3) \in (AB) \Leftrightarrow -3 = \frac{m}{2} \cdot 1 - 5 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa ĐK (1))}.$$

Vậy $m_0 = 4$. **Chọn D**

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3.

B. 4.

C. Vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 9x^8 + 7(m-2)x^6 - 6(m^2-4)x^5 \Rightarrow y'(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$y'' = 9 \cdot 8x^7 + 7 \cdot 6(m-2)x^5 - 6 \cdot 5(m^2-4)x^4 \Rightarrow y''(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta nhận thấy } y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có } y^{(6)} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(m-2)x - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(m^2-4)$$

$$\Rightarrow y^{(6)}(0) = -6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(m^2-4).$$

$$*TH1: y^{(6)}(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \text{ thì:}$$

$+ m = 2 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không đạt cực trị tại $x = 0$.

$+ m = -2 \Rightarrow y' = x^6(9x^2 - 28)$ không đổi dấu khi qua $x = 0$ nên không đạt cực trị tại $x = 0$.

$$*TH2: y^{(6)}(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$$

Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì cần thêm

$$y^{(6)}(0) > 0 \Leftrightarrow -6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m .



Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} - 2m-1 x^4 - \frac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^4 - 4(2m-1)x^3 - mx^2 = x^2[x^2 - 4(2m-1)x - m]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y' . Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x) = x^2 - 4(2m-1)x - m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x) = x^2 + 4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số

$y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 110.

B. 2016.

~~N.C. & C.~~ 100.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$.

+ **TH1:** $m=1$. Khi đó $y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ (loại).

+ **TH2:** $m \neq 1$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{cases}$.

Nhận thấy nếu $x_2 = x_1 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y' = -3x^4 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị (loại)

Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m-1 > 0 \\ x_1 < x_2 \\ m-1 < 0 \\ x_1 > x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2 < m < 1 \\ m < 1 \\ m < -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Suy ra số giá trị m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ là 2016.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$. Đặt $g(x) = [x + f'(x)]^{2019} + [x + f'(x)]^{29-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin^2 x - 1$, m

là tham số nguyên và $m < 27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 100.

B. 50.

C. 108.

D. 58.

Lời giải.

Chọn A

Từ giả thiết ta có

$$|f(x+2h) - f(x)| \leq h^2, \forall h > 0 \Rightarrow \frac{|f(x+2h) - f(x)|}{(x+2h) - x} \leq \frac{h}{2}, \forall h > 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+2h) - f(x)|}{(x+2h) - x} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = C, \text{ với } C \text{ là hằng}$$

số. Ta có

$$g'(x) = 2019[x + f'(x)]^{2018}(1 + f''(x)) + (29 - m)[x + f'(x)]^{28-m}(1 + f''(x)) - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin 2x$$

$$= 2019x^{2018} + (29 - m)x^{28-m} - (m^4 - 29m^2 + 100)\sin 2x.$$

$$g''(x) = 2019 \cdot 2018x^{2017} + (29 - m)(28 - m)x^{27-m} - 2(m^4 - 29m^2 + 100)\cos 2x.$$

$$\text{Khi đó } g'(0) = 0; g''(0) = -2(m^4 - 29m^2 + 100).$$

$$g''(0) > 0 \Leftrightarrow m^4 - 29m^2 + 100 < 0 \Leftrightarrow 4 < m^2 < 25 \Leftrightarrow m \in (-5; -2) \cup (2; 5).$$

$$\text{Trường hợp } m = 2, \text{ ta có } g'(x) = 2019x^{2018} + 27x^{26} = x^{26}(2019x^{1992} + 27).$$

Vì $x = 0$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'(x) = 0$ nên trường hợp này loại.

$$\text{Trường hợp } m = 5, \text{ ta có } g'(x) = 2019x^{2018} + 24x^{23} = x^{23}(2019x^{1995} + 24).$$

$$\text{Trường hợp } m = -2, \text{ ta có } g'(x) = 2019x^{2018} + 31x^{30} = x^{30}(2019x^{1988} + 31).$$

Vì $x = 0$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'(x) = 0$ nên trường hợp này loại.

$$\text{Trường hợp } m = 5, \text{ ta có } g'(x) = 2019x^{2018} + 24x^{23} = x^{23}(2019x^{1995} + 24).$$

Dễ thấy $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

$$\text{Trường hợp } m = -5, \text{ ta có } g'(x) = 2019x^{2018} + 34x^{33} = x^{33}(2019x^{1985} + 34).$$

Dễ thấy $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Vậy $m \in S = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$ nên tổng các bình phương của các phần tử của S là 100.



N.C.Đ