

TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ XX – LÀO CAI 2026



ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG
LẦN THỨ XX, NĂM 2026

ĐỀ THI MÔN: TOÁN - LỚP 10

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 05 tháng 8 năm 2026

Đề thi gồm 4 câu trong 01 trang

Lưu ý: Thí sinh trả lời mỗi câu hỏi trên một tờ giấy thi độc lập

Câu 1. (5,0 điểm) a) Cho biết rằng đa thức $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ có ba nghiệm thực $a > b > c$ với $c^2 > a^2 > b^2$. Chứng minh rằng $P(x)$ có một nghiệm bằng $a^2 - 2$ và $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a = 2$.

b) Cho các số thực phân biệt a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Chứng minh rằng $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) = -1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = ab + bc + ca$.

Câu 2. (5,0 điểm) Với các số nguyên dương a, b và $a > 1$, đặt $f(n) = a^n - n^b$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p > a$, luôn tồn tại vô số $n \in \mathbb{N}^*$ để $p \mid f(n)$.

b) Tìm tất cả các cặp (a, b) sao cho $f(n) \neq 0$, $f(n) \mid 2026^n - n^{2027}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $n > 2026^{2027}$.

Câu 3. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân và có các đường phân giác trong BE, CF cắt nhau tại I ($E \in AC, F \in AB$). Đoạn thẳng AI, EF cắt nhau tại D . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của DB, DC . Đường thẳng MN theo thứ tự cắt các đoạn thẳng BA, BE, CF, CA tại P, R, S, Q .

a) Chứng minh: M là trung điểm của PR và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DRS .

b) Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp của các tam giác APQ, IRS, DRQ, DSP cùng đi qua một điểm T , đồng thời nếu $T \in BC$ thì $AB + AC = 2 \cdot BC$.

Câu 4. (5,0 điểm) Bảng 21×24 (21 hàng, 24 cột) được chia thành 21×24 ô vuông đơn vị. Người ta muốn tô một số ô vuông đơn vị của bảng bởi một trong các màu: xanh, đỏ, vàng (có thể có vài ô vuông đơn vị không được tô màu) sao cho hai điều kiện (i) và (ii) dưới đây đồng thời xảy ra:

(i) Trong các ô vuông đơn vị cùng hàng với mỗi ô vuông đơn vị được tô màu, có không quá 1 ô khác màu với ô đó;

(ii) Trong các ô vuông đơn vị cùng cột với mỗi ô vuông đơn vị được tô màu, có không quá 1 ô khác màu với ô đó.

a) Gọi x_1, x_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô xanh; d_1, d_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô đỏ; v_1, v_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô vàng. Chứng minh rằng

$$x_1 + x_2 + d_1 + d_2 + v_1 + v_2 \leq 45.$$

b) Gọi x, d, v theo thứ tự là số ô vuông đơn vị được tô bởi các màu xanh, đỏ, vàng và đặt $m = \min\{x, d, v\}$. Tìm giá trị lớn nhất của m .

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

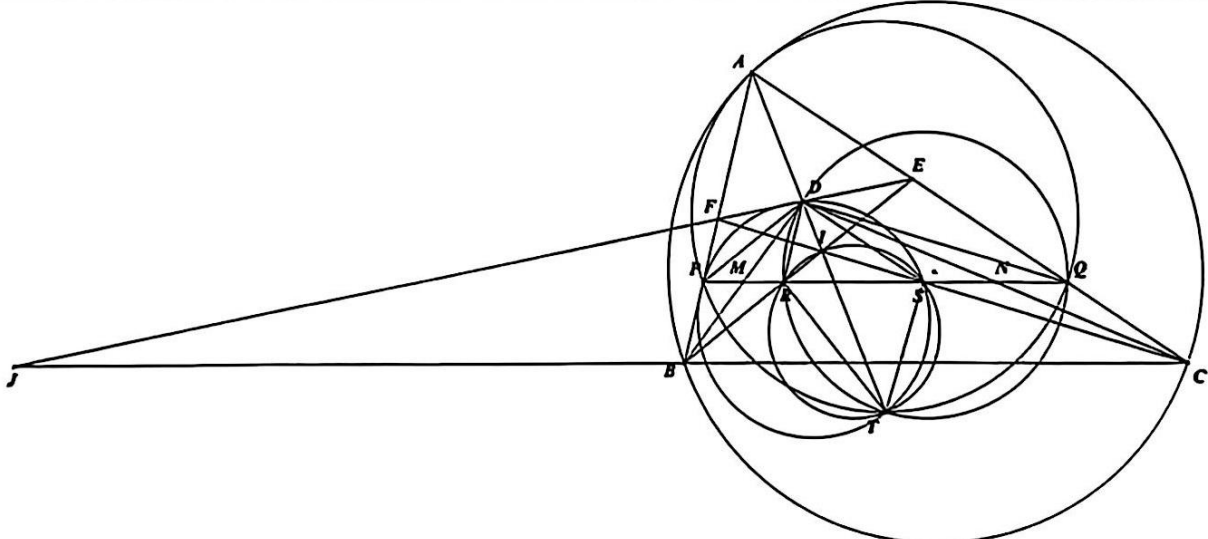
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

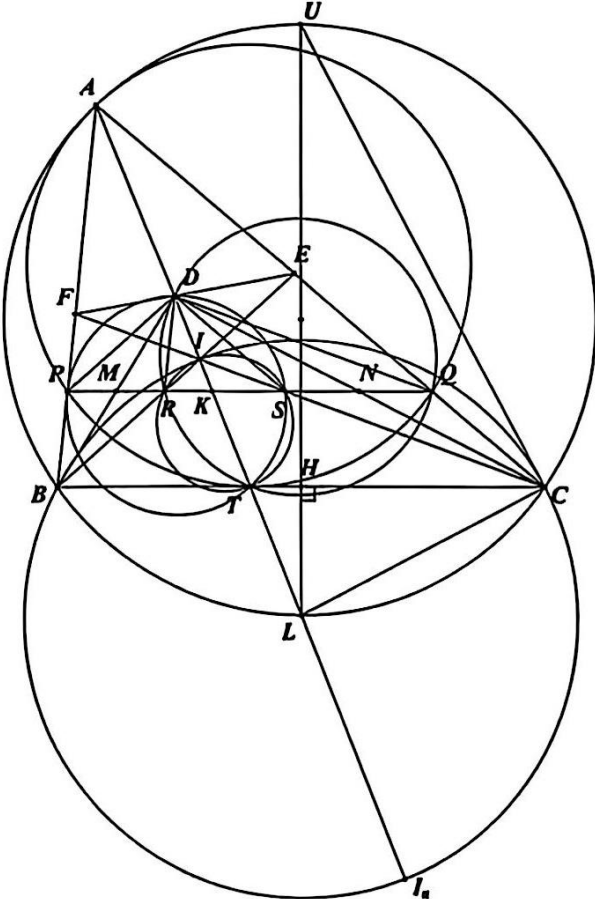


ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

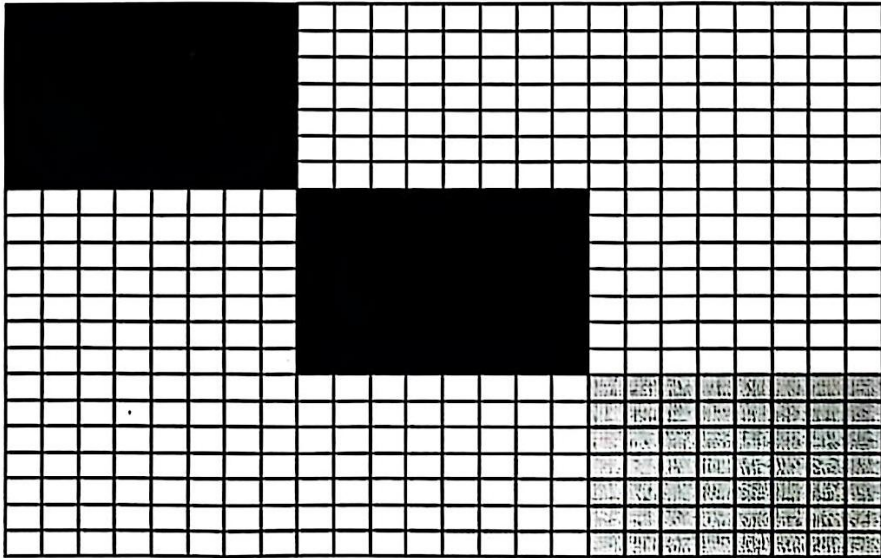
Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5 điểm)	a) Cho biết rằng đa thức $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ có ba nghiệm thực $a > b > c$ với $c^2 > a^2 > b^2$. Chứng minh rằng $P(x)$ có một nghiệm bằng $a^2 - 2$ và $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a = 2$.	
	b) Cho các số thực phân biệt a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Chứng minh rằng $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) = -1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = ab + bc + ca$.	
	a) Cho biết rằng đa thức $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ có ba nghiệm thực $a > b > c$ với $c^2 > a^2 > b^2$. Chứng minh rằng $P(x)$ có một nghiệm bằng $a^2 - 2$ và $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a = 2$.	2,0
	Giả sử a là nghiệm của $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, ta sẽ chứng minh rằng $a^2 - 2$ là nghiệm của đa thức này. Cụ thể là chứng minh đẳng thức $(a^2 - 2)^3 + (a^2 - 2)^2 - 2(a^2 - 2) - 1 = 0$ $\Leftrightarrow a^6 - 5a^4 + 6a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a^3 - 2a)^2 = (a^2 - 1)^2$ $\Leftrightarrow (a^3 - a^2 - 2a + 1)(a^3 + a^2 - 2a - 1) = 0,$ đẳng thức cuối đúng vì $P(a) = 0$ nên nhận xét được chứng minh.	1,0
	Vì a, b, c là nghiệm $P(x)$ nên $a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2$ cũng là các nghiệm $P(x)$. Theo giả thiết thì $c^2 - 2 > a^2 - 2 > b^2 - 2$ nên ta phải có $c^2 - 2 = a, a^2 - 2 = b, b^2 - 2 = c$ hay $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a = 2$.	1,0
	<i>Ghi chú:</i> Ta cũng có thể dùng định lý Viète thuận và đảo để chứng minh kết quả này.	
	b) Cho các số thực phân biệt a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Chứng minh rằng $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) = -1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = ab + bc + ca$.	3,0
	Ta có $a^2 - b^2 = b - c$ nên $a^2 - b^2 + a - b = a - c \Leftrightarrow (a-b)(a+b+1) = a - c$. Chứng minh tương tự $(b-c)(b+c+1) = b - a, (c-a)(c+a+1) = c - b$. Vì các số a, b, c đôi một phân biệt nên $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, vì thế nhân từng vế các đẳng thức trên lại, ta có $(a+b+1)(b+c+1)(c+a+1) = -1$. (*)	1,0

	Ta cũng có $(a-b)(a+b)=b-c$. Xây dựng hai đẳng thức tương tự khác và nhân lại, ta cũng có $(a+b)(b+c)(c+a)=1$.	0,5
	Từ (*), ta có $(a+b)(b+c)(c+a) + \sum_{\text{cyc}} (a+b)(b+c) + \sum_{\text{cyc}} (a+b) + 1 = -1$ nên $\sum_{\text{cyc}} (a+b)(b+c) + \sum_{\text{cyc}} (a+b) = -3$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+bc+ca) + 2(a+b+c) = -3$ $\Leftrightarrow (a+b+c+1)^2 + (ab+bc+ca+2) = 0.$ Từ đẳng thức cuối, chú ý $(a+b+c+1)^2 \geq 0$ nên ta có ngay $ab+bc+ca \leq -2$.	1,0
	Để có dấu bằng xảy ra thì $a+b+c=-1$, $ab+bc+ca=-2$. Chú ý rằng $1 = (a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 2 - abc \text{ nên } abc = 1.$ Từ đó theo Viète đảo, ta có a, b, c là nghiệm thực của đa thức (đã nêu ở câu a): $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$	0,5
Câu 2 (5 điểm)	Với các số nguyên dương a, b và $a > 1$, đặt $f(n) = a^n - n^b$ với $n \in \mathbb{N}^*$.	
	a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p > a$, luôn tồn tại vô số $n \in \mathbb{N}^*$ để $p \mid f(n)$.	
	b) Tìm tất cả các cặp (a, b) sao cho $f(n) \mid 2026^n - n^{2027}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $n > 2026^{2027}$.	
	a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p > a$, luôn tồn tại vô số $n \in \mathbb{N}^*$ để $p \mid f(n)$.	3,0
	Vì $p > a$ nên $\gcd(p, a) = 1$. Theo định lý Fermat nhỏ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.	0,5
	Ta chọn $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\begin{cases} n \equiv b \pmod{p-1} \\ n \equiv a \pmod{p} \end{cases}$ (*).	0,5
	Theo định lý thặng dư Trung Hoa, hệ phương trình đồng dư này luôn có nghiệm vì $\gcd(p, p-1) = 1$. Khi đó, ta có ngay $f(n) \equiv a^b - a^b \equiv 0 \pmod{p}$.	1,5
	Rõ ràng có vô số $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn hệ (*) nên cũng có vô số $n \in \mathbb{N}^*$ để $p \mid f(n)$.	0,5
	Chú ý: Học sinh có thể chọn theo hướng khác (hướng ở trên để làm phần b) chẳng hạn: Chọn $n = (p-1)(pt-1)$ trong đó t là số nguyên dương.	
	b) Tìm tất cả các cặp (a, b) sao cho $f(n) \mid 2026^n - n^{2027}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $n > 2026^{2027}$.	2,0
	Với mọi số nguyên tố $p > \max\{a, 1013\}$, ta chọn $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\begin{cases} n \equiv b \pmod{p-1} \\ n \equiv a \pmod{p} \end{cases}$ như câu a) và n đủ lớn để $n > 2026^{2027}$. Khi đó, ta có $f(n) \neq 0$, $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$ nên $p \mid 2026^n - n^{2027}$.	0,5

	Cũng theo cách chọn số n , ta có $2026^n - n^{2027} \equiv 2026^b - a^{2027} \pmod{p}$. Do đó, $p \mid 2026^b - a^{2027}$. Vì điều này đúng với mọi số nguyên tố lẻ $p > a$ nên ta chọn $p > 2026^b - a^{2027} $ thì có ngay $2026^b - a^{2027} = 0$ hay $2^b \cdot 1013^b = a^{2027}$.	0,5
	Khi đó, a chỉ có ước nguyên tố là 2 và 1013 nên đặt $a = 2^x \cdot 1013^y$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$. Tính số mũ của 2, 1013 ở hai vế được $b = 2027x$ và $b = 2027y$ hay $b = 2027x = 2027y$. Do đó, phải có $x = y$ hay $b = 2027x$, $a = 2026^x$.	0,5
	Từ giả thiết ta được $a^n - n^b = 2026^{nx} - n^{2027x} \mid 2026^n - n^{2027}$. Điều này chỉ xảy ra khi $x = 1$ hay ta được $a = 2026$, $b = 2027$. Thử lại ta thấy $f(n) \neq 0$ với mọi số nguyên dương và $f(n) = 2026^n - n^{2027} \mid 2026^n - n^{2027}$ với mọi số nguyên dương $n > 2026^{2027}$. Vậy $(a, b) = (2026, 2027)$.	0,5
Câu 3 (5 điểm)	Cho tam giác ABC nhọn, không cân và có các đường phân giác trong BE, CF cắt nhau tại I ($E \in AC, F \in AB$). Đoạn thẳng AI, EF cắt nhau tại D. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của DB, DC. Đường thẳng MN theo thứ tự cắt các đoạn thẳng BA, BE, CF, CA tại P, R, S, Q. a) Chứng minh: M là trung điểm của PR và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DRS. b) Chứng minh: đường tròn ngoại tiếp của các tam giác APQ, IRS, DRQ, DSP cùng đi qua một điểm T, đồng thời nếu $T \in BC$ thì $AB + AC = 2 \cdot BC$.	
		
	a) Chứng minh: M là trung điểm của PR và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DRS .	3,0
	Cho EF cắt BC ở J thì do AD, BE, CF đồng quy nên dùng tính chất hàng điểm điều hoà cơ bản, ta có $(DJ, EF) = -1$.	0,5
	Vì MN là đường trung bình của tam giác DBC nên $MN \parallel BC$ hay $PQ \parallel BC$. Xét chùm $B(DJ, EF) = -1$, chiếu lên PR , ta có ngay M là trung điểm của PR (vì $BJ \parallel PR$).	0,5

Mà M cũng là trung điểm BD nên $BPDR$ là hình bình hành. Chứng minh tương tự có $CQDS$ cũng là hình bình hành.	1,0
Khi đó, $DR \parallel AB, DS \parallel AC$ và $RS \parallel BC$ nên $\widehat{DRI} = \widehat{ABR} = \widehat{RBC} = \widehat{IRS}$ hay IR là phân giác $\widehat{DRS}$. Tương tự IS là phân giác $\widehat{DSR}$ nên I là tâm nội tiếp DRS .	1,0
b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác APQ, IRS, DRQ, DSP cùng đi qua một điểm T , đồng thời nếu $T \in BC$ thì $AB + AC = 2 \cdot BC$.	2,0
Định nghĩa lại T là giao điểm khác D của đường tròn (DSP) và AD . Ta có $\widehat{RST} = \widehat{PST} = \widehat{PDT} = \widehat{RIT},$ vì thế nên $T \in (IRS)$.	0,5
Suy ra $\widehat{TRQ} = \widehat{TRS} = \widehat{TIS} = \widehat{TDQ}$ nên $T \in (DRQ)$.	0,25
Do đó, $\widehat{PQT} = \widehat{RQT} = \widehat{RDT} = \widehat{PAT}$ nên ta cũng có $T \in (APQ)$. Vì thế nên 4 đường tròn ngoại tiếp các tam giác APQ, IRS, DRQ, DSP cùng đi qua T .	0,25
	
Tiếp theo, gọi T' là tâm đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác DRS thì rõ ràng $IRT'S$ nội tiếp đường tròn đường kính IT' và có $T' \in DI$. Từ đây suy ra $T \equiv T'$. Giả sử rằng $T \in BC$ thì đặt $K = DT \cap RS$, ta có K là trung điểm của DT do tính chất đường trung bình. Vì DRS, ABC đồng dạng nên tính chất này cũng đúng trong tam giác ABC .	0,25
Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC và AI cắt BC ở T , cắt đường tròn (ABC) ở L . Xét phương tích của các đường tròn,	0,25

	$\overline{TA} \cdot \overline{TL} = \overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TI_a} \cdot \overline{TI},$ vì $TA = TI_a$ (tính chất nêu trên) nên $TI = TL$.	
Cách 1	Khi đó: $LT = \frac{1}{2}LI = \frac{1}{2}LB$. Tam giác LAB đồng dạng tam giác LBT nên $\frac{AB}{BT} = \frac{LB}{LT} = 2$	0,25
	Mặt khác AT là phân giác góc A nên $\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC}$ nên $\frac{TB}{TB+TC} = \frac{AB}{AB+AC}$ nên $\frac{TB}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} \text{ suy ra } \frac{BC}{AB+AC} = \frac{TB}{AB} = \frac{1}{2} \text{ nên } AB+AC = 2 \cdot BC.$	0,25
Cách 2	Như thế $r = d(I, BC) = d(L, BC)$. Gọi H là hình chiếu của L lên BC và U là điểm chính giữa cung BC không chứa A, khi đó L, H, U thẳng hàng. Mặt khác: $d(L, BC) = LH = LC \cdot \sin \frac{A}{2} = LU \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} = 2R \cdot \sin^2 \frac{A}{2} = R(1 - \cos A)$	0,25
	nên $r = R - R \cos A \Leftrightarrow \frac{S}{p} = \frac{abc}{4S} \cdot (1 - \cos A) \Leftrightarrow \frac{8S^2}{2p \cdot abc} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\Leftrightarrow \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{a} = 2bc - (b^2 + c^2 - a^2)$ $\Leftrightarrow 2(p-a) = a \Leftrightarrow b+c = 2a.$	0,25
Câu 4 (5 điểm)	Bảng 21×24 (21 hàng, 24 cột) được chia thành 21×24 ô vuông đơn vị. Người ta muốn tô một số ô vuông đơn vị của bảng bởi một trong các màu: xanh, đỏ, vàng (có thể có vài ô vuông đơn vị không được tô màu) sao cho: (i) Trong các ô vuông đơn vị cùng hàng với mỗi ô vuông đơn vị được tô màu, có không quá 1 ô khác màu với ô đó; (ii) Trong các ô vuông đơn vị cùng cột với mỗi ô vuông đơn vị được tô màu, có không quá 1 ô khác màu với ô đó. a) Gọi x_1, x_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô xanh; d_1, d_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô đỏ; v_1, v_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô vàng. Chứng minh rằng $x_1 + x_2 + d_1 + d_2 + v_1 + v_2 \leq 45.$ b) Gọi x, d, v theo thứ tự là số ô vuông đơn vị được tô bởi các màu xanh, đỏ, vàng và đặt $m = \min\{x, d, v\}$. Tìm giá trị lớn nhất của m.	
	a) Gọi x_1, x_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô xanh; d_1, d_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô đỏ; v_1, v_2 theo thứ tự là số hàng, số cột của bảng mà trên mỗi hàng/cột đó có ít nhất 2 ô vuông đơn vị được tô vàng. Chứng minh rằng	2,0

	$x_1 + x_2 + d_1 + d_2 + v_1 + v_2 \leq 45.$	
	Ta gọi một hàng là “xanh” nếu trên đó có ít nhất 2 ô tô xanh. Nếu trên hàng đó có ô tô màu đỏ thì xét điều kiện (i) cho ô màu đỏ này, ta có ngay điều vô lý vì trên hàng đó có nhiều hơn 1 ô xanh là khác màu với nó. Như thế, trên hàng xanh sẽ không có ô đỏ nào, và tương tự cũng không có ô vàng nào.	1,0
	Định nghĩa tương tự với cột “xanh” và hàng/cột “vàng”, “đỏ”. Như thế, các hàng xanh, đỏ, vàng là đôi một rời nhau nên $x_1 + d_1 + v_1 \leq 21$. Tương tự, ta cũng có $x_2 + d_2 + v_2 \leq 24$ và cộng lại thì được $x_1 + x_2 + d_1 + d_2 + v_1 + v_2 \leq 21 + 24 = 45$.	1,0
	b) Gọi x, d, v theo thứ tự là số ô vuông đơn vị được tô bởi các màu xanh, đỏ, vàng và đặt $m = \min\{x, d, v\}$. Tìm giá trị lớn nhất của m .	3,0
	Đặt $X = x_1 + x_2$, $D = d_1 + d_2$, $V = v_1 + v_2$ và a là tổng số hàng/cột còn lại, không thuộc các nhóm trên, gọi là hàng/cột “thường”. Ta có $X + D + V + a = 45$.	0,5
	Ta thấy rằng một ô được tô xanh thì có thể thuộc về một hàng xanh, một cột xanh hoặc hàng/cột thường (mỗi hàng/cột thường cũng chỉ chứa không quá 1 ô xanh). Do có x_1 hàng xanh, x_2 cột xanh nên chúng giao nhau tại $x_1 x_2$ ô, kéo theo số ô được tô xanh tối đa là $x_1 x_2 + a$.	1,0
	Theo bất đẳng thức AM-GM, $x \leq x_1 x_2 + a \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + a = \frac{X^2}{4} + a$. Không mất tính tổng quát, giả sử $X = \min\{X, D, V\}$ thì $45 - a = X + D + V \geq 3X$. Suy ra $\frac{X^2}{4} + a \leq \frac{(45 - a)^2}{4 \cdot 9} + a = 56 + \frac{a(a - 54) + 9}{36} \leq 56 + \frac{9}{36} = 56 + \frac{1}{4},$ đánh giá cuối đúng vì $0 \leq a \leq 45$.	1,0
	Vì thế nên $m \leq x \leq \frac{X^2}{4} + a \leq 56 + \frac{1}{4}$. Giá trị lớn nhất cần tìm là 56. Ta xét ví dụ xây dựng trong hình bên dưới (theo thứ tự xanh, đỏ, vàng):	0,5
		

Lưu ý. Các bài toán ở trên đây có thể có nhiều cách giải. Ban giám khảo căn cứ tình hình cụ thể để cho điểm nếu thí sinh làm khác cách giải của hướng dẫn chấm thi.