

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO ĐẮK LẮK
TRƯỜNG THPT SỐ 1 LÊ HỒNG PHONG

..........

TÀI LIỆU
ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT 2027
BỘ MÔN: TOÁN



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Ea Phê, tháng 8 năm 2026

MỤC LỤC

◆ CHỦ ĐỀ 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
◆ CHỦ ĐỀ 2. VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN	33
◆ CHỦ ĐỀ 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN.....	51
◆ CHỦ ĐỀ 4. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN	65
◆ CHỦ ĐỀ 5. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	81
◆ CHỦ ĐỀ 6. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	105
◆ CHỦ ĐỀ 7. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH	117
◆ CHỦ ĐỀ 8. BPT VÀ HỆ BPT BẬC NHẤT HAI ẨN	126
◆ CHỦ ĐỀ 9. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN	133

BÀI

01

TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

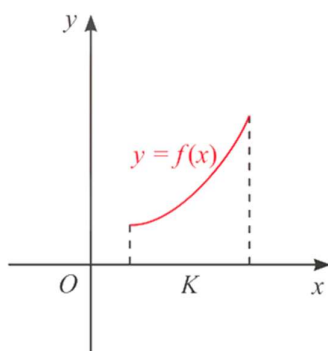
1. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

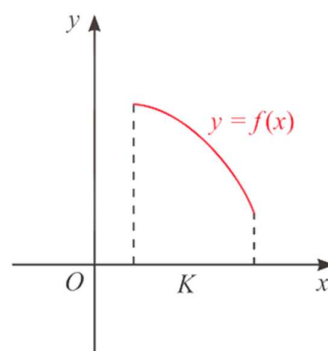
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

□ Chú ý

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.a).
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.b).



a)



b)

- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.

- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

□ ĐỊNH LÝ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

□ Chú ý

- Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K .
- Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K .

2. Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
- Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ.

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

□ Chú ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

2. Cách tìm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

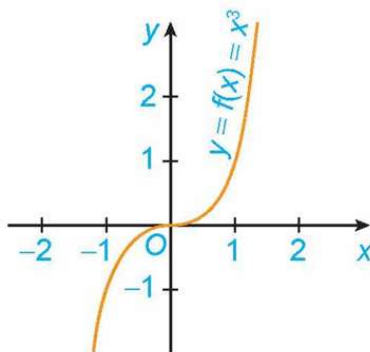
x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

□ Các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

- **Chú ý.** Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $n(A) = C_{10}^2 + C_{11}^2 = 100$ C. $(-1; 0)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$

A. $(1; +\infty)$.

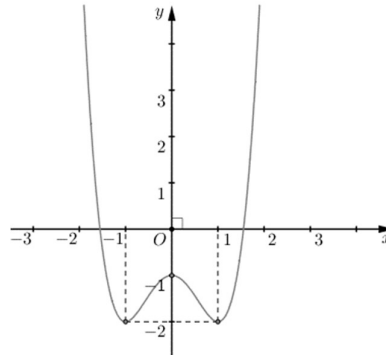
B. $(-\infty; 1)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D.

$(-\infty; -1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



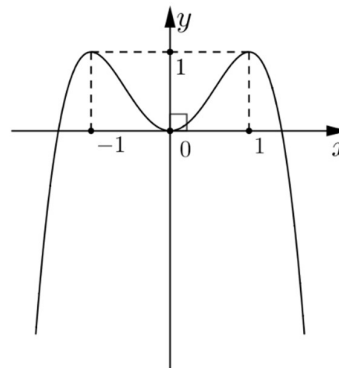
A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(0; 1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



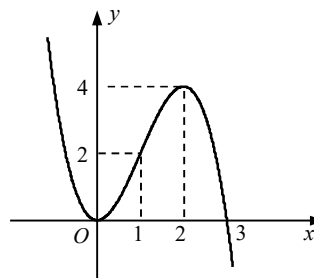
A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty; 0)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$					
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
			-3		2	
						$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

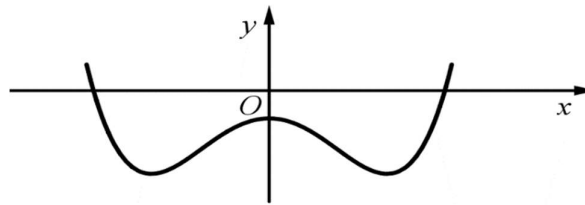
A. 3.

B. 2.

C. -2.

D. -3.

Câu 10: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

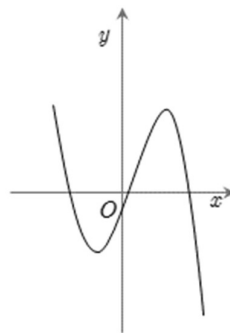
A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 11: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 12: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

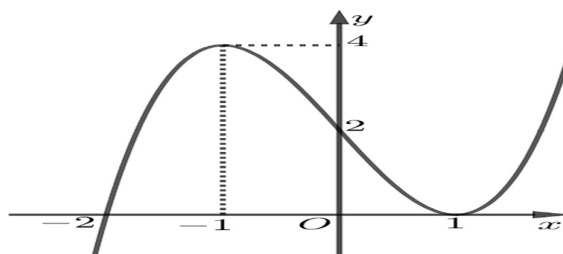
Khi đó:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; 2)$.
- b) Hàm số có bốn điểm cực trị.
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- d) Hàm số một cực đại.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$
- d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và giá trị cực đại là $y_{CD} = 4$
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

Câu 4. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -x(x+7)^3(x-3)^2$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 2. Giá trị cực đại của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ có hai điểm cực trị A và B . Với O là gốc tọa độ thì $OA^2 + OB^2$ bằng bao nhiêu?

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có hai điểm cực trị $A; B$. Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

Câu 5. Biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$.

Câu 6. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi thời gian bằng bao nhiêu để số lượng vi khuẩn đạt cực đại?

-----HẾT-----

BÀI

02

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A

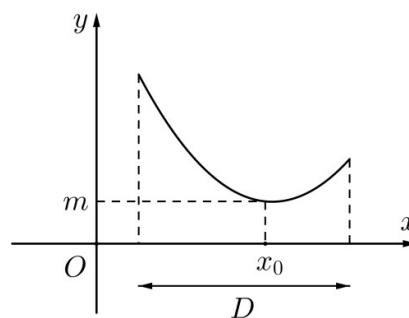
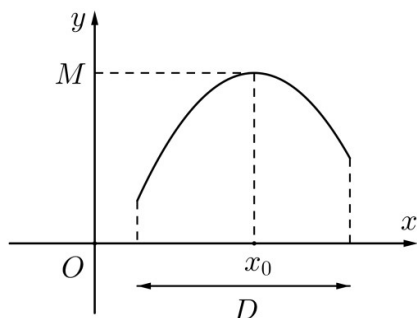
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D .
- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số** $y = f(x)$ trên D , nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu: $M = \max_D f(x)$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số** $y = f(x)$ trên D , nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$.

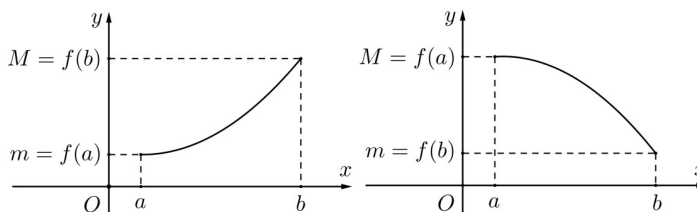
Chú ý: Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

Nhận xét: Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp D , ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D .



2. ĐỊNH LÝ:

- Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.
- Hơn nữa:
 - a) Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$.
 - b) Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$.



3. DẠNG TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

a) Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- **Bước 1:** Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

- **Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- **Bước 3:** Khi đó:

$$\max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

b) Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(a; b)$

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i)$.
- **Bước 4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a; b)} f(x), m = \min_{(a; b)} f(x)$.

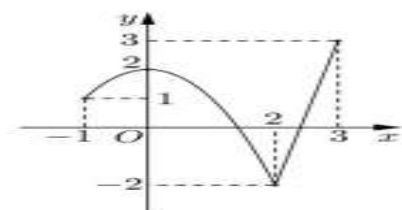
Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 1

B. 4

C. 5

D. 0

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 3. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

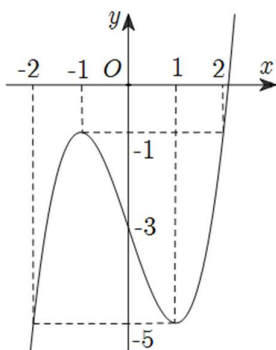
A. $32\sqrt{2}$.

B. -40.

C. $-32\sqrt{2}$.

D. -45.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



A. $m = -5; M = -1$.

B. $m = -2; M = 2$.

C. $m = -1; M = 0$.

D. $m = -5; M = 0$.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$

A. $M = \frac{1}{3}$.

B. $M = -\frac{1}{3}$.

C. $M = 5$.

D. $M = -5$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
y'	-		+	0	+		-
y	$+\infty$			2			
		-3			-4		

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai*?

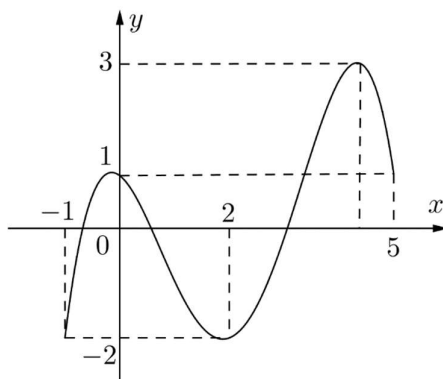
- A.** Hàm số có hai điểm cực trị.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0					4

- A.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng



- A.** -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.** $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ **B.** $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **C.** $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5	1	7	
y'		-	0	+
y	6		2	9

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$. **B.** $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$. **C.** $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$. **D.** $\max_{[-5;7]} f(x) = 6$.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a. $y' = \frac{-5}{(x-3)^2}, \forall x \neq 3$.
- b. $f(-2) = 3; f(1) = -2$.
- c. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là $1; \frac{-1}{2}$.
- d. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ tại $x_0 = -1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	-	0	+	
$f(x)$			2	$+\infty$	0	$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- b) Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x = -1$.
- c) $\max_D f(x) = 2$.
- d) $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\max_{[-4; 4]} f(x) = 40$ đạt được khi $x = -1$.
- b) $\min_{[-4; 4]} f(x) = 8$ đạt được khi $x = 3$.
- c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
- d) Giá trị cực tiểu của $f(x)$ bằng 8.

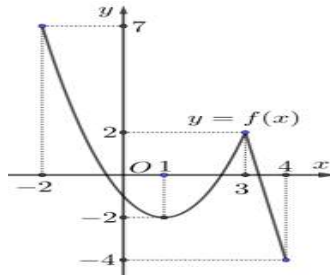
Câu 4. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng km . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.



- a) Con tàu đạt khoảng cách 10 km so với bề mặt của Mặt Trăng tại thời điểm $t = 20 \text{ (s)}$.
- b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 50$ (giây) là 4 km/s
- c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 20 đến giây thứ 30, độ cao của con tàu tăng dần so với bề mặt của Mặt Trăng.
- d) Với $0 \leq t \leq 50$ thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây, con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này bằng 6 km (làm tròn đến hàng đơn vị).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

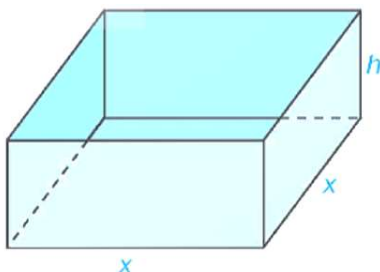
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng bao nhiêu?



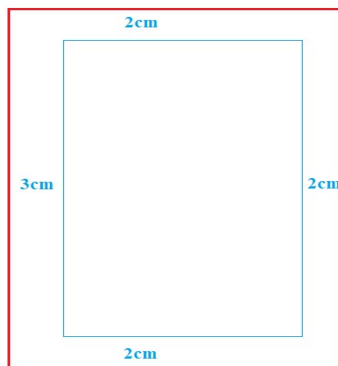
Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$ là

Câu 3. Một vật chuyển động theo quy luật $v(t) = \frac{-1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ (m/s), với t được đo bằng đơn vị giây là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

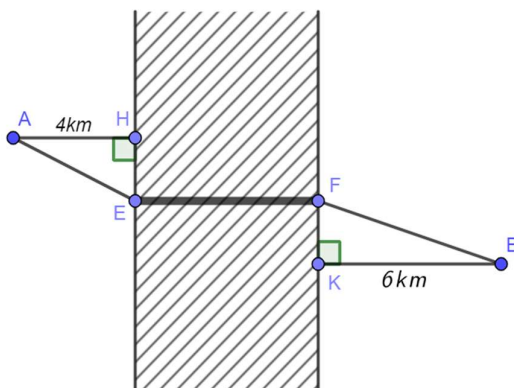
Câu 4. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao $h(\text{cm})$ và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như hình dưới đây. Tìm chiều cao $h(\text{cm})$ sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Câu 5. Diện tích một trang của một cuốn sách là 600cm^2 . Do yêu cầu kỹ thuật, cần để lề trên và lề dưới là 2cm , lề trái là 3cm và lề phải là 2cm . Tính diện tích lớn nhất của phần chữ in vào cuốn sách được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Câu 6. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông. Biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20\text{km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu tại vị trí E cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần trăm).



HẾT

BÀI

03

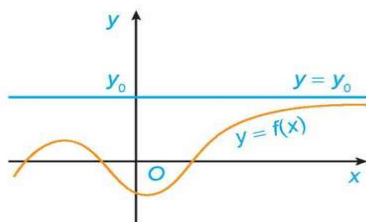
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A

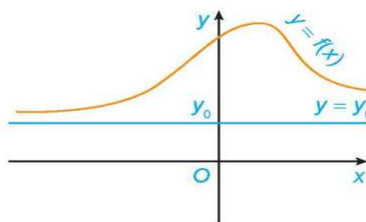
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).

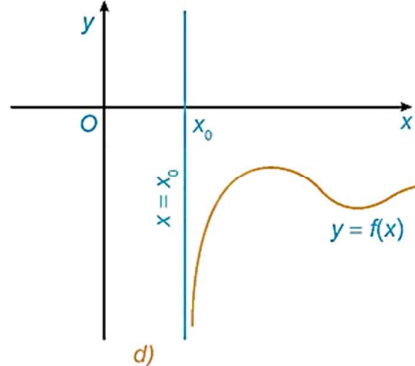
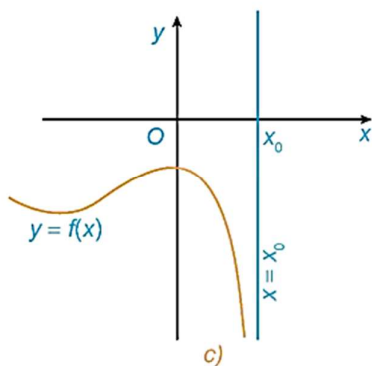
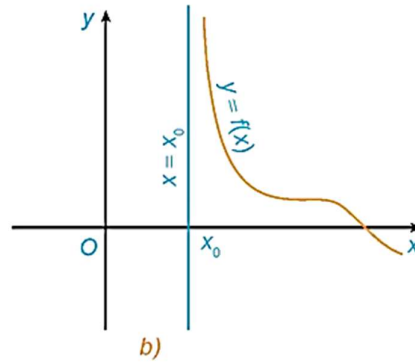
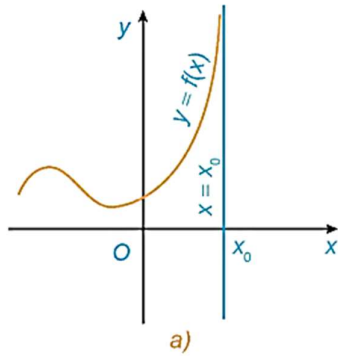


Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

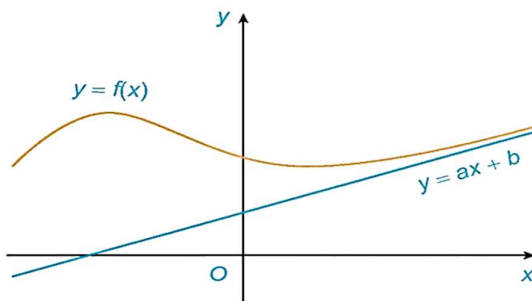


a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).

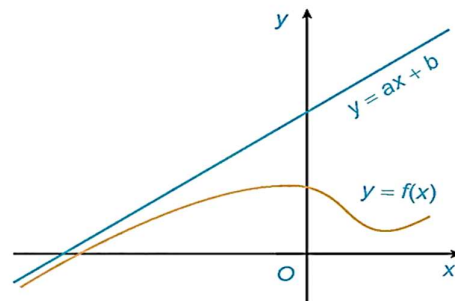
b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Chú ý. Ta biết rằng nếu đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Từ đây suy ra $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Khi đó, ta có $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

Ngược lại, với a và b xác định như trên, đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đặc biệt, nếu $a = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

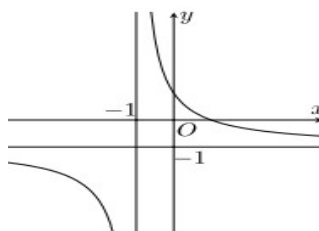
Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}, (ac \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	1	$+\infty$	1

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

- A. $y = -2$. B. $x = 1$. C. $y = 1$. D. $x = -2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho

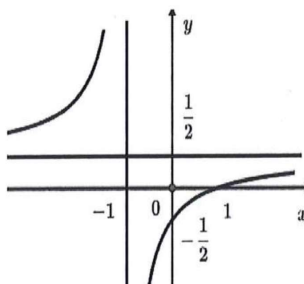


- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $y = 1$. D. $y = -1$.

Câu 3. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{2x + 1}{x + 2}$ có phương trình là:

- A. $x = -2$. B. $y = 3$. C. $x = -1$. D. $y = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:



- A. $x = -1$. B. $y = \frac{1}{2}$. C. $y = -1$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + x - 5}{x + 3}$ có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta : y = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Giá trị của tổng $a + b$ bằng

A. -3.

B. 7.

C. 3.

D. -5.

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = -1$.

B. $y = -1$.

C. $y = 2$.

D. $x = 2$.

Câu 7. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ có phương trình là:

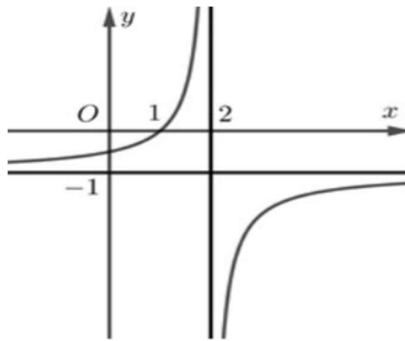
A. $y = 1 - 2x$.

B. $y = 2x$.

C. $y = 2x - 1$.

D. $y = -2x$.

Câu 8. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) có đồ thị dưới đây. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:



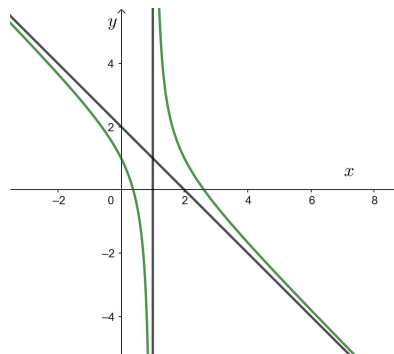
A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $y = -1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 10. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là

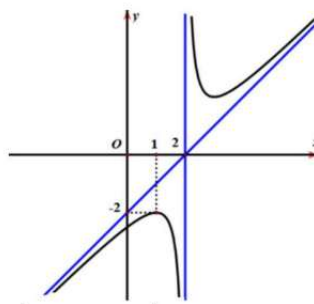
A. $y = 2$

B. $x = -1$

C. $y = -1$

D. $x = 2$

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (với $a \neq 0; m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là:

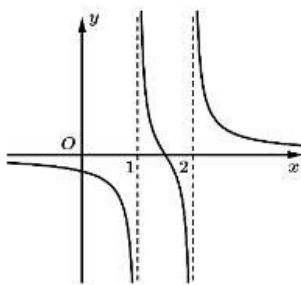
- A. $y = 2x + 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = 2x - 2$. D. $y = x + 2$.

Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 3}$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(2024; 2025)$. B. $Q(2027; 2024)$. C. $N(2025; 2022)$. D. $P(2024; 2024)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 15x + 10}$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba đường tiệm cận.
b) Đường thẳng $x = 1, x = 2$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
c) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
d) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	$-\infty$	0

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng.
b) Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
c) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
d) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 1.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$+$
$f(x)$	0	2	-2	$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho
b) Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang.
c) Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 2

d) Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) + 1}$ là 2.

Câu 4. Chi phí xuất bản x ($x > 0$) cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Hàm số

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn.

a) Tập xác định của hàm số $M(x)$ là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8$.

c) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $M(x)$.

d) Đường thẳng $y = x + 2000$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $M(x)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{2025}{x-2}$ có đồ thị (H) . Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (H)

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + 3x + 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

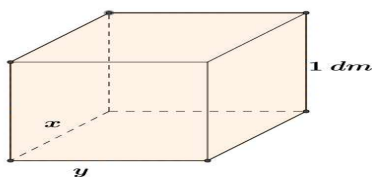
Câu 3. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 16}{x + 5}$ có dạng $y = ax + b$. Tính $a + b$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+		-	0	+
y		3	$+\infty$	$+\infty$	
	-2		-2		

Câu 5. Người ta thống kê được chi phí sửa chữa, vận hành máy móc trong một năm của một xưởng sản xuất được tính bởi công thức $f(x) = \frac{2000x - 1500}{35x + 5}$ (triệu đồng). Biết x là số năm kể từ lúc máy móc vận hành lần đầu tiên, số năm càng nhiều thì chi phí càng cao. Khi số năm x đủ lớn thì chi phí vận hành máy móc trong một năm gần với số nào? (làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

Câu 6. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $5m^3$. Chiều cao của bể là $10dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



-----HẾT-----

BÀI

04

KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

A

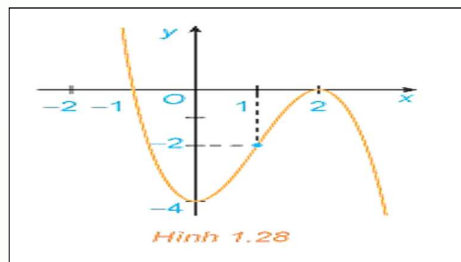
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- ①. Tìm tập xác định của hàm số.
 - ②. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:
 - ✓ Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - ✓ Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
 - ✓ Tìm cực trị của hàm số.
 - ✓ Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - ✓ Lập bảng biến thiên của hàm số.
 - ③. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.
-  **Chú ý:** Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

II. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

-  **Chú ý:** Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$:
- ✓ Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thoả mãn $y'' = 0$,
 - ✓ hay $x = -\frac{b}{3a}$.
 - ✓ Không có tiệm cận.



III. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

a) Hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

-  **Chú ý:** Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:
- ✓ Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
 - ✓ Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Hàm số phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q} (a \neq 0, p \neq 0, \text{đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu})$

-  **Chú ý:** Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q} (a \neq 0, p \neq 0, \text{đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu})$:
- ✓ Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
 - ✓ Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

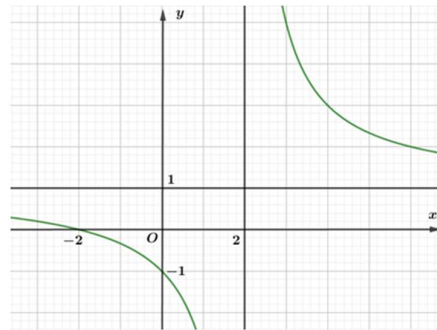
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

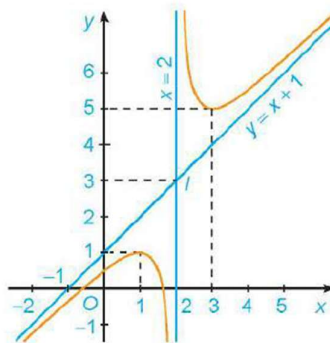
- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. **C.** $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **D.** $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = \frac{x-2}{x+2}$. **B.** $y = \frac{2x+4}{x-2}$. **C.** $y = \frac{x+1}{x-2}$. **D.** $y = \frac{x+2}{x-2}$.

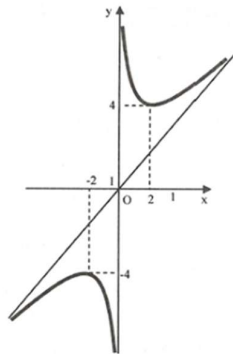
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Khẳng định nào sau đây SAI?

- A.** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.
D. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

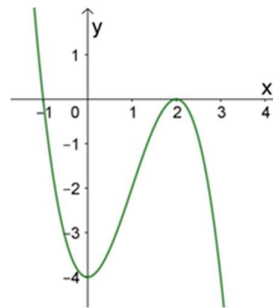


- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = x^4 - 2x^2$. C. $y = \frac{x^2+4}{x}$. D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

- A. $(2;0)$. B. $(0;2)$. C. $(4;0)$. D. $(0;4)$.

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{x-1}{x}$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$. C. $y = -x^3 + 3x - 4$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$ và $y = 2x-7$. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

- A. 7. B. 5. C. 8. D. 11.

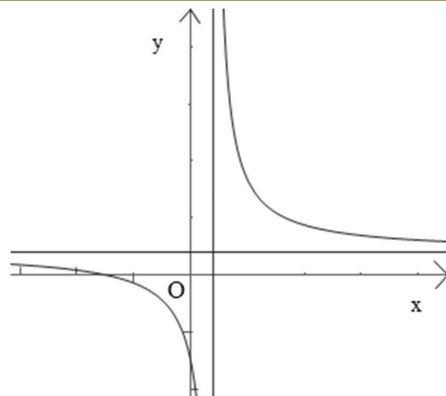
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'		$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 1$. **B.** $a > 1, b < 0, c > 1$. **C.** $a < 1, b > 0, c < 1$. **D.** $a > 1, b > 0, c > 1$.

Câu 10: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải có dạng hình trụ và chứa được $16\pi(m^3)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phi phải có chiều cao h và bán kính đáy R bằng bao nhiêu để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 4(m), h = 2(m)$. **B.** $R = 2(m), h = 4(m)$.
C. $R = 2(m), h = 2(m)$. **D.** $R = 4(m), h = 4(m)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$. Toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

A. $(-3; -8)$. **B.** $(-3; 8)$. **C.** $(1; 0)$. **D.** $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 12: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

A. $p = 0,4$. **B.** $p = 0,3$. **C.** $p = 0,2$. **D.** $p = 0,1$.

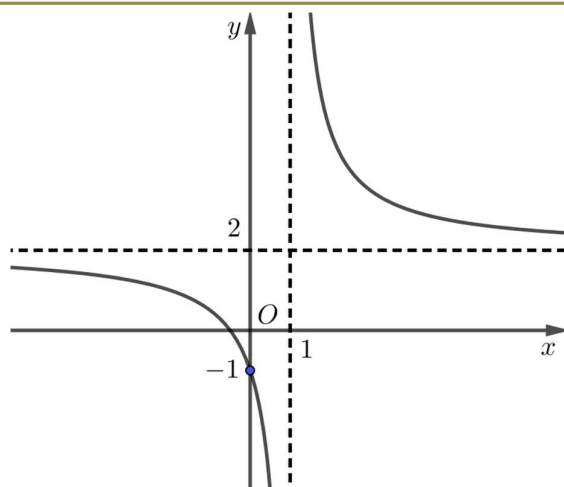
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) . Biết (C) có một điểm cực trị là

$A(1; -1)$ và tâm đối xứng là $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{29}{27}\right)$.

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) (C) có một điểm cực trị là $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{27}\right)$.		
b) $a + b + c + d = -1$.		
c) Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.		
d) $a + 2b + 3c + 4d = 4$.		

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + 1}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(2;1)$		
b) $a - 2b + c = -5$.		
c) Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình là $y = -3x + 11$.		
d) Có đúng 4 điểm $M(m;n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.		

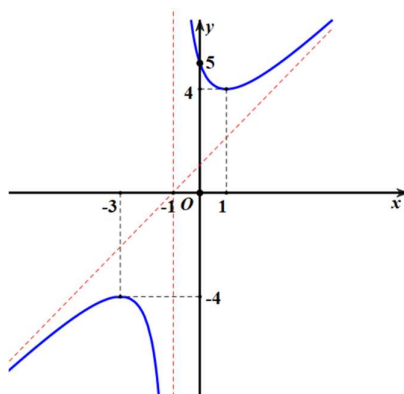
Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

a) $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$

b) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $y = 2x - 2$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

d) Đồ thị của hàm số có hình vẽ như sau



Câu 4: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

- b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
 c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho B là
 $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.
 d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?
- Câu 2:** Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Tính $a + 4b$?
- Câu 3:** Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?
- Câu 4:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T) . Số giao điểm của (C) với (T) là?
- Câu 5:** Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?
- Câu 6:** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \leq x \leq 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:
 $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$.
 Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày? (đơn vị triệu đồng)

-----HẾT-----

BÀI

05

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .

- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .

- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí. Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.
A. $t = 2$. **B.** $t = 0,5$. **C.** $t = 2,5$. **D.** $t = 1$.
- Câu 2:** Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.
A. 72. **B.** 12. **C.** $-\frac{1}{192}$. **D.** $\frac{23}{2}$.
- Câu 3:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
A. 289 (m/s). **B.** 105 (m/s). **C.** 111 (m/s). **D.** 487 (m/s).
- Câu 4:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó x (mg) và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:
A. 15mg **B.** 30mg **C.** 40mg **D.** 20mg
- Câu 5:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa

qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

- A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 10(h)$ B. $t = 14(h)$ C. $t = 15(h)$ D. $t = 22(h)$

Câu 7: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$ ($0 \leq t \leq 90$)

. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

- A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
B. Tốc độ bơm luôn giảm.
C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
D. Cả ba đáp án đều sai

Câu 8: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

Câu 9: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A. $27,832^{\circ}C$. B. $18,4^{\circ}C$. C. $26,2^{\circ}C$. D. $25,312^{\circ}C$.

Câu 10: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

Câu 11: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- A. 44.000đ B. 43.000đ C. 42.000đ D. 41.000đ

Câu 12: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?

- A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).



- a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.
- b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
- c) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$
- d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

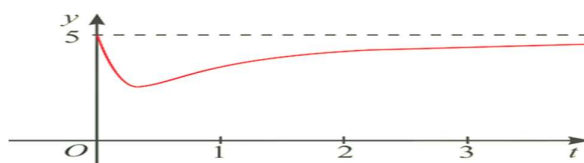
Câu 2: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t}, \quad N(t) \text{ được tính bằng triệu người và } 0 \leq t \leq 50$$

- a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)
- b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)
- c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.
- d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Câu 3: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được

xấp xỉ bởi hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



- a) Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- b) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- c) Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- d) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$
- b) Hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$
- c) Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng
- d) Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

- Câu 1:** Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ s.
- Câu 2:** Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?
- Câu 3:** Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T = m + n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?
- Câu 4:** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?
- Câu 5:** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?
- Câu 6:** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

-----HẾT-----

ĐỀ ÔN TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 4. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-6	-10	$+\infty$	

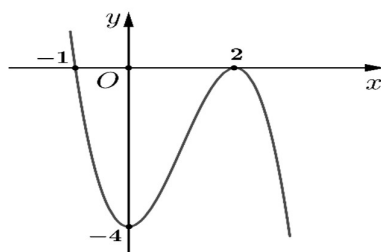
Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$ bằng

- A. 6. B. 9. C. -13. D. -16.

Câu 4: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ là đường thẳng có phương trình?

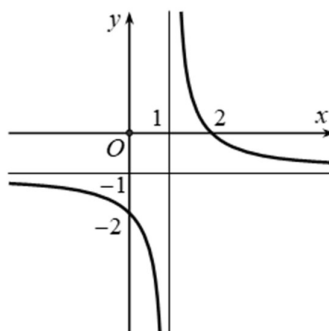
- A. $y = -x - 1$. B. $y = x - 1$. C. $y = -x + 1$. D. $y = x + 1$.

Câu 5: Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. B. $y = x^3 - 4$. C. $y = x^2 - 4$. D. $y = -x^2 - 4$.

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ là:

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $(-2; -2)$. D. $(0; -2)$.

Câu 8: Khẳng định nào sau đây đúng về tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{2x + 4}{1 - x}$?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

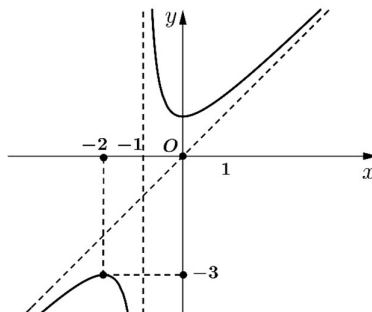
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t) = t^3 + 3t - 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (giây)?

- A. $139 \left(\frac{m}{s} \right)$. B. $78 \left(\frac{m}{s} \right)$. C. $30 \left(\frac{m}{s} \right)$. D. $77 \left(\frac{m}{s} \right)$.

Câu 10: Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số



- A. $y = x - \frac{1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$. C. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x+1}$. D. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$.

Câu 11: Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1 kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^\circ\text{C}$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T \in [0; 30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau:

T	0	T_1	30
$V'(T)$	—	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Với $T_1 \approx 3,97^\circ\text{C}$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

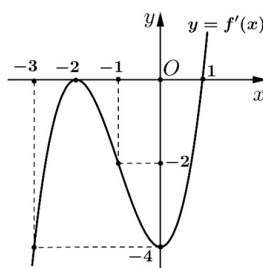
- A. $(0; 3,97)$. B. $(0; 5)$ C. $(0; 10)$. D. $(0; 30)$.

Câu 12: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

- A. $(0; 10)$ B. $(0; 8)$. C. $(8; 10)$. D. $(8; 12)$.

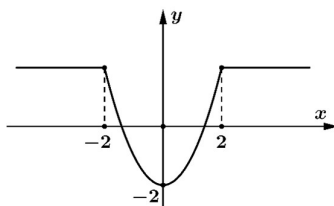
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- c) $f'(2) = 4$.
- d) Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = -2$ và $x = 2$
- b) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng -2 đạt được tại $x = 0$
- d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số là bằng nhau
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm có tọa độ $(-1; 2)$
- c) Đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$
- d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = 2x + 5$

Câu 4: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1km đường sông là 48000 đồng.
- b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$.
- c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông là 43000 đồng.
- d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$ có trục đối xứng là đường thẳng $y = ax + b$. Tính tổng tất cả các giá trị của T biết $T = a + b$.

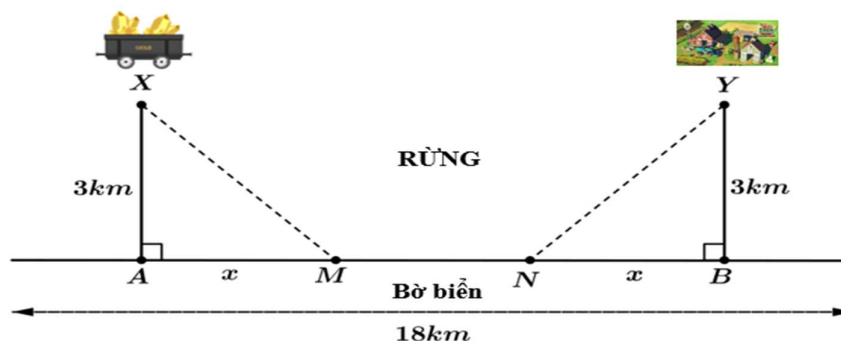
Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho MN đối xứng nhau qua điểm $I(1; -3)$. Tính giá trị của biểu thức $T = |x_1^2 - x_2^2|$.

Câu 3: Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{60}{1+0,2x}, 12 > x \geq 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu nghìn đồng?

Câu 4: Trong hệ trục tọa độ (Oxy) , cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ với $x > -1$ mô tả chuyển động của một chiếc thuyền trên biển. Một trạm phát sóng đặt tại điểm $I(-1; -1)$, biết hoành độ điểm M thuộc đồ thị (C) mà tại đó thuyền thu được sóng tốt nhất là $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - b$ (loại trừ các điều kiện ảnh hưởng đến việc thu phát sóng). Tính giá trị biểu thức $P = a.n + b$?

Câu 5: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016). Giả sử một điện trở 10Ω được mắc song song với một biến trở x thì điện trở tương đương R là hàm số $y = \frac{10x}{x+10}, x > 0$. Điện trở tương đương của mạch **không thể** vượt quá bao nhiêu?

Câu 6: Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng và ông ta tìm thấy vàng ở điểm X cách điểm A một khoảng 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông Vinh nằm ở vị trí Y cách điểm B một khoảng 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km (minh họa như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh không may bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

-----HẾT-----

BÀI

06

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A

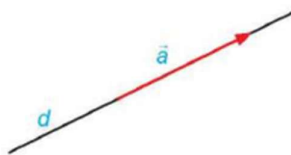
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

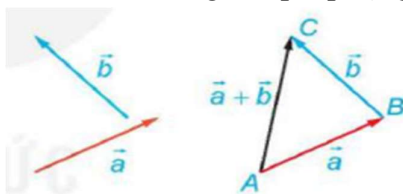
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$** , kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ**.



Hình 2.11

Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Chú ý. Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.



Chú ý:

- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian: Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Chú ý

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.

- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là hai vector bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$.

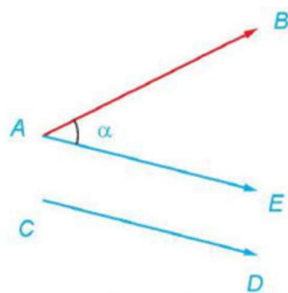
4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\vec{AE} = \vec{CD}$, khi đó $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \widehat{BAE}$ (H.2.23).



Hình 2.23

- Quy ước góc giữa một vector bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- Với mọi vectơ $\vec{a}$ ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Nhận xét. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b});$$

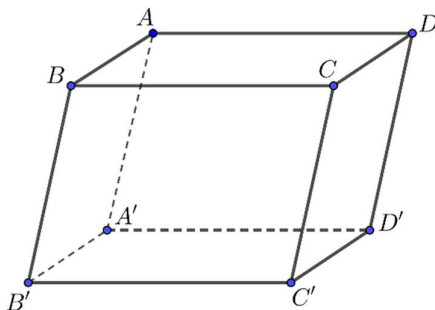
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vector nào sau đây cùng phương với $\overrightarrow{BC}$?

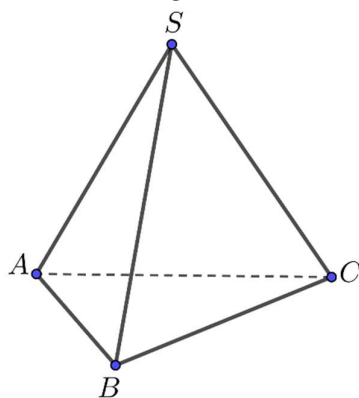
A. $\overrightarrow{DC}$

B. $\overrightarrow{DA}$

C. $\overrightarrow{BB'}$

D. $\overrightarrow{C'C}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm vector tổng của hai vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$?



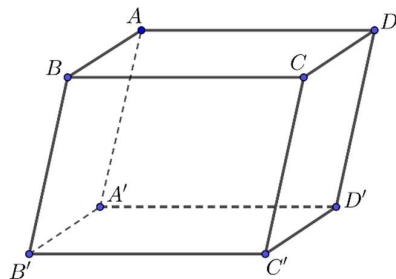
A. $\overrightarrow{BS}$

B. $\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{SB}$

D. $\overrightarrow{SC}$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vector $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD .

B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$.

D. $N \equiv A$.

Câu 9: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 10: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 120°

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$.

B. a^2 .

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

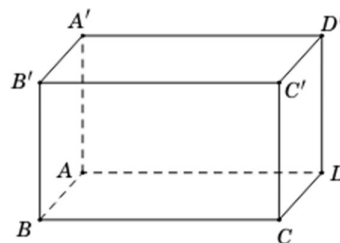
Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

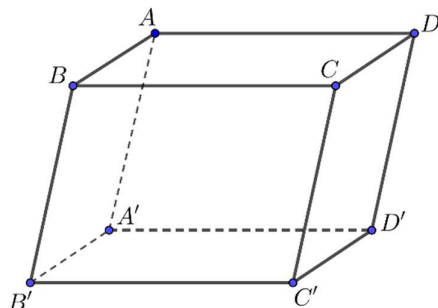
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$

d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$

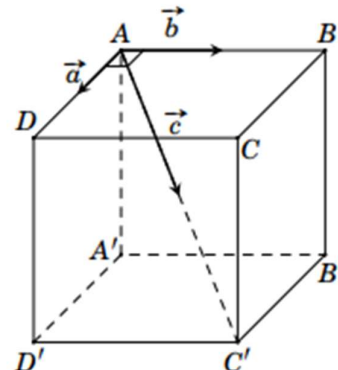


Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



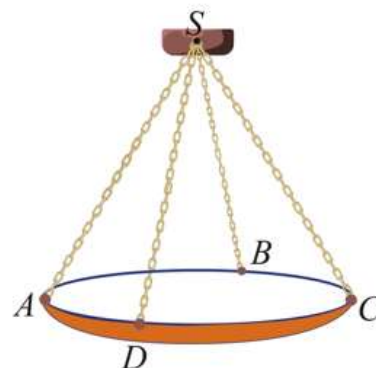
- a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ bằng nhau.
 b) Hai vectơ $\overrightarrow{A'D'}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau.
 c) Hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với nhau.
 d) Có 3 vectơ khác vectơ $\vec{0}$ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Câu 3: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
 b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ N.
 c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.
 d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59$ N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 4: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Khi đó:



- a) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng
 b) $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{SD}|$
 c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng 50 N
 d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ N

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$

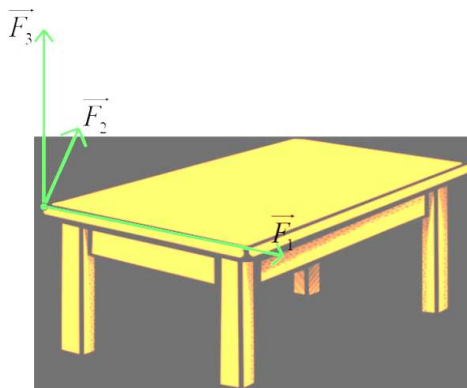
Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, từ các đỉnh của hình hộp đã cho, có bao nhiêu vectơ đối (khác vectơ không) của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Giá trị tan của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng (làm tròn tới hàng phần nghìn).

Câu 4: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° , đồng thời $|\vec{a}| = 2$ và $|\vec{b}| = 5$. Đặt $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Để $\vec{u} \perp \vec{v}$ thì giá trị của k là

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Đặt một vật tại đỉnh A , khi đó tác động vào vật bởi những lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có giá lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD, AA' và $|\vec{F}_1| = 2\text{ N}, |\vec{F}_2| = 3\text{ N}, |\vec{F}_3| = 4\text{ N}$. Hãy xác định độ lớn của hợp lực $\vec{F}$ tác động lên vật (làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 6: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



HẾT

BÀI

07

HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A

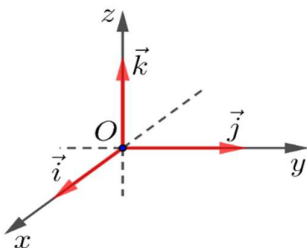
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ toạ độ $Oxyz$.



- Điểm O được gọi là gốc toạ độ.

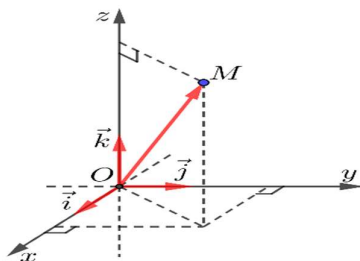
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a/ Tọa độ điểm.

Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .



Nhận xét. Nếu điểm M có toạ độ $(x; y; z)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox , Oy , Oz có toạ độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) và (Ozx) có toạ độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ và $(x; 0; z)$.

b/ Tọa độ vectơ.

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Toạ độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$.

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là
A. $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox , Oy , Oz . Xác định toạ độ điểm C?

A. $(3; 0; 0)$ **B.** $(0; 0; 3)$ **C.** $(0; 3; 3)$ **D.** $(3; 3; 0)$

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox ; Oy ; Oz . Tọa độ của C' là:

A. $(2; 3; 0)$. **B.** $(2; 3; 4)$. **C.** $(0; 3; 4)$. **D.** $(2; 0; 4)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

A. $(-1; -1; -3)$ **B.** $(3; 1; 1)$ **C.** $(1; 1; 3)$ **D.** $(3; 3; -1)$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ lên trục Ox có toạ độ là

A. $(0; 2; 0)$. **B.** $(0; 0; 5)$. **C.** $(1; 0; 0)$. **D.** $(0; 2; 5)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ hình chiếu của điểm $A(-2; -1; 3)$ trên mặt phẳng Oyz là

A. $(0; -1; 0)$ **B.** $(-2; 0; 0)$ **C.** $(0; -1; 3)$ **D.** $(-2; -1; 0)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- A. $M = (0; 2; 1)$. B. $M = (1; 2; 0)$. C. $M = (2; 1; 0)$. D. $M = (2; 0; 1)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3; 1; 2), B(1; 0; 1), C(2; 3; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

- A. $D(1; 1; 0)$. B. $D(0; 2; -1)$. C. $D(4; 4; 1)$. D. $D(1; 3; -1)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 0; 0); N(0; -3; 0); P(0; 0; 4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

- A. $(-2; -3; 4)$. B. $(-2; -3; -4)$. C. $(2; 3; 4)$. D. $(3; 4; 2)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-3; 2; 1)$ và điểm $A(4; 6; -3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là:

- A. $(-1; -8; 2)$. B. $(7; 4; -4)$. C. $(1; 8; -2)$. D. $(-7; -4; 4)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -3)$. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua trục Oy .

- A. $M'(2; 1; -3)$. B. $M'(-2; -1; 3)$. C. $M'(2; -1; -3)$. D. $M'(-2; -1; -3)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

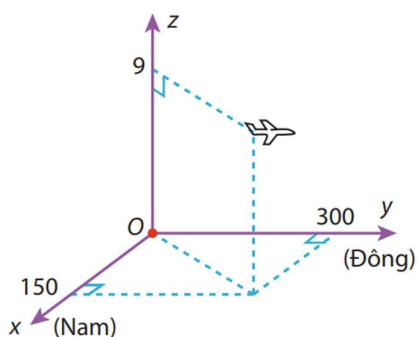
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; -1; 1)$, $B(-2; 1; -1)$, $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

- a) $C(-1; 3; 2)$.
 b) $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 2)$.
 c) Hình chiếu vuông góc của điểm C lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(-1; 3; 0)$.
 d) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $D(1; 1; 4)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (4; 2; 3)$ và điểm $A(1; -1; 2)$.

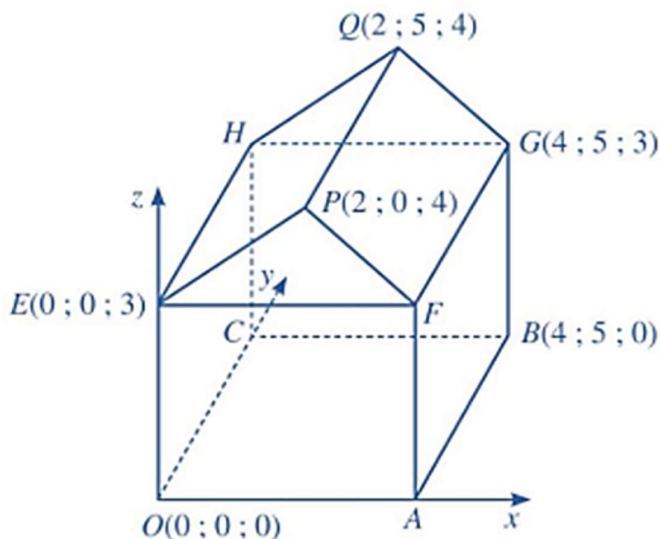
- a) $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.
 b) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox có tọa độ là $(0; -1; 2)$.
 c) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1; 0; 2)$.
 d) Nếu $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ thì $B(-5; -1; -5)$.

Câu 3: Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km.



- a) Máy bay đang ở độ cao $9km$.
- b) Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là $750km/h$, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc $10m/s$. Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30 phút máy bay ở tọa độ $(150; 1086; 9)$.
- c) Tọa độ của máy bay $(300; 150; 9)$.
- d) Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại với vận tốc $800km/h$ với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ $(686; 150; 9)$.

Câu 4: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



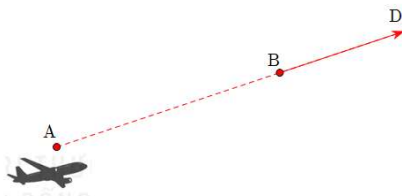
- a) Tọa độ điểm A là $(4; 0; 0)$.
- b) Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$.
- c) $\overrightarrow{FG} = 5\vec{k}$.
- d) Khi $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{QG}$ thì tọa độ điểm T là $T(6; 0; -1)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

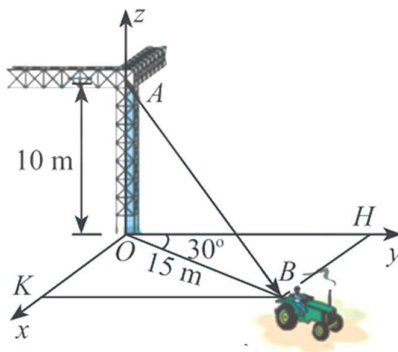
Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , các điểm $B; D; A'$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tọa độ điểm $C'(x; y; z)$. Tính $P = x - 2y + z$.

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình bình hành $ABCD$ có $A(-1; 3; 5)$, $B(2; -3; 7)$, $D(-4; 1; -2)$. Hiệu giữa hoành độ với cao độ của điểm C bằng bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z = ?$



Câu 4: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được toạ độ của vector $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó tính $a + c$



Câu 5: Một cuộc diễn tập phòng không được đặt trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với 1 đơn vị độ dài trên các trục tính bằng 1 km trên thực tế. Một bộ phóng tên lửa phòng không được đặt tại vị trí $O(0; 0; 0)$ và tên lửa bay theo một đường thẳng với vận tốc không đổi là 600 m/s. Một máy bay không người lái bay theo một đường thẳng với vận tốc không đổi là 1080 km/h và bay theo hướng của vector $\vec{u} = (-3; 4; 0)$. Khi phát hiện máy bay không người lái tại vị trí $A(6; -20; 1)$ thì tên lửa khai hỏa, rồi bộ phóng và sau đó bắn hạ được mục tiêu. Hỏi khoảng cách từ bộ phóng tên lửa đến vị trí máy bay không người lái bị bắn hạ bằng bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục, giả sử cả máy bay không người lái và tên lửa đều không chịu tác động của trọng lực hay lực cản không khí).

Câu 6: Từ mặt đất tại hai điểm có hai vật cùng xuất phát theo hai hướng lên trên. Để xác định cho chúng có thể gặp nhau trên không trung để va chạm vào nhau người ta gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào với một điểm trùng với gốc tọa độ O và chuyển động với vector vận tốc $\vec{v}_1 = (3; 1; 4)$ và vật thứ hai là điểm A có tọa độ $A(10; 50; 30)$ và chuyển động với vector vận tốc $\vec{v}_2 = (a; b; 2)$. Hãy tính $(4a + b)$?

-----HẾT-----

BÀI

08

BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

a/ Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z');$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z');$$

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz) \text{ với } k \text{ là một số thực.}$$

Nhận xét. Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k

$$\text{sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz'. \end{cases}$$

b/ Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

Khi đó:

- Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$;

- Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.

2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi

$$\text{công thức: } \vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx' + yy' + zz' = 0$.

- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2; -1; 1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = \sqrt{5}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = 9$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tính tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

- A. $(0;-1;-5)$. B. $(2;-1;1)$. C. $(2;3;1)$. D. $(0;-1;1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (-2;1;3)$. Vector cùng phương với vector $\vec{a}$ là

- A. $\vec{b} = (-4;1;3)$. B. $\vec{c} = (2;-1;-3)$. C. $\vec{d} = (-4;2;3)$. D. $\vec{e} = (-4;-2;3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(0;0;3)$. B. $G(0;0;9)$. C. $G(-1;0;3)$. D. $G(0;0;1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. 26. B. 22. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{22}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 4; n = -3$. C. $m = 1; n = 0$. D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tìm tọa độ của điểm B , biết M là trung điểm của AB .

- A. $B(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2})$. B. $B(-4;9;8)$. C. $B(5;3;-7)$. D. $B(5;-3;-7)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A. $x = 4; y = 7$ B. $x = -4; y = -7$ C. $x = 4; y = -7$ D. $x = -4; y = 7$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2;1;0)$ và $\vec{b} = (-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 2$ B. $m = -6$ C. $m = 0$ D. $m = -4$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(-1;3;2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$.

b) $ABCD$ là hình bình hành khi $D(1; 1; 4)$.

c) $I(-1; 0; 0)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $2\vec{a} = (4; 2; 0)$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$.

c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$.

d) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

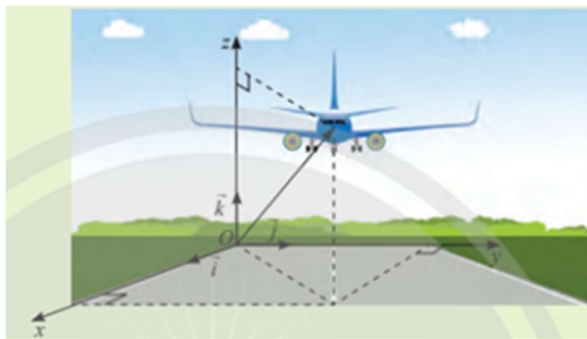
b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.

d) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Câu 4: Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ được gắn như hình vẽ, trong đó gốc O là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và $M(x; y; z)$ (km) biểu thị vị trí máy bay trên không trung.

Tại thời điểm 8h máy bay đang ở vị trí $(50; 120; 4)$ và chuyển động với vận tốc $\vec{v} = (300; 400; 3)$ (km/h)



a) Tại thời điểm 8h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1km).

b) Tại thời điểm 10h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình F có tọa độ $(1250; 1020; 0)$ xấp xỉ 700km (sai số không quá 10km).

c) Khi đạt độ cao 10km, máy bay đổi vận tốc mới là $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$ để hướng đến sân bay B .

Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay B là $(1450; 1520; 0)$.

d) Tại thời điểm 9h độ cao của máy bay so với mặt đất là 8km.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

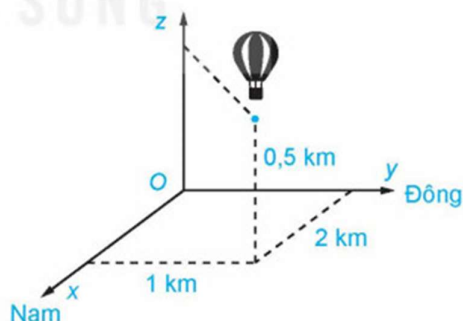
Câu 1: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;1;1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Câu 2: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; -1; 1)$, $B(3; 1; 2)$ và $C(-1; 0; 3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

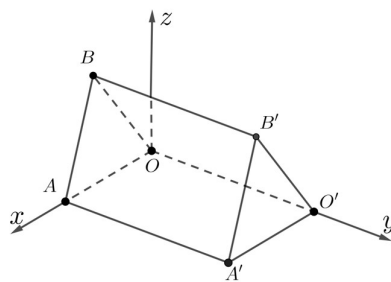
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc toạ độ tại A ; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Gọi M là trung điểm SC . Tìm toạ độ điểm $M(x; y; z)$. Tính $T = x + y - \frac{3}{2}z$.

Câu 4: Trong không gian Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; m; 2)$, $\vec{b} = (m+1; 2; 1)$, $\vec{c} = (0; m-2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.

Câu 5: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5 \text{ km}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5 \text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8 \text{ km}$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, Oy hướng về phía đông, Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Tìm khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (đơn vị km và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Câu 6: Những căn lều gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là $a \text{ cm}$, chiều rộng là $b \text{ cm}$, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là $c \text{ cm}$. Tính $a + b + c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).



-----HẾT-----

ĐỀ ÔN TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (-1; 3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

- A. 10. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. D. $\vec{b} \perp \vec{a}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ biểu diễn của các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(1; -3; 2)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .

- A. $A_1(1; 0; 0)$. B. $A_1(0; 2; 3)$. C. $A_1(1; 0; 3)$. D. $A_1(1; 2; 0)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$ và $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn AB là:

- A. $2\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. 3.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(1; -4; 0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

- A. $(1; -1; 2)$. B. $(-1; -1; 2)$. C. $(1; 1; 2)$. D. $(1; -1; -2)$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

- A. $D(1; 8; -2)$. B. $D(11; 2; 2)$. C. $D(1; 8; 2)$. D. $D(11; 2; -2)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -2; -1)$ và $A(1; -1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ là

- A. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- C. $M(2; 0; 5)$. D. $M(-1; -3; -4)$.

Câu 9: Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1; 2; -1)$ và điểm $B(2; 1; 2)$.

- A. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. C. $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. D. $M\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{100}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{100}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{10}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

- A. $(1; 1; -2)$. B. $(2; 1; -2)$. C. $(1; 2; -1)$. D. $(2; 1; -1)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. D. $(-2; 11; 1)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông
b) Tam giác SBD vuông cân tại S .
c) $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$.
d) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

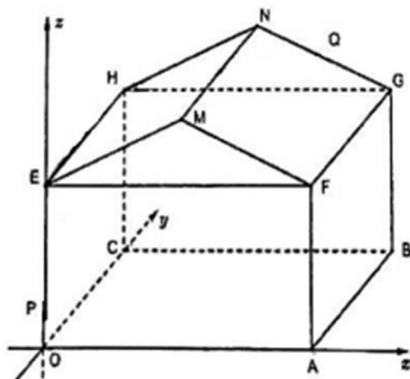
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.
b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;-1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(1;-1;1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 4)$.
b) $\overrightarrow{DC} = (1-x_D; -1-y_D; 1-z_D)$.
c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
d) Tọa độ điểm D là $(0; 3; 3)$.

Câu 4: Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFME.CBGNH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật, P là điểm trên đoạn thẳng OE sao cho $OP = \frac{1}{4}OE$ và Q là trung điểm của đoạn thẳng GN . Người ta mô hình hoá bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m). Biết $A(6; 0; 0)$, $C(0; 20; 0)$, $E(0; 0; 4)$, $M(3; 0; 7)$. Khi đó

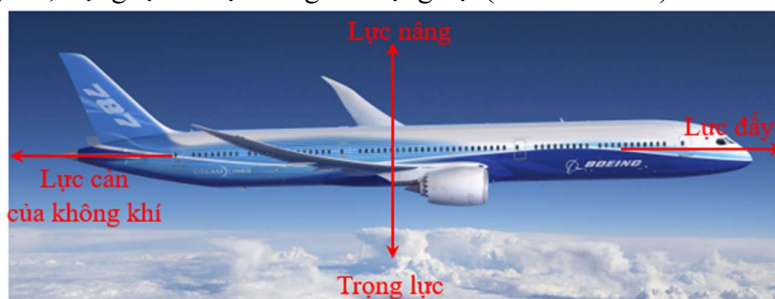


- a) Tọa độ $\overrightarrow{BP}$ là $(-6; -20; 1)$.
b) Hai véc-tơ $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{GN}$ không vuông góc với nhau.
c) Số đo góc nhị diện $[M, FG, E]$ bằng 45° . {Hoặc có thể nói độ dốc của mái nhà bằng 45° }

d) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí Q và đầu thu giữ liệu đặt tại vị trí P . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ P đến E rồi từ E đến H , sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn dây cáp tối thiểu bằng $(26 + \sqrt{3})$ m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

- Câu 1:** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?
- Câu 2:** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5), B(1;1;3), C(4;-2;3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?
- Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;2;8), N(0;1;3)$ và $P(2;m;4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
- Câu 5:** Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía bắc và 240m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
- Câu 6:** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học(hình ảnh 2.20).



Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}$ ($k \in \mathbb{R}; k > 0$). Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

-----HẾT-----

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHOM

1.1. Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 1.

- Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là giá trị đại diện của nhóm đó.
- Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{n}$$

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Bảng 1

Ý nghĩa: Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu đó khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng.

1.2. Trung vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 2. Giả sử nhóm k là

nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức

là $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng $cf_k \geq \frac{n}{2}$. Ta gọi r , d , n_k lần lượt là

đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k ; cf_{k-1} là tần số tích

lũy của nhóm $k-1$.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	n_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	n_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	n_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \dots + n_m$
	n	

Bảng 2

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e , được tính theo công thức sau:

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k} \right) \cdot d$$

Quy ước: $cf_0 = 0$.

Ý nghĩa: Trung vị của mẫu số liệu có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đó.

1.3. Tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 2. Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc

bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s , h , n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của

nhóm p ; cf_{p-1} là tần số tích lũy của nhóm $p-1$.

- Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau:
$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p} \right) \cdot h$$
- Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị M_e .

- Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q ; cf_{q-1} là tần số tích lũy của nhóm $q-1$.

▪ Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau:
$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q} \right) \cdot l$$

Ý nghĩa: Tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

1.4. Một

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*. Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm i ; n_{i-1}, n_{i+1} lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o , được tính theo công thức sau:

$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \right) \cdot g$$

Quy ước: $n_0 = 0$; $n_{m+1} = 0$.

Ý nghĩa: Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm có thể dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đó.

2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

2.1. Khoảng biến thiên

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 3*, trong đó $n_1 > 0$ và $n_m > 0$

Gọi a_1, a_{m+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm m .

Hiệu $R = a_{m+1} - a_1$ được gọi là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Ý nghĩa

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị a_1 và a_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
$\dots$	$\dots$
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 3

2.2. Khoảng tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*. Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu

$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

Ý nghĩa: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó.

Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường đó.

2.3. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 1*.

- Gọi $\bar{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó.

Số $s^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m(x_m - \bar{x})^2}{n}$ được gọi là phương sai của mẫu số liệu đó.

Hay $s^2 = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_mx_m^2}{n} - \bar{x}^2$

- Căn bậc hai (số học) của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s , nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó:
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn

B

BÀI TẬP

BÀI

09

KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỬ PHÂN VỊ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Kết quả thu thập điểm số môn Toán của 25 học sinh khi tham gia kì thi học sinh giỏi toán 12 (thang điểm 20) cho ta bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)
Số học sinh	8	12	3	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A.** $R = 4$. **B.** $R = 20$. **C.** $R = 16$. **D.** $R = 12$.

Câu 2: Cho mẫu số liệu ghép nhóm với bộ ba tứ phân vị lần lượt là $Q_1 = 11,5$; $Q_2 = 14,5$; $Q_3 = 21,3$. Khi đó khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

- A.** $\Delta Q = 3,0$. **B.** $\Delta Q = 6,8$. **C.** $\Delta Q = 9,8$. **D.** $\Delta Q = 32,8$.

Câu 3: Mức thưởng Tết cho các nhân viên của 2 tổ tại một công ty được thống kê trong bảng sau:

Mức thưởng Tết (triệu đồng)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số nhân viên tổ A	40	25	20	10	5
Số nhân viên tổ B	50	30	20	10	0

Gọi R_1 ; R_2 tương ứng là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về mức thưởng Tết của các nhân viên Tổ A và Tổ B. Chọn phương án đúng?

- A.** $R_1 = 20$. **B.** $R_2 = 25$. **C.** $R_1 > R_2$. **D.** $R_1 < R_2$.

Câu 4: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê thời gian hoàn thành (phút) một bài kiểm tra trực tuyến của 100 học sinh, ta có bảng số liệu sau:

Thời gian (phút)	[33;35)	[35;37)	[37;39)	[39;41)	[41;43)	[43;45)
Số học sinh	4	13	38	27	14	4

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A.** 38. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 5: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 30 ngày, ta có bảng số liệu sau:

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
Số ngày	6	12	9	3

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là:

- A. $[18; 21)$. B. $[21; 24)$. C. $[24; 27)$. D. $[27; 30)$.

Câu 6: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 30 ngày, ta có bảng số liệu sau:

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	$[18; 21)$	$[21; 24)$	$[24; 27)$	$[27; 30)$
Số ngày	6	12	9	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

- A. 21,375. B. 25,5. C. 4,125. D. 1,875.

Câu 7: Bảng sau thống kê cân nặng của 30 học sinh lớp 12A1

Cân nặng (Kg)	$[45; 50)$	$[50; 55)$	$[55; 60)$	$[60; 65)$	$[65; 70)$
Số học sinh	5	10	5	8	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 25. B. 5. C. 45. D. 70.

Câu 8: Công thức tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$. B. $\Delta_Q = Q_1 - Q_3$. C. $\Delta_Q = Q_3 \cdot Q_1$. D. $\Delta_Q = Q_3 + Q_1$.

Câu 9: Bảng sau thống kê cân nặng của 30 quả đu đủ được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở vườn nhà Lan

Cân nặng (g)	$[750; 800)$	$[800; 850)$	$[850; 900)$	$[900; 950)$	$[950; 1000)$
Số quả bưởi	5	10	5	8	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. 103,125. B. 1728,125. C. 250. D. 750.

Câu 10: Một cửa hàng trang sức khảo sát một số khách hàng xem họ dự định mua trang sức với mức giá nào (đơn vị: triệu đồng). Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá	$[6; 9)$	$[9; 12)$	$[12; 15)$	$[15; 18)$	$[18; 21)$
Số khách hàng	20	75	48	23	12

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 9,98. B. 15. C. 4,43. D. 14,41.

Câu 11: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

Tuổi thọ	$[2; 3; 5)$	$[3; 5; 5)$	$[5; 6; 5)$	$[6; 5; 8)$
Số bóng đèn	8	22	35	15

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

- A. $[2; 3; 5)$. B. $[3; 5; 5)$. C. $[5; 6; 5)$. D. $[6; 5; 8)$.

Câu 12: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

Tuổi thọ	$[2; 3; 5)$	$[3; 5; 5)$	$[5; 6; 5)$	$[6; 5; 8)$
Số bóng đèn	8	22	35	15

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là

- A. $[2; 3; 5)$. B. $[3; 5; 5)$. C. $[5; 6; 5)$. D. $[6; 5; 8)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Bảng sau cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 học sinh (đơn vị: cm) Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $R = 30$.
b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta Q = 7$.
c) Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm là $\bar{x} = 159$.
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $s \approx 6,42$.

Câu 2: Phòng bạn Hùng và bạn Vương làm thí nghiệm trồng cây. Mỗi bạn trồng 40 cây cần tây trong cốc, phần gốc của các cây khi bắt đầu trồng đều dài 4 cm. Bảng 1 và bảng 2 lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây (đơn vị: centimét) mà bạn Hùng và bạn Vương trồng sau 5 tuần.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[140; 145)$	2	2
$[145; 150)$	3	5
$[150; 155)$	5	10
$[155; 160)$	15	25
$[160; 165)$	10	35
$[165; 170)$	5	40
	$n = 40$	

Nhóm	Tần số
[20; 25)	2
[25; 30)	16
[30; 35)	20
[35; 40)	2
	$n = 40$

Bảng 1.

Nhóm	Tần số
[20; 25)	5
[25; 30)	9
[30; 35)	25
[35; 40)	1
	$n = 40$

Bảng 2.

- a) Chiều cao trung bình của mỗi cây do hai bạn Hùng và Vương trồng không bằng nhau.
- b) Khoảng biến thiên của cả hai mẫu số liệu trên là 20.
- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng 1 là 5,5.
- d) Chiều cao của các cây mà bạn Vương trồng đồng đều hơn các cây mà bạn Hùng trồng.

Câu 3: Điểm kiểm tra giữa học kì I môn Toán của 2 nhóm học sinh được cho trong 2 bảng sau:

Nhóm học sinh 1

Điểm	Tần số
[4;5)	1
[5;6)	2
[6;7)	4
[7;8)	6
[8;9)	3
[9;10]	2
	$n = 18$

Nhóm học sinh 2

Điểm	Tần số
[4;5)	1
[5;6)	1
[6;7)	3
[7;8)	9
[8;9)	3
[9;10]	1
	$n = 18$

Khi đó:

- a) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu đã cho ở hai bảng trên là 6.
- b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho ở bảng nhóm học sinh 1 xấp xỉ là 5,8.
- c) Điểm kiểm tra trung bình của hai nhóm học sinh trên là xấp xỉ bằng nhau.
- d) Điểm kiểm tra của nhóm học sinh 1 đồng đều hơn của nhóm học sinh 2.

Câu 4: Bảng sau thống kê tổng lượng mưa (đơn vị: mm) đo được vào tháng 7 từ năm 2002 đến 2021 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau.

341,4	187,1	242,2	522,9	251,4	432,2	200,7	388,6	258,4	288,5
298,1	413,5	413,5	332	421	475	400	305	520	147

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Cỡ mẫu là $n = 20$
- b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là $R = 357,9$ mm
- c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = 254,9$
- d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $\Delta_Q = 162,35$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho bảng số liệu về khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch từ một thửa ruộng như dưới đây.

rong (gam)	[70;80)	[80;90)	90;100)	100;110)	110;120)
	3	6	12	6	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

Câu 2: Bảng thống kê cân nặng của 50 quả xoài được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở nông trường như sau

Cân nặng (g)	0;290)	0;330)	0;370)	0;410)	0;450)
Số quả xoài	2	12	19	12	5

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 3: Bảng dưới đây cho biết chiều cao tổ 1 lớp 12A, 12B

cao	45;150)	50;155)	55;160)	60;165)	65;170)	70;175)
sinh 12A	3	2	1	4	2	1
sinh 12B	2	3	1	4	0	0

- a) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A, 12B
b) Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay tứ phân vị? Vì sao?

Câu 4: An tìm hiểu hàm lượng chất béo (đơn vị: g) có trong 100 g mỗi loại thực phẩm. Sau khi thu thập dữ liệu về 60 loại thực phẩm, An lập được bảng thống kê

lượng chất béo (g)	2;6)	6;10)	10;14)	14;18)	18;22)	22;26)
	2	6	10	13	16	13

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu?

Câu 5: Tổng lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm):

21,8	58,3	34,9	00,9	65,6	61,5	94,3	20,7	89,8	34,2
65,9	65,9	134	173	169	189	254	168	255	

- a) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	20;175)	175;230)	230;285)	285;340)
Số năm	?	?	?	?

- b) Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Câu 6: Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 40 học sinh nam lớp 12 ở một trường trung học phổ thông.

Nhóm	Tần số
[160;163)	8
[163;166)	10
[166;169)	12
[169;172)	8
[172;175)	2
	$n = 40$

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu?

-----HẾT-----

BÀI

10

PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Phần I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Một mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn bằng 3 thì có phương sai bằng

- A. $s^2 = \sqrt{3}$. B. $s^2 = 3$. C. $s^2 = 9$. D. $s^2 = 6$.

Câu 2: Một mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 25 thì có độ lệch chuẩn bằng

- A. 4. B. 5. C. 256. D. 50.

Câu 3: Khảo sát thời gian chơi thể thao trong một ngày của 42 học sinh được cho trong bảng sau (thời gian đơn vị phút) :

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Phương sai của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất là

- A. 598. B. 597. C. 2477,1. D. 256,2.

Câu 4: Nhiệt độ trong 55 ngày của một địa phương được cho trong bảng ghép lớp sau:

Nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	[19;22)	[22;25)	[25;28)	[28;31)	[31;34)	[34;37)
Số ngày	5	7	8	16	12	7

Phương sai của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nằm trong khoảng

- A. (17;19). B. (20;21). C. (19;20). D. (23;25).

Câu 5: Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu quần mới. Người phỏng vấn yêu cầu cho điểm mẫu quần đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình theo mẫu số liệu ghép nhóm trong đó có nhóm [70;80). Giá trị đại diện của nhóm này là

- A. 70. B. 75. C. 40. D. 80.

Câu 6: Số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 85 khách mua nước rửa chén tại một cửa hàng tiện ích được cho bằng bảng số liệu ghép nhóm trong đó có nhóm [80;90). Độ dài của nhóm này là

- A. 10. B. 60. C. 80. D. 90.

Câu 7: Một Vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 8: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. [14;15). B. [15;16). C. [16;17). D. [17;18).

Câu 9: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm của tứ phân vị thứ ba là

- A. [14;15). B. [15;16). C. [16;17). D. [17;18).

Câu 10: Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

- A. Khoảng biến thiên. B. Khoảng tứ phân vị. C. Phương sai. D. Độ lệch chuẩn.

Câu 11: Nếu thay đổi tất cả các tần số trong mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 4 thì số đặc trưng nào sau đây không thay đổi ?

- A. Khoảng biến thiên B. Khoảng tứ phân vị C. Phương sai D. Độ lệch chuẩn

Câu 12: Bảng bên dưới biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một nhà sách

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[40;50)	5	5
[50;60)	8	13
[60;70)	25	38
[70;80)	20	58
[80;90)	2	60
	$n = 60$	

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

- A. 65. B. 66. C. 60. D. 70.

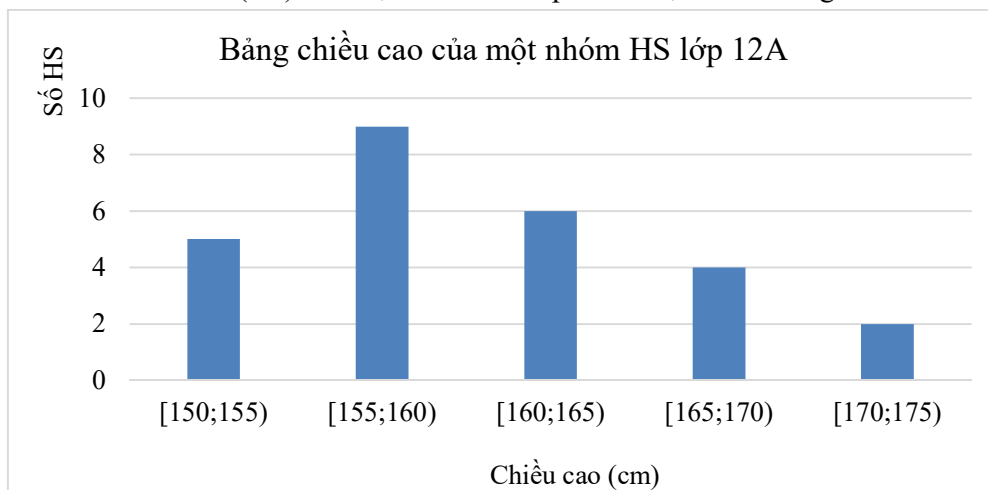
Phần II. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Khảo sát tuổi thọ của một loại bóng đèn được hai phân xưởng A và B cùng sản xuất cho ở bảng sau:

Tuổi thọ (tháng)	[24;27)	[27;30)	[30;33)	[33;36)	[36;39)
Phân xưởng A	4	8	10	6	2
Phân xưởng B	5	7	9	7	2

- a) Giá trị đại diện tuổi thọ bóng đèn của nhóm [27;30) là 28 tháng.
b) Khi phương sai của mẫu số liệu giảm 4 lần thì độ lệch chuẩn giảm 16 lần.
c) Tuổi thọ trung bình của bóng đèn mà hai phân xưởng sản xuất là bằng nhau.
d) Khi tuổi thọ trung bình của bóng đèn ở hai phân xưởng không quá chênh lệch, nếu độ lệch chuẩn càng nhỏ thì mẫu số liệu càng phân tán.

Câu 2: Khảo sát chiều cao (cm) của một nhóm HS lớp 12A được cho ở bảng dưới:



- a) Giá trị đại diện của nhóm chiều cao [165;170) là 167,5cm.
b) Nếu độ lệch chuẩn của mẫu số liệu tăng 4 lần thì phương sai của mẫu số liệu trên tăng 2 lần.
c) Sau một năm, khảo sát lại chiều cao của nhóm HS trên nhận được bảng số liệu chiều cao ghép nhóm không đổi. Khi đó, chiều cao trung bình của mẫu số liệu gốc tăng lên, nhưng chiều cao trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm không thay đổi.
d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu không phụ thuộc vào chiều cao trung bình của nhóm HS trên là $\frac{2085}{12}$.

Câu 3: Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2, Q_3 .

- a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng $Q_3 + Q_1 - Q_2$.

- b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
- c) Khoảng biến thiên được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng biến thiên càng nhỏ thì mẫu số liệu càng phân tán.
- d) Khoảng tứ phân vị được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Câu 4: Bác tài xế A và bác tài xế B thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mà hai bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

dài quãng đường (km)	;100)	0;150)	0;200)	0;250)	0;300)
ngày bác tài A lái xe					
ngày bác tài B lái xe					

- a) Khoảng biến thiên về độ dài quãng đường đi mỗi ngày của bác tài A và B ở mẫu số liệu trên bằng nhau.
- b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu về độ dài quãng đường mỗi ngày của bác tài A lớn hơn bác tài B.
- c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu về quãng đường mỗi ngày của bác tài B thuộc nhóm $[150; 200)$.
- d) Theo khoảng biến thiên thì độ dài quãng đường mỗi ngày của bác tài A phân tán hơn độ dài quãng đường mỗi ngày bác tài B.

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau:

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

Về trung bình, đầu tư vào lĩnh vực nào đem lại tiền lãi cao hơn?

Câu 2: Tốc độ của 20 xe hơi khi đi qua một trạm kiểm tra tốc độ (đơn vị: km/h) được thống kê lại như sau:

Tốc độ (km/h)	[42; 46)	[46; 50)	[50; 54)	[54; 58)	[58; 62)
Số xe	3	7	4	3	3

Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

Câu 3: Trong quá trình tập luyện chạy bộ để nâng cao sức khỏe, hai bạn An và Bình có cách tập luyện riêng được thống kê theo 1 tháng như bảng sau:

Số km Mỗi ngày	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số ngày An chạy	6	6	6	6	6
Số ngày Bình chạy	1	2	24	2	1

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu mỗi bạn. Có thể dựa vào độ lệch chuẩn để đánh giá mức độ luyện tập đề đạt của hai bạn không?

Câu 4: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về khối lượng (đơn vị: gram) của 30 củ khoai tây như sau:

Khối lượng	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110;120)
Tần số	3	6	12	6	3

Giá trị đại diện của nhóm $[90;100)$

Câu 5: Trong bài thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, bạn Minh tiến hành đo 12 lần, kết quả như sau:

Hiệu điện thế đo được (Vôn)	3,85; 3,90)	3,90; 3,95)	3,95; 4,00)	4,00; 4,05)
Số lần đo	2	3	5	2

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Câu 6: Thời gian chạy tập luyện cự li 100 m của một vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[10;10,4)	[0,4;10,8)	[0,8;11,2)	[11,2;11,6)	[11,6;12,0)
Số lần chạy	3	8	6	2	1

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

-----HẾT-----

ĐỀ ÔN TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. $[0; 20)$. B. $[20; 40)$. C. $[40; 60)$. D. $[60; 80)$.

Câu 2. Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 25. B. 30. C. 6. D. 69,8.

Câu 3. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 23,75. B. 27,5. C. 31,88. D. 8,125.

Câu 4. Trong dịp nghỉ hè bạn Lan rất thích đi bơi. Thời gian đi bơi mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Lan được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[30; 35)	[35; 40)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
Số ngày	3	6	4	8	4

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất Q_1 là

- A. $[30; 35)$. B. $[35; 40)$. C. $[45; 50)$. D. $[50; 55)$.

Câu 5. Khảo sát thời gian tập nghe nhạc trong ngày của học sinh lớp 12B thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	10	12	9	4

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba Q_3 là

- A. [20; 40). B. [40; 60). C. [60; 80). D. [80; 100).

Câu 6. Một nhóm học sinh thi nhau giải khối rubik 4×4 . Thời gian hoàn thành của nhóm học sinh được thống kê trong bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số học sinh	4	6	8	4	3

Tìm tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.

- A. $Q_1 = 10,75; Q_3 = 14,375$. B. $Q_1 = 11,0625; Q_3 = 14,375$.
C. $Q_1 = 10,75; Q_3 = 13,83$. D. $Q_1 = 10,85; Q_3 = 14,75$.

Câu 7. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 0, 9. B. 0, 975. C. 0, 5. D. 0, 575.

Câu 8. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	5; 7)	7; 9)	9; 11)	11; 13)	13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7; 9). B. [9; 11). C. [11; 13). D. [13; 15).

Câu 9. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong Bảng 18.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	4
[45 ; 50)	47,5	14
[50 ; 55)	52,5	8
[55 ; 60)	57,5	10
[60 ; 75)	62,5	6
[65 ; 70)	67,5	2
		$n = 44$

Bảng 18

Câu 10. Khảo sát chiều cao (đơn vị cm) của học sinh lớp 12A, ta thu được kết quả như sau:

Kết quả đo (cm)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh	6	10	14	5	5

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng nào sau đây:

- A. (5, 5; 6). B. (6; 6, 5). C. (6, 5; 7). D. (7; 7, 5).

Câu 11. Có bao nhiêu nhận xét đúng trong các nhận xét sau :

1. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn luôn bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
2. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.
3. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 12. Nhận xét nào sai trong các nhận xét sau :

1. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
2. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.
3. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
4. Khoảng tứ phân vị được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm.

A. Nhận xét 1. B. Nhận xét 2. C. Nhận xét 3. D. Nhận xét 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong một hội thao, thời gian chạy 200m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	10	30	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, em hãy xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Tần suất của nhóm vận động viên chạy trong khoảng thời gian từ 22 giây đến dưới 22,5 giây bằng 30%.
- b) Số trung vị của mẫu số liệu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2) bằng 22,67.
- c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu bằng $R = 2$.
- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2) bằng 0,28.

Câu 2. Bảng 1 biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$) của tỉnh Nghệ An tháng 5 năm 2024

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[29;31)	30	1	1
[31;33)	32	4	5
[33;35)	34	5	10
[35;37)	36	13	26
[37;39]	38	7	33
		$n = 30$	

Trong mỗi ý a), b), c), d) chọn đúng hoặc sai (làm tròn đến hàng phần trăm)

- a) Nhóm [31;33) có tần số bằng: 4
- b) Một của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là: 13
- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng: 2,92
- d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng: 4,57

Câu 3. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp cân nặng (đơn vị: kg) của các công nhân trong một công ty như sau:

Các lớp giá trị của X	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)	[56; 58)	[58; 60)	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	15	5	100

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tần suất của nhóm $[52; 54)$ là: 20%.
- b) Số trung vị của mẫu số liệu là: 54,909 .
- c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là: 10.
- d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là: 4,35 .

Câu 4. Cho bảng số liệu dưới đây về thời gian (phút) tập thể dục buổi sáng của hai bạn Bình và Chi trong 30 ngày.

Thời gian	$[15; 20)$	$[20; 25)$	$[25; 30)$	$[30; 35)$	$[35; 40)$
Bạn Bình	5	8	10	4	3
Bạn Chi	10	10	5	3	2

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục của Chi là 25 (phút).
- b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bạn Bình là:

$$Q_1 = \frac{354}{16}$$

- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bạn Chi là

- d) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bạn Bình là $\frac{314}{9}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Bảng sau đây cho biết chiều cao của học sinh lớp 5A

Chiều cao (cm)	Tần số
$[85; 90)$	1
$[90; 95)$	4
$[95; 100)$	8
$[100; 105)$	12
$[105; 110)$	3
$[110; 115)$	2

Tìm k hoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 5A.

Câu 2. Bảng sau đây cho biết chiều cao của học sinh lớp 5A

Chiều cao (cm)	Tần số
$[85; 90)$	1
$[90; 95)$	4
$[95; 100)$	8
$[100; 105)$	12
$[105; 110)$	3
$[110; 115)$	2

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 5A.

Câu 3. Số người xem trong 60 buổi chiếu phim của một rạp chiếu phim nhỏ

Lớp người xem	Tần số
$[0, 10)$	5

[10, 20)	9
[20, 30)	11
[30, 40)	15
[40, 50)	12
[50, 60]	8
Cộng	60

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 4. Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19;19,5)	[19,5;20)	[20;20,5)	[20,5;21)	[21;21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 5. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: Centimet) của 43 học sinh trong một lớp học khối 11 của một trường phổ thông

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[150;155)	152,5	5
[155;160)	157,5	10
[160;165)	162,5	12
[165;170)	167,5	9
[170;175)	172,5	4
[175;180)	177,5	3
		$n = 43$

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 6. Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao (đơn vị: Centimet) của 43 học sinh trong một lớp học khối 11 của một trường phổ thông

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[150;155)	152,5	5
[155;160)	157,5	10
[160;165)	162,5	12
[165;170)	167,5	9
[170;175)	172,5	4
[175;180)	177,5	3
		$n = 43$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

-----HẾT-----

I. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Chú ý. Trường hợp $K = [a; b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$$

Định nghĩa

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khi đó:

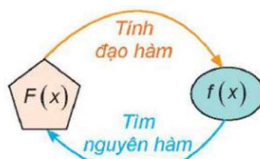
- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ;
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho

$$G(x) = F(x) + C \text{ với mọi } x \in K.$$

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) là **họ các nguyên hàm** của $f(x)$ trên K , kí hiệu bởi $\int f(x)dx$.

Chú ý:

- Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K , ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)dx = F(x) + C$, C là hằng số.
- Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K , ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định



Hình 4.2. Mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số khác 0

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx (k \neq 0).$$

Nguyên hàm của một tổng

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$$

Ta tổng kết lại bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp như sau.

$\int 0 dx = C$	$\int 1 dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Khẳng định nào sau đây *sai*?

- A. $\int 0 dx = C$. B. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$. C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 dx$.

- A. $F(x) = \pi^2 x + C$. B. $F(x) = 2\pi x + C$.
C. $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$. D. $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Câu 3: Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b) dx$ bằng

- A. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$. B. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a+b} F(ax+b) + C$.
C. $\int f(ax+b) dx = F(ax+b) + C$. D. $\int f(ax+b) dx = aF(ax+b) + C$.

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- A. $x^3 + C$. B. $\frac{x^3}{3} + x + C$. C. $6x + C$. D. $x^3 + x + C$.

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$.

B. $F(x) = x^3 + x + C$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

D. $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Câu 6: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

A. $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$.

B. $\frac{-2}{x^2} - 2x + C$.

C. $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$.

D. $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$.

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e \cdot x^e + 4$ là

A. 101376.

B. $e^2 \cdot x^{e-1} + C$.

C. $\frac{x^{e+1}}{e+1} + 4x + C$.

D. $\frac{e \cdot x^{e+1}}{e+1} + 4x + C$.

Câu 8: Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x+1)^5$?

A. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18} + 8$.

B. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18} - 2$.

C. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18}$.

D. $F(x) = \frac{(3x+1)^6}{6}$.

Câu 9: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$.

B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

D. $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Câu 10: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2018}$, ($x \in \mathbb{R}$) là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x) = 2017 \cdot x^{2018} + C$, ($C \in \mathbb{R}$).

B. $F(x) = \frac{x^{2019}}{2019} + C$, ($C \in \mathbb{R}$).

C. $F(x) = x^{2019} + C$, ($C \in \mathbb{R}$).

D. $F(x) = 2018 \cdot x^{2017} + C$, ($C \in \mathbb{R}$).

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 4.

B. $\frac{13}{3}$.

C. 2.

D. $\frac{11}{3}$.

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$ là

A. $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x$.

B. $x^7 + \ln|x| + \frac{1}{x} - 2x + C$.

C. $x^7 + \ln x + \frac{1}{x} - 2x + C$.

D. $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x + C$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C$.

b) Một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \frac{2^x - 1}{\ln 2}$.

c) Nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

d) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(-2) = 3$. Khi đó

$$F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 3 - \frac{1}{4 \ln 2}.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

b) $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\int \sin^2 x dx}{\int \cos^2 x dx}$

c) $F(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

d) $\int \tan^2 x dx = x - \tan x + C$.

Câu 3: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc tại thời điểm t ($t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên) cho bởi $v(t) = 120 - 9,8t$ (m/s). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là $h(t) = 120t + 4,9t^2 - 3$.

b) Độ cao của viên đạn tại thời điểm $t = 2$ (s) là $h(2) = 256,6$ (m).

c) Độ cao của viên đạn tại thời điểm $t = 3$ (s) khi đó $h(3) = 406,1$ (m).

d) Độ cao của viên đạn khi nó đạt độ cao lớn nhất là $h(t) = 2024,1$ (m).

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

a) $\int f(x) dx = 2x + \ln|x| + C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Khi đó $F(x) = 2x + \ln|x| + 1$.

c) $\int f'(2x) dx = \frac{-1}{4x} + C$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2) = 1$ và $G(5) + G(-5) = 0$. Khi đó tìm được $G(-10) = a \ln 10 + b \ln 5 + c \ln 2 + d$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Khi đó $a + b + c + d = -19$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}$. Tính $a + b + c$

Câu 2: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị của $F(-1) + 2F(2)$

Câu 4: Một gia đình sản xuất chiếu cói ở Nga Sơn mỗi ngày sản xuất được x chiếc chiếu ($0 \leq x \leq 20$). Chi phí biên để sản xuất x chiếc chiếu (tính bằng nghìn đồng) cho bởi hàm số sau: $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử gia đình này bán hết chiếu mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng / chiếc chiếu. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được?

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

Câu 6. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc tại thời điểm t cho bởi công thức $v(t) = 100 - 9,8t$ (m/s), ($t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tìm độ cao (tính theo km) của viên đạn so với mặt đất ở thời điểm 1 giây sau khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm).

-----HẾT-----

BÀI

12

TÍCH PHÂN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong

Hình thang cong

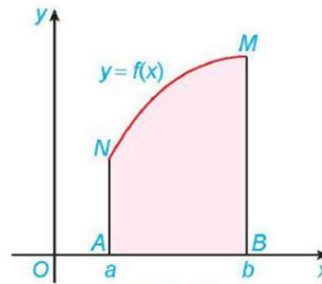
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là một hình thang cong.

Định lý 1

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ

thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên

hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.



Hình 4.7

b) Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx.$$

• Chú ý 1:

Tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$

• Chú ý 2:

a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)|_a^b$.

Như vậy: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

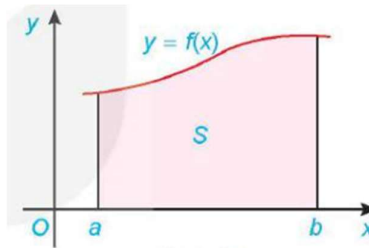
b) Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

c. Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Vậy

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Hình 4.9

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Tính chất của tích phân:

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có

- 1) $\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$;
- 2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- 3) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;
- 4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ($a < c < b$).

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)dx$ bằng

A. 5.

B. 9.

C. 6.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 2: Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x))dx$ bằng

A. $\frac{23}{4}$.

B. 7.

C. 9.

D. $\frac{15}{4}$.

Câu 3: Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. -2.

D. 3.

Câu 4: Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Câu 5: Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K ?

A. $\int_a^b [f(x) + 2g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + 2\int_a^b g(x)dx$.

B. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

C. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$.

D. $\int_a^b f^2(x)dx = \left[\int_a^b f(x)dx \right]^2$.

Câu 6: Cho $\int_0^1 f(x)dx = -1$; $\int_0^3 f(x)dx = 5$. Tính $\int_1^3 f(x)dx$

A. 1.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x)dx$ bằng

A. 1.

B. 7.

C. -9.

D. 9.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx = 10$, $\int_3^4 f(x)dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 4.

B. 7.

C. 3.

D. 6.

Câu 9: Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 7$.

B. $1 + \frac{1}{2}\ln 7$.

C. $\ln 3$.

D. $1 + \ln 7$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$, $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính

$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 7$.

D. $P = -6$.

Câu 11: Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ đồng thời

$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$.

A. 9.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 12: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

A. $I = 7$

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$

C. $I = 3$

D. $I = 5 + \pi$

Câu 13: Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$

A. 13.

B. 27.

C. -11.

D. 3.

Câu 14: Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx$ bằng

A. 12.

B. 9.

C. 5.

D. 6.

Câu 15: Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3, \int_0^3 f(x) dx = 5$.

a) $\int_2^0 f(x) dx = 3$.

b) $\int_2^3 f(x) dx = 2$.

c) $\int_0^2 (f(x) - 2x) dx = -1$.

d) Nếu $f(2) = 10$ thì $\int_0^2 x \cdot f'(x) dx = 13$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 - 3$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) Ta có $\int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) - F(-1)$.

b) Nếu $F(0) = 1$ thì $F(2) = 12$.

c) Nếu $\int_0^2 af(x) dx = 32$ thì $a = 6$.

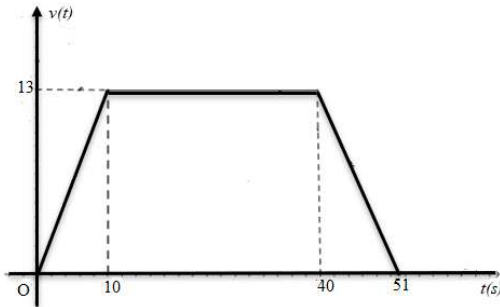
d) Cho $g(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số $e^{3x} \cdot f(x)$, nếu $\int_0^2 e^{3x} f(x) dx = a + \frac{b \cdot e^6}{27}$

. Khi đó: $27a - b = -2$.

Câu 3: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s), trong đó là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh.

- a) Gia tốc tức thời của chuyển động này là $5(m/s^2)$.
- b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe máy dừng hẳn là 2 giây.
- c) Quãng đường xe máy đi được sau 0,5 giây kể từ lúc đạp phanh là 6 m.
- d) Để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng 11 m (giả sử ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên).

Câu 4: Tốc độ di chuyển $v(t)$ của một ca nô trong khoảng thời gian 51 giây được xác định như hình vẽ



- a) Tại thời điểm $t = 10(s)$ vận tốc của ca nô là $13(m/s)$.
- b) Từ thời điểm $40(s)$ đến $51(s)$ vận tốc của ca nô tăng.
- c) Quãng đường ca nô đi được trong $10(s)$ đầu tiên là $\sqrt{269}(m)$.
- d) Quãng đường ca nô đi được trong $51(s)$ đầu tiên là $526,5(m)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

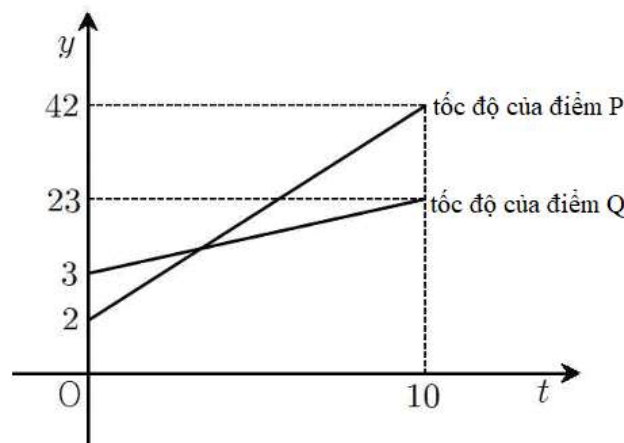
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$; $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

Câu 2: Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ và

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6. \text{ Tính } I = \int_1^3 [f(x) + g(x)]dx.$$

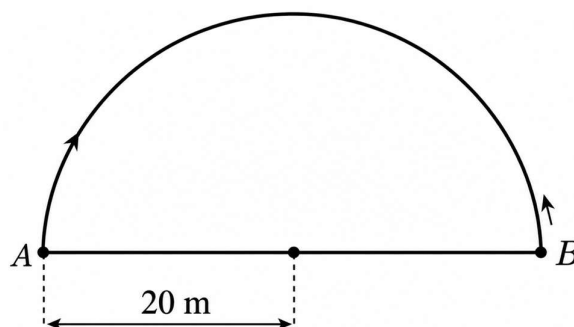
Câu 3. Trên một đường tròn có chu vi 26 cm, tại một điểm C có hai điểm P, Q xuất phát đồng thời và chuyển động trên đường tròn theo hai chiều ngược nhau. Đồ thị cho biết vận tốc của P và Q theo thời gian t (giây). Tìm số lần P, Q gặp nhau trong 10 giây đầu (sau khi xuất phát)



Câu 4: Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Giá trị của tham số m là

Câu 5: Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 3t (\text{m/s}^2)$. Hỏi quãng đường của xe đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc?

Câu 6. Trên một đường chạy hình nửa đường tròn bán kính 20 m , một vận động viên xuất phát từ điểm A , chạy dọc theo cung AB đến điểm B với vận tốc không đổi 2 m/s . Mỗi khi đến A hoặc B , vận động viên lập tức đổi chiều và tiếp tục chạy với cùng vận tốc. Gọi $K(t)$ là độ dài cung từ vị trí của vận động viên tại thời điểm t đến điểm B , tính theo mét. Khi đó ta tính được $I = \int_0^{10\pi} K(t)K(t+5\pi)dt = T \cdot 10^2 \pi^3$ (với T là số nguyên dương). Tìm T .



HẾT

BÀI

13

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tính diện tích hình phẳng.

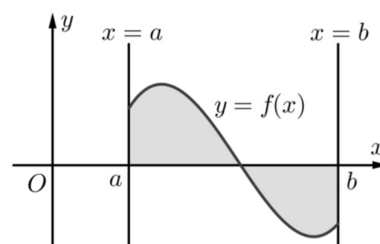
Loại 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng

$x = a, x = b$

❖ Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

($a < b$) được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$



Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì:

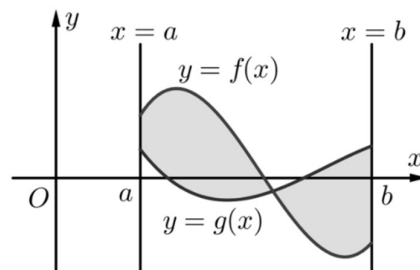
$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a; b)$ thì công thức trên vẫn đúng.

Loại 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

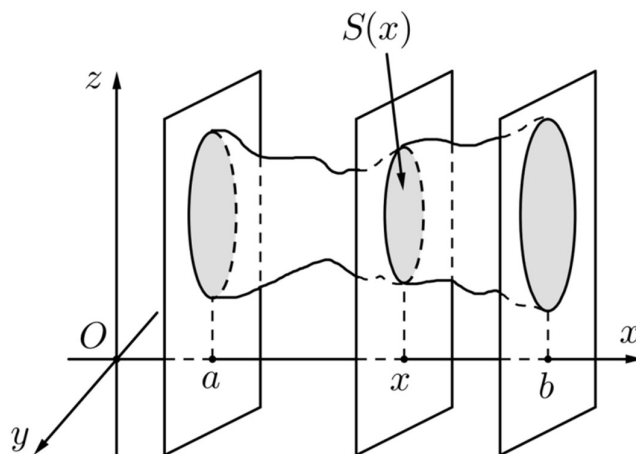
❖ Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$, được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



2. Tính thể tích hình khối

❖ Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$ và $x = b$. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x với $(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$.



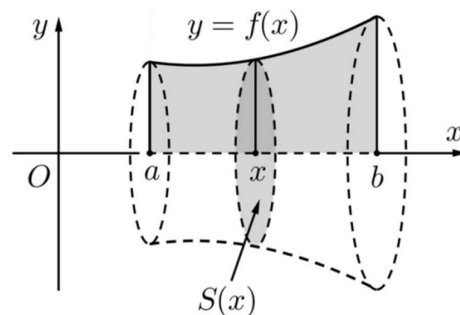
Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bằng công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a; b]$ thì $V = (b - a)S$.

❖ Thể tích khối tròn xoay

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Quay D xung quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là khối tròn xoay. Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a; b]$, ta được



mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = \pi f^2(x)$. Vậy khối tròn xoay có thể tích là:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

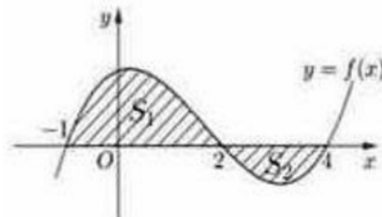
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đồ thị là (C) . Diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b [f(x)]^2 dx$. B. $S = \int_a^b |f(x)| dx$. C. $S = \int_a^b f(x) dx$. D. $S = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3x^2$, $y = -2$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

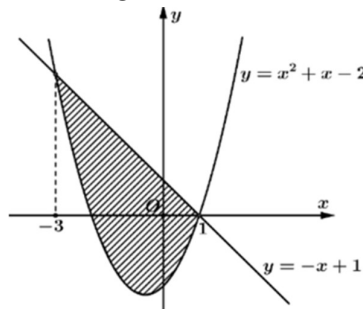
A. $S = \int_0^1 (3x^2 + 2) dx$ B. $S = \int_0^1 (3x^2 - 2) dx$. C. $S = \pi \int_0^1 (3x^2 + 2)^2 dx$. D. $S = \pi \int_0^1 (3x^2 + 2) dx$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng phần hình phẳng giới hạn bởi S_1 và S_2 (xem hình vẽ dưới đây) có diện tích lần lượt bằng 7 và 2. Tích phân $\int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng



A. 9. B. -5. C. -9. D. 5.

Câu 4. Diện tích phần gạch sọc trong hình vẽ bằng:

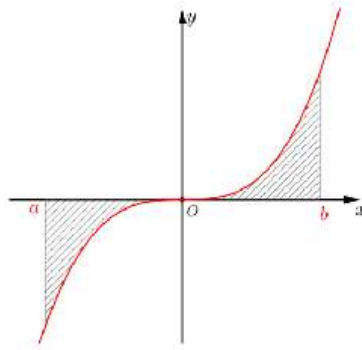


A. $\int_{-3}^1 |-x^2 - 2x - 3| dx$. B. $\int_{-3}^1 (x^2 - 2x - 3) dx$.
C. $\int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx$. D. $\int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = -1 + 2x + 3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có giá trị bằng

A. $-\frac{16}{27}$ B. $\frac{16}{27}$ C. $-\frac{32}{27}$. D. $\frac{32}{27}$.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Chọn khẳng định đúng?

A. $S_D = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$.

C. $S_D = -\int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$.

D. $S_D = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[a; b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích là:

A. $V = \pi \int_a^b |f(x)|dx$.

B. $V = \pi^2 \int_a^b f(x)dx$.

C. $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

D. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 8. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{e^x - x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox là

A. $\pi \left(e^2 - e - \frac{3}{2} \right)$.

B. $e^2 - e - \frac{5}{2}$.

C. $\pi \left(e^2 - e - \frac{5}{2} \right)$.

D. $e^2 - e - \frac{3}{2}$.

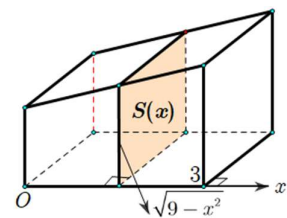
Câu 9. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x , $(0 \leq x \leq 3)$ ta được mặt cắt là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9 - x^2}$ (được mô hình hóa bởi hình vẽ bên dưới). Thể tích của vật thể đó bằng

A. 171π .

B. 171.

C. 18π .

D. 18.



Câu 10. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^5 (x^2 + 3)dx$.

B. $V = \pi \int_0^5 (x^2 + 3)^2 dx$.

C. $V = \int_0^5 (x^2 + 3)^2 dx$.

D. $V = \pi \int_0^5 (x^2 + 3)dx$.

Câu 11. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. 20 m.

B. 30 m.

C. 10 m.

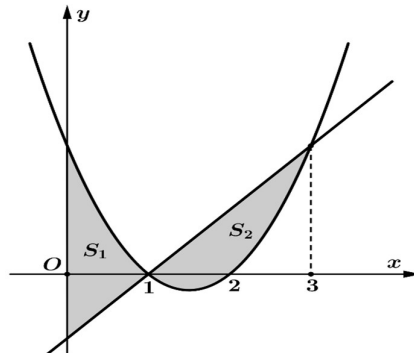
D. 40 m.

Câu 12. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s), ($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0 .

- A. $v_0 = 35 m/s$. B. $v_0 = 25 m/s$. C. $v_0 = 10 m/s$. D. $v_0 = 20 m/s$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ và $S_1; S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



Xét tính **đúng sai** của các khẳng định sau:

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ là

$$\int_0^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

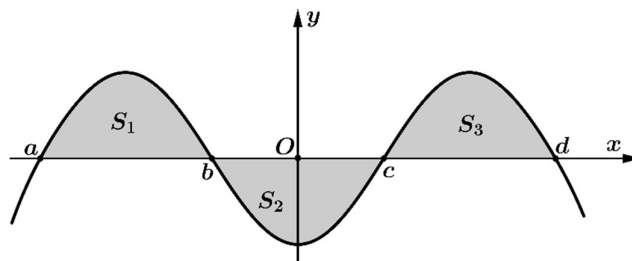
b) $S_1 = \frac{4}{3}$

c) $S_1 = S_2$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$; $y = x - 1$; $x = 0$; $x = 3$ là

$$\int_0^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = 1.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a, b, c, d , đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính **đúng sai** của các khẳng định sau:

a) $S_1 = \int_a^b f(x) dx$

$$\text{b) } S_2 = -\int_c^b |f(x)| dx$$

$$\text{c) } S_3 = -\int_c^d f(x) dx$$

$$\text{d) } S_{(H)} = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

Câu 3. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi xe ô tô cách điểm nhập làn 200m, tốc độ của ô tô là 36 km/h . Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b, (a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$ trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc đó trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180m.

b) Giá trị của $b = 10$.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc

được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t) dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h .

Câu 4. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

d) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

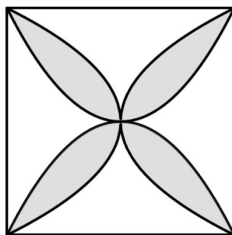
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 m/s thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$ ($0 \leq t \leq 4$). Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian kể từ khi hãm phanh đến khi dừng hẳn.

Câu 2. Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên của nhà máy được ước lượng bởi công thức $C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2, 0 \leq x \leq 150$. Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

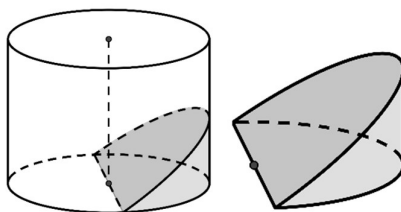
Câu 4. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên).



Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch.

Câu 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{5-x}, x \leq 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 6. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Kí hiệu V là thể tích của hình nêm. Tính V (cm³).

-----HẾT-----

BÀI

14

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

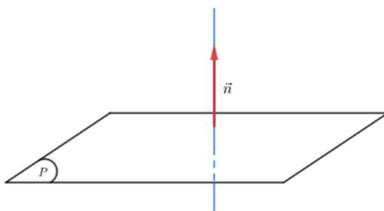
A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. VECTƠ PHÁP TUYẾN. CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG

a. Vectơ pháp tuyến

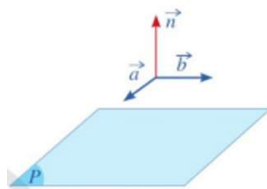
Cho mặt phẳng (P) . Nếu vector $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ được gọi là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



Nhận xét: Nếu $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng đó.

b. Cặp vector chỉ phương

Cho mặt phẳng (P) . Hai vector không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) được gọi là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (P) .



Nếu hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (P) thì

$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mỗi mặt phẳng (P) có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.

- Ngược lại, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, đều xác định một mặt phẳng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0 (A, B, C \text{ không đồng thời bằng } 0)$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng. Hệ số D gọi là hệ số tự do của phương trình tổng quát.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh được rằng nếu mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là

$Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, thì vector $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG BIẾT MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN

a. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vector pháp tuyến

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là:

$$(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $(P): Ax + By + Cz + D = 0$; $(D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$.

b. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vector chỉ phương

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ có cặp vector chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Bước 2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến.

c. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $H(a_1; b_1; c_1), I(a_2; b_2; c_2), K(a_3; b_3; c_3)$ không thẳng hàng, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (P) là:

$$\overrightarrow{HI} = (a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1), \overrightarrow{HK} = (a_3 - a_1; b_3 - b_1; c_3 - c_1).$$

Bước 2. Tìm $\vec{n} = [\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HK}]$.

Bước 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(a_1; b_1; c_1)$ nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến.

Chú ý: Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Phương trình đó còn được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

4. ĐIỀU KIỆN SONG SONG, VUÔNG GÓC CỦA HAI MẶT PHẪNG, GÓC CỦA HAI MẶT PHẪNG

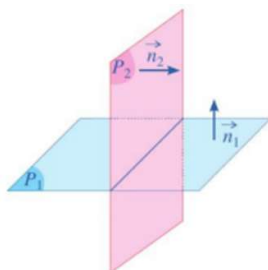
a. Điều kiện song song của hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Gọi $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ lần lượt là vector pháp tuyến của hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$.

Khi đó: $(P_1) // (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$.

b. Điều kiện vuông góc của hai mặt phẳng



Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó: $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

5. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 > 0$) được

tính theo công thức:
$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có véc tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 2)$ B. $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2)$ C. $\vec{n}_\alpha = (2; 2; 4)$ D. $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 1)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-5} = 1$ có véc tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_\alpha = (15; 10; -6)$ B. $\vec{n}_\alpha = (2; 3; 5)$ C. $\vec{n}_\alpha = (15; 10; 6)$ D. $\vec{n}_\alpha = (2; 3; -5)$

Câu 3: Khoảng cách từ $A(0; 2; 1)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ bằng:

- A. $\frac{6}{\sqrt{14}}$ B. 6 C. 4 D. $\frac{4}{\sqrt{14}}$

Câu 4: Khoảng cách từ $M(1; -1; -2)$ đến mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$ bằng:

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{\sqrt{7}}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\frac{2}{7}$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho là

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 4

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2z + 2 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $B(4; 2; 1)$ B. $A(1; 2; 4)$ C. $D(2; 1; 4)$ D. $C(2; 4; -1)$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 4 = 0$; $(Q): 5x - 3y - 2z - 7 = 0$

. Vị trí tương đối của (P) & (Q) là

- A. Song song. B. Cắt nhưng không vuông góc.
C. Vuông góc. D. Trùng nhau.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là

- A. $2x - y = 0$ B. $x + y - z = 0$ C. $3y - 2z = 0$ D. $3x - z = 0$ vô số.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 12 = 0$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

- A. $(0; 4; 0)$ B. $(0; 6; 0)$ C. $(0; 3; 0)$ D. $(0; -4; 0)$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -3; 1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

- A. $z = 1$. B. $z = 2$. C. $z = -3$. D. $z = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 1 = 0$.

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

- A. $2x - 2y + 4z - 21 = 0$. B. $x - 2z + 1 = 0$
C. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$. D. $3x - 2y + z + 12 = 0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và song song với CD .

- A. $4x - 5y + z + 24 = 0$. B. $x - 2z + 1 = 0$
C. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$. D. $10x + 9y + 5z + 74 = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1; 1; 1)$.
b) Phương trình mặt phẳng (P) là $x + y - z + 1 = 0$.
c) Mặt phẳng (P) cắt trục Ox tại điểm $M(-1; 0; 0)$.
d) Điểm $N(1; -2; 0)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$ và ba điểm A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; 3)$ lên các trục tọa độ. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(6; 3; 2)$.
b) Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$.
c) Điểm $M(3; 0; -2)$ thuộc mặt phẳng (P) .
d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{6}{7}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và hai điểm

$A(1; -1; 2), B(2; 1; 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $(3; -2; -1)$.
b) Phương trình mặt phẳng (Q) là $3x - 2y - z + 3 = 0$.
c) Điểm $M(3; 1; 2)$ không thuộc mặt phẳng (Q) .

d) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(R): 6x - 4y - 2z - 6 = 0$.

Câu 4: Mặt phẳng (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng:

$(P): x + y + z + 2 = 0; (Q): 2x - y + z - 4 = 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.

b) Mặt phẳng (α) có phương trình là: $2x + y - 3z - 13 = 0$.

c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $B(2;0;0)$.

d) Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): 4x + 2y - 6z - 3 = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;-3)$ và chứa trục Ox có dạng

$ax + 3y + cz + d = 0$. Tính $T = 2a + 3c - d$.

Câu 2: Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 15 = 0$ và cách điểm

$A(2;1;1)$ một khoảng bằng 5 có dạng $ax + by + 2z + d = 0$ với d là một số dương. Tính giá trị $T = a + b - 2d$.

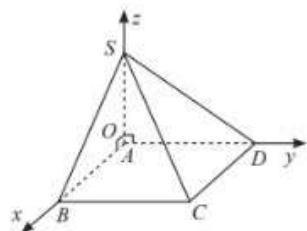
Câu 3: Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P): x - 3y + 4z + 5 = 0$ và cách đều 2

điểm $A(3;-1;2)$ và $B(2;0;-1)$ có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + 2c + 3d$.

Câu 4: Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $C(2;1;0); D(1;4;1)$ và cách đều 2 điểm $A(1;0;2)$

và $B(1;2;-3)$ có dạng $x + by + cz + d = 0$ với b là một số nguyên. Tính $5b + c + d$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy; tứ giác $ABCD$ là hình vuông; $SA = AB = 3$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, phương trình mặt phẳng (SBC) có dạng: $x + by + cz + d = 0$. Tính $b^2 + c^2 + d^2$.



Câu 6: Trên thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z + 2 = 0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng (P) . Biết rằng phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax + 2y + bz + c = 0$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng bao nhiêu?



-----HẾT-----

BÀI

15

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

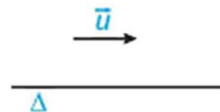
A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

a) Vector chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa: Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .



Chú ý: Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vector chỉ phương.

Nếu $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vector chỉ phương của Δ .

b) Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

Hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 được gọi là phương trình tham số của Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Nếu vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số khác 0 thì $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1; y_1; z_1)$,

$A_2(x_2; y_2; z_2)$ và tương ứng có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó:

$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \notin \Delta_2$.

$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1 \in \Delta_2$.

Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \perp [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0 \end{cases}$.

Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \cdot [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq 0$.

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

B

BÀI TẬP

Thí nghiệm: Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 4; 5)$ và $B(-4; 2; -3)$?

A. $\vec{u}_4 = (-3; 1; 4)$. B. $\vec{u}_3 = (3; 1; 4)$. C. $\vec{u}_1 = (4; 8; 1)$. D. $\vec{u}_2 = (3; 4; 2)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{2x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{-z+2}{1}$. Một vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là:

A. $\vec{u} = (1; 3; -1)$. B. $\vec{u} = (1; -3; 1)$. C. $\vec{u} = (2; 3; -1)$. D. $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm vector chỉ phương của đường thẳng d là đường vuông

góc chung của hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

A. $\vec{u} = (1; 2; -2)$. B. $\vec{u} = (1; 2; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (1; 0; -1)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 5 + t \\ z = 3t \end{cases}$

A. $P(-3; -5; 0)$. B. $Q(3; 5; 3)$. C. $M(-2; 1; 3)$. D. $N(-3; 5; 0)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+3}{5}$ B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$

C. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5}$ D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(2; -1; 2)$ và nhận véc tơ $\vec{u} = (-1; 2; -1)$ làm véc tơ chỉ phương có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$. B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$. D. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-4}$ và

$\Delta_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\Delta_1 // \Delta_2$. B. $\Delta_1 \perp \Delta_2$. C. $\Delta_1 \equiv \Delta_2$. D. Hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm giao điểm của 2 hai đường thẳng d và d' , biết

phương trình tham số của 2 đường thẳng lần lượt là: $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -2 + t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$

- A. $M(0;1;-4)$ B. $M(0;1;4)$ C. $M(0;-1;4)$ D. $M(0;-1;-4)$

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$.

- A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 6 = 0$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời Δ vuông góc và cắt d có

phương trình tham số là

- A. $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $Q(3;2;0)$ B. $N(5;1;-1)$ C. $A(1;3;1)$ D. $P(0;1;2)$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;3)$

- A. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$

- a) Vectơ $\vec{u} = (2;3;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
 b) Vectơ $\vec{u}_1 = (-4;-6;2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
 c) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(9;10;0)$.

d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{-1}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 2t \\ z = -3 \end{cases}$.

a) Điểm $M(2; 2; -3)$ thuộc đường thẳng d .

b) Khi $t = -2$ đường thẳng d đi qua điểm $A(12; -4; -3)$.

c) Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (-5; 2; 0)$ là một vector chỉ phương.

d) Điểm $N(7; -2; 3)$ không nằm trên đường thẳng d .

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{1}$ và đường thẳng

$$\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-1}.$$

a) Đường thẳng d qua điểm $M(1; 2; -4)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

b) Đường thẳng Δ qua điểm $N(-5; 2; -2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ và đường thẳng Δ có phương trình

$$\text{tham số } d : \begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = -t' \\ z = -2 - t' \end{cases}.$$

d) Đường thẳng d và đường thẳng Δ vuông góc và cắt nhau.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

a) Điểm $M(1; 2; -1)$ thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d là: $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

d) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là: $H(3; 1; 0)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 2; -4)$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi

H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1 . Đường thẳng AH có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a - b + c$ bằng

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox , Oy , Oz là B , C , D . Gọi H là trực tâm tam giác BCD . Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\frac{x}{a} = \frac{y}{-b} = \frac{z}{-c}$. Khi đó $a + b + c$ bằng

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng

$(\alpha): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Điểm $A(a; b; c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a + b - c$?

Câu 4: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8; -19; 6m + 4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để vận động viên có bắn trúng hồng tâm.



Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2; 1; 5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; -2; 6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M . Gọi tọa độ $M(a; b; c)$. Tính $a + 3b + c$.



Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng

$(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng. Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x-1}{a} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a, b, c, d chia hết cho 3.

-----HẾT-----

BÀI

16

CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c), \vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

2. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

$$\sin(\Delta; (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ tương ứng có các vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) , kí hiệu là $((P); (Q))$, được tính theo công thức:

$$\cos((P); (Q)) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5)$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính cosin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. B. $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

C. $\cos(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. D. $\cos(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(\frac{8}{3}; 0; 0\right)$, $B(0; 2; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{8}{5}\right)$ và $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$. Khi

đó góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .

A. 30° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 0° .

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P): 3y - z + 5 = 0$ bằng

A. 90° .

B. 60° .

C. 0° .

D. 30° .

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = -2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$.

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{4}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, đường băng của một sân bay thuộc mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay sau khi chạy đà trên đường băng đó đã cất cánh tại điểm $A(1; 2; 0)$ với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian

ngắn ban đầu, vectơ vận tốc $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Trong khoảng thời gian ngắn nói trên, góc cất cánh của máy bay bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = 1$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = 1$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{30}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{30}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và

$$\Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-2}.$$

- a) Vectơ $\vec{u}_1 = (2, 1, 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .
 b) Vectơ $\vec{u}_2 = (-1, 2, 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .
 c) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 xấp xỉ 64° .
 d) Góc giữa đường thẳng Δ_1 và trục Ox xấp xỉ 40° .

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + z - 4 = 0$.

- a) $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .
 b) $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ .
 c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .
 d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1; 4; 1)$.

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho các đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $\Delta' : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$ và d là

giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x + 2y - z + 1 = 0$ và $(Q) : 2x + 3z - 2 = 0$.

- a) Gọi $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó

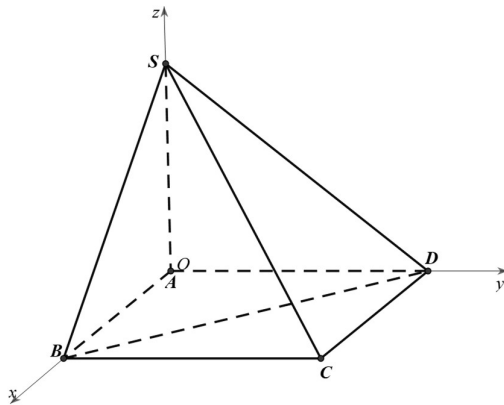
$$\cos(\Delta, \Delta') = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}.$$

- b) Cosin góc giữa hai đường thẳng Δ và trục Ox bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

c) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{238}}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng d và Δ' bằng 90° .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $SA = 1$ và SA vuông góc với mặt đáy. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:



a) Tọa độ các điểm B, C là $B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0)$.

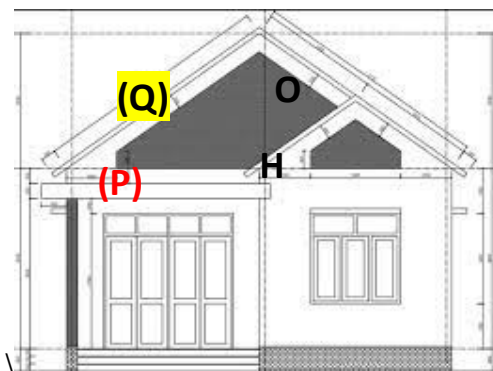
b) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng SB là $\vec{u} = (1; -1; 1)$.

c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) là $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BD và (SBC) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

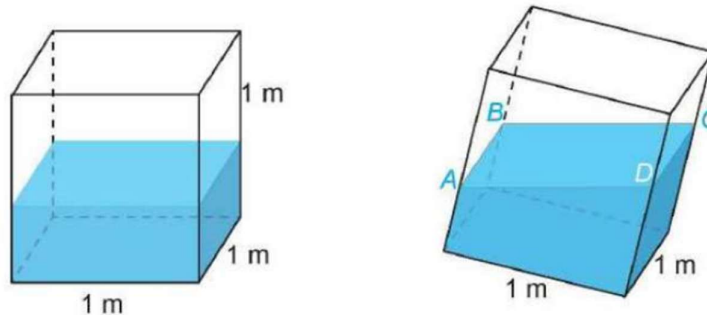
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 5, đáy là tam giác vuông cân tại A , cạnh bằng 3. M là trung điểm của BC . Góc tạo bởi đường thẳng $A'M$ và AB bằng a° (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Tính giá trị của a .

Câu 3. Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, C đến đáy bể tương ứng là 25 cm, 75 cm.



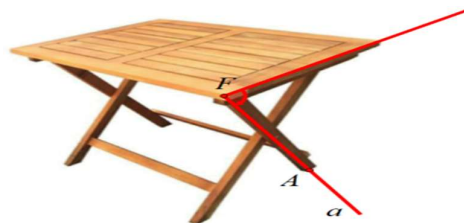
Tìm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy bể khi góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mỗi trục tính theo km) vào mỗi sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A\left(7; -4; \frac{4}{5}\right)$ sẽ hạ cánh ở vị trí $B(7; 11; 0)$ trên đường băng. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 5. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất

thuộc đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ cắt mặt bàn $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F . Độ dài chân bàn

$FA = 40\sqrt{3} \text{ cm}$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm ?



Câu 6. Một kỹ sư X thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh dầm sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$, điểm A là nóc ngôi, 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh dầm như hình vẽ (các thanh dầm dài như nhau) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF = 20 \text{ m}$, khi đó tỉ số độ dài của thanh dầm AF và khoảng cách BF bằng bao nhiêu?



-----HẾT-----

BÀI

17

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Mặt cầu (S) tâm I(a; b; c) bán kính R là tập hợp các điểm M(x; y; z) sao cho:

$$IM = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

2. Dạng 1: Phương trình chính tắc

Mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

3. Dạng 2: Phương trình tổng quát

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

- Điều kiện để là mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- Tâm: $I(a; b; c)$. Bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

- Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

- Áp dụng công thức tính thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. Vị trí tương đối của mặt cầu với đường thẳng:

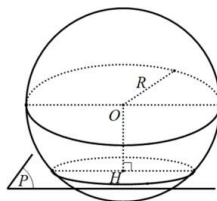
Cho mặt cầu (C) tâm I(a; b; c), bán kính R và đường thẳng (Δ) .

Tính: $d(I, \Delta)$. Nếu: $d(I, \Delta) > R : (\Delta) \cap (C) = \emptyset$;

$d(I, \Delta) < R : (\Delta) \cap (C)$ tại 2 điểm phân biệt;

$d(I, \Delta) = R : (\Delta), (C)$ tiếp xúc nhau, (Δ) gọi là tiếp tuyến của mặt cầu.

6. Vị trí tương đối của mặt cầu với mặt phẳng:



Cho mặt cầu (C) tâm I(a; b; c), bán kính R và mặt phẳng $(P) : Ax + By + Cz + D = 0$.

Tính: $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Nếu:

a) $d(I, (P)) > R : (P) \cap (C) = \emptyset$;

b) $d(I, (P)) < R : (P) \cap (C)$ là đường tròn $(H; r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))})$

với H là hình chiếu của I trên (P).

Vậy đường tròn trong không gian có phương trình:
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

c) $d(I, (P)) = R : (P), (C)$ tiếp xúc nhau tại điểm H là hình chiếu của I trên (P), (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (C).

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

- A. $2x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 8 = 0$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = -9$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 20 = 0$. D. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 16$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau, phương trình nào **không phải** là phương trình của mặt cầu?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 8 = 0$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.
C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 2y + 2z + 16 = 0$. D. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y - 24z + 16 = 0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A. 3. B. 81. C. 9. D. 6.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$ có tâm là

- A. $I(1; 2; -3)$. B. $I(-1; -2; 3)$. C. $I(1; 2; -3)$. D. $I(-1; -2; 3)$.

Câu 5: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R = \sqrt{3}$. B. $R = 3$. C. $R = 9$. D. $R = 3\sqrt{3}$.

Câu 6: Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình mặt cầu là

- A. $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ B. $a^2 + b^2 + c > 0$ C. $a^2 + b^2 - c \geq 0$. D. $a^2 + b^2 - c > 0$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt cầu tâm $I(-1; 2; 0)$, bán kính $R = 3$ có phương trình

- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \sqrt{3}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 1 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) là

- A. $I(2; -1; 3)$. B. $I(-2; 1; 3)$. C. $I(2; -1; -3)$. D. $I(2; 1; -3)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt cầu tâm $I(1; -2; -2)$, bán kính $R = 3$ có phương trình

- A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 9 = 0$. B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$.
C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z = 0$. D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$.

Câu 10: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

- A. $I(-2; 4; 0)$, $R = 2\sqrt{6}$. B. $I(2; -4; 0)$, $R = 2\sqrt{6}$.

C. $I(-1;2;0)$, $R = 3$.

D. $I(1;-2;0)$, $R = 3$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O và đi qua điểm $M(0;0;2)$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

B. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

C. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

D. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;1)$, $B(0;-1;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 8$.

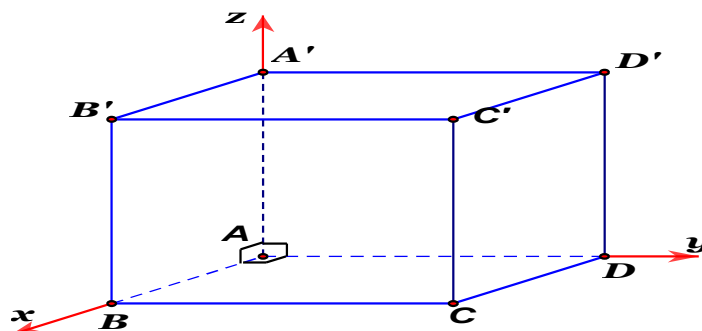
B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 8$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 như hình vẽ và mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



a) Điểm A trùng với gốc tọa độ O .

b) Tâm I của mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn thẳng AC' .

c) Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{3}$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9.$$

a) Bán kính mặt cầu (S) là $R = 9$.

b) Tâm $I(a;b;c)$ của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$.

c) Điểm $M(-1;-2;4)$ nằm trong mặt cầu (S) .

d) Cắt mặt cầu (S) bởi mặt phẳng (Q) cách tâm I của mặt cầu một khoảng bằng 2 thì bán kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi (S) và (Q) là $r = \sqrt{6}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;-4)$ và $B(4;-1;0)$.

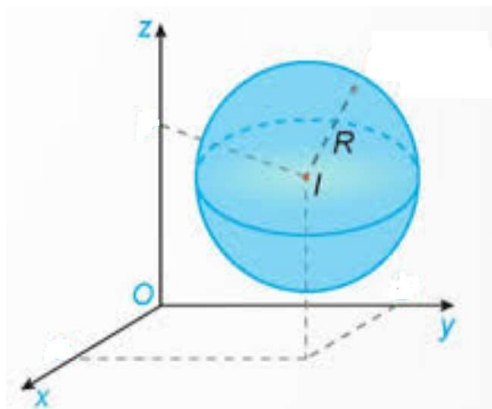
a) Khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng 36.

b) Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB có dạng: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AB tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z-15=0$.

d) Giả sử đặt hai trạm thu phát sóng tại hai điểm A và B , với bán kính phủ sóng của mỗi trạm bằng bán kính mặt cầu (S) thì người sử dụng điện thoại tại điểm $M(2;1;-1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm phát thu phát sóng.

Câu 4 : Hình 1 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(1; 2; 2)$ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) và được thiết kế với đường kính phủ sóng là 10000 m.



Hình 1

a) Bán kính vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là 5 km.

b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$.

c) Điểm $A(1;2;6)$ nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.

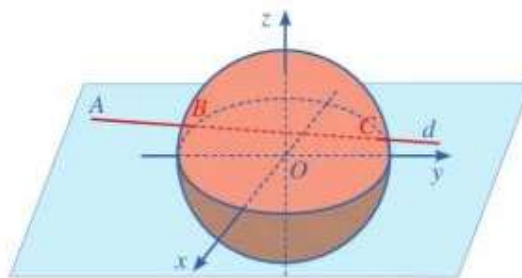
d) Nhà bạn Mai và bạn Nam có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;7)$ và $N(5;5;5)$. Nếu cả hai bạn Mai và Nam dùng điện thoại tại nhà thì đều có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng điện thoại này.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

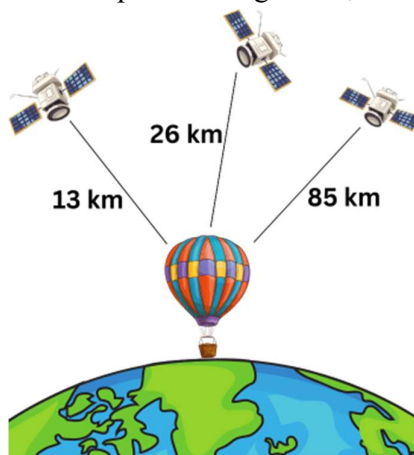
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và đi qua điểm $A(3;1;-4)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) ?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P): x+2y+2z-5=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) (kết quả dạng số thập phân làm tròn đến hàng phần trăm).

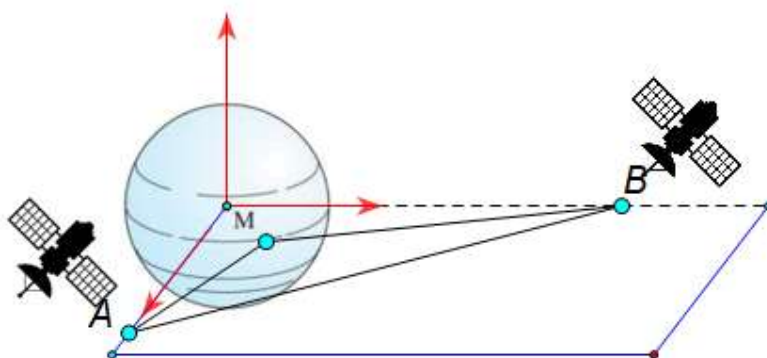
Câu 3 : Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1km. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(222;565;8)$ chuyển động theo đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Tọa độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $M(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



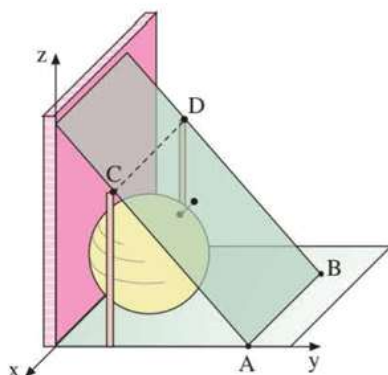
Câu 4: Một khinh khí cầu nghiên cứu khí tượng được phóng lên để thu thập dữ liệu trong tầng bình lưu. Khí cầu này có thiết bị định vị sử dụng tín hiệu từ các vệ tinh của công ty S để xác định vị trí trong không gian. Tại thời điểm quan sát, khí cầu đang bay ở độ cao 50 km và nhận được tín hiệu từ ba vệ tinh S có toạ độ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị km) như sau: Vệ tinh A tại vị trí $A(103; 204; 62)$, vệ tinh B tại vị trí $B(106; 208; 74)$, vệ tinh C tại vị trí $C(105; 212; 134)$. Từ thời gian truyền tín hiệu, hệ thống xác định rằng khoảng cách từ vị trí M của khinh khí cầu đến các vệ tinh là: $MA = 13$ km, $MB = 26$ km, $MC = 85$ km. Tính khoảng cách từ khinh khí cầu đến gốc toạ độ O . (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của km).



Câu 5: Hệ thống định vị toàn cầu GPS (*Global Positioning System*) hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách trái đất 20000 km, ta coi trái đất là khối cầu có bán kính $R = 6$ (nghìn km). Với một hệ toạ độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm trái đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có toạ độ $A(26; 0; 0)$, $B(0; 26; 0)$. Xét điểm $M(x; y; z)$ thuộc bề mặt trái đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 6: Một bồn chứa khí hình cầu K có đường kính 10 m tiếp xúc trực tiếp với một bức tường thẳng đứng tại điểm $T(-6; 0; 5)$.



Bồn được che chắn bằng một tấm chắn nghiêng, cố định xuống mặt đất tại các điểm $A(0;16;25;0)$ và $B(-12;16;25;0)$, đồng thời được chống đỡ bởi các thanh thẳng đứng tại các điểm $C(0;5;15)$ và $D(-12;5;15)$. Tính khoảng cách an toàn giữa tấm chắn E và mặt cầu K là bao nhiêu mét.

-----HẾT-----

ĐỀ ÔN TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?
- A. $\vec{n}_2 = (2; -1; 2)$. B. $\vec{n}_4 = (3; 2; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (3; 2; 2)$. D. $\vec{n}_1 = (3; 2; -1)$.
- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc (α) ?
- A. $Q(1; -2; 2)$. B. $N(1; -1; -1)$. C. $P(2; -1; -1)$. D. $M(1; 1; -1)$.
- Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 2; 1)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (5; 2; -3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là
- A. $5x + 2y - 3z - 17 = 0$. B. $2x + 2y + z - 11 = 0$.
C. $5x + 2y - 3z - 11 = 0$. D. $2x + 2y + z - 17 = 0$.
- Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-1}{3}$. Một vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là
- A. $(-1; 1; 3)$. B. $(2; -4; 1)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(2; 4; 1)$.
- Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 1)$, $N(1; 2; 3)$. Phương trình đường thẳng MN là
- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
- Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(3; -2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): -x + 2y - 2z + 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = 3 - 1t \\ y = -2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 - 1t \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 - 1t \\ y = 2 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng (P) có phương trình $(P): x + z + 1 = 0$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Khi đó cosin góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 150° . D. 120° .

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I(1; -2; 3); R = 5$. B. $I(-1; 2; -3); R = 5$.
C. $I(1; -2; 3); R = 25$. D. $I(-1; 2; -3); R = 25$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -2)$ và $B(5; 4; 4)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 17$. B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 17$.
C. $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{17}$. D. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{17}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(2; 1; 0)$ và $A(1; 2; 3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{11}$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{11}$.
C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11$. D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 1)$, $B(0; 1; -3)$ và mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0$.

- a) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .
b) Mặt phẳng (P) song song với trục Oz .

- c)** Mặt phẳng (α) đi qua A, B vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y + z - 1 = 0$
- d)** Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng $2\sqrt{2}$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương có phương trình: $(Q): x - y - 1 = 0$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng

$$(P): x + 2y - 2z + 2 = 0.$$

- a)** Điểm M thuộc đường thẳng d .

- b)** Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

- c)** Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

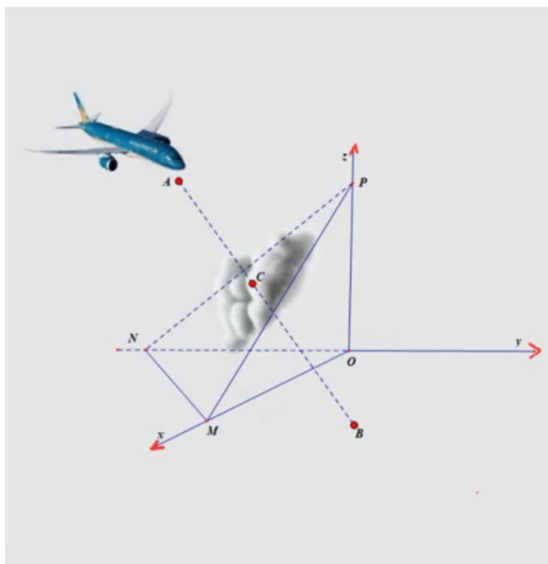
- d)** Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình

$$d': \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Gọi B là điểm thuộc (S) sao cho tam giác OAB là tam giác đều.

- a)** Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = 2$.
- b)** Điểm A nằm ngoài mặt cầu (S) .
- c)** Điểm O nằm trên mặt cầu (S) .
- d)** Mặt phẳng (OAB) có phương trình là $x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}; \frac{2}{5}\right)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B\left(\frac{7}{2}; \frac{13}{2}; 0\right)$ trên đường băng (như hình vẽ). Có một đám mây mà một phần của nó được mô phỏng bởi mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(8; 0; 0); N(0; -8; 0); P\left(0; 0; \frac{4}{5}\right)$. Khi máy bay hạ cánh sẽ xuyên qua đám mây đó ở vị trí điểm C .



a) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB} \left(0; 9; -\frac{2}{5} \right)$.

b) Ta có hai véc tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$ cùng phương nên giả sử tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ khi đó tọa độ của điểm C có dạng $C \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2} + 9k; \frac{2}{5} - \frac{2}{5}k \right)$.

c) Phương trình mặt phẳng $(MNP): \frac{x}{8} + \frac{y}{-8} + \frac{z}{0,8} = 1$.

d) Khi máy bay bay xuyên qua đám mây để hạ cánh thì máy bay còn cách mặt đất một khoảng nhỏ hơn 338m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ là

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 6 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Gọi

$M(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Giá trị của $a + b + c$ bằng

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 2)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và

$d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với hai đường thẳng d_1, d_2 có dạng: $A.x + B.y + C.z + 26 = 0$. Giá trị của $T = 2A + 3B + C$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2; 1; 3)$, $A(0; 0; 4)$ và cắt hai trục Ox , Oy lần lượt tại B , C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên hệ trục ứng với 10 km, trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Máy bay thứ nhất ban đầu ở tọa độ $A(25; -10; 1)$ và bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (-3; -4; 0)$ với tốc độ không đổi là 750 km/h. Máy bay thứ hai ban đầu ở tọa độ $B(30; -25; 1, 1)$ và bay theo hướng vectơ $\vec{v}_2 = (-4; 3; 0)$ với tốc độ không đổi là 900 km/h. Trên máy bay thứ nhất có gắn radar tránh va chạm với bán kính hoạt động là 50 km. Hỏi thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình của radar máy bay thứ nhất là bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

-----HẾT-----

BÀI

18

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B , kí hiệu $P(A|B)$.

$$\text{Nếu } P(B) > 0 \text{ thì } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Chú ý:

- Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Công thức trên được gọi là **công thức nhân xác suất**.

Trong đó $n(A \cap B)$ là số các trường hợp thuận lợi của $(A \cap B)$; $n(B)$ là số các trường hợp thuận lợi của B .

- Nếu A và B là hai biến cố bất kì, với $P(B) > 0$ thì: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
- Cho A và B là hai biến cố với $0 < P(A) < 1$; $0 < P(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi: $P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B})$ và $P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$

Tính chất trên giải thích vì sao hai biến cố độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến này không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố kia.

KIẾN THỨC CẦN NHỚ ĐỂ GIẢI TOÁN

$$\text{1. Xác suất điều kiện: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$\text{2. Công thức nhân xác suất: } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Chú ý 1: Cho hai biến cố độc lập A và B , với $0 < P(A) < 1$; $0 < P(B) < 1$.

$$P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B}) \quad P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A})$$

Chú ý 2:

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
- Cách ghi $P(A \cap B)$ với $P(AB)$ hoàn toàn như nhau

Chú ý 3:

- Xác suất của một biến cố có thể phụ thuộc vào nhiều yếu tố, điều kiện khác nhau nào đó mà có thể được

nói ra hoặc không nói ra (điều kiện hiểu ngầm). Để chỉ ra một cách cụ thể hơn về việc xác suất của một sự kiện A nào đó phụ thuộc vào một điều kiện B nào đó ra sao, ta sử dụng xác suất có điều kiện.

• Những bài toán xảy ra xác suất điều kiện thường đi kèm với việc sử dụng quy tắc nhân xác suất, khi gặp bài toán này ta cần lưu ý đến sự độc lập của biến cố để vận dụng công thức đúng.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $P(A) = 0,2024$; $P(B) = 0,2025$.

Tính $P(A|B)$.

- A. 0,7976. B. 0,7975. C. 0,2025. D. 0,2024.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,65$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,55$.

Tính $P(A \cap B)$.

- A. 0,25. B. 0,1. C. 0,15. D. 0,35.

Câu 3. Gieo hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc bằng 6. Biết rằng con xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

- A. $\frac{2}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 4. Một lớp có 95 sinh viên, trong đó có 40 nam và 55 nữ. Trong kỳ thi môn Xác suất thống kê có 23 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 12 nam và 11 nữ). Gọi ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê, biết rằng sinh viên đó là nữ?

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{11}{23}$ C. $\frac{12}{23}$ D. $\frac{11}{19}$

Câu 5. Một mảnh đất chia thành hai khu vườn. Khu A có 150 cây ăn quả, khu B có 200 cây ăn quả. Trong đó, số cây Táo ở khu A và khu B lần lượt là 50 cây và 100 cây. Chọn ngẫu nhiên 1 cây trong mảnh đất. Xác suất cây được chọn là cây Táo, biết rằng cây đó ở khu B, là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 6. Một hộp chứa 8 bi trắng, 2 bi đỏ. Lần lượt bốc từng bi và không trả lại bi được bốc vào hộp. Giả sử lần đầu tiên bốc được bi trắng. Xác suất lần thứ 2 bốc được bi đỏ là

- A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{1}{10}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 7. Khảo sát về sở thích uống trà sữa của 200 em học sinh theo giới tính và loại trà sữa ta được bảng số liệu sau:

Loại trà	Nam	Nữ
Matcha	40	50
Hồng trà	30	80

Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh. Nếu đã chọn được một bạn nữ thì xác suất để bạn nữ thích uống vị hồng trà là bao nhiêu?

- A. $\frac{8}{13}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 8. Lớp 12A có 45 học sinh gồm 25 nam và 20 nữ. Trong kì kiểm tra cuối kì 2 môn Toán có 15 học sinh đạt điểm giỏi trong đó có 8 nam và 7 nữ. Gọi tên ngẫu nhiên một học sinh trong danh sách lớp. Tìm xác suất để gọi được học sinh đạt điểm giỏi môn Toán biết rằng học sinh đó là nữ.

- A. $\frac{7}{20}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{8}{25}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 9. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có 3 người con. Tính xác suất để gia đình này có hai trai, một gái biết rằng gia đình có con gái.

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 10. Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc là 7, biết rằng có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt 5 chấm.

- A. $\frac{2}{11}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{9}{11}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 11. Để kiểm tra tính chính xác của một xét nghiệm nhằm chẩn đoán bệnh X , người ta chọn một mẫu gồm 5282 người, trong đó có 54 người mắc bệnh X và 5228 người không mắc bệnh X để làm xét nghiệm. Trong số 54 người mắc bệnh X có 48 người cho kết quả dương tính. Trong số 5228 người không mắc bệnh có 1307 người cho kết quả dương tính. Chọn ngẫu nhiên một người trong mẫu. Tính xác suất để người đó mắc bệnh X nếu biết rằng người đó có xét nghiệm âm tính.

- A. $\frac{6}{3927}$. B. $\frac{6}{5282}$. C. $\frac{48}{1335}$. D. $\frac{48}{5282}$.

Câu 12. Trong một đội tuyển có ba vận động viên A , B và C thi đấu với xác suất chiến thắng lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Giả sử mỗi người thi đấu một trận độc lập với nhau. Tính xác suất để A thua trong trường hợp đội tuyển thắng hai trận.

- A. $\frac{55}{113}$. B. $\frac{57}{113}$. C. $\frac{56}{113}$. D. $\frac{54}{113}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một hộp đựng 10 quả cầu đỏ và 8 quả cầu xanh cùng kích thước và khối lượng. Hùng lấy một quả không hoàn lại. Sau đó Lâm lấy ngẫu nhiên một quả cầu. Gọi A là biến cố “Hùng lấy được quả cầu đỏ”, B là biến cố “Lâm lấy được một quả cầu đỏ”.

- a) $P(A)$ bằng $\frac{5}{9}$.
b) $P(B | A)$ bằng $\frac{9}{17}$.
c) $P(AB)$ bằng $\frac{4}{17}$.
d) $P(B | \bar{A})$ bằng $\frac{10}{17}$.

Câu 2. Một công ty thiết bị Giáo Dục đầu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0,5 và dự án 2 là 0,6. Khả năng thắng thầu cả 2 dự án là 0,4. Gọi A , B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

- a) A và B là hai biến độc lập.
b) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0,3.
c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,4.

d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,8 .

Câu 4. Nghiên cứu số bệnh nhân trong một viện bỏng, thấy rằng có 2 nguyên nhân gây ra bỏng là bỏng nhiệt và bỏng do hóa chất. Bỏng nhiệt chiếm 70% số bệnh nhân và bỏng do hóa chất là 30%. Trong những bệnh nhân bị bỏng nhiệt thì có 30% bị biến chứng, trong những bệnh nhân bị bỏng hóa chất thì có 50% bị biến chứng. Rút ngẫu nhiên một bệnh án, các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Xác suất của bỏng nhiệt bị biến chứng là 0,3 .

b) Xác suất của bỏng hóa chất bị biến chứng là 0,5 .

c) Xác suất của bệnh án bị biến chứng là 32% .

d) Biết rằng bệnh án rút ra bị biến chứng, xác suất bệnh án đó do bỏng nhiệt là $\frac{7}{12}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hai biến cố A, B có xác suất $P(A) = 0,4, P(B) = 0,6; P(AB) = 0,2$. Xác suất $P(\bar{A} | B) = \frac{a}{b}$

với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $M = a^2 + b^2$.

Câu 2. Một nhóm có 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ tham gia lao động trên sân trường. Cô giáo chọn ngẫu nhiên đồng thời hai bạn trong nhóm đi tưới cây. Tính xác suất để hai bạn được chọn có cùng giới tính, biết rằng có ít nhất một bạn nam được chọn. (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Câu 3: Một bình đựng 50 viên bi kích thước, chất liệu như nhau, trong đó 30 viên bi xanh và 20 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi, rồi lại lấy ngẫu nhiên một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được một bi xanh ở lần thứ nhất và một viên bi trắng ở lần thứ hai. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 4: Có 40 phiếu thi Toán 12, mỗi phiếu chỉ có một câu hỏi, trong đó có 13 câu hỏi lý thuyết (gồm 5 câu hỏi khó và 8 câu hỏi dễ) và 27 câu hỏi bài tập (gồm 12 câu hỏi khó và 15 câu hỏi dễ). Lấy ngẫu nhiên ra một phiếu. Tìm xác suất rút được câu hỏi lý thuyết, biết rằng đó là câu hỏi khó. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 5: Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ còn lại là nam. Có 3 bạn tên Minh, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng. Xác suất để bạn được gọi tên Minh, nhưng với điều kiện bạn đó là nam bằng $\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính giá trị biểu thức

$$T = a + b.$$

Câu 6: Trong một cuộc thi, thí sinh được phép thi 3 lần. Xác suất lần đầu vượt qua kì thi là 0,9 . Nếu trượt lần đầu thì xác suất vượt qua kì thi lần hai là 0,7 . Nếu trượt cả hai lần thì xác suất vượt qua kì thi ở lần ba là 0,3 . Tính xác suất để thí sinh thi đậu. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

-----HẾT-----

BÀI

19

CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$$

2. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có:

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$$

Nhận xét:

Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0, P(B) > 0$, do $P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$

nên **công thức Bayes** còn có dạng: $P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})}$

KIẾN THỨC CẦN NHỚ ĐỂ GIẢI TOÁN

1. Công thức xác suất toàn phần

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$$

2. Công thức Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} \text{ hoặc } P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})}$$

Các công thức cần nhớ

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$

Chú ý khi sử dụng Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes:

• **Công thức xác suất toàn phần** và **Công thức Bayes** được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra. Khi áp dụng giải toán, biến cố cần tìm xác suất chi phối bởi hệ đầy đủ biến cố trước đó. Vì vậy, để giải toán xác suất này, ta cần:

- Phân tích kỹ đề bài, linh hoạt liên tưởng vào thực tế.
- Xác định được nhóm biến cố đầy đủ ở giai đoạn đầu của sự việc mà bài toán đã đưa ra.
- Gọi tên biến cố xảy ra ở giai đoạn sau liên quan đến nhóm biến cố đầy đủ được xác định trước đó.
- Xác định xác suất của từng biến cố ở hệ đầy đủ, các xác suất có điều kiện của biến cố ở giai đoạn sau với từng biến cố trong hệ đầy đủ.
- Áp dụng **công thức xác suất toàn phần** nếu biến cố cần tìm xác suất là biến cố xảy ra ở giai đoạn sau.
- Nếu biết biến cố xảy ra trong giai đoạn sau, để xác định xác suất của một biến cố nào đó ở giai đoạn trước liên quan đến biến cố ở giai đoạn sau như thế nào ta sử dụng **Công thức Bayes**.

B**BÀI TẬP**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho 2 biến cố A và B , tìm $P(A)$ biết $P(A|B) = 0,8$; $P(A|\bar{B}) = 0,3$; $P(B) = 0,4$.

- A. 0,1. B. 0,5. C. 0,04. D. 0,55.

Câu 2. Cho 2 biến cố A và B biết $P(A|B) = 0,08$; $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0,63$; $P(B) = 0,03$. Khi đó xác suất xảy ra biến cố A là bao nhiêu?

- A. 0,112. B. 0,5231. C. 0,3613. D. 0,063.

Câu 3. Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$. B. $P(A) = P(A)P(A|B) + P(\bar{A})P(A|\bar{B})$.
C. $P(A) = P(B)P(A|\bar{B}) + P(\bar{B})P(A|B)$. D. $P(A) = P(B)P(A|B) - P(\bar{B})P(A|\bar{B})$.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B . Biết $P(B) = 0,01$; $P(A|B) = 0,7$; $P(A|\bar{B}) = 0,09$. Khi đó $P(A)$ bằng

- A. 0,0079. B. 0,0961. C. 0,0916. D. 0,0970.

Câu 5. Cho hai biến cố A và B với $P(B) = 0,8$, $P(A|B) = 0,7$, $P(A|\bar{B}) = 0,45$. Tính $P(A)$.

- A. 0,25. B. 0,65. C. 0,55. D. 0,5.

Câu 6. Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,26$, $P(B|A) = 0,7$. Tính $P(A|B)$.

- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{6}{13}$. C. $\frac{4}{13}$. D. $\frac{9}{13}$.

Câu 7. Cho hai biến cố A và B , với $P(B) = 0,8$, $P(A|B) = 0,7$, $P(A|\bar{B}) = 0,45$. Tính $P(B|A)$.

- A. 0,25. B. $\frac{56}{65}$. C. 0,65. D. 0,5.

Câu 8. Cho hai biến cố A và B , với $P(A) = 0,2$, $P(B|A) = 0,7$, $P(B|\bar{A}) = 0,15$. Tính $P(A|B)$.

- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{6}{13}$. C. $\frac{4}{13}$. D. $\frac{9}{13}$.

Câu 9. Hai máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy I sản xuất 35%, máy II sản xuất 65% tổng sản lượng. Tỷ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là 0,3% và 0,7%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kho. Tính xác suất để chọn được phế phẩm?

- A. 0,0056. B. 0,0065. C. 0,065. D. 0,056.

Câu 10. Hai máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy I sản xuất 35%, máy II sản xuất 65% tổng sản lượng. Tỷ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là 0,3% và 0,7%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kho. Tính xác suất để chọn được phế phẩm do máy I sản xuất?

- A. 0,0056. B. 0,1875. C. 0,1785. D. 0,1587.

Câu 11. Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh tại trường X. Nhóm này có 70% học sinh là nam. Kết quả khảo sát cho thấy có 30% học sinh nam và 15% học sinh nữ biết

chơi ít nhất một nhạc cụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm này. Tính xác suất để chọn được học sinh biết chơi ít nhất một nhạc cụ.

- A. 0,45. B. 0,35. C. 0,255. D. 0,128.

Câu 12. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 25% cư dân hút thuốc lá. Tỷ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 60% và 25%. Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{7}{9}$. D. $\frac{8}{9}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi vàng, 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai chứa 4 viên bi vàng, 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lấy ra 2 viên bi bất kỳ từ hộp thứ hai.

- a) Xác suất để lấy được bi xanh từ hộp thứ nhất là $\frac{3}{8}$.
 b) Xác suất để lấy được bi vàng từ hộp thứ nhất là $\frac{5}{7}$.
 c) Biết rằng lấy được bi màu xanh từ hộp thứ nhất. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu từ hộp thứ hai là $\frac{9}{13}$.
 d) Xác suất để lấy được 2 bi vàng từ hộp thứ hai là $\frac{5}{32}$.

Câu 2. Chạy Marathon là môn thể thao mà tại đó, người chơi sẽ hoàn thành quãng đường 42,195 km trong khoảng thời gian nhất định. FM sub 4 là thành tích dành cho những người chơi hoàn thành quãng đường Marathon dưới 4 giờ.

Trong CLB AKR, tỷ lệ thành viên nam là 72%, tỷ lệ thành viên nữ là 28%. Đối với nam, tỷ lệ VĐV hoàn thành Marathon sub 4 là 32%; đối với nữ tỷ lệ VĐV hoàn thành sub 4 là 3%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên từ CLB AKR:

- a) Khi VĐV được chọn là nam, xác suất để VĐV này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là 68%.
 b) Xác suất để thành viên được chọn đã hoàn thành sub 4 là 22%.
 c) Xác suất để thành viên được chọn là nữ đã hoàn thành sub 4 là 2%.
 d) Biết rằng VĐV được chọn đã hoàn thành sub 4, xác suất để VĐV đó là nam bằng 96%.

Câu 3. Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi là khác nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai.

- a) Xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp hai là bi đỏ bằng $\frac{19}{45}$.
 b) Xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp hai có 1 bi đỏ và 1 bi xanh bằng $\frac{1}{9}$.
 c) Biết rằng hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ. Xác suất để 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ bằng $\frac{14}{19}$.

d) Biết rằng hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có 1 bi đỏ và 1 bi xanh. Xác suất để 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng có 1 bi đỏ và 1 bi xanh bằng $\frac{5}{19}$.

Câu 4. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỷ lệ nhân viên nữ và tỷ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp

a) Xác suất nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ là 0,061.

b) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nam là $\frac{55}{118}$.

c) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nữ là $\frac{63}{118}$.

d) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Khi đó nhân viên đó là nam nhiều hơn là nữ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?

Câu 2. Có hai hộp bóng bàn, các quả bóng bàn có kích thước và hình dạng như nhau. Hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng. Hộp thứ hai có 6 quả bóng bàn màu trắng và 4 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng bàn ở hộp thứ hai ra. Tính xác suất để lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai.

Câu 3. Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Hà Nam tỷ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỷ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất người đó nghiện thuốc lá là bao nhiêu?

Câu 4. Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Tính xác suất để xạ thủ đó là nữ?

Câu 5. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỷ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỷ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỷ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỷ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

Câu 6. Một lớp học có số học sinh nữ chiếm 45% tổng số học sinh cả lớp. Cuối năm tổng kết, lớp học đó có tỷ lệ học sinh giỏi là nữ là 30%, học sinh giỏi là nam chiếm 40%. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn 1 học sinh của lớp để đại diện cho lớp lên nhận thưởng.

a. Tính xác suất để học sinh được chọn là học sinh giỏi.

b. Biết rằng học sinh được chọn là học sinh giỏi. Tính xác suất để em đó là nữ.

Chú ý: Các kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

-----HẾT-----

BÀI TẬP ÔN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B bất kì với $P(B) > 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

B. $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(A \cap B)}$.

C. $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A \cap B)}$.

D. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B . Chọn mệnh đề đúng?

A. $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(B|A)$.

B. $P(A|B) = P(A|\bar{B})$.

C. $P(B) = P(B|\bar{A})$.

D. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Câu 3. Cho hai biến cố A và B , công thức tính xác suất toàn phần là

A. $P(A) = P(B) \cdot P(A|\bar{B}) + P(\bar{B}) \cdot P(A|B)$.

B. $P(B) = P(A) \cdot P(A|\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(A|B)$.

C. $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$.

D. $P(B) = P(\bar{A}) \cdot P(A|\bar{B}) + P(A) \cdot P(A|B)$.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố ngẫu nhiên mà $P(A) > 0, P(B) > 0$, công thức Bayes là

A. $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$.

B. $P(B|A) = \frac{P(A) \cdot P(A|B)}{P(B)}$.

C. $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(B|A)}{P(A)}$.

D. $P(B|A) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$.

Câu 5. Cho hai biến cố A, B có $P(B) = 0,8; P(A \cap B) = 0,1$. Kết quả của xác suất sau $P(A|B)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Câu 6. Cho hai biến cố A, B có $P(A) = \frac{7}{15}; P(AB) = \frac{23}{145}$. Kết quả của xác suất sau $P(B|A)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{69}{203}$.

B. $\frac{19}{135}$.

C. $\frac{9}{23}$.

D. $\frac{41}{105}$.

Câu 7. Một trường trung học phổ thông có 600 học sinh, trong đó có 245 học sinh nam và 355 học sinh nữ. Tổng kết học kỳ I, có 170 học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi, trong đó có 80 học sinh nam và 90 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong số 600 học sinh đó. Tính xác suất để học sinh được chọn có danh hiệu học sinh giỏi và là nam (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $\frac{5}{19}$.

B. $\frac{12}{31}$.

C. $\frac{11}{45}$.

D. $\frac{16}{49}$.

Câu 8. Trong một hộp kín có 10 viên bi vàng và 6 viên bi đỏ, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Phong lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Trung lấy ngẫu nhiên một trong 15 viên bi còn lại. Tính xác suất để Phong lấy được viên bi đỏ và Trung lấy được viên bi vàng.

A. $\frac{3}{17}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Câu 9. Một nhóm học sinh có 20 học sinh, trong đó có 12 em thích học môn Toán, 10 em thích học môn Văn, 2 em không thích học cả hai môn Toán và Văn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh, xác suất để học sinh đó thích học môn Toán biết rằng học sinh đó thích học môn Văn là

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 10. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu đỏ, 2 quả cầu xanh; hộp thứ hai chứa 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả, tính xác suất để quả cầu lấy từ hộp thứ hai là màu đỏ với điều kiện là quả cầu lấy từ hộp thứ nhất màu đỏ.

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{6}{25}$. D. $\frac{9}{25}$.

Câu 11. Bạn Tuấn hằng ngày ăn sáng bằng xôi hoặc bún. Nếu hôm nay bạn ăn sáng bằng xôi thì xác suất để hôm sau bạn ăn sáng bằng bún là 0,7. Xét một tuần mà thứ ba bạn ăn sáng bằng xôi. Biết xác suất để thứ năm tuần đó, bạn Tuấn ăn sáng bằng bún là 0,63. Hỏi nếu hôm nay bạn ăn sáng bằng bún thì xác suất để hôm sau bạn ăn sáng bằng xôi là

- A. 0,1. B. 0,2. C. 0,3. D. 0,4.

Câu 12. Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm thì có 95% phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 8% (tức là trong số những người không bị bệnh có 8% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính). Biết khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là $a\%$. Hỏi a gần số nào nhất trong các số sau?

- A. 1,07. B. 1,12. C. 1,17. D. 1,22.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời “sẽ mua”; có 95 người trả lời “không mua”. Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời “sẽ mua” và “không mua” lần lượt là 70% và 30%.

Gọi A là biến cố “Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm”.

Gọi B là biến cố “Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm”.

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\bar{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời “sẽ mua” khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 2. Một phần mềm nhận dạng tin nhắn quảng cáo trên điện thoại bằng cách dựa theo từ khóa để đánh dấu một số tin nhắn được gửi đến. Qua một thời gian dài sử dụng, người ta thấy rằng trong số tất cả các tin nhắn gửi đến, có 15% số tin nhắn bị đánh dấu. Trong số các tin nhắn bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn không phải là quảng cáo. Trong số các tin nhắn không bị đánh dấu, có 5% số tin nhắn là quảng cáo.

Chọn ngẫu nhiên một tin nhắn được gửi đến điện thoại.

a) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu bằng 0,85.

b) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo, biết rằng nó không bị đánh dấu, bằng 0,95.

c) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo bằng 0,85.

d) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu, biết rằng nó không phải là quảng cáo, lớn hơn 0,95.

Câu 3. Nhân dịp năm mới, cô giáo chuẩn bị 40 bao lì xì may mắn gồm ba loại: loại I có 12 bao lì xì mỗi bao chứa 1 tờ 20 nghìn đồng; loại II có 18 bao lì xì mỗi bao chứa 1 tờ 10 nghìn đồng; loại III có 10 bao lì xì mỗi bao chứa 1 tờ 5 nghìn đồng. Các bao lì xì có hình thức giống hệt nhau. Cô giáo cho các bạn học sinh trong lớp lần lượt lên bốc ngẫu nhiên mỗi bạn 1 bao lì xì (bốc xong không trả lại). Bạn An lên bốc đầu tiên, tiếp theo đến bạn Bình.

Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau:

- a) Xác suất để An bốc được bao lì xì 10 nghìn đồng là 0,45.
- b) Xác suất để Bình bốc được bao lì xì 10 nghìn đồng là 0,45.
- c) Biết Bình bốc được bao lì xì 10 nghìn đồng, xác suất để An bốc được bao lì xì 10 nghìn đồng xấp xỉ bằng 0,44.
- d) Xác suất để có ít nhất một trong hai bạn bốc được bao lì xì 10 nghìn đồng là 0,84.

Câu 4: Một kho hàng chứa 85% sản phẩm loại I và 15% sản phẩm loại II, trong đó có 1% sản phẩm loại I bị hỏng, 4% sản phẩm loại II bị hỏng. Các sản phẩm có kích thước và hình dạng như nhau. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Xét các biến cố:

A : “Khách hàng chọn được sản phẩm loại I”;

B : “Khách hàng chọn được sản phẩm không bị hỏng”;

Khi đó:

- a) $P(A) = 0,85$.
- b) $P(B|A) = 0,99$.
- c) $P(B) = 0,9855$.
- d) $P(A|B) = 0,95$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hai biến cố A, B thỏa mãn $P(A) = 0,21$; $P(B) = 0,52$; $P(B|A) = 0,6$. Khi đó

$P(A|B) = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, giá trị của $D = a + b$ là bao nhiêu?

Câu 2. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố: “An lấy được viên bi trắng”; B là biến cố: “Bình lấy được viên bi trắng”. Khi đó $P(A|\bar{B}) = \frac{a}{b}$, với phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính giá trị của $C = a - b$.

Câu 3. Lớp 11A1 của một trường THPT A có 20% học sinh tham gia Câu lạc bộ Tiếng Anh của trường, trong số đó có 85% học sinh có chứng chỉ IELTS từ 5.5 điểm trở lên. Ngoài ra trong lớp có 10% học sinh không tham gia Câu lạc bộ Tiếng Anh cũng có chứng chỉ IELTS từ 5.5 trở lên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 11A1. Tính xác suất để chọn được một học sinh có chứng chỉ IELTS từ 5.5 trở lên.

Câu lạc bộ Tiếng Anh ở lớp 11A1”;

B : “Chọn được học sinh trong lớp 11A1 có chứng chỉ IELTS từ 5.5 trở lên”.

Khi đó, $P(A) = 0,2$; $P(\bar{A}) = 0,8$; $P(B|A) = 0,85$; $P(B|\bar{A}) = 0,1$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = 0,2.0,85 + 0,8.0,1 = 0,25.$$

Câu 4. Một kho hàng có 85% sản phẩm loại I và 15% sản phẩm loại II, trong đó có 99% sản phẩm loại I chất lượng tốt, 96% sản phẩm loại II chất lượng tốt. Các sản phẩm có kích thước và hình dạng

nhau. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Tính xác suất để khách hàng chọn được sản phẩm loại I và có chất lượng tốt (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 5. Trong một kì thi Tốt nghiệp trung học phổ thông, một trường X có 60% học sinh lựa chọn tổ hợp $D00$ (gồm các môn Toán, Văn, Ngoại ngữ). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp $D00$ thì xác suất để học sinh đó đỗ Đại học là 0,7; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp $D00$ thì xác suất để học sinh đó đỗ Đại học là 0,5. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X đã Tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ Đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp $D00$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 6. Một cuộc thi có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 16 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 20 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn Hạnh lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Phúc lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn Phúc lấy được bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $100a - 99b$ bằng bao nhiêu?

-----HẾT-----

CHỦ ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Với $|m| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.

$$\text{Khi đó, ta có: } \sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$:

$$+) \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$+) \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$+) \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau:

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Với $|m| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

$$\text{Khi đó, ta có: } \cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

- Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$:

$$- \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$- \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$- \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^\circ$ như sau:

$$\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

c) Phương trình $\tan x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan \alpha^\circ$ như sau:

$$\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) Phương trình $\cot x = m$

Gọi α là số thực thuộc đoạn $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot \alpha^\circ$ như sau:

$$\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

với phương trình có dạng:

$$\sin^2 u(x) = \sin^2 v(x), \cos^2 u(x) = \cos^2 v(x), \sin^2 u(x) = \cos^2 v(x)$$

ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình dạng $\cos f(x) = \cos g(x)$.

- Với một số phương trình lượng giác, ta có thể dùng các công thức lượng giác và các biến đổi để đưa về phương trình dạng tích $A(x) \cdot B(x) = 0$.

II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương trình mũ

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

$$\square a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \quad \text{với } b > 0;$$

$$\square a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

2. Phương trình lôgarit

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

$$\square \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$$

$$\square \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ hoặc } g(x) > 0. \end{cases}$$

3. Bất phương trình mũ

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $a^{f(x)} > b$.

$\square$ Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là tập xác định của $f(x)$;

$\square$ Nếu $b > 0, a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > \log_a b$;

$\square$ Nếu $b > 0, 0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) < \log_a b$.

b) Xét bất phương trình: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

☐ Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > g(x)$;

☐ Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) < g(x)$.

Các bất phương trình mũ khác cùng loại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

Với $a > 0, a \neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $\log_a f(x) > b$.

☐ Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > a^b$;

☐ Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $0 < f(x) < a^b$.

b) Xét bất phương trình: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

☐ Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x) > g(x) > 0$;

☐ Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về: $0 < f(x) < g(x)$.

Các bất phương trình lôgarit khác cùng loại được giải tương tự.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Các nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = 0$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{2\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = -\frac{\pi}{5} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2. Các nghiệm của phương trình $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = \frac{3\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = \frac{3\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3. Các nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ là:

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4. Các nghiệm của phương trình $\sin^2 2x = 1$ là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 5. Các nghiệm của phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ là:

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 6. nghiệm của phương trình $\cot\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 7. Các nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 8. Các góc lượng giác x sao cho $\cos(x - 15^\circ) = -\frac{1}{2}$ là:

A. $x = 165^\circ + k360^\circ$ và $x = -135^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = 165^\circ + k180^\circ$ và $x = -135^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = 135^\circ + k360^\circ$ và $x = -105^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = 135^\circ + k180^\circ$ và $x = -105^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 9. Các góc lượng giác x sao cho $\tan(2x + 27^\circ) = \tan 35^\circ$ là:

A. $x = 4^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = -4^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = -4^\circ + k90^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = 4^\circ + k90^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10: Các góc lượng giác x sao cho $\sin 2x = \sin(36^\circ - x)$ là:

A. $x = 12^\circ + k120^\circ$ và $x = 144^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = 12^\circ + k120^\circ$ và $x = 48^\circ + k120^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = 12^\circ + k360^\circ$ và $x = 144^\circ + k120^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = 35^\circ + k360^\circ$ và $x = 144^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}\right)$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 12: Số nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ là:

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 13: Các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 14: Các nghiệm của phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 6x$ là:

- A. $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 C. $x = k2\pi$ và $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$ là:

- A. $x = -2$. B. $x = -\sqrt{2}$. C. $x = \sqrt{2}$. D. $x = 2$.

Câu 16: Nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} = 4$ là:

- A. $x = -1$ và $x = 2$. B. $x = 0$ và $x = 1$. C. $x = 1$ và $x = -2$. D. $x = 0$ và $x = 2$.

Câu 17: Tổng các nghiệm của phương trình $5^{x^2-3x} = 10$ là :

- A. -3 . B. $\log_5 10$. C. 3 . D. $-\log_5 10$.

Câu 18: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x} = 5^{x+3}$ là

- A. $x = -3$. B. $x = 5$. C. $x = -5$. D. $x = 3$.

Câu 19: Nghiệm của phương trình $\log_{27}(x^2 - 1) = \frac{1}{3}$ là

- A. $x = \pm 2$. B. $x = \pm\sqrt{10}$. C. $x = 2$. D. $x = \sqrt{10}$.

Câu 20: Tích các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 2x) = 3$ là :

- A. 8 . B. 6 . C. -8 . D. -6 .

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $\log_7(x^2 - 2x) = \log_7(3x - 6)$ là:

- A. 2 . B. 0 . C. 3 . D. 1 .

Câu 22: Nghiệm của bất phương trình $(0,5)^x > 3$ là:

- A. $x > \log_{0,5} 3$. B. $x < \log_{0,5} 3$. C. $x < \log_3 0,5$. D. $x > \log_3 0,5$.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $(0,2)^{x^2} > 1$ là:

- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^{2x-1} > (2 + \sqrt{3})^{x-5}$ là:

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-4; +\infty)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-\infty; -4)$.

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 6) < -2$ là

- A. $(3; 5)$. B. $(-\infty; 5)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(5; +\infty)$.

Câu 26: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_5(2x - 3) < \log_{25} x^2$ là:

- A. 1 . B. 2 . C. 0 . D. vô số.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Hạ bậc hai về, ta được phương trình: $\frac{1 + \cos(\pi - 2x)}{2} = \frac{1 - \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}$.

b) Ta có: $\cos(\pi - 2x) = \cos 2x$.

c) Phương trình đã cho đưa về dạng: $\cos 2x = \cos 6x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2: Cho phương trình $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ với $x \in [0; \pi]$.

a) Ta có: $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

b) Phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ có các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 3: Cho phương trình: $\sin 4x + \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$.

a) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế trái của phương trình đưa về dạng: $\sin 3x \cos x$.

b) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế phải của phương trình đưa về dạng: $\cos 3x \cos x$.

c) Nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ và phương trình $\sin 3x = \cos 3x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4: Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h = 14 + 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với $0 \leq t \leq 24$.

a) Lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước biển là cao nhất

b) Chiều cao của mực nước biển thấp nhất vào lúc 12 giờ

c) Mực nước tại bến cảng cao 18 m vào lúc 2 giờ 10 phút

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn 18 m. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 10 giờ sáng hôm trước đến 2 giờ sáng hôm sau.

Câu 5: Cho bất phương trình $4^{x^2+5} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2}$

a) Ta có: $4 = 2^2; \frac{1}{8} = 2^{-3}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$2(x^2 + 50) = -3(x - x^2)$$

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 6.

d) Tích nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là -4.

Câu 6: Cho bất phương trình $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}(-x^2 + 7x + 18) \geq -2$.

- a) Ta có: $0 < \frac{1}{3\sqrt{2}} < 1$.
- b) Bất phương trình đã cho là nghiệm của bất phương trình: $-x^2 + 7x + 18 \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}$
- c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.
- d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 14.

Câu 7: Mức cường độ âm L (đơn vị dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị:

W / m^2) là cường độ của âm (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage). Một người đứng giữa hai loa A và B . Khi loa A bật thì người đó nghe được âm có mức cường độ 80 dB. Khi loa B bật thì nghe được âm có mức cường độ 90 dB. Nếu bật cả hai loa thì cường độ âm tác động vào tai người bằng tổng cường độ âm của hai loa đó.

- a) Cường độ âm của loa A là $10^{80} \cdot 10^{12} (W / m^2)$.
- b) Cường độ âm của loa B là $10^{90} \cdot 10^{12} (W / m^2)$.
- c) Cường độ âm tác động vào tai người khi bật cả hai loa là $10^{170} \cdot 10^{12} (W / m^2)$.
- d) Nếu bật cả hai loa thì người đó nghe được âm có mức cường độ là 90,4 dB.

Câu 8: Cho phương trình $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) Hạ bậc hai vế, ta được phương trình : $\frac{1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1 - \cos(2x + \pi)}{2}$.
- b) Ta có : $\cos(2x + \pi) = -\cos 2x$.
- c) Phương trình đã cho đưa về dạng : $\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$.
- d) Nghiệm của phương trình đã cho là : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} (k \in Z)$

Câu 9: Cho bất phương trình $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2 - 4x} > (3 + 2\sqrt{2})^{5 - 2x}$.

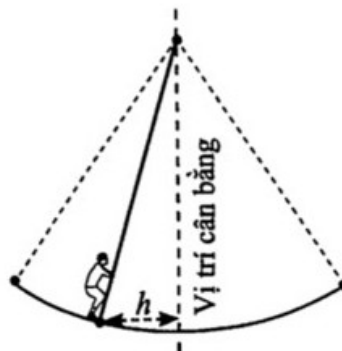
- a) Ta có : $3 + 2\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^{-1}$.
- b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình : $x^2 - 4x > 2x - 5$.
- c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 5.
- d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 9.

Câu 10: Cho bất phương trình $\log_{\sqrt{2}-1}(2x^2 - 2) \geq \log_{\sqrt{2}-1}(5x + 5)$.

- a) Ta có : $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$.
- b) Bất phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 2x^2 - 2 \leq 5x + 5 \\ 5x + 5 > 0 \end{cases}$.
- c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.
- d) Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là 0.

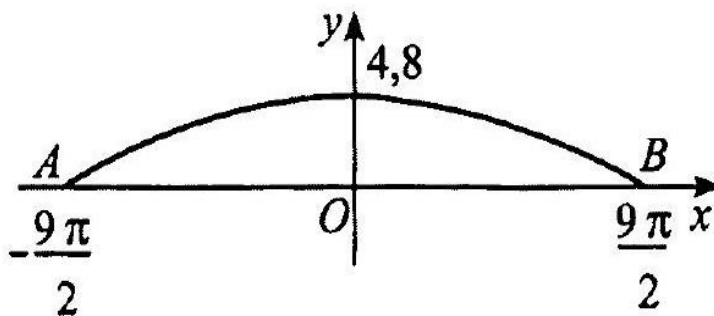
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Mức cường Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 1). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e Cengage*). Tìm thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h là lớn nhất. (Viết kết quả dưới dạng số thập phân).



Hình 1

Câu 2. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cos \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình vẽ. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông. Hỏi chiều rộng của khối hàng hoá đó lớn nhất là bao nhiêu mét để sà lan có thể đi qua được gầm cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó lớn nhất là $13m$ để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.

Câu 3. Trong một thí nghiệm, một quả cầu được gắn vào một đầu dây đàn hồi, đầu kia của sợi dây được gắn cố định vào một thanh treo nằm ngang. Sau khi quả cầu được kéo xuống và thả ra, nó bắt đầu di chuyển lên xuống. Khi đó, chiều cao h (cm) của quả cầu so với mặt đất theo thời gian t (s) được cho bởi công thức $h = 100 - 30 \cos 20t$. Tính thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 4. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của một chiếc ô tô giảm đi 6% so với năm trước đó. Giả sử một chiếc ô tô lúc mới mua là 800 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị còn lại của chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

- Câu 5.** Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của $^{14}_6C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử $^{14}_6C$ giảm đi một nửa. Một cây còn sống có lượng $^{14}_6C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng $^{14}_6C$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ và đo được tỉ lệ phần trăm lượng $^{14}_6C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là 75% . Hỏi mẫu gỗ cổ đó đã chết cách đây bao nhiêu năm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
- Câu 6.** Cô Liên gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Liên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
- Câu 7.** Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày cho bởi công thức $h = 16 + 7 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với $0 \leq t \leq 24$. Tìm thời điểm mà mực nước tại cảng là cao nhất.
- Câu 8.** Công thức Định luật làm mát của Newton được cho như sau: $kt = \ln \frac{T-S}{T_0-S}$ trong đó t là số giờ trôi qua, T_0 là nhiệt độ lúc đầu, T là nhiệt độ sau t giờ, S là nhiệt độ môi trường (T_0, T, S theo cùng một đơn vị đo), k là một hằng số. Một cốc trà có nhiệt độ $96^\circ C$, sau 2 phút nhiệt độ giảm còn $90^\circ C$. Biết nhiệt độ phòng là $24^\circ C$. Tính nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

-----HẾT-----

CHỦ ĐỀ: BPT VÀ HỆ BPT HAI ẨN

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by \leq c \quad (1) \quad (ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c)$$

Trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

2 Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \geq c$)

- **Bước 1:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.
- **Bước 2:** Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc tọa độ O)
- **Bước 3:** Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c .
- **Bước 4:** Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$.

Chú ý: Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 < c$.

II. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

1 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

2 Biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai

Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

- Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Điểm $A(2;1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $x - y + 1 < 0$. B. $-2x + y - 2 > 0$. C. $2x - y + 1 > 0$. D. $x - 2y > 0$.

Câu 2: Cho bất phương trình $x - 2y + 5 > 0$ có tập nghiệm là S . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $(-2; 2) \in S$. B. $(2; 2) \in S$. C. $(-2; 4) \in S$. D. $(1; 3) \in S$.

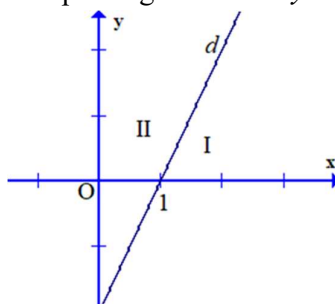
Câu 3: Miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

- A. $(2; 3)$. B. $(-2; 1)$. C. $(2; -1)$. D. $(0; 0)$.

Câu 4: Miền nghiệm của bất phương trình $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A. $Q(-5; 3)$. B. $O(0; 0)$. C. $N(-4; 2)$. D. $P(-2; 2)$.

Câu 5: Đường thẳng $d: 2x - y = 2$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai miền I, II có bờ là đường thẳng d . Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x - y \geq 2$.



- A. Nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d . B. Nửa mặt phẳng I kể cả bờ d .
C. Nửa mặt phẳng II kể cả bờ d . D. Nửa mặt phẳng II bỏ đi đường thẳng d .

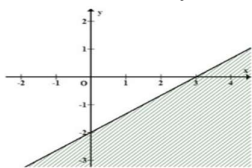
Câu 6: Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 1 < 0$?

- A. $Q(1; 1)$. B. $M(1; -2)$. C. $P(2; -2)$. D. $N(1; 0)$.

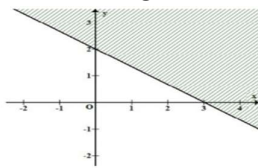
Câu 7: Cho bất phương trình $x - 2y + 5 > 0$ có tập nghiệm là S . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $(-2; 2) \in S$. B. $(2; 2) \in S$. C. $(-2; 4) \in S$. D. $(1; 3) \in S$.

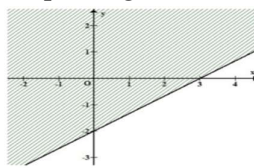
Câu 8: Hình vẽ nào sau đây biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y - 6 \leq 0$?



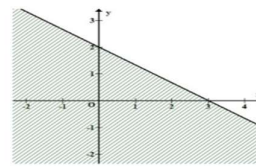
H1



H2



H3



H4

- A. H1 B. H2 C. H3 D. H4

Câu 9: Miền của bất phương trình $2x + y > 1$ không chứa điểm nào sau đây?

- A. $C(3; 3)$. B. $D(-1; -1)$. C. $A(1; 1)$. D. $B(2; 2)$.

Câu 10: Cặp số $(1; -1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $x + y - 3 > 0$. B. $-x - 3y - 1 < 0$. C. $-x - y < 0$. D. $x + 3y + 1 < 0$.

Câu 11: Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 1 < 0$?

- A. $Q(1; 1)$. B. $M(1; -2)$. C. $P(2; -2)$. D. $N(1; 0)$.

Câu 12: Cặp số nào dưới đây là một nghiệm của bất phương trình: $2x - y > 3$.

A. $(3;1)$.

B. $(0;-2)$

C. $(1;1)$.

D. $(2;1)$.

Câu 13: Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$

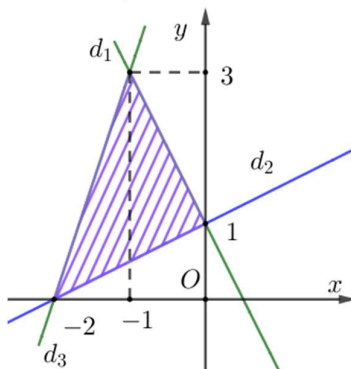
A. $(0;1)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(1;3)$.

D. $(-1;0)$.

Câu 14: Cho miền gạch chéo như hình vẽ dưới đây



Miền trên đây biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào?

A. $\begin{cases} 2x + y > 1 \\ -x + 2y < 2 \\ 3x - y > 6 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + y < 1 \\ -x + 2y < 2 \\ 3x - y > -6 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + y < 1 \\ -x + 2y > 2 \\ 3x - y > -6 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x + y > 1 \\ x - 2y < 2 \\ 3x - y > 6 \end{cases}$

Câu 15: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x + 5y - 1 < 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Điểm nào sau đây thuộc tập S .

A. $(-1;-1) \in S$

B. $(2;5) \in S$.

C. $(3;-1) \in S$

D. $(-1; \frac{2}{5}) \in S$

Câu 16: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y \leq -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$ **không chứa** điểm nào sau đây?

A. $A(3;2)$.

B. $B(6;3)$.

C. $C(6;4)$.

D. $D(5;4)$.

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên $F = y - x$ miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 5x + y \geq -4 \end{cases}$ là

A. $\min F = 2$ khi $x = -1, y = 1$.

B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

C. $\min F = -2$ khi $x = 1, y = -1$.

D. $\min F = -1$ khi $x = 0, y = -1$.

Câu 18: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ: $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là:

A. $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

C. $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của F .

Câu 19: Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y) = x + 2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là

A. 6.

B. 8.

C. 10.

D. 12.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - 2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ là

A. -12.

B. -10.

C. -8.

D. -6.

Câu 21: Biểu thức $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} -2x + y \leq -2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm $S(x; y)$ có toạ độ là

A. (4;1).

B. (3;1).

C. (2;1).

D. (1;1).

Câu 22: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là

A. $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

C. $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

D. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Câu 23: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 5x + y \geq -4 \end{cases}$ là

A. $\min F = -3$ khi $x = 1, y = -2$.

B. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

C. $\min F = -2$ khi $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}$.

D. $\min F = 8$ khi $x = -2, y = 6$.

Câu 24: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

A. 32 triệu đồng.

B. 35 triệu đồng.

C. 14 triệu đồng.

D. 30 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một trò chơi chọn ô chữ đơn giản mà kết quả gồm một trong hai khả năng: Nếu người chơi chọn được chữ A thì người ấy được cộng 3 điểm, nếu người chơi chọn được chữ B thì người ấy bị trừ 1 điểm. Người chơi chỉ chiến thắng khi đạt được số điểm tối thiểu là 20. Gọi x, y theo thứ tự là số lần người chơi chọn được chữ A và chữ B. Khi đó:

a) Tổng số điểm người chơi đạt được khi chọn chữ A là $3x$, tổng số điểm người chơi bị trừ khi chọn chữ B là y .

b) Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y trong tình huống người chơi chiến thắng là $3x - y \geq 18$

c) Người chơi chọn được chữ A 7 lần và chọn được chữ B 1 lần thì người đó vừa đủ điểm dành chiến thắng trò chơi.

d) Người chơi chọn được chữ A 8 lần và chọn được chữ B 3 lần thì người đó vừa đủ điểm dành chiến thắng trò chơi.

Câu 2. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 9 \\ x - 2y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad (I).$$
 Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hệ trên là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn
- b) $(3; 2)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình
- c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tam giác
- d) $x = 1, y = 3$ là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $F = 3x - y$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 3. Bác Minh có kế hoạch đầu tư không quá 240 triệu đồng vào hai khoản X và khoản Y . Để đạt được lợi nhuận thì khoản Y phải đầu tư ít nhất 40 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản X phải ít nhất gấp ba lần số tiền cho khoản Y . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Gọi x, y (đơn vị: triệu đồng) tiền bác Minh đầu tư vào kho ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x + y \leq 240 \\ y \geq 40 \\ x \geq 3y \end{cases}$$
- b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho là một tứ giác
- c) Điểm $C(200; 40)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho
- d) Điểm $A(180; 60)$ là điểm có tung độ lớn nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

Câu 4. Một gia đình cần ít nhất 900 g chất protein và 400 g chất lipid trong thức ăn mỗi ngày. Biết rằng thịt bò chứa 80% protein và 20% lipid. Thịt lợn chứa 60% protein và 40% lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1600 g thịt bò, 1100 g thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 45000 đồng, 1 kg thịt lợn là 35000 đồng. Giả sử gia đình mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 4x + 3y \geq 4,5 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$
 là hệ bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán
- b) Miền nghiệm của hệ trên là miền của tam giác
- c) Gọi T (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x (kilogram) thịt bò và y (kilogram) thịt lợn. Khi đó, chi phí để mua $x(kg)$ thịt bò và $y(kg)$ thịt lợn là: $T = 35x + 45y$ (nghìn đồng).
- d) Gia đình đó mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn thì chi phí là ít nhất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Tìm các nghiệm $(x; y)$ của bất phương trình $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \leq 0$. Trong đó x, y là các số nguyên dương.

Câu 2: Tìm các giá trị của tham số m sao cho $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $m \frac{x}{2} - (m + 1)y + 2 \geq 0$

Câu 3: Bạn Lan mang 150000 đồng đi nhà sách để mua một số quyển tập và bút. Biết rằng giá một quyển tập là 8000 đồng và giá của một cây bút là 6000 đồng. Bạn Lan có thể mua được tối đa bao nhiêu quyển tập nếu bạn đã mua 10 cây bút.

Câu 4: Cho các giá trị x, y thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \\ 3x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$
. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 3x + 2y$

Câu 5: Trong một đợt dã ngoại, một trường học cần thuê xe chở 180 người và 8 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B , trong đó xe A có 10 chiếc và xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một

xe loại B cho thuê với giá 4 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 30 người và 0,8 tấn hàng, mỗi xe loại B có thể chở tối đa 20 người và 1,6 tấn hàng. Tìm số xe mỗi loại sao cho chi phí thuê là thấp nhất.

Câu 6: Một gia đình cần ít nhất 1200 đơn vị protein và 800 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $2,0\text{kg}$ thịt bò và $1,5\text{kg}$ thịt lợn. Giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính $4x^2 + y^2$.

Câu 7: Một hộ nông dân định trồng bắp và khoai lang trên diện tích 4ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng bắp thì cần 10 công và thu 2 triệu đồng, nếu trồng khoai lang thì cần 15 công và thu 2,5 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 45 công.

Câu 8: Người ta dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 160kg hóa chất A và 12kg hóa chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 5 triệu đồng có thể chiết xuất được 25kg chất A và $1,2\text{kg}$ chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20kg chất A và 2kg chất B . Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 9 tấn nguyên liệu loại I và không quá 7 tấn nguyên liệu loại II .

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-3;0); B(0;2); C(3;1); D(3;-2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m;m-1)$ nằm trong hình tứ giác $ABCD$ kể cả 4 cạnh.

Câu 10: Một công ty sản xuất phân bón dự định sản xuất hai loại sản phẩm phân bón X và Y . Các sản phẩm này được chế tạo từ hai loại nguyên liệu A và B . Số tấn dự trữ từng loại nguyên liệu và số tấn từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra 1 tấn sản phẩm được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số tấn nguyên liệu dự trữ	Số tấn nguyên liệu cần dùng để sản xuất 1 tấn sản phẩm	
		X	Y
A	12	3	2
B	8	1	2

Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm X và Y mà công ty cần sản xuất.

a) Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện ràng buộc đối với x và y .

b) Biết rằng khi bán 1 tấn sản phẩm X lãi được 10 triệu đồng và bán 1 tấn sản phẩm Y lãi được 8 triệu đồng. Hãy tìm x và y để số tiền lãi mà công ty thu được là lớn nhất.

Câu 11: Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy II hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất biết một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng và một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng?

Câu 12: Một người ăn kiêng muốn trộn hai loại thức ăn A và B , để tạo ra một hỗn hợp chứa ít nhất 50 g protein, ít nhất 130 mg canxi và không quá 550 calo. Giá trị dinh dưỡng của thức ăn loại A và loại B được cho trong bảng sau:

Thức ăn	Protein (g/ly)	Canxi (mg/ly)	Calo (ly)
A	20	20	10
B	10	50	150

Biết rằng giá tiền một ly thức ăn loại A là 120.000 đồng, một ly thức ăn loại B là 50.000 đồng. Hỏi người ăn kiêng phải sử dụng bao nhiêu ly thức ăn mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Câu 13: Một nhà máy có 50 kg nhôm và 120 kg sắt để sản xuất hai sản phẩm. Một sản phẩm loại A cần 1 kg nhôm và 3 kg sắt bán lời được 20000 đồng, một sản phẩm loại B cần 1 kg nhôm và 2 kg sắt bán lời được 15000 đồng. Hỏi nhà máy cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm loại A , bao nhiêu sản phẩm loại B để thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 14: Để giúp đỡ những người khó khăn, thu nhập thấp được về quê ăn tết đoàn tụ với gia đình, một công ty đã thuê xe phục vụ cho những chuyến xe nghĩa tình đưa 180 người và 8 tấn hàng về quê ăn tết. Nơi thuê

xe có hai loại xe A và B , trong đó xe A có 10 chiếc và xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một xe loại B cho thuê với giá 4 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 30 người và 0,8 tấn hàng, mỗi xe loại B có thể chở tối đa 20 người và 1,6 tấn hàng. Tìm số xe mỗi loại sao cho chi phí thuê là thấp nhất.

Câu 15: Bạn An kinh doanh hai mặt hàng handmade là vòng tay và vòng đeo cổ. Mỗi vòng tay làm trong 4 giờ, bán được 40 ngàn đồng. Mỗi vòng đeo cổ làm trong 6 giờ, bán được 80 ngàn đồng. Mỗi tuần bạn An bán được không quá 15 vòng tay và 4 vòng đeo cổ. Tính số giờ tối thiểu trong tuần An cần dùng để bán được ít nhất 400 ngàn đồng?

Câu 16: Câu toán về "dán tem thư trên phong bì": Để tham gia hội chợ tem sưu tập, chú Nam dán một số con tem nhỏ và lớn vào phong bì để bán cho khách. Diện tích của tem nhỏ, tem lớn và phong bì thư (không kể viền) lần lượt là 7cm^2 , 14cm^2 và 196cm^2 các con tem và bì thư đều có dạng hình chữ nhật và diện tích con tem được tính bằng chiều dài a nhân chiều rộng b như hình vẽ minh họa). Theo quy định ban tổ chức hội chợ, số lượng tem dán vào phong bì không vượt quá 19 con. Giá tiền phong bì có dán tem tính trên số con tem được dán trên bì thư: tem nhỏ có giá bán 5000 đồng /1 con, tem lớn là 9000 đ/1 con. Hỏi chú Nam phải dán bao nhiêu tem nhỏ, tem lớn vào phong bì để bán được giá cao nhất?

Câu 17: Trong một trận lụt ở Hội An, một khách sạn bị nước lụt tràn vào, cần di chuyển cùng một lúc 40 hành khách và 24 vali hành lý. Lúc này chỉ huy động được 8 chiếc ghe lớn và 8 chiếc ghe nhỏ. Một chiếc ghe lớn chỉ có thể chở 10 hành khách và 4 vali hành lý. Một chiếc ghe nhỏ chỉ có thể chở 5 hành khách và 4 vali hành lý. Giá một chuyến ghe lớn là 250 ngàn đồng và giá một chuyến ghe nhỏ là 130 ngàn đồng. Hỏi chủ khách sạn cần thuê bao nhiêu chiếc ghe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

Câu 18: Một học sinh trường THPT X dự định gấp hạc và làm hoa để đem bán gây quỹ từ thiện giúp đỡ một học sinh trong trường mắc bệnh hiểm nghèo. Cần 4 phút để gấp 1 con hạc và 5 phút để làm được 1 bông hoa. Biết 1 con hạc bán giá 5.000 đồng, 1 bông hoa bán giá 8.000 đồng và học sinh này có không quá 80 phút để làm. Tổng số sản phẩm không vượt quá 18. Hỏi bạn cần làm bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để thu được nhiều tiền nhất?

-----HẾT-----

CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

A

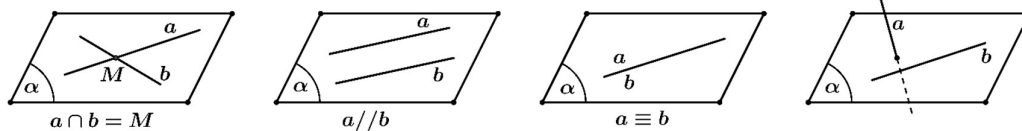
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

❖ Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

- Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đó, a và b có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b , hoặc b chéo với a .

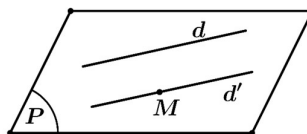


❖ **Nhận xét:**

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

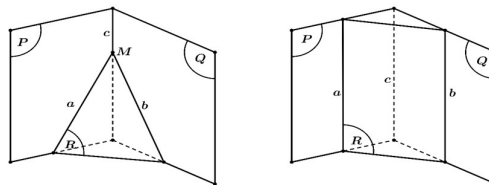
2. Tính chất của hai đường thẳng song song

❖ **Tính chất 1:** Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

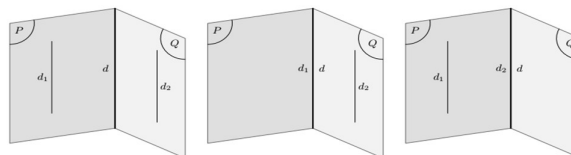


❖ **Tính chất 2:** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

❖ **Tính chất 3:** Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



❖ **Nhận xét:** Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).



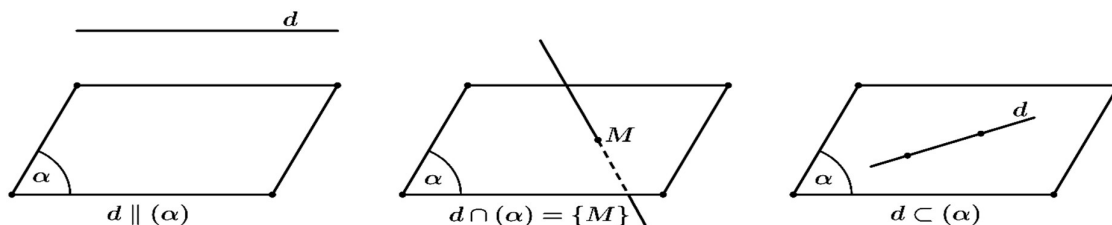
II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

❖ Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.

❖ Ngoài ra:

- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

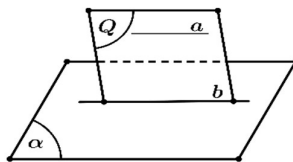


❖ **Nhận xét:**

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

2. Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

- ❖ **Tính chất 1:** Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P) .

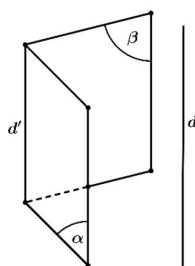


- Kí hiệu: $\begin{cases} a // d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a // (P)$

- ❖ **Tính chất 2:** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .

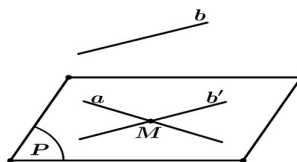
- Kí hiệu: $\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$

- ❖ **Chú ý 1:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.



- Kí hiệu: $\begin{cases} d // (\alpha) \\ d // (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d // d'$

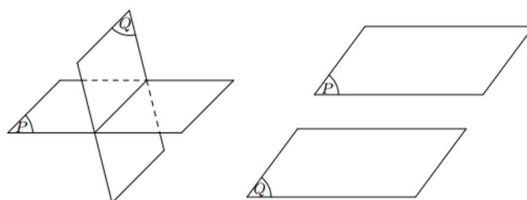
- ❖ **Chú ý 2:** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



III. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Hai mặt phẳng song song

- ❖ Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) . Có hai khả năng xảy ra:

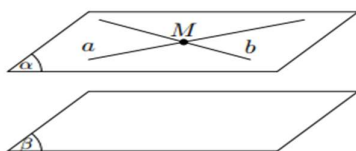


$(P), (Q)$ có một điểm chung: $(P) \cap (Q) = a$ $(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

- ❖ **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

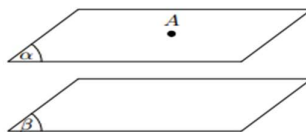
2. Điều kiện và tính chất của hai mặt phẳng song song

- ❖ **Tính chất 1:** (Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song). Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

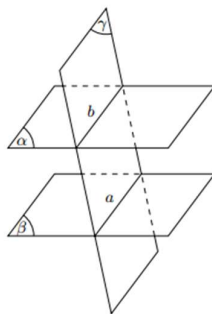


- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.

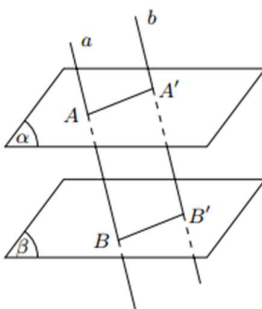
- ❖ **Tính chất 2:** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.
 - Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
 - Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .
- ❖ **Tính chất 3:** Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

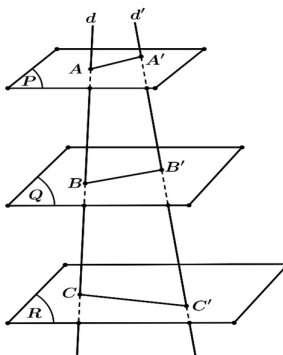


- Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



3. Định lý Thales

- ❖ Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

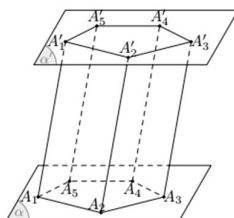


- ❖ Nếu hai cát tuyến d và d' cắt ba mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q) \parallel (R)$ lần lượt tại các giao điểm

$$A, B, C \text{ và } A', B', C' \text{ thì } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

4. Hình lăng trụ và hình hộp

- ❖ **Định nghĩa hình lăng trụ:** Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1, A'_2, ..., A'_n$ với các hình chữ nhật $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ...$ được gọi là hình lăng trụ.

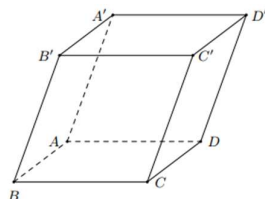


- ❖ **Tính chất:**

- Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.

- Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.
- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', \dots$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.
- Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.

❖ **Định nghĩa hình hộp:** Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



❖ **Tính chất:**

- Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.
- Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.
- Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.
- Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.
- Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.
- Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.
- Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.

IV. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

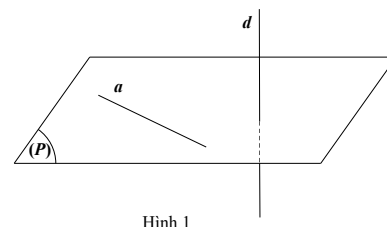
1. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° , kí hiệu $a \perp b$.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P) (Hình 1), kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp d$.



Hình 1

b) Dấu hiệu nhận biết

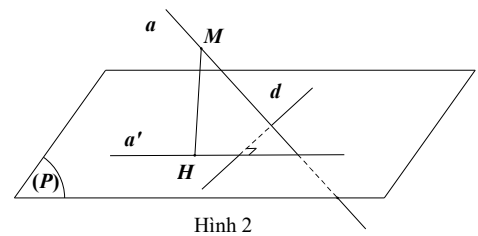
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

c) Tính chất

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

d) Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) . Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) (Hình 2).



3. Hai mặt phẳng vuông góc

a) Định nghĩa

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng $(P), (Q)$ gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $(P) \perp (Q)$.

b) Dấu hiệu nhận biết

Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

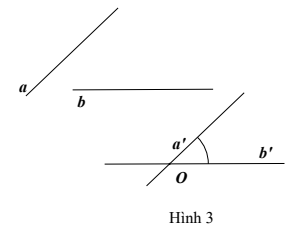
c) Tính chất

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

V. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b (Hình 3), kí hiệu (a, b) hoặc (a, b) .



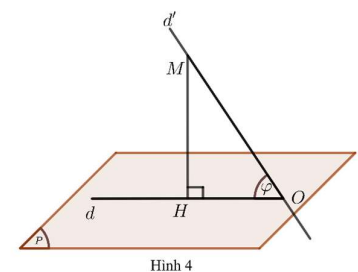
Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian có số đo từ 0° đến 90° .

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) , ta có định nghĩa sau:

- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90° .
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P) (Hình 4), kí hiệu $(d, (P))$.

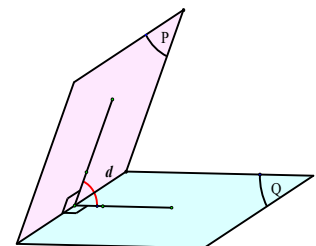
Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0° đến 90° .



3. Góc nhị diện

- Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ; kí hiệu $[P, d, Q]$ hoặc $[M, d, N]$, trong đó $(P), (Q)$ là hai nửa mặt phẳng có chung bờ là đường thẳng d và M, N là các điểm lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng $(P), (Q)$. Đường thẳng d gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ gọi là một mặt của góc nhị diện.

Cho góc nhị diện. Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai



mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.

- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.
- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

Nhận xét: Góc nhị diện có số đo từ 0° đến 180° .

VI. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên Δ , kí hiệu $d(M, \Delta)$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên (P) , kí hiệu $d(M, (P))$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta, \Delta')$.

4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) . Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(\Delta, (P))$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $d((P), (Q))$.

6. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

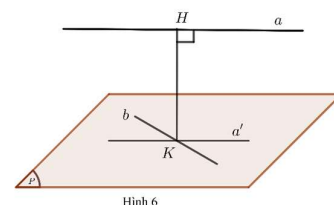
Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

- Có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a, b , gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

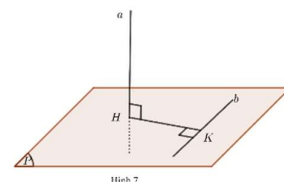
Nhận xét

- Gọi (P) là mặt phẳng chứa b và song song với a , hình chiếu của a trên (P) là a' , giao điểm của a' và b là K , hình chiếu của K trên a là H (Hình 6). Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của a và b . Ngoài ra, $d(a, b) = HK = d(a, (P))$.

Trong trường hợp đặc biệt ab , ta có thể xác định như sau: Gọi (P) là mặt phẳng chứa b và vuông góc với a , giao điểm của a và (P) là H , hình chiếu của H trên b là K (Hình 7). Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của a và b .



Hình 6



Hình 7

VII. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ KHỐI ĐA DIỆN

- Công thức tính thể tích của khối lăng trụ: $V = Sh$.
Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối lăng trụ.

- Công thức tính thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối chóp.

- Công thức tính thể tích của khối chóp cắt đều: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$.

Trong đó V, h, S_1, S_2 lần lượt là thể tích, chiều cao, diện tích hai đáy của khối chóp cắt đều.

B

BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trong các cặp đường thẳng sau, cặp đường thẳng nào cắt nhau?

- A. AB và CD . B. AC và BD C. SB và CD . D. SD và BC .

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MN \parallel (ABCD)$. B. $MN \parallel (SAB)$. C. $MN \parallel (SCD)$. D. $MN \parallel (SBC)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD) là?

- A. SB B. SO C. SC D. SD

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trong các cặp đường thẳng sau, cặp đường thẳng nào song song?

- A. AB và CD . B. AC và BD . C. SB và CD . D. SD và BC .

Câu 5. Số mặt của hình lăng trụ tam giác là

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Câu 6. Cho tứ diện $S.ABC$. Trên SA, SC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt AC tại E . Điểm E không thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- A. (ABC) . B. (SAC) . C. (BMN) . D. (SBC) .

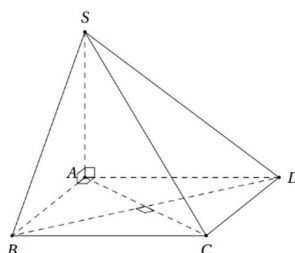
Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

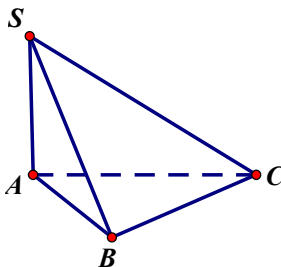
- A. $SA \perp (ABCD)$ B. $SO \perp (ABCD)$ C. $AB \perp (SBC)$ D. $AC \perp (SBC)$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $AC \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAD)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$. (minh họa như hình vẽ bên).



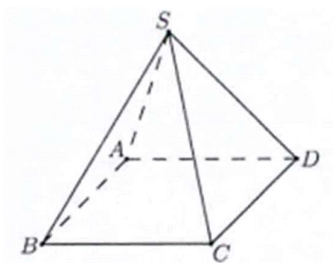
Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Góc phẳng nhị diện $[B, AA', C]$ có số đo bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. $\sqrt{7}$. B. 1. C. 7. D. $\sqrt{11}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi N là trung điểm của cạnh SC . Lấy điểm M đối xứng với B qua A , OM cắt AD tại K . Gọi giao điểm G của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAD) . Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

- a) $MD \parallel AC$.
 b) Đường ON và SA cắt nhau.
 c) $GK \parallel ON$.
 d) Tỉ số $\frac{GM}{GN} = 3$.

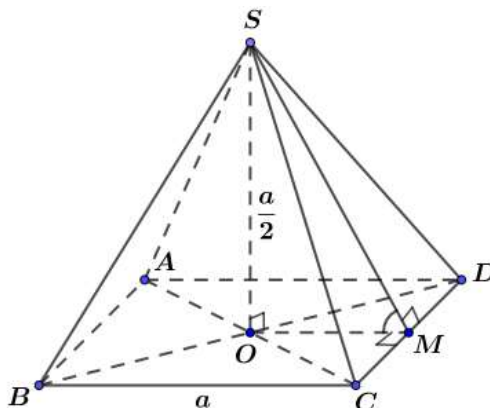
Câu 2. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $BB' \parallel (ACC'A')$.
 b) $(ABC) \parallel (A'B'C')$.
 c) IG cắt $(BCC'B')$.
 d) $(IKG) \parallel (BCC'B')$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh SB và SC .

- a) SA vuông góc BD .
- b) BD vuông góc mặt phẳng (SAC) .
- c) AK vuông góc với mặt phẳng (SCD) .
- d) SC vuông góc mặt phẳng (AHK) .

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $\frac{a}{2}$. Gọi M là trung điểm CD như hình vẽ.



- a) Đường thẳng SD là cạnh của nhị diện (SAD) và (SCD) .
- b) Góc nhị diện $[(SAC), AC, (ABCD)]$ là góc nhị diện vuông.
- c) Góc $\widehat{SDO}$ là góc phẳng nhị diện $[S, CD, O]$.
- d) Số đo góc phẳng nhị diện $[S, CD, O]$ bằng 45° .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi E là trung điểm SC . Gọi F là điểm trên đoạn BD sao cho $3BF = 2BD$ và M là giao điểm của SB và (AEF) . Khi đó tỉ số

$\frac{SM}{SB}$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $3a + b$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh

BC, CD và M là điểm trên cạnh SB sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}$. Gọi N là giao điểm của MD và mặt phẳng

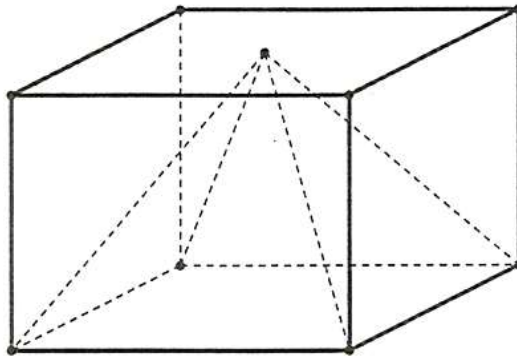
(SIK) . Tính tỉ số $\frac{ND}{NM}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh BC , (α) là mặt phẳng qua A, M và song song với SD . Mặt phẳng (α) cắt SB tại N , tính tỉ số $\frac{SN}{SB}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có M , $SA = \sqrt{3}$ và $\triangle ABC$ vuông tại B có cạnh $BC = 1$, $AC = \sqrt{5}$. Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC) . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 5. Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết

cạnh của chiếc hộp bằng 30 cm , hãy tính thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong) (đơn vị dm^3).

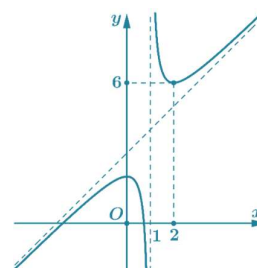


Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng AB, SC bằng (đơn vị độ)

-----**HẾT**-----

ĐỀ ÔN THI TNTHPT – ĐỀ SỐ 01Thời gian làm bài: **90 phút****PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN****Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 1)$.
 B. $(1; 2)$.
 C. $(0; 1)$.
 D. $(2; +\infty)$.

**Câu 2.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

- A. $F(x) = -\frac{1}{x^2} + x + C$.
 B. $F(x) = \ln|x| + x + C$.
 C. $F(x) = \ln x + x + C$.
 D. $F(x) = \ln|x| + C$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 3; 2)$ là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$.
 B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
 C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$.
 D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là:

- A. $\vec{a} = (2; -3; -1)$. B. $\vec{a} = (-1; 2; -3)$. C. $\vec{a} = (2; -1; -3)$. D. $\vec{a} = (-3; 2; -1)$.

Câu 6. Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x^3} = 4^{x^2-2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm $x \in \mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 7. Sơn là một học sinh rất giỏi chơi rubik, cậu ấy có thể giải nhiều loại rubik khác nhau trong khoảng thời gian khá ngắn. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3 , Sơn đã tự thống kê lại thời gian (đơn vị: giây) trong 25 lần giải rubik liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	$[8; 10)$	$[10; 12)$	$[12; 14)$	$[14; 16)$	$[16; 18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 5,98. B. 3,12. C. 2,44. D. 2,5.

Câu 8. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc (α) và (β) là

- A. $x - y - 2z = 0$. B. $2x + y - 2z = 0$. C. $2x + y - 2z + 1 = 0$. D. $2x - y + 2z = 0$

Câu 9. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11, người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Một của mẫu số liệu trên là

- A. 52. B. 42. C. 53. D. 54.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.

Phát biểu nào sau đây **sai**?

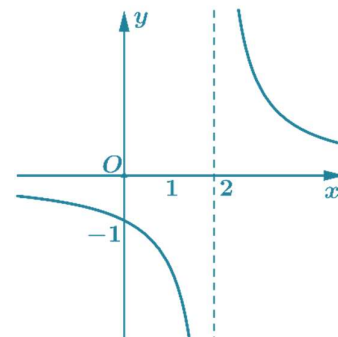
- A. $CD \perp (SBC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Câu 11. Một vật thể có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một tam giác đều có cạnh bằng x . Tìm thể tích vật thể đó.

- A. $V = \frac{12\pi}{5}$. B. $V = \frac{12}{5}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 12. Tìm các hệ số b, c của hàm số $y = \frac{2}{cx + b}$ có đồ thị như hình vẽ sau:

- A. $\begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$.



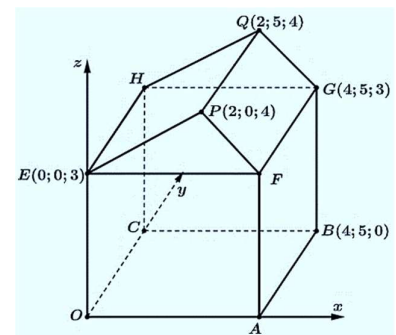
PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Một cánh quạt gió quay với góc $\theta(t)$ (radian) so với vị trí ban đầu tại thời điểm t (giây) được mô tả bởi hàm số $\theta(t) = 2t + 0,5\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$.



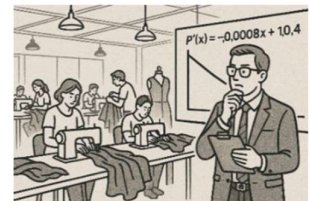
Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tại thời điểm $t = 0$ thì góc quay của cánh quạt là $0,5 \text{ rad}$.	☐	☐
b) Vận tốc góc của cánh quạt tại thời điểm t là $\omega(t) = 2 - \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \text{ rad/s}$.	☐	☐
c) Vận tốc góc của cánh quạt luôn lớn hơn hoặc bằng $2 - \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$.	☐	☐
d) Gia tốc góc của cánh quạt tại thời điểm $t = 3$ giây là 0 rad/s^2 .	☐	☐

Câu 2. Một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được cho như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là 1 mét; trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$ và $F(5; 0; 3)$.	☐	☐
b) Tọa độ của các điểm $C(0; 5; 0)$ và $H(0; 5; 3)$.	☐	☐
c) Sức chứa tối đa của ngôi nhà bằng 72 mét khối.	☐	☐
d) $[Q, FG, A] = 116,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).	☐	☐

Câu 3. Giả sử lợi nhuận biên của một sản phẩm (tính bằng triệu đồng/đơn vị sản phẩm) được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$; biết rằng $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,004x^2 + 10,4x$.	☐	☐
b) Lợi nhuận khi bán được 100 đơn vị sản phẩm đầu tiên là 1036 triệu đồng.	☐	☐
c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 80 lên 100 đơn vị sản phẩm là 206,56 triệu đồng.	☐	☐
d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó có tất cả 25800 giá trị nguyên của a thỏa mãn.	☐	☐

Câu 4. Một túi chứa ba quả bóng được đánh số 1; 2; 3. Cậu Jack chọn ngẫu nhiên một trong các quả bóng này và ghi lại số trên quả bóng được chọn. Sau đó cậu ta tung một số đồng xu công bằng (gồm hai mặt sấp ngửa) bằng với số ghi trên quả bóng đã chọn.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Nếu Jack chọn được quả bóng ghi số 1 thì xác suất xuất hiện mặt ngửa bằng 0,5.	☐	☐
b) Xác suất để số lần xuất hiện mặt sấp và mặt ngửa bằng nhau là $\frac{1}{3}$.	☐	☐
c) Xác suất để chỉ có mặt ngửa xuất hiện bằng $\frac{7}{24}$.	☐	☐
d) Biết rằng có mặt ngửa xuất hiện, xác suất cậu Jack đã tung 2 đồng xu bằng $\frac{6}{17}$.	☐	☐

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

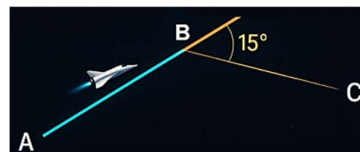
Câu 1. Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha . Trên diện tích mỗi ha , nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi hộ nông dân đó thu được tối đa bao nhiêu triệu đồng dựa vào việc trồng hai loại cây trên, biết rằng tổng số công không quá 180?

Trả lời:



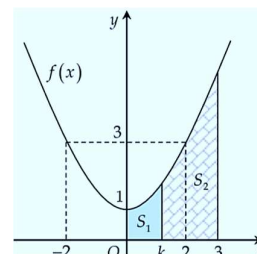
Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đơn vị 50 km, một con tàu vũ trụ bay thẳng từ $A(-3;1;2)$ đến $B(2;7;-4)$ mất 45 phút. Sau đó tàu điều chỉnh nhỏ hướng bay sao cho chiều chuyển động thẳng lúc này hợp với hướng $\overline{AB}$ một góc 15° , vẫn giữ nguyên tốc độ ban đầu và bay thêm 30 phút thì đến vị trí C . Hỏi khoảng cách thực tế của hai vị trí A, C bằng bao nhiêu km (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời:



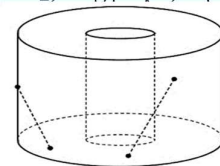
Câu 3. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) là đường parabol như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục Ox , trục Oy , đường thẳng $x = 3$ có diện tích S . Đường thẳng $x = k$ với $k \in (0; 3)$ chia S ra thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Nếu $S_1 = 2S_2$ thì giá trị k bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Trả lời:



Câu 4. Kể từ ngày dính chấn thương nghiêm trọng ở trận đấu cuối cùng tại AFF cup 2024, Xuân Sơn ngoài việc luyện tập để phục hồi cái chân phải của mình thì anh còn muốn dành nhiều thời gian vui chơi cùng các con nhỏ. Sơn muốn thiết kế một cái cốc hình trụ có thể chứa được tối đa 1 lít nước. Sau đó anh lấy một khối trụ đặc có bán kính 3 cm , cùng chiều cao với chiếc cốc và đặt vào bên trong cốc sao cho hai đường tròn đáy của hai hình trụ là đồng tâm. Kể đến Sơn đặt nhiều thanh thủy tinh nhỏ phát sáng có dạng đoạn thẳng vào cốc chứa đầy dung dịch màu. Biết rằng PQ là thanh thủy tinh có **độ dài lớn nhất** được bỏ vào cốc (không có điểm nào nhô ra khỏi mặt nước), tìm **giá trị bé nhất** của đoạn PQ (tính theo đơn vị cm , làm tròn đến hàng phần chục).

Trả lời:

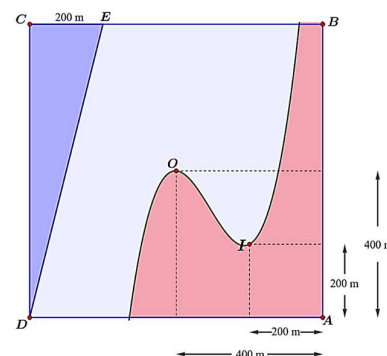


Câu 5. Một cánh đồng có dạng hình vuông $ABCD$ với cạnh bằng 800 m .

- Trên cạnh BC , lấy điểm E sao cho $CE = 200\text{ m}$. Khu đất thứ nhất có dạng tam giác CDE .
- Khu đất thứ hai được giới hạn bởi các cạnh AD , AB và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Qua khảo sát, người ta biết rằng tâm O của hình vuông là một điểm cực trị của (C) , điểm cực trị còn lại là I cách các cạnh AB , AD một đoạn cùng bằng 200 m .

Người ta quyết định xây một cây cầu nối hai khu đất nói trên, biết rằng mặt cầu là một cung tròn có góc ở tâm 20° . Tính chiều dài ngắn nhất của cây cầu (theo mặt cầu), làm tròn đến hàng đơn vị của mét.

Trả lời:



Câu 6. Có 12 quả bóng gồm 4 quả bóng vàng giống nhau và 8 quả bóng xanh được đánh số 1, 2, ..., 8. Người ta bỏ ngẫu nhiên tất cả số bóng trên vào ba hộp đựng A, B, C



khác nhau, mỗi hộp có 4 ngăn đánh số 1, 2, 3, 4, mỗi ngăn chứa đúng 1 quả bóng.

Gọi N là số cách phân bố các quả bóng vào các ngăn vào ba hộp trên sao cho có đúng một hộp chứa toàn các bóng mang số chẵn. Tính giá trị $\frac{N}{35}$.

Trả lời:

HẾT

ĐỀ ÔN THI TNTHPT – ĐỀ SỐ 02

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-4;1)$. B. $(0;+\infty)$. C. $(-\infty;0)$. D. $(0;2)$.

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

- A. $3\ln|2x+3|+C$. B. $\frac{1}{3}\ln|2x+3|+C$. C. $2\ln|2x+3|+C$. D. $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Câu 3. Sau khi kiểm tra sức khỏe tổng quát, kết quả về cân nặng (đơn vị: kg) của 40 học sinh lớp 12A được thể hiện trong bảng số liệu sau:

Cân nặng	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Số học sinh	7	12	12	7	2

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. 50 B. 50,5. C. 52,5. D. 55,5.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. $\sqrt{11}$. B. $3\sqrt{3}$. C. 11. D. 27.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Giá trị của u_3 là

- A. 10. B. 14. C. 7. D. 9.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến?

- A. $x+2y+3=0$. B. $x+2y+3z=0$. C. $y+2z+3=0$. D. $x+2z+3=0$.

Câu 7. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$ là

- A. $x=0$. B. $(-\sqrt{2};-5)$. C. $x=\sqrt{2}$. D. $(0;-3)$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAD) ?

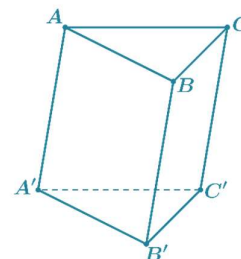
- A. SC . B. SB . C. BC . D. CD .

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1$ là

- A. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. C. $(-\infty; \log_2 5)$. D. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{BC'}$ được biểu diễn theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là

- A. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.



Câu 11. Thời gian chạy bộ mỗi ngày (tính bằng phút) trong 18 ngày liên tiếp gần nhất của bạn An được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho gần nhất với số nào sau đây?

- A. 31,44. B. 31,25. C. 5,59. D. 5,60.

Câu 12. Mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}$ có phương trình là

- A. $3x - 2y + z + 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 2 = 0$.
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$. D. $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x + 2x + 1$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.	☐	☐
b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 2 \sin 2x + 2$.	☐	☐
c) Nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ là $x = \frac{\pi}{4}$.	☐	☐
d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ bằng 2π .	☐	☐

Câu 2. Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Tỷ lệ người có bệnh nền ở địa phương X là 8%. Đối với người có bệnh nền thì xác suất xảy ra phản ứng phụ sau khi tiêm là 35%. Đối với người không có bệnh nền thì xác suất xảy ra phản ứng phụ sau khi tiêm là 16%. Chọn ngẫu nhiên một người từ địa phương X đã được tiêm vaccine.

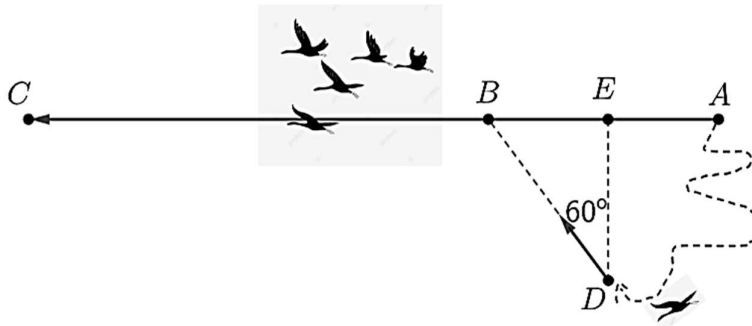
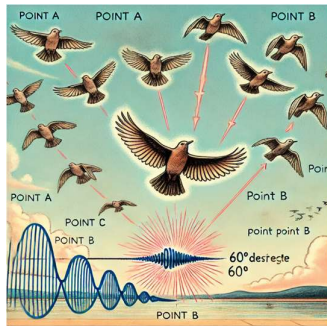


Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

Đúng Sai

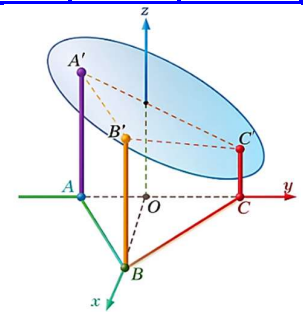
a) Xác suất để người được chọn không có bệnh nền bằng 0,65.	☐	☐
b) Xác suất để người được chọn không gặp phản ứng phụ sau khi tiêm bằng 0,8248.	☐	☐
c) Xác suất để người được chọn là một người không có bệnh nền bằng $\frac{180}{219}$ biết rằng người đó gặp phản ứng phụ sau khi tiêm.	☐	☐
d) Xác suất để người được chọn là một người có bệnh nền bằng $\frac{65}{1031}$ biết rằng người đó không gặp phản ứng phụ sau khi tiêm.	☐	☐

Câu 3. Một đàn chim đang bay theo phương ngang, khi đến vị trí A thì bỗng nghe tiếng súng nổ của một gã thợ săn gần đó. Một con chim hoảng loạn đã rời khỏi đàn, bay chao đảo xuống phía dưới. Bầy chim còn lại thì sợ hãi, từ vị trí B , chúng bay nhanh về phía trước với vận tốc được tăng thêm $0,5 \text{ m}$ sau mỗi giây. Riêng con chim rời khỏi đàn phải mất vài giây để lấy lại bình tĩnh, từ vị trí D nó bay đến vị trí B theo phương hợp với phương thẳng đứng một góc 60° , vận tốc $43,2 \text{ km/h}$ và sau 6 giây nó đến được B . Giả sử các con chim luôn bay theo đường thẳng.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Quãng đường BD bằng 68 m .	☐	☐
b) Nếu bay với vận tốc $43,2 \text{ km/h}$ theo phương thẳng đứng thì mất 4 giây sau, con chim lạc đàn sẽ đạt được độ cao của đàn chim đang bay.	☐	☐
c) Sau 10 giây, bầy chim (thiếu 1 con) bay được đến C với $BC = 155 \text{ m}$, vận tốc của bầy chim tại B là 13 m/s .	☐	☐
d) Biết rằng con chim lạc đàn bay từ B với vận tốc $v = t + 12 \text{ (m/s)}$ (nếu lấy B làm mốc thì đàn chim bay trước con chim này khoảng 11 giây); sau 42,6 giây (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục) nó sẽ bắt kịp đàn chim.	☐	☐

Câu 4. Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ. Các cây cột trụ này vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 8 m , 9 m , 10 m . Chân cột là các đỉnh A, B, C của một tam giác đều có cạnh bằng 8 m ; AA' là cột cao nhất và CC' là cột thấp nhất. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $B \in Ox$, $C \in Oy$, tia Oz cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$; gốc tọa độ O trùng với trung điểm của AC và đơn vị trên mỗi trục là mét.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tọa độ các điểm $A'(0; -4; 10)$, $B'(4\sqrt{3}; 0; 9)$, $C'(0; 4; 8)$.	☐	☐
b) Phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ là: $y + 4z - 36 = 0$.	☐	☐

c) Mái nhà trên có độ dốc thuộc mức tiêu chuẩn, biết rằng độ dốc của một mái nhà tiêu chuẩn nằm trong khoảng 27° đến 35° .	☐	☐
d) Biết rằng bề mặt mái nhà là hình tròn có tâm I trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$, khi đó điểm I cách mặt sàn một khoảng là 9 mét.	☐	☐

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một công ty sản xuất và bán ra một loại sản phẩm ra thị trường. Biết rằng hàm doanh thu (Revenue) của công ty là $R(x) = 50x - 0,5x^2$, trong đó x là số lượng sản phẩm bán ra (đơn vị: nghìn sản phẩm) và $R(x)$ có đơn vị là nghìn USD. Hàm chi phí (Cost) của công ty là $C(x) = 20x + 100$, trong đó x là số lượng sản phẩm sản xuất ra (đơn vị: nghìn sản phẩm), $C(x)$ cũng có đơn vị là nghìn USD. Công ty đang tính toán số lượng sản phẩm x cần sản xuất và bán ra để tối đa hóa lợi nhuận (Profit). Giả sử công ty sản xuất bao nhiêu thì sẽ bán hết bấy nhiêu sản phẩm. Tính lợi nhuận tối đa của công ty theo đơn vị nghìn USD.



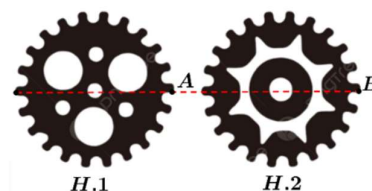
Trả lời:

Câu 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1 và cạnh bên $SA = 2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB . (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời:

Câu 3. Hình vẽ dưới đây là hai bánh răng của một động cơ, chúng có cùng kích thước bán kính. Khi động cơ hoạt động, hai bánh răng quay đều cùng chiều. Biết rằng tốc độ quay của bánh răng thứ hai (hình 2) gấp đôi tốc độ quay của bánh răng thứ nhất (hình 1) và phương trình biểu thị độ cao của điểm A ở bánh răng thứ nhất là $h_A = 2R + R \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ (trong đó R là bán kính bánh răng, t là thời gian tính bằng giây, h_A là độ cao của điểm A).

Giả sử tại thời điểm bắt đầu khởi động, hai điểm A và B có độ cao bằng nhau. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động, hai điểm A và B có độ cao bằng nhau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

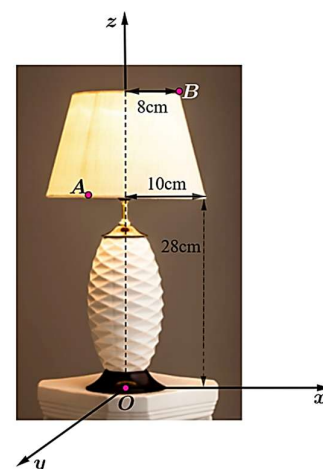


Trả lời:

Câu 4. Một cây đèn ngủ có chiều cao bằng 44 cm, chao đèn có dạng một hình nón cụt với bán kính hai đáy lần lượt là 10 cm và 8 cm. Khoảng cách ngắn nhất từ chao đèn đến đế đèn bằng 28 cm.

Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là cm, trong đó A là điểm thuộc đường tròn đáy lớn của chao đèn và nằm trong mặt phẳng Oyz , B là điểm thuộc đường tròn đáy nhỏ của chao đèn và nằm trong mặt phẳng Oxz . Hãy tính cosin góc tạo bởi hai vector $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ và làm tròn đến hàng phần trăm.

Trả lời:



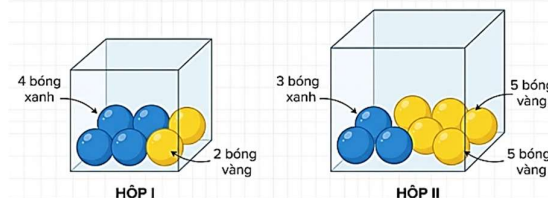
Câu 5. Trên một mặt hồ phẳng rộng $470 m^2$, một đợt tảo lam độc hại phát triển với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai diện tích hiện tại của nó. Nếu ta gọi $S(t)$ là diện tích của đợt tảo này sau t ngày thì $S'(t) = k\sqrt{S(t)}$ (trong đó k là hằng số thực dương). Khi mới phát hiện, đợt tảo này bao phủ $16 m^2$ mặt hồ; diện tích của nó tăng gấp đôi trong ngày tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày tính từ lúc phát hiện thì đợt tảo này phủ kín mặt hồ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Câu 6. Hộp I có 4 bóng xanh và 2 bóng vàng, hộp II có 3 bóng xanh và 5 bóng vàng. Người ta lấy ngẫu nhiên từ hộp I ra 1 quả bóng và xem màu của nó, nếu là màu xanh thì quả bóng đó sẽ được bỏ vào hộp II; nếu là quả bóng vàng thì họ sẽ trả quả bóng vàng trở lại hộp I, đồng thời bổ sung thêm 1 quả bóng vàng nữa cho hộp I rồi tiếp tục bốc ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp I bỏ sang hộp II. Cuối cùng họ lấy ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp II. **Biết rằng 2 quả bóng lấy được từ hộp II có màu vàng, tính xác suất để 1 trong 2 quả bóng đó được chuyển từ hộp I sang hộp II, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.**

Trả lời:

HẾT



ĐỀ ÔN THI TNTHPT – ĐỀ SỐ 03

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 6$ và $u_2 = -12$. Công bội q của cấp số nhân đã cho là

- A. $q = -\frac{1}{2}$. B. $q = -2$. C. $q = -18$. D. $q = -6$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z = 0$. Mặt phẳng (Q) qua M và song song với (P) có phương trình là

- A. $x + 2y + z + 4 = 0$. B. $x + 2y + z - 1 = 0$. C. $x + 2y - z - 6 = 0$. D. $x + 2y + z - 4 = 0$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. (SAB) . B. (SBC) . C. (SCD) . D. (SBD) .

Câu 5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

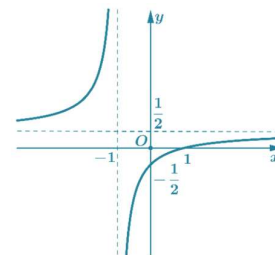
- A. $S = (3; 7]$. B. $S = [3; 7]$. C. $S = (-\infty; 7]$. D. $S = [7; +\infty)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

- A. 8. B. 12. C. 4. D. 16.

Câu 7. Cho hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $x = -1$. B. $y = \frac{1}{2}$.
C. $y = -1$. D. $x = \frac{1}{2}$.

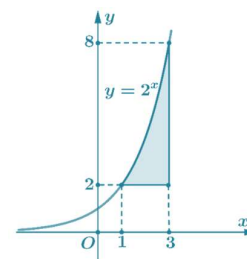


Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x^2 - \frac{4}{x}$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x) dx$ bằng

- A. $\frac{7}{3} - \ln 2$. B. 3. C. $\frac{7}{3}$.
D. 5.

Câu 9. Diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên bằng

- A. $\int_1^3 (2^x - 2) dx$. B. $\int_1^3 (2^x + 2) dx$.
C. $\int_1^3 (2 - 2^x) dx$. D. $\int_1^3 2^x dx$.



Câu 10. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 12 được cho theo mẫu số liệu sau:

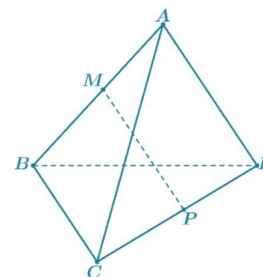
Khoảng điểm	$[6,5; 7)$	$[7; 7,5)$	$[7,5; 8)$	$[8; 8,5)$	$[8,5; 9)$	$[9; 9,5)$	$[9,5; 10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Phương sai của mẫu số liệu về điểm trung bình môn Toán của các học sinh đó gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 0,616. B. 0,785. C. 0,78. D. 0,609.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$. B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.
C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$. D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.



Câu 12. Theo thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh đã trúng tuyển vào lớp 10 tại một địa phương năm học 2024 – 2025, người ta thu được kết quả như bảng sau:

Khoảng g điểm	$[6,5; 7)$	$[7; 7,5)$	$[7,5; 8)$	$[8; 8,5)$	$[8,5; 9)$	$[9; 9,5)$	$[9,5; 10)$
Tần số	7	10	17	24	13	8	5

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. $\Delta_Q = 1,1$. B. $\Delta_Q = 1$. C. $\Delta_Q = 1,2$. D. $\Delta_Q = 0,6$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \log_5(x^3 - 3x^2 + 4)$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Điều kiện xác định của hàm số là $x > 2$.	☐	☐
b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{(x^3 - 3x^2 + 4) \ln 5}$.	☐	☐
c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(2; +\infty)$.	☐	☐

d) Bất phương trình $f'(x) > \frac{\log e}{\log 5}$ có đúng 3 nghiệm nguyên khi hàm $f(x)$ xác định.



Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km .



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới phủ sóng của trạm là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$.	☐	☐
b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.	☐	☐
c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.	☐	☐
d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một thiết bị nghe gọi đang ở vị trí $B(5;6;7)$ được di chuyển tới vùng phủ sóng là 8 km .	☐	☐

Câu 3. Giám đốc của công ty xây dựng X trực tiếp tham gia đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu dự án 1 là 60%, khả năng thắng thầu dự án 2 là 50%, khả năng thắng thầu cả hai dự án là 40%. Gọi A và B lần lượt là các biến cố công ty thắng thầu dự án 1 và dự án 2.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) A và B là hai biến cố độc lập.	☐	☐
b) Khả năng công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 30%.	☐	☐
c) Xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 bằng 0,5 biết rằng công ty đã thắng thầu dự án 1.	☐	☐
d) Nếu công ty X thất bại cả hai gói thầu thì giám đốc (người trực tiếp đấu thầu) sẽ bị cách chức, ông ta đã cố gắng chạy chọt đủ cách, nhờ đó mà khả năng thắng thầu ở mỗi hạng mục của công ty tăng đều 5% (kể cả khả năng thắng thầu cả hai dự án). Xác suất để giám đốc công ty X vẫn bị mất ghế là 25%.	☐	☐

Câu 4. Một chiếc xe hơi đang chuyển động thẳng đều với vận tốc bằng 108 km/h thì đi vào vùng có gió ngược chiều; lực cản của gió gây ra cho xe một gia tốc $a(t) = -0,5v(t)$ (m/s^2) với $v(t)$ là vận tốc của xe được tính bằng m/s . Trong bài toán ta có vận tốc $v(t) > 0$ và gốc thời gian được tính từ lúc xe bắt đầu đi vào vùng có gió.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Đạo hàm của biểu thức $\ln[v(t)]$ theo thời gian t là $\frac{v'(t)}{v(t)}$.	☐	☐
b) Biểu thức vận tốc của vật là: $v(t) = e^{-0,5t}$ (m/s).	☐	☐
c) Quãng đường xe đi được trong 2 giây đầu tiên tính từ khi vào vùng có gió ngược chiều là $37,9\text{ m}$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục).	☐	☐
d) Khi vận tốc của xe không lớn hơn $0,1\text{ m/s}$ thì quãng đường ngắn nhất mà xe đi được trong vùng có gió ngược chiều là $59,8\text{ m}$.	☐	☐

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$. Trong đó, thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Số lượng của quần thể nấm này tại thời điểm $t = 8$ giờ là bao nhiêu tế bào (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời:

Câu 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{2}$ và $A'B = \sqrt{6}$. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:

Câu 3. Nền căn nhà dự kiến của tiền đạo Supachok (người vừa bị ép nhận giải bàn thắng đẹp nhất trận chung kết AFF cup 2024) có dạng hình chữ nhật $ABCD$. Trong hình là bản thiết kế đơn giản cho toàn bộ mảnh đất hình chữ nhật của anh ta, gồm các đường song song hoặc vuông góc nhau. Supachok dự kiến ngoài việc xây nhà, anh sẽ chia phần đất còn lại làm 4 miếng nhỏ hình chữ nhật để trồng cỏ, trồng hoa, làm sân và làm hồ bơi; tổng chu vi của bốn miếng đất nói trên bằng 1008 mét. Biết rằng $AM = 45\text{ m}$, $BN = 40\text{ m}$, $CP = 35\text{ m}$, $QD = 25\text{ m}$. Supachok đã chọn gói thi công nền móng với giá tiền $3000\text{ baht} / \text{m}^2$, hỏi anh ấy phải bỏ ra nhiều nhất bao nhiêu tiền cho việc làm nền móng căn nhà (đơn vị triệu baht, làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là km , NASA đang theo dõi một tiểu hành tinh đi qua điểm $M(-3; 3; -3)$ và di chuyển dọc theo đường thẳng thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$. Trạm vũ trụ ISS được mô hình hóa như một mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 5)$ và bán kính bằng 10 km . Nếu cứ di chuyển như thế thì đường đi của tiểu hành tinh sẽ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường đi của tiểu hành tinh là bao nhiêu km (làm tròn đến hàng phần trăm)?

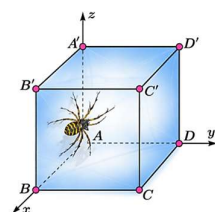
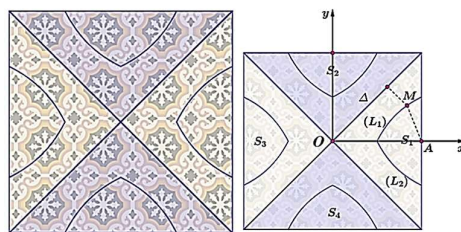
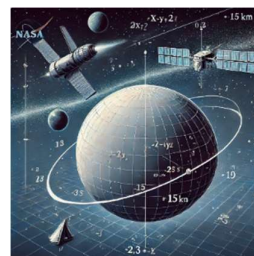
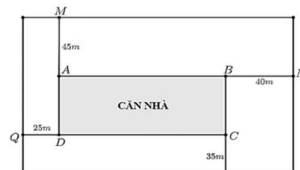
Trả lời:

Câu 5. Một viên gạch lát nền nhà có dạng hình vuông với hoa văn được thiết kế bởi một học sinh lớp 12. Xét hình phẳng có diện tích S_1 được tạo thành bởi các đường cong $(L_1), (L_2)$ và một cạnh viên gạch, trong đó đường (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA = \sqrt{2}d(M, \Delta)$ (A là trung điểm một cạnh viên gạch; Δ là đường phân giác góc phần tư thứ nhất theo hình vẽ); (L_2) đối xứng với (L_1) qua trục Ox . Biết viên gạch này có kích thước cạnh bằng 40 cm , tính tổng diện tích $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ và làm tròn đến hàng đơn vị của cm^2 .

Trả lời:

Câu 6. Một con nhện đang ở đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Mỗi lần di chuyển, con nhện **bò theo một cạnh** của hình lập phương và đi đến **một đỉnh kề với đỉnh đang đứng** (các khả năng là như nhau). Xác suất để sau 6 lần di chuyển, con nhện đứng tại đỉnh C bằng $\frac{m}{n}$ (phân số tối giản). Hãy tính $10m + 3n$.

Trả lời:



HẾT

ĐỀ ÔN THI TNTHPT - ĐỀ SỐ 04

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_3 a$. B. $2 \log_3 a$. C. $(\log_3 a)^2$. D. $2 + \log_3 a$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+		-	0	+	
y			0		-1		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.
 B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , một phép tịnh tiến biến gốc tọa độ O thành điểm $A(1; 2)$ sẽ biến điểm A thành điểm A' có tọa độ là

- A. $A'(2; 4)$. B. $A'(-1; -2)$. C. $A'(4; 2)$. D. $A'(3; 3)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 6. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. $u_n = 3n^2 + 2030$. B. $u_n = 3n + 2026$. C. $u_n = 3^n$. D. $u_n = (-3)^{n+1}$.

Câu 7. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx$ bằng

- A. 16. B. 4. C. 2. D. 8.

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

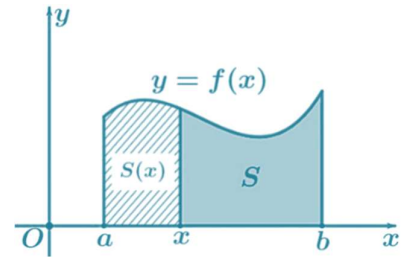
- A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. B. $x^4 + x^2 + C$. C. $x^5 + x^3 + C$. D. $4x^3 + 2x + C$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $I(-4;1;0), R=2$. B. $I(-4;1;0), R=4$. C. $I(4;-1;0), R=2$. D. $I(4;-1;0), R=4$.

Câu 10. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

- A. $S = -\int_a^b f(x) dx$. B. $S = \int_a^b f(x) dx$.
C. $S = \int_b^a f(x) dx$. D. $S = \int_b^a f^2(x) dx$.



Câu 11. Cho hai biến cố A và B với $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,7$; $P(A \cap B) = 0,3$. Tính $P(A|B)$.

- A. $\frac{3}{7}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 12. Nhiệt độ trung bình ($^{\circ}C$) theo ngày tại thành phố X (trong một tháng) được ghi lại theo bảng sau

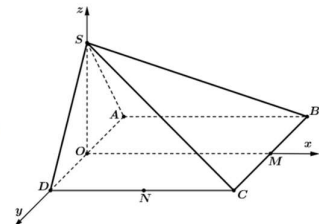
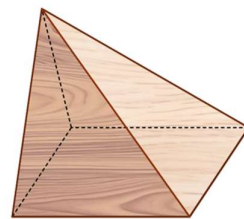
Nhiệt độ ($^{\circ}C$)	$[28; 29)$	$[29; 30)$	$[30; 31)$	$[31; 32)$	$[32; 33)$
Số ngày	3	5	10	8	4

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(1,12; 1,14)$. B. $(1,14; 1,16)$. C. $(1,16; 1,18)$. D. $(1,18; 1,2)$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Một khối gỗ có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình vuông cạnh bằng 1, ΔSAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi O, M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.	☐	☐
b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}$.	☐	☐
c) Phương trình mặt phẳng (SBC) là $\sqrt{3}x + 2z - \sqrt{3} + 1 = 0$.	☐	☐
d) Số đo góc nhị diện $[A, BC, S]$ bằng $40,9^{\circ}$ (làm tròn đến hàng phần chục của độ).	☐	☐

Câu 2. Trong một kho lạnh, người ta theo dõi lượng vi khuẩn còn sống bám trên bề mặt sau khi phun khử khuẩn. Gọi $P(t)$ (đơn vị: nghìn tế bào) là lượng vi khuẩn còn sống tại thời điểm t giờ ($t \geq 0$) kể từ lúc phun. Biết $P(t) > 0$ và $P'(t) = aP(t)$ ($t \geq 0$), trong đó $a \neq 0$ là hằng số. Kết quả đo cho thấy $P(2) = 45, P(8) = 5$. Cho biết $P(t) = e^{h(t)}$ ($t \geq 0$).

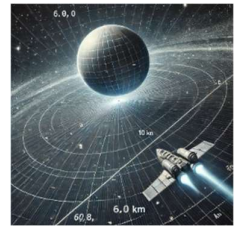


Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

Đúng Sai

a) $h(t) = at + b$ ($t \geq 0$) với b là một hằng số xác định.	☐	☐
b) $a = -\frac{\ln 3}{6}$.	☐	☐
c) $b = \ln 15$.	☐	☐
d) $P(14) < \frac{5}{9}$ (nghìn tế bào).	☐	☐

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km , NASA đang thiết kế một trạm vũ trụ hình cầu có tâm đặt tại điểm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 10 km$. Một con tàu vũ trụ di chuyển với tốc độ $27000 km/h$ theo quỹ đạo là một đường thẳng qua điểm $A(6;8;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 2; -1)$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Điểm $A(6; 8; 0)$ nằm bên trong trạm vũ trụ hình cầu.	☐	☐
b) Phương trình quỹ đạo di chuyển của tàu vũ trụ là $\Delta: \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 8 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ (t là tham số).	☐	☐
c) Khoảng cách từ tâm của trạm vũ trụ đến đường thẳng quỹ đạo tàu vũ trụ là $3,8 km$ (làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị km).	☐	☐
d) Tàu vũ trụ sẽ tốn $2,3$ giây (làm tròn đến hàng phần chục của giây) để vượt qua phạm vi hình cầu của trạm vũ trụ.	☐	☐

Câu 4. Một thùng chứa 4 quả bóng, trong đó có:

- 2 quả bóng **xanh**: mặt trơn, khi lấy ra và tác động thì nó luôn lăn về phía trước.

- 1 quả bóng **đỏ**: mặt sần, khi lấy ra và tác động thì nó có 50% khả năng lăn về phía trước.

- 1 quả bóng **vàng**: mặt nhám, khi lấy ra và tác động thì nó luôn dừng lại.

Một quả bóng được chọn ngẫu nhiên và thử nghiệm lăn 3 lần.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Xác suất để quả bóng lăn về phía trước cả 3 lần là $\frac{5}{16}$.	☐	☐
b) Nếu quả bóng lăn về phía trước cả 3 lần, xác suất để nó là bóng xanh bằng $\frac{12}{13}$.	☐	☐
c) Nếu quả bóng đã lăn về phía trước 3 lần, xác suất để lần thứ 4 nó tiếp tục lăn về phía trước là $\frac{33}{34}$.	☐	☐
d) Nếu thay đổi số lần thử nghiệm từ 3 lần thành n lần ($n \in \mathbb{N}, n \geq 10$), xác suất để quả bóng là đỏ khi nó lăn về phía trước cả n lần được tính bằng công thức $P = \frac{1}{2^n + 1}$.	☐	☐

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A . Biết rằng $AB = 1$, $SA = 2$ và đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Trả lời:

Câu 2. Một công ty vận tải có thể huy động tối đa 10 xe tải để chuyển 60 tấn hàng hóa đến một địa điểm. Mỗi xe tải có thể chở 3 tấn hàng trong một chuyến đi (có thể đi nhiều chuyến), và mất 1 giờ để hoàn tất một chuyến. Chi phí khởi động để điều một xe tải là 100 nghìn đồng. Ngoài ra, khi cùng chạy, n xe tải tốn chi phí nhiên liệu mỗi giờ là $15(2n + 5)$ nghìn đồng.

Công ty đang tính toán để sử dụng một số lượng xe tải sao cho tổng chi phí vận chuyển là thấp nhất, vậy chi phí thấp nhất ấy là bao nhiêu nghìn đồng cho đợt vận chuyển hàng nói trên?

Trả lời:

Câu 3. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi số điểm thưởng là lớn nhất mà người chơi có thể đạt được là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 4. Một vật trang trí có bề mặt là hình tròn bán kính bằng 1 cm , trên đó có hai hình chữ nhật giống nhau và nội tiếp đường tròn đó để tạo nên hình chữ thập như hình vẽ bên. Diện tích lớn nhất của hình chữ thập là bao nhiêu cm^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:

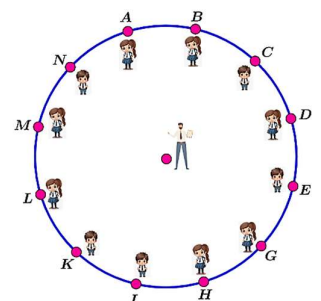
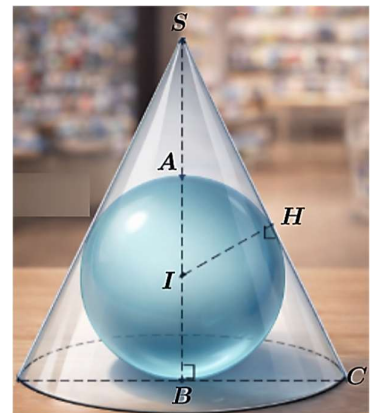
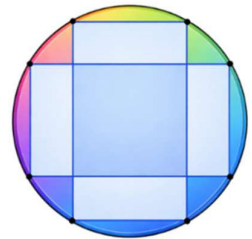
Câu 5. Trong xưởng thiết kế đồ lưu niệm, người ta muốn chế tạo **một chiếc nón trung bày bằng mica** (dạng hình nón tròn xoay) sao cho bên trong đặt vừa khít một **quả cầu trang trí** (quả cầu chạm cả mặt đáy và mặt xung quanh của hình nón).

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị cm), cho hai điểm $A(2; 1; 3)$, $B(6; 5; 5)$ là hai đầu mút của đường kính của quả cầu; B cũng là **tâm của đường tròn đáy** của chiếc nón. Đỉnh hình nón là S (có thể thay đổi) sao cho **quả cầu luôn nội tiếp** hình nón đó.

Trong tất cả các chiếc nón thỏa điều kiện trên, người ta muốn quan sát chiếc nón có **thể tích bé nhất**. Khi đó, mặt phẳng đi qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của nón có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b^2 + c^2 + d^2$.

Trả lời:

Câu 6. Một nhóm 12 người tương ứng với mã số $1; 2; \dots; 12$ đứng quanh một vòng tròn cùng tham gia trò chơi. Họ được sắp xếp một cách ngẫu nhiên trên 12 vị trí $A, B, \dots, M, N$ của đường tròn, vì thế các số được xếp không theo thứ tự định trước. Người quản trò đứng ở vị trí tâm đường tròn, anh ta bốc ngẫu nhiên 2 lần, mỗi lần 1 thẻ và không hoàn lại từ hộp đựng các số $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Nếu người quản trò bốc được số chia hết cho 3 thì tất cả những người cùng



mang số chia hết cho 3 sẽ tiến về phía tâm đường tròn để tham gia một trò chơi nhỏ và tính điểm, nếu người quản trò bốc đúng thẻ có số chia cho 3 dư 1 thì những người mang số chia cho 3 dư 1 cũng tiến lên phía trước, luật chơi tương tự nếu người quản trò bốc được số chia cho 3 dư 2.

Xác suất để sau 2 lần người quản trò bốc thẻ thì không có hai người kề nhau trên đường tròn được chọn bằng $\frac{a}{b}$ (trong đó a, b nguyên dương và không có ước chung lớn hơn 1), tính $a \times b$.

Trả lời:

HẾT

ĐỀ ÔN THI TNTHPT – ĐỀ SỐ 05

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) có phương trình $-2x + 2y - z - 3 = 0$ thì (P) có một vector pháp tuyến là

- A. $(4; -4; 2)$. B. $(-2; 2; -3)$. C. $(-4; 4; 2)$. D. $(0; 0; -3)$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$; $u_4 = -250$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. 125. B. -5. C. $\frac{1}{5}$. D. 5.

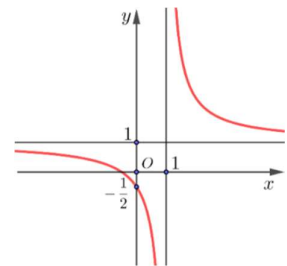
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I(2; -4; 1)$, $R = 5$. B. $I(-2; 4; -1)$, $R = 25$.
C. $I(2; -4; 1)$, $R = \sqrt{21}$. D. $I(-2; 4; -1)$, $R = 21$.

Câu 4. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$.
C. $y = 1$. D. $y = 2$



Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ trên $[0; 2]$ là

- A. $\frac{13}{4}$. B. 29. C. -3. D. 1.

Câu 6. Mức thưởng Tết (triệu đồng) mà các công nhân một nhà máy nhận được như sau

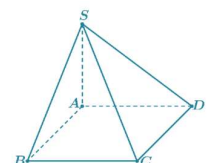
Mức thưởng	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$	$[20; 25)$
Số công nhân	13	35	47	25

Một của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 17,76. B. 16,67. C. 17,67. D. 16,76.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a ; $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ bằng:

- A. 30° . B. 45° .
C. 60° . D. 90° .



Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}$.

- A. $D = (1; +\infty)$. B. $D = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $D = [1; +\infty)$. D. $D = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$.

- A. $\frac{11}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 3. D. 1.

Câu 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + x$?

- A. $\frac{9}{8}$. B. 6. C. 12. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 11. Khi điều tra chi phí hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) của 25 người còn độc thân ở độ tuổi 30 đến tuổi 35, người ta thu được mẫu số liệu sau:

Chi phí	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số người	5	5	7	5	3

Tìm phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 6,62. B. 6,13. C. 5,54. D. 5,82.

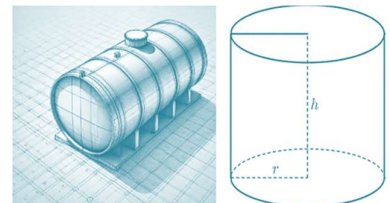
Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.
C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$. D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

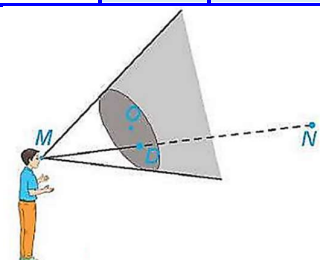
Câu 1. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π mét khối. Người ta muốn hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất có thể.

Gọi r , h , V và S lần lượt là bán kính đáy, chiều cao, thể tích và diện tích toàn phần của cái bồn dầu hình trụ.



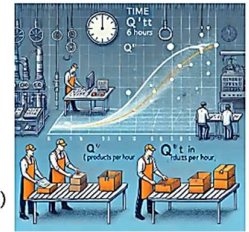
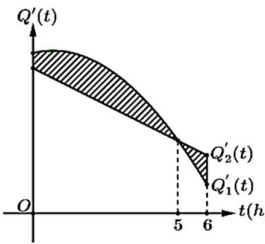
Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Công thức để tìm thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.	☐	☐
b) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu là $S = 2\pi \left(\frac{8}{r} + r^2 \right)$.	☐	☐
c) $S' = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5}{2}$.	☐	☐
d) Bồn chứa dầu hình trụ có diện tích bé nhất là $73,4 \text{ m}^2$ (làm tròn đến hàng phần chục).	☐	☐

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, mắt một người quan sát đặt ở vị trí $M(2; 3; -4)$ và vật cần quan sát đặt tại vị trí $N(-1; 0; 8)$. Một tấm bìa chắn đường truyền ánh sáng có dạng hình tròn tâm $T(1; 2; 0)$, bán kính bằng 3 và đặt trong mặt phẳng (Oxy) .



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Khoảng cách hai điểm M, N bằng $9\sqrt{2} \text{ m}$.	☐	☐
b) Phương trình tham số đường thẳng MN là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 3t \\ z = -4 - 12t \end{cases}$.	☐	☐
c) Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm $(1; -2; 0)$.	☐	☐
d) Tấm bìa che khuất tầm nhìn của người quan sát đối với vật được đặt ở điểm N .	☐	☐

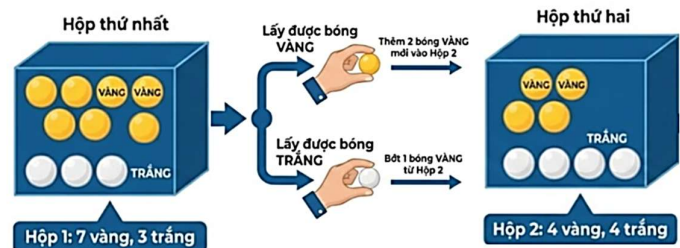
Câu 3. Hình vẽ bên mô tả hiệu suất làm việc của hai công nhân tại một nhà máy trong thời gian 6 giờ. Công nhân A đang sản xuất với hiệu suất $Q'_1(t) = -2t^2 + 4t + 58$ sản phẩm mỗi giờ, trong khi công nhân B đang sản xuất với hiệu suất $Q'_2(t) = 53 + at$ sản phẩm mỗi giờ ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng hàm $Q_1(t)$ và $Q_2(t)$ mô phỏng số lượng sản phẩm mới làm được của công nhân A và công nhân B sau t giờ.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Hiệu suất làm việc cực đại của công nhân A là 60 sản phẩm mỗi giờ.	☐	☐
b) Phần diện tích bị gạch sọc biểu diễn cho tổng số lượng sản phẩm mới mà hai công nhân làm được trong 6 giờ.	☐	☐
c) Sau 5 giờ số lượng sản phẩm mới mà công nhân A hoàn thành nhiều hơn công nhân B là 54 sản phẩm (làm tròn đến hàng đơn vị).	☐	☐
d) Sau 6 giờ làm việc tổng số lượng sản phẩm mới mà 2 công nhân hoàn thành là 502 sản phẩm.	☐	☐

Câu 4. Bạn Vinh có hai hộp đựng bóng bàn: hộp thứ nhất đựng 7 quả bóng vàng và 3 quả bóng trắng; hộp thứ hai đựng 4 quả bóng vàng và 4 quả bóng trắng.

Đầu tiên Vinh lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp thứ nhất, nếu quả bóng ấy có màu vàng thì bạn sẽ bỏ 2 quả bóng vàng mới vào hộp thứ hai; nếu quả bóng ấy có màu trắng thì bạn sẽ lấy bớt đi 1 quả bóng màu vàng từ hộp thứ hai. Sau đó Vinh sẽ chọn ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp thứ hai.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Xác suất để Vinh chọn được quả bóng trắng từ hộp thứ nhất bằng $\frac{3}{10}$.	☐	☐
b) Xác suất để Vinh chọn được quả bóng màu vàng từ hộp thứ hai bằng $\frac{96}{175}$.	☐	☐
c) Biết rằng Vinh đã chọn được quả bóng vàng từ hộp thứ hai, xác suất để Vinh chọn được quả bóng trắng từ hộp thứ nhất bằng $\frac{15}{64}$.	☐	☐
d) Biết rằng 2 quả bóng được chọn từ hai hộp là cùng màu, xác suất để quả bóng được chọn từ hộp thứ nhất màu vàng bằng $\frac{49}{69}$.	☐	☐

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một công ty vận tải cần giao hàng đến tất cả các thành phố A, B, C, D, E (tham khảo hình vẽ). Chi phí di chuyển giữa các thành phố được mô tả như hình bên (đơn vị: nghìn đồng). Xe giao hàng của công ty xuất phát từ thành phố A đi qua tất cả các thành phố còn lại đúng một lần sau đó trở lại thành phố A (xe chỉ đi qua các đoạn nối trên hình). Tìm chi phí thấp nhất của xe giao hàng (tính theo đơn vị nghìn đồng)?

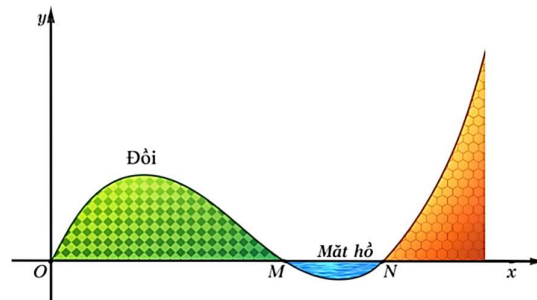
Trả lời:

Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại đỉnh A , mặt bên $BCC'B'$ là một hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng 2. Tìm thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Trả lời:

Câu 3. Lát cắt ngang của một vùng đất được mô hình hoá là một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OM = 2 km$, độ rộng của hồ nước $MN = 1 km$ và ngọn đồi cao $528 m$. Hỏi nơi sâu nhất của hồ nước cách mặt hồ bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời:



Câu 4. Mùa hè năm 2025, để chuẩn bị cho “học kì quân đội” dành cho các bạn nhỏ, một đơn vị bộ đội chuẩn bị thực phẩm dự kiến đủ dùng trong 45 ngày (năng suất của mỗi ngày là như nhau). Tuy nhiên bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, lượng tiêu thụ thực phẩm đã tăng 10% mỗi ngày (ngày sau tăng 10% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng trong bao nhiêu ngày (làm tròn đến hàng đơn vị của ngày).

Trả lời:



Câu 5. Một mảnh đất hình chữ nhật có kích thước $40m \times 50m$ đang được người chủ trồng cỏ tự nhiên. Vào buổi sáng, khi mặt trời vừa lên, mảnh đất này bị một mái nhà xưởng gần đó chắn ánh sáng. Khi mặt trời lên cao hơn, ánh sáng đã chiếu từ từ lên mảnh đất. Ta xem ranh giới giữa phần được chiếu sáng và phần tối là các đường thẳng song song thay đổi.

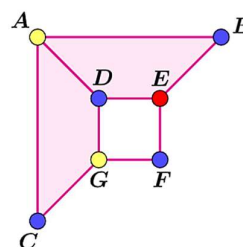
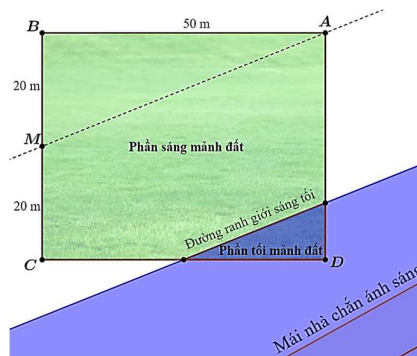
Có thời điểm đường ranh giới này đi qua hai điểm A, M như hình vẽ (M là trung điểm một cạnh hình chữ nhật).

Khi diện tích phần tối của mảnh đất bằng $75 m^2$, người ta đo được tốc độ giảm cạnh theo phương AD bằng $2 cm/s$; hỏi tốc độ giảm diện tích phần tối của mảnh đất là bao nhiêu cm^2/s ? Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị.

Trả lời:

Câu 6. Từ một hệ thống các bóng đèn như hình vẽ, người ta sử dụng 3 loại màu xanh, đỏ, vàng cho các bóng đèn ở mỗi vị trí A, B, C, D, E, F, G . Hỏi có bao nhiêu cách bố trí các loại bóng đèn sao cho 2 bóng đèn kề nhau (được nối với nhau đúng một đoạn dây) thì khác màu?

Trả lời:



HẾT