

TỔ HỢP XÁC SUẤT

QUY HOẠCH ĐỘNG

Ý TƯỞNG

Ý tưởng cốt lõi: Ý tưởng của quy hoạch động là chia một bài toán phức tạp thành các bài toán con mà mỗi bài toán con sau lại sử dụng kết quả của bài toán trước. Hay các bài toán này có tính truy hồi.

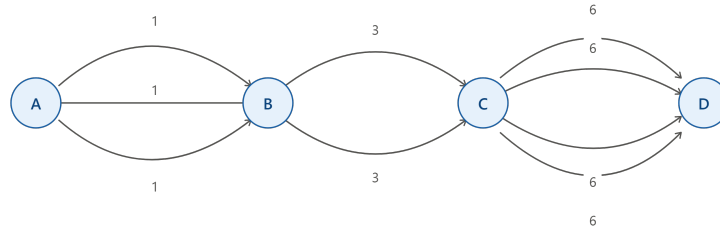
Một số bài toán quen thuộc có liên quan.

- **Dãy Fibonacci:** Dãy Fibonacci là một chuỗi số tự nhiên bắt đầu bằng 0 và 1 (hoặc 1 và 1), trong đó mọi số tiếp theo luôn bằng tổng của hai số liền trước nó.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Do mỗi số hạng của dãy được tính bằng các số hạng trước nó. Ta coi tính mỗi số hạng là một bài toán, thì các bài toán này là bài toán con của quy hoạch động.

- **Quy tắc nhân:** Cho bài toán tính số cách đi từ A đến B, C và đích đến ở D.



Với cách giải quyết bằng quy tắc nhân thông thường, ta tính số cách đi từ A đến D bằng cách nhân số con đường trong từng bước với nhau:

$$S = 3.2.4 = 24$$

Với cách tư duy của quy hoạch động, ta có thể chia bài toán đi từ A đến D qua B và C thành 3 bài toán nhỏ là:

Đi từ A đến B: Có 3 cạnh. Mỗi cạnh có 1 trọng số. Vậy tổng có 3 cách đi.

Đi từ B đến C: Có 2 cạnh. Mỗi cạnh có 3 trọng số. Vậy tổng có 6 cách đi.

Đi từ C đến D: Có 4 cạnh. Mỗi cạnh có 6 trọng số. Vậy tổng có 24 cách đi.

Kết luận: Tư duy chủ đạo của quy hoạch động là tìm bài toán con tối ưu cho việc tính truy hồi và tìm quy luật truy hồi của nó.

KĨ THUẬT CHÍNH

Bài toán sử dụng tư duy quy hoạch động có 2 dạng bài chính ứng với 2 kĩ thuật chính của cách giải quyết này.

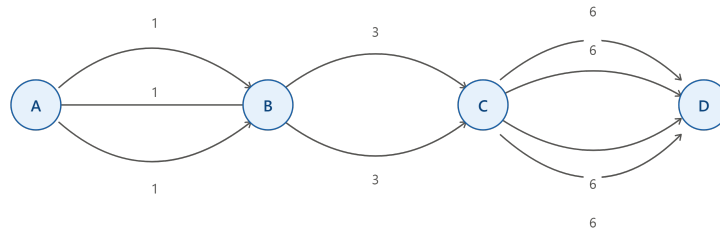
THUẬT TOÁN VẾT DẦU LOANG

Về bản chất, thuật toán vết dầu loang không phải là thuật toán quy hoạch động. Tuy nhiên khi giải quyết toán học, 2 thuật toán này có tư duy chủ đạo giống nhau nên ta có thể gộp lại với nhau.

Thuật toán loang là kĩ thuật duyệt tìm kiếm trên đồ thị mà từ một điểm xuất phát, ta thực hiện kiểm tra tuần tự các ô liền kề cho đến khi đến đích hoặc không thể kiểm tra loang thêm được nữa. Ta có thể tưởng tượng giống như việc giọt dầu loang dần từ một điểm ra xung quanh trên mặt nước.

Các bài toán áp dụng thuật toán này có quy luật hồi quy rất đơn giản. Kết quả của một bài toán con, hay số cách đi đến một điểm bằng tổng số các cách đi đến điểm đó.

Để dễ hình dung, ta có thể xét lại bài toán đường đi đã nhắc đến ở trên.



Ta sẽ xét tuần tự các điểm:

Đi từ A đến B: Với điểm xuất phát là A, số cách đến B là tổng số cách đến B mà bắt đầu từ A. Từ trên hình vẽ, ta có thể dễ dàng xác định được có 3 cách đến B.

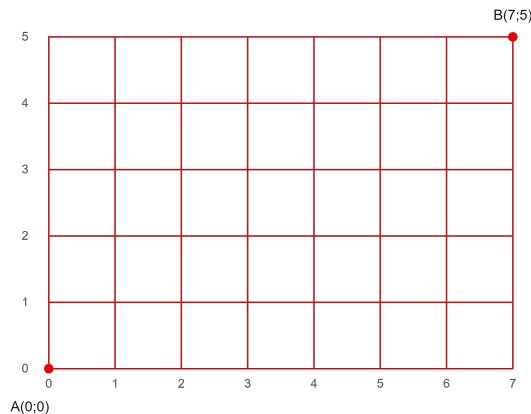
Đi từ B đến C: Với điểm xuất phát là B và B có 3 cách đến, vậy nên mỗi con đường từ B đến C lại có 3 cách di chuyển trên đó. Số con đường dẫn đến C là 2, với mỗi con đường lại có 3 cách đi. Tổng số cách đến C là 6.

Đi từ C đến D: Tương tự như trên, số cách đi từ C đến D là 24.

Ở mỗi điểm, ta chỉ cần xét con đường đi từ điểm ngay trước đó mà không cần phải xét xa hơn. Bởi điểm ngay trước đó đã xét đến những điểm xa hơn đó. Tức khi xét số cách đến điểm D, ta chỉ cần tính số cách đi từ C đến D (Trong đó C có trọng số hay ta đã xét có nhiều cách tồn tại ở C). Vậy nên giá trị số cách đi từ C đến D là 24 cũng chính là số cách đi từ A đến D.

CÁC BÀI TOÁN KINH ĐIỂN

Ví dụ 1: Cho lưới ô vuông có kích thước 7×5 như hình vẽ. Một con kiến di chuyển từ điểm A theo các nút trên lưới ô vuông đến điểm đích B. Có bao nhiêu đường đi tối ưu (Hay cách đi ngắn nhất) mà con kiến có thể đi.



Hướng dẫn

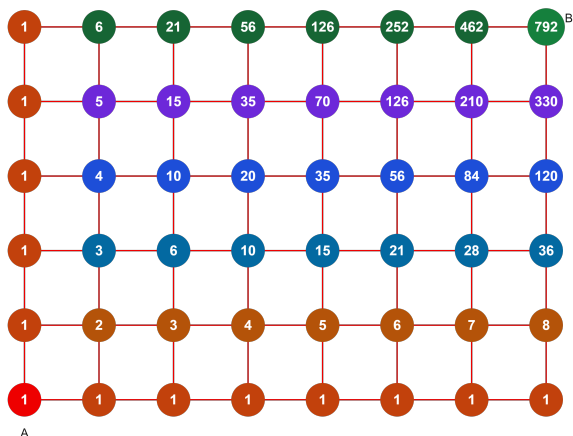
Với đường đi là tối ưu, có nghĩa là trên quãng đường di chuyển, con kiến không quay đầu, không đi lặp lại mà chỉ có thể đi lên trên hoặc sang phải và chỉ di chuyển trong 12 bước.

Với điểm xuất phát là A, ta xét điểm đích $(1;0)$. Ta có thể thấy để đến được điểm $(1;0)$ thì chỉ có duy nhất 1 cách đi thoả mãn là đường thẳng nối từ A đến $(1;0)$.

Tương tự với điểm $(0;1)$, ta cũng chỉ có 1 cách để đến điểm này.

Ta xét điểm $(1;1)$. Ta có thể thấy để đến điểm $(1;1)$, ta chỉ có thể xuất phát từ điểm $(1;0)$ hoặc $(0;1)$, mà mỗi điểm đó lại chỉ có 1 cách xuất hiện. Vậy nên số cách đến điểm $(1;1)$ là 2.

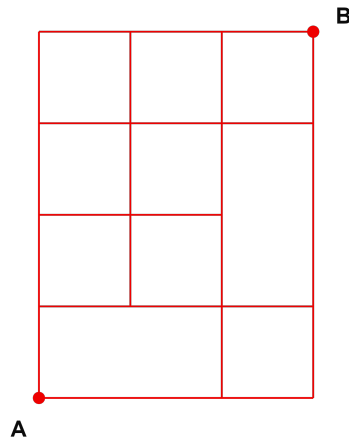
Ta thực hiện tính tuần tự với cùng tư duy đó cho các điểm sau cho đến khi tính đến điểm đích là B như đồ thị sau:



Vậy số cách đi từ A đến B là 792.

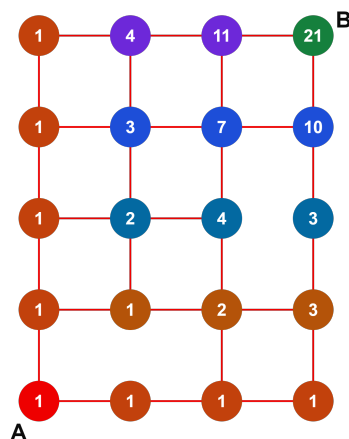
Lưu ý: Với các bài toán đơn giản như Ví dụ 1, thuật toán loang rất công kênh và phương pháp hoán vị lặp tỏ ra tối ưu hơn. Tuy nhiên, với các bài toán có đồ thị phức tạp, thuật toán loang gần như là phương pháp tối ưu nhất cho bài giải.

Ví dụ 2: Cho một lưới ô vuông như hình vẽ. Một con kiến di chuyển trên các nút của lưới ô vuông. Tính số con đường tối ưu để con kiến đi từ điểm xuất phát A đến điểm đích B.



Hướng dẫn

Với cách tư duy đã có ở ví dụ 1, với bài toán này ta có thể thực hiện tính trên đồ thị ngay mà không cần phải thử trên 1 điểm nhỏ.



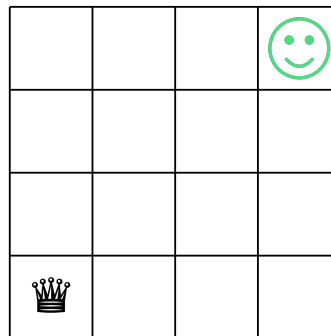
Vậy tổng số con đường tối ưu đi từ A đến B là 21.

Lưu ý:

- Một số bài toán liên quan đến cờ vua, giọt dầu hoặc truyền tin có thể không thể đến đích mà ta chỉ có thể tính đến trường hợp đối tượng di chuyển lặp lại hoặc không thể loang ra được nữa.

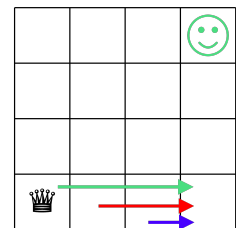
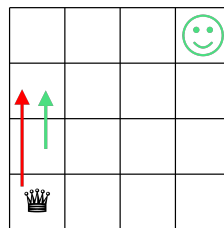
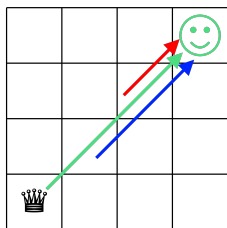
- Một số bài toán có con đường dẫn đến một điểm không chỉ ở điểm liền kề nó mà có thể là điểm cách nó nhiều điểm khác, khi đó ta vẫn áp dụng được tư duy thuật toán loang bình thường.

Ví dụ 3: Trong một bàn cờ vua kích thước 4x4 như hình vẽ, có một quân hậu đang nằm ở góc dưới bên trái có thể di chuyển lên trên, sang phải và đi chéo một số ô tùy ý. Có bao nhiêu cách để quân hậu này đến ô có mặt cười?



Hướng dẫn

Bài toán này đặc biệt hơn các bài toán trước đó bởi để đến một ô không nhất thiết phải đi từ một ô liền kề ô đó mà ta có thể đi từ ô cách đó rất xa. Ví dụ quân hậu có thể đến ô mặt cười từ ngay 3 ô kề nó, hoặc cũng có thể đến từ vị trí xuất phát.



Từ đây ta đã biết được cách tính đường đi đến một điểm. Bây giờ ta có thể thực hiện điền số trên đồ thị như bình thường.

4	17	60	188
2	7	22	60
1	3	7	17
queen	1	2	4

Vậy tổng số cách quân hậu đi từ góc dưới bên trái đến trên bên phải là 188 cách.

LẬP BẢNG BOTTOM-UP

Thuật toán quy hoạch động có 2 lối tiếp cận chính là Top-down và Bottom-up:

- **Top-down:** Tiếp cận từ bài toán lớn rồi phân rã thành bài toán con.
- **Bottom-up:** Giải quyết bài toán con để xây dựng dần dần bài toán lớn.

Ta thường dùng lối tiếp cận Top-down để tìm quy luật hồi quy của bài toán và dùng Bottom-up để lập bảng và tính toán.

Cụ thể hơn, ta sẽ xét một bài toán đơn giản là tìm số cách lập số tự nhiên có 2 chữ số $\overline{ab}$, $a, b \neq 0$.

Trước tiên ta cần sẽ giải thích bằng bảng bằng một phần bảng như sau:

Giá trị/Số cách	a
1	1
2	1

Tại cột giá trị (Tức cột có giá trị 1, 2), cột này biểu diễn giá trị mà các chữ số có thể nhận được. Ví dụ a trong $\overline{ab}$ có thể nhận giá trị là 1, là 2 để tạo thành số $\overline{1b}, \overline{2b}, \dots$

Tại các cột số cách (Các cột bên dưới a, b hay c tương ứng) biểu diễn số cách mà chữ số đó nhận một giá trị. Ví dụ Ở cột chữ số a, hàng có giá trị là 1, trong bảng đánh số 1 tức có duy nhất 1 cách để $a = 1$. Tương tự với cột chữ số a, hàng có giá trị 2, đánh số 1 biểu diễn cho 1 cách để $a = 2$.

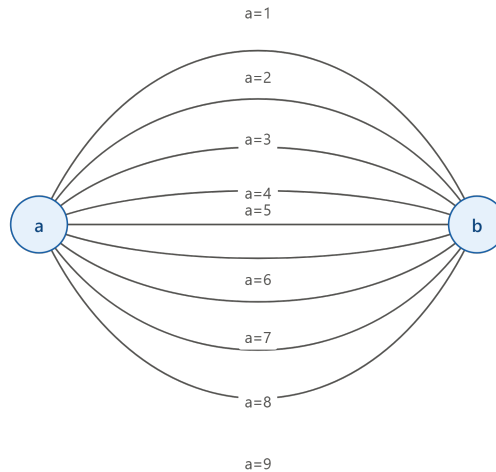
Bây giờ ta sẽ mở rộng thành bảng hoàn chỉnh của việc chọn số $\overline{ab}$:

Giá trị/Số cách	a	b
1	1	9
2	1	9
3	1	9
4	1	9
5	1	9
6	1	9
7	1	9
8	1	9
9	1	9

Ở bảng trên trước tiên ta xét tại cột chữ số a , với mỗi chữ số từ 1 đến 9, a chỉ nhận được duy nhất một cách để xuất hiện dưới dạng mỗi chữ số đó.

Xét đến cột chữ số b , thực tế việc chọn b ở đây là chọn cả số $\overline{ab}$ nhưng với giá trị a đã được chọn sẵn, tức ta đang tìm chữ số b trong số $\overline{1b}, \overline{2b}, \overline{3b}, \dots, \overline{9b}$. Điều này có nghĩa là với mỗi giá trị của b thì số cách để b nhận giá trị đó phụ thuộc vào số cách chọn của a . Tức với $b = 1$ thì toàn bộ số $\overline{ab}$ có các cách chọn là 11, 21, 31, ..., 91.

Để dễ hình dung, ta có thể tưởng tượng việc chọn số $\overline{ab}$ giống như việc đi đường từ điểm xuất phát a đến điểm đích b như đồ thị dưới. Trong đồ thị dưới đây ta đang tính $b = 1$. Ta có thể thấy có 9 cách để $b = 1$, mà b có thể nhận 9 giá trị từ 1 đến 9. Vậy số $\overline{ab}$ có $9+9+9+9+9+9+9+9+9=81$ cách chọn.



Nhận xét: Số cách chọn trong quy hoạch động chính là tổng số cách chọn trong bước chọn cuối cùng. Việc tính tuần tự từ trái qua phải hay từ bước 1 đến bước cuối là đang mở rộng dần dần đích ra, tức với mỗi cột chữ số mà ta tính thì chính là mỗi đích tạm thời mà ta đặt. Thực hiện tính toán như vậy cho đến đích cuối cùng.

Lưu ý:

- Một số bài toán ta không thể nhìn ra ngay quy luật hồi quy (Tức sự phụ thuộc của bước chọn sau vào bước chọn trước). Vì vậy ta có thể sử dụng Top-down hoặc một cách tư duy nào đó để thử nghiệm và tìm ra quy luật bài toán.

- Với các bài toán chọn số đặc biệt, có một số giá trị của chữ số này lại không hợp lệ với chữ số khác thì ta vẫn kể tất cả các giá trị có thể xuất hiện của tất cả các chữ số hoặc vừ đủ giá trị phù hợp cho tính toán.

CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Ví dụ 1: Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Tính số cách để chọn được số $\overline{abcde}$ sao cho $a \leq b + 1 \leq c - 7 < d \leq e + 2$.

Hướng dẫn

Ta thực hiện lập bảng cho các chữ số $a, b + 1, c - 7, d, e + 2$ và tất cả các giá trị thoả mãn của chúng trong khoảng hợp lí.

Giá trị/Số cách	a	b+1	c-7	d	e+2
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

Dù $c - 7$ có thể nhận giá trị nhỏ hơn 0 nhưng ta không kể vào vì $0 \leq a \leq c - 7$.

Trước tiên, ta xét số cách chọn a . Trong khoảng từ 1 đến 9, a có 1 cách chọn cho mỗi giá trị từ 1 đến 9, các giá trị khác bằng 0. Do $a > 0$ nên sau đó ta không cần tính toán đến trường hợp giá trị bằng 0.

Tiếp theo, ta xét đến số cách chọn b . Ta xét khi $b + 1 = 1$, mà $a \leq b + 1 \Rightarrow b + 1 = 1$ có duy nhất 1 trường hợp xảy ra là khi $a = 1$.

Ta xét $b + 1 = 2$, giá trị của a thoả mãn để $b + 1 = 2$ là $a = 1, a = 2$. Tính toán tương tự vậy cho đến $b + 1 = 10$.

Giá trị/Số cách	a	b+1	c-7	d	e+2
1	1	1			
2	1	2			
3	1	3			
4	1	4			
5	1	5			
6	1	6			
7	1	7			
8	1	8			
9	1	9			
10	0	9			
11	0	0			

Tương tự vậy với cột $c - 7$:

Khi $c - 7 = 1$, có duy nhất 1 giá trị của $\overline{ab}$ (Hay ta chỉ nói giá trị của b) thoả mãn là $b = 1$.

Khi $c - 7 = 2$, có $1+2=3$ giá trị của $\overline{ab}$ thoả mãn.

Khi $c - 7 > 3$, điều này là vô lí vì $c < 10$. Vậy từ $c - 7 = 3$ trở đi, số cách chọn của nó là 0.

Giá trị/Số cách	a	b+1	c-7	d	e+2
1	1	1	1		
2	1	2	3		
3	1	3	0		
4	1	4	0		
5	1	5	0		
6	1	6	0		
7	1	7	0		
8	1	8	0		
9	1	9	0		
10	0	9	0		
11	0	0	0		

Tại cột d , $d > 1$ do $c - 7 < d$. Ta bắt đầu tính từ $d = 2$.

Khi $d = 2$, số cách chọn là 1.

Khi $d = 3$, số cách chọn là $1+3=4$.

Khi $d = 4$, số cách chọn là $1+3+0=4$.

...

Khi $d = 9$, số cách chọn là $1+3+0+0+...+0=4$.

Giá trị/Số cách	a	b+1	c-7	d	e+2
1	1	1	1	0	
2	1	2	3	1	
3	1	3	0	4	
4	1	4	0	4	
5	1	5	0	4	
6	1	6	0	4	
7	1	7	0	4	
8	1	8	0	4	
9	1	9	0	4	
10	0	9	0	0	
11	0	0	0	0	

Cuối cùng, với $e + 2$, ta vẫn thực hiện tính toán với quy luật là cộng các số cách từ hàng đầu cho đến hàng của giá trị đó tại cột trước đó.

Giá trị/Số cách	a	b+1	c-7	d	e+2
1	1	1	1	0	0
2	1	2	3	1	1
3	1	3	0	4	5
4	1	4	0	4	9
5	1	5	0	4	13
6	1	6	0	4	17
7	1	7	0	4	21
8	1	8	0	4	25
9	1	9	0	4	29
10	0	9	0	0	29
11	0	0	0	0	29
Tổng					178

Vậy có 178 cách để chọn số theo yêu cầu.

Lưu ý: Trong làm bài thực tế, ta thực hiện tính toán ngay trên bảng và ta chỉ tìm quy luật trong một mẫu thử nhỏ.

Ví dụ 2: Một mã khoá số sử dụng mật khẩu là một dãy số có 5 chữ số phân biệt từ 1 đến 9. Một mật khẩu được gọi là mạnh nếu nó thoả mãn đồng thời 2 điều kiện:

- i) Không có hai chữ số lẻ nào đứng cạnh nhau.
- ii) Chữ số đứng sau luôn lớn hơn chữ số đứng trước hoặc luôn nhỏ hơn chữ số đứng trước.

Số mật khẩu được coi là mạnh là bao nhiêu?

Hướng dẫn

Ta gọi dãy số của mật khẩu là $\overline{abcde}$, trong điều kiện ii) của bài toán đề cập mật khẩu có thể có các chữ số lớn dần hoặc nhỏ dần. Ta chỉ xét 1 trường hợp là chữ số đứng sau luôn lớn hơn chữ số đứng trước.

Giá trị/Số cách	a	b	c	d	e
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1				
6	1				
7	0				
8	0				
9	0				

Xét trường hợp chọn b , ta có thể thấy cách chọn của b phụ thuộc vào 2 quy luật:

- $b > a$.
- Khi b lẻ thì a phải chẵn.

Điều này lặp lại cho c, d, e .

Từ 2 quy luật này, ta hoàn thiện bảng

Giá trị/Số cách	a	b	c	d	e
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	3	2	1	0
5	1	2	4	2	1
6	0	5	7	7	3
7	0	0	9	9	8
8	0	0	0	23	19
9	0	0	0	0	31

Giải thích:

• Với các giá trị chẵn, số cách để một chữ số nhận giá trị đó là bằng tổng số cách mà chữ số trước đó nhận giá trị nhỏ hơn giá trị ta xét. Giả sử ta xét $b = 4$, số cách chọn $b = 4$ là tổng số cách chọn $a = 1, a = 2, a = 3$, tức $1 + 1 + 1 = 3$.

• Với các giá trị lẻ, số cách để một chữ số nhận giá trị đó là bằng tổng số cách mà chữ số trước đó nhận giá trị chẵn nhỏ hơn giá trị ta xét. Giả sử ta xét $b = 5$, số cách chọn $b = 5$ là tổng số cách chọn $a = 2, a = 4$, tức $1 + 1 = 2$.

• Lí do trên bảng có các vị trí có số cách chọn là 0 liên quan đến tính tăng tiến của dãy a, b, c, d, e . Ví dụ như $a \neq 6$ vì khi $a = 6$ thì không có số $\overline{abcde}$ thỏa mãn $a < b < c < d < e$.

Số mật khẩu mạnh cho trường hợp chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước là $1+3+8+19+31=62$.

Tổng số mật khẩu mạnh là $62 \cdot 2 = 124$.

Ví dụ 3: Hai đội tuyển A và B tham gia giải bóng bàn. Mỗi đội có 7 người đã được sắp xếp theo một thứ tự nhất định. Đầu tiên, người thứ nhất của đội A đấu với người thứ nhất của đội B và người thua sẽ bị loại. Sau đó, người chiến thắng đấu tiếp với người thứ hai của đội kia, các trận thi đấu tiếp theo diễn ra tương tự. Cuộc thi đấu kết thúc cho đến khi tất cả người chơi của 1 đội đều bị loại và đội còn lại là chiến thắng. Hỏi có bao nhiêu cách diễn ra cuộc thi đấu?

Hướng dẫn

Gọi các thành viên của 2 đội A và B theo thứ tự thi đấu lần lượt là $A_1, A_2, \dots, A_7$ và $B_1, B_2, \dots, B_7$.

Giải thích đề bài:

- Đầu tiên A_1 gặp B_1 , ta giả sử A_1 thắng thì A_1 sẽ tiếp tục đấu với B_2 . Cứ thế tiếp diễn cho đến khi một đội có thành viên thứ 7, ta giả sử như người chơi B_7 gặp người chơi A_4 và sau đó người chơi B_7 thua cuộc thì cuộc thi đấu kết thúc và đội A chiến thắng.

- Tình huống để đội A thắng có thể là A_1 thắng B_7 , A_2 thắng B_7 ,... A_7 thắng B_7 . Bất kể đội B dẫn trước đội A bao nhiêu bàn, chỉ cần đến cuối cùng thành viên của đội A có thể thắng thành viên thứ 7 của đội B là đội A thắng lợi.

- Giả sử cuộc thi đấu xảy ra theo trường hợp đội A thắng khi A_3 thắng B_7 , trong đó A_1 thua B_2 , A_2 thua B_7 :

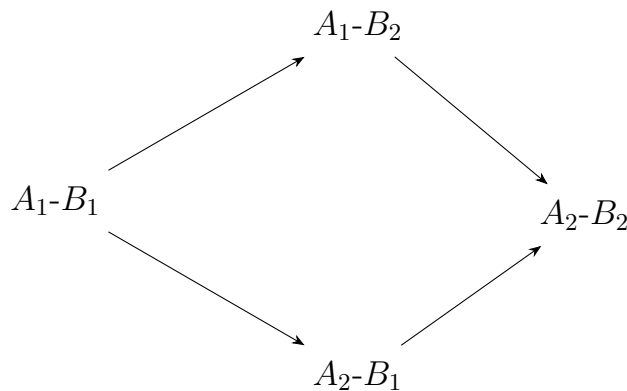
$$A_1-B_1 \rightarrow A_1-B_2 \rightarrow A_2-B_2 \rightarrow A_2-B_3 \rightarrow A_2-B_4 \rightarrow A_2-B_5 \rightarrow A_2-B_6 \rightarrow A_2-B_7 \rightarrow A_3-B_7$$

- Vấn đề của bài toán là tính tổng tất cả trường hợp mà 1 đội có thể thắng thành viên thứ 7 của đội còn lại. Ví dụ đội A thắng thì ta tính tổng số trường hợp để A_1 thắng B_7 , A_2 thắng B_7 , ..., A_7 thắng B_7 và ngược lại với trường hợp đội B thắng cuộc thi. Ta có thể nhận thấy cách một trận đấu xảy ra phụ thuộc vào trận đấu xảy ra trước đó. Khi giải toán thông thường ta chưa thể nhìn nhận ngay được sự phụ thuộc đó nên ta phải kiểm chứng bằng một bài toán có quy mô nhỏ và có thể dễ dàng được trình bày ngắn gọn.

Ta sẽ thử xét số cách để A_2 gặp B_2 xuất hiện.

Ta bắt đầu từ $A_1 - B_1$:

- Trường hợp 1: A_1 thắng thì $A_1 - B_2$. Sau đó để xảy ra $A_2 - B_2$ thì A_1 phải thua B_2 .
- Trường hợp 2: A_1 thua thì $A_2 - B_1$. Sau đó để xảy ra $A_2 - B_2$ thì A_2 phải thắng B_1 .



Vậy số cách để xảy ra $A_2 - B_2$ bằng tổng số cách xảy ra $A_1 - B_2$ và $A_2 - B_1$.

Ta có thể dễ dàng nhận thấy đây là dạng toán quy hoạch động. Từ đây ta có bảng:

$A \setminus B$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	6	21	56	126	252	462
7	1	7	28	84	210	462	924

Giải thích bảng như sau: Số cách xảy ra tại một ô bằng tổng số cách xảy ra ô ngay trên đó và ô liền kề bên trái.

- Xét vị trí $A_2 - B_2$ có số cách xảy ra bằng tổng số cách xảy ra của $A_1 - B_2$ và $A_2 - B_1$, tức $1 + 1 = 2$.

- Xét vị trí $A_6 - B_5$ có số cách xảy ra bằng tổng số cách xảy ra của $A_6 - B_4$ và $A_5 - B_5$, tức $56 + 70 = 126$.

Tổng số trường hợp mà đội A thắng là tổng số cách xảy ra trong cột B_7 , tức tổng số cách mà đội A thắng là $1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 + 924 = 1716$.

Mà số trường hợp để đội A thắng và đội B thắng là như nhau, vậy nên tổng số cách để một đội thắng là $1716.2 = 3432$.

Hết.