

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

Môn thi: TOÁN

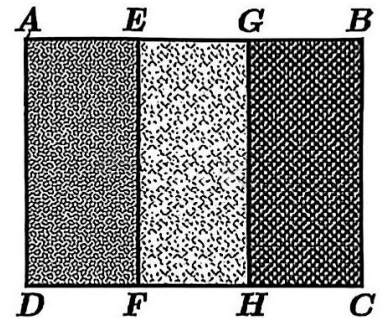
Ngày thi: 22/01/2026

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (4,00 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m+6)x - 1$ có hai điểm cực trị và điểm $A(1; -4)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đó.

b) Một người dùng 35 triệu đồng mua vật liệu để rào một mảnh đất hình chữ nhật, trên mảnh đất đó họ chia thành ba khu vực để canh tác ba loại nông sản khác nhau (mỗi khu vực cũng là một hình chữ nhật, minh họa như Hình 1). Chi phí vật liệu cho mặt rào AB là 30 nghìn đồng mỗi mét; đối với các mặt rào AD , BC và CD thì chi phí là 20 nghìn đồng mỗi mét; hai mặt rào còn lại EF và GH thì chi phí là 15 nghìn đồng mỗi mét. Giả sử người này chọn được phương án rào để diện tích mảnh đất rào được là lớn nhất. Khi đó hãy tính diện tích của mảnh đất mà người này rào được.



Hình 1

Câu 2 (3,50 điểm).

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $5^{x^2-y+1} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$.

b) Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$ và dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng. Tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng (v_n) và từ đó suy ra công thức tính u_n theo n .

Câu 3 (3,50 điểm).

a) Giải bất phương trình

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 \leq 0.$$

b) Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm X và Y để phục vụ nhân dân nhân dịp xuân Bính Ngọ 2026. Mỗi hộp thực phẩm loại X chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A , 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C . Mỗi hộp thực phẩm loại Y chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A , 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C . Giá một hộp loại X là 200 nghìn đồng và một hộp loại Y là 250 nghìn đồng. Tìm chi phí nhỏ nhất khi mua hai loại thực phẩm trên sao cho tổng lượng chất dinh dưỡng trong các hộp thực phẩm mua về chứa tối thiểu 11 đơn vị chất dinh dưỡng A , 27 đơn vị chất dinh dưỡng B và 20 đơn vị chất dinh dưỡng C .

Câu 4 (3,50 điểm).

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

b) Trong một bài kiểm tra thường xuyên với thang điểm 10, đề kiểm tra gồm có 25 câu hỏi theo hình thức trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Để hạn chế việc học sinh không biết mà vẫn chọn đáp án, “mỗi câu chọn đúng được 0,4 điểm; chọn sai bị trừ 0,1 điểm”.

Giả sử có một học sinh làm chắc chắn đúng được 18 câu, các câu còn lại học sinh này chọn ngẫu nhiên một phương án. Xác suất để điểm toàn bài của học sinh này trên 8,5 điểm là bao nhiêu?

Câu 5 (5,50 điểm).

a) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2AB$ và điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CD}$.

Gọi F là điểm thuộc đoạn thẳng AB' sao cho $A'F$ vuông góc với $A'E$. Tính tỷ số $\frac{FA}{FB'}$.

b) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Cho biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng a ; góc giữa hai mặt phẳng

(SAB) và (SBC) bằng α , với $\cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

———— HẾT ————

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO KHÁNH HÒA
ĐỀ THI CHÍNH THỨCKỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN: TOÁN - NĂM HỌC: 2025 - 2026

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 22/01/2026

(Đề thi có 2 trang)

Họ, tên học sinh:

Số báo danh:

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1 (4,00 điểm)

a) Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị và đường thẳng qua cực trị đi qua $A(1; -4)$.Điều kiện để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m+6)x - 1$ có hai cực trị: Ta có $y' = -3x^2 + 6mx - 3(m+6)$.Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + (m+6) = 0$.Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta' = m^2 - (m+6) = m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -2 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (Δ): Thực hiện phép chia y cho y' , ta có:

$$y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3} \right) + 2(m^2 - m - 6)x - (m^2 + 6m + 1)$$

Vậy phương trình đường thẳng qua hai cực trị là:

$$(\Delta) : y = 2(m^2 - m - 6)x - (m^2 + 6m + 1)$$

Vì (Δ) đi qua $A(1; -4)$, thay tọa độ A vào phương trình:

$$-4 = 2(m^2 - m - 6) \cdot 1 - (m^2 + 6m + 1) \Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 9 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $m = 9$ là giá trị cần tìm.

b) Bài toán tối ưu diện tích hàng rào.

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều dài cạnh AD và AB ($x, y > 0$). Tổng chi phí xây dựng là:

$$T = 30y(\text{cạnh } AB) + 20y(\text{cạnh } CD) + 20(2x)(\text{cạnh } AD, BC) + 15(2x)(\text{cạnh } EF, GH)$$

$$\text{Nên: } T = 50y + 70x = 35.000 \Rightarrow 5y + 7x = 3500 \Rightarrow y = \frac{3500-7x}{5}$$

$$\text{Diện tích mảnh đất: } S = x \cdot y = x \left(\frac{3500-7x}{5} \right) = \frac{1}{5}(-7x^2 + 3500x)$$

$$\text{Đây là parabol có đỉnh tại } x = \frac{-3500}{2 \cdot (-7)} = 250. \text{ Khi đó } y = \frac{3500-7 \cdot 250}{5} = 350.$$

$$\text{Diện tích lớn nhất là: } S_{\max} = 250 \cdot 350 = 87.500 \text{ m}^2.$$

Câu 2 (3,50 điểm)**a) Tìm GTLN của $P = x - 2y$.**Từ giả thiết: $5^{x^2-y+1} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 5^{(x+1)^2} \cdot (x+1)^2 = 5^{2x+y} \cdot (2x+y)$.Xét hàm số $f(t) = 5^t \cdot t$ có đạo hàm luôn lớn hơn 0 với $t > 0$, ta suy ra $(x+1)^2 = 2x+y \Rightarrow y = x^2 + 1$.Thay vào biểu thức P :

$$P = x - 2(x^2 + 1) = -2x^2 + x - 2$$

GTLN của tam thức bậc hai này đạt được tại $x = \frac{1}{4}$. Vậy $P_{\max} = -2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 2 = -\frac{15}{8}$.**b) Dãy số.**Ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1 \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1$.Vậy (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = u_2 - u_1 = 2$ và công sai $d = 1$.Tổng n số hạng đầu của (v_n) : $S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 1] = \frac{n(n+3)}{2}$.Số hạng tổng quát u_n : $u_n = u_1 + S_{n-1} = -1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+n-4}{2}$.**Câu 3 (3,50 điểm)****a) Giải bất phương trình:** $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 \leq 0$.Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$. Sử dụng phương pháp liên hợp với nghiệm $x = 5$:

$$\frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right] \leq 0$$

Vì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương với mọi $x \in [-\frac{1}{3}; 6]$, ta có: $x-5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.Kết hợp điều kiện, tập nghiệm là $S = [-\frac{1}{3}; 5]$.**b) Bài toán quy hoạch tuyến tính (Tối ưu chi phí thực phẩm).**Gọi x, y lần lượt là số hộp thực phẩm loại X và loại Y cần mua ($x, y \geq 0$).

Hệ điều kiện về các đơn vị chất dinh dưỡng tối thiểu:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 11 & (\text{Chất A}) \\ 2x + 9y \geq 27 & (\text{Chất B}) \\ 2x + 3y \geq 20 & (\text{Chất C}) \end{cases}$$

Hàm chi phí cần tối thiểu hóa: $L(x, y) = 200x + 250y$ (nghìn đồng).**i. Thiết lập hệ bất phương trình và Hàm mục tiêu** Hệ điều kiện về đơn vị chất dinh dưỡng tối thiểu:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 11 & (d_1) \\ 2x + 9y \geq 27 & (d_2) \\ 2x + 3y \geq 20 & (d_3) \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Hàm chi phí cần tối thiểu hóa: $L(x, y) = 200x + 250y$ (nghìn đồng).

ii. Xác định các điểm cực biên của miền nghiệm Xét các giao điểm của các đường biên để xác định hình dạng miền nghiệm khả thi:

- Giao điểm của d_1 và d_3 : Giải hệ $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \Rightarrow A(3, 25; 4, 5).$
- Giao điểm của d_3 and d_2 : Giải hệ $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ 2x + 9y = 27 \end{cases} \Rightarrow B(8, 25; 1, 16).$

Chú ý: Giao điểm của d_1 và d_2 tại $(4, 5; 2)$ không thỏa mãn điều kiện (d_3) nên không thuộc miền nghiệm.

iii. Kiểm tra các điểm nguyên lân cận Vì x, y là các số nguyên, ta kiểm tra các tọa độ nguyên nằm trong miền nghiệm gần các đỉnh A và B :

Điểm (x, y)	Kiểm tra điều kiện	Chi phí L (nghìn đồng)
$(3, 5)$	Thỏa mãn (d_1, d_2, d_3)	$200(3) + 250(5) = 1850$
$(4, 4)$	Thỏa mãn (d_1, d_2, d_3)	$200(4) + 250(4) = 1800$
$(7, 2)$	Thỏa mãn (d_1, d_2, d_3)	$200(7) + 250(2) = 1900$
$(9, 1)$	Thỏa mãn (d_1, d_2, d_3)	$200(9) + 250(1) = 2050$

iv. Kết luận Giá trị nhỏ nhất của hàm chi phí là **1.800.000 đồng**. Phương án tối ưu là mua **4 hộp thực phẩm loại X** và **4 hộp thực phẩm loại Y**.

Câu 4 (3,50 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$$

Cách 1: Sử dụng đạo hàm

- Xét khai triển nhị thức Newton: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$
- Lấy đạo hàm hai vế theo x : $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}.$
- Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên, ta được: $n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$ (đpcm).

Cách 2: Sử dụng công thức số hạng tổng quát

- Ta có: $k \cdot C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \cdot C_{n-1}^{k-1}.$
- Khi đó: $\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^n n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1}.$
- Mà $\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}.$
- Suy ra tổng bằng $n \cdot 2^{n-1}.$

b) Bài toán xác suất

- Điểm từ 18 câu chắc chắn đúng: $18 \times 0,4 = 7,2$ điểm.
- Số câu còn lại: $25 - 18 = 7$ câu. Để điểm toàn bài $> 8,5$, số điểm từ 7 câu này phải $> 1,3$.
- Gọi k là số câu chọn đúng trong 7 câu ($0 \leq k \leq 7$). Số câu sai là $7 - k$.

- Tổng điểm từ 7 câu: $0,4k - 0,1(7 - k) = 0,5k - 0,7$.
- Điều kiện: $0,5k - 0,7 > 1,3 \Leftrightarrow 0,5k > 2,0 \Leftrightarrow k > 4$. Vậy $k \in \{5, 6, 7\}$.
- Xác suất đúng 1 câu là $p = 1/4 = 0,25$.
- Xác suất cần tìm: $P = C_7^5(0,25)^5(0,75)^2 + C_7^6(0,25)^6(0,75)^1 + C_7^7(0,25)^7 = \frac{211}{16384} \approx 0,01288$.

Câu 5 (5,50 điểm)

a) Tính tỷ số $\frac{FA}{FB'}$

- Tọa độ hóa: $A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), D(0, b, 0), A'(0, 0, 2a)$.
- $C(a, b, 0), \vec{CD} = (-a, 0, 0). \vec{CE} = 3\vec{CD} = (-3a, 0, 0) \Rightarrow E(-2a, b, 0)$.
- $B'(a, 0, 2a)$. Gọi $F \in AB' \Rightarrow \vec{AF} = k\vec{AB'} \Rightarrow F(ka, 0, 2ka)$.
- $\vec{A'E} = (-2a, b, -2a), \vec{A'F} = (ka, 0, 2ka - 2a)$.
- $A'F \perp A'E \Leftrightarrow \vec{A'F} \cdot \vec{A'E} = 0 \Leftrightarrow -2ka^2 - 2a(2ka - 2a) = 0 \Leftrightarrow k = 2/3$.
- Vì $AF = \frac{2}{3}AB'$ nên $FB' = \frac{1}{3}AB'$. Vậy $\frac{FA}{FB'} = 2$.

b) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

i. Xác định các yếu tố hình học:

- Gọi I là trung điểm của AB . Do $\triangle ABC$ đều nên $CI \perp AB$.
- Vì $SC \perp (ABC) \Rightarrow SC \perp AB$. Suy ra $AB \perp (SCI)$.
- Kẻ $CH \perp SI$ tại H . Vì $AB \perp (SCI) \Rightarrow AB \perp CH$.
- Từ đó $CH \perp (SAB)$, nên khoảng cách $d(C, (SAB)) = CH = a$.

ii. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) :

- Kẻ $HK \perp SB$ tại K . Ta có $CH \perp SB$ (do $CH \perp (SAB)$), suy ra $SB \perp (CHK)$.
- Do đó $SB \perp CK$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{CKH} = \alpha$ với $\cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

iii. Tính toán các đại lượng: Xét $\triangle CHK$ vuông tại H , ta có:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{17}{18}} \Rightarrow CK = \frac{CH}{\sin \alpha} = a\sqrt{\frac{18}{17}}$$

Đặt $BC = x, CI = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ và $SC = y$.

- Xét $\triangle SCI$ vuông tại C : $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CI^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{4}{3x^2}$
- Xét $\triangle SCB$ vuông tại C : $\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{CB^2} \Rightarrow \frac{17}{18a^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$

Giải hệ phương trình trên:

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} + \frac{4}{3x^2} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{18a^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{18a^2} \Rightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{6} \\ y = \frac{3\sqrt{7}}{7}a \end{cases}$$

iv. Tính thể tích khối chóp:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot y \cdot \left(x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}a}{7} \cdot \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{21}}{14}a^3$$