

BÀI 2**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ****1. Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D .

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $M = \max_D f(x)$ nếu:

$f(x) \leq M, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $m = \min_D f(x)$ nếu:

$f(x) \geq m, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm.

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ như sau:

- Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

- Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

- Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

DẠNG 1**TÌM GTLN VÀ GTNN DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ**

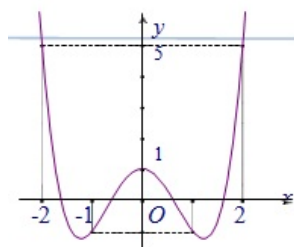
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0					

- A.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

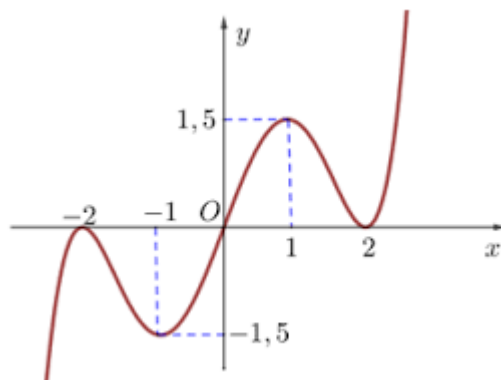
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

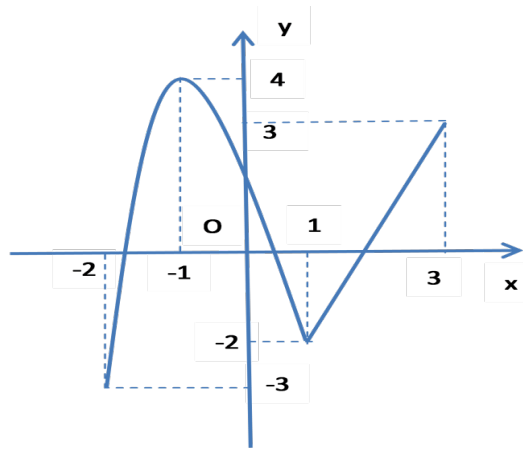
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + 2024$ cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị $M - m$ bằng:

- A.** $M - m = 0$ **B.** $M - m = -2024$ **C.** $M - m = 4048$ **D.** $M - m = 3$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m - 3M$ bằng:

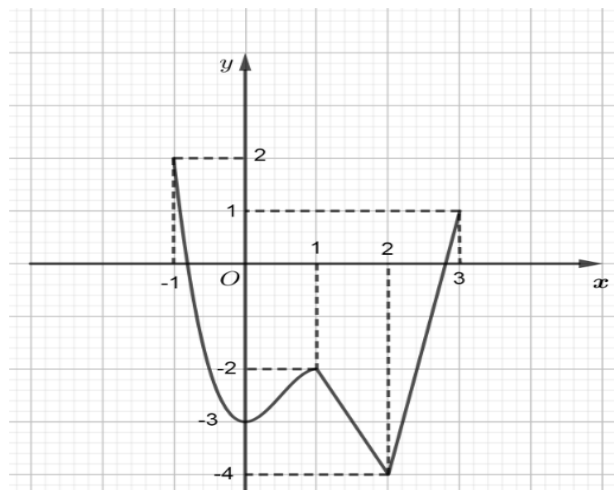
A. -13.

B. -18.

C. -16.

D. -15.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M + m$ là

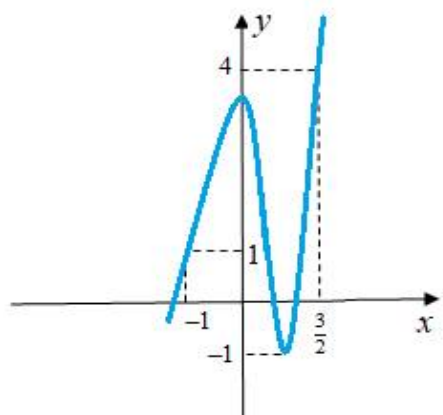
A. 2.

B. -6.

C. -5.

D. -2.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M + m$ bằng

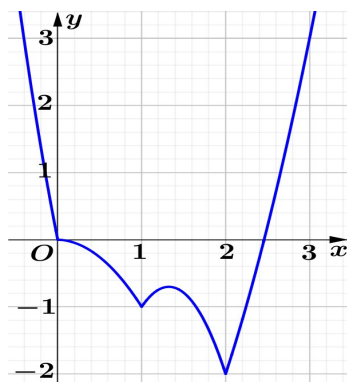
A. $\frac{1}{2}$.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?



A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 8. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4	-3	1	2	
y'	+	0	-	0	+
y	0	27	-5	6	

A. Hàm số có giá trị lớn nhất 27.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -5.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4; 2)$.

D. Hàm số có điểm cực tiểu $(1; -5)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- D. Hàm số có đúng hai cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

- A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.
- B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.
- C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$.
- D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Câu 11. Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

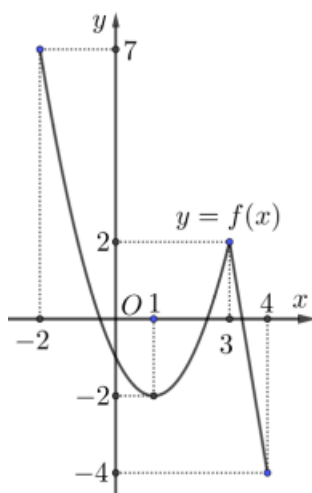
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	1	0

Xét trên tập xác định của hàm số.

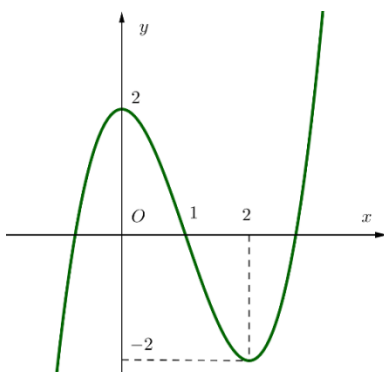
- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
- C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- D. Hàm số có một điểm cực trị.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0; 2]$. Khi đó $M + m$ là

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a; b]$ **Phương pháp :**

• **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

• **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

• **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \\ \min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \end{cases}$$

Nhận xét:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

• Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a; b]$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

- A. -12. B. 10. **C. 15.** D. -2.

Câu 15. Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = 5$. **B. $x = 2$.** C. $x = 1$. D. $x = 4$.

Câu 16. Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = 1$.** B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

- A. $\min_{[2; 4]} y = 0$. **B. $\min_{[2; 4]} y = 3$.** C. $\min_{[2; 4]} y = 5$. D. $\min_{[2; 4]} y = 7$.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

A. $\max_{[1;3]} f(x) = 0$. B. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{27}$. C. $\max_{[1;3]} f(x) = -6$. D. $\max_{[1;3]} f(x) = 5$.

Câu 19. Hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5; -3]$ bằng:

A. $-\frac{13}{12}$. B. $\frac{11}{6}$. C. $-\frac{47}{60}$. D. $-\frac{11}{6}$.

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

A. $\min_{[0;3]} y = -3$. B. $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. C. $\min_{[0;3]} y = -1$. D. $\min_{[0;3]} y = 1$.

Câu 21. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là:

A. $\frac{17}{3}; 3$. B. $\frac{17}{3}; -5$. C. $3; -5$. D. $-3; 5$.

Câu 22. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng

A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 23. Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2}; 1$. B. $1; 0$. C. $2; \sqrt{2}$. D. $2; 1$.

Câu 24. Hàm số $y = \cos 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ bằng:

A. -4. B. -3. C. -2. D. 0.

Câu 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\cos x - \cos 5x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4$. B. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{2}$. C. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{3}$. D. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = -1$.

Câu 26. Hàm số $y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt bằng $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$. B. -4. C. $\frac{3}{8}$. D. 1.

Câu 27. Hàm số $y = \cos 2x - 4\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}; 0$. B. 5; 1. C. 5; -1. D. 9; 1.

Câu 28. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó

$M - m$ bằng

A. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$. B. 1. C. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. D. -1.

Câu 29. Hàm số $y = \sqrt{1 + 2\sin x \cdot \cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

- A. $x = \frac{\pi}{4}$. B. $x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 30. Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

- A. $-2; 2$. B. $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$. C. $0; 1$. D. $-1; 1$.

Câu 31. Hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

- A. $-2; 1$. B. $0; 2$. C. $\frac{1}{2}; 1$. D. $0; 1$.

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

- A. $\frac{\ln 2}{2}$. B. $\frac{\ln 3}{3}$. C. $\frac{3}{e^2}$. D. $\frac{1}{e}$.

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

- A. $2e^4$ B. $-e^2$ C. $2e^2$ D. $-2e^2$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 34. Cho hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$.
 B. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$.
 C. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$.
 D. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = 6$.
 B. Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$
 C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = -6$.
 D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Trên đoạn $[-1; 2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Câu 37. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là bao nhiêu?

Câu 38. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Câu 39. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$.

Câu 41. Tìm có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x (\sin x + 1)$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Câu 42. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{x+1} - \frac{4}{3} \cdot 8^x$ trên $[-1; 0]$

DẠNG 3**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a; b)$** **NỬA KHOẢNG $(a; b]; [a; b)$.**

Phương pháp : Dùng bảng biến thiên để tìm max – min. Phương pháp này thường dùng cho bài toán tìm GTLN và GTNN trên **một khoảng** $(a;b)$ **hoặc nửa khoảng** $[a;b)$, $(a;b]$.

• **Bước 1:** Tính $f'(x)$ $f'(x)$.

• **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

• **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Câu 43. Hàm số $y = (x-1)^2 + (x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3.

B. -1.

C. 10.

D. 8.

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

A. $\min_{(1;+\infty)} y = -1$.

B. $\min_{(1;+\infty)} y = 3$.

C. $\min_{(1;+\infty)} y = 5$.

D. $\min_{(2;+\infty)} y = \frac{-7}{3}$.

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 3 + \sqrt{5}$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.

Câu 46. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất.

B. có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 47. Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 48. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

D. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}.$$

Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ khi hàm số $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$$\min_{(0; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \max_{(0; +\infty)} y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Câu 49. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là:

- A. Không tồn tại. B. 1. C. π . D. -1.

Câu 50. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 0. B. 1. C. -1. D. Không tồn tại.

Câu 51. Hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. 1; -1. B. 2; 0. C. $\frac{1}{4}$; -1. D. 1; $\frac{1}{4}$.

DẠNG 4

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 52. Hàm số $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. $3; \frac{112}{9}$. B. $1; 4$. C. $1; \frac{112}{9}$. D. $4; \frac{112}{9}$.

Câu 53. Hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 63]$ là:

- A. $2; 12$. B. $1; 2$. C. $0; 2$. D. $0; 12$.

Câu 54. Hàm số $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là:

- A. $\frac{8}{3}; 0$. B. $\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}$. C. $0; -\frac{8}{3}$. D. $\frac{24}{5}; 0$.

Câu 55. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$ bằng

- A. $\max_{[-4;4]} y = 10$. B. $\max_{[-4;4]} y = 5 - 2\sqrt{2}$. C. $\max_{[-4;4]} y = -7$. D. $\max_{[-4;4]} y = 5 + 2\sqrt{2}$.

Câu 56. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là:

- A. $M = -1; m = \frac{-3}{2}$. B. $M = 3; m = -1$. C. $M = 3; m = \frac{-3}{2}$. D. $M = \frac{3}{2}; m = -3$.

Câu 57. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$ là:

- A. $M = 2; m = -5$. B. $M = 5; m = 2$. C. $M = 5; m = -2$. D. $M = -2; m = -5$.

Câu 58. Hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. -6 . B. -7 . C. 8 . D. 9 .

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số

đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

- A. $M = m + \frac{2}{3}$. B. $M = m + 1$. C. $M = \frac{3}{2}m$. D. $M = m + \frac{3}{2}$.

Câu 60. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nửa khoảng $[-4; +\infty)$ là:

- A. $\min_{[-4; +\infty)} y = -8$. B. $\min_{[-4; +\infty)} y = -11$. C. $\min_{[-4; +\infty)} y = -17$. D. $\min_{[-4; +\infty)} y = -9$.

BÀI 2**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ****1. Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D .

• Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $M = \max_D f(x)$ nếu: $f(x) \leq M, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

• Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $m = \min_D f(x)$ nếu: $f(x) \geq m, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm.

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ như sau:

• **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

• **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

• **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Nhận xét:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

• Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

DẠNG 1**TÌM GTLN VÀ GTNN DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		1		4
	0						

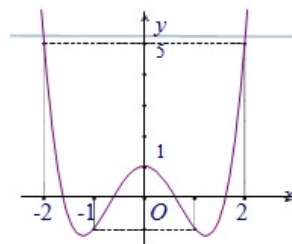
- A.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0) = 5$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$.

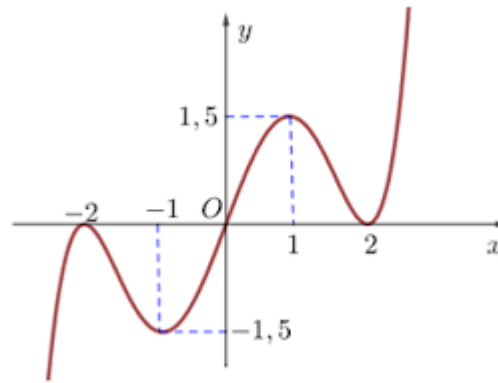
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có: $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 5$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + 2024$ cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị $M - m$ bằng:

A. $M - m = 0$

B. $M - m = -2024$

C. $M - m = 4048$

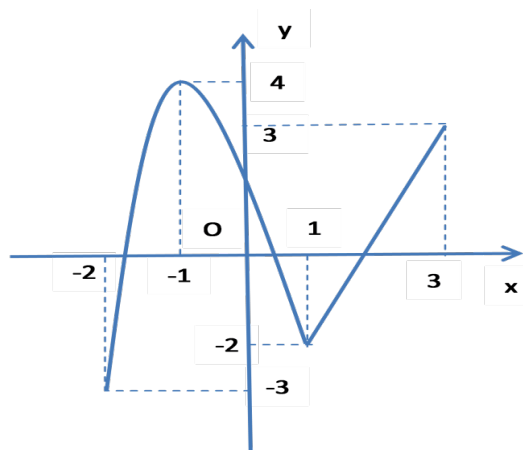
D. $M - m = 3$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Từ đồ thị ta có: } \begin{cases} \min_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = -1,5 \\ \max_{[-2;2]} f(x) = f(1) = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{[-2;2]} g(x) = f(-1) = -1,5 + 2024 \\ M = \max_{[-2;2]} g(x) = f(1) = 1,5 + 2024 \end{cases} \Rightarrow M - m = 3$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị của $2m - 3M$ bằng:

A. -13.

B. -18.

C. -16.

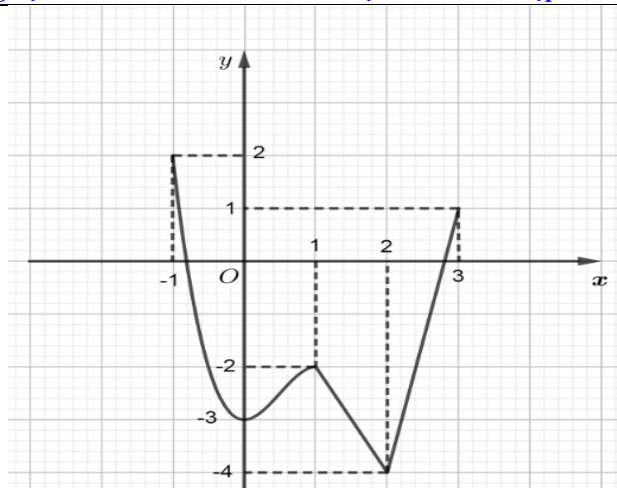
D. -15.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Từ đồ thị ta có: } \begin{cases} m = \min_{[-2;3]} f(x) = f(-2) = -3 \\ M = \max_{[-2;3]} f(x) = f(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow 2m - 3M = -18$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M + m$ là

A. 2.

B. -6.

C. -5.

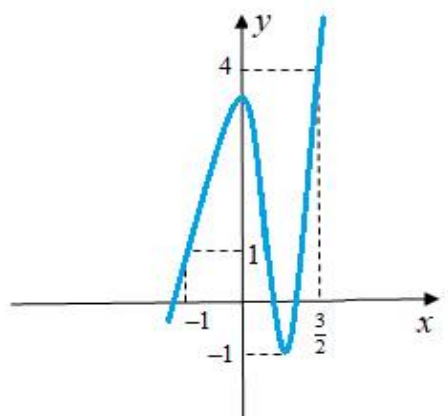
D. -2.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có:
$$\begin{cases} m = \min_{[-1; 3]} f(x) = f(-2) = -4 \\ M = \max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = -2$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; \frac{3}{2}]$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 5.

C. 4.

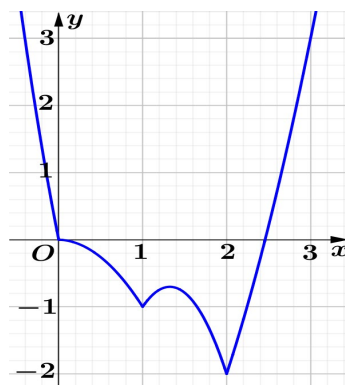
D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có:
$$\begin{cases} m = \min_{[-1; \frac{3}{2}]} f(x) = -1 \\ M = \max_{[-1; \frac{3}{2}]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow M + m = 3$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?



A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 1.**Lời giải****Chọn D.**

Từ đồ thị ta có:
$$\begin{cases} m = \min_{[0;3]} f(x) = f(2) = -2 \\ M = \max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow M + m = 1$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 8. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-4	-3	1	2	
y'	+	0	-	0	+
y	0	27	-5	6	

A. Hàm số có giá trị lớn nhất 27 .

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -5 .

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4;2)$.D. Hàm số có điểm cực tiểu $(1;-5)$.**Lời giải**A. Hàm số có giá trị lớn nhất 27 . **ĐÚNG**B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -5 . **ĐÚNG**C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4;2)$. **SAI**

D. Hàm số có điểm cực tiểu $(1; -5)$. ĐÚNG

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số có đúng hai cực trị.

Lời giải

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1. **SAI**

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 . **SAI**

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$. **ĐÚNG**

D. Hàm số có đúng hai cực trị. **ĐÚNG**

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.

B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$.

D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Lời giải

A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$. **SAI**

B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. **SAI**

C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. **SAI**

D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$. **ĐÚNG**

Câu 11. Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y			

Xét trên tập xác định của hàm số.

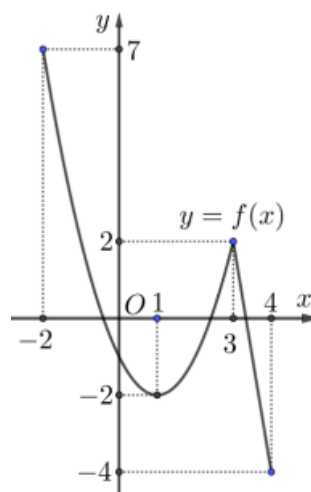
- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.
- C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- D. Hàm số có một điểm cực trị.

Lời giải

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0. **ĐÚNG**
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0. **SAI**
- C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. **SAI**
- D. Hàm số có một điểm cực trị. **ĐÚNG**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

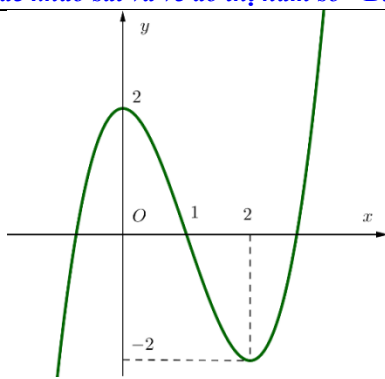


Lời giải

Đáp án: 3

Từ đồ thị ta có:
$$\begin{cases} m = \min_{[-2;4]} f(x) = f(4) = -4 \\ M = \max_{[-2;4]} f(x) = f(-2) = 7 \end{cases} \Rightarrow M + m = 3$$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0; 2]$. Khi đó $M + m$ là

Lời giải

Đáp án: $M + m = 3$

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a; b]$ **Phương pháp :**

• **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

• **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

• **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \\ \min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \end{cases}$$

Nhận xét:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

• Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a; b]$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

- A. -12. B. 10. **C. 15.** D. -2.

Lời giải**Chọn C.**

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 3 \notin [-2; 2] \end{cases}.$$

$$f(-2) = 8; f(-1) = 15; f(2) = -12.$$

Suy ra $\max_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = 15$.

Câu 15. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 5$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $x \in [1;5]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 \text{ suy ra hàm số } y = x + \frac{4}{x} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } 4 \text{ khi } x = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 2.$$

Cách 2: Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (vì $x \in [1;5]$).

$$\text{Khi đó } y(1) = 5, y(2) = 4 \text{ và } y(5) = \frac{29}{5}.$$

Do đó $\min_{[1;5]} y = 4$ tại $x = 2$.

Cách 3: Dùng Casio

Câu 16. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0;3] \\ x = -1 \notin [0;3] \end{cases}$$

Lại có $y(0) = 4; y(1) = 2; y(3) = 22$.

Vậy $\min_{[0;3]} y = y(1) = 2$.

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\min_{[2;4]} y = 0$.

B. $\min_{[2;4]} y = 3$.

C. $\min_{[2;4]} y = 5$.

D. $\min_{[2;4]} y = 7$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0;2) \\ x = -1 \notin (0;2) \end{cases}$$

$$y(1) = 3; y(0) = 5; y(2) = 7. \text{ Do đó } \min_{[0;2]} y = y(1) = 3$$

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\max_{[1;3]} f(x) = 0$. B. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{13}{27}$. C. $\max_{[1;3]} f(x) = -6$. D. $\max_{[1;3]} f(x) = 5$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 & \notin (1;3) \\ x = \frac{4}{3} & \in (1;3) \end{cases}$

$f(1) = 0$; $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$; $f(3) = -6$.

Do đó $\max_{x \in [1;3]} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$

Câu 19. Hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5; -3]$ bằng:

A. $-\frac{13}{12}$. B. $\frac{11}{6}$. C. $-\frac{47}{60}$. D. $-\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}$

Ta có: $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0; \forall x \in D$

BBT:

x	-5	-3
y'	-	
y	$-\frac{47}{60}$	$-\frac{11}{6}$

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min_{[0;3]} y = -3$. B. $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. C. $\min_{[0;3]} y = -1$. D. $\min_{[0;3]} y = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;3]$

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với $\forall x \in [0;3]$. $y(0) = -1$; $y(3) = \frac{1}{2}$. Do đó $\min_{x \in [0;3]} y = y(0) = -1$

Câu 21. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là:

A. $\frac{17}{3}; 3$

B. $\frac{17}{3}; -5.$

C. $3; -5.$

D. $-3; 5.$

Lời giải

Chọn A.

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \notin (0; 2) \\ x = -2 & \notin (0; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(0) = 3; y(2) = \frac{17}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 2]} y = y(2) = \frac{17}{3}; \min_{x \in [0; 2]} y = y(0) = 3$$

Câu 22. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = [-1; 1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ với } -1 < x < 1. y' = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y(\pm 1) = 0; y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } M = \max_{[-1; 1]} y = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}; m = \min_{[-1; 1]} y = y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow M + m = 0$$

Câu 23. Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2}; 1.$

B. $1; 0.$

C. $2; \sqrt{2}.$

D. $2; 1.$

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = [-1; 1]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Khi đó: } y(-1) = \sqrt{2}; y(0) = 2; y(1) = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 24. Hàm số $y = \cos 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ bằng:

A. -4 .

B. -3 .

C. -2 .

D. 0 .

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2 \sin 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; \pi] \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$. Do đó: $y(0) = -2$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \Rightarrow \min y = -4$

Câu 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5 \cos x - \cos 5x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4$.

B. $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{2}$.

C. $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{3}$.

D. $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = -1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y = 5 \cos x - \cos 5x$ nên $y' = -5 \sin x + 5 \sin 5x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

Trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$

$$y(0) = 4; y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}; y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}.$$

Vậy $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4 = y(0)$

Câu 26. Hàm số $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt bằng $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. -4 .

C. $\frac{3}{8}$.

D. 1 .

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2 \sin x \cos x + 2 \sin x = -2 \sin x (\cos x - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; \pi] \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$.

$$\text{Khi đó: } y(0) = -2; y(\pi) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = -4.$$

Câu 27. Hàm số $y = \cos 2x - 4 \sin x + 4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}; 0$.

B. 5; 1.

C. 5; -1.

D. 9; 1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2 \sin 2x - 4 \cos x = -4 \cos x (\sin x + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Khi đó $y(0) = 5$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Câu 28. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó

$M - m$ bằng

A. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. 1.

C. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

D. -1.

Lời giải

Chọn B.

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \left(x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right] \right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 2, \min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 1.$$

Câu 29. Hàm số $y = \sqrt{1 + 2 \sin x \cdot \cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $x = \frac{\pi}{4}$.

B. $x = \frac{\pi}{6}$.

C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{1 + 2 \sin x \cdot \cos x} = \sqrt{1 + \sin 2x}; y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Câu 30. Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. -2; 2.

B. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

C. 0; 1.

D. -1; 1.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow \min y = -\sqrt{2}; \max y = \sqrt{2}$

Câu 31. Hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. -2; 1.

B. 0; 2.

C. $\frac{1}{2}$; 1.

D. 0; 1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{2}, \max y = 1$.

Câu 32. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$.

B. $\frac{\ln 3}{3}$.

C. $\frac{3}{e^2}$.

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2; 3]$

Có $f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3466$; $f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,3679$; $f(3) = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366$,

Suy ra $\min_{x \in [2; 3]} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

A. $2e^4$

B. $-e^2$

C. $2e^2$

D. $-2e^2$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = 2(x^2 - 2)e^{2x} + 2xe^{2x} = 2(x^2 + x - 2)e^{2x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}.$$

Và $f(-1) = -e^{-2}$; $f(2) = 2e^4$; $f(1) = -e^2$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $-e^2$ tại $x = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 34. Cho hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$.

B. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$.

C. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$.

D. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$.

Lời giải

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$. **SAI**

B. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$. **SAI**

C. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$. **ĐÚNG**

D. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$. **SAI**

Điều kiện xác định: $5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$.

Suy ra hàm số xác định với $\forall x \in [-1; 1]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

Ta có $y' = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Do đó $\max_{[-1;1]} y = y(-1) = 3; \min_{[-1;1]} y = y(1) = 1$

Câu 35. Cho hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = 6$.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = -6$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$.

Lời giải

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = 6$. ĐÚNG

B. Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$. ĐÚNG

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = -6$. SAI

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. SAI

Hàm số đã cho liên tục trên $[2;4]$

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 & \notin (2;4) \\ x = 3 & \in (2;4) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(2) = \frac{13}{2}; y(3) = 6; y(4) = \frac{25}{4}. \text{ Do đó } \min_{x \in [2;4]} y = y(3) = 6$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x = 0$

$$y = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{cases}$$

$$y(-1) = 3; y(0) = 1; y(2) = 21.$$

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x = 0$.

Câu 37. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là bao nhiêu?:

Lời giải

Đáp án: $\max_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}$, $\min_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $y' = \frac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do $y(-1) = 0, y(1) = \sqrt{2}, y(2) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ nên

$$\max_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}, \min_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$$

Câu 38. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Lời giải

Đáp án: $y = 2$

Hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ có tập xác định $D = [2; 4]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (2; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y(2) = \sqrt{2}, y(3) = 2, y(4) = \sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là 2

Câu 39. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Đáp án: $\min_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$

TXĐ: $D = [-2; 2]$. Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y(-2) = -2; y(2) = 2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Vậy $\min_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$.

Lời giải

Đáp án: $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $y' = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cdot \cos x = 2 \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \cos x \cdot \cos 2x$

$$\text{Nên } y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Trên } (0; \pi), y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$y(0) = 0; y(\pi) = 0; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\max_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Câu 41. Tìm có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x (\sin x + 1)$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Lời giải

Đáp án: $\pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -\sin x(\sin x + 1) + \cos^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Vì $x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6}$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $y(\pi) = -1$

Câu 42. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{x+1} - \frac{4}{3} \cdot 8^x$ trên $[-1; 0]$

Lời giải

Đáp án: $y_{\min} = \frac{2}{3}$

$$y' = 2^{x+1} \ln 2 - \frac{4}{3} \cdot 8^x \ln 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2 \cdot (2^x)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 0 \\ 2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1/2 \end{cases}$$

Xét $y(-1) = 5/6$; $y(-1/2) = 0,9428$; $y(0) = 2/3$. Ta có: $y_{\min} = \frac{2}{3}$.

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a; b)$

NỬA KHOẢNG $(a; b]$; $[a; b)$.

Phương pháp : Dùng bảng biến thiên để tìm max – min. Phương pháp này thường dùng cho bài toán tìm GTLN và GTNN trên **một khoảng** $(a; b)$ **hoặc nửa khoảng** $[a; b)$, $(a; b]$.

• **Bước 1:** Tính $f'(x)$

• **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

• **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Câu 43. Hàm số $y = (x-1)^2 + (x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3.

B. -1.

C. 10.

D. 8.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = (x-1)^2 + (x+3)^2 = 2x^2 + 4x + 10$.

Ta có: $y' = 4x + 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		0	
		$-$	$+$
y	$+\infty$	8	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

A. $\min_{(1; +\infty)} y = -1$.B. $\min_{(1; +\infty)} y = 3$.C. $\min_{(1; +\infty)} y = 5$.D. $\min_{(2; +\infty)} y = \frac{-7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Làm tự luận

Hàm số xác định với $\forall x \in (1; +\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1; +\infty)$

Ta có $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min_{x \in (1; +\infty)} f(x) = f(2) = 3$

Cách 2: Dùng Casio: Dùng chức năng $\boxed{SOLVE}$.

Bước 1: Nhập $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ vào màn hình.

Bước 2: Sau đó nhấn dấu $\boxed{SHIFT} \boxed{ALPHA} \boxed{CALC}$ rồi nhập $-\frac{7}{3}$ của **đáp án D**

Lúc này màn hình: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{7}{3}$

Bước 3: Nhấn dấu $\boxed{SHIFT} \boxed{CALC}$. Máy hỏi X ?

Bước 4: Ta nhập $X = 2$ với $2 \in (1; +\infty)$.

Bước 5: Nhấn dấu $\boxed{=}$. kết quả $X = \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{3} \notin (1; +\infty)$

$\Rightarrow$ **loại D.**

Ta tiếp tục làm tương tự với **đáp án A:**

Bước 1: nhấn dấu $\boxed{REPLAY} \triangleright$ rồi nhập -1 của **đáp án A**

Lúc này màn hình: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -1$

Bước 2: Nhấn dấu $\boxed{SHIFT} \boxed{CALC}$. Máy hỏi X ?

Bước 3: Ta nhập $X = 2$ với $2 \in (1; +\infty)$.

Bước 4: Nhấn dấu $\boxed{=}$. kết quả $X = 0$ và $0 \notin (1; +\infty)$

$\Rightarrow$ **loại A.**

Ta tiếp tục làm tương tự với **đáp án B:**

Bước 1: nhấn dấu $\boxed{REPLAY} \triangleright$ rồi nhập 3 của **đáp án B**

Lúc này màn hình: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = 3$

Bước 2: Nhấn dấu $\boxed{SHIFT} \boxed{CALC}$. Máy hỏi X ?

Bước 3: Ta nhập $X = 2$ với $2 \in (1; +\infty)$.

Bước 4: Nhấn dấu $\boxed{=}$. kết quả $X = 2$ và $2 \in (1; +\infty)$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 3 + \sqrt{5}$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.

Lời giải

Chọn B.TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ Ta có $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		0	
		-	+
y	$+\infty$	5	$+\infty$

Do đó $\min_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$ **Câu 46.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất.

B. có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. có giá trị nhỏ nhất bằng 0.**Lời giải****Chọn D.**TXĐ: $D = [-1; +\infty)$.Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

Bảng biến thiên:

x	-1	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -1$ **Câu 47.** Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.**B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.**

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.**Lời giải****Chọn B.**TXĐ: $D = [1; +\infty)$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

BBT:

x	1	$\frac{5}{4}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	1		$\frac{3}{4}$		0

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 48. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

D. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ khi hàm số $f(x) = \sqrt{9x^2+1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$$\min_{(0; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \max_{(0; +\infty)} y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Câu 49. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. Không tồn tại.

B. 1.

C. π .

D. -1.

Lời giải

Chọn D.

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi \left(x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	
y'		$+$	0	$-$
y			-1	

$-\infty \nearrow \quad \searrow -\infty$

Vậy $\max_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y = -1$ và $\min_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y$ không tồn tại.

Câu 50. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 0. B. 1. C. -1. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos 2x \leq 1 \Rightarrow \max y = 1$.

Câu 51. Hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. 1; -1. B. 2; 0. C. $\frac{1}{4}$; -1. D. 1; $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Mà: $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{4}; \max y = 1$.

DẠNG 4

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 52. Hàm số $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. $3; \frac{112}{9}$. B. 1; 4. C. $1; \frac{112}{9}$. D. $4; \frac{112}{9}$.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \left(2 \leq t \leq \frac{10}{3} \right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất $= 4$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $= \frac{112}{9}$

Câu 53. Hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 63]$ là:

A. 2; 12.

B. 1; 2.

C. 0; 2.

D. 0; 12.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = [-1; +\infty)$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x+1}$ ($1 \leq t \leq 2$)

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^3 + t^2 \Rightarrow y' = 3t^2 + 2t > 0; \forall t \in [1; 2]$

$\Rightarrow \min y = y(1) = 2; \max y = y(2) = 12$.

Câu 54. Hàm số $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là:

A. $\frac{8}{3}; 0$.

B. $\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}$.

C. $0; -\frac{8}{3}$.

D. $\frac{24}{5}; 0$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = [0; +\infty)$.

Đặt $t = \sqrt{x}; (x \in [0; 4] \Rightarrow 0 \leq t \leq 2)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = t + \frac{t}{t+1} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{(t+1)^2} > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall t \in [0; 2]$

$\Rightarrow \min y = y(0) = 0; \max y = y(2) = \frac{8}{3}$.

Câu 55. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$ bằng

A. $\max_{[-4;4]} y = 10$.

B. $\max_{[-4;4]} y = 5 - 2\sqrt{2}$.

C. $\max_{[-4;4]} y = -7$.

D. $\max_{[-4;4]} y = 5 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 4$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = x+4 + 4-x + 2\sqrt{(x+4)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(4-x)} = \frac{t^2 - 8}{2}$

Ta có $y = t - 4\left(\frac{t^2 - 8}{2}\right) + 5 = -2t^2 + t + 21 = f(t)$

Tìm điều kiện của t : Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ với $x \in [-4; 4]$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad g(-4) = 2\sqrt{2}; \quad g(0) = 4; \quad g(4) = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \min_{x \in [-4; 4]} g(x) = 2\sqrt{2}; \quad \max_{x \in [-4; 4]} g(x) = 4 \Rightarrow t \in [2\sqrt{2}; 4]$$

$$f'(t) = -4t + 1 < 0 \forall t \in [2\sqrt{2}; 4] \Rightarrow f(t) \text{ là hàm nghịch biến trên } [2\sqrt{2}; 4]$$

$$\max_{[-4; 4]} y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$$

Câu 56. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là:

A. $M = -1; m = \frac{-3}{2}$. B. $M = 3; m = -1$. C. $M = 3; m = \frac{-3}{2}$. D. $M = \frac{3}{2}; m = -3$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$$f'(t) = 4t + 2; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in [-1; 1] \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2}; \quad f(-1) = -1; \quad f(1) = 3$$

$$\text{Vậy } \min_R y = \frac{-3}{2}, \max_R y = 3.$$

Câu 57. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$ là:

A. $M = 2; m = -5$. B. $M = 5; m = 2$. C. $M = 5; m = -2$. D. $M = -2; m = -5$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t + 5$. $f'(t) = 2t - 4; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [0; 1]$

$$f(0) = 5; f(1) = 2. \text{ Vậy } \min_R y = 2, \max_R y = 5$$

Câu 58. Hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. -6 . B. -7 . C. 8 . D. 9 .

Lời giải

Chọn D.

$$y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4 = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 7$$

Đặt $t = \sin x (-1 \leq t \leq 1)$.

Xét hàm $y = -2t^3 - 6t^2 - 6t + 7$ trên đoạn $[-1; 1]$

$$y' = -6t^2 - 12t - 6 \Rightarrow y' = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Ta có: } y(-1) = 9, y(1) = -7$$

Vậy hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M = m + \frac{2}{3}$.

B. $M = m + 1$.

C. $M = \frac{3}{2}m$.

D. $M = m + \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}, f'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1, f(-1) = 0, f(1) = \frac{2}{3}$. Vậy $M = 1, m = 0$

Câu 60. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nửa khoảng $[-4; +\infty)$ là:

A. $\min_{[-4; +\infty)} y = -8$.

B. $\min_{[-4; +\infty)} y = -11$.

C. $\min_{[-4; +\infty)} y = -17$.

D. $\min_{[-4; +\infty)} y = -9$.

Lời giải

Chọn B.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$

Ta có: $y = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 5$.

Đặt $t = x^2 + 6x$. Khi đó $y = t^2 + 8t + 5$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 6x$ với $x \geq -4$.

Ta có $g'(x) = 2x + 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$g'(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$		-8	-9	$+\infty$

Suy ra $t \in [-9; +\infty)$

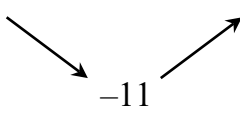
Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = h(t) = t^2 + 8t + 5$ với $t \in [-9; +\infty)$.

Ta có $h'(t) = 2t + 8; h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$;

$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-9	-4	$+\infty$
$h'(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$h(x)$		14		$+\infty$



Vậy $\min_{[-4;+\infty)} y = -11$

CHỦ ĐỀ 2

ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀO GIẢI TOÁN THỰC TẾ

DẠNG 1

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

- A. 64 cm^2 . B. 4 cm^2 . C. 16 cm^2 . D. 8 cm^2 .

Câu 2. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

- A. $16\sqrt{3} \text{ cm}$ B. $4\sqrt{3} \text{ cm}$ C. 24 cm D. $8\sqrt{3} \text{ cm}$

Câu 3. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$)?

- A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^2}{9}$. C. $\frac{2a^2}{9}$. D. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

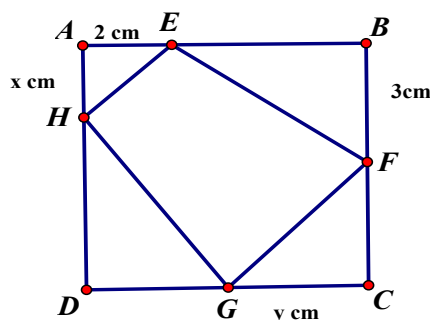
Câu 4. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC , hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

- A. $BM = \frac{2a}{3}$. B. $BM = \frac{3a}{4}$. C. $BM = \frac{a}{3}$. D. $BM = \frac{a}{4}$.

Câu 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10cm , biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

- A. 80cm^2 B. 100cm^2 C. 160cm^2 D. 200cm^2

Câu 6. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



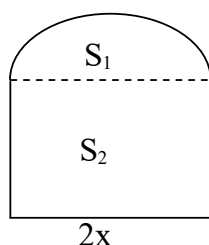
Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 7 B. 5 C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ D. $4\sqrt{2}$.

Câu 7. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó: chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

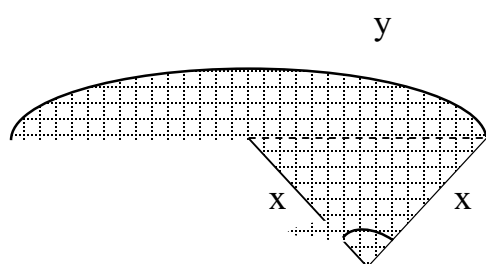
- A. 50 và 25 B. 35 và 35 C. 75 và 25 D. 50 và 50

Câu 8. Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a(m)$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



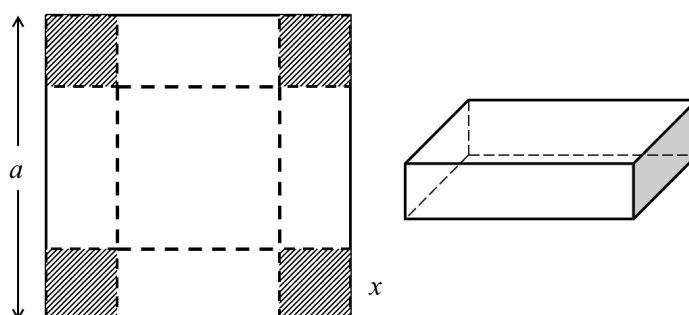
- A. chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$
 B. chiều rộng bằng $\frac{a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$
 C. chiều rộng bằng $a(4 + \pi)$, chiều cao bằng $2a(4 + \pi)$
 D. Đáp án khác

Câu 9. Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là a sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?



- A. $x = \frac{a}{4}$; $y = \frac{a}{2}$ B. $x = \frac{a}{3}$; $y = \frac{a}{3}$ C. $x = \frac{a}{6}$; $y = \frac{2a}{3}$ D. Đáp án khác

Câu 10. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

A. $\frac{5a}{6}$.

B. $\frac{a}{6}$.

C. $\frac{a}{12}$.

D. $\frac{a}{9}$.

Câu 11. Có một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$ rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 6$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = 4$

Câu 12. Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

A. 14 .

B. $\frac{196}{4 + \pi}$.

C. $\frac{112}{4 + \pi}$.

D. $\frac{28\pi}{4 + \pi}$

Câu 13. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2 . Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. 1200cm^2

B. 160cm^2

C. 1600cm^2

D. 120cm^2

Câu 14. Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính 1m , chiều dài 8m để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

A. $V = 2\text{m}^3$

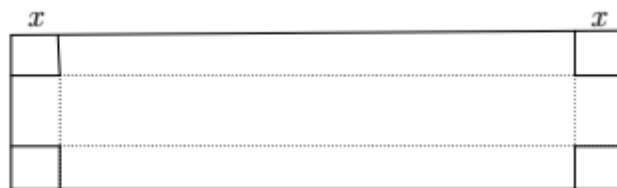
B. $V = 4\text{m}^3$

C. $V = 8\text{m}^3$

D. $V = 16\text{m}^3$

Câu 15. Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước $3\text{m} \times 8\text{m}$. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là x để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp.

Hình vẽ :



Với giá trị nào của x thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất ?

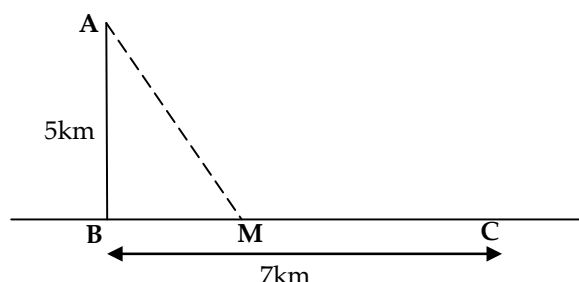
A. $x = \frac{1}{3}\text{m}$

B. $x = 1\text{m}$

C. $x = \frac{2}{3}\text{m}$

D. $x = \frac{4}{3}\text{m}$

Câu 16. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5km . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km . Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (xem hình vẽ dưới đây).



Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

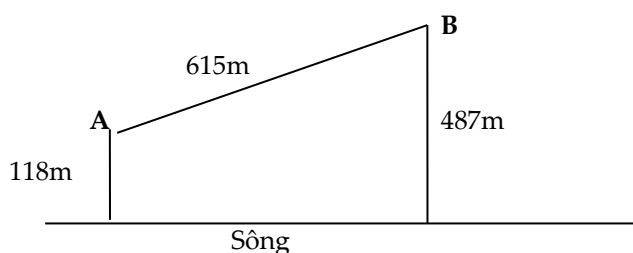
A. $\frac{\sqrt{74}}{4}$

B. $\frac{29}{12}$

C. $\sqrt{29}$

D. $2\sqrt{5}$

Câu 17. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là:

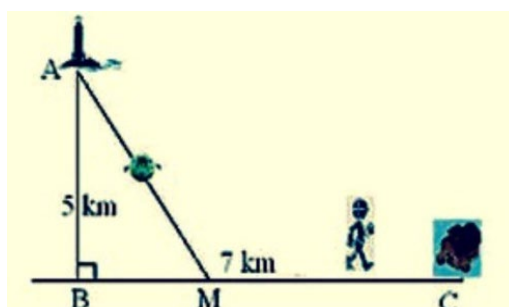
A. 569,5m

B. 671,4m

C. 779,8m

D. 741,2m

Câu 18. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7km (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6km/h$. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?

A. 0 km

B. 7 km

C. $2\sqrt{5} km$

D. $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12} km$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

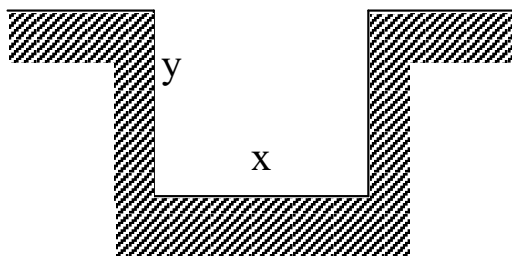
Câu 19. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(cm^2)$. Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

Câu 20. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

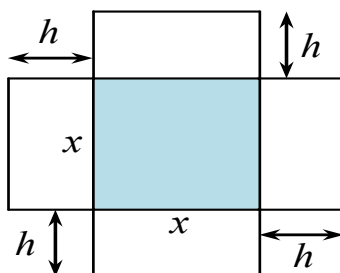
Câu 21. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 22. Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800(m). Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

Câu 23. Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? Nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật như hình vẽ sau:



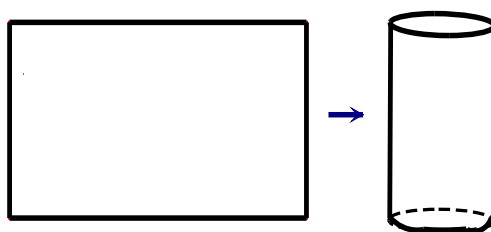
Câu 24. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 .



Giá trị của x để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

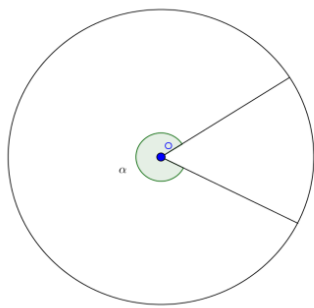
Câu 25. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R , hình trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 26. Bạn Hiền là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:

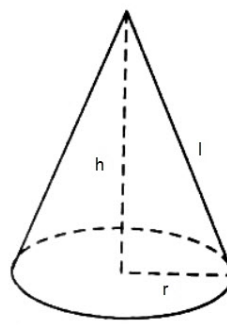


Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn Hiền chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là bao nhiêu?

Câu 27. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích $4\pi \text{ dm}^2$. Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0 < \alpha < 2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2.



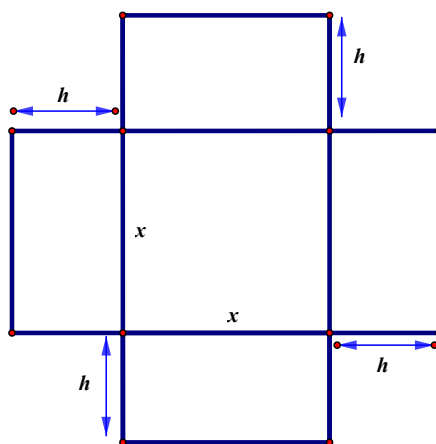
Hình 1



Hình 2

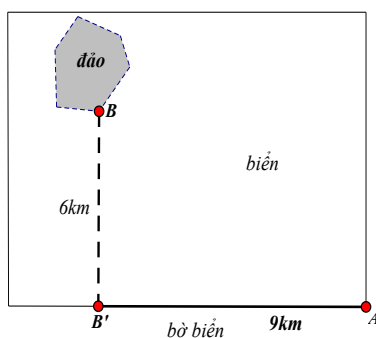
Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu?

Câu 28. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông như hình bên dưới.



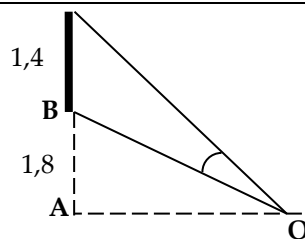
Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), đường cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3 . Tìm giá trị của x sao diện tích của mảnh các tông là nhỏ nhất.

Câu 29. Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu?

Câu 30. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó.

DẠNG 2**CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG**

- Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .
- Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 31. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

- A. 2 (s)** **B. 12 (s)** **C. 6 (s)** **D. 4 (s)**

Câu 32. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243 (m/s)** **B. 27 (m/s)** **C. 144 (m/s)** **D. 36 (m/s)**

Câu 33. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

- A. $t = 2$.** **B. $t = 1$.** **C. $t = 3$.** **D. $t = 4$.**

Câu 34. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

- A. 88(m/s).** **B. 25(m/s).** **C. 100(m/s).** **D. 11(m/s).**

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = 5s$** **B. $t = 6s$** **C. $t = 3s$** **D. $t = 1s$**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 37. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Câu 38. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 39. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Câu 40. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

• Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

• Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Câu 41. Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

- A. 5; - 8. B. 1; - 12. C. $-\frac{13}{2}; \frac{13}{2}$. D. 6; - 7.

Câu 42. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- A. 72. B. 12. C. $-\frac{1}{192}$. D. $\frac{23}{2}$.

Câu 43. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A. $27,832^{\circ}C$. B. $18,4^{\circ}C$. C. $26,2^{\circ}C$. D. $25,312^{\circ}C$.

Câu 44. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

- A. 12. B. 24. C. 6. D. 32.

Câu 45. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

- A. 100 mg. B. 20 mg. C. 30 mg. D. 0 mg.

Câu 46. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng

- A. 6 km/h. B. 8 km/h. C. 7 km/h. D. 9 km/h.

Câu 47. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác

định trên đoạn $[0;25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. Ngày thứ 19.

B. Ngày thứ 5.

C. Ngày thứ 16.

D. Ngày thứ 15.

CHỦ ĐỀ 2**ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀO GIẢI TOÁN THỰC TẾ****DẠNG 1****CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÌNH HỌC**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm^2 .B. 4 cm^2 .C. 16 cm^2 .D. 8 cm^2 .

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b ; $0 < a, b < 8$.

Ta có: $2(a+b) = 16 \Leftrightarrow a+b = 8 \Leftrightarrow b = 8-a$

Diện tích: $S(a) = a(8-a) = -a^2 + 8a$; $S'(a) = -2a + 8$; $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$

Bảng biến thiên:

a	0	4	8	
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$	0	16	0	

Cách 2

Áp dụng Côsi: $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq 16$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 4$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi cạnh bằng 4

Câu 2. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3} \text{ cm}$ B. $4\sqrt{3} \text{ cm}$ C. 24 cm D. $8\sqrt{3} \text{ cm}$

Lời giải

Chọn A.

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b ; $0 < a, b \leq 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \frac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \frac{48}{a}\right)$

$P'(a) = 2\left(1 - \frac{48}{a^2}\right)$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0	$4\sqrt{3}$	48	
$P'(a)$		-	0	+
$P(a)$			$16\sqrt{3}$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \text{chu vi nhỏ nhất: } 2(a + b) = 16\sqrt{3}$$

- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 3. Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$)?

A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a^2}{9}$.

C. $\frac{2a^2}{9}$.

D. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải**Chọn A.**

Cạnh góc vuông x , $0 < x < \frac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a - x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$. $S'(x) = \frac{a(a - 3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$			$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC , hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

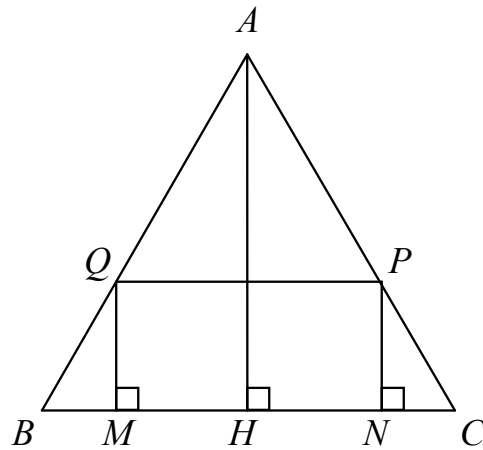
A. $BM = \frac{2a}{3}$.

B. $BM = \frac{3a}{4}$.

C. $BM = \frac{a}{3}$.

D. $BM = \frac{a}{4}$.

Lời giải**Chọn D.**



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$.

Đặt $BM = x \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$

Ta có: $MN = 2MH = a - 2x$, $QM = BM \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3} = a\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x), S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$			$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	

Vị trí điểm M : $BM = \frac{a}{4}$

Câu 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10cm , biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A. 80cm^2

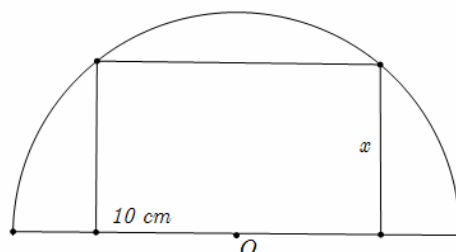
B. 100cm^2

C. 160cm^2

D. 200cm^2

Lời giải

Chọn B.



Gọi $x(\text{cm})$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn ($0 < x < 10$).

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là: $2\sqrt{10^2 - x^2}$ (cm).

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$

$$\text{Ta có } S' = 2\sqrt{10^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}} = 2.10^2 - 4x^2$$

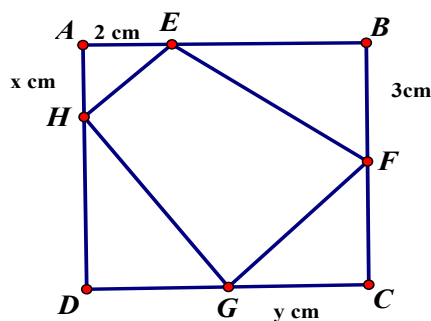
$$S' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{thỏa}) \\ x = -\frac{10\sqrt{2}}{2} & (\text{không thỏa}) \end{cases}$$

$$S'' = -8x \Rightarrow S''\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right) = -40\sqrt{2} < 0.$$

Suy ra $x = \frac{10\sqrt{2}}{2}$ là điểm cực đại của hàm $S(x)$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là: $S = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{10^2 - \frac{10^2}{2}} = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 6. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 7

B. 5

C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1)

Mặt khác $\triangle AEH$ đồng dạng $\triangle CGF$ nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - (4x + \frac{18}{x})$.

Ta có $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Vậy đáp án cần chọn là C.

Câu 7. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó: chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

A. 50 và 25

B. 35 và 35

C. 75 và 25

D. 50 và 50

Lời giải

Chọn A.

Gọi x (m) ($0 < x < 50$) là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $100 - 2x$

Nên diện tích của hình chữ nhật là $x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

Gọi $f(x) = -2x^2 + 100x$ với điều kiện $0 < x < 100$

$\Rightarrow f'(x) = -4x + 100$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 100 = 0 \Rightarrow x = 25$

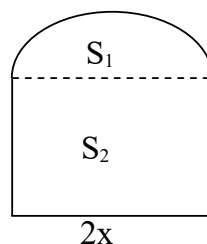
Bảng biến thiên:

x	0	25	50
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1250	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{(0;50)} f(x) = f(25) = 1250$

Vậy: Để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 50

Câu 8. Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a (m) (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



A. chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$

B. chiều rộng bằng $\frac{a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$

C. chiều rộng bằng $a(4 + \pi)$, chiều cao bằng $2a(4 + \pi)$

D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A.

Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt.

Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx , tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a - \pi x$.

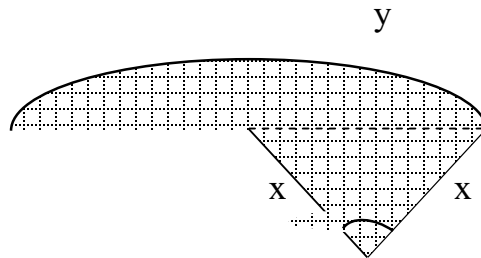
Diện tích của số là:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \frac{a - \pi x - 2x}{2} = ax - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x\left(\frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x\right).$$

Để thấy S lớn nhất khi $x = \frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x$ hay $x = \frac{a}{4 + \pi}$. (Có thể dùng đạo hàm hoặc đỉnh Parabol)

Vậy để $S_{\max}$ thì các kích thước của nó là: chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$; chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$

Câu 9. Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là a sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?



A. $x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2}$

B. $x = \frac{a}{3}; y = \frac{a}{3}$

C. $x = \frac{a}{6}; y = \frac{2a}{3}$

D. Đáp án khác

Lời giải

Chọn A.

Gọi x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn.

Ta có chu vi cánh điều là $a = 2x + y$.

Ta cần tìm mối liên hệ giữa độ dài cung tròn y và bán kính x sao cho diện tích quạt lớn nhất.

Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt là $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ và độ dài cung tròn $\ell = \frac{2\pi R \alpha}{360}$, ta có diện tích hình

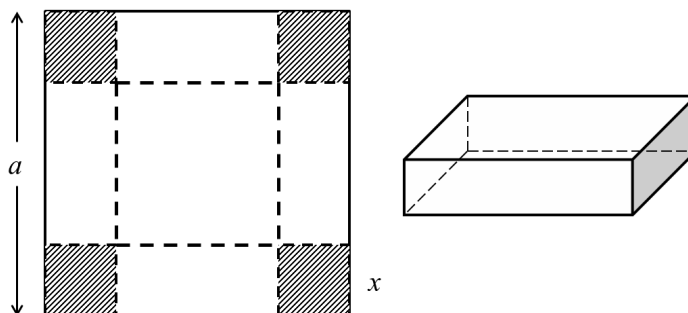
quạt là: $S = \frac{\ell R}{2}$.

Vận dụng trong bài toán này diện tích cánh điều là: $S = \frac{xy}{2} = \frac{x(a - 2x)}{2} = \frac{1}{4}2x(a - 2x)$.

Để thấy S cực đại $\Leftrightarrow 2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \frac{a}{2}$.

Như vậy với chu vi cho trước, diện tích của hình quạt cực đại khi bán kính của nó bằng nửa độ dài cung tròn.

Câu 10. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

A. $\frac{5a}{6}$.

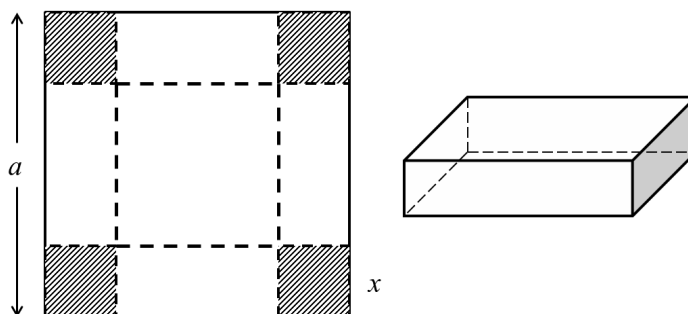
B. $\frac{a}{6}$.

C. $\frac{a}{12}$.

D. $\frac{a}{9}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là:

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 6x);$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	$\frac{2a^3}{27}$	0	

Vậy trong khoảng $\left(0; \frac{a}{2}\right)$ có 1 điểm cực đại duy nhất là $x = \frac{a}{6}$ tại đó $V(x) = \frac{2a^3}{27}$.

Câu 11. Có một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$ rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 6$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = 4$

Lời giải

Chọn C.

Độ dài cạnh đáy của cái hộp: $12 - 2x$.

Diện tích đáy của cái hộp: $(12 - 2x)^2$.

Thể tích cái hộp là: $V = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ với $x \in (0; 6)$

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$.

Cho $V'(x) = 0$, giải và chọn nghiệm $x = 2$.

Lập bảng biến thiên ta được $V_{\max} = 128$ khi $x = 2$.

Câu 12. Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

A. 14 .

B. $\frac{196}{4 + \pi}$.

C. $\frac{112}{4 + \pi}$.

D. $\frac{28\pi}{4 + \pi}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $l (0 < l < 28)$ là chiều dài đoạn dây làm thành hình vuông. Khi đó đoạn dây làm thành hình tròn có chiều dài là $28 - l$.

Cạnh hình vuông là $\frac{l}{4}$, bán kính hình tròn là $\frac{1}{2\pi}(28 - l)$.

Tổng diện tích $S(l) = \frac{l^2}{16} + \frac{1}{4\pi}(28 - l)^2$, suy ra $S'(l) = \frac{l}{8} - \frac{1}{2\pi}(28 - l)$.

Cho $S'(l) = 0$, ta được $l = \frac{112}{4 + \pi}$, suy ra chiều dài đoạn dây còn lại là $\frac{28\pi}{4 + \pi}$.

Kiểm tra lại bằng đạo hàm cấp 2, $S''\left(\frac{112}{4 + \pi}\right) > 0$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{196}{4 + \pi}$ khi $x = \frac{112}{4 + \pi}$.

Câu 13. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2 . Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. 1200cm^2

B. 160cm^2

C. 1600cm^2

D. 120cm^2

Lời giải

Chọn B.

Gọi x, y ($x, y > 0$) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hố ga.

Gọi h là chiều cao của hố ga ($h > 0$). Ta có $\frac{h}{x} = 2 \Rightarrow h = 2x$ (1)

suy ra thể tích của hố ga là : $V = xyh = 3200 \Rightarrow y = \frac{3200}{xh} = \frac{1600}{x^2}$ (2)

Diện tích toàn phần của hố ga là: $S = 2xh + 2yh + xy = 4x^2 + \frac{6400}{x} + \frac{1600}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} = f(x)$

Khảo sát hàm số $y = f(x), (x > 0)$ suy ra diện tích toàn phần của hố ga nhỏ nhất bằng $1200cm^2$ khi

$$x = 10 \text{ cm} \Rightarrow y = 16 \text{ cm}$$

Suy ra diện tích đáy của hố ga là $10.16 = 160cm^2$

Câu 14. Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính $1m$, chiều dài $8m$ để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

A. $V = 2m^3$

B. $V = 4m^3$

C. $V = 8m^3$

D. $V = 16m^3$

Lời giải

Chọn B.

Gọi $x, y(m)$ là các cạnh của tiết diện.

Theo Định lí Pitago ta có: $x^2 + y^2 = 1^2$ (đường kính của thân cây là $1m$).

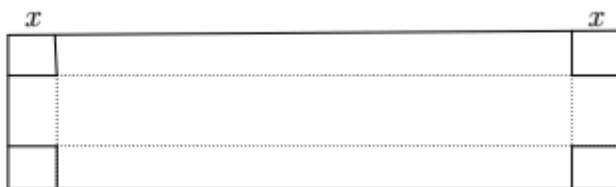
Thể tích của cây xà sẽ cực đại khi diện tích của tiết diện là cực đại, nghĩa là khi x, y cực đại.

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Thể tích khối gỗ sau khi cưa xong: $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 = 4m^3$ (tiết diện là hình vuông).

Câu 15. Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước $3m \times 8m$. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là x để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp.

Hình vẽ :



Với giá trị nào của x thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất ?

A. $x = \frac{1}{3}m$

B. $x = 1m$

C. $x = \frac{2}{3}m$

D. $x = \frac{4}{3}m$

Lời giải

Chọn C.

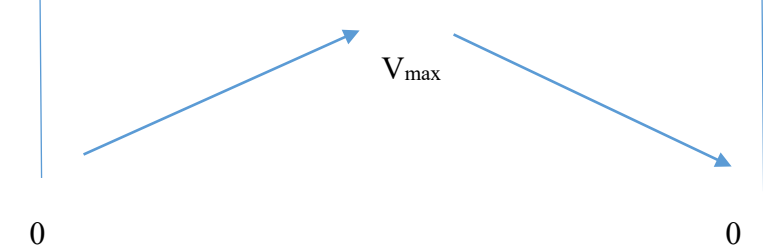
Ta có: $0 < x < \frac{3}{2}$ Gọi thể tích hình hộp là: $V(x)$. Khi đó:

$$V(x) = x(3-2x)(8-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

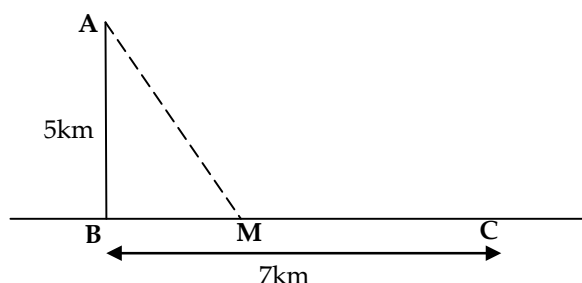
$$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x^2 - 11x + 6)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0			0

Câu 16. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (xem hình vẽ dưới đây).



Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

A. $\frac{\sqrt{74}}{4}$

B. $\frac{29}{12}$

C. $\sqrt{29}$

D. $2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D.

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính thời gian người canh hải đăng phải đi.

Đặt $BM = x$ thì ta được: $MC = 7 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 25}$. Theo đề bài, Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7 - x}{6} = \frac{3\sqrt{x^2 + 25} - 2x + 14}{12} \text{ với } x \in [0; 7]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được thời gian ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x^2 + 25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 25} = 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 100 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{5} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

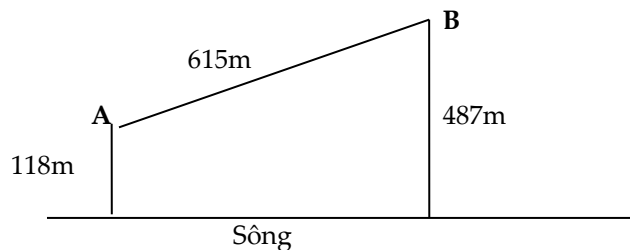
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và ta có:

$$f(0) = \frac{29}{12}, f(2\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}, f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$ tại $x = 2\sqrt{5}$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm

cách B một đoạn $BM = x = 2\sqrt{5}$.

Câu 17. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là:

A. 569,5m

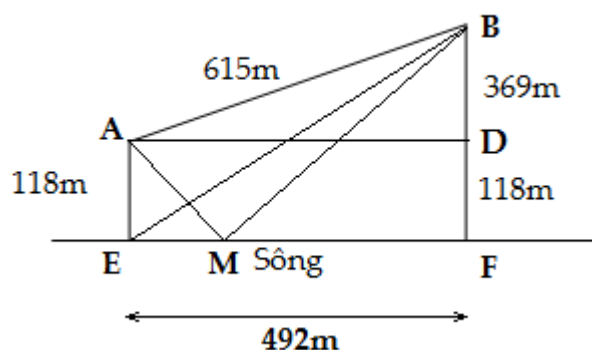
B. 671,4m

C. 779,8m

D. 741,2m

Lời giải

Chọn B.



Ta giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B.

Ta dễ dàng tính được $BD = 369$, $EF = 492$.

Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \quad \text{với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

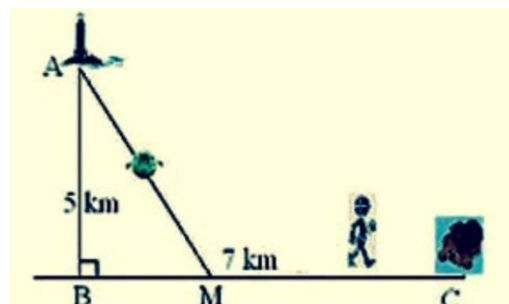
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$.

So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$

Khi đó

Câu 18. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $7km$ (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6km/h$. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?

A. $0km$

B. $7km$

C. $2\sqrt{5}km$

D. $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}km$

Lời giải

Chọn C.

Đặt $BM = x(km) \Rightarrow MC = 7 - x(km)$, $(0 < x < 7)$.

Ta có: Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4}(h)$.

Thời gian đi bộ đi bộ đến C là: $t_{MC} = \frac{7-x}{6}(h)$

Thời gian từ A đến kho $t = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$

Khi đó: $t' = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{6}$, cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy thời gian đến kho nhanh nhất khi $x = 2\sqrt{5}(km)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(cm^2)$. Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

Lời giải

Đáp án: Kích thước của hình chữ nhật là 10×10 (là hình vuông).

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x(cm)$ và $y(cm)$ ($x, y > 0$).

Chu vi hình chữ nhật là: $P = 2(x + y) = 2x + 2y$

Theo đề bài thì: $xy = 100$ hay $y = \frac{100}{x}$.

Do đó: $P = 2(x + y) = 2x + \frac{200}{x}$ với $x > 0$

Đạo hàm: $P'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Lập bảng biến thiên ta được: $P_{\min} = 40$ khi $x = 10 \Rightarrow y = 10$.

Kết luận: Kích thước của hình chữ nhật là 10×10 (là hình vuông).

Lưu ý: Có thể đánh giá bằng BĐT Cô-Sy: $P = 2(x + y) \geq 2.2\sqrt{xy} = 4\sqrt{100} = 40$.

Câu 20. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: cạnh huyền của tấm gỗ này là $80cm$

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x, 0 < x < 60$

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{120^2 - 240x}$. Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên

khoảng $(0; 60)$

$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	40	60	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$		$S(40)$		

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$.

Vậy cạnh huyền của tấm gỗ này là 80cm

Câu 21. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $S_{\max} = 4050\text{m}^2$

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x + 2y = 180$. Diện tích của miếng đất là $S = y(180 - 2y)$.

$$\text{Ta có: } y(180 - 2y) = \frac{1}{2} \cdot 2y(180 - 2y) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2y + 180 - 2y)^2}{4} = \frac{180^2}{8} = 4050$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 2y = 180 - 2y \Leftrightarrow y = 45\text{m}.$$

$$\text{Vậy } S_{\max} = 4050\text{m}^2 \text{ khi } x = 90\text{m}, y = 45\text{m}.$$

Câu 22. Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800(\text{m})$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

Lời giải

Đáp án: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(\text{m})$ và $y(\text{m})$ ($x, y > 0$).

$$\text{Diện tích miếng đất: } S = xy$$

$$\text{Theo đề bài thì: } 2(x + y) = 800 \text{ hay } y = 400 - x.$$

$$\text{Do đó: } S = x(400 - x) = -x^2 + 400x \text{ với } x > 0$$

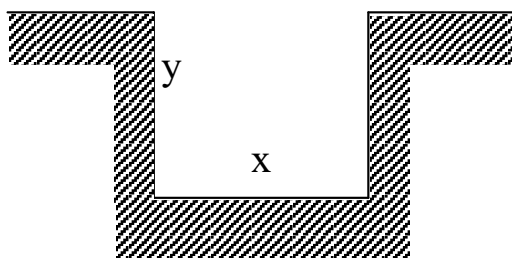
$$\text{Đạo hàm: } S'(x) = -2x + 400. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = 200.$$

Lập bảng biến thiên ta được: $S_{\max} = 40000$ khi $x = 200 \Rightarrow y = 200$.

Kết luận: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Lưu ý: Có thể đánh giá bằng BĐT Cô-Sy.

Câu 23. Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? Nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật như hình vẽ sau:



Lời giải

Đáp án: $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương.

Theo bài ra ta có: $S = xy$; $\ell = 2y + x = \frac{2S}{x} + x$.

Xét hàm số $\ell(x) = \frac{2S}{x} + x$.

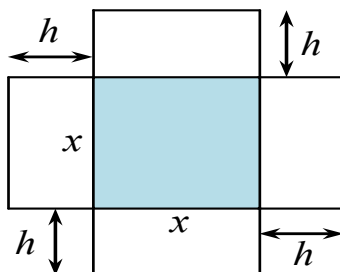
Ta có $\ell'(x) = \frac{-2S}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2S}{x^2}$.

$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}$, khi đó $y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{S}{2}}$.

Dễ thấy với x, y như trên thì mương có dạng thủy động học, vậy các kích thước của mương là $x = \sqrt{2S}$,

$y = \sqrt{\frac{S}{2}}$ thì mương có dạng thủy động học.

Câu 24. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 .



Giá trị của x để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x = 10$ (cm).

Thể tích của hộp là: $V = x^2 h = 500(\text{cm}^3)$. Do đó $h = \frac{500}{x^2}$, $x > 0$.

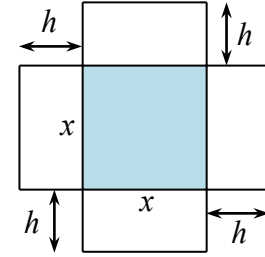
Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là:

$$S(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
$S'(x)$		-	0
$S(x)$			300



Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm).

Câu 25. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R , hình trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: thể tích hình trụ là $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Gọi chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h , r và V . Khi đó,

$$V = \pi r^2 h. \text{ Vì } r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \text{ nên } V = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right).$$

$$V(h) = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right), h \in (0; 2R); V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right); V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

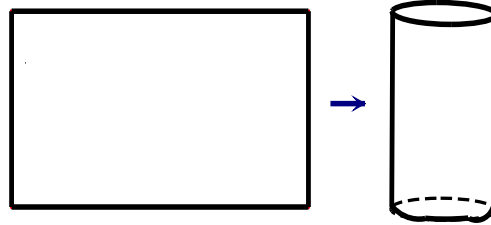
Bảng biến thiên:

h	0	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$2R$
$V'(h)$		+	0
$V(h)$			$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích hình trụ là $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 26. Bạn Hiền là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn Hiền chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Gọi một chiều dài là x (cm) ($0 < x < 60$), khi đó chiều còn lại là $60 - x$ (cm), giả sử quắn cạnh có chiều dài

là x lại thì bán kính đáy là $r = \frac{x}{2\pi}$; $h = 60 - x$.

Ta có: $V = \pi r^2 \cdot h = \frac{-x^3 + 60x^2}{4\pi}$.

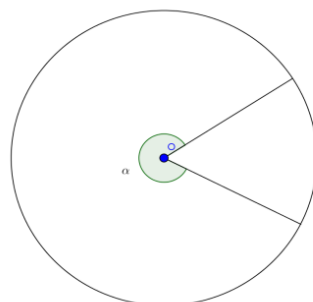
Xét hàm số: $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0; 60)$

$$f'(x) = -3x^2 + 120x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

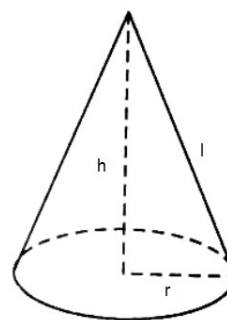
Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in (0; 60)$ lớn nhất khi $x = 40$. $60 - x = 20$.

Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Câu 27. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích $4\pi \text{ dm}^2$. Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0 < \alpha < 2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu mức nước hình nón như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: Thể tích lớn nhất của cái gầu là $\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}(dm^3)$

Ta có: đường sinh l của hình nón là bán kính $R = \frac{4\pi}{2\pi} = 2dm$ của hình tròn

Bán kính đáy của hình nón: $r = \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$

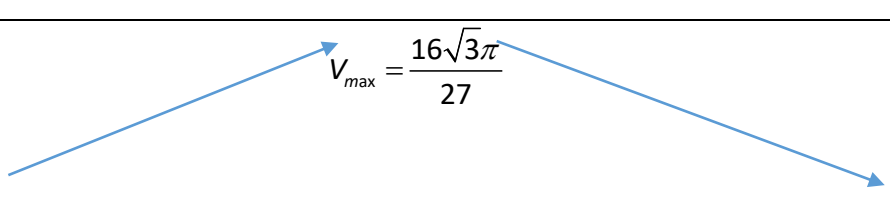
Đường cao của hình nón: $h = \sqrt{2^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

Khi đó thể tích hình nón: $V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi \frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \frac{1}{3\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

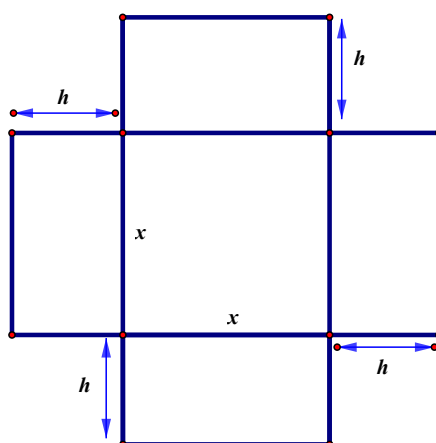
$$V'(\alpha) = \frac{1}{3\pi^2} \left(2\alpha \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right) = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{-3\alpha^2 + 8\alpha\pi^2}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right)$$

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \notin (0; 2\pi) \\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{2\sqrt{6}\pi}{3} \notin (0; 2\pi) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3\pi^2} \times \frac{8}{3} \pi^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}(dm^3)$$

Bảng biến thiên:

α	0	$\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$	2π
$V'(\alpha)$	+	0	-
$V(\alpha)$			

Câu 28. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông như hình bên dưới.



Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), đường cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3 . Tìm giá trị của x sao diện tích của mảnh các tông là nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $x = 10$

$$V = x^2 \cdot h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}$$

Gọi $S(x)$ là diện tích của mảnh các tông $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}; x > 0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất $S(x)$ trên $(0; +\infty)$

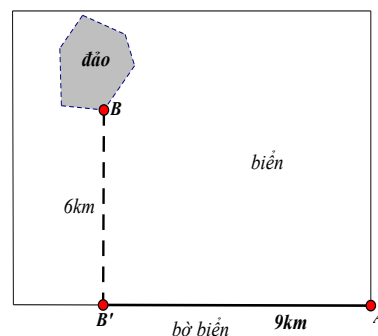
$$S'(x) = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}; S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Lập bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
$S'(x)$	—	+	
$S(x)$	$+\infty$	300	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất tại điểm $x = 10$ (cạnh hình vuông).

Câu 29. Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: C cần cách A một khoảng 6,5km.

Đặt $x = B'C$ (km), $x \in [0; 9]$

$$BC = \sqrt{x^2 + 36}; AC = 9 - x$$

Chi phí xây dựng đường ống là $C(x) = 130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x)$ (USD)

Hàm $C(x)$, xác định, liên tục trên $[0; 9]$ và $C'(x) = 10000 \cdot \left(\frac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 \right)$

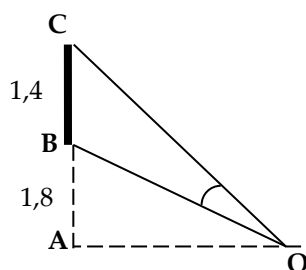
$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25(x^2 + 36) \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$C(0) = 1.230.000; C\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000; C(9) \approx 1.406.165$$

Vậy chi phí thấp nhất khi $x = 2,5$.

Vậy C cần cách A một khoảng 6,5km.

Câu 30. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó.

Lời giải

Đáp án: vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

Với bài toán này ta cần xác định OA để góc BOC lớn nhất.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\tan \angle BOC$ lớn nhất. Đặt $OA = x$ (m) với $x > 0$,

$$\text{ta có } \tan \angle BOC = \tan(\angle AOC - \angle AOB) = \frac{\tan \angle AOC - \tan \angle AOB}{1 + \tan \angle AOC \cdot \tan \angle AOB}$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$$f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	2,4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
		84	100

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

DẠNG 2

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG

- Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .
- Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t) = f''(t)$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 31. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s)

B. 12 (s)

C. 6 (s)

D. 4 (s)

Lời giải

Chọn A.

Vận tốc của chuyển động là $v = s'$ tức là $v(t) = 12t - 3t^2, t > 0$

$$v'(t) = 12 - 6t, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$	
$v'(t)$		+	0	-
$v(t)$			12	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \text{Max } v(t) = 12$ khi $t = 2$. Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 32. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s)

B. 27 (m/s)

C. 144 (m/s)

D. 36 (m/s)

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $v = s' = -t^2 + 12t; v' = -2t + 12; v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

BBT

t	0	6	9
v'	+	0	-
v	36		

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$. Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36\text{m/s}$.

Câu 33. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t = 2$.**B. $t = 1$.**C. $t = 3$.D. $t = 4$.

Lời giải

Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

$$\text{Ta có } S'(t) = (1 + 3t^2 - t^3)' = 6t - 3t^2 = -3(t^2 - 2t) = 3 - 3(t-1)^2 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\max_{\mathbb{R}} S'(t) = 3 \text{ khi } t-1=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Câu 34. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. 88(m/s).

B. 25(m/s).

C. 100(m/s).

D. 11(m/s).

Lời giải

Chọn B

Ta có $v = S' = -t^2 + 8t + 9$, $t \in (0; 10)$

$v' = -2t + 8$. Xét $v' = 0 \Rightarrow t = 4 \in (0; 10)$

Bảng biến thiên:

t	0	4	10	
v'		+	0	-
v	$v(0)$	$\nearrow$ 25	$\searrow$ $v(10)$	

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là 25(m/s) tại $t = 4$.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 5s$ B. $t = 6s$ C. $t = 3s$ D. $t = 1s$

Lời giải

Chọn C

Có $v(t) = S' = -6t^2 + 36t + 2$. Đây là hàm số bậc hai có $a < 0$ nên nó sẽ đạt giá trị lớn nhất tại

$$t = -\frac{b}{2a} = 3(s).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 24(m/s)

$$\text{Ta có } v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = -\frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) + 24 = 24 - \frac{3}{2}(t - 4)^2 \leq 24$$

Vậy $\max_{[0;6]} v(t) = 24 \text{ (m/s)}$ tại thời điểm $t = 4$ (giây).

Câu 37. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đáp án: $t = 2$

$$s(t) = -t^3 + 6t^2$$

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$$

$$v_{\max} = \frac{-12^2}{4 \cdot (-3)} = 12 \Leftrightarrow t = \frac{-12}{2 \cdot (-3)} = 2.$$

Câu 38. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: vận tốc lớn nhất là 89 (m/s) .

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9.$$

$$\text{Ta có: } v' = 2t - 2 \Rightarrow v' = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Tính: } v(1) = 8; v(10) = 89, v(0) = 9.$$

Vậy vận tốc lớn nhất là 89 (m/s) .

Câu 39. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v \text{ (m/s)}$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đáp án: $t = 2$

$$\text{Vận tốc của chất điểm chuyển động theo quy luật: } v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2.$$

$$\text{Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi } v(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2 \text{ đạt giá trị lớn nhất } \Leftrightarrow t = 2.$$

Câu 40. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $v = 28(\text{m/s})$

Vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t-3)^2 + 3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 3$. Khi đó vận tốc của vật bằng $v(3) = 28(\text{m/s})$.

DẠNG 3
MỘT SỐ DẠNG KHÁC

- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .
- Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Câu 41. Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng

- A. 5; -8. B. 1; -12. **C.** $-\frac{13}{2}; \frac{13}{2}$. D. 6; -7.

Lời giải

Chọn C.

Gọi một trong hai số phải tìm là x , số còn lại: $x + 13$.

Tích hai số $P(x) = x(x+13) = x^2 + 13x$. $P'(x) = 2x + 13$, $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{13}{2}$	$+\infty$
$P'(x)$		$-$	$+$
$P(x)$	$+\infty$	$-\frac{169}{4}$	$+\infty$

Tích của chúng bé nhất bằng $-\frac{169}{4}$ khi hai số là $\frac{13}{2}$ và $-\frac{13}{2}$.

Câu 42. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- A. 72. B. 12. C. $-\frac{1}{192}$. D. $\frac{23}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

$$P' = 12 - I. \quad P' = 0 \Leftrightarrow I = 12.$$

Bảng biến thiên:

I	0	12	$+\infty$
P		72	

Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 43. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A. $27,832^{\circ}C$. B. $18,4^{\circ}C$. C. $26,2^{\circ}C$. D. $25,312^{\circ}C$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$.

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1; 10].$$

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1; 10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^{\circ}C$.

Câu 44. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

A. 12.

B. 24.

C. 6.

D. 32.

Lời giải

Chọn A.

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng:

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}. f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Bảng biến thiên:

n	0	12	$+\infty$
$f'(n)$		+	0
$f(n)$			–

$\swarrow$ $f(12)$ $\searrow$

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả 12 con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

Câu 45. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

A. 100 mg.

B. 20 mg.

C. 30 mg.

D. 0 mg.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $G(x) = 0.75x^2 - 0.025x^3$, $x > 0$; $G'(x) = 1.5x - 0.075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 20$

Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$		+	0
$G(x)$			–

$\swarrow$ 100 $\searrow$

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

Câu 46. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng

A. 6 km/h.

B. 8 km/h.

C. 7 km/h.

D. 9 km/h.

Lời giải

Chọn D.

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t = \frac{300}{v-6}$ ($v > 6$)

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v) = cv^3 \frac{300}{v-6} = 300c \frac{v^3}{v-6}$

$$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2}; E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9 \text{ do } (v > 6)$$

Bảng biến thiên:

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$		0	
		-	+
$E(v)$		$E(9)$	

Cá phải bơi với vận tốc 9 (km/h) thì ít tiêu hao năng lượng nhất.

Câu 47. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. Ngày thứ 19.

B. Ngày thứ 5.

C. Ngày thứ 16.

D. Ngày thứ 15.

Lời giải

Chọn D.

$$f'(t) = 90t - 3t^2; f''(t) = 90 - 6t, f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên

t	0	15	25
$f''(t)$		0	
		+	-
$f'(t)$		675	

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **B.** $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$.

CHỦ ĐỀ 2**GTLN VÀ GTNN LIÊN QUAN THAM SỐ**

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì

$\min_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. -17

B. -16

C. -1

D. 1

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 0$

$$\Rightarrow 4a + 4(a+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{và } f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1$$

$$\text{Ta có } f(0) = -1; f(1) = 1; f(2) = -17$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -17$$

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m > 4$

B. $3 < m \leq 4$

C. $m < -1$

D. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \text{ suy ra } m > 4.$$

Câu 3. Số các giá trị tham số m để hàm số $y = \frac{x-m^2-1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Có $y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x - m)^2} > 0, \forall x \in D$ (do $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$).

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Suy ra $\max_{[0;4]} f(x) = f(4)$

Để hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 thì

$$\begin{cases} m \notin [0;4] \\ f(4) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ \frac{3-m^2}{4-m} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ m^2 + 6m - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ \begin{cases} m = 3 \\ m = -9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 2$.

B. $a = 1$.

C. 4.

D. $a = 3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$. Đặt $u = (x+1)^2$ khi đó $\forall x \in [-2;1]$ thì $u \in [0;4]$ Ta được hàm số $f(u) = |u + a - 5|$. Khi đó.

$$\max_{x \in [-2;1]} y = \max_{u \in [0;4]} f(u) = \max \{f(0), f(4)\} = \max \{|a-5|; |a-1|\}.$$

Trường hợp 1: $|a-5| \geq |a-1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0;4]} f(u) = 5-a \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Trường hợp 2: $|a-5| \leq |a-1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0;4]} f(u) = a-1 \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max_{x \in [-2;1]} y = 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Câu 5. Gọi S là tập giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + m|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 6. Tổng các phần tử của S bằng

A. -4 .

B. 4.

C. -10 .

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

+ Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1;4]$. Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

+ Suy ra giá trị nhỏ nhất: $\min f(x) = \min \{|m-3|; |m-4|; |m|\}$

Xét $|m-4| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -2 \end{cases}$. Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn.

Xét $|m-3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -3 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \end{cases}$. Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn.

Câu 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trên đoạn $[-2; 4]$.

$$f' = 3x^2 - 6x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$f(-2) = -2 + m; f(-1) = 5 + m; f(3) = -27 + m; f(4) = -20 + m$$

$$\Rightarrow \min_{[-2;4]} f(x) = m - 27; \max_{[-2;4]} f(x) = m + 5 \Rightarrow \max_{[-2;4]} |f(x)| = \max \{|m - 27|; |m + 5|\}.$$

+) Trường hợp 1: Nếu $|m - 27| \leq |m + 5|$ (*)

$$\Rightarrow \max_{[-2;4]} |f(x)| = |m + 5| \Rightarrow |m + 5| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11 \\ m = -21 \end{cases}. \text{ Đòi chiếu điều kiện (*)} \Rightarrow m = 11.$$

+) Trường hợp 1: Nếu $|m - 27| > |m + 5|$ (**)

$$\Rightarrow \max_{[-2;4]} |f(x)| = |m - 27| \Rightarrow |m - 27| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 43 \\ m = 11 \end{cases} \text{ (Không thỏa mãn điều kiện (**)).}$$

Vậy $S = \{11\} \Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Câu 7. *Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26.

B. 18.

C. 28.

D. 16.

Lời giải

Chọn B.

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3; -1]$ ta có: $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

$$\text{Do đó } A = \max_{[-3;-1]} u = u(-1) = 26 - m^2; a = \min_{[-3;-1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2.$$

$$\text{Do } M = \max_{[-3;-1]} y = \max \{|26 - m^2|, |6 - 3m^2|\} \text{ và } 4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72.$$

Vậy $M \geq 18$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } |26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 8. Cho hàm số $y = |x^2 + x + m|$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m để $\min_{[-2;2]} y = 2$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$.

B. -8 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$, có: $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[-2; 2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m + 6 \\ \min_{[-2; 2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4} \end{cases}$$

▪ Nếu $m - \frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2; 2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $m + 6 \leq 0$ hay $m \leq -6$ thì $\min_{[-2; 2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $-6 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2; 2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực $m = \frac{9}{4}$ và $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng $-\frac{23}{4}$

Câu 9. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0

B. 6

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
	m		$2 + m$
$f(x)$		$-2 + m$	

TH1: $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0; 2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

TH2: $\begin{cases} 2 + m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m > 2 > 2 + m \Rightarrow \max_{[0; 2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

TH3: $\begin{cases} m > 0 \\ -2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$. Khi đó: $|m - 2| = 2 - m < 2 < 2 + m \Rightarrow \max_{[0; 2]} |f(x)| = 2 + m$

$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

TH4: $-2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m$

$$2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại).}$$

Câu 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + m^2 - m - 3|$ trên đoạn $[-1; 2]$ không vượt quá 15?

A. 3.

B.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + m^2 - m - 3$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + (m^2 + 1) = 2x^2 + (x + 1)^2 + m^2 > 0, \forall x \in [-1; 2]$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1; 2] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -m - 4 \\ \max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 3m^2 - m + 11 \end{cases}$.

Khi đó $\max_{[-1;2]} y = \max_{[-1;2]} |f(x)| = \max \{|-m - 4|; |3m^2 - m + 11|\} \leq 15 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m - 4| \leq 15 \\ |3m^2 - m + 11| \leq 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} -15 \leq m + 4 \leq 15 \\ -15 \leq 3m^2 - m + 11 \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 \leq m \leq 11 \\ 3m^2 - m - 4 \leq 0 \\ 3m^2 - m + 26 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -19 \leq m \leq 11 \\ -1 \leq m \leq \frac{4}{3} \end{cases} \cdot \text{Với } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x^2 + m|$, gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$.

Số giá trị nguyên của tham số m để $A < 2020$ là

A. 4031.

B. 4032.

C. 4033.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A.

Xét $u(x) = 2x^3 - 6x^2 - m$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$u'(x) = 6x^2 - 12x.$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 3) \\ x = 2 \in (1; 3) \end{cases}.$$

Khi đó: $\begin{cases} \max_{[1;3]} u(x) = \max \{u(1); u(2); u(3)\} = m \\ \min_{[1;3]} u(x) = \min \{u(1); u(2); u(3)\} = m - 8 \end{cases}$.

$$A = \max \{|m|; |m - 8|\}.$$

$$\text{Yêu cầu } A < 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 2020 \\ |m| \geq |m-8| \\ |m-8| < 2020 \\ |m-8| \geq |m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 < m < 2020 \\ m \geq 4 \\ -2012 < m < 2028 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq m < 2020 \\ -2012 < m \leq 4 \end{cases}.$$

Vậy có 4031 số nguyên m để $A < 2020$.

Câu 12. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^4 - 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -7.

B. 7.

C. 5.

D. -5.

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 8x^2 + m, x \in [-1; 1]$, ta có $g'(x) = 4x^3 - 16x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

$$g(-1) = g(1) = -7 + m, g(0) = m.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[-1;1]} f(x) = \max\{|-7+m|, |m|\} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |-7+m| = 5 \\ |-7+m| \geq |m| \\ |m| = 5 \\ |m| \geq |-7+m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 5 \end{cases}$$

Vậy $s = \{2; 5\}$. Vậy tổng các giá trị của S bằng 7.

Câu 13. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = f(x) = |3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 2020.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C.

Đặt $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + m - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$\text{Ta có } g'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} M = \max_{[-1;2]} g(x) = \max\{g(-1); g(0); g(1); g(2)\} = \max\{m-14; m-1; m-6; m+31\} = m+31 \\ m = \min_{[-1;2]} g(x) = \min\{g(-1); g(0); g(1); g(2)\} = \min\{m-14; m-1; m-6; m+31\} = m-14 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min_{[-1;2]} f(x) = \min\{|m+31|; |m-14|\} = 2020$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m+31|=2020 \\ |m+31| \leq |m-14| \\ |m-14|=2020 \\ |m+31| \geq |m-14| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2051 \\ m=2034 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 14. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210

B. -195

C. 105

D. 300

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có } g'(x) = x^3 - 19x + 30; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			$g(0)$	$g(2)$		

$$g(0) = m - 20; \quad g(2) = m + 6.$$

$$\text{Để } \max_{[0;2]} |g(x)| \leq 20 \text{ thì } \begin{cases} g(0) \leq 20 \\ g(2) \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20| \leq 20 \\ |m+6| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 14.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; \dots; 14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$ \begin{array}{ccc} & a+1 & \\ a \nearrow & & \searrow a \end{array} $		

Do $2m \geq M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \neq 0 \forall x \in [0; 2]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Nếu $a < -1$ thì $M = -a$, $m = -a-1 \Rightarrow 2(-a-1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$.

Nếu $a > 0$ thì $M = a+1$, $m = a \Rightarrow 2a \geq a+1 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Do đó $a \leq -2$ hoặc $a \geq 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3; 3]$ nên $a \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(ax^2 + 4ax - a + b - 2)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của x ?

A. $x = -\frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = -\frac{3}{2}$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2(x-1)(2ax^2 + 5ax - 3a + b - 2)$.

Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a > 0$.

$$\Rightarrow f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(-6a + b - 2) = 0 \Leftrightarrow b = 6a + 2.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2a(x-1)(2x^2 + 5x + 3).$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (đều là các nghiệm đơn)}$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ nên có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			CD			CT	$+\infty$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{5}{4}\right]$.

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \right|$ trên $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

B. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

D. $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta xét $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$

Mặt khác $f(0) = 1+m$; $f(1) = \sqrt{2}+m$; $f(2) = \frac{3\sqrt{5}}{5}+m$.

BBT

x	0	1	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$1+m$	$\sqrt{2}+m$	$\frac{3\sqrt{5}}{5}+m$

Suy ra $\max_{[0;2]} y = \max \left\{ |m+1|; |m+\sqrt{2}| \right\} = M$ (do $1+m < \frac{3\sqrt{5}}{5}+m < \sqrt{2}+m$)

Vì $\begin{cases} M \geq |m+1| \\ M \geq |-\sqrt{2}-m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow M \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

$M = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ khi $m+1 = -\sqrt{2}-m = \pm \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)$ khi $m = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

CHỦ ĐỀ 4**GTLN, GTNN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM HỢP****DẠNG 1****TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(u(x))$**

Câu 1. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M + m$.

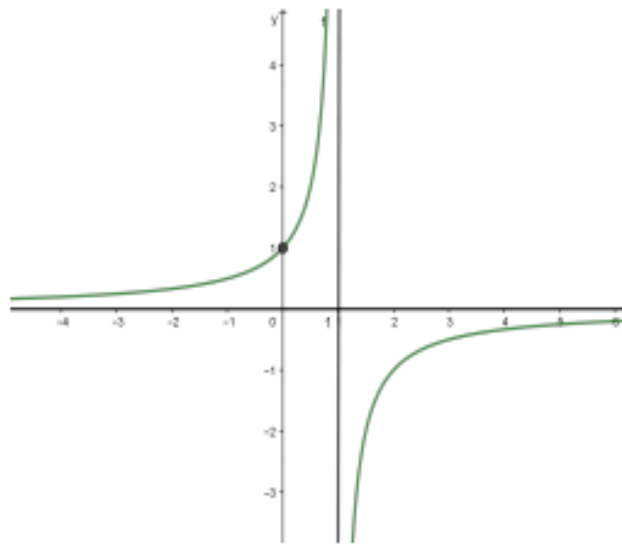
B. $2M + m$.

C. $M + 2m$.

D. $2M + 2m$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x) = f(f(x))$.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$.



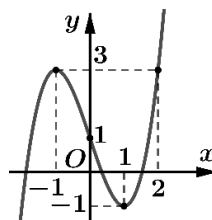
A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. $-\frac{4}{3}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

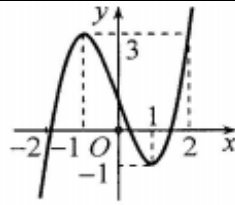
A. $m = 3$.

B. $m = -12$.

C. $m = -13$.

D. $m = 6$.

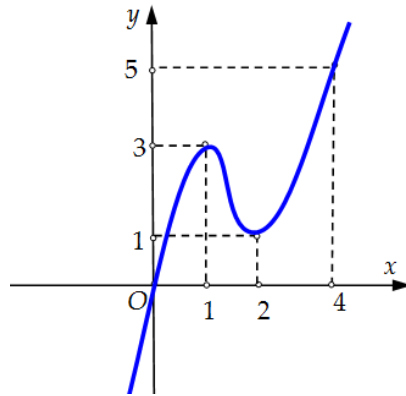
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y = f(\sqrt{4-x^2})$ trên nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ là

- A. 3. B. -1. C. 0. D. Không tồn tại

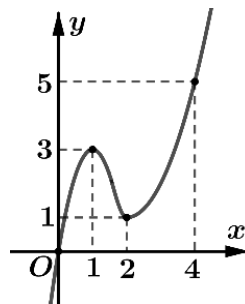
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 4. D. 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f\left[2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right]$.

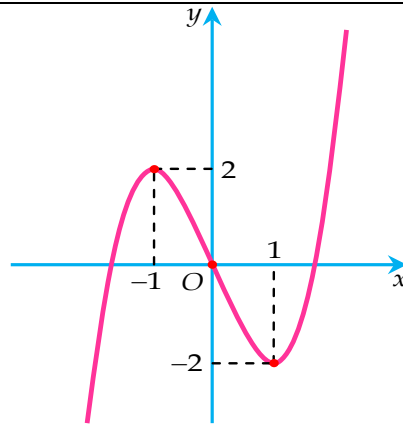


Tổng $M + m$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 7. Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$.



A. $M^2 + m^2 = 4$.

B. $M^2 + m^2 = 1$.

C. $M^2 + m^2 = 25$.

D. $M^2 + m^2 = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{21}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	4	2	5	$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $M \cdot m > 10$.

B. $\frac{M}{m} > 2$.

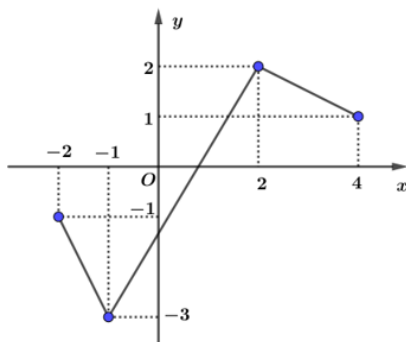
C. $M - m > 3$.

D. $M + m > 7$.

DẠNG 2**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI**

$$y = f(|x|), y = f(|u(x)|), y = f(|x|+b), y = f(|u(x)|+b), y = f(|x+a|+b), y = f(|u(x)+a|+b)$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.



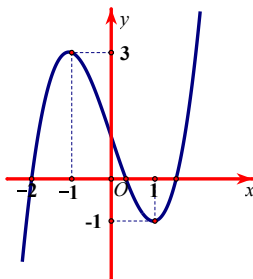
A. $|f(0)|$.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = 673M - 2019m$.

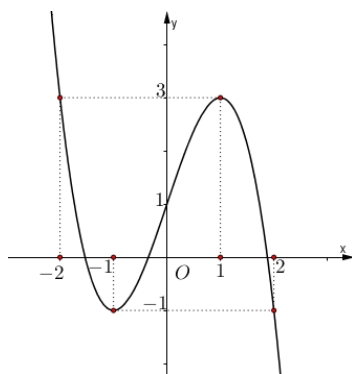
A. $T = 2019$.

B. $T = 0$.

C. $T = 4038$.

D. $T = 2692$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(2x-1)|$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Tính giá trị $M - m$.

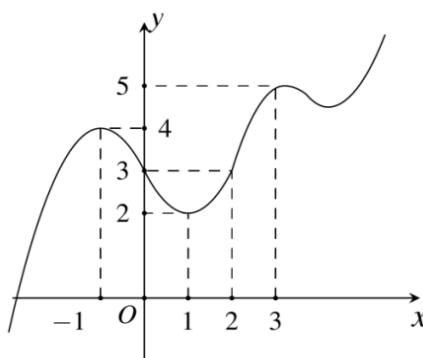
A. 3

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x-2|)$ trên đoạn $[-1, 5]$. Tổng $M + m$ bằng

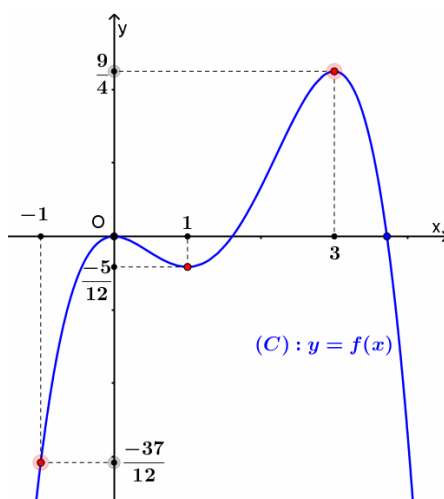
A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y = f(|-x^3 + 3x^2 - 1|)$ trên đoạn $[-1, 3]$. Tích $M.m$ bằng

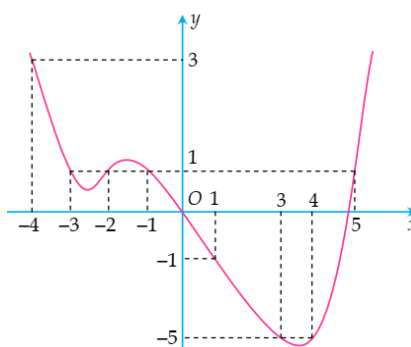
A. 0.

B. $-\frac{111}{16}$.

C. $-\frac{45}{48}$.

D. $\frac{185}{144}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right)$.

Giá trị biểu thức $T = 3M - m$ bằng

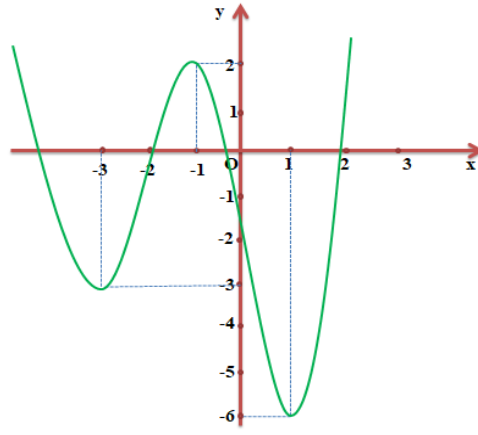
A. $T = 2$.

B. $T = 0$.

C. $T = -8$.

D. $T = 14$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x-1)|$ trên đoạn $[-3; 3]$. Tìm M .

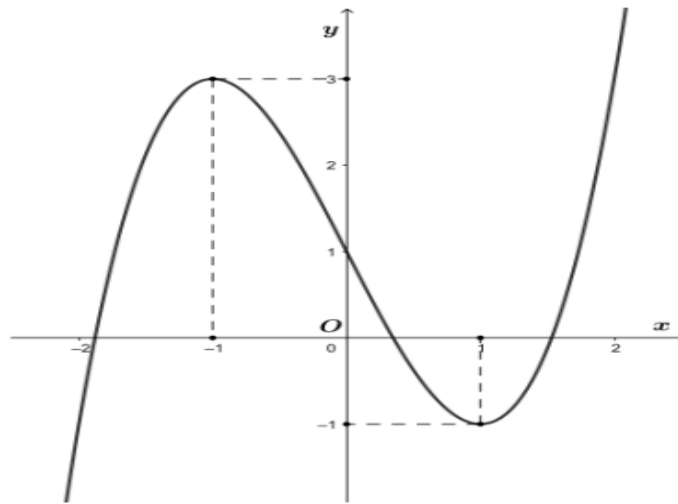
A. $M = 0$.

B. $M = 6$.

C. $M = 5$.

D. $M = 2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M = \max_R |f(\sin^2 2x)|$, $m = \min_R |f(\sin^2 2x)|$. Tổng $M + m$ bằng

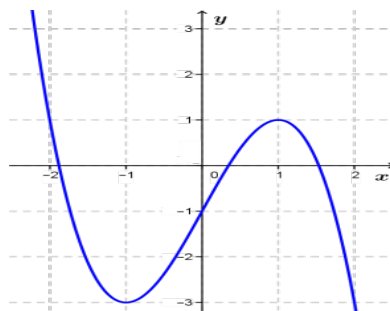
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T = M - m$.



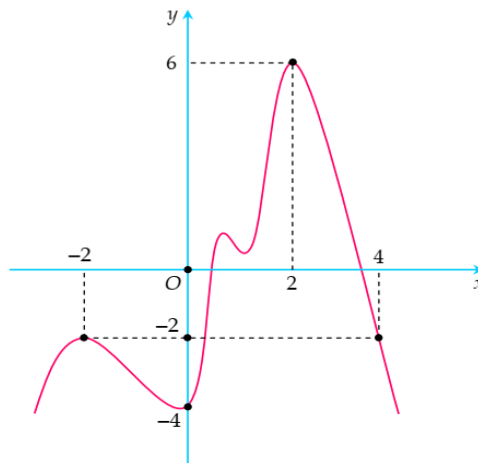
A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right)\right) \right|$. Khi đó tổng $m + M$ là

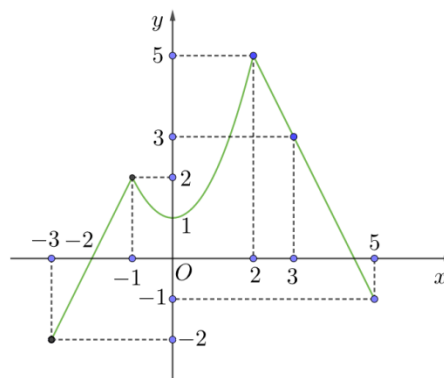
A. $\frac{2}{3}$.

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$ bằng

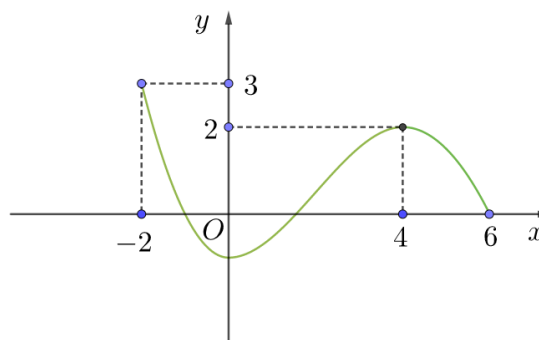
A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. -2.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x| + 1)$ trên đoạn $[-2; 4]$. Giá trị của M bằng

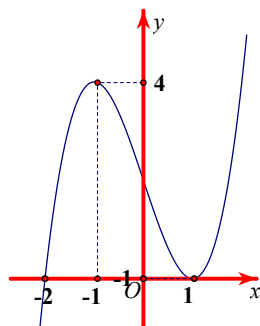
A. 3

B. -1.

C. 2.

D. 0.

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x^2 + 2x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = M - 3m$.

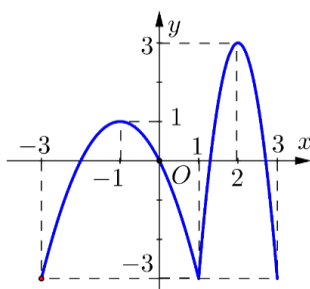
A. $T = 3$.

B. $T = -2$.

C. $T = 6$.

D. $T = 4$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(\sin 3x + \sin^3 x)|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e .

B. 4.

C. 2009^{-3} .

D. 3.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-2)$	$f(0)$	$f(4)$		$+\infty$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

A. $f(2)$.

B. $f(0)$.

C. $f(4)$.

D. Không xác định được.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	4	6	$+\infty$				
y'	+	0	-	0	+	0	-		
y			4		-2		9		$-\infty$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|-x^2 + 2x + 5|)$ trên $[-1; 3]$ lần lượt là M, m . Tính

$M + m$.

A. 13.

B. 7.

C. $f(2) - 2$.

D. 2.

CHỦ ĐỀ 4**GTLN, GTNN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM HỢP****DẠNG 1****TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(u(x))$**

Câu 1. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M + m$.**B.** $2M + m$.**C.** $M + 2m$.**D.** $2M + 2m$.**Lời giải****Chọn A.**

Đặt $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $x \in [0; 2]$.

Ta có: $g'(x) = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	2	$\frac{8}{5}$

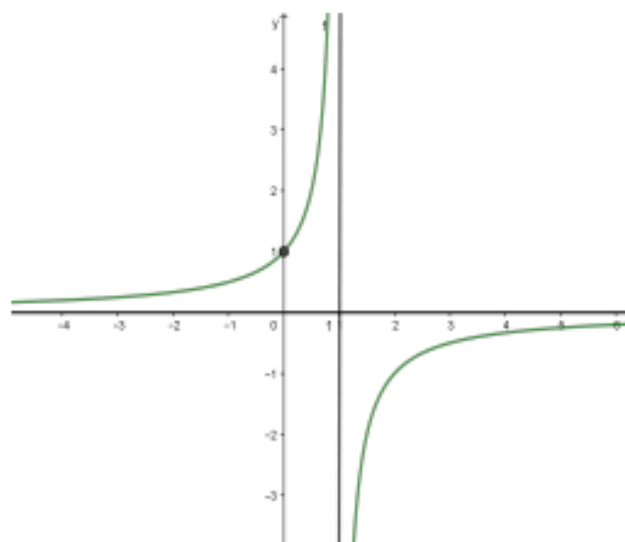
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0 \leq g(x) \leq 2$.

Do đó: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi hàm số $y = f[g(x)]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$ là $M + m$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x) = f(f(x))$.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$.



A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. $-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Từ hình vẽ ta có: TCN là $y = \frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

TCĐ là $x = -\frac{d}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -d$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $\frac{b}{d} = 1 \Leftrightarrow b = d (d \neq 0)$.

Khi đó $f(x) = \frac{d}{-dx+d} = \frac{1}{-x+1} \Rightarrow g(x) = f(f(x)) = \frac{1}{-\frac{1}{-x+1}+1} = \frac{-x+1}{-x}$.

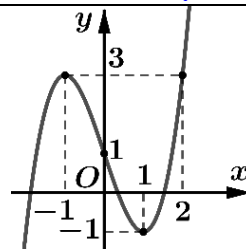
TXĐ hàm $g(x)$ là $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ xác định trên $[-3; -1]$.

$g'(x) = \frac{1}{x^2}$, với $\forall x \in [-3; -1]$.

$g(-3) = \frac{4}{3}$, $g(-1) = 2$.

Vậy $\max_{[-3; -1]} g(x) = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. $m = 3$.

B. $m = -12$.

C. $m = -13$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn C.

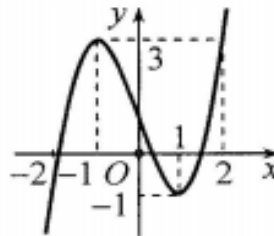
Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0; 1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[-1; 2]} f(t) = 3 \Rightarrow \max_{[-1; 2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y = f(\sqrt{4 - x^2})$ trên nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ là

A. 3.

B. -1.

C. 0.

D. Không tồn tại

Lời giải

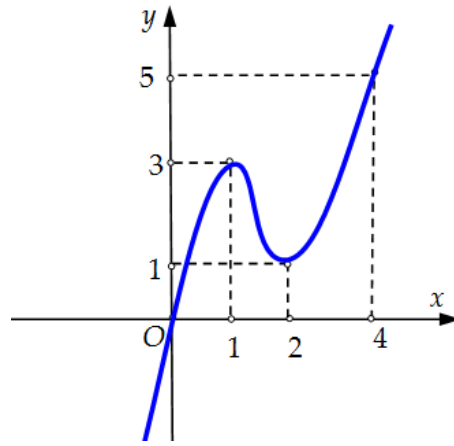
Chọn A.

Đặt $t = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow t' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Ta có: $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ do $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ nên $t \in (1; 2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x), x \in (1; 2]$ ta suy ra GTLN bằng 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

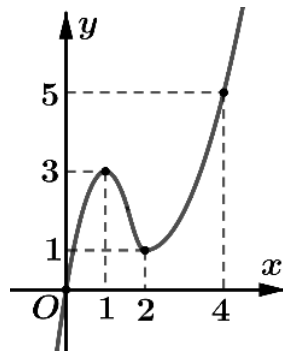
Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3 = \sin x + 3$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [2; 4]$.

Từ đồ thị ta thấy: $\forall t \in [2; 4] \Rightarrow 1 \leq f(t) \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 5 \\ m = \min_{\mathbb{R}} g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6..$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f\left[2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right]$.



Tổng $M + m$ bằng

A. 3 .

B. 5.

C. 4.

D. 6 .

Lời giải

Chọn C.

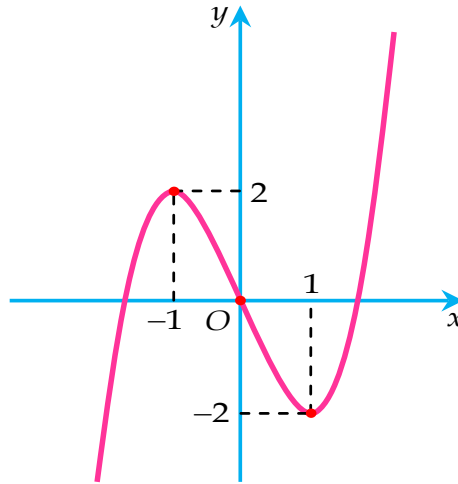
Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $0 \leq \sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \leq 2$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases} M = \max g(x) = f(1) = 3 \\ m = \min g(x) = f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 4.$

Câu 7. Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$.



A. $M^2 + m^2 = 4.$

B. $M^2 + m^2 = 1.$

C. $M^2 + m^2 = 25.$

D. $M^2 + m^2 = 2.$

Lời giải

Chọn A.

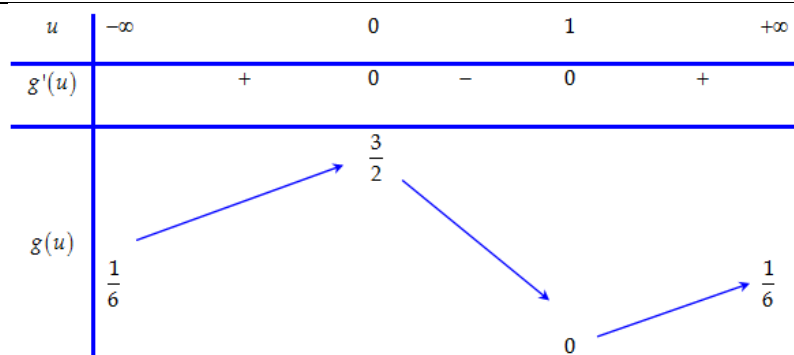
Ta có: $t = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4} = \frac{8x^2 + 8y^2 - 16}{8x^2 - 8y^2 - 16xy + 2.16} = \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{18x^2 - 4xy + 2y^2}.$

TH1: Xét $y = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow f(t) = m \in (0; -2).$

TH2: Xét $y \neq 0 \Rightarrow t = \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 3}{18\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\frac{x}{y} + 2}.$ Đặt $u = \frac{x}{y}$, ta có: $t = \frac{3u^2 - 6u + 3}{18u^2 - 4u + 2}.$

Xét $g(u) = \frac{3u^2 - 6u + 3}{18u^2 - 4u + 2}; g'(u) = \frac{96u^2 - 96u}{(18u^2 - 4u + 2)^2}; g'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases}.$

Ta lại có: $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \frac{1}{6}.$ Từ đó lập bảng biến thiên ta có



Từ bảng biến ta có $0 \leq g(u) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng: $\max_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} P = 0; \min_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} P = -2$.

Vậy $M^2 + m^2 = 4$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{21}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	2	5	$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. $M.m > 10$. B. $\frac{M}{m} > 2$. C. $M - m > 3$. D. $M + m > 7$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = x^2 - 2x$. Ta có $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x - 1 \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2 \leq \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -1 \leq (x - 1)^2 - 1 \leq \frac{21}{4}$ nên $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

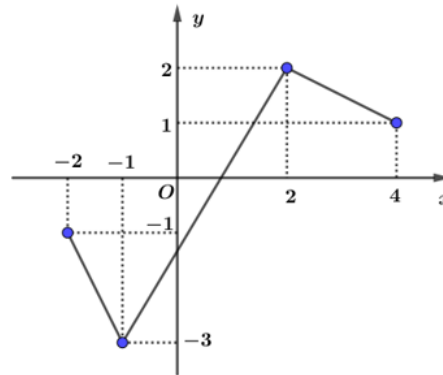
Xét hàm số $y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên suy ra: $m = \min_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(1) = 2, M = \max_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{21}{4}\right) = 5 \Rightarrow \frac{M}{m} > 2$.

DẠNG 2**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI**

$$y = f(|x|), y = f(|u(x)|), y = f(|x|+b), y = f(|u(x)|+b), y = f(|x+a|+b), y = f(|u(x)+a|+b)$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.

A. $|f(0)|$.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

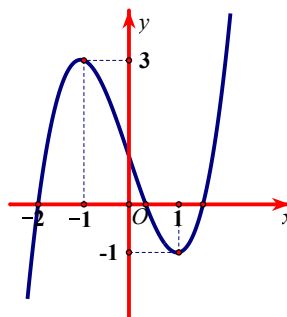
Lời giải**Chọn C.***** Phương pháp tìm GTLN của hàm trị tuyệt đối:**

$$\max_{[a; b]} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{[a; b]} f(x) \right|; \left| \min_{[a; b]} f(x) \right| \right\}$$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{[-2; 4]} f(x) = 2$ khi $x = 2$ và $\min_{[-2; 4]} f(x) = -3$ khi $x = -1$.

Vậy $\max_{[-2; 4]} |f(x)| = 3$ khi $x = -1$.

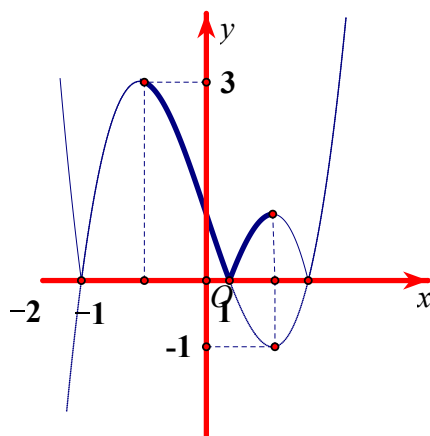
Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = 673M - 2019m$.

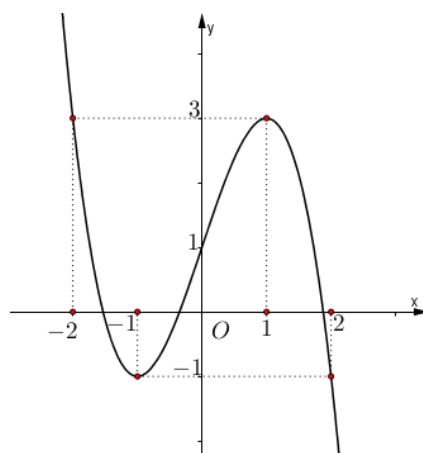
A. $T = 2019$.B. $T = 0$.C. $T = 4038$.D. $T = 2692$.**Lời giải****Chọn A.**

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.
- Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M = 3, m = 0$ nên $T = 2019$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(2x - 1)|$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Tính giá trị $M - m$.

A. 3

B. 0.

C. 1.

D. 2.

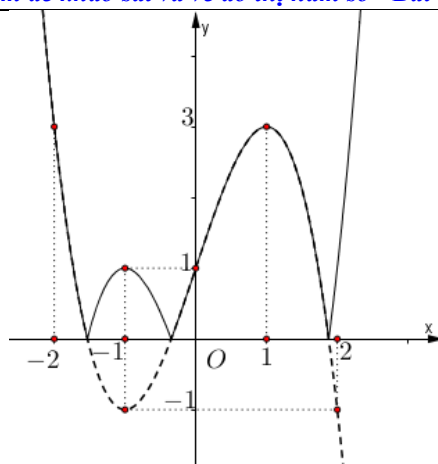
Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = 2x - 1$.

Với $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

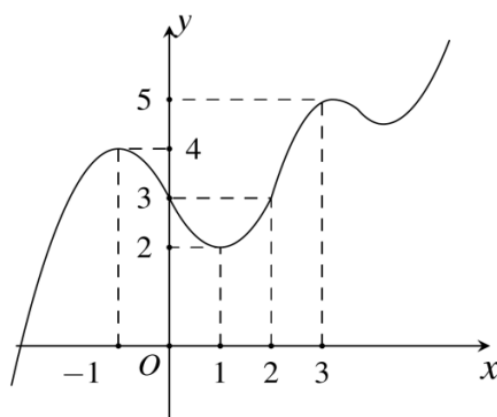
Đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ có dạng



Suy ra với $t \in [-1; 0]$ ta có $m = 0$, $M = 1$.

Vậy $M - m = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M , m theo thứ tự là GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x - 2|)$ trên đoạn $[-1, 5]$. Tổng $M + m$ bằng

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x - 2| \leq 3$

Do đó $\forall x \in [-1; 5]$, $0 \leq |x - 2| \leq 3$.

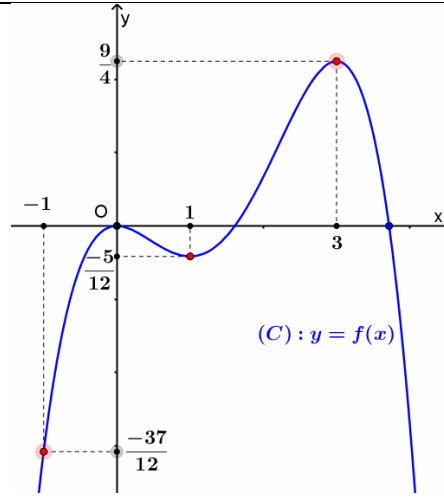
Đặt $t = |x - 2|$ với $t \in [0; 3]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục $\forall t \in [0; 3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max_{[0; 3]} f(t) = 5$, $\min_{[0; 3]} f(t) = 2$.

Suy ra $m = 2$, $M = 5$ nên $M + m = 7$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Gọi M , m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y = f(|-x^3 + 3x^2 - 1|)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng

- A. 0. B. $\frac{-111}{16}$. C. $\frac{-45}{48}$. D. $\frac{185}{144}$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y = g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$;

$$+ g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2); \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Vì } \begin{cases} g(-1) = 3 \\ g(0) = -1 \\ g(2) = 3 \\ g(3) = -1 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \min_{[-1,3]} g(x) = -1 \\ \max_{[-1,3]} g(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-1; 3].$$

$$\Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 3, \forall x \in [-1; 3].$$

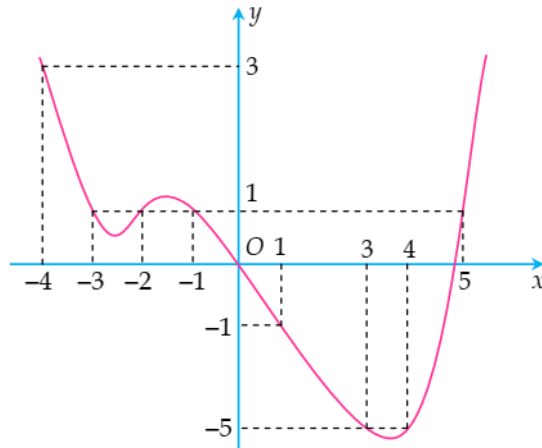
Từ đồ thị $(C): y = f(x)$;

$$+ m = \min_{[-1,3]} f(|g(x)|) = \frac{-5}{12} \text{ khi } |g(x)| = 1 \text{ tại } x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3 \dots$$

$$+ M = \max_{[-1,3]} f(|g(x)|) = \frac{9}{4} \text{ khi } |g(x)| = 3 \text{ tại } x = -1 \vee x = 2.$$

$$\text{Vậy } m.M = \frac{-45}{48}.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right)$.

Giá trị biểu thức $T = 3M - m$ bằng

A. $T = 2$.

B. $T = 0$.

C. $T = -8$.

D. $T = 14$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Với $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ ta có: $0 \leq \sqrt{6x - 9x^2} = \sqrt{-9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1} \leq 1$.

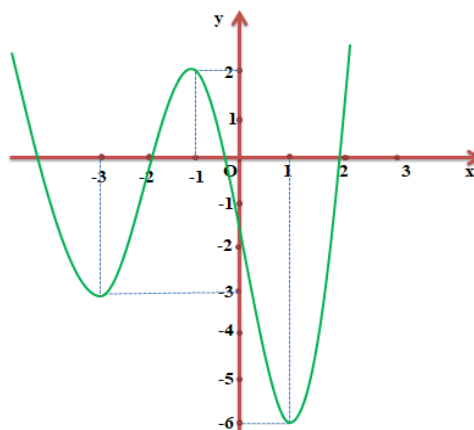
$\Rightarrow 0 \geq -2\sqrt{6x - 9x^2} \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 3 - 2\sqrt{6x - 9x^2} \geq 1$.

Đặt $u = \left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right| \Rightarrow 1 \leq u \leq 3$.

Xét hàm số $y = f(u)$ với $u = \left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|$ trên đoạn $[1; 3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $M = -1; m = -5 \Rightarrow T = 3M - m = -3 + 5 = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x-1)|$ trên đoạn $[-3; 3]$. Tìm M .

A. $M = 0$.

B. $M = 6$.

C. $M = 5$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = x - 1$ Do $x \in [-3; 3] \Rightarrow t \in [-4; 2]$.

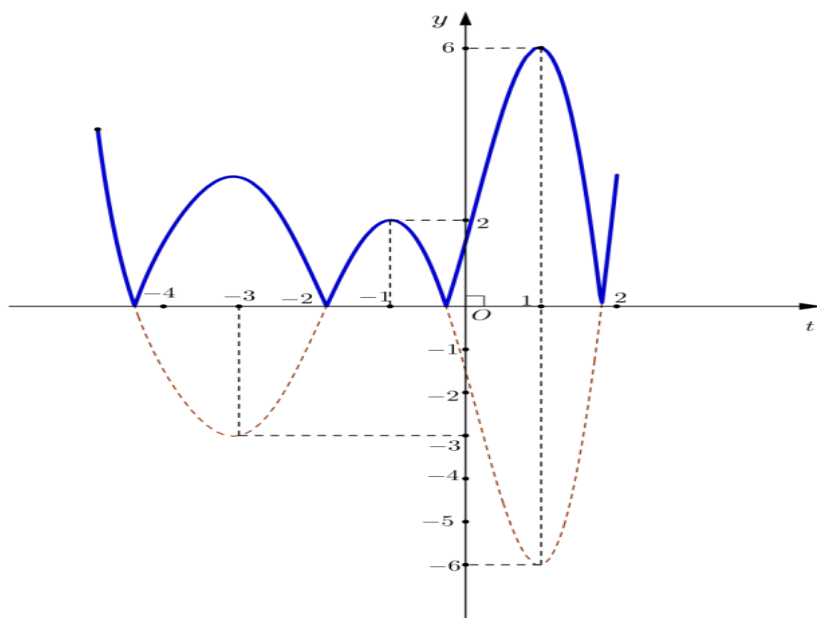
Xét hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$.

Cách vẽ đồ thị hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với phần phía trên trục hoành ta được nhánh (I).

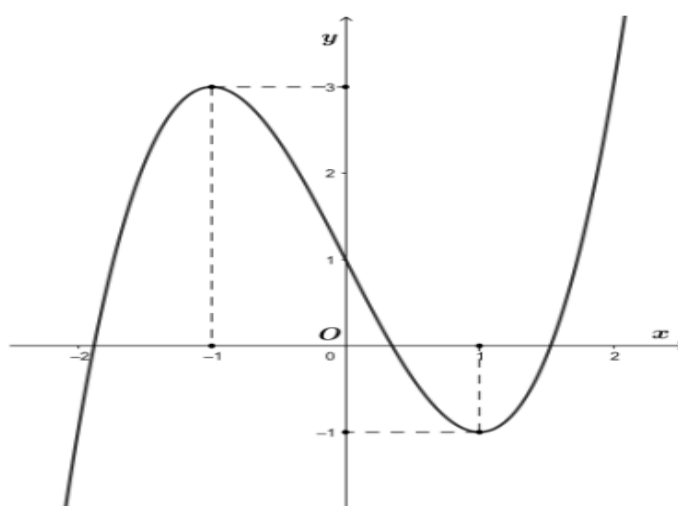
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được nhánh (II).

Hợp của hai nhánh (I) và (II) ta được đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra $M = 6$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M = \max_R |f(\sin^2 2x)|$, $m = \min_R |f(\sin^2 2x)|$. Tổng $M + m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn B.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq X = \sin^2 2x \leq 1$$

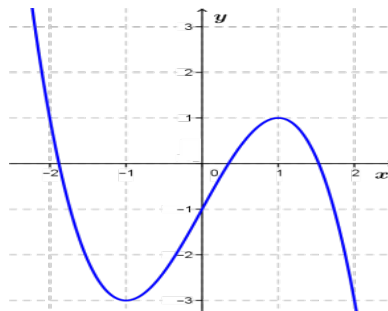
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$ ta có $\max_{[0;1]} f(X) = 1 = f(0), \min_{[0;1]} f(X) = -1 = f(1)$.

Vì $\min_{[0;1]} f(X) = -1 < 0 < \max_{[0;1]} f(X) = 1$ nên

$$M = \max_{\mathbb{R}} |f(\sin^2 2x)| = \left| \min_{[0;1]} f(X) \right| = \max_{[0;1]} f(X) = 1, m = \min_{\mathbb{R}} |f(\sin^2 2x)| = 0$$

Vậy $M + m = 1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T = M - m$.



A. 2 .

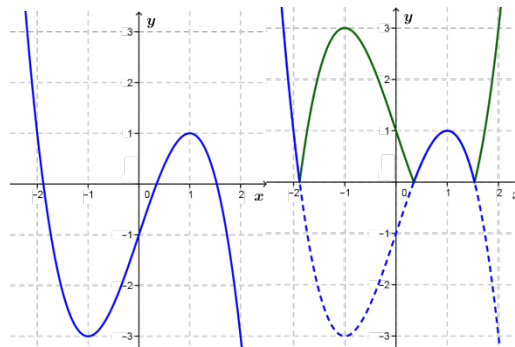
B. 0 .

C. 3 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A.



Xét hàm số: $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$.

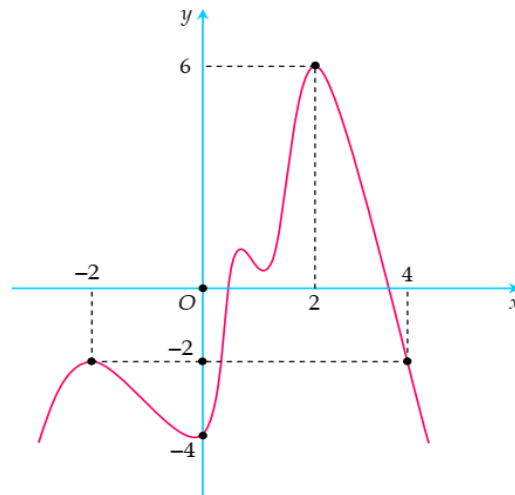
$$\text{Đặt } t = 2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2 = 2\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right] - 2 = -4\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\Rightarrow t = -\sin^2 2x \quad (-1 \leq t \leq 0). \text{ Suy ra hàm số } g(x) \text{ có dạng } |f(t)| \quad (-1 \leq t \leq 0).$$

Dựa vào đồ thị hàm số $|f(x)|$, ta có:

$$\text{Max } g(x) = \text{Max}_{t \in [-1;0]} |f(t)| = 3 \Rightarrow M = 3; \text{Min } g(x) = \text{Min}_{t \in [-1;0]} |f(t)| = 1 \Rightarrow m = 1. \text{ Nên } M - m = 2$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right)\right) \right|$. Khi đó tổng

$m + M$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3} |\sin x| \leq \frac{\pi}{3}$.

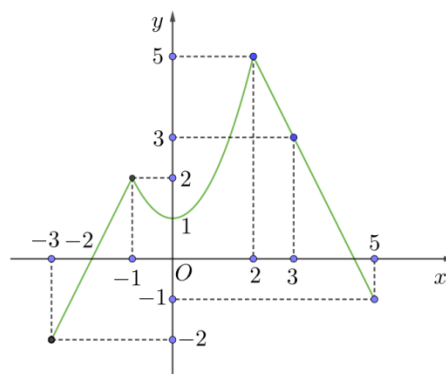
Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ hàm số $\sin$ luôn tăng nên suy ra $\sin 0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right) \leq \sin \frac{\pi}{3}$.

Hay $0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right) \in [0; 2]$

Quan sát đồ thị ta thấy: $\frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right)\right) \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$

Từ đó $\max y = 2; \min y = 0$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. -2.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = |3 \cos x + 4 \sin x| - 2$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ta có: } (3 \cos x + 4 \sin x)^2 \leq (3^2 + 4^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 25.$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq |3 \cos x + 4 \sin x| \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq |3 \cos x + 4 \sin x| - 2 \leq 3.$$

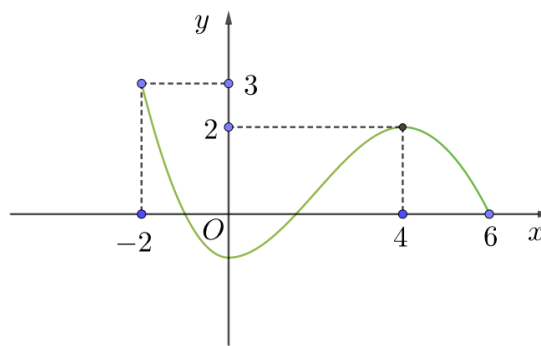
$$\text{Vậy } t \in [-2; 3]$$

Khi đó hàm số $y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$ trở thành: $y = f(t)$ với $t \in [-2; 3]$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$ bằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 3]$.

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } f(x) \text{ ta có: } \min_{\mathbb{R}} f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2) = \min_{[-2; 3]} f(t) = f(-2) = 0.$$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x| + 1)$ trên đoạn $[-2; 4]$. Giá trị của M bằng

A. 3

B. -1.

C. 2.

D. 0.

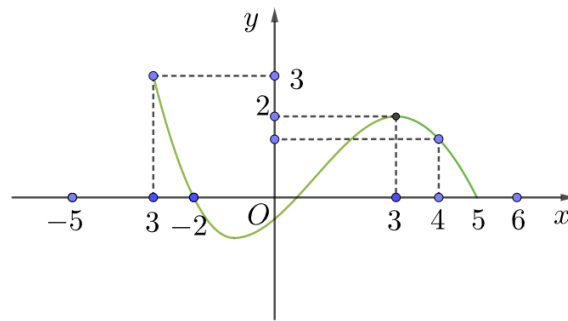
Lời giải

Chọn C.

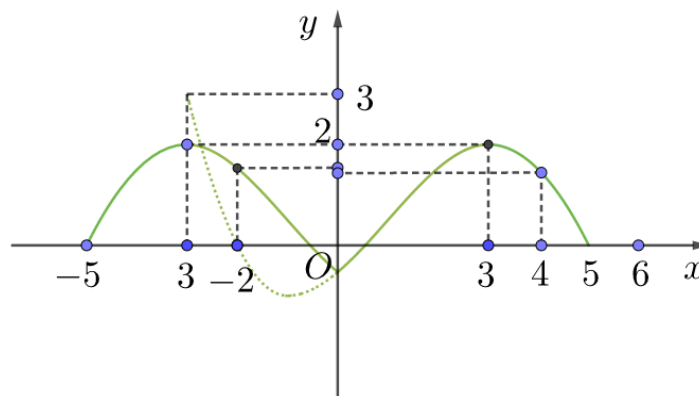
Xét hàm số $y = f(|x| + 1)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$ hàm số $y = f(|x| + 1)$ trở thành $y = f(x + 1)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái (theo phương Ox) 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ như sau:

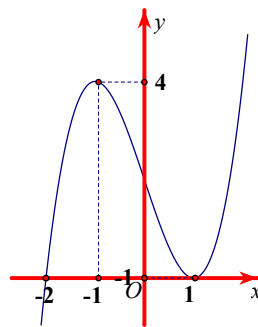


Từ đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ bên phải trục Oy qua trục Oy , ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x|+1)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 2.

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x^2 + 2x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = M - 3m$.

A. $T = 3$.

B. $T = -2$.

C. $T = 6$.

D. $T = 4$.

Lời giải

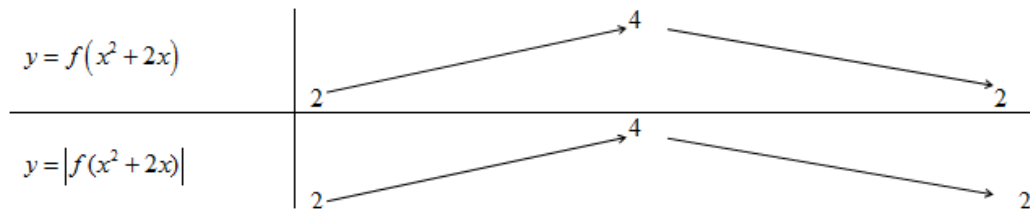
Chọn B.

Xét hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow \\ x^2 + 2x = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \notin [-2; 0] \end{cases}$$

Cách 1: Tính $y(-2) = y(0) = f(0) = 2; y(-1) = 4$

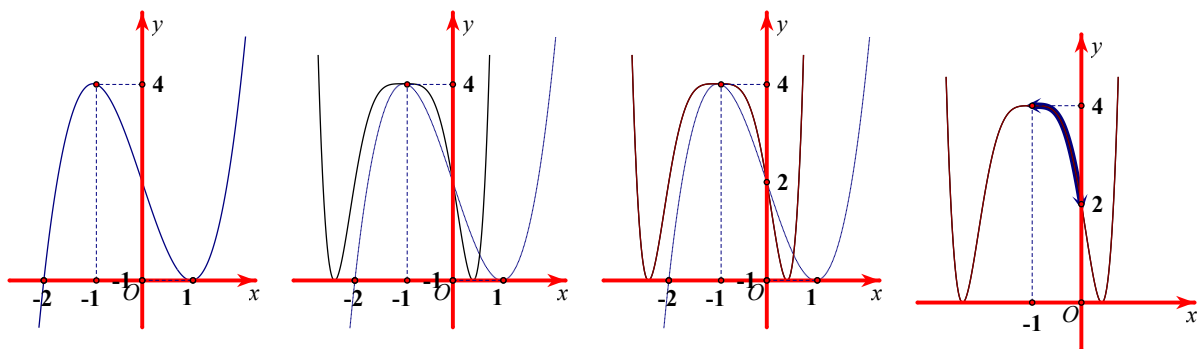


Suy ra giá trị $M = 4, m = 2$ hay $T = -2$.

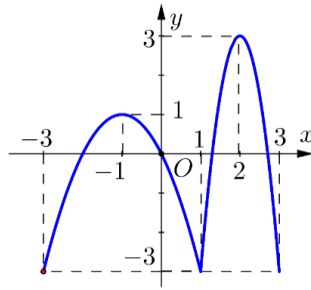
Cách 2: Lập bảng

x	-2	-1	0
$x^2 + 2x$	0	-1	0
$y = f'(x^2 + 2x)$	-	0	-
$2x + 2$	-	0	+
$y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$	+	0	-
$y = f(x^2 + 2x)$	2	4	2
$y = f(x^2 + 2x) $	2	4	2

Vậy $M = 4, m = 2$ suy ra $T = -2$.



Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(\sin 3x + \sin^3 x)|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e .

B. 4.

C. 2009^{-3} .

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sin 3x + \sin^3 x = 3 \sin x$, Với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3 \sin x \in [-3; 3] \Rightarrow t \in [-3; 3]$

Hàm số trở thành $y = |f(t)|$

Từ đồ thị hàm $f(t)$ trên đoạn $[-3; 3]$ ta suy ra

$$\min_{[-3;3]} f(t) = -3, \max_{[-3;3]} f(x) = 3 \Rightarrow \min_{[-3;3]} |f(t)| = 0, \max_{[-3;3]} |f(x)| = 3$$

$$\text{Vậy } e^{\ln M} + 2019^m = e^{\ln 3} + 2019^0 = 4.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$+\infty$		
		$f(-2)$		$f(4)$			

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

A. $f(2)$.B. $f(0)$.C. $f(4)$.

D. Không xác định được.

Lời giải

Chọn C.

Từ yêu cầu bài toán ta có bảng biến thiên cho hàm số $y = f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$+\infty$		
		$f(4)$		$f(4)$			

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{[-2;4]} f(|x|) = f(4)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	4	6	$+\infty$					
y'		+	0	-	0	+	0	-		
y				4		-2		9		$-\infty$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|-x^2 + 2x + 5|)$ trên $[-1;3]$ lần lượt là M, m . Tính $M + m$.

A. 13.

B. 7.

C. $f(2) - 2$.

D. 2.

Lời giải

Chọn b.

Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ trên $[-1;3]$.

Hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$ có

$$g'(x) = -2x + 2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1;3].$$

$$g(1) = 6, g(-1) = 2, g(3) = 2.$$

$$\forall x \in [-1;3] \Rightarrow g(x) \in [2;6] \Rightarrow |g(x)| \in [2;6].$$

Đặt $t = |g(x)| = |-x^2 + 2x + 5|$. Ta có: $y = f(|-x^2 + 2x + 5|) = f(t)$.

$$\forall x \in [-1;3] \Rightarrow t \in [2;6].$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ trên $[2;6]$

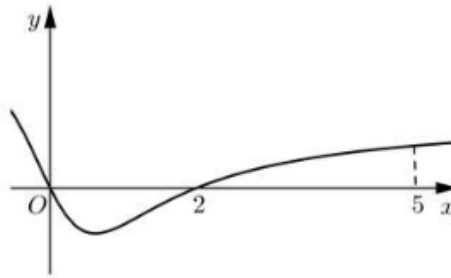
$$\text{Ta có: } -2 = f(4) < f(2) < f(6) = 9 \text{ nên } M = \max_{[2;6]} f(t) = \max \{f(2); f(4); f(6)\} = f(6) = 9,$$

$$m = \min_{[2;6]} f(t) = \min \{f(2); f(4); f(6)\} = f(4) = -2.$$

Vậy $M + m = 7$.

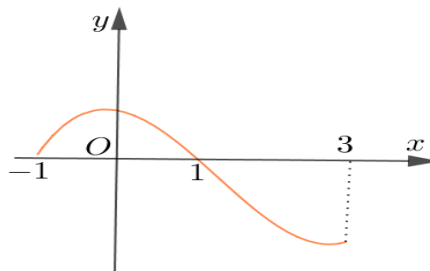
CHỦ ĐỀ 5**BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$, TÌM MIN, MAX HÀM HỢP****DẠNG 1****TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$**

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



- A. $f(0), f(5)$. B. $f(2), f(0)$. C. $f(1), f(5)$. **D. $f(2), f(5)$.**

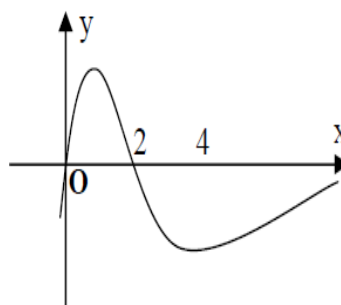
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Biết $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. $f(1), f(0)$. B. $f(2), f(1)$. **C. $f(1), f(-1)$.** D. $f(1), f(3)$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

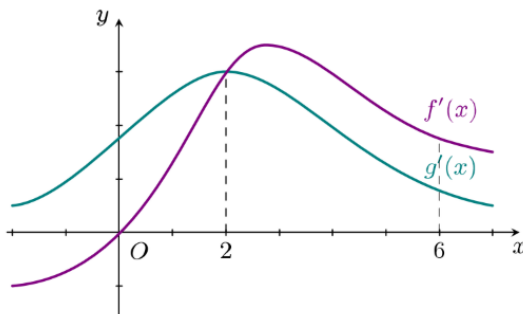
A. $m = f(4); M = f(2)$.

B. $m = f(4); M = f(1)$.

C. $m = f(0); M = f(2)$.

D. $m = f(1); M = f(2)$.

Câu 4. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

A. $h(2), h(6)$.

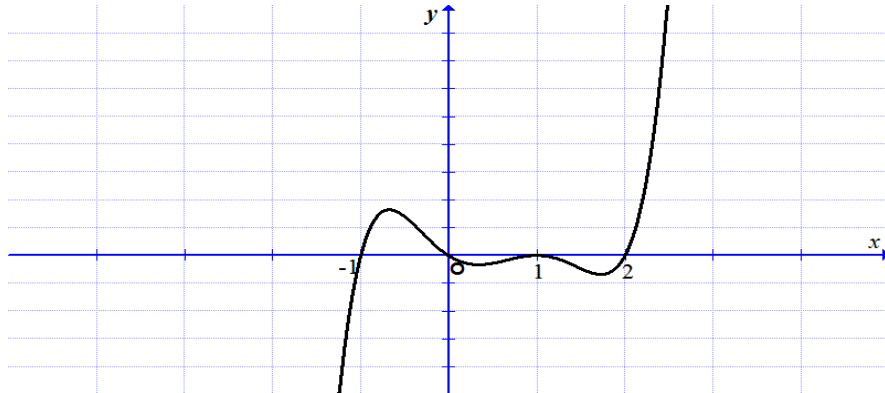
B. $h(6), h(2)$.

C. $h(0), h(2)$.

D. $h(2), h(0)$.

DẠNG 2**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(|x|)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$**

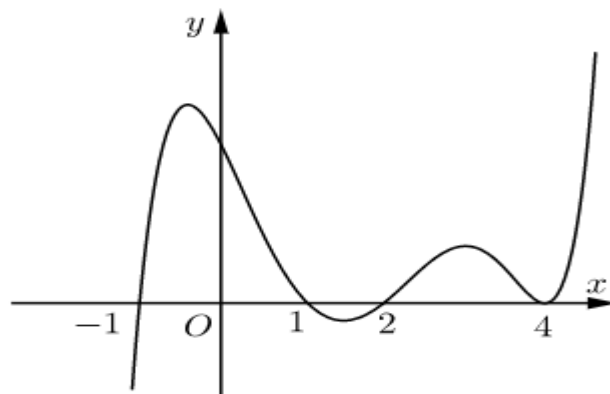
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Biết $f(0) < f(3) < f(4)$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-4; 3]$. Tính giá trị của $M - m$.

- A.** $f(4) + f(2)$. **B.** $f(4) + f(0)$. **C.** $f(3) - f(0)$. **D.** $f(3) + f(2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$? Biết $f(2) > f(0)$

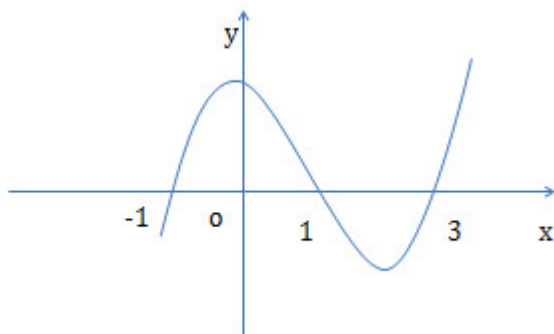


- A.** $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.
C. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$.

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = |f(x)|$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1; 1]$. Khi đó $M; m$ là

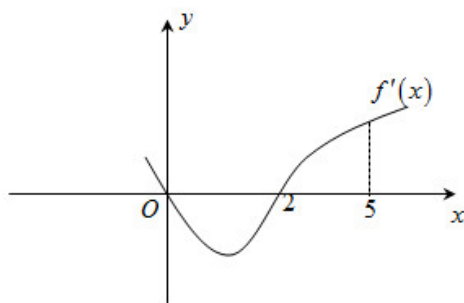
A. $M = f(-1), m = f(1)$.

B. $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

D. $M = f(-1), m = |f(1)|$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[0; 5]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0; 5]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ và $f(5) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 5]$.

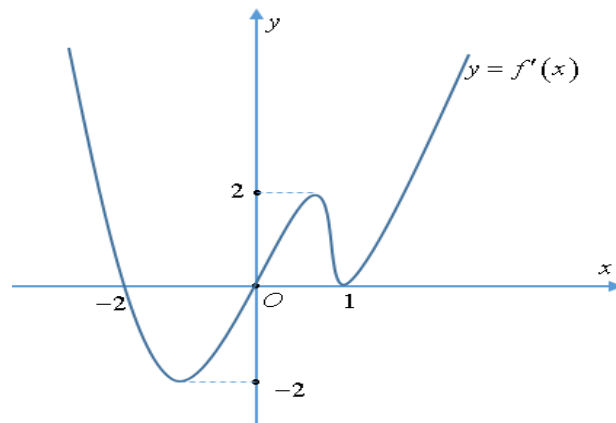
A. $|f(3)|, |f(5)|$.

B. $|f(2)|, |f(0)|$.

C. $|f(2)|, |f(5)|$.

D. $|f(0)|, |f(5)|$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới và $f(-2) = 3, f(0) = -5, f(1) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)| + 1$ trên $[-2; 1]$. Khi đó $M^2 + m^2$ bằng



A. 8.

B. 25.

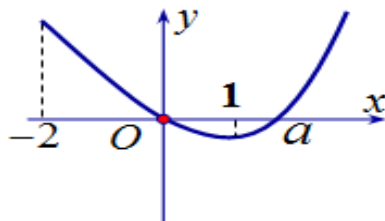
C. 37.

D. 34.

DẠNG 4

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(|x+a|+b)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ).



Khi đó hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là M, m trên đoạn $[0;1]$.

Khẳng định đúng là:

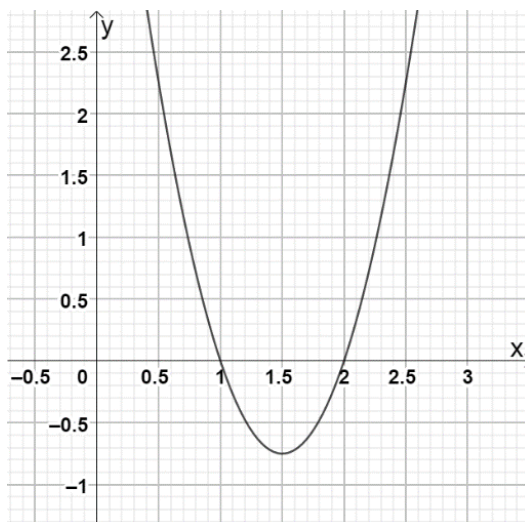
A. $M - m = f(-1) - f(0)$.

B. $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$.

C. $2M - m = 2f(a) - f(0)$.

D. $m - M = f(-1) - f(0)$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $\min_{\mathbb{R}} f'(x) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x-2|+1)$ trên đoạn $[1;3]$

có dạng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ và phân số đó tối giản. Tính $m^2 + n^2$.

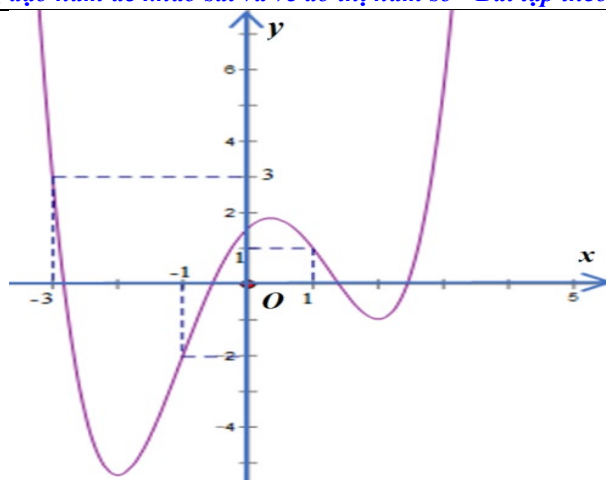
A. 85.

B. 74.

C. 61.

D. 58.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

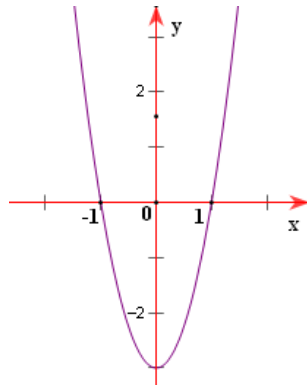
B. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(1)$.

C. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-3)$.

D. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-1)$.

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = |f(x) + b|$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN**THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$**

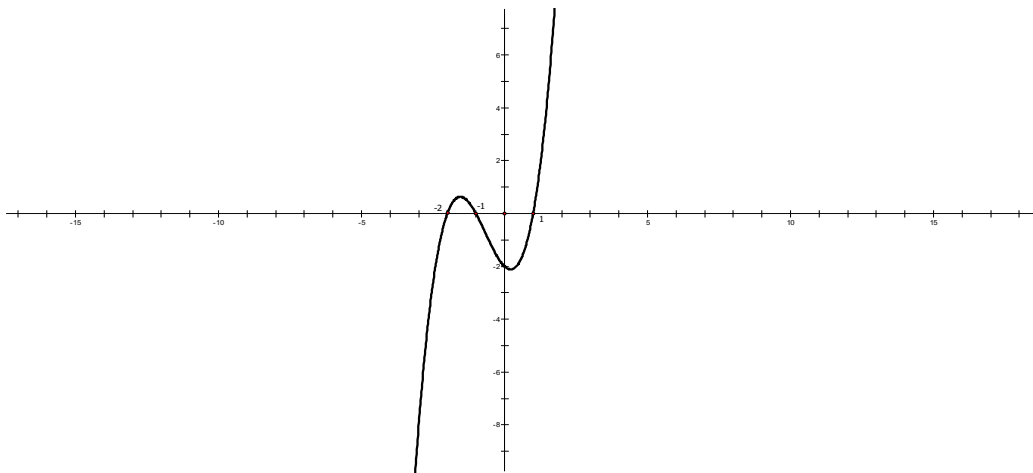
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. -10.**B.** -8.**C.** 8.**D.** 10.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1) < -2, f(-2) - f(1) > 0$



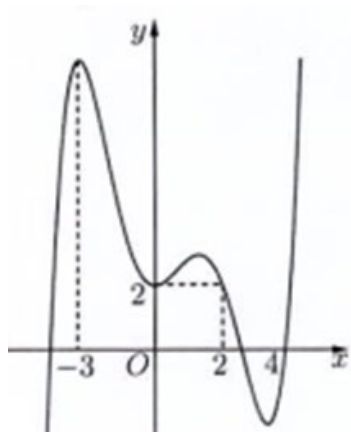
Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + 2|$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là M, m .

Tổng $M + m$ bằng

A. $g(-2) + g(1)$.**B.** $g(-2) + g(-1)$.**C.** $|f(-1) + 2| + |f(1) + 2|$.**D.** $|f(-1) + f(1) + 4|$.

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(x) + h(x)$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng



A. $f(0)$.

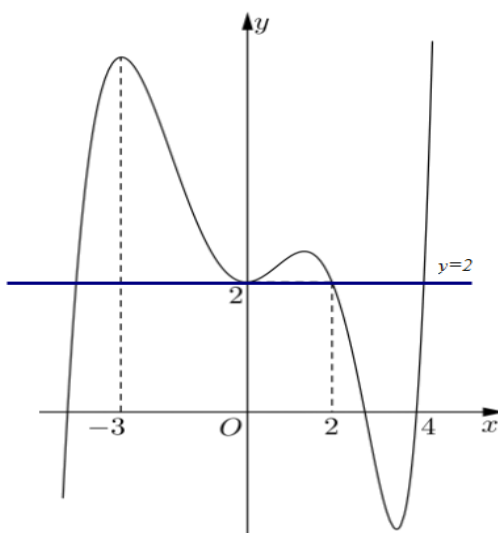
B. $f(-3) + 6$.

C. $f(2) - 4$.

D. $f(4) - 8$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $g'(x) = 2f'(2x) - 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x_1 < -3 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \\ 2x = x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -\frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x_2 > 2 \end{cases}$$

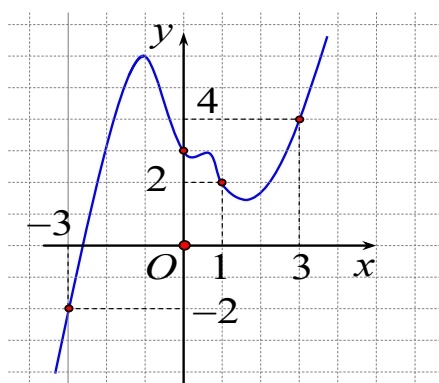
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	x_2	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên ta có: trên $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và

$$\max_{\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} y = f(2) - 4.$$

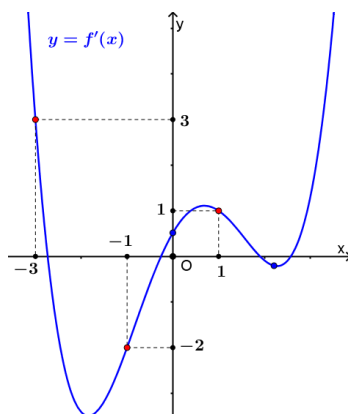
Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
- C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-3;3]$.

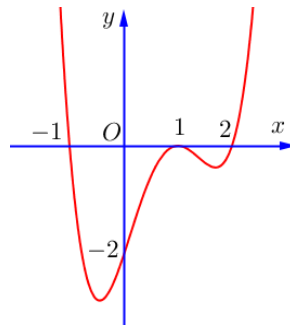
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2021$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.
- C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(2) + \frac{2}{3}$.

B. $f(-1) + \frac{2}{3}$.

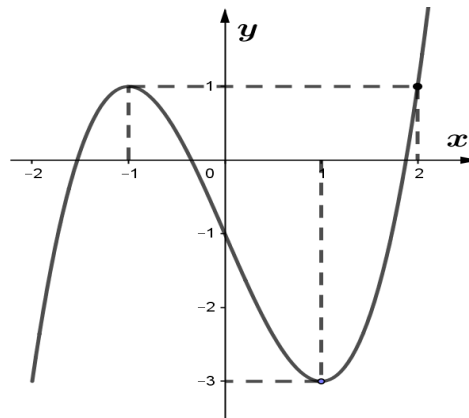
C. $\frac{2}{3}$.

D. $f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ

bên. Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2021$. Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$.

Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



A. $g(2)$.

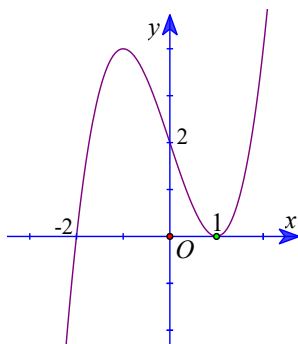
B. $g(1)$.

C. $g(-1)$.

D. $g(0)$.

DẠNG 7**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP** $y = f(u(x)); y = f(u(x)) + h(x)$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5; 3]$ bằng



- A. $f(-2)$. B. $f(1)$. C. $f(-4)$. D. $f(2)$.

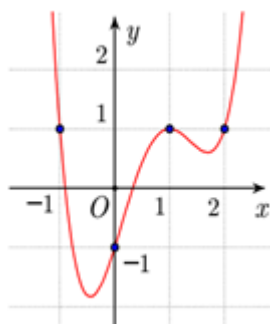
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

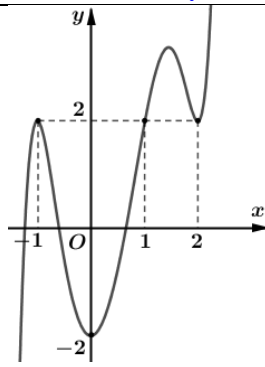
- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2017)$. C. $(-2017; 0)$. D. $(2017; +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = -f(2x - 1) + 2x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng



- A. $-f(1) + 2$. B. $-f(-1)$. C. $-f(2) + 3$. D. $-f(3) + 4$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x + 1) - 4x - 3$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ bằng



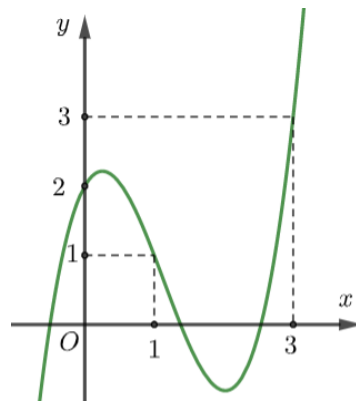
A. $f(0)$.

B. $f(-1)+1$.

C. $f(2)-5$.

D. $f(1)-3$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2; 4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

D. $f(1)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$g(x) = f\left(4x - x^2\right) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

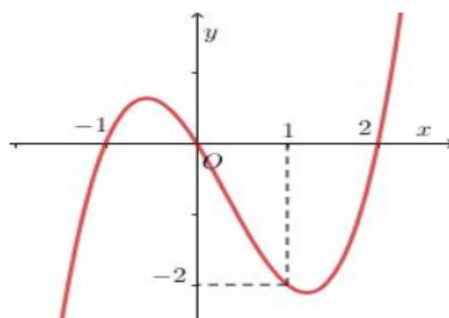
x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						

A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

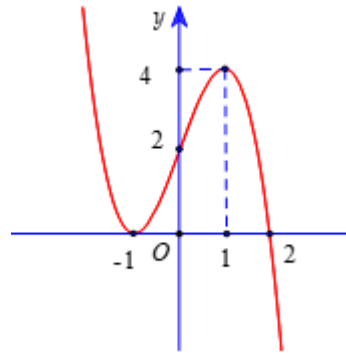


Hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$ bằng

A. $g(1)$.B. $g(-2)$.C. $g(0)$.D. $g(2)$.

DẠNG 8**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP** $y = [f(x)]^k$; $y = [f(u(x))]^k$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng

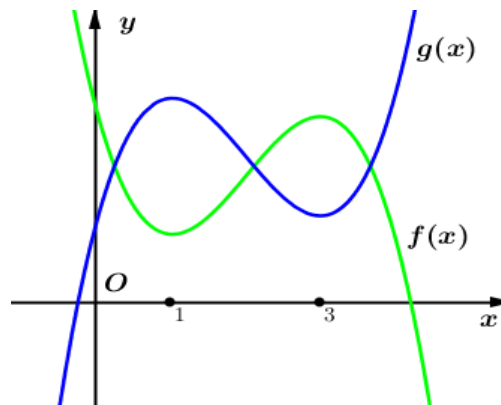
A. $\frac{1573}{64}$

B. 198.

C. $\frac{37}{4}$.

D. $\frac{14245}{64}$.

Câu 29. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,



biết rằng $x = 1$ và $x = 3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng thời $3f(1) = g(3) + 1$, $2f(3) = g(1) + 4$, $f(-2x+7) = g(2x-3) - 1$ (*). Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ của hàm số $S(x) = f(x)g(x) - g^2(x) + f(x) - 4g(x) + 2$. Tính tổng $P = M - 2m$.

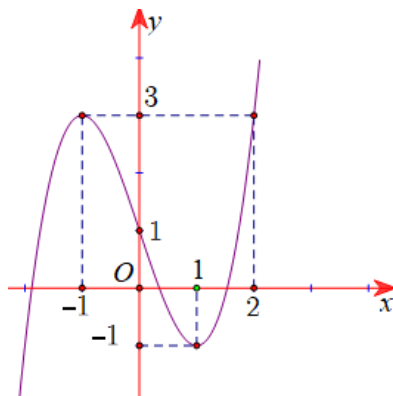
A. 39.

B. 107.

C. 19. D. 51.

DẠNG 9**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG
BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$**

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Giá trị m để $\max_{x \in [0;1]} g(x) = -10$ bằng

A. $m = -13$.

B. $m = 5$.

C. $m = 3$.

D. $m = -1$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

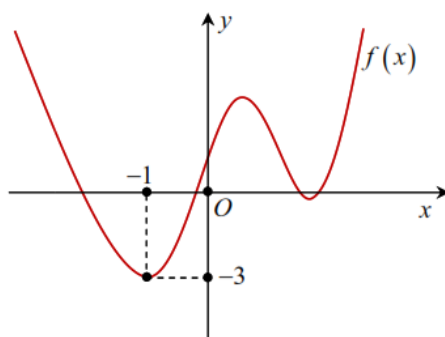
A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. -1.

Câu 32. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m là tham số thực, để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x+3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng



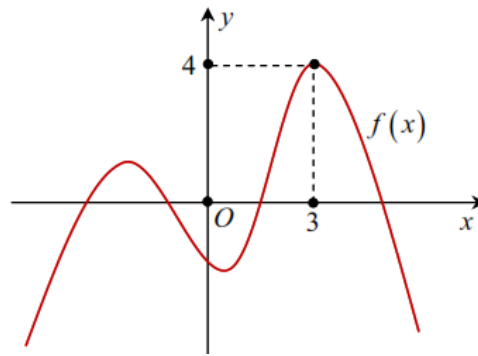
A. -1.

B. 0.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 33. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m và n là hai tham số thực. Để hàm số $g(x) = 3f(3x - m) + f(x + n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $P = 2m - n$ bằng:



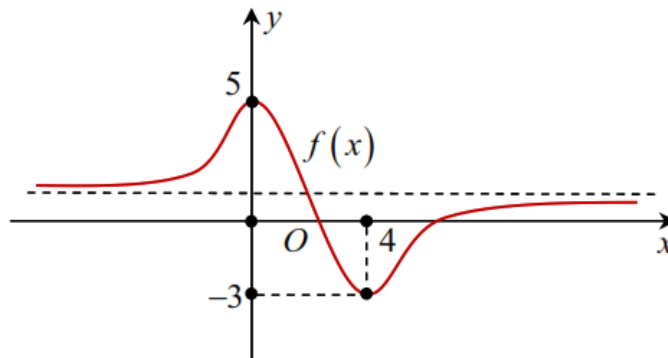
A. 3.

B. 0.

C. 5.

D. 1.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m là tham số thực. Để hàm số $g(x) = 2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T = 2m + 3n$ bằng:



A. -11.

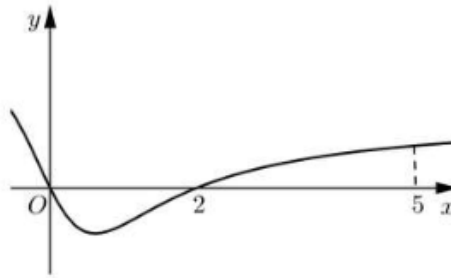
B. -7.

C. -13.

D. 5.

CHỦ ĐỀ 5**BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$, TÌM MIN, MAX HÀM HỢP****DẠNG 1****TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$**

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là

A. $f(0), f(5)$.B. $f(2), f(0)$.C. $f(1), f(5)$.**D. $f(2), f(5)$.****Lời giải****Chọn D.****Cách 1:**

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$
f'		0	–	0	+
f		$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$	

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min_{[2;5]} f(x) = f(2)$

Và $\max_{[0;5]} f(x) = \max \{f(0), f(5)\}$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2; 5]$ nên

$$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

Do đó $f(5) > f(0)$, vậy $\max_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\} = f(5)$

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y = f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1 = \int_0^2 |f'(x)| dx = \int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2) \text{ và } S_2 = \int_2^5 |f'(x)| dx = \int_2^5 f'(x) dx = f(2) - f(5)$$

Theo giả thiết, ta có:

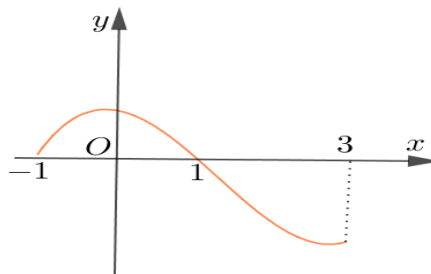
$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

$$\text{Suy ra } S_2 = \int_2^5 |f'(x)| dx > \int_3^5 |f'(x)| dx = f(5) - f(3) = S_1.$$

$$\text{Suy ra } S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(5) > f(0) > f(2).$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;5]} f(x) = f(2), \max_{[0;5]} f(x) = f(5).$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Biết $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$.

A. $f(1), f(0)$.

B. $f(2), f(1)$.

C. $f(1), f(-1)$.

D. $f(1), f(3)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	-1		1		3
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(-1)$		$f(1)$		$f(3)$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;3]} f(x) = f(1)$$

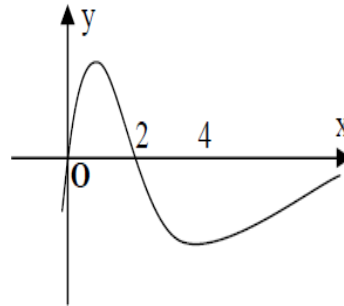
$$\text{Từ bảng biến thiên ta có } f(0) < f(1), f(2) < f(1) \text{ vậy } f(0) + f(2) < 2f(1)$$

$$\text{Khi đó } f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(0) + f(2) - 2f(1) = f(3) - f(-1)$$

Vậy $f(3) - f(-1) > 0 \Rightarrow f(3) > f(-1)$

Khi đó $\min_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

A. $m = f(4); M = f(2)$.

B. $m = f(4); M = f(1)$.

C. $m = f(0); M = f(2)$.

D. $m = f(1); M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên trên $[0; 4]$

x	0	1	2	3	4
y'	0	+	0	+	
y	$f(0)$		$f(2)$		$f(4)$

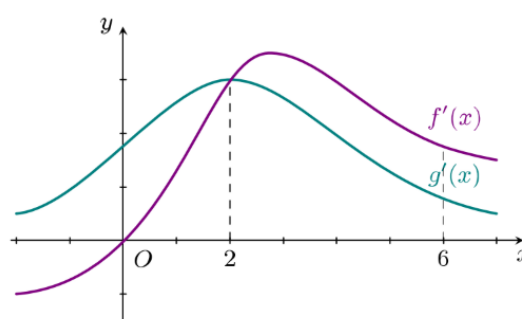
Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(2); m = \min\{f(0); f(4)\}$.

Mặt khác có $f(1) < f(2); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$.

Mà $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) = f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$

Do vậy $m = f(4)$.

Câu 4. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

- A. $h(2), h(6)$. B. $h(6), h(2)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

x	0	2	6
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$	$h(0)$	$h(2)$	$h(6)$

Từ đồ thị đã cho ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0; 6]$

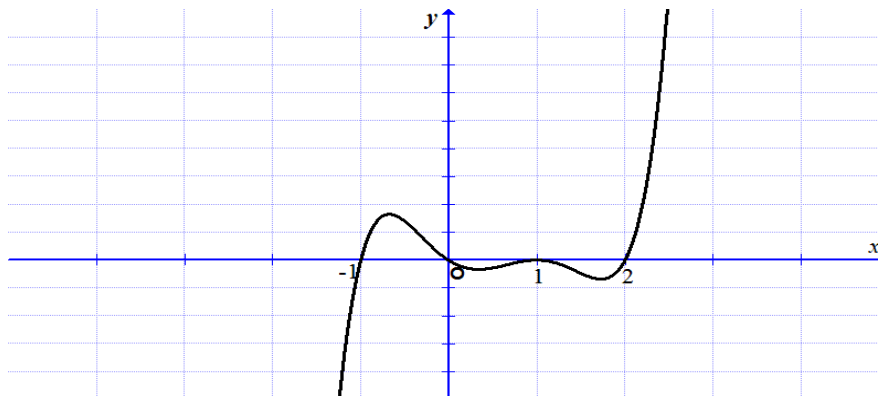
Do đó $\min_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Giả thiết ta có $f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6)$. Vậy $\max_{[0;6]} h(x) = h(6)$.

DẠNG 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(|x|)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Biết $f(0) < f(3) < f(4)$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-4; 3]$. Tính giá trị của $M - m$.

A. $f(4) + f(2)$.

B. $f(4) + f(0)$.

C. $f(3) - f(0)$.

D. $f(3) + f(2)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Mặt khác hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	+
$y = f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(0)$	$f(2)$	$+\infty$

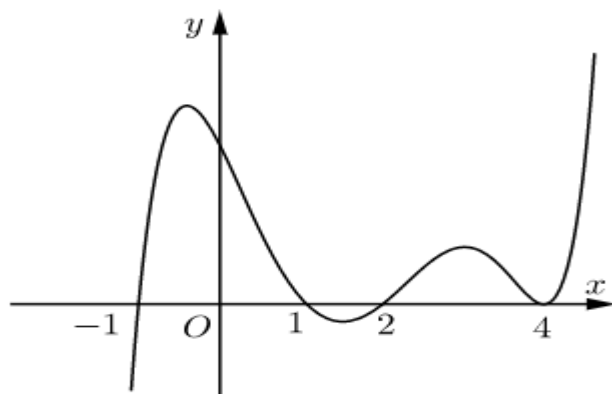
x	-4	-2	0	2	3
y'	-	0	+	0	-
$y = f(x)$	$f(4)$	$f(2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$

do: $f(0) < f(3) < f(4)$.

Mặt khác từ bảng biến thiên hàm số $y = f(|x|)$ ta có: $\min_{[-4;3]} f(|x|) = f(0)$.

$$\Rightarrow \max_{[-4;3]} f(|x|) = f(-4) = f(4) = M \Rightarrow M + m = f(4) + f(2).$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$? Biết $f(2) > f(0)$



A. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0).$

B. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0).$

C. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2).$

D. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2).$

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên $[-1; 4]$:

x	-1	1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(4)$	$f(2)$	$f(1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(4)$

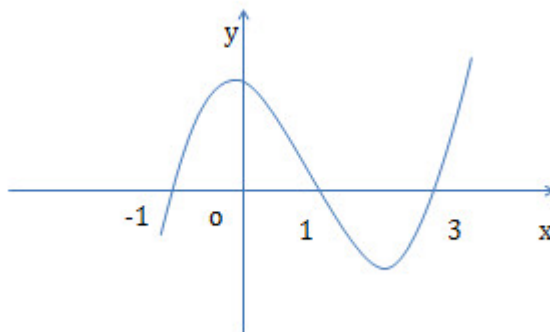
Mà $f(2) > f(0)$

Vậy $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0).$

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = |f(x)|$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1; 1]$. Khi đó M, m là

A. $M = f(-1), m = f(1)$.

B. $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

D. $M = f(-1), m = |f(1)|$.

Lời giải

Chọn C.

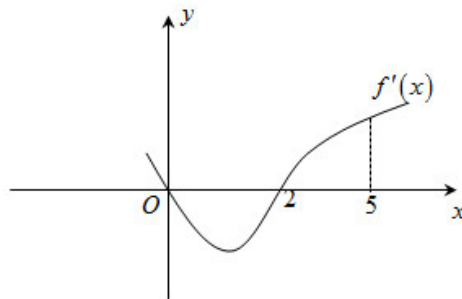
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1;1]$ nên

$$f(-1) < f(1) < 0, \forall x \in [-1;1].$$

Do đó $|f(-1)| > |f(1)|, \forall x \in [-1;1]$ nên

$$\max_{[-1;1]} g(x) = |f(-1)|; \min_{[-1;1]} g(x) = |f(1)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(1)|.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;5]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0;5]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ và $f(5) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[0;5]$.

- A. $|f(3)|, |f(5)|$. B. $|f(2)|, |f(0)|$. C. $|f(2)|, |f(5)|$. D. $|f(0)|, |f(5)|$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	-	0	+		+	
$f(x)$	$f(0)$						$f(5)$

$f(0) \rightarrow f(2) \leftarrow f(3) \rightarrow f(5)$

Theo giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) - f(0) = f(3) - f(2)$ mà

$$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) > f(0)$$

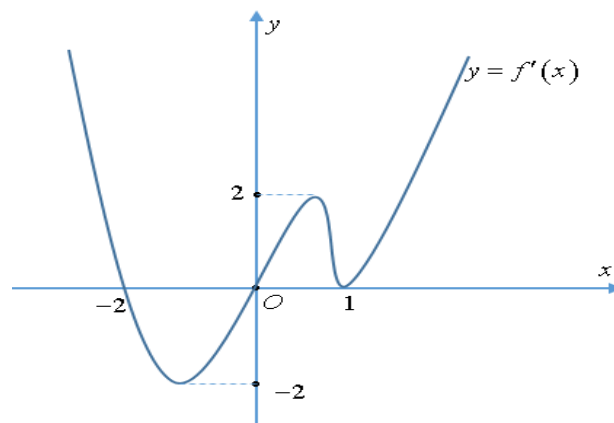
Cũng theo giả thiết ta có $f(5) < 0$ nên $f(2) < f(0) < f(5) < 0 \Rightarrow |f(2)| > |f(0)| > |f(5)|$

Do đó ta suy ra bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	-	0	+		+	
$f(x)$	$f(0)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(5)$
$g(x) = f(x) $	$ f(0) $		$ f(2) $				$ f(5) $

Vậy $\max_{[0;5]} g(x) = |f(2)|$; $\min_{[0;5]} g(x) = |f(5)|$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới và $f(-2) = 3$, $f(0) = -5$, $f(1) = 0$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)| + 1$ trên $[-2; 1]$. Khi đó $M^2 + m^2$ bằng



A. 8.

B. 25.

C. 37.

D. 34.

Lời giải

Chọn C.

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	0	$+\infty$	

Quan sát bảng biến thiên ta có: $x \in [-2; 1]$ thì $f(x) \in [-5; 3] \Rightarrow |f(x)| + 1 \in [1; 6]$.

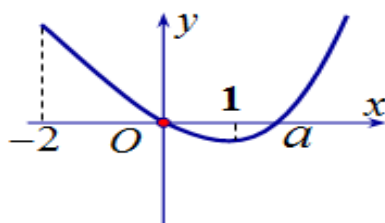
Suy ra $M = 6$ và $m = 1$.

Vậy $M^2 + m^2 = 37$.

DẠNG 4

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(|x+a|+b)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ).



Khi đó hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là M, m trên đoạn $[0;1]$.

Khẳng định đúng là:

A. $M - m = f(-1) - f(0)$.

B. $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$.

C. $2M - m = 2f(a) - f(0)$.

D. $m - M = f(-1) - f(0)$

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x	-2	0	a
$f'(x)$	+	0	- 0 +
$y = f(x)$			

Xét hàm $h(x) = f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y = f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x	-1	$a-1$
$h(x) = f(x+1)$		

Hàm $p(x) = f(|x+1|)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

- + Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x \geq -1$).
- + Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

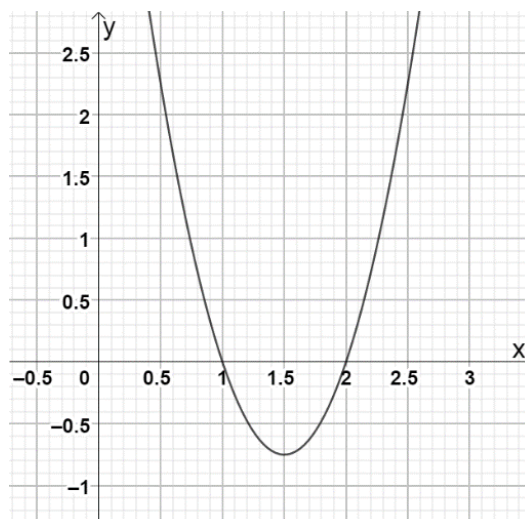
x	$-a-1$	-1	$a-1$
$p(x) = f(x+1)$			

Hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 2 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x	$-a+1$	1	$a+1$
$g(x) = f(x+1 -2)$			

Vì $a > 1$ nên $-a+1 < 0$ nên trên đoạn $[0;1]$ có $M = \max_{[0;1]} g(x) = f(0)$, $m = \min_{[0;1]} g(x) = f(-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $\min_{\mathbb{R}} f'(x) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x-2|+1)$ trên đoạn $[1;3]$

có dạng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ và phân số đó tối giản. Tính $m^2 + n^2$.

A. 85.

B. 74.

C. 61.

D. 58.

Lời giải

Chọn C.

Vì $f'(x)$ là hàm số bậc hai nên $f(x)$ là hàm bậc 3 nó có dạng: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

$$\text{Từ đồ thị hàm số } f'(x) \text{ và giả thiết ta có } \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x.$$

Ta có $g'(x) = \frac{x-2}{|x-2|} f'(|x-2|+1)$ với $x \neq 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-2|+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+1 = 1 \text{ (VN do } x \neq 2) \\ |x-2|+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

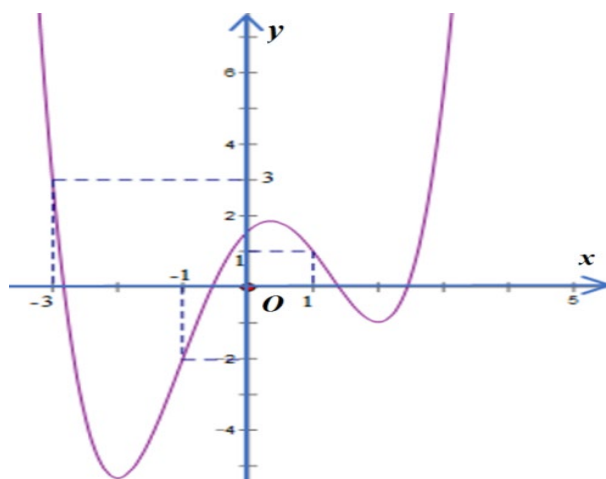
Ta có bảng biến thiên

x	1	2			3
$g'(x)$	0	+		-	0
$g(x)$	$g(1)$ $g(2)$ $g(3)$				

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(1) = \frac{5}{6}$.

Do đó $m = 5$, $n = 6 \Rightarrow m^2 + n^2 = 61$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

B. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(1)$.

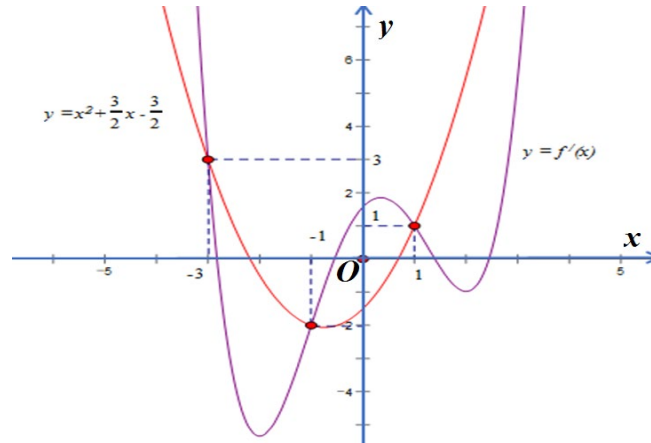
C. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-3)$.

D. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập Bảng biến thiên

x	-3	-1	1		
$g'(x)$		-	0	+	0
$g(x)$	$g(-3)$		$g(-1)$		$g(1)$

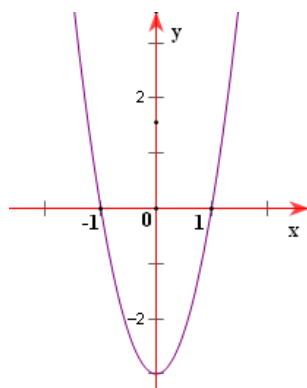
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Đặt $t = |x+3|-4$ với $x \in [-2;2]$ thì $t \in [-3;1]$. Khi đó $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = \min_{[-3;1]} g(t) = g(-1)$.

DẠNG 5

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = |f(x) + b|$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. -10.

B. -8.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $h(x) = f(x) + m$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

Ta có: $h'(x) = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Khi đó $h(1) = m - 5$; $h(3) = m + 15$.

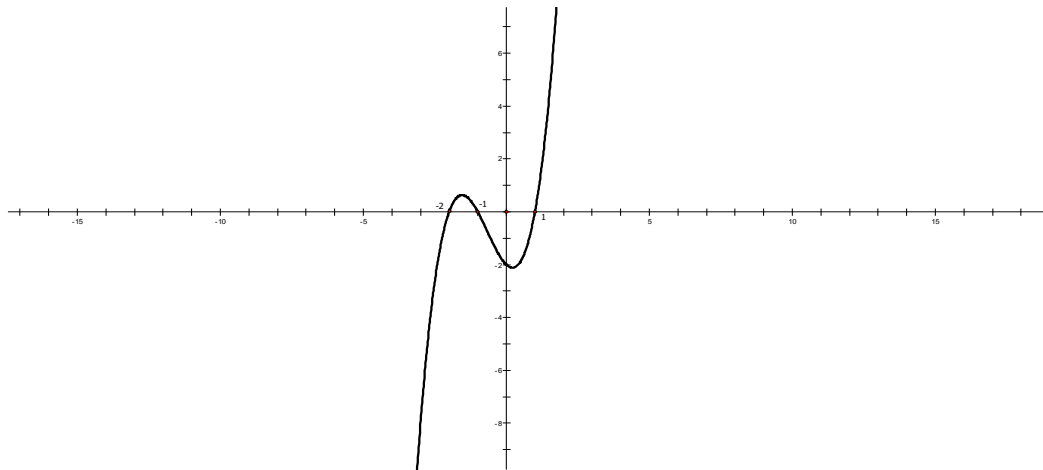
Để hàm số $y = |h(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y = h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1; 3]$.

Trường hợp 1: $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = |m + 15| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -18 & (tm) \\ m = -12 & (l) \end{cases}$.

Trường hợp 2: $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = m - 5 = 3 \Leftrightarrow m = 8 \quad (tm)$.

Vậy $S = \{-18; 8\}$. Do đó chọn phương án A.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1) < -2, f(-2) - f(1) > 0$



Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + 2|$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là M, m .

Tổng $M + m$ bằng

A. $g(-2) + g(1)$.

B. $g(-2) + g(-1)$.

C. $|f(-1) + 2| + |f(1) + 2|$.

D. $|f(-1) + f(1) + 4|$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có BBT của hàm $y = f(x)$ như sau

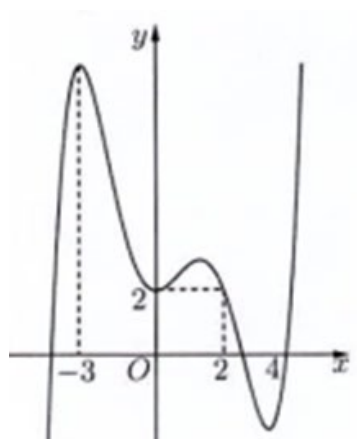
x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$y = f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		$+\infty$		
		$f(-2)$		$f(1)$			

ta có: $f(-1) < -2, f(-2) - f(1) > 0 \Rightarrow f(-2) > f(1) \Rightarrow -2 > f(-1) > f(-2) > f(1)$.

Từ đó $f(1) + 2 < f(-2) + 2 < f(-1) + 2 < 0$ hay $g(1) > g(-2) > g(-1)$.

DẠNG 6**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(x) + h(x)$**

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng



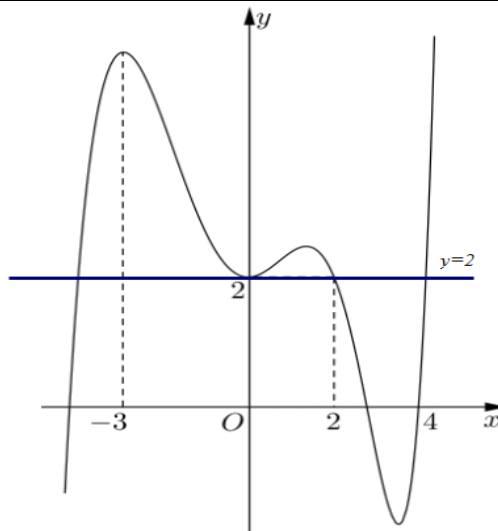
A. $f(0)$.

B. $f(-3) + 6$.

C. $f(2) - 4$.

D. $f(4) - 8$.

Lời giải**Chọn C.**



Ta có: $g'(x) = 2f'(2x) - 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x_1 < -3 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \\ 2x = x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -\frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x_2 > 2 \end{cases}$$

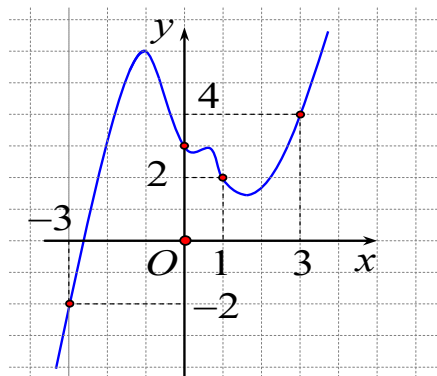
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	x_2	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên ta có: trên $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và

$$\max_{\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} y = f(2) - 4.$$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

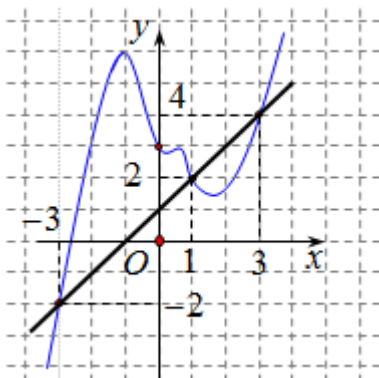
C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B.

$$g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 (*).$$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại ba điểm

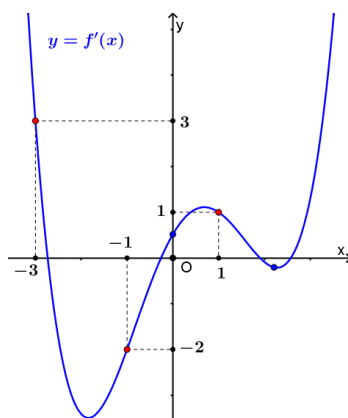
lần lượt có hoành độ là: $-3; 1; 3$. Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

t	-3		1		3
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\nearrow$		$\searrow$	
			$g(1)$		$g(3)$

Vậy $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2021$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3).$

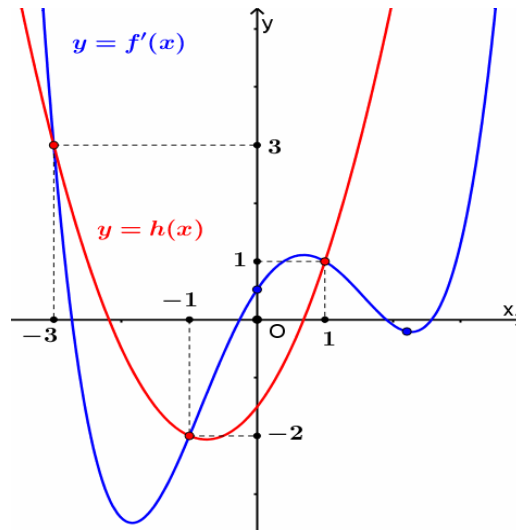
B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1).$

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1).$

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}.$

Lời giải

Chọn C.



• Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2};$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

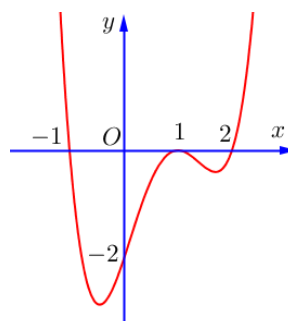
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			$g(-3)$		$g(-1)$		$g(1)$	

• Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1).$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(2) + \frac{2}{3}$.

B. $f(-1) + \frac{2}{3}$.

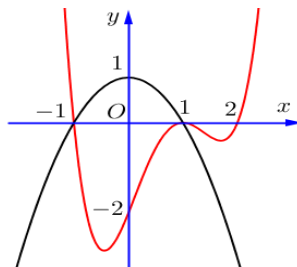
C. $\frac{2}{3}$.

D. $f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) + x^2 - 1$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

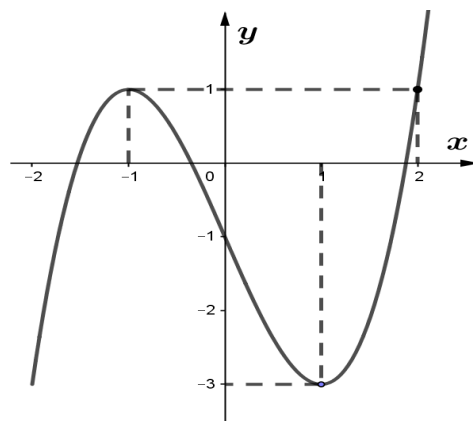
Bảng biến thiên

x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$

Từ BBT ta thấy $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(1) = f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2021$. Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$.

Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



A. $g(2)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-1)$.

D. $g(0)$.

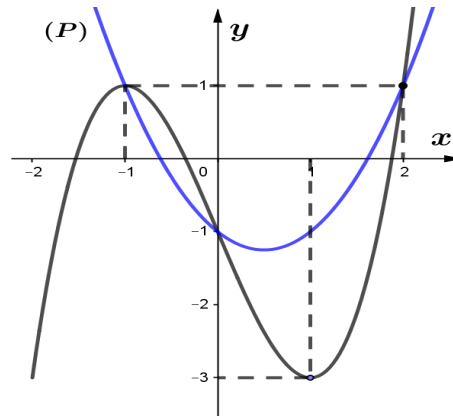
Hướng dẫn giải

Chọn A

+ Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2021$ trên đoạn $[-1; 2]$.

+ Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + x + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và Parabol $(P): y = x^2 - x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



+ Ta thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

+ Bảng biến thiên :

x	-1	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

+ Từ giả thiết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$

$$\Leftrightarrow g(-1) - g(2) > g(0) - g(1)$$

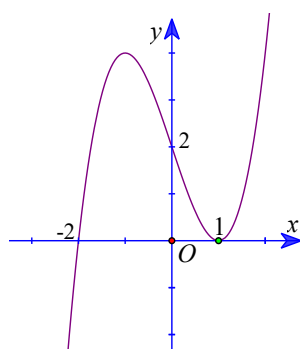
$$\Rightarrow g(-1) - g(2) > 0 \text{ (vì } g(0) > g(1))$$

$$\Leftrightarrow g(-1) > g(2).$$

Vậy $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(2)$.

DẠNG 7**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP** $y = f(u(x)); y = f(u(x)) + h(x)$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5; 3]$ bằng

**A.** $f(-2)$.**B.** $f(1)$.**C.** $f(-4)$.**D.** $f(2)$.**Lời giải****Chọn A.**

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -2 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < -2 \Leftrightarrow x < -4.$$

Bảng biến thiên

x	-5		-4		2		3
$g'(x)$		-	0	+	0	+	
$g(x)$							

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-5; 3]$ bằng $g(-4) = f(-2)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2017)$. C. $(-2017; 0)$. D. $(2017; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = f'(x+2017) + 2018 = 0$

Từ BXD của $f''(x)$ ta suy ra BBT của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-\infty$	3	-2018	$+\infty$	

Từ BBT ta có: $f'(x+2017) = -2018 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2017 = 2 \\ x+2017 = a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2015 \\ x_2 < -2017 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra BBT của hàm số $f'(x+2017) + 2018$ như sau:

Tính tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ lên trên 2018 đơn vị.

Tính tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang trái 2017 đơn vị.

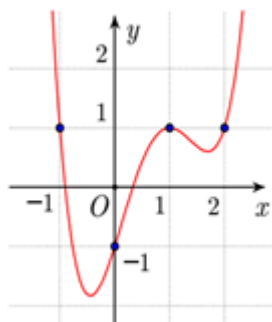
x	$-\infty$	x_2	-2017	-2015	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0
$f'(x+2017)+2018$	$-\infty$	2021	0	$+\infty$	

Suy ra BBT của hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$

x	$-\infty$	$x_2 < -2017$		-2015	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

Vậy hàm số đạt GTNN tại $x_2 < -2017$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = -f(2x-1) + 2x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng



A. $-f(1) + 2$.

B. $-f(-1)$.

C. $-f(2) + 3$.

D. $-f(3) + 4$.

Lời giải

Chọn C.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(2x-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \\ 2x-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

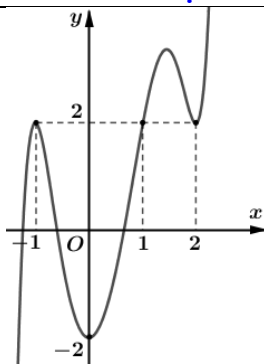
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < -1 \\ 2x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$g'(x)$	+	0	+	0
$g(x)$	$g(0)$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$		$g(2)$

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0; 2]$ bằng $g\left(\frac{3}{2}\right) = -f(2) + 3$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x+1) - 4x - 3$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ bằng



A. $f(0)$.

B. $f(-1)+1$.

C. $f(2)-5$.

D. $f(1)-3$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow t \in [-2; 3]$, xét hàm số $h(t) = f(t) - 2t - 1$ trên $[-2; 3]$.

$$\text{Ta có } h'(x) = f'(x) - 2, h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 2 \Leftrightarrow x \in (1; 3)$$

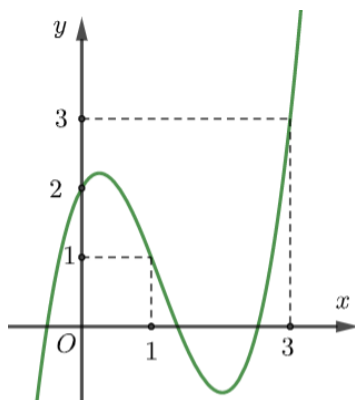
$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 1)$$

Ta có bảng biến thiên sau

t	-2	-1	1	2	3
$h'(t)$	-	0	-	0	+
$h(t)$					

Ta có $\min_{[-2;3]} h(t) = h(1) = f(1) - 3$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2; 4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

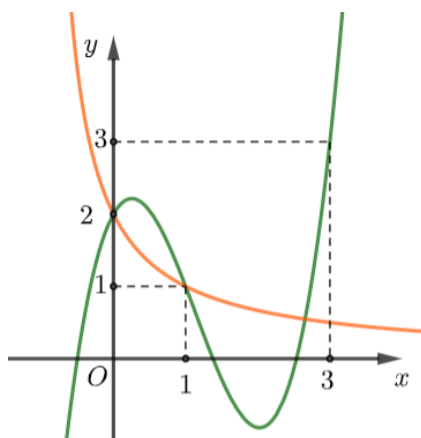
Chọn D.

Ta có $g'(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{2x+8}{x^2+8x+16} = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{2}{x+4}$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{4}{x+4}$.

Đặt $t = \frac{x}{2}+1 \Rightarrow t \in [0; 3]$

Phương trình trở thành $f'(t) = \frac{4}{2t+2} = \frac{2}{t+1}$.

Vẽ đồ thị $y = \frac{2}{x+1}$ lên cùng một hệ tọa độ ta được:Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = 1 \Rightarrow x = 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗ 0 ↘ 0 ↗ 0						

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

D. $f(1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g(x) = f(2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có $h(t) = f(t) + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = f'(t) - \frac{1}{2} \sin t$.

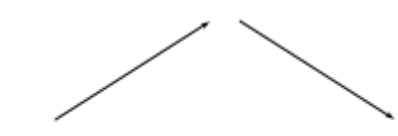
Từ bảng biến thiên ta thấy:

✓ Với $t \in (-2; 0)$ thì $f'(t) > 0$ và $\sin t < 0 \Rightarrow h'(t) > 0$.

✓ Với $t \in (0; 2)$ thì $f'(t) < 0$ và $\sin t > 0 \Rightarrow h'(t) < 0$.

✓ Với $t \in 0$ thì $f'(t) = 0$ và $\sin t = 0 \Rightarrow h'(t) = 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

t	-2	0	2
h'	+	0	-
h			

Vậy $\max_{[-1;1]} g(x) = \max_{[-2;2]} h(t) = h(0) = f(0)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn D.

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in [1; 3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

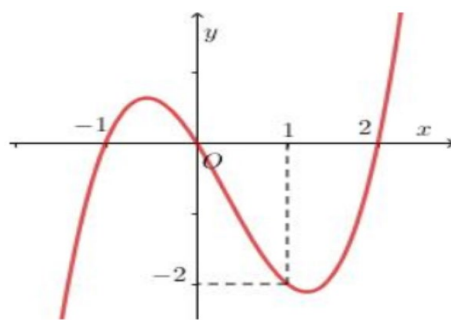
Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0$, $\forall x \in [1; 3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'	+	0	-
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$ bằng

A. $g(1)$.

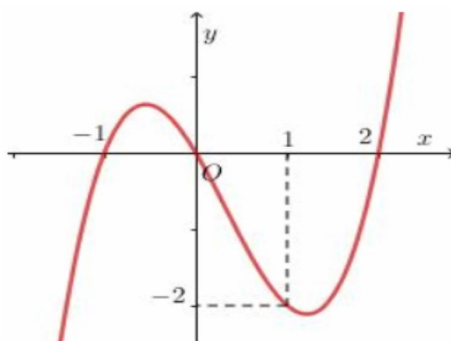
B. $g(-2)$.

C. $g(0)$.

D. $g(2)$.

Lời giải

Chọn C.



Xét $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2 \Rightarrow g'(x) = 6xf'(x^2 - 2) - 6x^3 - 6x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = x^2 + 1(*) \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 - 2, x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [-2; 0]$,

Pt (*) có dạng $f'(t) = t + 3(1)$

Pt (1) không có nghiệm $t \in [0; 2]$

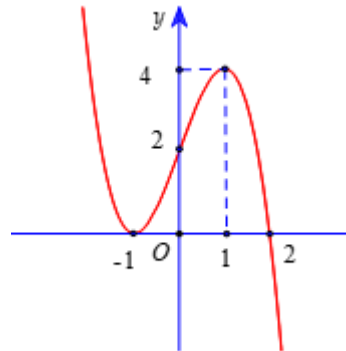
Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-2	0	2
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗ $g(0)$ ↘		

Suy ra $\max_{[-2; 2]} g(x) = g(0)$.

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = [f(x)]^k$; $y = [f(u(x))]^k$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{1573}{64}$

B. 198.

C. $\frac{37}{4}$.

D. $\frac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$		
			6

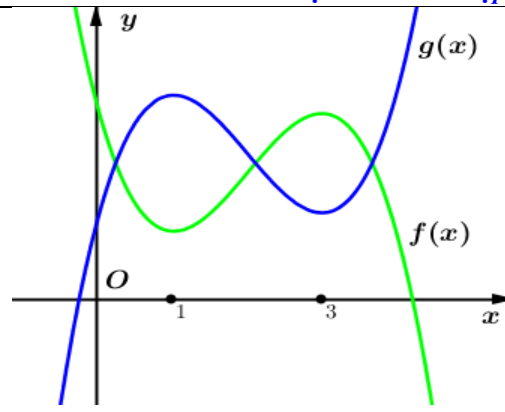
Ta có $g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) - 3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1; 2]$ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$g(-1) = \frac{1573}{64}, \quad g(2) = 198.$$

Từ đó suy ra $\max_{[-1; 2]} g(x) = 198, \min_{[-1; 2]} g(x) = \frac{1573}{64}$. Vậy $\max_{[-1; 2]} g(x) + \min_{[-1; 2]} g(x) = \frac{14245}{64}$.

Câu 29. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,



biết rằng $x=1$ và $x=3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đồng thời $3f(1)=g(3)+1$, $2f(3)=g(1)+4$, $f(-2x+7)=g(2x-3)-1$ (*). Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ của hàm số $S(x)=f(x)g(x)-g^2(x)+f(x)-4g(x)+2$. Tính tổng $P=M-2m$.

A. 39.

B. 107.

C. 19. D. 51.

Lời giải**Chọn B.**

Thay lần lượt $x=2$, $x=3$ vào (*) ta có

$$\begin{cases} f(3)=g(1)-1 \\ f(1)=g(3)-1 \end{cases}, \text{ mà } \begin{cases} 3f(1)=g(3)+1 \\ 2f(3)=g(1)+4 \end{cases} \text{ nên } f(1)=1, f(3)=5, g(1)=6, g(3)=2.$$

Nhìn vào đồ thị ta thấy $1=f(1) \leq f(x) \leq f(3)=5$, $2=g(3) \leq g(x) \leq g(1)=6 \forall x \in [1;3]$.

Đặt $u=f(x)$, $v=g(x)$ với $1 \leq u \leq 5$, $2 \leq v \leq 6$, xét

$$h(u,v)=uv-v^2+u-4v+2=-v^2+(u-4)v+u+2.$$

Xem $h(u,v)$ là một hàm số bậc 2 theo biến v ta có

$$h'(u,v)=-2v+u-4 \leq -4+5-4=-3 < 0 \quad \forall v \in (2;6) \Rightarrow h(u,v) \text{ nghịch biến trên } [2;6].$$

Suy ra

$$h(u,6) \leq h(u,v) \leq h(u,2) \Rightarrow 7u-58 \leq h(u,v) \leq 3u-10$$

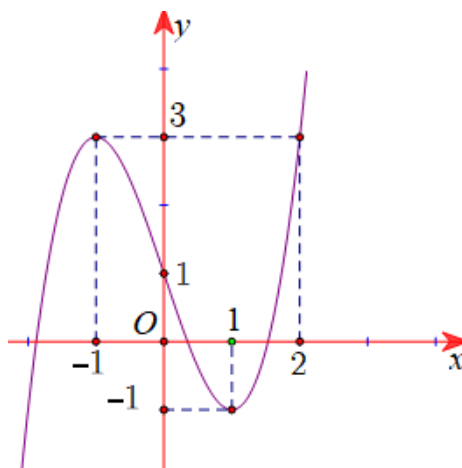
$$\Rightarrow -51 \leq h(u,v) \leq 5 \text{ (do } 1 \leq u \leq 5).$$

Từ đó $M=\max_{[1;3]} S(x)=5$, dấu bằng xảy ra khi $x=3$, $m=\min_{[1;3]} S(x)=-51$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Vậy $P=M-2m=107$.

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG**BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$**

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Giá trị m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$ bằng

A. $m = -13$.

B. $m = 5$.

C. $m = 3$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $u(x) = 2x^3 + x - 1 \Rightarrow u'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ hàm số $u(x) = 2x^3 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét $x \in [0;1]$ ta có: $u(x) \in [u(0); u(1)] \Rightarrow u(x) \in [-1; 2]$.

Từ đồ thị suy ra $\max_{[-1;2]} f(u) = f(-1) = f(2) = 3$.

$\Rightarrow \max_{[0;1]} f(2x^3 + x - 1) = 3 \Rightarrow \max_{[0;1]} g(x) = 3 + m$. Từ giả thiết $\Rightarrow 3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = x^3 + x, x \in [0;2]$.

$t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0;2]$, suy ra $0 \leq t \leq 10$.

Ta có $\max_{x \in [0;2]} g(x) = \max_{x \in [0;2]} [f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m] \leq \max_{x \in [0;2]} f(x^3 + x) + \max_{x \in [0;2]} (-x^2 + 2x + m)$.

Mà $\max_{x \in [0;2]} f(x^3 + x) = \max_{t \in [0;10]} f(t) = 4$.

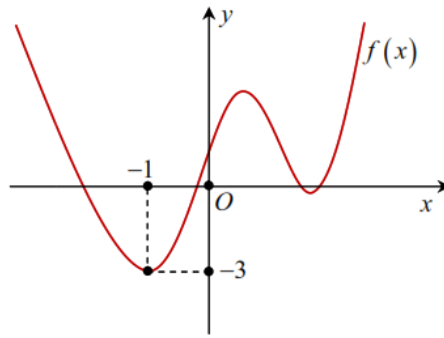
$$\max_{x \in [0;2]} (-x^2 + 2x + m) = 1 + m.$$

$$\text{Suy ra } \max_{x \in [0;2]} g(x) \leq 4 + 1 + m = m + 5.$$

$$\max_{x \in [0;2]} g(x) = m + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^3 + x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Theo giả thiết } \max_{x \in [0;2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 32. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m là tham số thực, để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x+3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng



A. -1.

B. 0.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

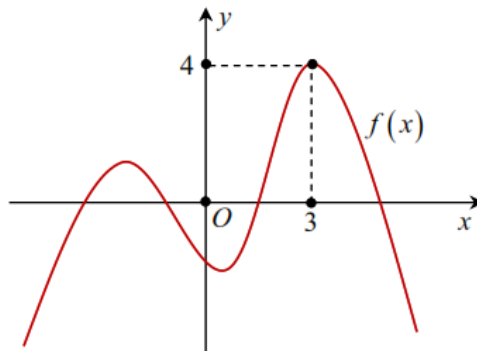
Chọn A.

Nhận thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \geq -3 + 0 - 1 = -4$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x-2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 33. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m và n là hai tham số thực. Để hàm số $g(x) = 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $P = 2m - n$ bằng:



A. 3.

B. 0.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

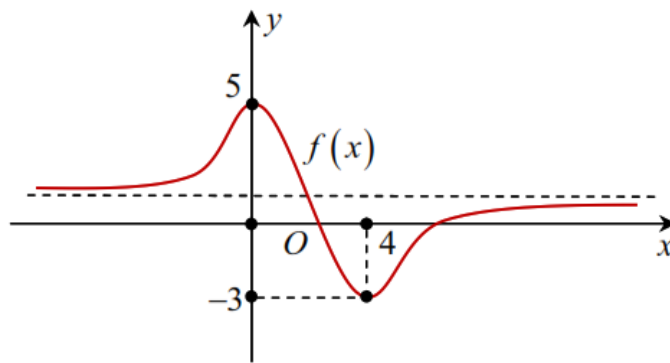
Nhận thấy $\max f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow f(x) \leq f(3) = 4, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3x-m) \leq f(3) = 4 \\ f(x+n) \leq f(3) = 4 \\ -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x \leq 3 \cdot 4 + 4 + 4 = 20.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 3x-m=3 \\ x+n=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m=3 \\ 2+n=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow P = 2m - n = 5.$$

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m là tham số thực. Để hàm số $g(x) = 2f(2x-m) - f(3x+n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T = 2m + 3n$ bằng:



A. -11.

B. -7.

C. -13.

D. 5.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Nhận thấy } -3 = f(4) \leq f(x) \leq f(0) + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(4) = -3 \\ -f(x) \geq -f(0) = -5 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 2f(2x-m) - f(3x+n) + x^2 - 2x = 2f(2x-m) - f(3x+n) + (x-1)^2 - 1.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2x-m) \geq f(4) = -3 \\ -f(3x+n) \geq f(0) = -5 \Rightarrow g(x) \geq 2 \cdot (-3) - 5 + 0 - 1 = -12. \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-m=4 \\ 3x+n=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m=4 \\ 3+n=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=-3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow T = 2m + 3n = -13.$$

CHỦ ĐỀ 6

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA BIỂU THỨC

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 1; x + y = 3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng:

- A. 20 và 18. B. 20 và 15. C. 18 và 15. D. 15 và 13.

Câu 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là:

- A. $M = \frac{25}{2}; m = \frac{191}{16}$. B. $M = 12; m = \frac{191}{16}$.
C. $M = \frac{25}{2}; m = 12$. D. $M = \frac{25}{2}; m = 0$.

Câu 3. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$ là:

- A. $m = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$. B. $m = 16$. C. $m = 398$. D. $m = 0$.

Câu 4. Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là:

- A. $M = 0$. B. $M = 0$. C. $M = 1$. D. $M = 16$.

Câu 5. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ là:

- A. $m = -10$. B. $m = \frac{85}{4}$. C. $m = \frac{-23}{4}$. D. $m = 0$.

Câu 6. Cho hai số thực dương thỏa mãn $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$.

Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức: $P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$

- A. $m = 0$. B. $m = \frac{85}{4}$. C. $m = -10$. D. $m = \frac{7}{8}$.

Câu 7. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M + m$

- A. 42 B. 41 C. 43 D. 44

Câu 8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x^2 + y^2$.

A. $\frac{153}{100}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{2313}{1156}$.

D. $\frac{25}{16}$.

Câu 9. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1, x + y + z = 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. 5.

B. 43.

C. 9.

D. 6.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$.

B. $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$.

C. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

D. $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$.

Câu 11. Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

Câu 12. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Gọi

M, m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q = f\left(\frac{5x - y + 2}{x + y + 4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng:

A. $-4 - 3\sqrt{2}$.

B. $-4 - 5\sqrt{2}$.

C. $-4 - 4\sqrt{2}$.

D. $-4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 13. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x - 2} + \sqrt{y + 3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$M = 3^{x+y-4} + (x + y + 1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ bằng

A. $-\frac{9476}{243}$.

B. -76.

C. $\frac{193}{3}$.

D. $\frac{148}{3}$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$

A. $\sqrt{2} - 1$.

B. $2\sqrt{2} + 1$.

C. $\sqrt{2} + 1$.

D. $2\sqrt{2} - 1$.

Câu 15. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

A. $\frac{296\sqrt{15} - 18}{9}$.

B. $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$.

C. $\frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{-4\sqrt{6} + 18}{9}$.

Câu 16. Cho $x, y > 0$ và $x + y = \frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}$.

B. $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$.

C. $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$.

D. $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}$.

Câu 17. Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \leq 1-x-\frac{1}{y}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$?

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$. B. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$. D. $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$.

Câu 18. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng:

- A. 20. B. 25. C. 15. D. 35.

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

- A. $M=2, m=\frac{1}{2^{1008}}$. B. $M=1, m=\frac{1}{2^{1009}}$. C. $M=1, m=0$. D. $M=1, m=\frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 20. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(x^2+y^2)+15xy$.

- A. $\min P=-80$. B. $\min P=-91$. C. $\min P=-83$. D. $\min P=-63$.

Câu 21. Biết rằng bất phương trình $m(|x|+\sqrt{1-x^2}+1) \leq 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; a\sqrt{2}+b]$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

- A. $T=3$. B. $T=2$. C. $T=0$. D. $T=1$.

Câu 22. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2+y^2)+xy=(x+y)(xy+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

- A. $-\frac{25}{4}$. B. 5. C. $-\frac{23}{4}$. D. -13.

Câu 23. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x+y=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}.$$

- A. $P_{\min} = \frac{34}{5}$. B. $P_{\min} = \frac{65}{4}$. C. $P_{\min}$ không tồn tại. D. $P_{\min} = 5$.

Câu 24. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3(2y^2+1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+2y$.

- A. $P=10$ B. $P=4$. C. $P=6$. D. $P=8$.

Câu 25. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn

nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$

A. 8.

B. 0.

C. 12.

D. 4.

CHỦ ĐỀ 6**TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA BIỂU THỨC**

Câu 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 1; x + y = 3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng:

- A. 20 và 18. B. 20 và 15. C. 18 và 15. D. 15 và 13.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y = 3 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in [0; 2]$

Khi đó $P = x^3 + 2(3 - x)^2 + 3x^2 + 4x(3 - x) - 5x = x^3 + x^2 - 5x + 18$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 18$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(0) = 18, f(1) = 15, f(2) = 20$$

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng 20 và 15.

Câu 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là:

- A. $M = \frac{25}{2}; m = \frac{191}{16}$. B. $M = 12; m = \frac{191}{16}$.
C. $M = \frac{25}{2}; m = 12$. D. $M = \frac{25}{2}; m = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Do $x + y = 1$ nên $S = 16x^2y^2 + 12(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 34xy$

$$= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^2 - 3xy] + 34xy, \text{ do } x + y = 1 = 16x^2y^2 - 2xy + 12$$

Đặt $t = xy$. Do $x \geq 0; y \geq 0$ nên $0 \leq xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in [0; \frac{1}{4}]$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên $[0; \frac{1}{4}]$. Ta có $f'(t) = 32t - 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	12		$\frac{191}{16}$	$\frac{25}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có:

$$\min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}; \quad \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{25}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{191}{16}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \\ (x; y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$

Câu 3. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$ là :

A. $m = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$.

B. $m = 16$.

C. $m = 398$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2) = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \Rightarrow K \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$$

Đặt $t = x+y$. Do $0 \leq x+y \leq 8$ nên $t \in [0; 8]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên $[0; 8]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

$$f(0) = 6; f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}; f(8) = 398. \text{ Suy ra } A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$$

Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Câu 4. Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị

lớn nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là:

A. $M = 0$.

B. $M = 0$.

C. $M = 1$.

D. $M = 16$.

Lời giải

Chọn D.

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3} = \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2.$$

Đặt $x = ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow (t+1)ty^3 = (t^2 - t + 1)y^2$

$$\text{Do đó } y = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t}; x = ty = \frac{t^2 - t + 1}{t + 1}. \text{ Từ đó } A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 = \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} \right)^2.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-3t^2 + 3}{(t^2 - t + 1)^2}.$$

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 5. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất

m của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ là:

A. $m = -10$.

B. $m = \frac{85}{4}$.

C. $m = \frac{-23}{4}$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn C.

Với a, b là các số thực dương, ta có:

$$2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) + ab = a^2b + ab^2 + 2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$(a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$$

$$\text{Suy ra: } 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{5}{2}.$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, $t \geq \frac{5}{2}$. Ta được: $P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$.

Xét hàm số: $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ với $t \geq \frac{5}{2}$

$$f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0, \forall t \geq \frac{5}{2}. \text{ Suy ra } \min_{\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}.$$

$$\text{Vậy } \min P = -\frac{23}{4} \text{ đạt được khi và chỉ khi } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \text{ và } a + b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a; b) = (2; 1) \text{ hoặc } (a; b) = (1; 2)$$

Câu 6. Cho hai số thực dương thỏa mãn $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$.

$$\text{Giá trị nhỏ nhất } m \text{ của biểu thức: } P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

A. $m = 0$. B. $m = \frac{85}{4}$. C. $m = -10$. D. $m = \frac{7}{8}$.

Lời giải

Chọn D.

Do $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$ nên $(x-1)(x-2) \leq 0$, nghĩa là $x^2 + 2 \leq 3x$. Tương tự $y^2 + 2 \leq 3y$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3y+3x+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

$$\text{Đặt } t = x + y \text{ suy ra } 2 \leq t \leq 4. \text{ Xét } f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}, \text{ với } 2 \leq t \leq 4$$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{Mà } f(2) = \frac{11}{12}; f(3) = \frac{7}{8}; f(4) = \frac{53}{60} \text{ nên } f(t) \geq f(3) = \frac{7}{8}. \text{ Do đó } P \geq \frac{7}{8}$$

$$\text{Khi } x = 1, y = 2 \text{ thì } P = \frac{7}{8}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{7}{8}$$

Câu 7. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M + m$

A. 42 B. 41 C. 43 D. 44

Lời giải

Chọn C.

$$(x+y)^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{y+1})^2 \leq 3(x+y) \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 3$$

$$P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4-(x+y)}, t \in [1; 2].$$

$$\text{Ta có: } f(t) = (4-t^2)^2 + 2(4-t^2) + 2 + 8t = t^4 - 10t^2 + 8t + 26.$$

$$f'(t) = 4t^3 - 20t + 8$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in [1; 2] \\ t = -1 + \sqrt{2} \notin [1; 2] \\ t = -1 - \sqrt{2} \notin [1; 2] \end{cases}$$

$$f(1) = 25; f(2) = 18.$$

$$\text{Suy ra } m = \min_{[1;2]} f(t) = f(2) = 18; M = \max_{[1;2]} f(t) = f(1) = 25.$$

$$\text{Vậy } M + m = 43.$$

Câu 8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x^2 + y^2$.

A. $\frac{153}{100}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{2313}{1156}$.

D. $\frac{25}{16}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ $x + y = \frac{3}{2}$ suy ra $y = \frac{3}{2} - x$. Ta có: $0 < x, y < \frac{3}{2}$.

Xét hàm $P(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{4\left(\frac{3}{2} - x\right)} = \frac{4}{x} + \frac{1}{6 - 4x}$ trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$, ta có:

$$P'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{-4}{(6 - 4x)^2}.$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(6 - 4x)^2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = (6 - 4x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 4x \\ x = 4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $P(x)$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$:

x	0		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$
$P'(x)$		-	0	+	
$P(x)$	$+\infty$	↘		↗	
			$\frac{25}{6}$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{\left(0; \frac{3}{2}\right)} P(x) = \frac{25}{6}$ khi $x = \frac{6}{5}$.

Với $x = \frac{6}{5}$ thì $y = \frac{3}{10}$.

Như vậy $\min P = \frac{25}{6}$ khi $x = \frac{6}{5}, y = \frac{3}{10}$.

Khi đó, $x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

Câu 9. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1, x + y + z = 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. 5.

B. 43.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $P = xyz \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot z = \left(\frac{2-z}{2}\right)^2 \cdot z = \frac{1}{4}(4z - 4z^2 + z^3)$.

Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{4}(4z - 4z^2 + z^3)$ trên $[1; 2]$.

Ta có: $f'(z) = \frac{1}{4}(4 - 8z + 3z^2); f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{3} \text{ (loại)} \\ z = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

z	1	2
$f'(z)$		-
$f(z)$	$\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P \leq \frac{1}{4}$.

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} z = 1 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 4 \Rightarrow 2a + b = 6$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$.B. $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$.C. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.D. $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ (1)

Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm. Với $x \neq 0$ phương trình trở thành

$$(1) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2 = (ax^2 + bx + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}$$

$$t = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t \geq 2 \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{t+1}, \forall t \geq 2 \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \geq 2$$

Bảng biến thiên

Vậy để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$

Câu 11. Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Xét } \frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

+nếu $y = 0$ thì $x^2 = 2$. Do đó $P = x^2 = 2$ suy ra $\min P = 2$

+nếu $y \neq 0$ ta chia tử mẫu cho y^2 ta được

$$\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1 + \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, \text{ khi đó } \frac{P}{2} = \frac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{1+t+t^2}{1-t+t^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2+2}{(1-t+t^2)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Khi đó $\min \frac{P}{2} = \frac{1}{3}$ do đó $\min P = \frac{2}{3}$.

Câu 12. Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$ và hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Gọi

M, m tương ứng là GTLN và GTNN của $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M + m$ bằng:

- A. $-4 - 3\sqrt{2}$. B. $-4 - 5\sqrt{2}$. C. $-4 - 4\sqrt{2}$. D. $-4 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = \frac{5x-y+2}{x+y+4}$. Theo giả thiết, $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x+y)^2 = 1$

$$\text{nên ta đặt } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-y) \\ \sin \varphi = \frac{1}{2}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \\ x+y = 2 \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi + \sin \varphi \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi + \sin \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$\text{Khi đó, } t = \frac{2\sqrt{3} \cos \varphi + 4 \sin \varphi + 2}{2 \sin \varphi + 4} \Leftrightarrow (t-2) \cdot \sin \varphi - \sqrt{3} \cdot \cos \varphi = 1 - 2t \quad (1).$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm } \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-\sqrt{3})^2 \geq (1-2t)^2 \Leftrightarrow 3t^2 - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Xét hàm số } Q = f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6t. \text{ Cho } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \\ t = 1 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}.$$

$$f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2}; f(0) = 1; f(1) = 0; f(\sqrt{2}) = -5 + 4\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \max Q = \max_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = f(0) = 1 \\ m = \min Q = \min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = f(-\sqrt{2}) = -5 - 4\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } M + m = -4 - 4\sqrt{2}.$$

Câu 13. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{9476}{243}$. B. -76 . C. $\frac{193}{3}$. D. $\frac{148}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện } x \geq 2; y \geq -3.$$

$$x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}). (*)$$

$$\text{Vì } 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1 \text{ nên từ (*) suy ra } (x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1) \Leftrightarrow x+y \leq 7.$$

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0$ nên từ (*) suy ra

$$(x+y+1)^2 \geq 4(x+y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3 \end{cases}.$$

Do $x \geq 2$ nên $x^2 \geq 2x$, $y^2 + 1 \geq 2y$, suy ra $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(x+y)$. Từ đó ta có

$$M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3.$$

Đặt $t = x+y$ với $t = -1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$, ta có $f(-1) = \frac{2188}{243}$.

$$f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1).2^{7-t} \ln 2 - 6.$$

$$f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1) \ln 2 - 2] 2^{7-t} \ln 2 > 0, \forall t \in [3; 7].$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$, mà $f'(t)$ liên tục trên $[3; 7]$ và $f'(3).f'(7) < 0$ nên phương trình

$f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3; 7)$.

t	3	t_0	7
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4

Suy ra $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1).2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq \frac{148}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 1$.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$

A. $\sqrt{2} - 1$.

B. $2\sqrt{2} + 1$.

C. $\sqrt{2} + 1$.

D. $2\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| = \left| \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \right|$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \setminus \{1\}, \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Suy ra $y = \left| t + \frac{1+t}{\frac{t^2-1}{2}} \right| = \left| t + \frac{2}{t-1} \right|$.

Xét hàm số $g(t) = t + \frac{2}{t-1}, g'(t) = 1 - \frac{2}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2 - 2}{(t-1)^2}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1(t) \\ t = -\sqrt{2} + 1(t/m) \end{cases}$.

$$g(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 2 > 0, \quad g(-\sqrt{2}) < 0, \quad g(-\sqrt{2} + 1) = -2\sqrt{2} + 1 < 0$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}+1$	1	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$ 0 $-$		$-$
$g(t)$	$g(-\sqrt{2})$	$g(-\sqrt{2}+1)$	$+\infty$	$g(\sqrt{2})$
$y= g(t) $	$ g(-\sqrt{2}) $	$ g(-\sqrt{2}+1) $	$+\infty$	$ g(\sqrt{2}) $

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y_{\min} = \left| y(-\sqrt{2} + 1) \right| = 2\sqrt{2} - 1$.

Câu 15. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

A. $\frac{296\sqrt{15} - 18}{9}$.

B. $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$.

C. $\frac{36 - 4\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{-4\sqrt{6} + 18}{9}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 6x = (3xy - 5)\sqrt{3xy - 5} + 2\sqrt{3xy - 5}.$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 2t$ với $t \in (0; +\infty)$

có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó ta có $3x = \sqrt{3xy - 5} \Rightarrow x \geq 0$ và $9x^2 = 3xy - 5$.

Với $x = 0$ thì $0 = -5$.

với $x > 0$ thì $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2 + 3)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2)$$

$$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x + y) + 4$$

$$= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4$$

$$\text{Mà } x+y = x + \frac{9x^2+5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{5}{3x}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Đặt } t = x+y \text{ thì } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét } f(t) = t^3 - 2t + 4 \text{ với } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Khi đó } f'(t) = 3t^2 - 2 > 0 \text{ với } \forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } f(t) \geq f\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ là } \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}.$$

Câu 16. Cho $x, y > 0$ và $x + y = \frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}.$

B. $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}.$

C. $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}.$

D. $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}.$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Từ } x+y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} - x, \text{ nên } P = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}.$$

$$\text{Xét hàm số } P = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x} \text{ với } 0 < x < \frac{5}{4}.$$

$$P' = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(5-4x)^2}; P' = 0 \Leftrightarrow x^2 = (5-4x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left(0; \frac{5}{4}\right) \\ x = \frac{5}{3} \notin \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$\frac{5}{4}$	
P'		-	0	+
P				

5

Như vậy: $\min P = 5$ khi $x = 1; y = \frac{1}{4}.$

$$\text{Khi đó } x^2 + y^2 = \frac{17}{16}.$$

Câu 17. Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \leq 1-x-\frac{1}{y}.$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}?$$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$.

B. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$.

D. $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$.

Lời giải

Chọn C.

$$(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) \leq 1-x-\frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow y(xy+1)(\sqrt{xy+1}-\sqrt{y}) + (\sqrt{xy+1}^2 - \sqrt{y}^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy+1}-\sqrt{y})[y(xy+1) + (\sqrt{xy+1} + \sqrt{y})] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy+1}-\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow xy+1 \leq y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4}. \text{ Dấu bằng đạt được khi } y=2, x=\frac{1}{2}.$$

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} - \frac{t-2}{6(t+1)} \text{ với } t = \frac{x}{y} \text{ và } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Ta có } \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) \text{ với mọi } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$$

$$\text{Thật vậy } \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}} \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) \Leftrightarrow -\frac{1}{729} \frac{(4t-1)^2(20t^2+25t+6)}{t^2-t+3} \leq 0 \text{ với mọi } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

$$P \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t).$$

$$\text{Khi đó } f'(t) = \frac{1}{54} \cdot \frac{16\sqrt{5}t^2 + 32\sqrt{5}t + 16\sqrt{5} - 27}{(t+1)^2} > 0 \text{ với mọi } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}, \text{ dấu bằng đạt được khi } x=\frac{1}{2}, y=2.$$

Câu 18. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bằng:

A. 20.

B. 25.

C. 15.

D. 35.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ xy=5-z(x+y)=5-4z+z^2 \end{cases}.$$

$$\text{Lại có: } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (4-z)^2 \geq 4(5-4z+z^2) \Rightarrow \frac{2}{3} \leq z \leq 2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x=y.$$

$$\text{Và } (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(x+y)z + 3xy(x+y)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 4^3 - 12(x+y)z - 3xy(x+y) = 64 - 3(4-z)(5+z^2).$$

$$\text{Ta có: } P = (x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = (3z^3 - 12z^2 + 15z + 4) \left(\frac{5}{z^3 - 4z^2 + 5z} \right).$$

$$\text{Đặt } t = z^3 - 4z^2 + 5z, \text{ với } \frac{2}{3} \leq z \leq 2 \Rightarrow \frac{50}{27} \leq t \leq 2.$$

$$\text{Do đó xét hàm số } f(t) = 5 \left(\frac{4}{t} + 3 \right), \text{ với } \frac{50}{27} \leq t \leq 2.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-20}{t^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{50}{27}; 2 \right] \text{ nên hàm số } f(t) \text{ liên tục và nghịch biến.}$$

$$\text{Do đó } P_{\min} = f(2) = 25 \text{ đạt tại } x = y = 1, z = 2.$$

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\text{A. } M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}. \quad \text{B. } M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}. \quad \text{C. } M = 1, m = 0. \quad \text{D. } M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}.$$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x = (\sin^2 x)^{1009} + (1 - \sin^2 x)^{1009}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1 \text{ thì hàm số đã cho trở thành } y = t^{1009} + (1-t)^{1009}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^{1009} + (1-t)^{1009} \text{ trên đoạn } [0; 1].$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 1009t^{1008} - 1009(1-t)^{1008}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1009t^{1008} - 1009(1-t)^{1008} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-t}{t} \right)^{1008} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mà } f(1) = f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;1]} f(t) = f(0) = f(1) = 1, \min_{[0;1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}$$

$$\text{Vậy } M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}.$$

Câu 20. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = 4(x^2 + y^2) + 15xy.$$

$$\text{A. } \min P = -80. \quad \text{B. } \min P = -91. \quad \text{C. } \min P = -83. \quad \text{D. } \min P = -63.$$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq -3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \quad (1).$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được:

$$x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $x + y \in [4; 8]$

$$\text{Ta lại có } (x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9.$$

$$\text{Đặt } t = x + y \text{ suy ra } P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy \geq 4t^2 - 21t - 63.$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$, với $t \in [4; 8]$

$$\text{Ta có } f'(t) = 8t - 21 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{21}{8} \notin [4; 8]. \text{ Do đó } \min_{[4; 8]} f(t) = f(4) = -83.$$

$$\text{Do đó } P \geq -83 \text{ suy ra } \min P = -83 \text{ khi } \begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}.$$

Câu 21. Biết rằng bất phương trình $m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T = a + b$.

A. $T = 3$.

B. $T = 2$.

C. $T = 0$.

D. $T = 1$.

Lời giải**Chọn D.**

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) &\leq 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2 \\ \Leftrightarrow m(\sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1) &\leq 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{x^2-x^4} = t^2 - 1 \end{cases}. \text{ Khi đó, bất phương trình trở thành:}$$

$$m(t+1) \leq t^2 + t + 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + t + 1}{t+1} \text{ (vì } t \in [1; 2] \text{ nên } t+1 > 0).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t+1} \text{ trên } [1; \sqrt{2}].$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{t+1} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{2}] \text{ suy ra hàm số đồng biến trên } [1; \sqrt{2}].$$

$$\min_{[1; \sqrt{2}]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}; \max_{[1; \sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2}.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$$m \leq \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \text{ có nghiệm } t \in [1; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m \leq \max_{[1; \sqrt{2}]} f(t) \Leftrightarrow m \leq -1 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1 \Rightarrow a + b = 1.$$

Câu 22. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

A. $-\frac{25}{4}$.

B. 5.

C. $-\frac{23}{4}$.

D. -13.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } 2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2) \geq (x + y)2\sqrt{2xy}.$$

$$\text{Đặt } a = x^2 + y^2; b = xy \text{ ta được: } (2a + b)^2 \geq 8b(a + 2b) \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab - 15b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{5}{2}. \text{ Suy ra: } \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{5}{2}.$$

Ta có:

$$P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 = f(t) \text{ với } t \geq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Khảo sát hàm số } f(t) \text{ với } t \geq \frac{5}{2} \text{ ta được } f(t) \geq -\frac{23}{4}. \text{ Vậy chọn C}$$

Câu 23. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}.$$

A. $P_{\min} = \frac{34}{5}$.

B. $P_{\min} = \frac{65}{4}$.

C. $P_{\min}$ không tồn tại.

D. $P_{\min} = 5$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Từ giả thiết ta có } y = \frac{5}{4} - 2x. \text{ Vì } y > 0 \text{ nên } \frac{5}{4} - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{8}. \text{ Do đó } 0 < x < \frac{5}{8}.$$

$$\text{Ta có } P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4\left(\frac{5}{4} - 2x\right)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{5 - 8x} = \frac{10 - 15x}{-8x^2 + 5x} \text{ với } 0 < x < \frac{5}{8}.$$

$$P' = \frac{-15(-8x^2 + 5x) - (-16x + 5)(10 - 15x)}{(-8x^2 + 5x)^2} = \frac{120x^2 - 75x - (-160x + 240x^2 + 50 - 75x)}{(-8x^2 + 5x)^2}$$

$$P' = \frac{-120x^2 + 160x - 50}{(-8x^2 + 5x)^2}. \text{ Có } P' = 0 \Rightarrow -120x^2 + 160x - 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \notin \left(0; \frac{5}{8}\right) \\ x = \frac{1}{2} \in \left(0; \frac{5}{8}\right) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$		
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		5		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min} = 5$.

Câu 24. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

A. $P = 10$

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn B.

$$2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1).$$

$$\Leftrightarrow 2(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + (y - 1) = 2(1-x)\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x}.$$

$$\Leftrightarrow 2(y-1)^3 + (y-1) = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$ với $\forall t \geq 0 \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow y-1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1-x}.$$

$$\Rightarrow P = x + 2y = x + 2 + 2\sqrt{1-x} \text{ với } (x \leq 1).$$

Xét hàm số $g(x) = 2 + x + 2\sqrt{1-x}$ trên $(-\infty; 1]$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}. \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên $g(x)$:

x	$-\infty$	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		4	

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ suy ra giá trị lớn nhất của P là: $\max_{(-\infty; 1]} g(x) = 4$.

Câu 25. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn

nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$

A. 8.

B. 0.

C. 12.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Theo giả thiết ta có $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x}$

Từ bất phương trình $2x + 3y - 14 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2 - 4x + 9}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{5}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} x^2 = xy - 3 \\ xy = x^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = x^2y - 3x \\ xy^2 = x^2y + 3y \end{cases}$

Thay vào ta được $P = -3y + 8x = -3\left(\frac{x^2 + 3}{x}\right) + 8x = 5x - \frac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 5x - \frac{9}{x}$ trên đoạn $\left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Ta có $f'(x) = 5 + \frac{9}{x^2} \geq 0, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$ do đó $\min_{\left[1; \frac{9}{5}\right]} = f(1) = -4$ và $\max_{\left[1; \frac{9}{5}\right]} = f\left(\frac{9}{5}\right) = 4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.