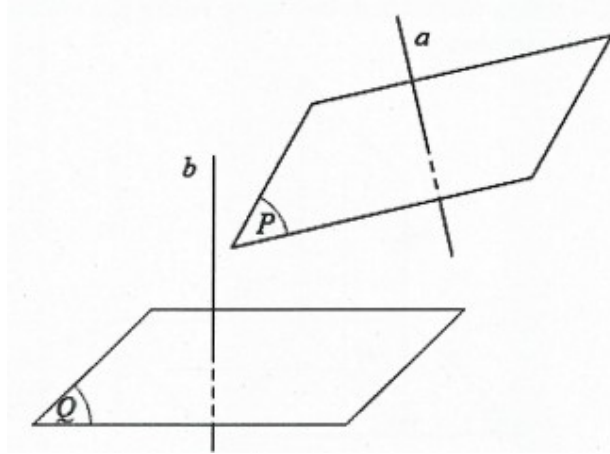


CHỦ ĐỀ HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Góc giữa hai mặt phẳng

a) **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



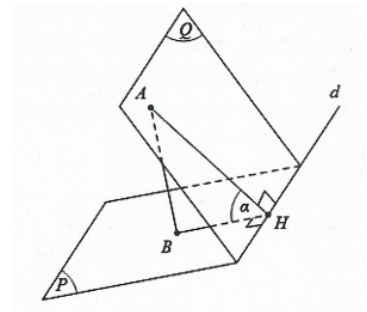
b) Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng:

Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) ; (Q) .

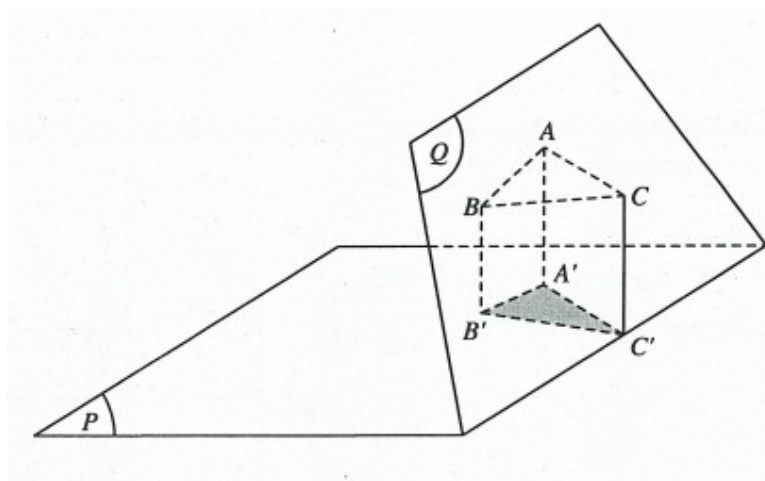
Lấy $A \in mp(Q)$, dựng $AB \perp mp(P)$ ($B \in (P)$).

Vẽ BH vuông góc với d thì AH vuông góc với d .

Vậy $\widehat{AHB} = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .



c) Công thức diện tích hình chiếu:



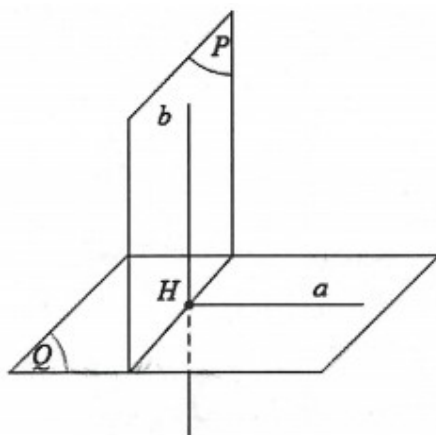
Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S \cos \varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .

Hay như hình vẽ trên ta có $S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$

2) Hai mặt phẳng vuông góc

a) **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

b) **Định lý 1:** Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

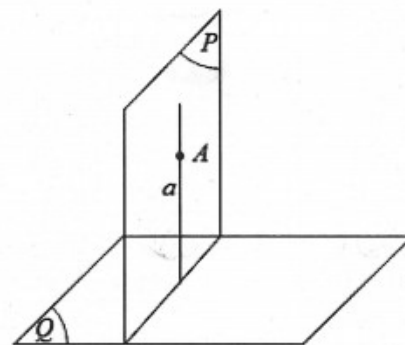


c) **Định lý 2:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .

- **Hệ quả 1:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .

Hệ quả 1 được viết gọn là:

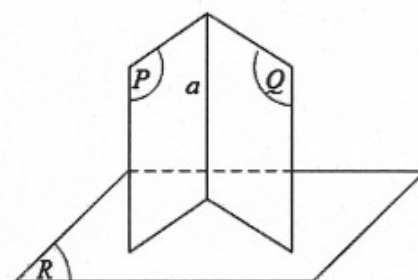
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$



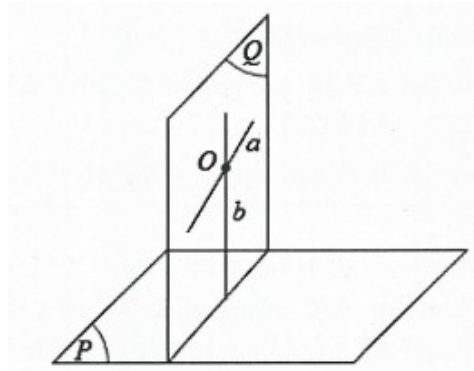
- **Hệ quả 2:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Hệ quả 2 được viết gọn là:

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \subset (R).$$



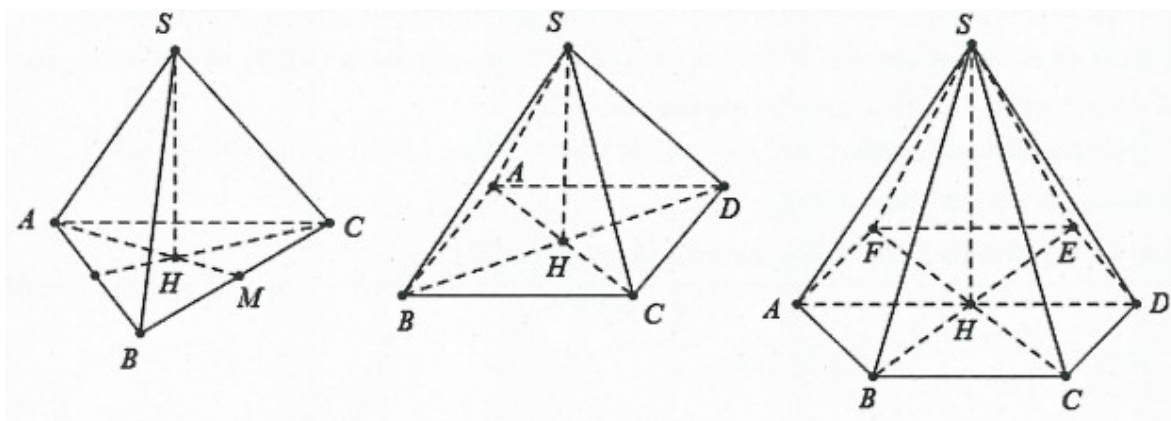
- **Hệ quả 3:** Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .



3) Một số khối hình đặc biệt

- **Hình lăng trụ đứng:** Là hình lăng trụ có tất cả các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- **Hình lăng trụ đều:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- **Hình hộp đứng:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- **Hình hộp chữ nhật:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- **Hình lập phương:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.
- **Hình chóp đều:** Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau:

Dưới đây là hình vẽ của hình chóp tam giác đều, tứ giác đều và hình chóp lục giác đều.



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

✎ Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp giải:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

- Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° .

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC . Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.

c) Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAC)$.

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

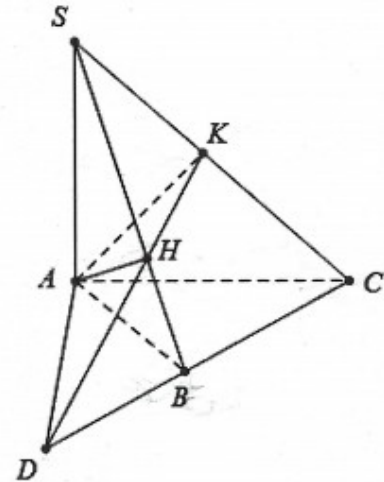
Mặt khác $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$.

c) Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$.

Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$.

Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K . Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK) .

b) Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$

mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

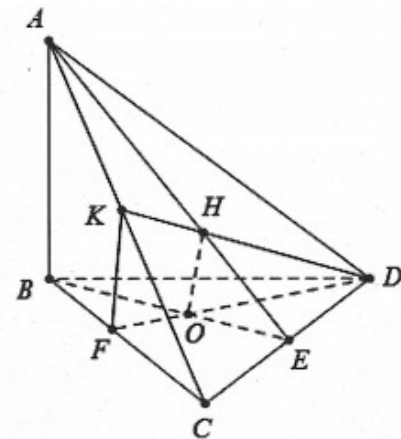
Lại có: $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$.

Mặt khác

$DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ADC) \perp (DFK)$.

b) Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE$.

Ta có: $\begin{cases} (ADC) \perp (ABE) \\ (ADC) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

b) $(SCD) \perp (SBC)$.

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Dụng $OH \perp SC$

Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Suy ra $SC \perp (DHB)$.

Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

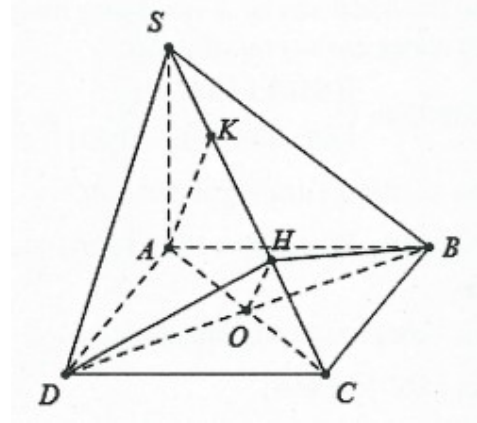
Tam giác ABD đều cạnh a nên

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Dụng } AK \perp SC \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow \triangle DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB} = 90^\circ$.

Do đó $(SCD) \perp (SBC)$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

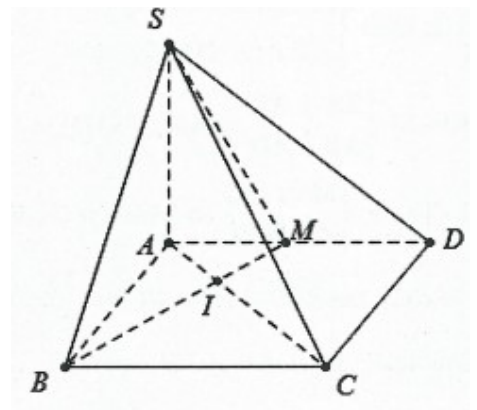
$$\text{Mặt khác } \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do } \tan \widehat{CAD} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AIM} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BM \text{ tại } I.$$

$$\text{Mặt khác } SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$$

$$\text{Do đó } BM \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC).$$



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SA = SB = a\sqrt{2}$.

- a) Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.
b) Chứng minh tam giác SBC vuông.
c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$; $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải:

- a) Do ΔSAB cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

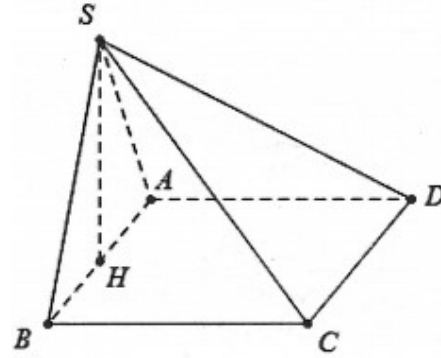
- b) Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$.

$$\text{Mặt khác } BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \Delta SBC \text{ vuông tại } B.$$

- c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD \perp (SAB)$ suy ra $(SAD) \perp (SAB)$.

$$\text{Mặt khác: } SA^2 + SB^2 = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow \Delta SAB \text{ vuông tại } S \Rightarrow SA \perp SB.$$

$$\text{Lại có: } AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB \Rightarrow SB \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD).$$



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD .

- a) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.
b) Chứng minh $AM \perp BP$ và $(SBP) \perp (AMN)$.

Lời giải:

- a) Gọi H là trung điểm của AD .

Do ΔSAD cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AD$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ AD = (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

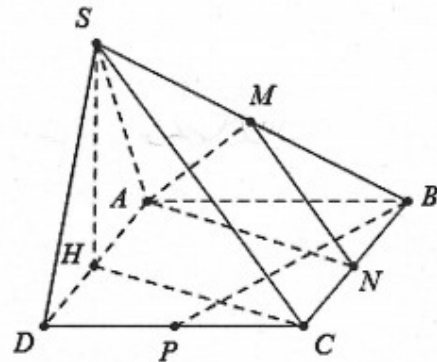
$$\text{Khi đó } \begin{cases} SH \perp AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD).$$

- b) Ta có: $\begin{cases} MN \parallel SC \\ AN \parallel HC \end{cases} \Rightarrow (AMN) \parallel (SHC).$

$$\text{Để thấy } \tan \widehat{BPC} = 2; \tan \widehat{HCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BPC} + \widehat{HCD} = 90^\circ \Rightarrow HC \perp BP.$$

$$\text{Mặt khác } SH \perp BP \Rightarrow BP \perp (SHC)$$

$$\text{Mà } (AMN) \parallel (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} (SBP) \perp (AMN) \\ BP \perp AM \end{cases}.$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$.

c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD . Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC)$; $(AEF) \perp (SAC)$.

Lời giải:

a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB)$.

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Mặt khác: $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF$.

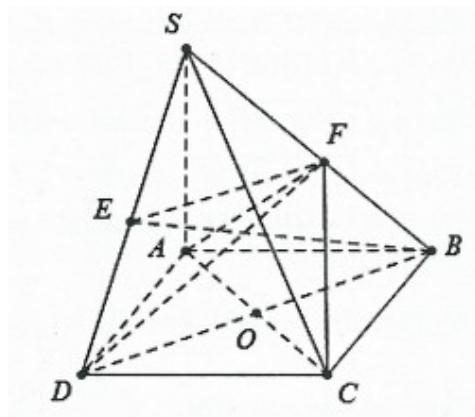
Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC)$.

Để thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF \parallel BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC)$.

Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$.



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH , AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B') \perp (AB'C')$ cùng vuông góc với (AHK) .

Lời giải:

a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

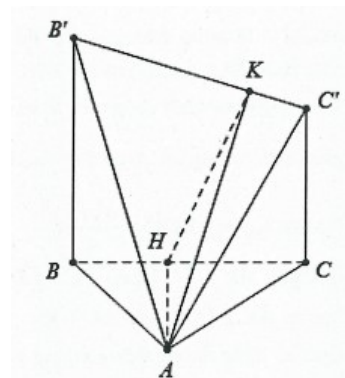
Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$.

b) Do $AH \perp BC$, $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$.

Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$.



Ví dụ 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $CC' = 2a$. Điểm M là trung điểm của cạnh AA' ,

a) Chứng minh $(ABB'A') \perp (BCC'B')$ và $BM \perp C'M$.

b) Tính cosin góc giữa mặt phẳng (BMC') và mặt đáy (ABC) .

Lời giải:

a) Ta có: $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BB' \perp AB$

Mặt khác ABC là tam giác vuông tại B nên $AB \perp BC$

Do đó $AB \perp (BCC'B') \Rightarrow (ABB'A') \perp (BCC'B')$.

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = a\sqrt{2}; \quad BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{7}$$

$$C'M = \sqrt{A'C'^2 + A'M^2} = a\sqrt{5}$$

Do $C'M^2 + MB^2 = BC'^2 \Rightarrow \triangle BMC'$ vuông tại M hay $BM \perp C'M$.

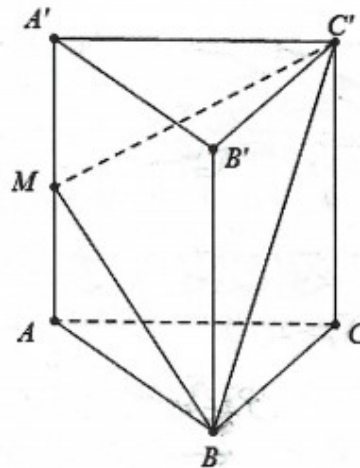
b) Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tam giác MBC' : $S_{MBC'} = \frac{1}{2}MB.MC' = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (BMC') và mặt đáy (ABC) .

Do $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của tam giác $MB'C'$ trên mặt phẳng (ABC) nên:

$$S_{ABC} = S_{MBC'} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MBC'}} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$



✎ Dạng 2: Bài toán dựng thiết diện có yếu tố vuông góc

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

a) (α) qua S và vuông góc với BC .

b) (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của $\triangle SBC$.

Lời giải:

a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$

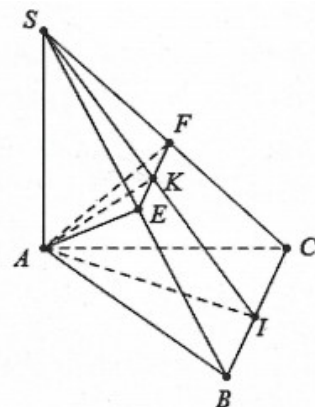
Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAI)$

Thiết diện của khối chóp qua S và vuông góc với BC là tam giác SAI

vuông tại A có $SA = a$; $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $S_{SAI} = \frac{1}{2}SA.AI = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Dựng $AK \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$



Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SI$.

Qua K dựng đường thẳng vuông góc với SI cắt SB, SC lần lượt tại E và $F \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AEF .

Ta có: $AK = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH nên:

$$SA^2 = SK \cdot SI \Rightarrow \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SK}{SI} = \frac{EF}{BC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Do đó } EF = \frac{4}{7}a \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}AK \cdot EF = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) , xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp và tính diện tích thiết diện.

Lời giải:

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC thì $SO \perp (ABC)$ (Do $S.ABC$ là khối chóp đều).

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ mà $BC \perp SO$ suy ra $BC \perp (SAI)$.

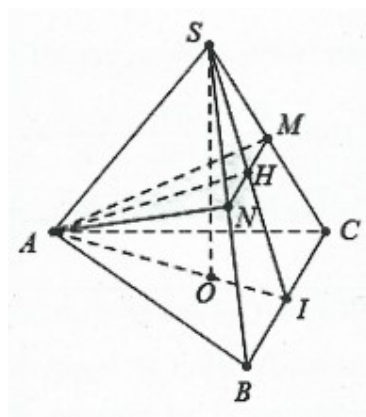
Dựng $AH \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Suy ra $AH \perp (SBC)$. Qua K dựng đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại N và $M \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AMN .

Ta có: $SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H$ là trung điểm của SI .

Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$. Lại có: $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Khi đó $AH = \sqrt{AI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AH \cdot MN = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$).

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (α) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Lời giải:

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại Q .

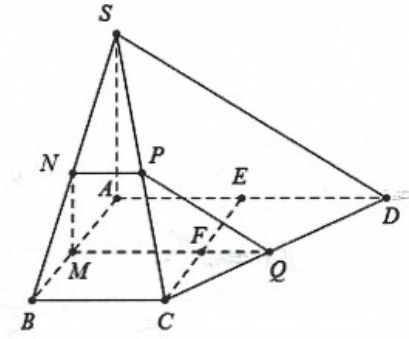
Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là $NP (P \in SC)$ thì $NP \parallel BC$. Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại M và N .

Trong mp $(ABCD)$, dựng $CE \perp AD$ và cắt MQ tại F



b) Ta có:

$$MF = AE = BC = a \Rightarrow DE = a; \frac{FQ}{ED} = \frac{CF}{CE} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow FQ = a-x.$$

$$\text{Suy ra } MQ = 2a-x, \text{ mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{NP}{a} \Rightarrow NP = x$$

$$\text{Lại có: } \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow MN = 2a-2x$$

$$\text{Diện tích thiết diện là: } S_{MNPQ} = \frac{MQ+NP}{2} \cdot MN = 2a(a-x).$$

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M là một điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AM = x, (0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) .

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt AC tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là $NP (P \in SC)$ thì $NP \parallel BC$. Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow (\alpha)$ cắt (SAC) theo giao tuyến là $PQ \Rightarrow PQ \parallel SA \parallel MN \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

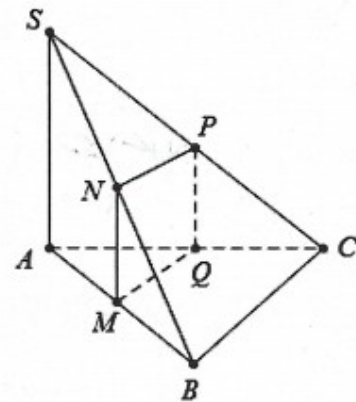
Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB$

Vậy thiết diện của chóp với (α) là hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có: $AB = BC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BC} = \frac{x}{a} \Rightarrow MQ = x, \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \sqrt{3}(a-x).$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \sqrt{3} \cdot x(a-x).$$



Áp dụng bất đẳng thức: $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ta có: $S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}.x(a-x) \leq \sqrt{3}.\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$

Suy ra: $S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ đạt được khi $x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

- a) (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?
b) Biết $SA = a$. Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu a.

Lời giải:

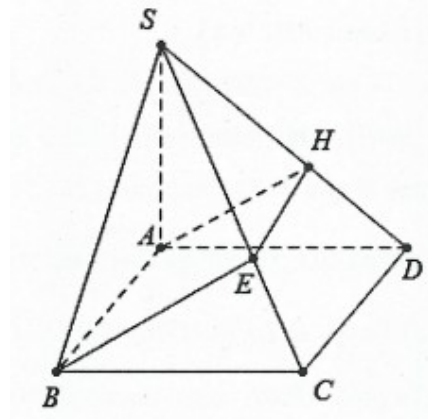
a) Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H . Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$

(α) là mặt phẳng chứa AB đồng thời chứa AH vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Vậy $(\alpha) \perp (SCD)$ và $(\alpha) \equiv (AB, AH)$.

Ta có: $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (\alpha)$ và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại E . Ta có thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vuông $AHEB$ vuông tại A và H vì $AB \perp (SAD)$.



b) Do $SA = AD = a \Rightarrow H$ là trung điểm của $AD \Rightarrow AH = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $EH = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$

Diện tích hình thang vuông $AHEB$ là: $S_{AHEB} = \frac{AB + EH}{2} . AH = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} . \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC , (α) cắt SC tại I .

- a) Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α) .
b) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và $BD \parallel (\alpha)$.
c) Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α) . Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α) .

d) Biết rằng $AB = a$; $SA = a\sqrt{2}$ Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c.

Lời giải:

a) Gọi $I = (\alpha) \cap SC$. Ta có:

$$(\alpha) \perp SC, AI \subset (\alpha) \Rightarrow SC \perp AI.$$

Vậy AI là đường cao của tam giác vuông SAC . Trong mặt phẳng (SAC) , đường cao AI cắt SO tại K và $AI \subset (\alpha)$ nên K là giao điểm của SO với (α) .

$$b) \text{ Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Mặt khác $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Do $BD \perp SC$ và $(\alpha) \perp SC$ nhưng BD không chứa trong (α) nên $BD // (\alpha)$.

c) Ta có: $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên K là một điểm chung của (α) và (SBD) . Mặt phẳng (SBD) chứa $BD // (\alpha)$ nên cắt (α) theo giao tuyến $d // BD$. Giao tuyến này đi qua K là điểm chung của (α) và (SBD) . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d với SB và SD . Thiết diện là

$$\text{tứ giác } AMIN \text{ có } \begin{cases} AI \perp SC \\ MN // BD \end{cases}.$$

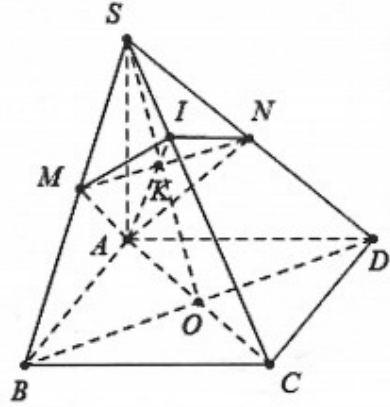
$$d) \text{ Ta có: } BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AI \text{ mà } BD // MN \Rightarrow AI \perp MN.$$

$$\text{Tứ giác } AMIN \text{ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên } S_{AMIN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN$$

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại A suy ra AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. Khi đó $K = AI \cap SO$ là trọng tâm tam giác SAC .

$$\text{Lại có: } \frac{SK}{SO} = \frac{MN}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}. \text{ Mặt khác } AI = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó } S_{AMIN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN = \frac{a^2}{3}.$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, và có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$, $(SAC) \perp (SBC)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện.

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

Suy ra $(SCD) \perp (SAD)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có: $AICD$ là hình vuông và $IBCD$ là hình bình hành. Do $DI \parallel BC$ và $DI \perp AC \Rightarrow AC \perp CB$.

Do đó $CB \perp (SAC)$.

Vậy $(SBC) \perp (SAC)$.

c) Ta có: $\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC)$.

Vậy mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) chính là mặt phẳng (SDI) .

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là tam giác đều SDI có

$$SD = DI = AI = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } SDI \text{ là: } S_{SDI} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Dạng 3: Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng

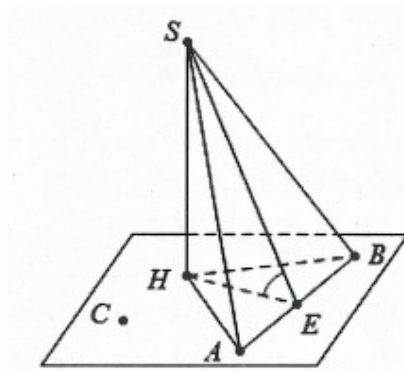
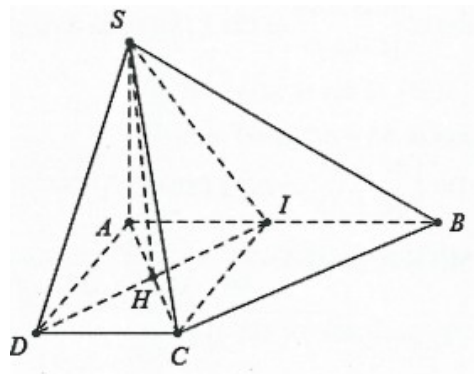
Loại 1: Góc giữa mặt bên và mặt đáy

Phương pháp giải:

Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.

Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow \widehat{((SAB); (ABC))} = \widehat{SEH}$.



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AD \tan 60^\circ = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow \widehat{((SBC); (ABC))} = \widehat{SBA}$

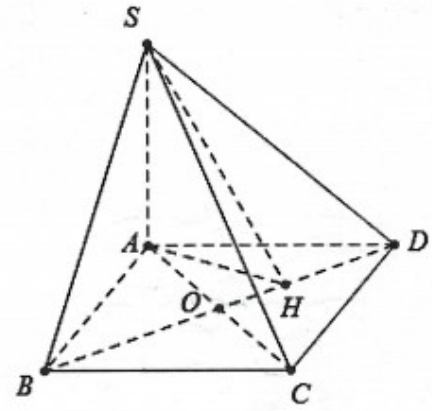
$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(SBC);(ABC)}) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{b) Dựng } AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow (\widehat{(SBD);(ABC)}) = \widehat{SHA}.$$

$$\text{Lại có: } AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \tan(\widehat{(SBD);(ABCD)}) = \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}.$$



Ví dụ 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° . Tính góc $(\widehat{(SBC);(ABC)})$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AC , do tam giác SAC cân nên ta có: $SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$.

$$\text{Khi đó: } (\widehat{SB;(ABC)}) = \widehat{SBH} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC = a.$$

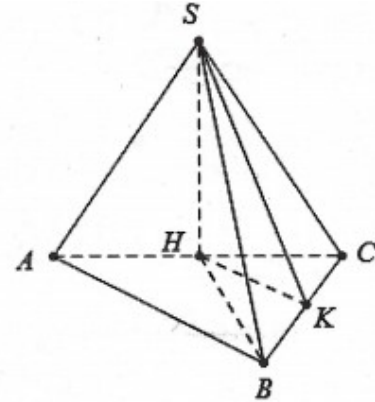
$$\text{Khi đó: } SH = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Dựng } HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK).$$

$$\Rightarrow \widehat{SKH} = (\widehat{(SBC);(ABC)}), \text{ trong đó ta có:}$$

$$HK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{SKH} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } (\widehat{(SBC);(ABC)}) = \varphi \text{ với } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB .

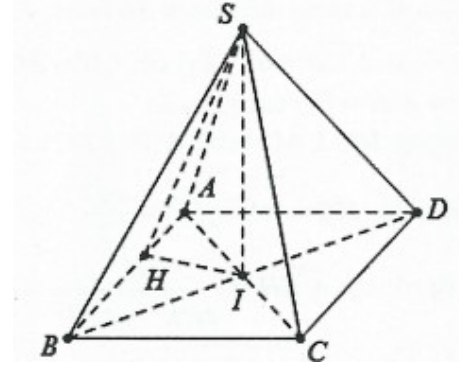
$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI).$$

Do đó $\varphi = (\widehat{SH;IH}) = \widehat{SHI}$.

Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2a$ nên

$$IA = a \Rightarrow IH = IA \sin \widehat{IAB} = IA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \tan \varphi = \frac{SI}{IH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA).$$

$$\text{Khi đó: } ((SBC); (ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh

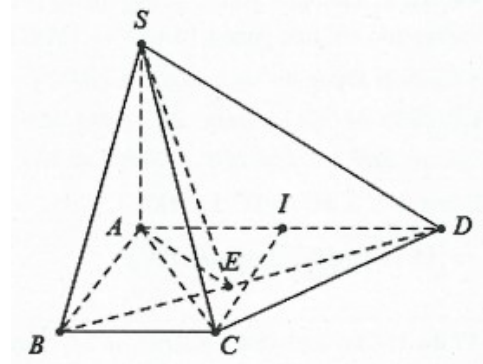
$$a \Rightarrow CI = a = \frac{1}{2} AD \Rightarrow \Delta ACD \text{ vuông tại } C.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA).$$

$$\text{Do đó } ((SCD); (ABCD)) = (\widehat{SC; AC}) = \widehat{SCA} \text{ và } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Dựng } AE \perp BD, \text{ lại có } BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = \widehat{SEA}.$$

$$\text{Ta có: } AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{SEA} = \frac{SA}{AE} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$



Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC) .

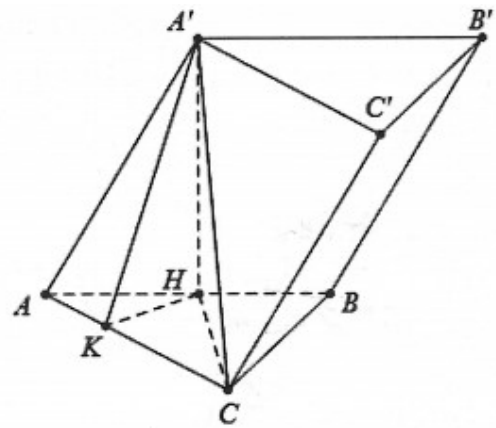
Lời giải:

Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H \perp (ABC)$

$$\text{Do đó } \widehat{A'CH} = 60^\circ. \text{ Lại có: } CH = AC \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'H = CH \tan 60^\circ = 3a.$$

Dựng $HK \perp AC$ ta có $A'H \perp AC \Rightarrow (A'HK) \perp AC$



Khi đó $HK = HA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\cos \widehat{A'KH} = \frac{HK}{\sqrt{HK^2 + A'H^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} > 0$.

Do vậy $\cos((A'AC);(ABC)) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Loại 2: Góc giữa hai mặt bên

Phương pháp giải:

Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC) .

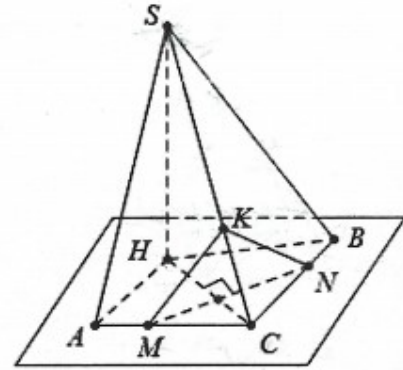
- **Cách 1:** Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC) .
- **Cách 2:** Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC , dựng $MN \perp HC$.

Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN)$

$$\Rightarrow ((SAC);(SBC)) = (\widehat{MK,KN}).$$



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

Lời giải:

Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Dựng $HK \perp SC \Rightarrow (HKB) \perp SC$

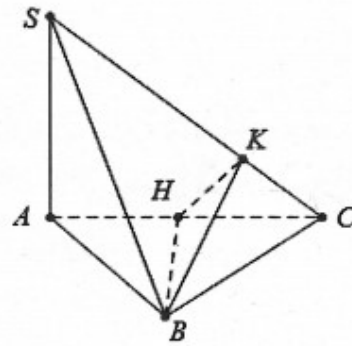
$$\Rightarrow ((SBC);(SAC)) = \widehat{HKB}.$$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

Khi đó $\sin \widehat{KCH} = \frac{HK}{HC} = \frac{SA}{SC} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Mặt khác: $BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{HKB} = \frac{BH}{HK} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{HKB} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD) .

b) (SAD) và (SCD) .

Lời giải:

a) Nhận xét $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Dựng $BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED)$.

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại A suy ra

$\widehat{ECO} = 45^\circ$. Khi đó $OE = OC \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lại có: $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{BEO} = \frac{OB}{OE} = \sqrt{6}$.

Do $\widehat{BED} = 2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy

tính **CASIO** ta tính được $\cos \widehat{BED} = \frac{-5}{7}$

Cách khác: Ta có: $BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{BED} = \frac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2 \cdot EB \cdot ED} = \frac{-5}{7}$.

Suy ra $\cos((SBC);(SCD)) = \frac{5}{7}$.

b) Dựng $CM \perp AD$ ta có: $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD$.

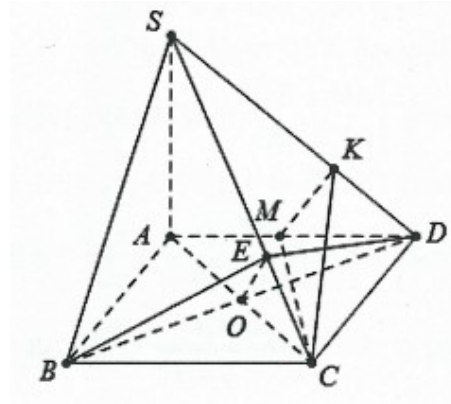
Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \triangle SAD$ vuông cân tại A suy ra

$\widehat{SDM} = 45^\circ$. Do đó $MK = MD \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $\tan \widehat{MKC} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{MKC} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\cos((SCD);(SAD)) = \frac{1}{\sqrt{7}}$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AD = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 45° . Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Lời giải:

Do $AD = 2a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Suy ra $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$

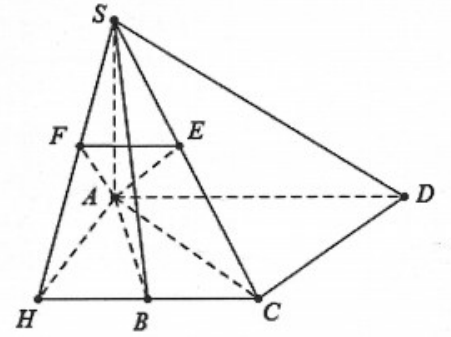
$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Dựng $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SCD)$

Dựng $\begin{cases} AH \perp BC \\ AF \perp SH \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF .

Ta có: $AE = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; $AH = AC \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AF = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp FE$. Do đó $\cos \widehat{FAE} = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Lời giải:

Do $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Do đó $\widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$; $AC = 2a$

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $DE \perp AC (E \in BC)$ tại I , mặt khác $DE \perp SA$
 $\Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp SC$.

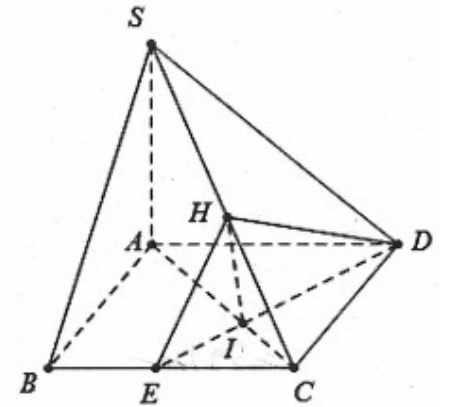
Dựng $IH \perp SC \Rightarrow SC \perp (EHD)$. Ta có: $DI = DC \sin \widehat{ICD}$
 trong đó $\tan \widehat{ICD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ICD} = 60^\circ$.

Suy ra $DI = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $DE = \frac{DC^2}{DI} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow IE = DE - DI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow CI = \sqrt{EI \cdot DI} = \frac{a}{2}$; $\sin \widehat{ICH} = \frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow IH = IC \sin \widehat{IHC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Suy ra $EH = \sqrt{EI^2 + IH^2} = \frac{2a}{\sqrt{21}}$; $ED = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Do đó $\cos \widehat{EHD} = \frac{EH^2 + HD^2 - ED^2}{2 \cdot EH \cdot HD} = \frac{-\sqrt{2}}{4} < 0 \Rightarrow \cos \widehat{((SBC);(SCD))} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài

đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Kẻ $BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID)$.

Vậy $\widehat{((SBC);(SCD))} = \widehat{(BI;ID)} = 60^\circ$.

Dễ thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ \widehat{BIO} = \frac{1}{2} \widehat{BID} \end{cases}$.

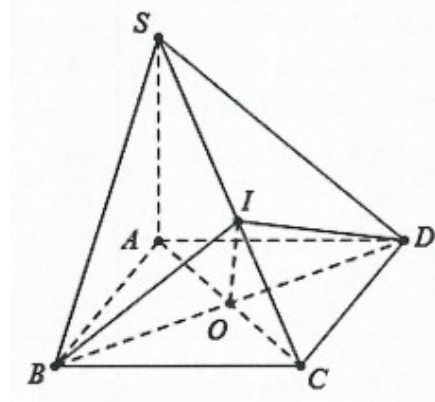
▪ **Trường hợp 1:** $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^\circ$.

Ta có: $\tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 30^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý).

▪ **Trường hợp 2:** $\widehat{BID} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ$.

Ta có: $\tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 60^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Mặt khác: $\sin \widehat{ICO} = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \widehat{ICO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC \tan \widehat{ICO} = a$.



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải:

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB . Do đó $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

Gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Do $\begin{cases} AI \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI$.

Dựng $BK \perp SI \Rightarrow SI \perp (BKD)$.

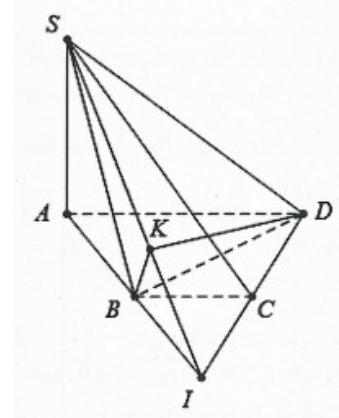
Khi đó $\widehat{((SAB);(SCD))} = \widehat{(BK,KD)} = \widehat{BKD}$.

Do $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp BK \Rightarrow \Delta KBD$ vuông tại B có

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}.$$

Do $\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong tam giác $AID \Rightarrow AB = BI$ và $AI = 2a$

$$\Rightarrow BK = \frac{1}{2} d(A; SI) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \widehat{BKD} = \frac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$$



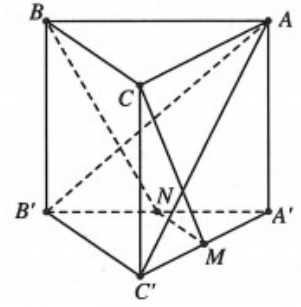
Ví dụ 7. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.

A. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{\sqrt{13}}{130}$.

C. $-\frac{\sqrt{13}}{130}$.

C. $-\frac{\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải:

Gọi P là trung điểm BC . Đặt $AB' \cap BN = D$, $AC' \cap CM = E$

Suy ra DE là giao tuyến của $(AB'C')$ và $(BCMN)$

Gọi I là trung điểm DE , do tính đối xứng $\Rightarrow IA \perp DE$, $IP \perp DE$

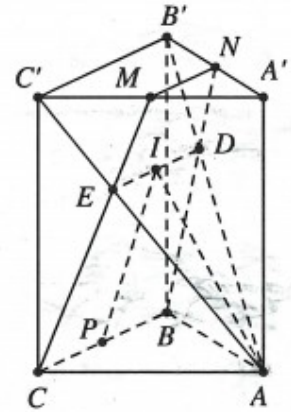
Do đó $DE \perp (AIP) \Rightarrow \widehat{(AB'C'); (BCMN)} = \widehat{(IA; IP)} = \widehat{AIP}$

Ta có $AP = 3$ và $\frac{DE}{B'C'} = \frac{AD}{AB'} = \frac{AB}{AB + B'N} = \frac{2}{3}$ nên I là trọng tâm tam

giác $AB'C' \Rightarrow AI = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2(AB'^2 + AC'^2) - B'C'^2}{4}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$

Tương tự thì I là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow PI = \frac{5}{3}$

Xét tam giác IAP có $\cos \widehat{AIP} = \frac{IP^2 + IA^2 - AP^2}{2IP \cdot IA} = \frac{\sqrt{13}}{65}$. **Chọn A.**



Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng $(SAB); (ABC)$ góc bằng nhau. Tỉ số $\frac{MS}{MC}$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

Chuẩn hoá $AB = 2 \Rightarrow AC = 4$; $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$

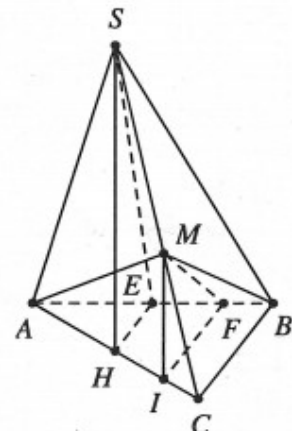
Bước 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(SAB); (ABC)$

Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi E là trung điểm $AB \Rightarrow HE \parallel BC \Rightarrow HE \perp AB$

Mà $SH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow \widehat{(SAB); (ABC)} = \widehat{SEH}$

Ta có $\tan \widehat{SEH} = \frac{SH}{HE} = \frac{2SH}{BC} = \frac{8\sqrt{3}}{2} : 2\sqrt{3} = 2$



Bước 2. Ta có $\widehat{(MAB);(SAB)} = \widehat{(MAB);(ABC)}$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \widehat{(MAB);(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\widehat{(SAB);(ABC)} \right) = \frac{\widehat{SEH}}{2}$$

Gọi I là hình chiếu của M trên $AC \Rightarrow MI \perp (ABC)$

Kẻ $IF \perp AB (F \in AB)$ nên $AB \perp (MIF) \Rightarrow \widehat{(MAB);(ABC)} = \widehat{MFI}$

$$\text{Đặt } MC = x \Rightarrow \frac{MC}{SC} = \frac{MI}{SH} = \frac{IC}{HC} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{MI}{2\sqrt{3}} = \frac{IC}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{3}x}{2}; IC = \frac{x}{2}$$

$$\text{Lại có } \frac{HE}{IF} = \frac{AH}{AI} \Leftrightarrow IF = \frac{HE \cdot AI}{AH} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(4 - \frac{x}{2}\right)}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{4}$$

$$\text{Tam giác } MIF \text{ vuông tại } I \longrightarrow \tan \widehat{MFI} = \frac{MI}{IF} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } 2IF = 3MI \Leftrightarrow 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \longrightarrow \frac{MC}{MS} = 1. \text{ Chọn C.}$$

Loại 3: Sử dụng công thức diện tích hình chiếu để tính góc giữa hai mặt phẳng

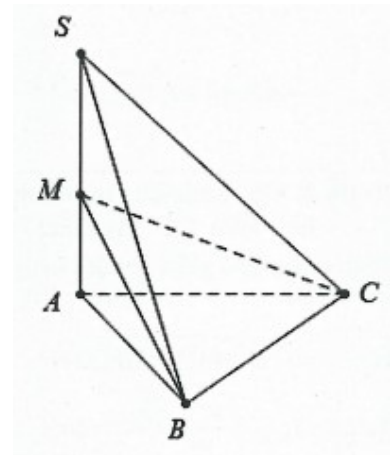
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho diện tích tam giác MBC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Gọi } \varphi = \widehat{(MBC);(ABC)}$$

Do ΔABC là hình chiếu của tam giác MBC trên mặt phẳng (ABC)

$$\text{do đó } \cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MBC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi N là trung điểm của SA , mặt phẳng (NCD) cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích $S = 2a^2\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (NDC) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

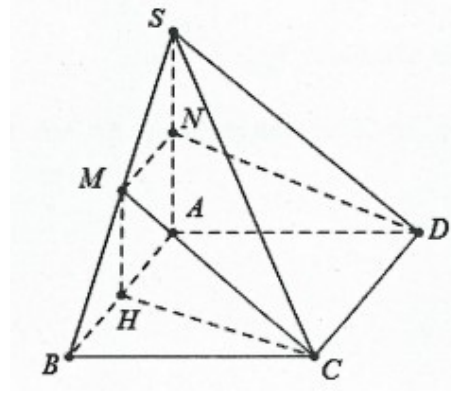
Đặt $\varphi = \widehat{((NCD);(ABCD))}$.

Do $CD \parallel AB \Rightarrow (NCD)$ cắt (SAB) theo thiết diện $NM \parallel AB \Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác SAB . Khi đó thiết diện là tứ giác $MNDC$.

Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD)$ thì H là trung điểm của AB và $S_{AHCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot 2a = 3a^2$.

Do tứ giác $HADC$ là hình chiếu của tứ giác $MNDC$ trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{AHCD}}{S_{NMCD}} = \frac{3a^2}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $\varphi = 30^\circ$.



Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC làm tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm của CC' . Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông tại A và tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'I)$ và (ABC) .

Lời giải:

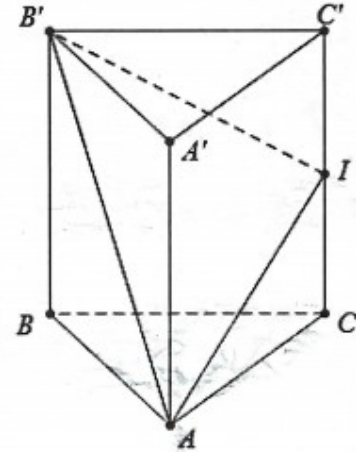
Ta có: $BC = B'C' = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2} \\ AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Do $AB'^2 + AI^2 = B'I^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow \Delta B'AI$ vuông tại A .

Ta có: $S_{AB'I} = \frac{1}{2} AB' \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{((AB'I);(ABC))} = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.



Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao $AA' = 6a$. Trên CC' lấy điểm M , trên DD' lấy điểm N sao cho $CM = 2MC$ và $DN = 2ND'$.

Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(B'MN)$ và $(ABCD)$.

Lời giải:

Gọi $\varphi = \widehat{((B'MN);(ABCD))}$.

Ta có: $S_{BCD} = \frac{a^2}{2}$; $D'N = 2a$; $C'M = 4a$

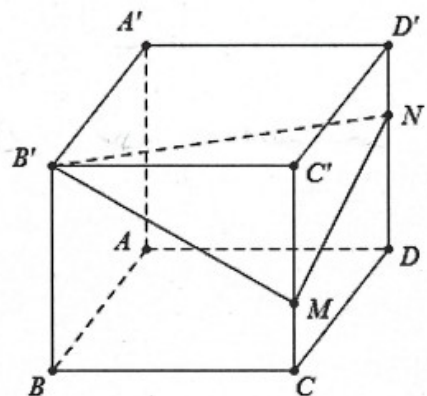
Lại có: $B'D' = a\sqrt{2} \Rightarrow B'N = \sqrt{B'D'^2 + D'N^2} = a\sqrt{6}$

$B'M = \sqrt{B'C'^2 + C'M^2} = a\sqrt{17}$, $MN = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Theo công thức Herong $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Ta tính được: $S_{BMN} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Do $\triangle BCD$ là hình chiếu của $\triangle B'MN$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\cos \varphi = \frac{S_{BCD}}{S_{B'MN}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$.



Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2 . Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 120° .

Lời giải:

Vì ABC là hình chiếu của MNP trên $(ABCD)$

Suy ra $\cos(\widehat{(MNP);(ABCD)}) = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{a^2}{2} : a^2 = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB' và CC' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Biết diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ bằng $\frac{a^2}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC) bằng

- A. 15° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải:

Vì ABC là hình chiếu của $A_1B_1C_1$ trên (ABC)

Suy ra $\cos(\widehat{(P);(ABC)}) = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 27. Một mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q . Tính diện tích của tứ giác $MNPQ$

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ B. $6\sqrt{3}$ C. 18 D. $\frac{9}{2}$

Lời giải:

Vì $ABCD$ là hình chiếu của $MNPQ$ trên $(ABCD)$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{(P);(ABCD)}) = \frac{S_{ABCD}}{S_{MNPQ}} = \frac{3^2}{S_{MNPQ}} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{9}{\cos 60^\circ} = 6\sqrt{3}. \text{ Chọn B.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) .

Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b) .

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a .

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm duy nhất có một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d . Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d .

B. Nếu mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R) .

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P) . Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) .

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng Q chứa b thì (P) vuông góc với (Q) .

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) .

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8. Trong các khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào **sai**?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 11. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A . Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB . Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SH \perp AB$. **B.** $HI \perp AB$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $(SHI) \perp (SAB)$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $CM \perp (ABD)$. B. $AB \perp (MCD)$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $DM \perp (ABC)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp AH$. B. $(AHK) \perp (SBC)$. C. $SC \perp AI$. D. Tam giác IAC đều.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm cạnh AC , H là hình chiếu của I trên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(SBC) \perp (IHB)$ B. $(SAC) \perp (SAB)$ C. $(SAC) \perp (SBC)$ D. $(SBC) \perp (SAB)$

Câu 15. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC , kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SA \perp BH$. B. $(SBD) \perp (SDC)$. C. $(SAB) \perp (SAC)$. D. $BH \perp HC$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$, $AB = 1$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Gọi I là trung điểm của BC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- A. $\widehat{SCA}$. B. $\widehat{SIA}$. C. $\widehat{SCB}$. D. $\widehat{SBA}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và hình chiếu của S lên đáy nằm bên trong tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. H là trọng tâm tam giác ABC .
B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
D. H là trực tâm tam giác ABC .

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\tan \varphi = \frac{1}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \sqrt{5}$. B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\varphi = 45^\circ$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 23. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc φ là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

- A. $\varphi = 90^\circ$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 24. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \sqrt{6}$ B. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan \varphi = \sqrt{2}$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\tan \varphi = \sqrt{7}$

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Gọi H là trung điểm của AB . Biết rằng $SH \perp (ABC)$, $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) , (SAC)

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$

B. $\widehat{BSF}$

C. $\widehat{BSE}$

D. $\widehat{CSE}$

Câu 29. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a , $\left(\widehat{(ABCD), (A'B'C'D')}\right) = 60^\circ$.

Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ là

A. $2a$

B. $3a$

C. $a\sqrt{3}$

D. $a\sqrt{2}$

Câu 30. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH của khối chóp

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 31. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) . Tính $\cos \alpha$

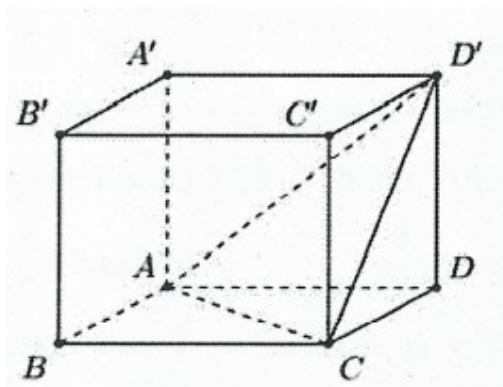
A. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 32. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (hình vẽ). Tính giá trị của $\tan \alpha$



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. 2

D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Đề góc giữa (SCB) và (SCD) bằng 60° thì độ dài cạnh SA là

- A. $a\sqrt{3}$ B. $a\sqrt{2}$ C. a D. $2a$

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 6, AC = 8$. Tam giác BCD có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh C bằng 8. Mặt phẳng $(BCD) \perp (ABC)$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(ABD), (BCD)$ bằng

- A. $\frac{4}{\sqrt{17}}$ B. $\frac{3}{\sqrt{17}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{34}}$ D. $\frac{4}{\sqrt{34}}$

Câu 36. Cho tứ diện $S.ABC$ có các tam giác SAB, SAC và ABC vuông cân tại A , $SA = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD)

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 38. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB . Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) . Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{17}}{17}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{17}}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với (ABC) . Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 40. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó (SBC) tạo với đáy một góc x . Tính giá trị của $\tan x$.

- A. $\tan x = 2$. B. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\tan x = \frac{3}{2}$. D. $\tan x = \frac{2}{3}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{12}$.

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao của hình chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. 60° . B. 75° . C. 30° . D. 45° .

Câu 44. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng 5. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' và diện tích tam giác MNP bằng 10. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 45. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) .

- A. 120° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 46. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' , diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

- A. 120° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 47. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi M là trung điểm của BB' . Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC) .

- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\varphi = 90^\circ$.

Câu 48. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm của CC' . Cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{20}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. C. $\sqrt{30}$. D. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, có $AB = BC = a$, $AD = 2a$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

- A. 75° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\tan \alpha = 2$. D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 51. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3$, $AD = 4$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC và α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

- A. $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$. B. $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$. C. $\alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$. D. $\alpha \in (45^\circ; 60^\circ)$.

Câu 52. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 53. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC . Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Câu 54. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{8}{15}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{7}{15}$. D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 56. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2AA' = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 57. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $S.ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = x$, $SA \perp (ABCD)$. Xác định x để $\widehat{((SBC), (SCD))} = 60^\circ$

- A. $\frac{3a}{2}$ B. $\frac{a}{2}$ C. a D. $2a$

Câu 59. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Mặt phẳng (α) qua A , song song BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

- A. tam giác đều B. tam giác cân C. tam giác vuông D. tứ giác

Câu 60. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

- A. tam giác cân B. hình bình hành C. hình thang vuông D. hình thang cân

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D , đáy lớn AB , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A; Q \neq S; M$ là điểm trên cạnh AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

- A. tam giác B. hình thang cân C. hình thang vuông D. hình bình hành

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D , biết $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Tính diện tích (α) của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho

- A. $\frac{a^2}{2}$ B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^2}{4}$

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^2}{2}$ D. a^2

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-D	2-B	3-C	4-B	5-D	6-C	7-B	8-D	9-B	10-D
11-C	12-B	13-D	14-B	15-C	16-B	17-D	18-B	19-A	20-C
21-A	22-A	23-C	24-B	25-D	26-B	27-D	28-C	29-C	30-C
31-D	32-A	33-C	34-A	35-C	36-D	37-D	38-C	39-A	40-A
41-D	42-A	43-A	44-A	45-C	46-C	47-B	48-D	49-D	50-C
51-A	52-B	53-C	54-C	55-C	56-A	57-A	58-C	59-B	60-D
61-C	62-C	63-B							

Câu 1: Gọi Δ là đường thẳng qua M vuông góc với (P) và (Q)

Khi đó có vô số mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) và (Q) , các mặt phẳng này chứa đường thẳng

Δ . **Chọn D.**

Câu 2: Nếu $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$. **Chọn B.**

Câu 3: Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau. **Chọn C.**

Câu 4: Nếu mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R) . **Chọn B.**

Câu 5: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia. **Chọn D.**

Câu 6: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước. **Chọn C.**

Câu 7: Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) . Khẳng định C đúng, khẳng định B sai. **Chọn B.**

Câu 8: Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều, các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

Khẳng định sai là D. **Chọn D.**

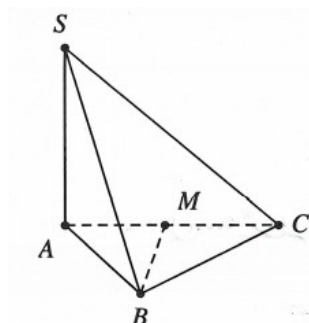
Câu 9: Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương. **Chọn B.**

Câu 10: Do đáy ABC là tam giác vuông cân tại B nên $BM \perp AC$

Mặt khác $BM \perp SA \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ do đó $(SAB) \perp (SBC)$

Khẳng định sai là D. **Chọn D.**



Câu 11: $SH \perp BC$ (đường trung tuyến trong tam giác cân)

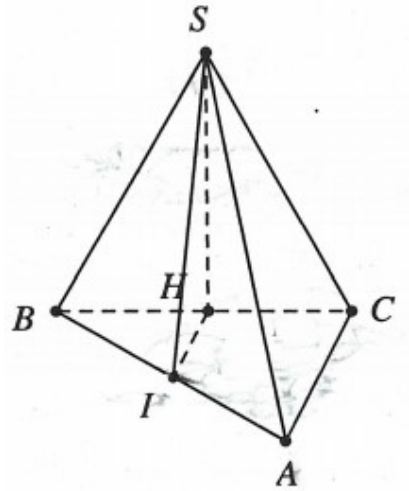
Lại có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp AB$.

HI là đường trung bình trong tam giác ABC nên $HI \parallel AC$

Mặt khác $CA \perp AB \Rightarrow HI \perp AB$, lại có $SH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHI)$

Suy ra $(SHI) \perp (SAB)$.

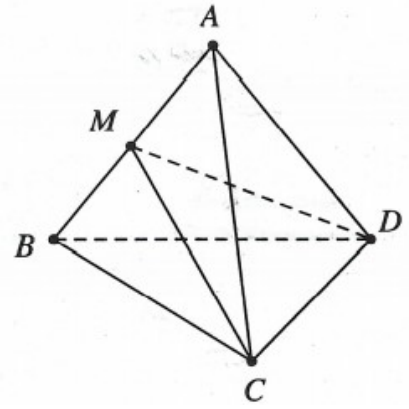
Vậy các khẳng định A, B, D đúng, khẳng định **sai** là **C**. **Chọn C**.



Câu 12: $\triangle ABC, \triangle ABD$ là các tam giác đều nên

$$\begin{cases} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CMD).$$

Vậy $AB \perp (MCD)$. **Chọn B**.



Câu 13: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

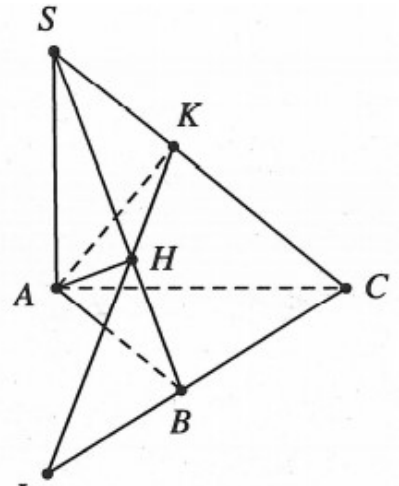
Mặt khác $AH \perp SB \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$ và $AH \perp SC$

Lại có $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp AI$

$I \in (ABC) \Rightarrow AI \perp SA \Rightarrow AI \perp (SAC)$ nên $AI \perp AC$

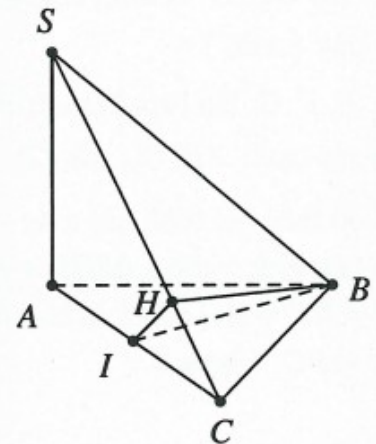
Vậy tam giác IAC vuông tại A . Khẳng định **sai** là **D**.

Chọn D.



Câu 14: $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$ suy ra $(SAC) \perp (SAB)$.

Chọn B.



Câu 15: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$

Mặt khác $IH \perp SA \Rightarrow SA \perp (BCH) \Rightarrow SA \perp BH$

Khi đó $\widehat{(SAB);(SAC)} = \widehat{BHC}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$

Ta có

$$d(D; SA) = \frac{DS \cdot DA}{\sqrt{DS^2 + DA^2}} = a \Rightarrow IH = \frac{a}{2} = \frac{1}{BC}$$

Suy ra tam giác HBC vuông tại $H \Rightarrow BH \perp HC$

Do đó $(SAB) \perp (SAC)$. **Chọn C.**

Câu 16: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Suy ra $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SBA}$, mặt khác $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

Do đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$. **Chọn B.**

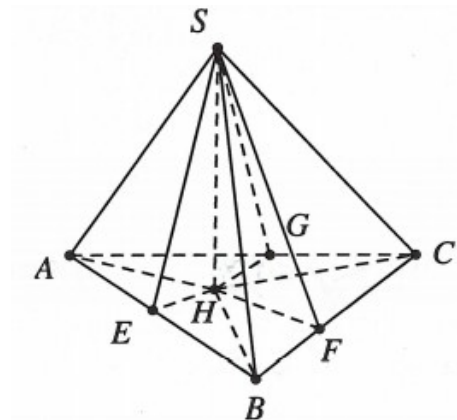
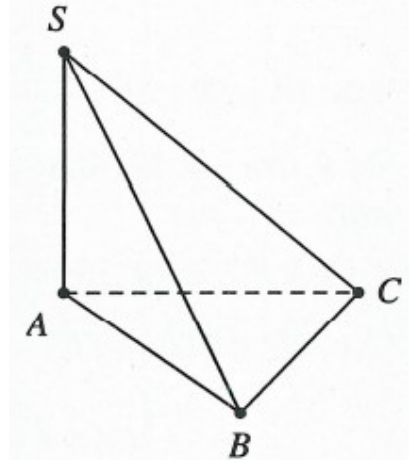
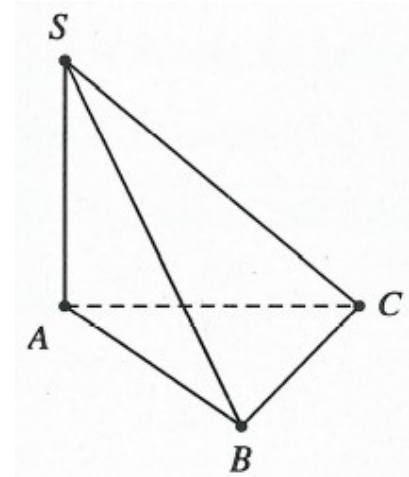
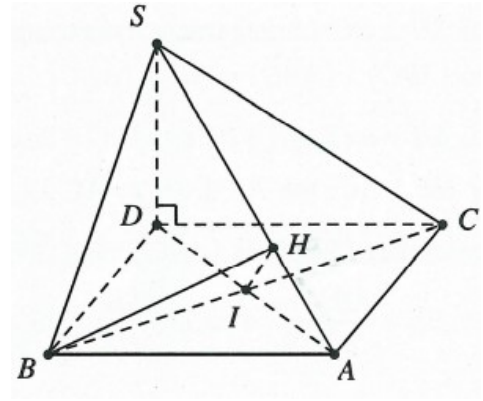
Câu 17: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Suy ra $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SBA}$. **Chọn D.**

Câu 18: Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy (ABC)

Gọi E, F, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, BC và CA .

Khi đó theo giả thiết bài toán ta có $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \widehat{SGH}$



Các tam giác vuông $\triangle SHE = \triangle SHF = \triangle SHG$ nên $HE = HF = HG \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . **Chọn B.**

Câu 19: Gọi H là trung điểm của AC .

Ta có: $SH \perp BC$ (đường trung tuyến trong tam giác đều)

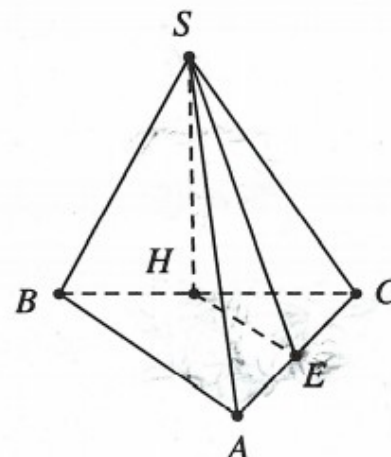
Lại có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Ta có: $SH = a\sqrt{3}$, $AB = BC \cos \widehat{ABC} = 2a \cos 60^\circ = a$

Dựng $HE \perp AC$, mà $AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SHE)$ nên góc giữa

hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $\widehat{SHE} = \varphi$

Lại có $HE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SH}{HE} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$. **Chọn A.**



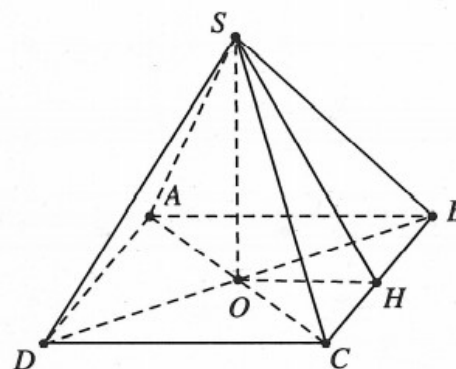
Câu 20: Dựng $OH \perp BC \Rightarrow OH$ là đường trung bình trong

tam giác $BCD \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$

Lại có $BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SHO)$

Do đó $\widehat{((SBC); (ABCD))} = \widehat{SHO} = \alpha$

Ta có $\tan \alpha = \frac{SO}{OH} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. **Chọn C.**



Câu 21: Do $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều cạnh a .

Mặt khác $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của

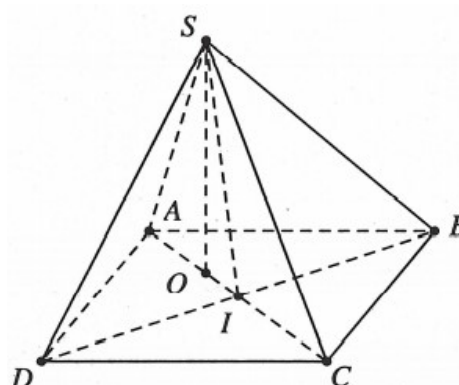
S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác đều ABD

Ta có: $OI \perp BC, BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SIO)$

Khi đó $\widehat{(SBD); (ABCD)} = \widehat{SIO} = \alpha$

$$\text{Lại có } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} OA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

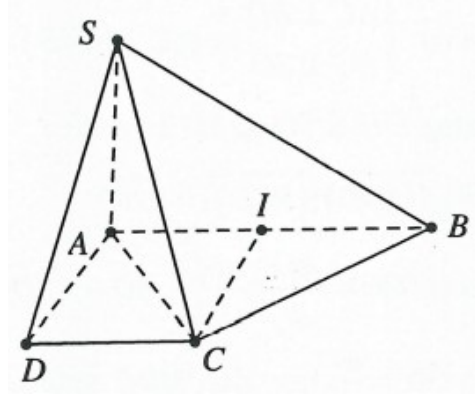
$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{15}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SO}{OI} = \sqrt{5}$. **Chọn A.**



Câu 22: Gọi I là trung điểm của AB thì $ADCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = a = \frac{AB}{2} \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCA) \Rightarrow \widehat{(SBC; ABC)} = \widehat{SCA}$

Lại có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn A.**



Câu 23: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Khi đó $SO \perp (ABCD)$, dựng $MH \parallel SO \Rightarrow H$ là trung điểm của OC .

Ta có: $\begin{cases} HO \perp BD \\ BD \perp MH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (MOH)$

Suy ra $\widehat{((MBD); (ABC))} = \widehat{MOH}$

Lại có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$

$OM = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \sin \widehat{MOH} = \frac{MH}{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOH} = 45^\circ$.

Chọn C.

Câu 24: $SH \perp BC$ (đường trung tuyến trong tam giác đều)

Lại có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Do $AB \parallel CD \Rightarrow$ giao tuyến d của (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB

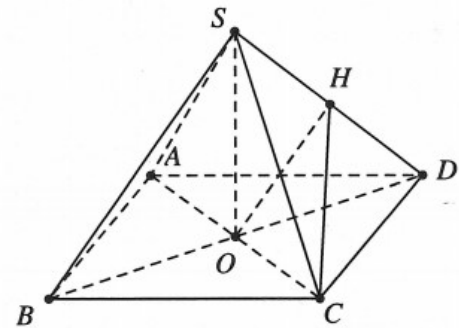
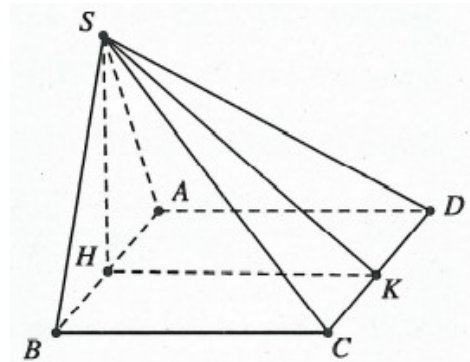
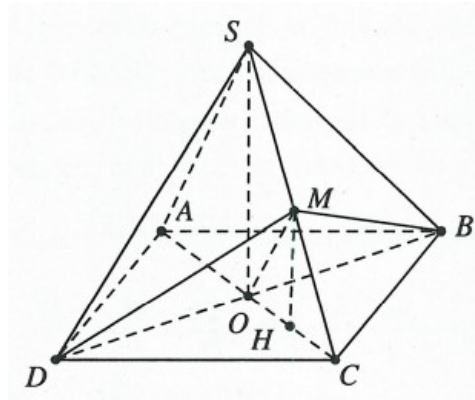
Gọi K là trung điểm của CD thì $\begin{cases} HK \perp AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK)$

Do đó $d \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{(SAB; SCD)} = \widehat{KSH} = \varphi$

Ta có $\tan \varphi = \frac{HK}{SH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 25: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Khi đó $SO \perp (ABCD)$



Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$

Dựng $OH \perp SD \Rightarrow SD \perp (ACH)$

Vậy $\widehat{((SBD);(SCD))} = \widehat{CHO}$

Ta có $OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow OH = \frac{a}{2}$, tam giác HOH vuông tại $O \Rightarrow \tan \widehat{OHC} = \frac{OC}{OH} = \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 26: Gọi H trung điểm cạnh huyền BC thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH \perp (ABC)$

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và SA

Ta có: $HI \parallel AC, IK \parallel SB$ (tính chất đường trung bình)

$BC = a\sqrt{2} \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow KI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$HI = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$, $HK = \frac{SA}{2} = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $\cos \widehat{KIH} = \frac{IH^2 + IK^2 - HK^2}{2.IH.IK} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \tan \widehat{KIH} = \sqrt{7}$.

Chọn B.

Câu 27: Do $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow CH \perp AB$

Mặt khác $CH \perp SH \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SA$

Dựng $HI \perp SA \Rightarrow SA \perp (CHI)$

Do đó $\widehat{(SAB;SAC)} = \widehat{CIH} = \alpha$

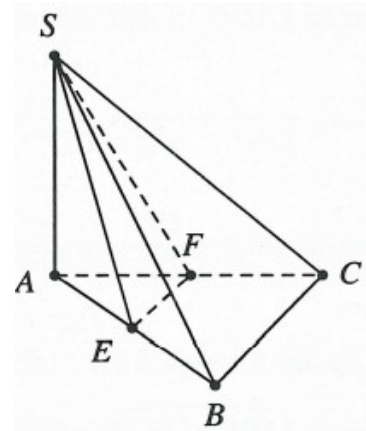
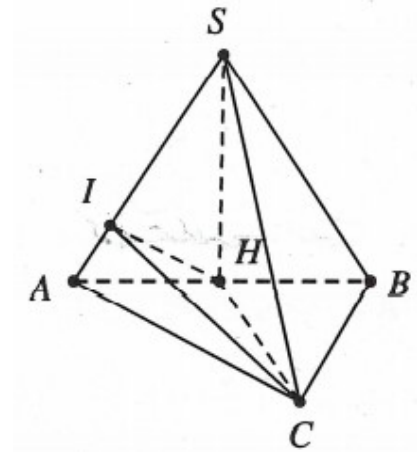
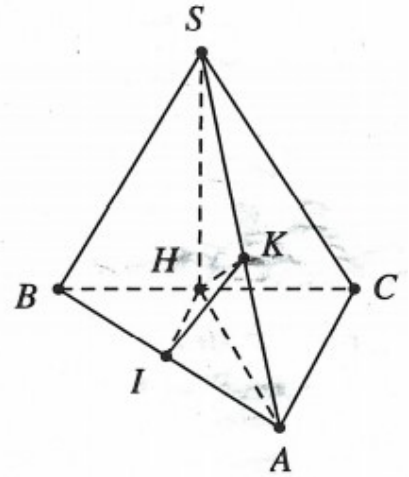
Ta có $HI = \frac{SH.HA}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$, $CH = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$

$\triangle CHI$ vuông tại H nên $\cos \alpha = \frac{HI}{CI} = \frac{HI}{\sqrt{HI^2 + CH^2}} = \frac{2}{3}$.

Chọn D.

Câu 28: Do EF là đường trung bình trong tam giác ABC nên $EF \parallel BC$ suy ra giao tuyến d của mặt phẳng (SEF) và (SBC) là đường thẳng d qua S và song song với BC .

Lại có $\begin{cases} AB \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d \perp (SEB)$



Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là $\widehat{BSE}$.

Chọn C.

Câu 29: Ta có $(ABC'D') \cap (ABCD) = AB$

$$\text{Mà } AB \perp (BCC'), \begin{cases} (BCC') \cap (ABC'D') = BC' \\ (BCC') \cap (ABCD) = BC \end{cases}$$

$$\longrightarrow \widehat{(ABC'D'); (ABCD)} = \widehat{(BC'; BC)} = \widehat{C'BC} = 60^\circ$$

$$\text{Tam giác } BCC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow \tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC}$$

$$\longrightarrow CC' = \tan 60^\circ \cdot BC = a\sqrt{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 30: Gọi H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow HM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SMH)$$

$$\text{Do đó } \widehat{(SBC); (ABC)} = \widehat{(SM; HM)} = \widehat{SMH} = 60^\circ$$

$$\text{Tam giác } SMH \text{ vuông tại } H, \text{ có } \tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM}$$

$$\longrightarrow SH = HM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 31: Kẻ $DM \perp SC (M \in SC)$

$$\text{Mà } \Delta SBC = \Delta SDC = BM \perp SC$$

$$\text{Do đó } SC \perp (BMD) \Rightarrow \widehat{(SBC); (SCD)} = \widehat{(BM; DM)} = \widehat{BMD}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{(SAC); (SCD)} = \frac{1}{2} \widehat{BMD} = \widehat{OMD}$$

$$\text{Diện tích } \Delta SCD \text{ là } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} DM \cdot SC = \frac{a^2 \sqrt{7}}{2} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

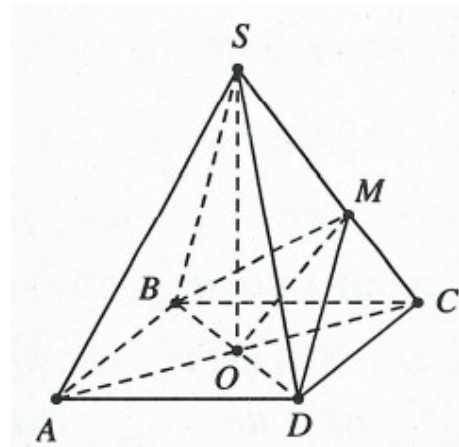
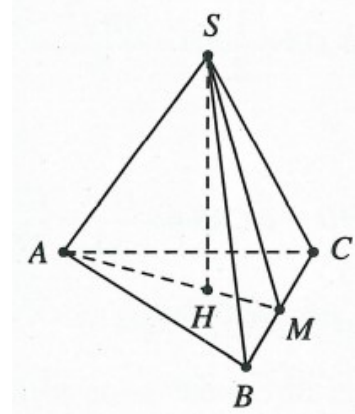
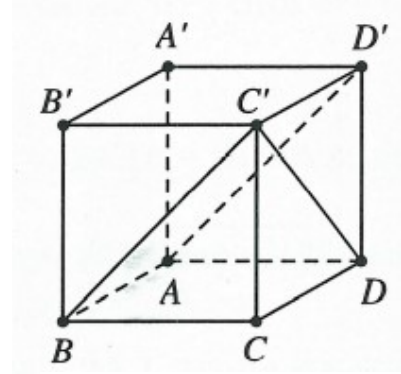
$$\text{Tam giác } OMD \text{ vuông tại } O, \text{ có } \cos \widehat{OMD} = \frac{OM}{MD} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn D.

Câu 32: Kẻ $DH \perp AC (H \in AC)$ mà $DD' \perp AC \Rightarrow AC \perp (D'DH)$

$$\text{Do đó } \widehat{(ACD'); (ABCD)} = \widehat{(D'H; DH)} = \widehat{D'HD} = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{DD'}{DH}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Suy ra $\tan \alpha = \frac{DD'}{DH} = a\sqrt{3} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 33: Kẻ $OH \perp SC (H \in SC)$ nên $SC \perp (HBD)$

Do đó $(\widehat{SBC}); (\widehat{SCD}) = 60^\circ \Rightarrow (\widehat{BH}; \widehat{DH}) = \widehat{BHD} = 120^\circ$

Suy ra $\widehat{BHO} = 60^\circ \Rightarrow \tan \widehat{BHO} = \frac{OB}{OH} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Ta có $\Delta CHO \sim \Delta CAS \Leftrightarrow \frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{SA} = \frac{2}{\sqrt{SA^2 + 2a^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3SA^2 + 6a^2} = 3SA \Leftrightarrow 6SA^2 = 6a^2 \Rightarrow SA = a$. **Chọn C.**

Câu 34: Kẻ $OH \perp SC (H \in SC)$ nên $SC \perp (HBD)$

Do đó $(\widehat{SBC}); (\widehat{SCD}) = (\widehat{BH}; \widehat{DH}) = \widehat{BHD} = 2\widehat{BHO}$

Ta có $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

Và

$\Delta CHO \sim \Delta CAS \Leftrightarrow \frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Tam giác BHO vuông tại O , có $\tan \widehat{BHO} = \frac{OB}{OH} = \sqrt{3}$

Suy ra $\widehat{BHO} = 60^\circ \longrightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$. **Chọn A.**

Câu 35: $AH \perp BC (H \in BC) \Rightarrow AH \perp (BCD)$

Tam giác ABC vuông, có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{18}{5}$

Kẻ $CM \perp BD (M \in BD)$, $HK \parallel CM \Rightarrow HK \perp BD$

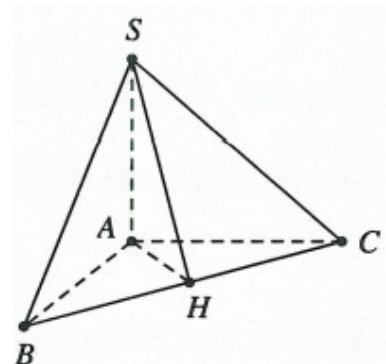
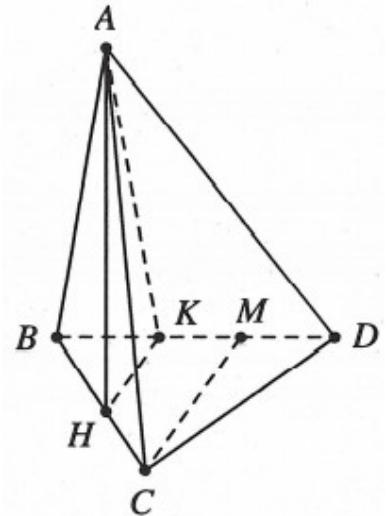
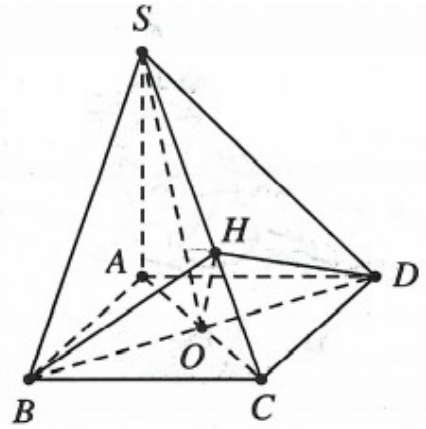
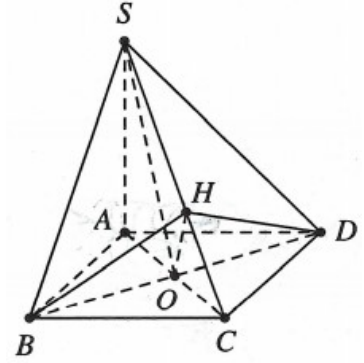
Ta có $AH \perp BD, HK \perp BD \Rightarrow BD \perp (AHK) \Rightarrow BD \perp AK$

Do đó $(\widehat{ABD}); (\widehat{BCD}) = (\widehat{AK}; \widehat{HK}) = \widehat{AKH}$

Lại có $\frac{HK}{CM} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow HK = \frac{CM \cdot BH}{BC} = \frac{72}{25}$

Mà $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{24}{5}$ nên $\tan \widehat{AKH} = \frac{AH}{HK} = \frac{5}{3}$.

Vậy $\cos \widehat{AKH} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \widehat{AKH}}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$. **Chọn C.**



Câu 36: Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow OH \perp BC$ mà $OA \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow (\widehat{SBC}); (\widehat{ABC}) = (\widehat{SH}; \widehat{AH}) = \widehat{SHA}$

Tam giác ABC vuông cân tại $A \longrightarrow AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SAH vuông tại $S \longrightarrow \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \sqrt{2}$.

Chọn D.

Câu 37: Gọi $O = AC \cap BD$.

Kẻ DM vuông góc $SA \Rightarrow BM \perp SA \Rightarrow SA \perp (BMD)$

Suy ra $(\widehat{SAB}); (\widehat{SAD}) = (\widehat{BM}; \widehat{DM}) = \widehat{BMD}$

Ta có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Tam giác SAO vuông $\Rightarrow OM = \frac{SO \cdot OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác BMO vuông tại O , $OB = OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\longrightarrow \Delta BMO$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{BMO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Chọn D.

Câu 38: Gọi M là trung điểm BC , $HK // AM$ ($K \in BC$)

Suy ra $HK \perp BC$ mà $A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'HK)$

Gọi E là trung điểm $B'C' \Rightarrow A'E // AM \Rightarrow A'E // HK$

Do đó $BC \perp (A'HKE) \Rightarrow (\widehat{BCC'B'}); (\widehat{ABC}) = 180^\circ - \widehat{EKH} = \varphi$

Xét hình thang vuông $A'HKE$ có $\varphi = 180^\circ - \widehat{EKH} = \widehat{A'EK}$

Gọi I là hình chiếu của K trên $A'E \Rightarrow A'H = IK = a\sqrt{3}$

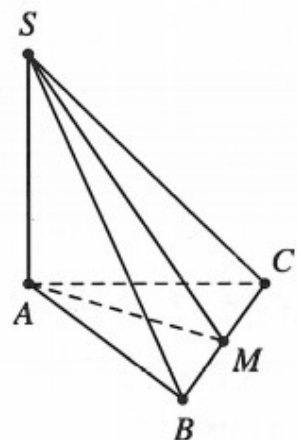
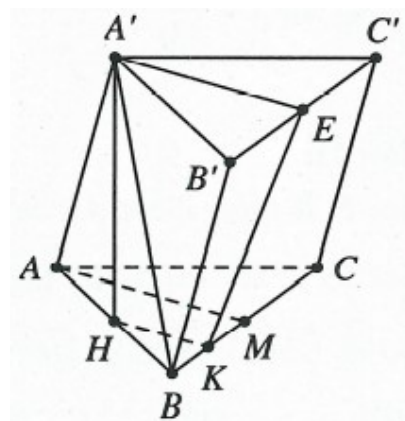
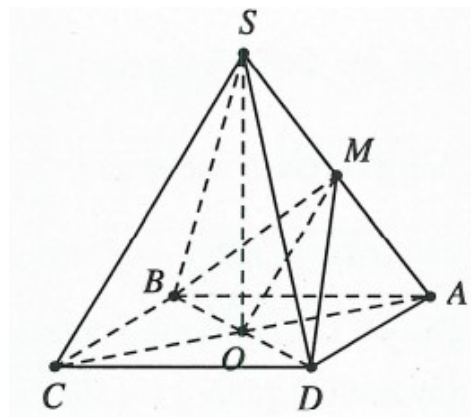
Và $IE = A'E - A'I = A'E - HK = A'E - \frac{1}{2}A'E = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

Suy ra $\tan \widehat{IEK} = \frac{IK}{IE} = a\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}a}{2} = 2 \Rightarrow \cos \widehat{IEK} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn C.**

Câu 39: Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$ mà $SA \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow (\widehat{SBC}); (\widehat{ABC}) = (\widehat{SM}; \widehat{AM}) = \widehat{SMA} = x$

Tam giác ABC vuông cân tại $A \longrightarrow AM = \frac{BC}{2} = a$



Tam giác SAM vuông tại A , có $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = 1$

Do đó $\widehat{SMA} = 45^\circ$. **Chọn A.**

Câu 40: Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow OH \perp BC$ mà $OA \perp BC$

Suy ra $BC \perp (OAH) \Rightarrow (\widehat{OBC}); (\widehat{ABC}) = (\widehat{OH}; \widehat{AH}) = \widehat{OHA}$

Tam giác OBC vuông cân tại $O \longrightarrow OM = \frac{BC}{2} = a\sqrt{3}$

Tam giác OAH vuông tại $O \longrightarrow \tan \widehat{OHA} = \frac{OA}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $(\widehat{OBC}); (\widehat{ABC}) = 30^\circ$. **Chọn A.**

Câu 41: Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$ mà $SA \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow (\widehat{SBC}); (\widehat{ABC}) = (\widehat{SM}; \widehat{AM}) = \widehat{SMA} = x$

Ta có $\widehat{SB}; (\widehat{ABC}) = (\widehat{SB}; \widehat{AB}) = \widehat{SBA} = 30^\circ$

$$\Rightarrow SA = \tan 30^\circ \cdot 2a = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan x = \frac{SA}{AM} = \frac{2\sqrt{3}a}{3} : \left(2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2}{3}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 42:

Gọi E là trung điểm $AB \Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow CE \perp (SAB)$

Kẻ $EH \perp SB (H \in SB)$ mà $CE \perp SB \Rightarrow SB \perp (CHE)$

Do đó $(\widehat{SAB}); (\widehat{SBC}) = (\widehat{HE}; \widehat{CH}) = \widehat{CHE}$

Tam giác SBC vuông tại $C \Rightarrow CH = \frac{SC \cdot BC}{\sqrt{SC^2 + BC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

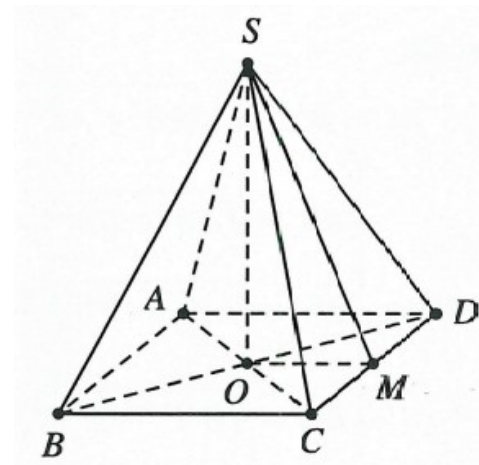
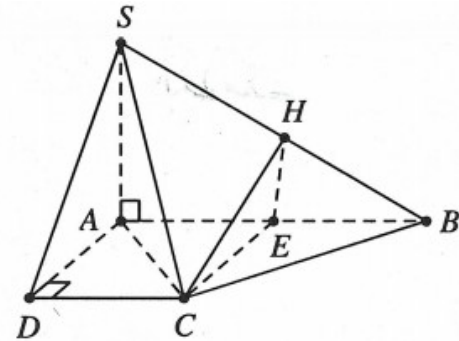
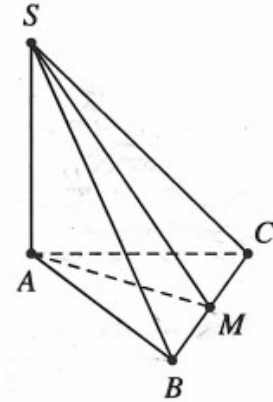
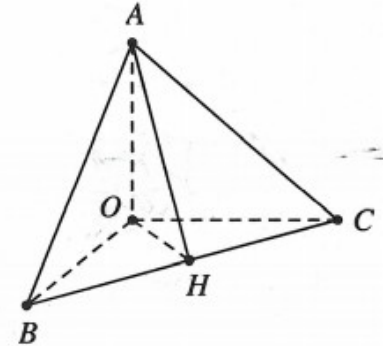
Tam giác CHE vuông tại H , có $\sin \widehat{CHE} = \frac{CE}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\widehat{CHE} = 60^\circ \longrightarrow (\widehat{SAB}); (\widehat{SBC}) = \frac{\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 43: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm $CD \Rightarrow \begin{cases} SO \perp CD \\ OM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SMO)$

Do đó $(\widehat{SCD}); (\widehat{ABCD}) = (\widehat{SM}; \widehat{OM}) = \widehat{SMO}$



Tam giác SMO vuông tại O , có $\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \sqrt{3}$

Suy ra $\widehat{SMO} = 60^\circ \longrightarrow \widehat{(SCD);(ABCD)} = 60^\circ$. **Chọn A.**

Câu 44: Vì ABC là hình chiếu của MNP trên (ABC)

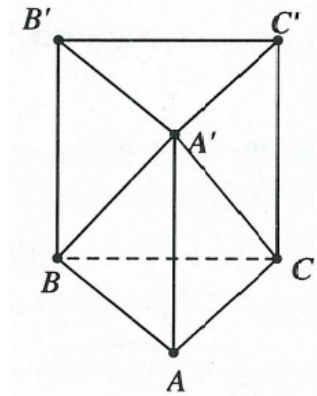
Suy ra $\cos \widehat{(MNP);(ABC)} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(MNP);(ABC)} = 60^\circ$. **Chọn A.**

Câu 45: Tam giác ABC là hình chiếu của vuông góc của tam giác $A'BC$ trên đáy (ABC)

Ta có: $S_{A'BC} \cdot \cos \widehat{(A'BC);(ABC)} = S_{ABC}$

Khi đó $\cos \widehat{(A'BC);(ABC)} = \frac{S_{ABC}}{S_{A'BC}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

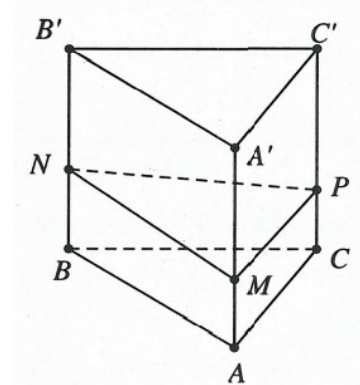
Suy ra $\widehat{(A'BC);(ABC)} = 30^\circ$. **Chọn C.**



Câu 46: Do tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác (MNP) trên mặt đáy (ABC)

Ta có: $\cos \widehat{(MNP);(ABC)} = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $\widehat{(MNP);(ABC)} = 30^\circ$. **Chọn C.**



Câu 47: Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AC' = a\sqrt{2}, MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Áp dụng hệ thức Herong ta có:

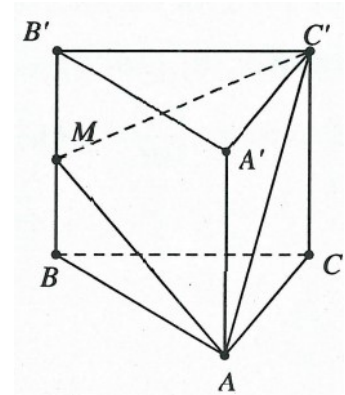
$S_{AMC'} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{4}, S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Do tam giác ABC là hình chiếu của tam giác AMC' trên mặt đáy ABC

nên $\cos \widehat{(AMC');(ABC)} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMC'}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\widehat{(AMC');(ABC)} = 45^\circ$. **Chọn B.**

Câu 48:



Ta có $BC = B'C' = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2} \\ AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Do $AB'^2 + AI^2 = B'I^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow \Delta B'AI$ vuông tại A .

$$\text{Ta có: } S_{AB'I} = \frac{1}{2} AB'.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos((AB'I);(ABC)) = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn D.

Câu 49: Gọi I là trung điểm của AD thì $ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI \perp AD$

Lại có $CI \perp SA \Rightarrow CI \perp (SAD) \Leftrightarrow CI \perp SD$

Dựng $IH \perp SD$, mà $CI \perp SD$ nên $SD \perp (CHI)$

Do đó $((SCD);(SAD)) = \widehat{CHI}$

Mặt khác ΔCIH vuông tại I có

$$CI = a, IH = \frac{1}{2} d(A; SD)$$

$$\text{Mà } d(A; SD) = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

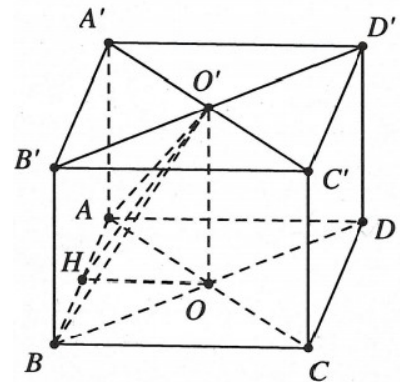
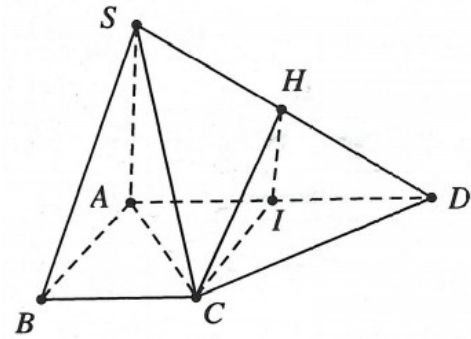
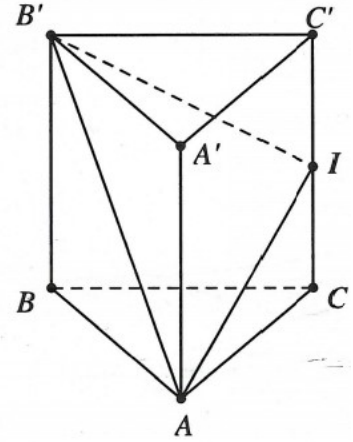
Vậy $\tan \widehat{CHI} = \frac{CI}{IH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CHI} = 60^\circ$. **Chọn D.**

Câu 50: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $OO' \perp (ABCD)$

Dựng $OH \perp AB$ mà $AB \perp OO' \Rightarrow AB \perp (O'HO)$

Do đó $((O'AB);(ABCD)) = \widehat{O'HO} = \alpha$

Khi đó $\tan \alpha = \frac{OO'}{OH} = 2$. **Chọn C.**



Câu 51: Ta có: $(MNP) // (SDC)$ nên $\alpha = (\widehat{SAC}; \widehat{SCD})$

Lại có $\widehat{ADC} = 60^\circ, S_{ACD} = S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \widehat{BAD} = 3\sqrt{3}$

$$AC = \sqrt{DA^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cos 60^\circ} = \sqrt{13}$$

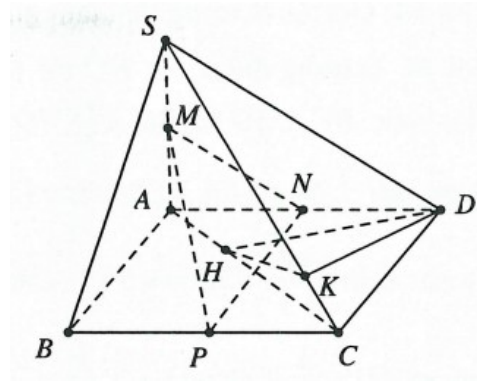
$$\text{Đựng } DH \perp AC \Rightarrow DH = \frac{2S_{ACD}}{AC} = \frac{6\sqrt{39}}{13}$$

Do $DH \perp SA \Rightarrow DH \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp DH$

Đựng $HK \perp SC \Rightarrow SC \perp (HKD) \Rightarrow (\widehat{SAC}; \widehat{SCD}) = \widehat{HKD}$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 5, CD = 3, SD = 2\sqrt{7} \Rightarrow DK = \frac{2S_{SCD}}{SC} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{SC} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Do đó $\sin \widehat{HKD} = \frac{DH}{DK} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \widehat{HKD} = 78,69^\circ$. **Chọn A.**



Câu 52: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD)$

Đựng $OH \perp SA$, ta có

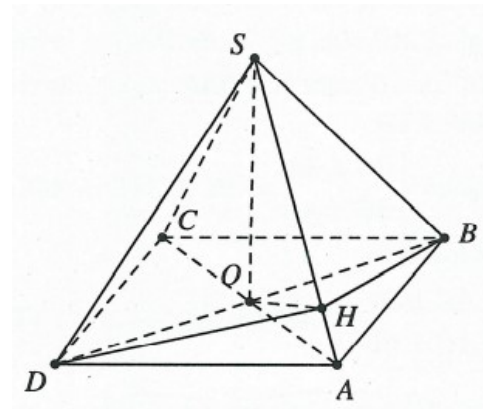
$$\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$$

Do đó $SA \perp (BDH) \Rightarrow ((\widehat{SAD}); (\widehat{SAB})) = (\widehat{DH}; \widehat{BH})$

$$\text{Ta có: } OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OH = \frac{SO \cdot OA}{SA} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Suy ra } \tan \widehat{OHD} = \frac{OD}{OH} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{DHB} = \cos(2\widehat{DHO}) = -\frac{1}{3} < 0 \text{ nên } \cos((\widehat{SAB}); (\widehat{SAD})) = \frac{1}{3}. \text{ Chọn B.}$$



Câu 53: Gọi E là trung điểm của $B'C'$ thì $A'E \perp B'C'$

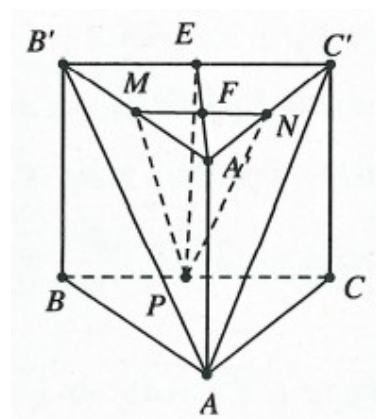
Lại có

$$AA' \perp B'C' \Rightarrow BB' \perp (A'EA) \Rightarrow (\widehat{AB'C'}; \widehat{ABC}) = \widehat{AEA'} = \alpha$$

Gọi F là trung điểm của MN thì $(\widehat{MNP}; \widehat{A'B'C'}) = \beta = \widehat{PEF}$

$$\text{Dễ thấy } (\widehat{MNP}; \widehat{A'B'C'}) = |\alpha - \beta|, AE = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3, EF = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \tan \alpha = \frac{AA'}{A'E} = \frac{2}{3}, \tan \beta = \frac{PE}{EF} = \frac{4}{3}$$



Sử dụng Casio ta được $\widehat{(MNP; AB'C')} = \left| \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{4}{3} \right|$

$\Rightarrow \cos \widehat{(MNP; AB'C')} = \frac{17\sqrt{13}}{65}$. **Chọn C.**

Câu 54: Gọi O là trọng tâm tam giác đều ABC thì $SO \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC thì $OM \perp BC$

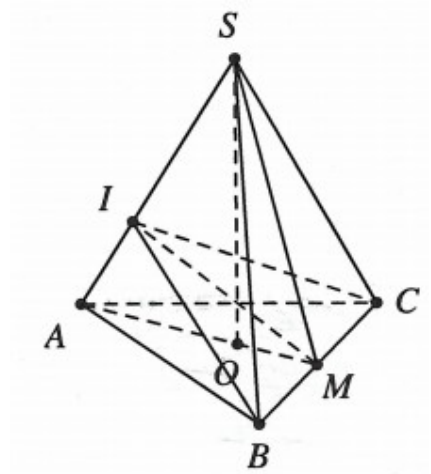
Mặt khác $BC \perp SO \Rightarrow BC \perp (SMO) \Rightarrow BC \perp SA$

Dựng $MI \perp SA \Rightarrow SA \perp (BIC) \Rightarrow \widehat{(SAB; SAC)} = \widehat{(BI; CI)}$

Ta có: $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$

Suy ra $MI = \frac{3}{2}d(O; SA) = \frac{3}{2} \cdot \frac{SO \cdot OA}{SA} = a \frac{\sqrt{11}}{4}$

$\Rightarrow \tan \widehat{MIB} = \frac{MB}{MI} = \frac{2}{\sqrt{11}} \Rightarrow \cos \widehat{BIC} = 2 \cos \widehat{MIB} = \frac{7}{15}$. **Chọn C.**



Câu 55: Ta có: $\begin{cases} AO \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOA)$

Do đó $\widehat{SOA} = \alpha \Rightarrow SA = OA \tan \alpha = a$

Lại có $AB = a$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD , tam giác SAB vuông cân tại A nên $AM \perp SB$

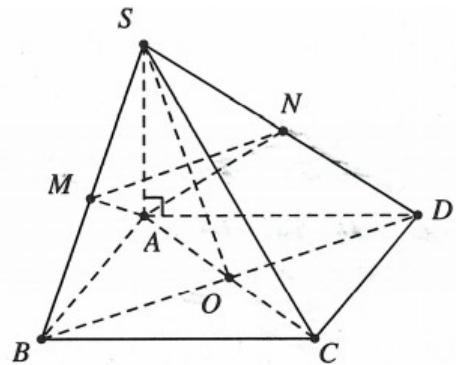
Lại có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Mặt khác

$\begin{cases} AC \perp SA \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow MN \perp (SBD)$

Vậy $\widehat{((SBC); (SAC))} = \widehat{(AM, MN)}$, mà $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} = MN = AN \Rightarrow \widehat{AMN} = 60^\circ$

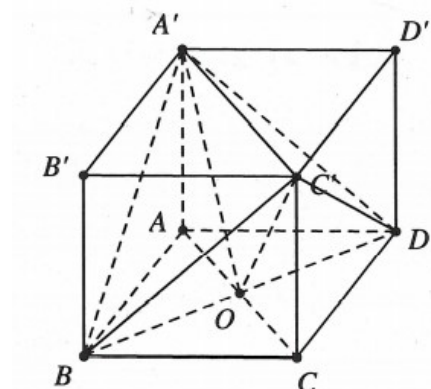
Do đó $\widehat{((SBC); (SAC))} = 60^\circ$. **Chọn C.**



Câu 56: Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ thì $AC \perp BD$

Lại có $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'ACC')$

Suy ra $BD \perp (A'OC')$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng $\widehat{A'OC'}$



Mặt khác $\tan \widehat{A'OA} = \frac{AA'}{OA} = \frac{AA'}{\frac{AC}{2}} = 1$ nên $\widehat{A'OA} = 45^\circ$

Tương tự $\widehat{C'OC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A'OC'} = 90^\circ$. **Chọn A.**

Câu 57: Gọi H là trung điểm của CD

Khi đó $AH \perp CD$ (do tam giác ACD cân tại A)

Mặt khác $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$

Tương tự $BH \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$

Dựng $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (CKD)$

Khi đó $(\widehat{ABC}; \widehat{ABD}) = \widehat{CKD}$

Hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc $\widehat{CKD} = 90^\circ$

Suy ra $KH = \frac{CD}{2}$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow KH = x, \Delta ACD = \Delta BCH \Rightarrow AH = BH = \sqrt{a^2 - x^2}$

Tam giác AHB vuông cân tại $H \Rightarrow HK = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = x \Leftrightarrow 2x^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn A.

Câu 58:

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Kẻ $BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID)$.

Vậy $(\widehat{(SBC); (SCD)}) = (\widehat{BI; ID}) = 60^\circ$.

Dễ thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ \widehat{BIO} = \frac{1}{2} \widehat{BID} \end{cases}$.

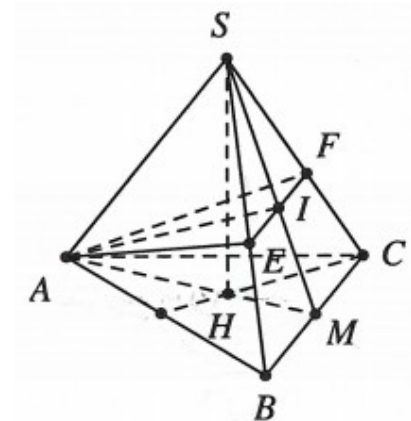
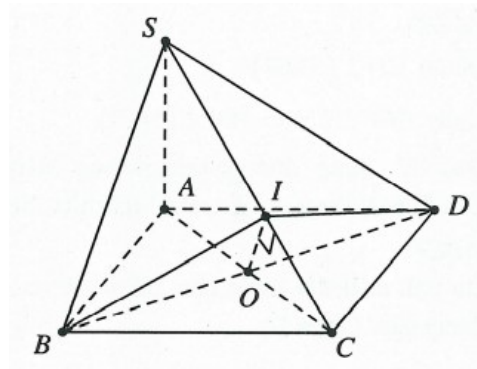
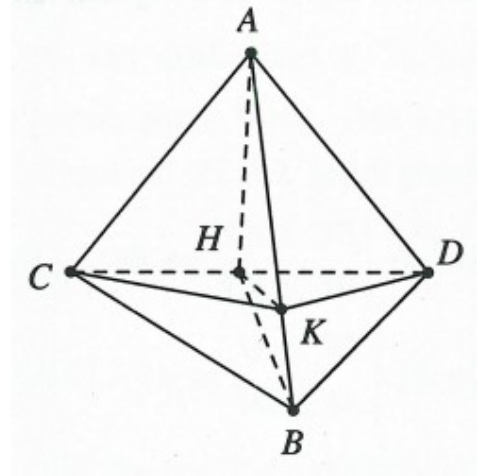
▪ **Trường hợp 1:** $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^\circ$.

Câu 59: Gọi H là trọng tâm tam giác (ABC) thì $SH \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm của BC , trong mặt phẳng (SAM) dựng

$AI \perp SM$, qua I dựng đường thẳng song song với BC cắt các đường thẳng SB, SC lần lượt tại E và F .

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow EF \perp (SAM)$



Do đó $\begin{cases} EF \perp AI \\ AI \perp SM \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow (AEF) \perp (SBC)$

Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp là tam giác cân AEF cân tại A có đường trung tuyến đồng thời là đường cao. **Chọn B.**

Câu 60:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

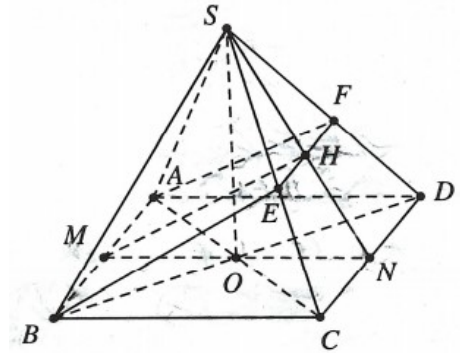
Ta có $\begin{cases} MN \perp CD \\ CD \perp SO \end{cases}$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$

Do đó $CD \perp (SMN)$

Dựng $MH \perp SN \Rightarrow MN \perp (SCD)$

Qua H dựng đường thẳng song song với AB cắt SC, SD lần lượt tại E và F thì thiết diện là hình thang $ABEF$

Do tính chất đối xứng nên $BE = AF \Rightarrow AFEB$ là hình thang cân. **Chọn D.**

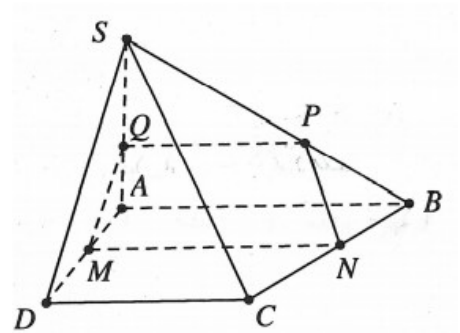


Câu 61: Dựng $QP // AB$ ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$

Do đó $PQ \perp (SAD)$, tương tự dựng $MN // AB (N \in BC)$ suy ra thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là Hình thang $MNPQ$

Do $PQ \perp (SAD) \Rightarrow PQ \perp MQ \Rightarrow$ thiết diện là hình thang

vuông. **Chọn C.**



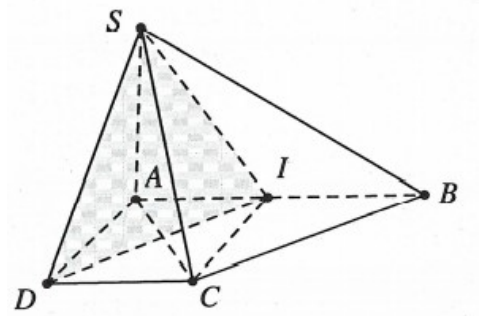
Câu 62: Gọi I là trung điểm của AB thì $ADCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC \perp DI$

Mặt khác $DI \perp SA \Rightarrow DI \perp (SAD)$

Vậy $(SDI) \perp (SAD)$ do đó (α) là mặt phẳng (SDI)

Ta có: $SD = SI = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}, DI = a\sqrt{2}$ suy ra tam giác SDI đều cạnh $a\sqrt{2}$

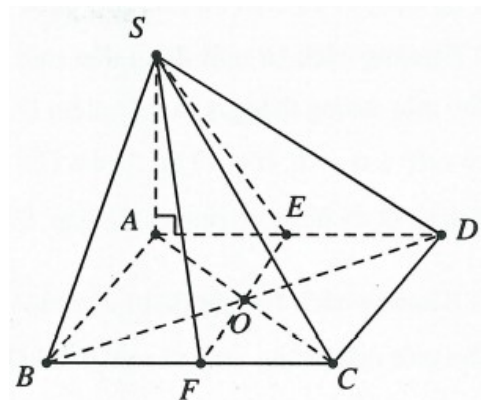
Vậy $S_{SDI} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. **Chọn C.**



Câu 63:

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC

Khi đó $O \in EF, EF \perp AD$, mặt khác $EF \perp SA$



Do đó $EF \perp (SAD) \Rightarrow (SEF) \perp (SAD)$

Ta có: $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}, EF = AB = a$

Diện tích thiết diện là $S = \frac{1}{2}EF.SE = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**