LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

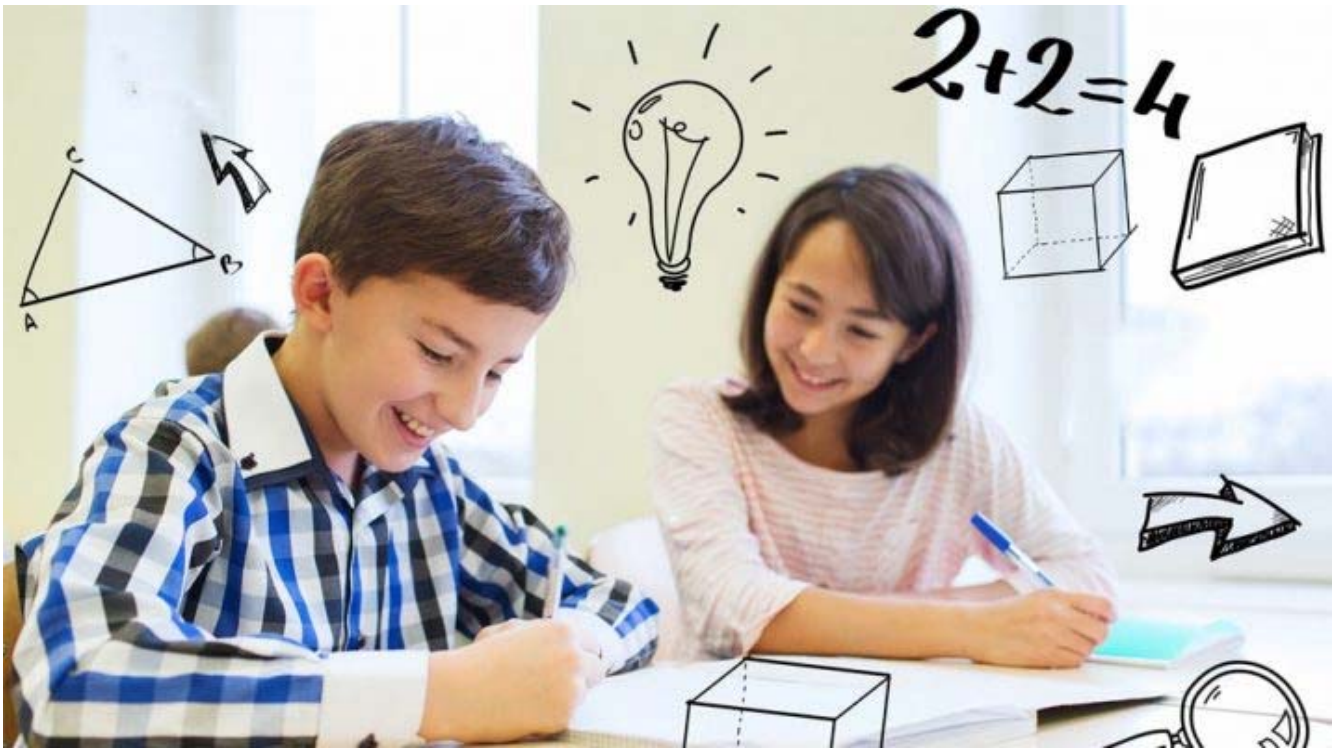
CS 1: P5, Dãy 14 tập thể xã tắc. Đường Ngô Thời Nhậm

CS 2: Trung Tâm Cao Thắng - 11 Đống Đa

BÀI GIẢNG TRỌNG TÂM

TOÁN 12

(BẢN FULL ĐÁP ÁN CHI TIẾT DÀNH CHO GIÁO VIÊN)



TÀI LIỆU DÀNH RIÊNG HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

MỤC LỤC

NỘI DUNG	Trang
PHẦN 1: GIẢI TÍCH	
CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
BÀI 1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ	1
Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$.Tìm các khoảng đồng biến và nghịc biến của hàm số	4
Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên, tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm s	6
Dạng 3: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số	7
Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định	9
Dạng 5: Tìm tham số m để hàm số đông biến và nghịch biến trên tập con của $\mathbb{R}$	
BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	12
Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các điểm cực đại, cực tiểu, giá trị cực đại giá trị cực tiểu	13
Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị	14
Dạng 3: Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f(x)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số	15
Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số có cực trị	20
Dạng 5: Cho hàm số $f'(x)$ hoặc đồ thị hàm số $f'(x)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số	22
BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	25
Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a,b]$	25
Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Tìm GTLN, GTNN	30
Dạng 3: Tìm GTLN, GTNN trên khoảng hoặc nửa khoảng	35
BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	39

Dạng 1: Dựa vào định nghĩa tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số	**40**
Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số tìm các đường tiệm cân	**42**
Dạng 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số	**46**
Dạng 4: Bài toán tìm tham số m liên quan đến đường tiệm cận	**50**
BÀI 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ	**53**
Dạng 1 : Cho đồ thị hàm số. Tìm hàm số	**54**
Dạng 2: Cho bảng biến thiên. Yeu cầu tìm hàm số	**61**
Dạng 3: Cho bảng biến thiên, đồ thị hàm số . Tìm các tham số thuộc hàm số $y = f(x)$	**64**
BÀI 6. TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ VÀ TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ	**68**
Dạng 1: Tương giao của hai đồ thị	**68**
Dạng 2: Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên biện luận số nghiệm của phương trình	**71**
Dạng 3: Dựa vào bảng biến thiên. Biện luận số nghiệm của phương trình	**72**
Dạng 4: Phương trình tiếp tuyến tại điểm	**76**
Dạng 5 : Tiếp tuyến có hệ số góc	**77**
Dạng 6 : Phương trình tiếp tuyến đi qua	**81**
CHƯƠNG II. HÀM SỐ LŨY THỪA. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	**83**
BÀI 1. LŨY THỪA	**83**
Dạng 1: Tính, rút gọn và biến đổi biểu thức	**84**
Dạng 2: So sánh đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản	**87**
BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA	**91**
Dạng 1. Tìm tập xác định và tính đạo hàm của hàm số	**93**
Dạng 2: Tính đạo hàm	**96**
Dạng 3. Sự biến thiên và nhận dạng đồ thị hàm số	**98**
BÀI 3. LOGARIT	**105**

Dạng 1. Tính toán về logarit	**107**
Dạng 2. So sánh hai số logarit	**111**
Dạng 3 : Đẳng thức logarit	**114**
BÀI 4. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT	**120**
Dạng 1. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số	**121**
Dạng 2. Tính đạo hàm và giới hạn	**123**
Dạng 3. So sánh, Đẳng thức, bất đẳng thức	**125**
Dạng 4. GTLN và Gtnn của hàm số	**129**
Dạng 5. Nhận dạng đồ thị	**132**
BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT	**139**
Dạng 1. Phương pháp đưa về cùng cơ số	**139**
Dạng 2. Phương pháp đặt ẩn phụ	**142**
Dạng 3. Phương pháp logarit hóa, mũ hóa	**146**
Dạng 4: Sử Dụng Tính Đơn Điệu Hàm Số	**148**
BÀI 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT	**148**
Dạng 1: Đưa về cùng cơ số	**149**
Dạng 2: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa	**153**
Dạng 3: Phương Pháp Đặt Ẩn Phụ	**158**
CHƯƠNG III. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	**163**
BÀI 1. NGUYÊN HÀM	**163**
Dạng 1: Nguyên Hàm Đa Thức	**164**
Dạng 2: Nguyên Hàm Phân Thức	**168**
Dạng 3: Nguyên Hàm Căn Thức	**172**
Dạng 4: Nguyên Hàm hàm số lượng giác	**176**
Dạng 5: Nguyên Hàm Hàm Mũ, Loga	**178**

Dạng 6: Nguyên Hàm Từng Phần	**179**
BÀI 2.TÍCH PHÂN	**183**
Dạng 1: Tích Phân Hữu Tỉ	**186**
Dạng 2. Tích phân vô tỉ	**190**
Dạng 3: Tích Phân Lượng Giác	**195**
Dạng 4: Tích Phân Từng Phần	**197**
Dạng 5: Tích Phân Chứa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối	**203**
Dạng 6: Tích Phân Hàm Hợp Hàm Ẩn	**205**
BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN	**208**
Dạng 1: Tính Diện Tích Giới Hạn Bởi 1 Đồ Thị	
Dạng 2: Tính Diện Tích Giới Hạn Bởi 2 Hai Đồ Thị	
Dạng 3: Tính Thể Tích Vật Thể Tròn Xoay Dựa Vào Định Nghĩa	
Dạng 4: Tính Thể Tích Vật Thể Tròn Xoay Khi Quay Hình Phẳng Giới Hạn Bởi 1 Đồ Thị	
Dạng 5: Ứng Dụng Tích Phân Trong Vật Lý	
CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC	**242**
BÀI 1. SỐ PHỨC	**242**
BÀI 2. CỘNG, TRÙ, NHÂN SỐ PHỨC	**242**
BÀI 3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC	**242**
Dạng 1. Phần Thực – Phần Ảo & Các Phép Toán	**243**
Dạng 2: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện	**247**
Dạng 3. Biểu diễn số phức	**248**
Dạng 4. Tập hợp	**254**
BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC	**262**
Dạng 1 : Phương trình bậc hai hệ số thực	**262**
Dạng 2 : Phương trình quy về phương trình bậc hai	**263**

PHẦN 2: HÌNH HỌC	
CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN	267
BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN	280
BÀI 2. KHÁI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU	287
BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	288
Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	294
Dạng 2 : Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy	296
Dạng 3: Khối chóp đều	299
Dạng 4: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy	300
Dạng 5: Một số dạng khác	300
Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng, lăng trụ đều	301
Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên	305
CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ VÀ KHỐI TRỤ	
BÀI 1. MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN	308
BÀI 2. MẶT TRỤ_HÌNH TRỤ_ KHỐI TRỤ	315
BÀI 3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU	321
CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	
BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	328
BÀI 2. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN	344
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN	356

BÀI 1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng.

1) Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x)\geq 0, \forall x\in \mathrm{K}.$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x)\leq 0, \forall x\in \mathrm{K}.$

2) Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x)=0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K (hàm số $y=f(x)$ còn gọi là hàm hằng trên K).

3) Định lý mở rộng

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K. Nếu $f'(x)\geq 0\ (f'(x)\leq 0),\ \forall x\in \mathrm{K}$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K.

Chú ý: $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm. Tuy nhiên một số hàm số có $f'(x)=0$ tại vô hạn điểm nhưng các điểm rời rạc thì hàm số vẫn đơn điệu.

Ví dụ: Hàm số $y=2x-\sin 2x.$

Ta có $y'=2-2\cos 2x=2(1-\cos 2x)\geq 0, \forall x\in \mathbb{R}.$

$y'=0\Leftrightarrow 1-\cos 2x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ có vô hạn điểm làm cho $y'=0$ nhưng các điểm đó rời rạc nên hàm số $y=2x-\sin 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp:

2. Các ví dụ

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1.$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm: $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ nghịch biến trên khoảng nào được cho dưới đây?

A. $(-1;3)$ **B.** $(-\infty;-3)$ hoặc $(1;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$ **D.** $(-\infty;-1)$ hoặc $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6x-9.$

Ta có $y'\leq 0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 4: Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **D.** $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=8x^3>0\Leftrightarrow x>0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=2x^4-4x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, $y'<0$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

D. Trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đã cho đồng biến.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=8x^3-8x=8x\left(x^2-1\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$.

Vẽ phác họa bảng biến thiên và kết luận được rằng hàm số

- Đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
- Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\neq -2$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$. **Chọn D**

Bình luận: Hàm số đồng biến trên tất cả các khoảng con của các khoảng đồng biến của hàm số. Cụ thể trong bài toán trên:

- Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$;
- $(1;+\infty)\subset(-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên toàn tập xác định.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $[0;1]$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên toàn tập xác định.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=[-1;1]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}};\ y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên $[0;1]$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(1;\dfrac{5}{2}\right]$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=[1;4]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(1;4)\\x-1=4-x\end{cases}\longrightarrow x=\dfrac{5}{2}\in(1;4)$.

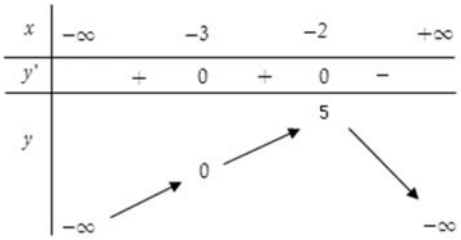
Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên, tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp:

2. Các ví dụ

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

I. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$.

II. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;5)$.

III.Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

IV.Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A

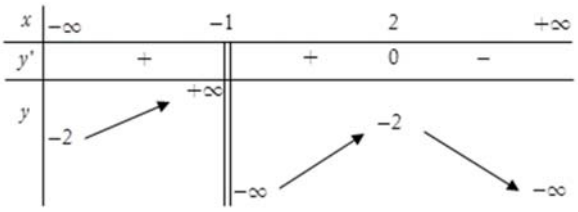
Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Suy ra II. Sai; III. Đúng; IV. Đúng.

Ta thấy khoảng $(-\infty;-3)$ chứa khoảng $(-\infty;-5)$ nên I Đúng.

Vậy chỉ có II sai.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;+\infty)$ và $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;2)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

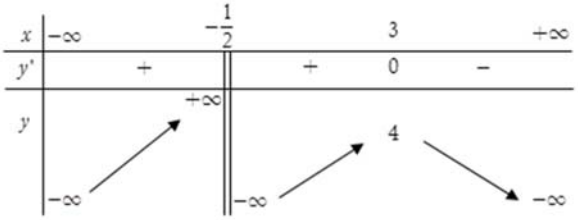
D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $(0;2)\subset(-1;2)$, mà hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ nên suy ra C đúng.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

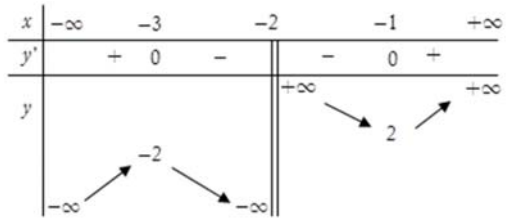
Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số

- Đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$.
- Nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây



A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

B. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng -3.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu là 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét sau

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)\Rightarrow$ A sai (sai chỗ dấu $\cup$).

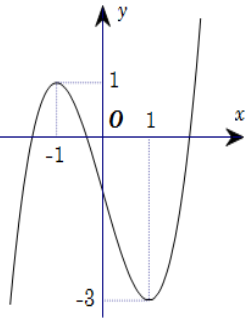
Hàm số có giá trị cực đại $y_{CĐ}=-2\Rightarrow$ B sai.

Hàm số đồng biến khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)\Rightarrow$ C đúng.

Hàm số có điểm cực tiểu là $-1\Rightarrow$ D sai.

Dạng 3: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+$

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;$

C. Hàm số nghịch biến trên kh

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty$

Giải

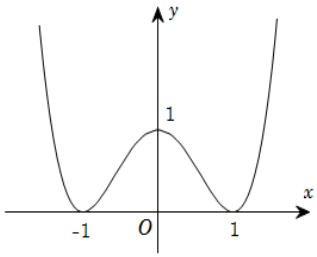
Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có kết quả: Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$ nên các khẳng định **A, B, C** đúng.

Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì khẳng định **D** sai.

Ví dụ: Ta lấy $-1,1\in(-\infty;-1),\ 1,1\in(1;+\infty):-1,1<1,1$ nhưng $f(-1,1)>f(1,1)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

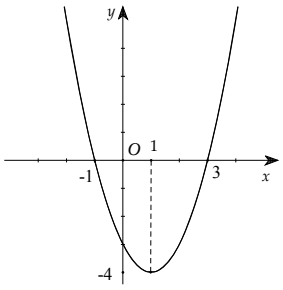
Lời giải

Chọn D

Từ dáng điệu của đồ thị ta nhận thấy trong khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$ dáng điệu của hàm số là đi lên nên hàm số đồng biến trên $(-1;0);(1;+\infty)$.

Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì khẳng định **B** sai.

Câu 3 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có nhận xét:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi qua điểm $x=-1$.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" khi qua điểm $x=3$.

Do đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy B đúng.

Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định

1. Phương pháp:

2. Các ví dụ

Câu 1: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ đồng biến trên tập xác định

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 3$. **C.** $-1\le m\le 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=3x^2+6x+m$.

Ycbt $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3>0 \\ 9-3m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 3.$

Chọn B

Cách giải trắc nghiệm. Quan sát ta nhận thấy các giá trị m cần thử là:

✓ $m=3$ thuộc B & C nhưng không thuộc A,D.

✓ $m=2$ thuộc C & D nhưng không thuộc A,B.

● Với $m=3\Rightarrow y=x^3+3x^2+3x+3\Rightarrow y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó ta loại A và D.

● Với $m=2\Rightarrow y=x^3+3x^2+2x+2\Rightarrow y'=3x^2+6x+2$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x+2=0$ có $\Delta>0$ nên $m=2$ không thỏa nên loại C.

Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(4m-3)x+2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=x^2-2mx+4m-3$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm)

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4m+3\leq 0\Leftrightarrow 1\leq m\leq 3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tham số m thỏa mãn ycbt là $m=3$.

Câu 3: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta'\leq 0\Leftrightarrow m^2+3(4m+9)\leq 0\Leftrightarrow -9\leq m\leq -3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-9;-8;...;-3\}$.

Sai lầm hay gặp là "Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$". Khi đó ra giải ra $-9<m<-3$ và **Chọn D**

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2x^2+(m+3)x+m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m=-4$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=mx^2-4x+m+3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1. ● $m=0$ thì $y'=-4x+3\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

TH2. ● $\begin{cases}a=m>0\\ \Delta'_{y'}=-m^2-3m+4\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 1$.

Suy ra giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là $m=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=(m+2)\frac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(m-8)x+m^2-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m\leq -2$. **D.** $m\geq -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=(m+2)x^2-2(m+2)x+m-8$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1 ● $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$, khi đó $y' = -10 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

TH2 ● $\begin{cases} a = m+2 < 0 \\ \Delta' = (m+2)^2 - (m+2)(m-8) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ 10(m+2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Hợp hai trường hợp ta được $m \le -2$.

Dạng 5: Tìm tham số m để hàm số đồng biến và nghịch biến trên tập con của $\mathbb{R}$.

1. Phương pháp:

2. Các ví dụ

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$ là

A. $m < 5$ **B.** $-2 \le m \le \frac{3}{2}$ **C.** $m > -2$ **D.** $m < \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$.

Xét phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) = 7(m^2 - m + 1) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < x_2$ với mọi m .

Để hàm số đồng biến trên $[2;+\infty) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 \le 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 4 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m+1)}{3} < 4 \\ \frac{-(2m^2 - 3m + 2)}{3} - 2.\frac{2(m+1)}{3} + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -2 \le m \le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m \le \frac{3}{2}.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

A. $m \le 0$. **B.** $-1 < m < 0$. **C.** $-1 \le m \le 0$. **D.** $m \ge -1$.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2) = 3.\left[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)\right]$.

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+2) = 1 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m,\ x = m+2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số nghịch biến trên $[0;1] \longleftrightarrow [0;1] \subset [m;m+2]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m+2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 0.$

Câu 3: Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1;x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$. ?

A. $m = -1$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -3$, $m = 1$. **D.** $m = -1$, $m = 3$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 + 6(m-1)x + 9$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' = 27$

$\Leftrightarrow 9(m-1)^2 - 9 = 27 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}.$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1?

A. $m = -\frac{9}{4}$ **B.** $m = 3$ **C.** $m \le 3$ **D.** $m = \frac{9}{4}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 3m > 0 \\ 2\frac{\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 2.\frac{\sqrt{9-3m}}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}.$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$?

A. $m > 2$ **B.** $m \ge 1$ **C.** $m \ge 2$ **D.** $m > 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Với $-m+1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $y' < 0, \forall x \ne m \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Ycbt $\Leftrightarrow (-\infty;2) \subset (-\infty;m) \Leftrightarrow m \ge 2$: (thỏa mãn).

Cách 2. Ta có $y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x < 2 \\ x \ne m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \ne (-\infty;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \in [2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2.$

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S

A. 5 **B.** 4 **C.** Vô số. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y'>0,\forall x\neq m$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+3>0\Leftrightarrow -1<m<3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{0;1;2\}$.

Sai lầm hay gặp là cho $y'\geq 0,\forall x\neq m\Leftrightarrow -1\leq m\leq 3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{-1;0;1;2;3\}$.

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và $x_0\in(a;b)$.

1. Định lí 1

● Nếu tồn tại số h sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0. Khi đó:

✓ x_0 được gọi là một **điểm cực đại của hàm số** $f(x)$.

✓ $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại của hàm số** $f(x)$.

● Nếu tồn tại số h sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Khi đó:

✓ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

✓ $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập xác định K.

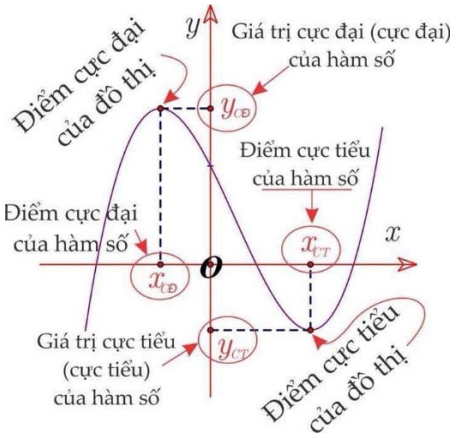
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)**.

2. Chú ý

Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập xác định K mà $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a,b)\subset$ K và (a,b) chứa x_0.

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định K của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số** f.



3. Định lý 2

- $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}\longrightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$.
- $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}\longrightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

4. Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là $y=mx+n$, trong đó $mx+n$ là dư thức trong phép chia

$f(x)$ cho $f'(x)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các điểm cực đại, cực tiểu, giá trị cực đại giá trị cực tiểu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Câu 1: Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y=x^3-3x+2$ là?

A. $y_{CD}=4$. **B.** $y_{CD}=1$. **C.** $y_{CD}=0$. **D.** $y_{CD}=-1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=4\\x=1\Rightarrow y=0\end{array}\right.$.

Do đó giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD}=4$.

Câu 2: Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y=x^3-5x^2+3x+1$.

A. $x_0=-3$ hoặc $x_0=-\frac{1}{3}$. **B.** $x_0=0$ hoặc $x_0=\frac{10}{3}$.

C. $x_0=0$ hoặc $x_0=-\frac{10}{3}$. **D.** $x_0=3$ hoặc $x_0=\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-10x+3;\ y'=0\Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$..

Câu 3: Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y=x^3-3x+1$.

A. $x_0=-1$. **B.** $x_0=0$. **C.** $x_0=1$. **D.** $x_0=2$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3=3(x^2-1);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\to y(-1)=3\\x=1\to y(1)=-1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 4: Tìm các điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2$.

A. $(0;0)$ hoặc $(1;-2)$. **B.** $(0;0)$ hoặc $(2;4)$.

C. $(0;0)$ hoặc $(2;-4)$. **D.** $(0;0)$ hoặc $(-2;-4)$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x=3x(x-2);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y=0\\x=2\to y=-4\end{array}\right.$..

Câu 5: Biết rằng hàm số $y=x^3+4x^2-3x+7$ đạt cực tiểu tại x_{CT}. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_{CT}=\frac{1}{3}$. **B.** $x_{CT}=-3$. **C.** $x_{CT}=-\frac{1}{3}$. **D.** $x_{CT}=1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+8x-3;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Vẽ bảng biến thiên, ta kết luận được $x_{CT}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 6: Gọi y_{CD}, y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT}=2y_{CD}$. **B.** $y_{CT}=\dfrac{3}{2}y_{CD}$. **C.** $y_{CT}=y_{CD}$. **D.** $y_{CT}=-y_{CD}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-3;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\to y(1)=-2\\x=-1\to y(-1)=2\end{array}\right.$. Do đó $y_{CT}=-y_{CD}$.

Câu 7: Gọi y_1, y_2 lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+4$. Tính $P=y_1.y_2$.

A. $P=-302$. **B.** $P=-82$. **C.** $P=-207$. **D.** $P=25$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x-9;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\to y(3)=-23\\x=-1\to y(-1)=9\end{array}\right.$.

Suy ra $P=y_1.y_2=9.(-23)=-207$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

B. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

D. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=-4x^3+4x=-4x\left(x^2-1\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vẽ phát họa bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Cách 2. Ta có $\left\{\begin{array}{l}a=-1\\b=2\end{array}\right.\longrightarrow ab<0\longrightarrow$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Vì $a=-1<0$ nên đồ thị có dạng chữ M. Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Câu 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$.

A. $y=x-1$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=-x-1$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=-6x^2+6x;\ y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\Rightarrow y=1\\x=1\Rightarrow y=2\end{bmatrix}$.

Suy ra đồ thị hàm số đã hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(1;2)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị chính là đường thẳng AB có phương trình $y=x+1$.

Cách 2. Lấy y chia cho y', ta được $\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)y'+x+1$.

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là phần dư trong phép chia, đó là $y=x+1$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $y=-8x+m$. **B.** $y=-8x+m-3$.

C. $y=-8x+m+3$. **D.** $y=-8x-m+3$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x-9;\ y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\Rightarrow y=5+m\\x=3\Rightarrow y=-27+m\end{bmatrix}$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1;5+m)$ và $B(3;-27+m)$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm $A,\ B$ có phương trình $y=-8x+m-3$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{4}$. **D.** $m=\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Chọn D

Xét hàm $y=x^3-3x^2+1$, có $y'=3x^2-6x\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\to y(0)=1\\x=2\to y(2)=-3\end{bmatrix}$.

Suy ra $A(0;1),\ B(2;-3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Suy ra đường thẳng AB có một VTCP là $\overrightarrow{AB}=(2;-4)\longrightarrow$ VTPT $\overrightarrow{n_{AB}}=(2;1)$.

Đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ có một VTCP là $\overrightarrow{n_d}=(2m-1;-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{AB}}.\overrightarrow{n_d}=0\Leftrightarrow 2.(2m-1)-1=0\Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$.

Dạng 3: Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, bảng biến thiên của đồ thị hàm số $f(x)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Chọn A

Nhận thấy y' đổi dấu khi qua $x=-3$ và $x=2$ nên hàm số có 2 điểm cực trị. ($x=1$ không phải là điểm cực trị vì y' không đổi dấu khi qua $x=1$).

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba giá trị cực trị. **B.** Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có hai điểm cực trị. **D.** Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

- Hàm số có ba điểm cực trị, gồm các điểm $x=-1,\ x=1,\ x=0$ vì đạo hàm y' đổi dấu đi qua các điểm đó.
- Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$.

(đáp án A sai vì hàm số chỉ có hai giá trị cực trị là $y_{CD}=-3$ và $y_{CT}=-4$. Nói đến đồ thị hàm số thì khi đó mới có ba điểm cực trị là $A(0;-3),\ B(-1;4),\ C(1;-4)$..

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Lời giải.

Chọn D

● Tại $x = x_2$ hàm số $y = f(x)$ không xác định nên không đạt cực trị tại điểm này.

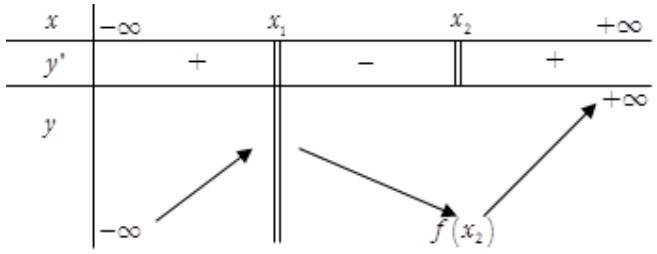
● Tại $x = x_1$ thì dễ thấy hàm số đạt cực đại tại điểm này.

● Tại $x = x_0$, hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng liên tục tại x_0 thì hàm số vẫn đạt cực trị

tại x_0 và theo như bảng biến thiên thì đó là cực tiểu.

Vậy hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

B. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải.

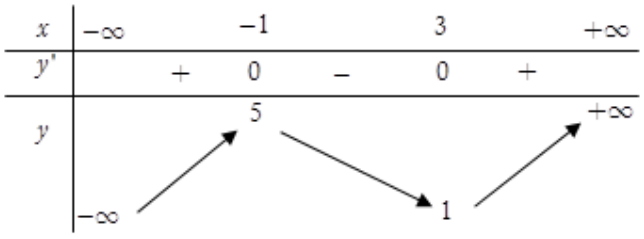
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

● $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua điểm x_1 nhưng tại x_1 hàm số $f(x)$ không xác định nên x_1 không phải là điểm cực đại.

● $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" khi đi qua điểm x_2 suy ra x_2 là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. . **B.** 3. . **C.** 4. . **D.** 2.

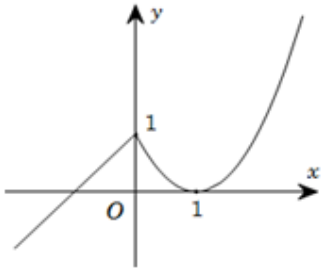
Lời giải.

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất

và đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

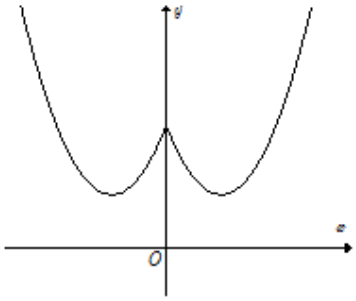
Lời giải.

Chọn D

Dễ nhận thấy hàm số có một điểm cực trị là điểm cực tiểu tại $x=1$.

Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, ta có $f(x)<f(0)$ với mọi $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $x=0$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 7: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

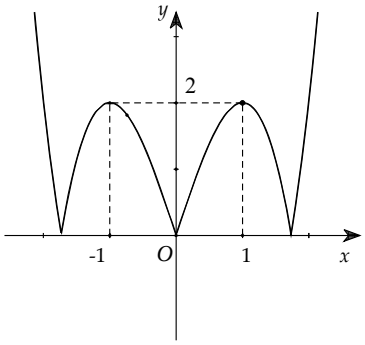
Chọn A

Dễ nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua Oy.

Vấn đề nằm ở chỗ là điểm có đồ thị gấp khúc có phải là điểm cực trị của đồ thị hàm số hay không? Câu trả lời là có (tương tự lời giải thích như câu 25).

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, gồm 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



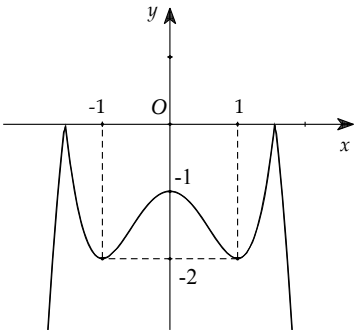
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

Theo định nghĩa cực trị thì từ đồ thị ta nhận thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



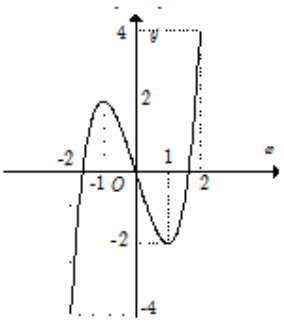
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

Theo định nghĩa cực trị thì từ đồ thị ta nhận thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Chọn B

Theo định nghĩa điểm cực đại thì hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số có cực trị

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx+m$ có hai điểm cực trị.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $m\in(0;8)$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx+6m=3\left(x^2-2mx+2m\right)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2-2mx+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m>2\end{array}\right.$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+x^2+x+2017$ có cực trị.

A. $m\in(-\infty;1]$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.

C. $m\in(-\infty;0)\cup(0;1]$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Lời giải.

Chọn D

Nếu $m=0$ thì $y=x^2+x+2017$: Hàm bậc hai luôn có cực trị.

Khi $m\neq 0$, ta có $y'=mx^2+2x+1$.

Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $mx^2+2x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\\Delta'=1-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\neq m<1.$

Hợp hai trường hợp ta được $m<1$.

Nhận xét. Sai lầm thường gặp là không xét trường hợp $m=0$ dẫn đến chọn đáp án **B.**

Câu 3: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m-3)x^3-2mx^2+3$ không có cực trị.

A. $m=3$. **B.** $m=0$, $m=3$. **C.** $m=0$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải.

Chọn C

- Nếu $m=3$ thì $y=-6x^2+3$. Đây là một Parabol nên luôn có một cực trị.
- Nếu $m\neq 3$, ta có $y'=3(m-3)x^2-4mx$.

Để hàm số có không có cực trị khi $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4m^2\leq 0\Leftrightarrow m=0.$

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+\left(2m^2+3m+1\right)x-4$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị là $x=3$ và $x=5$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=x^2-(3m+2)x+(2m^2+3m+1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm $x=3$ hoặc $x=5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-3(3m+2)+(2m^2+3m+1)=0 \\ 25-5(3m+2)+(2m^2+3m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-6m+4=0 \\ 2m^2-12m+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 5: Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx \ (a\neq 0)$ nhận $x=-1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a+c=b$. **B.** $2a-b=0$. **C.** $3a+c=2b$. **D.** $3a+2b+c=0$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số nhận $x=-1$ là một điểm cực trị nên suy ra $y'(-1)=0$

$\Leftrightarrow 3a-2b+c=0 \Leftrightarrow 3a+c=2b$.

Câu 6: Biết rằng hàm số $y=3x^3-mx^2+mx-3$ có một điểm cực trị $x_1=-1$. Tìm điểm cực trị còn lại x_2 của hàm số.

A. $x_2=\frac{1}{4}$. **B.** $x_2=\frac{1}{3}$. **C.** $x_2=-\frac{1}{3}$. **D.** $x_2=-2m-6$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=9x^2-2mx+m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-9m>0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<0 \\ m>9 \end{bmatrix}. \ (*)$$

Theo giả thiết: $y'(-1)=0 \Leftrightarrow 9+3m=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn $(*)$).

Với $m=-3$ thì $y'=9x^2+6x-3;\ y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \end{bmatrix}$..

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

A. $m=1$.. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$, $m=-3$. **D.** $-3\leq m\leq 1$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-4)$.

Vì $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\longrightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=1 \\ m=-3 \end{bmatrix}$.

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m=-3$ thỏa mãn y' đổi dấu từ "−" sang "+" khi qua $x=-1$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

A. $m=-9$. **B.** $m=2$. **C.** $m=9$. **D.** Không có m.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=12x^2+2mx-12$ và $f''(x)=24x+2m$.

Riêng hàm bậc ba, yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f''(-2)>0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} 12.4-4m-12=0 \\ -48+2m>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ m>24 \end{cases}$: vô nghiệm.

Cách trắc nghiệm. Thay ngược đáp án nhưng lâu hơn cách tự luận.

Câu 9: Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$. Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\frac{9}{2}$. **C.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3\left[x^2-2mx+(m^2-1)\right]$.

Do $\Delta'=m^2-m^2+1=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=m^2-1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=7 \Leftrightarrow 4m^2-3(m^2-1)=7 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=2x^3-3x^2-m$ có các giá trị cực trị trái dấu.

A. $m=-1,\ m=0$. **B.** $m<0,\ m>-1$.

C. $-1<m<0$. **D.** $0\le m\le 1$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $f'(x)=6x^2-6x;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \to f(0)=-m \\ x=1 \to f(1)=-m-1 \end{bmatrix}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<0$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có ba điểm cực trị.

A. $m=0.$. **B.** $m>0.$. **C.** $m<0.$. **D.** $m\neq 0$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=4x^3+4mx=4x(x^2+m);\ y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x^2=-m \end{bmatrix}$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0.$.

Dạng 5: Cho hàm số $f'(x)$ hoặc đồ thị hàm số $f'(x)$. Tìm các điểm cực trị của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Câu 1: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

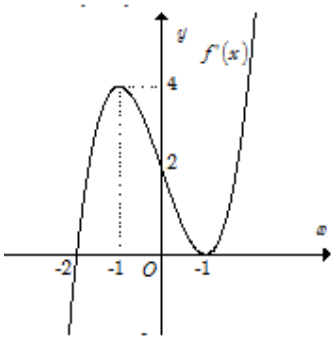
A. 4 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 1 .

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0,\ x=1 \\ x=2,\ x=3 \end{bmatrix}$. Tuy nhiên lại xuất hiện nghiệm kép tại $x=1$ (nghiệm kép thì y'
qua nghiệm không đổi dấu) nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1.$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1.$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2.$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Lời giải.

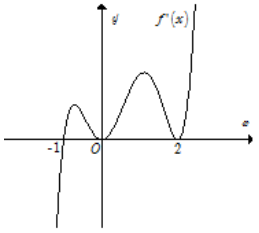
Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có các nhận xét sau:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi đi qua điểm $x=-2$ suy ra $x=-2$ là điểm cực trị và là
điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.
- $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=-1, x=1$ suy ra $x=-1, x=1$ không là các điểm
cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-2.$.

Câu 3: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K . Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K . Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (cắt trục hoành tại một
điểm) và hai nghiệm kép (tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua
nghiệm đơn. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị.

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị.

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số. xác định trên tập D.

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\le M$ với $\forall x\in \mathrm{D}$ và tồn tại

$[-1;1]$. sao cho $f(x_0)=M$. Kí hiệu: 0.

- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập $\frac{90}{91}$., nếu $f(x)\ge m$ với $\forall x\in \mathrm{D}$ và tồn tại

$x_0\in \mathrm{D}$ sao cho $f(x_0)=m$. Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in \mathrm{D}} f(x)$.

2. Định lý

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]\Rightarrow$ tồn tại $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

3. Cách tìm GTLN – GTNN trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên $[a;b]$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên thì

$$\begin{cases} M=\max\limits_{[a;b]} f(x) \\ m=\min\limits_{[a;b]} f(x) \end{cases}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a,b]$

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{67}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-2$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-7$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=7$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=3x^2-4x-4\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\in[1;3] \\ x=-\frac{2}{3}\notin[1;3] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=-4 \\ f(2)=-7 \\ f(3)=-2 \end{cases}\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=-2.$

Cách 2. Sử dụng chức năng MODE 7 và nhập hàm $f(X)=X^3-2X^2-4X+1$ với thiết lập Start 1, End 3, Step $0,2$.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ bằng -2 khi $X=3.$.

Câu 2: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Tính $P=M-m$.

A. $P=-5$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=6x^2+6x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin \left[-2;-\frac{1}{2}\right] \\ x=-1 \in \left[-2;-\frac{1}{2}\right] \end{array}\right.$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} f(-2)=-5 \\ f(-1)=0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=-5 \\ M=\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=0 \end{array}\right. \longrightarrow P=M-m=5.$.

Câu 3: Biết rằng hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại x_0. Tính $P=x_0+2018$.

A. $P=3$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2021$. **D.** $P=2018$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=3x^2-6x-9 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \notin [0;4] \\ x=3 \in [0;4] \end{array}\right.$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} f(0)=28 \\ f(3)=1 \\ f(4)=8 \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} f(x)=1$ khi $x=3=x_0 \Rightarrow P=2021.$.

Câu 4: Xét hàm số $f(x)=-\frac{4}{3}x^3-2x^2-x-3$ trên $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và giá trị lớn nhất tại $x=1$.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.

C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ nhưng không có giá trị lớn nhất.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất tại $x=1$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=-4x^2-4x-1=-(2x+1)^2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.

Câu 5: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-4.$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=13$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=14$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=23$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \in [-2;2] \\ x=1 \in [-2;2] \\ x=-1 \in [-2;2] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=f(2)=13 \\ f(-1)=f(1)=4 \\ f(0)=5 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=13..$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+10$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=10;\ m=-6.$ **B.** $M=12;\ m=-6.$

C. $M=10;\ m=-8.$ **D.** $M=12;\ m=-8.$

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=-8x^3+8x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{bmatrix}.$

Ta có $\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=12 \\ f(2)=-6 \end{cases} \Rightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=12;\ m=\min\limits_{[0;2]} f(x)=-6..$

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} f(x)=6.$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=-2.$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=-3.$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=\dfrac{19}{3}.$

Lời giải.

Chọn A

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1\notin[2;4] \\ x=3\in[2;4] \end{bmatrix}.$

Ta có $\begin{cases} f(2)=7 \\ f(3)=6 \\ f(4)=\dfrac{19}{3} \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=6.$

Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE** (**MODE 7**).

Bước 1: Bấm tổ hợp phím MODE 7.

Bước 2: Nhập $f(X)=\dfrac{X^2+3}{X-1}.$

Sau đó ấn phím $=$ (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím $=$) sau đó nhập $\begin{cases} \text{Start}=2 \\ \text{End}=4 \\ \text{Step}=0.2 \end{cases}.$

(**Chú ý:** Thường ta chọn $\text{Step}=\dfrac{\text{End}-\text{Start}}{10}$)

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(3)=6..$

Câu 8: Tập giá trị của hàm số $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$ với $x\in[2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Tính $P=b-a$.

A. $P=6.$ **B.** $P=\dfrac{13}{2}.$ **C.** $P=\dfrac{25}{4}.$ **D.** $P=\dfrac{1}{2}.$

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\in[2;4]\\x=-3\notin[2;4]\end{array}\right.$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l}f(2)=\frac{13}{2}\\f(3)=6\\f(4)=\frac{25}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\longrightarrow\min\limits_{[2;4]}f(x)=6;\ \max\limits_{[2;4]}f(x)=\frac{13}{2}$

$\Rightarrow[a;b]=\left[6;\frac{13}{2}\right]\Rightarrow P=b-a=\frac{13}{2}-6=\frac{1}{2}$. .

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x+1}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;1]$.

A. $M=\sqrt{2};\ m=1.$ **B.** $M=2;\ m=1.$

C. $M=1;\ m=-2.$ **D.** $M=2;\ m=\sqrt{2}.$

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$. Ta có $\left\{\begin{array}{l}f'(x)\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\\f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Vậy $\left\{\begin{array}{l}M=\max\limits_{[0;1]}f(x)=f(1)=2\\m=\min\limits_{[0;1]}f(x)=f(0)=1\end{array}\right.$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\frac{3x-1}{x-3}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=5;\ m=\frac{1}{3}.$ **B.** $M=-\frac{1}{3};\ m=-5.$

C. $M=\frac{1}{3};\ m=-5.$ **D.** $M=5;\ m=-\frac{1}{3}.$

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=\frac{-8}{(x-3)^2}$. Ta có $f'(x)<0,\forall x\in(0;2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

Vậy $\left\{\begin{array}{l}M=\max\limits_{[0;2]}f(x)=f(0)=\frac{1}{3}\\m=\min\limits_{[0;2]}f(x)=f(2)=-5\end{array}\right.$. .

Câu 11: Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ với $x\in[3;5]$.

A. $T=\left[\frac{38}{3};\frac{526}{15}\right].$ **B.** $T=\left[\frac{38}{3};\frac{142}{5}\right].$ **C.** $T=\left[\frac{29}{3};\frac{127}{5}\right].$ **D.** $T=\left[\frac{29}{3};\frac{526}{15}\right].$

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}>0,\ \forall x\in(3;5)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3;5]$ nên $\min\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)=\frac{29}{3};\ \max\limits_{[3;5]} f(x)=f(5)=\frac{127}{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\frac{29}{3};\frac{127}{5}\right]$.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

A. $M=1.$. **B.** $M=2.$. **C.** $M=3.$. **D.** $M=4.$

Lời giải.

Chọn B

TXĐ: $\mathrm{D}=[2;4]$.

Đạo hàm $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=3\in[2;4]$.

Ta có $\begin{cases} f(2)=\sqrt{2} \\ f(3)=2 \\ f(4)=\sqrt{2} \end{cases}\Rightarrow M=2.$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-7$.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Chọn D

TXĐ: $\mathrm{D}=[-7;5]$.

Đạo hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+14}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[-7;5]$.

Ta có $\begin{cases} f(-7)=2\sqrt{3} \\ f(5)=2\sqrt{6} \\ f(1)=6 \end{cases}\Rightarrow \min\limits_{[-7;5]} f(x)=f(-7)=2\sqrt{3}.$.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

A. $M=2;\ m=0.$ **B.** $M=\sqrt{2};\ m=-\sqrt{2}.$

C. $M=2;\ m=-2.$ **D.** $M=\sqrt{2};\ m=0.$

Lời giải.

Chọn C

TXĐ: $\mathrm{D}=[-2;2]$. Đạo hàm $f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\in[-2;2] \\ x=-\sqrt{2}\in[-2;2] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f\left(-\sqrt{2}\right)=-2 \\ f\left(\sqrt{2}\right)=2 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow M=2;\ m=-2..$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x+\sqrt{2-x^2}$.

A. $m=-\sqrt{2}.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=\sqrt{2}.$

Lời giải.

Chọn A

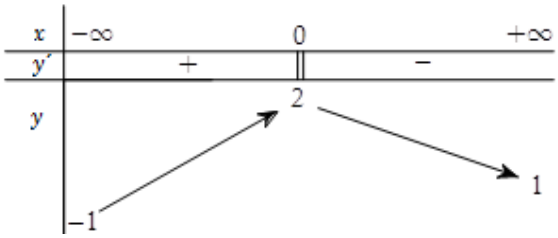
TXĐ: $D=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 2-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$

Ta có $\begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2} \\ f(1)=2 \\ f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow m=-\sqrt{2}..$

Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Tìm GTLN, GTNN

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải.

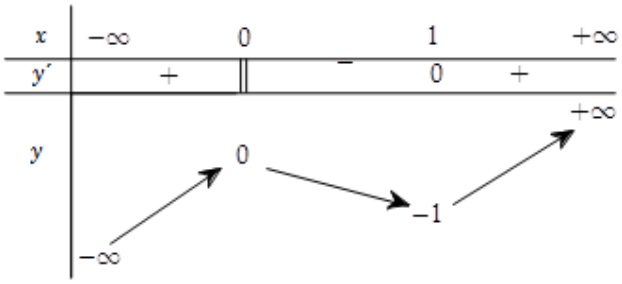
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy:

- $f(x)\leq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$ nên GTLN của hàm số bằng 2.
- $f(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên không tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)=1$, do đó hàm số không có GTNN.

Có thể giải thích cách khác: y' đổi dấu qua $x=0$ và tồn tại $y(0)=2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải.

Chọn D

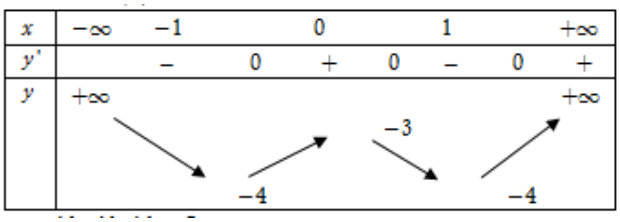
A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D Đúng.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4..

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -3..

D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải.

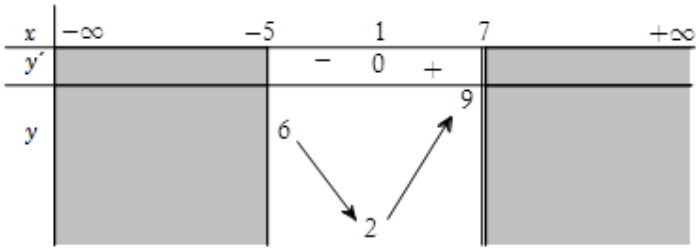
Chọn B

A sai vì hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1;\ x=0;\ x=1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

D sai vì hàm số có hai điểm cực tiểu là $x=-1$ và $x=1$..

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=6$.

Lời giải.

Chọn A

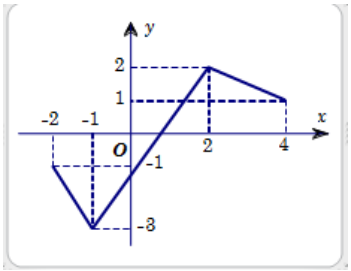
Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

● Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x=1\in[-5;7)$.

● Ta có $\begin{cases} f(x)\le 9, \forall x\in[-5;7) \\ \lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=9 \end{cases}$. Mà $7\notin[-5;7)$ nên không tồn tại $x_0\in[-5;7)$ sao cho $f(x_0)=9$. Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5;7)$.

Vậy $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

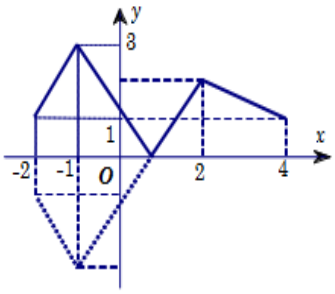
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[-2;4.]$



A. $M=2.$ **B.** $M=|f(0)|.$ **C.** $M=3.$ **D.** $M=1.$

Lời giải.

Chọn C

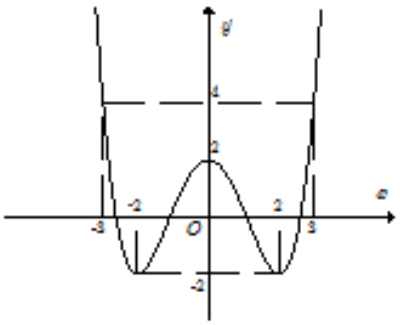


Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ như hình vẽ.

Do đó $\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=3$ tại $x=-1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng:

A. 2. . **B.** 3. . **C.** 4. . **D.** 5.



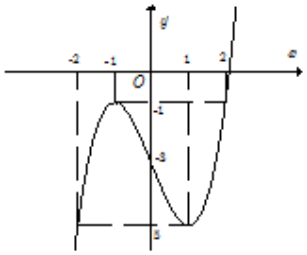
Lời giải.

Chọn C

Nhận thấy trên đoạn $[-2;3]$ đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(3;4)$.

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng 4.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m=-5,\ M=0$. **B.** $m=-5,\ M=-1$.

C. $m=-1,\ M=0$. **D.** $m=-2,\ M=2$.

Lời giải.

Chọn B

Nhận thấy trên đoạn $[-2;2]$

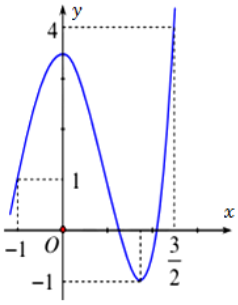
● Đồ thị hàm số có điểm thấp nhất có tọa độ $(-2;-5)$ và $(1;-5)$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -5.

● Đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(-1;-1)$ và $(2;-1)$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -1.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ là



A. $M=4,\ m=1.$ **B.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1.$

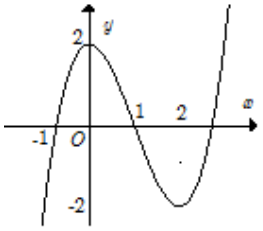
C. $M=4,\ m=-1.$ **D.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1.$

Lời giải.

Chọn C

Theo định nghĩa max min của hàm số ta suy ra được điều này

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có GTLN là 2 và GTNN là -2.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

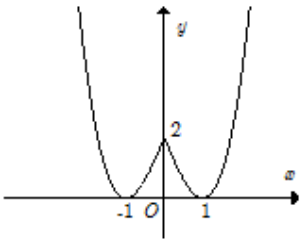
D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(0;2)\&(2;-2)$.

Lời giải.

Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Chú ý. Học sinh thường nhầm tưởng giá trị cực đại là giá trị lớn nhất, giá trị cực tiểu là giá trị nhỏ nhất nên chọn **B**

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau:



(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Trong các mệnh đề đã cho có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn B

Xét trên $(0;1)$ ta thấy đồ thị đi xuống (từ trái sang phải) nên hàm số nghịch biến. Do đó (I) đúng

Xét trên $(-1;2)$ ta thấy đồ thị đi lên, rồi đi xuống, rồi đi lên. Do đó (II) sai.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy có ba điểm cực trị. Do đó (III) đúng.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Do đó (IV) sai.

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Dạng 3: Tìm GTLN, GTNN trên khoảng hoặc nửa khoảng

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Chọn A

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}=\dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin(0;+\infty)\\x=1\in(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(1)=\sqrt{2}$.

Câu 2: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f(1)=3$..

Câu 3: Gọi y_{CT} là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT}>\min\limits_{(0;+\infty)}y$.. **B.** $y_{CT}=1+\min\limits_{(0;+\infty)}y$.. **C.** $y_{CT}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$.. **D.** $y_{CT}<\min\limits_{(0;+\infty)}y$.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Qua điểm $x=1$ thì hàm số đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" trong khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số chỉ có một cực trị và là giá trị cực tiểu nên đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vậy $y_{CT}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$..

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=x-\frac{1}{x}$ trên $(0;3]$.

A. $M=3$.. **B.** $M=\frac{8}{3}$. **C.** $M=\frac{3}{8}$.. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in(0;3)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;3]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x=3$ và $\max\limits_{(0;3]}f(x)=f(3)=\frac{8}{3}$..

Dạng 4: Tìm tham số m để hàm số đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-x^2+4x-m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 10.

A. $m=3$.. **B.** $m=-6$. **C.** $m=-7$. **D.** $m=-8$.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $f'(x)=-2x+4\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[-1;3]$.

Ta có $\begin{cases}f(-1)=-5-m\\ f(2)=4-m\\ f(3)=3-m\end{cases}\Rightarrow\max\limits_{[-1;3]}f(x)=f(2)=4-m$.

Theo bài ra: $\max\limits_{[-1;3]}f(x)=10\Leftrightarrow 4-m=10\Leftrightarrow m=-6$.

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{x-m^2}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

A. $\frac{1+m^2}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\frac{1-m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải.

Chọn C

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1+m^2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]\longrightarrow\max\limits_{[0;1]}f(x)=f(1)=\frac{1-m^2}{2}$..

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+m^2}{x-1}$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng

A. $\frac{m^2-1}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\frac{1-m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải.

Chọn B

Đạo hàm $y'=\dfrac{-1-m^2}{(x-1)^2}<0,\forall x\in[-1;0]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1;0]\Rightarrow \min\limits_{[-1;0]} f(x)=f(0)=-m^2$.

Câu 4: Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $a=2$.. **B.** $a=6$. **C.** $a=0$. **D.** $a=4$.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=-3x^2-6x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l}f(-1)=a-2\\f(0)=a\\f(1)=a-4\end{array}\right.\Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=a-4.$

Theo bài ra: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0\Leftrightarrow a-4=0\Leftrightarrow a=4$..

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^3+\left(m^2+1\right)x+m^2-2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m=\pm1$. **B.** $m=\pm\sqrt{7}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=\pm3$.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=3x^2+m^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2]\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=m^2-2.$

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;2]} f(x)=7\Leftrightarrow m^2-2=7\Leftrightarrow m=\pm3$..

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2.

A. $m=4$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Chọn A

Đạo hàm $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\ \forall x\in[0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3]\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=-\dfrac{m^2}{8}.$

Thao bài ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=-2\Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{8}=-2\Leftrightarrow m=\pm4\Rightarrow$ giá trị m lớn nhất là $m=4$..

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0<m\le2$. **B.** $2<m\le4$. **C.** $m\le0$. **D.** $m>4$.

Lời giải.

Chọn D

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m\neq 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=f(1)+f(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\dfrac{5m}{6}=\dfrac{25}{6}\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m>4$.

BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm tiệm cận

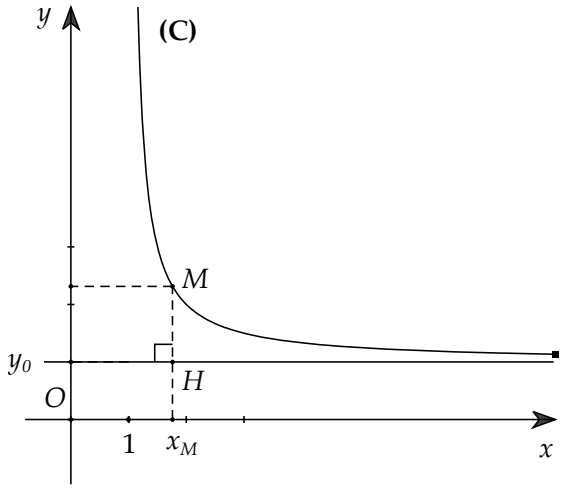
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Điểm $M\in(C)$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d. Đường thẳng d gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH dần về 0 khi $|x|\to+\infty$ hoặc $|x|\to x_0$.

2. Định nghĩa tiệm cận đứng (TCĐ), tiệm cận ngang (TCN)

a. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0}$$



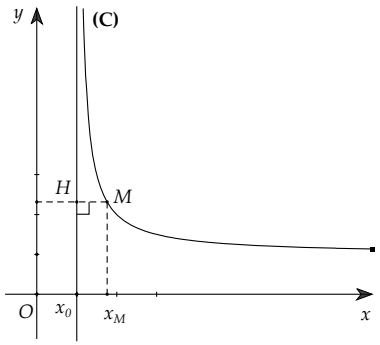
Chú ý :

- Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$ thì ta viết chung là $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\ell$.
- Hàm số có TXĐ không phải các dạng sau: $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$ thì đồ thị không có tiệm cận ngang.

b. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty}$$



Chú ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dựa vào định nghĩa tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\longrightarrow y=1$ là TCN, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\longrightarrow y=-1$ là TCN.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm sốnằm phía trên trục hoành.

C. Đồ thị hàm sốcó một tiệm cận ngang là trục hoành.

D. Đồ thị hàm sốcó một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\longrightarrow y=0$ là TCN.

Đáp án B sai vì chọn hàm $y=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x & ;x\leq -1\\ -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x & ;x\geq 1\end{cases}$. Vậy ta chỉ có đáp án C đúng.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.

D. Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathrm{D}=(0,+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \longrightarrow y=0$ là TCN, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \longrightarrow x=0$ là TCĐ.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ và tiệm cận đứng $x=1$.

D. Đồ thị hàm số haitiệm cận ngang là các đường $y=-1$ và $y=1$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \longrightarrow y=-1$ là TCN, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \longrightarrow x=1$ là TCĐ.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=10$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$ và đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=10$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nhưng có một tiệm cận đứng $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \longrightarrow y=1$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=10 \longrightarrow x=0$ không phải là TCĐ.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathrm{D}=(-3;3)\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty;$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty.$$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng hai TCĐ là các đường thẳng $x=-3$ và $x=3$.
B. Đồ thị hàm số có đúng hai TCĐ là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$.
C. Đồ thị hàm số có đúng bốn TCĐ là các đường thẳng $x=\pm1$ và $x=\pm3$.
D. Đồ thị hàm số có sáu TCĐ.

Lời giải

Chọn C

Câu 7: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=1$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=x_0$

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=2$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ và $\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn D

A saivì chỉ cần một trong hai giới hạn $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ hoặc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ tồn tại thì đã suy ra được tiệm cận ngang là $y=1$.

B sai,ví dụ hàm số $y=\sqrt{x^3-1}$ không xác định tại $x=-2$ nhưng $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$ và $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)$ không tiến đến vô cùng nên $x=-2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

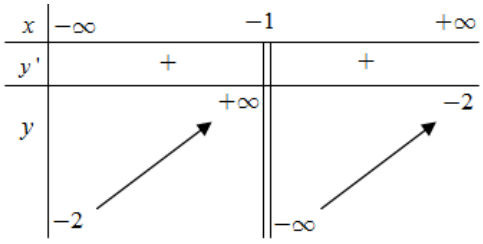
C saivì chỉ cần tồn tại một trong bốn giới hạn sau:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty.$$

D đúngvì chỉ có hai giới hạn $\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Dạng 2: Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số tìm các đường tiệm cận

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y=-1$ và tiệm cận ngang $x=-2.$

B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=-2.$

Lời giải

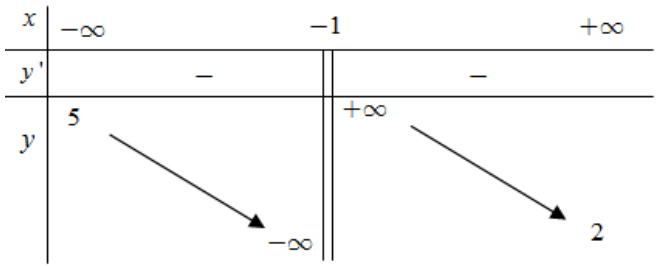
Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=-1$ là TCĐ. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-2\end{cases}\longrightarrow y=-2$ là TCN.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\},$ có bảng biến thiên như sau:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có hai TCN $y=2,\ y=5$ và một TCĐ $x=-1.$

D. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Lời giải

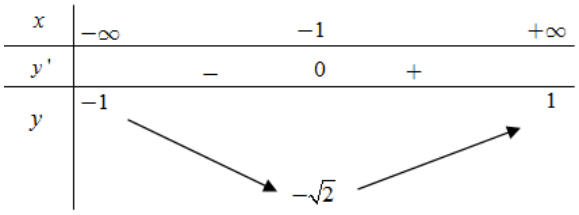
Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=-1$ là TCĐ.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5\longrightarrow y=5$ là TCN và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\longrightarrow y=2$ là TCN.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Kết luận nào sau đây đầy đủ về đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$?

A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\pm 1$.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\pm 1$, tiệm cận đứng $x=-1$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$, tiệm cận đứng $x=-1$.

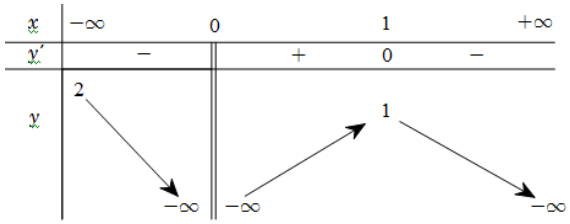
Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\sqrt{2}\neq \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có TCĐ.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1\longrightarrow y=-1$ là TCN; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1\longrightarrow y=1$ là TCN.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

D. Hàm số không có cực trị.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét như sau:

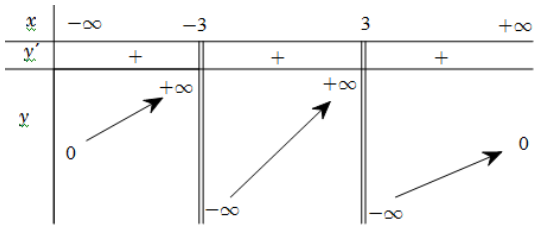
A đúngvì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\longrightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B saivì tại $x=0$ hàm số không xác định.

C saivì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 trên khoảng $(0;+\infty)$ mà không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;0)$.

D saivì đạo hàm y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua điểm $x=1\longrightarrow x=1$ là điểm cực đại của hàm số.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-3$.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.
D. Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta có:

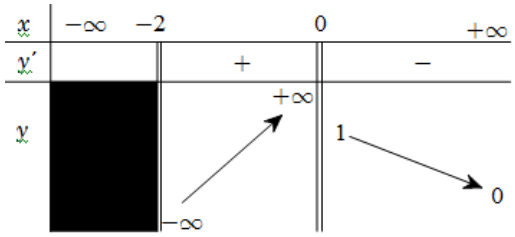
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0 \longrightarrow y=0$ là TCN;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} y=+\infty\end{cases} \longrightarrow x=-3$ là TCĐ;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-} y=+\infty\end{cases} \longrightarrow x=3$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả ba đường tiệm cận. Do đó D sai.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

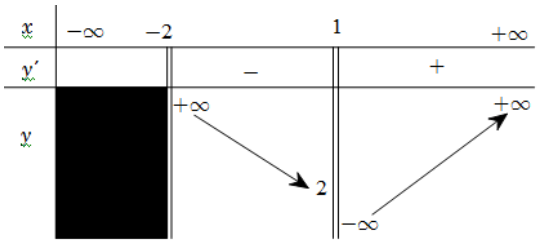
Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \longrightarrow y=0$ là TCN; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty \longrightarrow x=-2$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty \longrightarrow x=0$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng ba đường tiệm cận.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang;

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=+\infty \longrightarrow x=-2$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty \longrightarrow x=1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

Dạng 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1: Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

A. $(-2;2)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có TCĐ: $x=-2$ và TCN: $y=1$.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-2;1)$.

Câu 2: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^2-16=0 \Leftrightarrow x=\pm 4$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to-4} y=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+1}{x+4}=\infty \to x=-4$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to 4} y=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{5}{8}\to x=4$ không là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-9}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to 3^-} y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-2}{x^2-9}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 3^+} y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{x^2-9}=+\infty\longrightarrow x=3$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to -3^-} y=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x-2}{x^2-9}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to -3^+} y=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x-2}{x^2-9}=-\infty\longrightarrow x=-3$ TCĐ;

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x^2}}=0;\ \lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{9}{x^2}}=0\longrightarrow y=0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận.

Câu 4: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y=\dfrac{1}{x^4+1}$. **C.** $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy các đáp án B, C, D hàm số có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ nên không có TCĐ.

Dùng phương pháp loại trừ thì A đúng.

(Thật vậy; hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\longrightarrow x=0$ là TCĐ)

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{khi } x\ge 1\\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{x-1}=-\infty\longrightarrow x=1$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2\longrightarrow y=2$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1\longrightarrow y=1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận.

Câu 6: Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$, $y=3$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\longrightarrow$ đồ thị không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{|x|+1}=-3\longrightarrow y=-3$ là TCN; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{|x|+1}=3\longrightarrow y=3$ là TCN.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=1\longrightarrow y=1$ là TCN.

Xét phương trình $x^2-|x|-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty\\\lim\limits_{x\to2^-} y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty\end{array}\right.\longrightarrow x=2$ là TCĐ;

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty\\\lim\limits_{x\to-2^-} y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty\end{array}\right.\longrightarrow x=-2$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.
D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1\longrightarrow y=1 \text{ là TCN;}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1\longrightarrow y=-1 \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng hai tiệm cận ngang.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4x^2+2x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow$ TXĐ của hàm số $D=\mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Ta có:

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)}=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=1$ là TCĐ;

- $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}=-\infty\longrightarrow x=-1$ là TCĐ;

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=0\longrightarrow y=0$ Là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận.

Dạng 4: Bài toán tìm tham số m liên quan đến đường tiệm cận

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^-} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^-}\dfrac{mx-1}{2x+m}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^+} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^+}\dfrac{mx-1}{2x+m}=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=-\dfrac{m}{2}$ là TCĐ.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2m^2x-5}{x+3}$ nhận đường thẳng $y=8$ làm tiệm cận ngang.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2m^2x-5}{x-3}=2m^2\longrightarrow y=2m^2$ là TCN.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow 2m^2=8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 3: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S=m^2+n^2-2$.

A. $S=2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}=m-2n-3\longrightarrow y=m-2n-3$ là TCN;

$\left|\lim\limits_{x\to(n+m)^+} y\right|=+\infty\longrightarrow x=m+n$ là TCĐ.

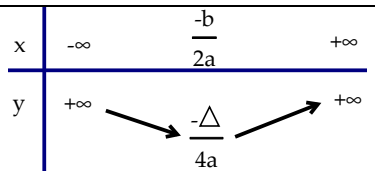
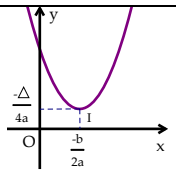
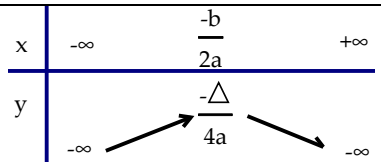
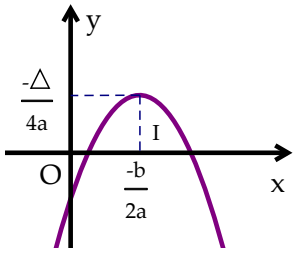
Từ giả thiết, ta có $\begin{cases}m+n=0\\m-2n-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=-1\end{cases}\longrightarrow S=m^2+n^2-2=0.$

BÀI 5. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.

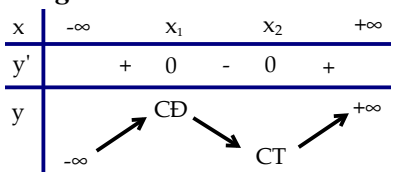
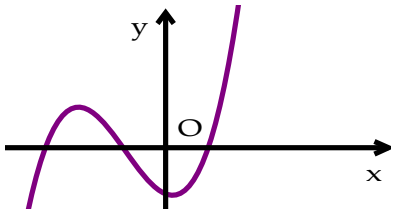
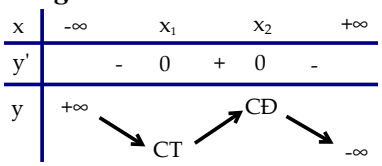
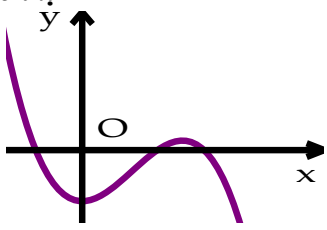
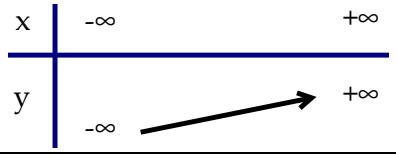
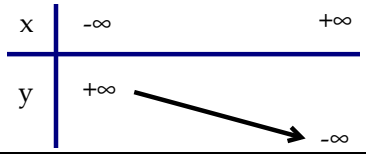
Trường hợp	Bảng biến thiên	Đồ thị
$a > 0$		
$a < 0$		

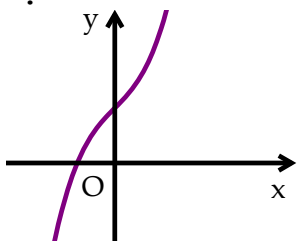
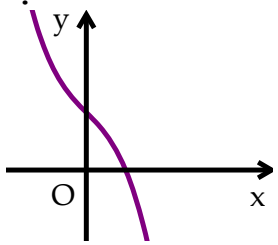
*** Kết luận:** Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là 1 parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{-b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$; trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$; bề lõm hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

2. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Tính $y' \rightarrow$ tính Δ của phương trình $y' = 0$.

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.	***Bảng biến thiên***  ***Đồ thị*** 	***Bảng biến thiên***  ***Đồ thị*** 
$\Delta \leq 0$	***Bảng biến thiên*** 	***Bảng biến thiên*** 

	Đồ thị 	***Đồ thị*** 

3. Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **(**$c\neq 0$ **và** $ad-bc\neq 0$**)**

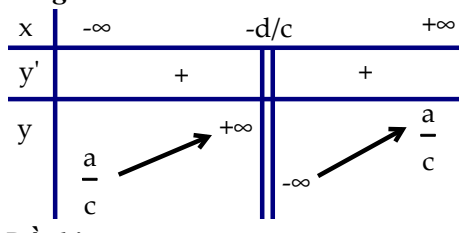
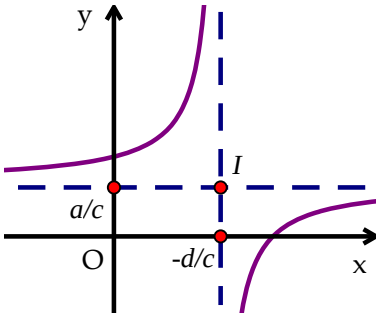
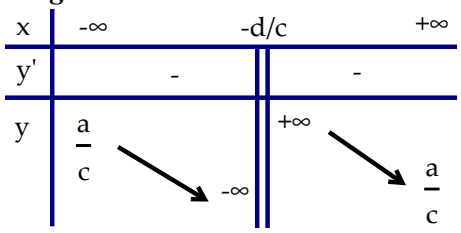
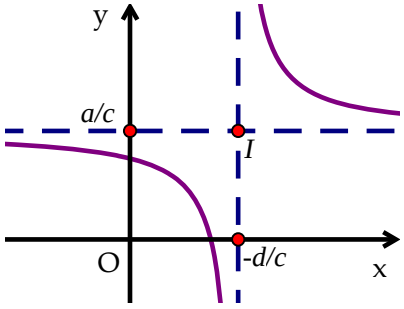
- Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

- Ta có: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}$

- Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}$

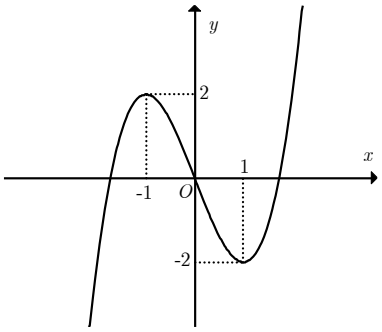
- Đồ thị nhận giao điểm $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

$ad-bc>0$	$ad-bc\leq 0$
Bảng biến thiên  ***Đồ thị*** 	***Bảng biến thiên***  ***Đồ thị*** 

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1 : Cho đồ thị hàm số. Tìm hàm số

Câu 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=-x^4+2x^2$. **D.** $y=x^4-2x^2$.

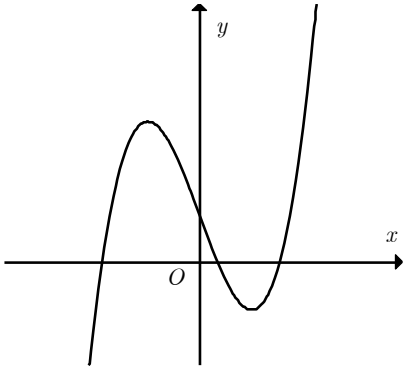
Lời giải

Chọn A

Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba nên loại C,D.

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$ nên chỉ có A phù hợp.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$. **C.** $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

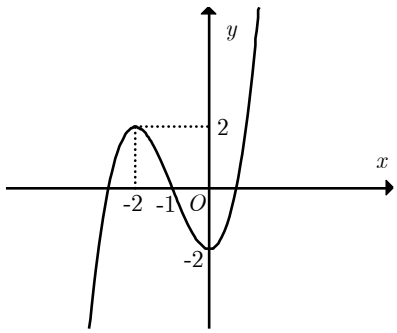
Lời giải

Chọn D

Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba. Loại đáp án A và C.

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$.

Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$.

C. $y=x^3-3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2-2$.

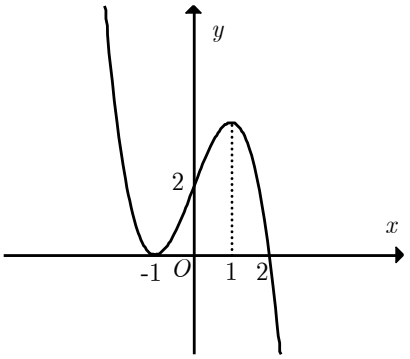
Lời giải

Chọn B

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Loại đáp án A,D.

Thấy đồ thị cắt trục hoành tại điểm $x=-1$ nên thay $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ vào hai đáp án B và C, chỉ có B thỏa mãn.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=(x+1)^2(1-x)$.

B. $y=(x+1)^2(1+x)$.

C. $y=(x+1)^2(2-x)$.

D. $y=(x+1)^2(2+x)$.

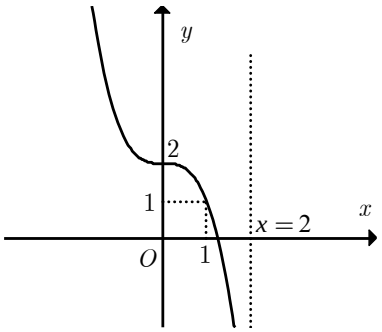
Lời giải

Chọn C

Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại đáp án B,D.

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$. Do đó chỉ có đáp án C phù hợp.

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+1$.

B. $y=-x^3+3x+2$.

C. $y=-x^3+3x^2-3x+2$.

D. $y=-x^3+2$.

Lời giải

Chọn D

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$ nên ta loại đáp án A.

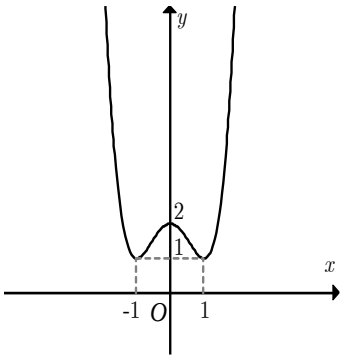
Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số không có cực trị nên ta loại đáp án B vì $y'=-3x^2+3$ có hai nghiệm.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$, kiểm tra thấy C & D đều thỏa mãn.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x^2-3x+2=0\xrightarrow{\text{CASIO}}x=2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+2=0\longrightarrow x=\sqrt[3]{2}\in(1;2)$. Do đó chỉ có D thỏa mãn.

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^4+2x^2+2$.
B. $y=x^4-2x^2+2$.
C. $y=x^4-4x^2+2$.
D. $y=x^4-2x^2+3$.

Lời giải

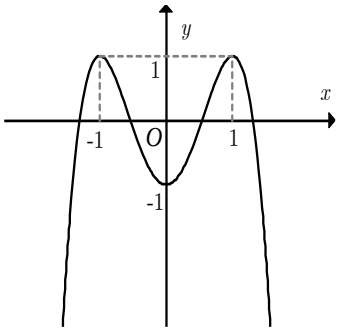
Chọn B

Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Loại đáp án A.

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$ nên ta loại đáp án D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn.

Câu 7: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^4-2x^2-1$.
B. $y=-2x^4+4x^2-1$.
C. $y=-x^4+2x^2-1$.
D. $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

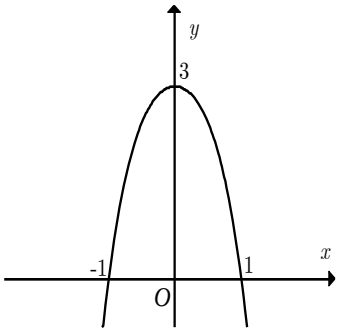
Chọn B

Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại A.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên thể hiện $c=-1$. Loại D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn.

Câu 8: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^4-2x^2+3$. **B.** $y=-x^4-2x^2-3$.

C. $y=-x^4+2x^2+3$. **D.** $y=x^4+2x^2+3$.

Lời giải

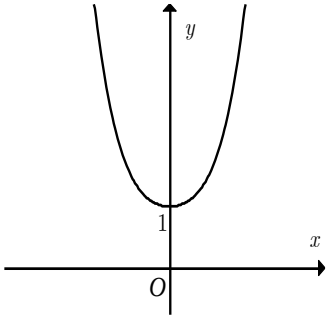
Chọn A

Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại D.

Dựa vào đồ thị thấy khi $x=0$thì $y=3$. Loại B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu.

Câu 9: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^4+x^2+2$. **B.** $y=x^4-x^2+2$.

C. $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=x^4+x^2+1$.

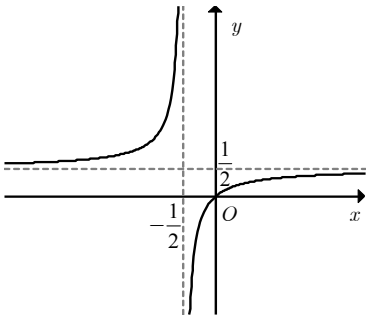
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x=0$thì $y=1$. Loại A, B.

Hàm số có một cực trị nên a, b cùng dấu.

Câu 10: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn C

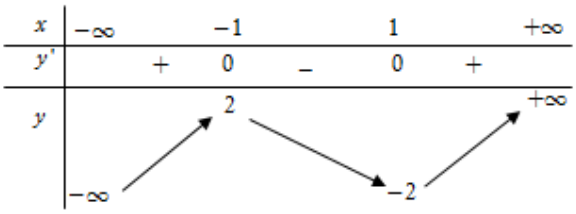
Các chi tiết đồ thị hàm số có TCĐ: $x=-\frac{1}{2}$ và TCN: $y=\frac{1}{2}$ đều giống nhau.

Chỉ có chi tiết đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ là phù hợp cho đáp án C.

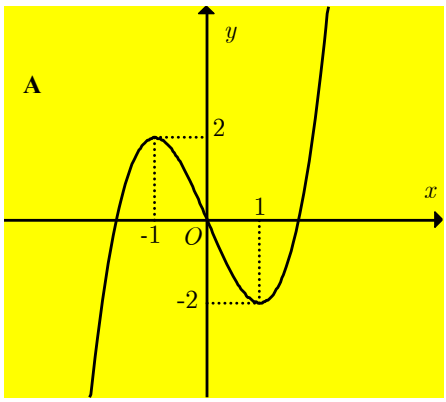
Cách 2. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định tức $y'>0$. Kiểm tra ta thấy chỉ có C & D thỏa mãn.

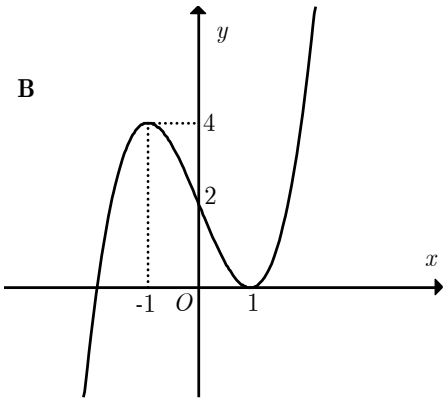
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên đáp án C thỏa mãn.

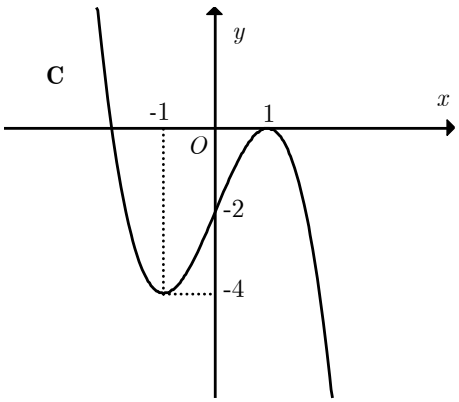
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

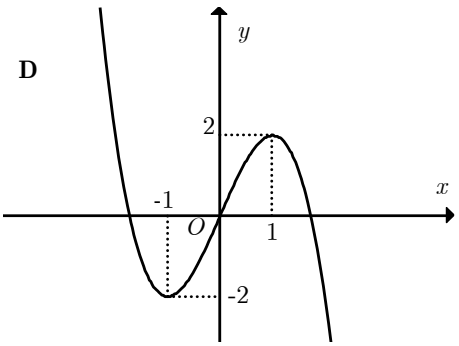


Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y=f(x)$?









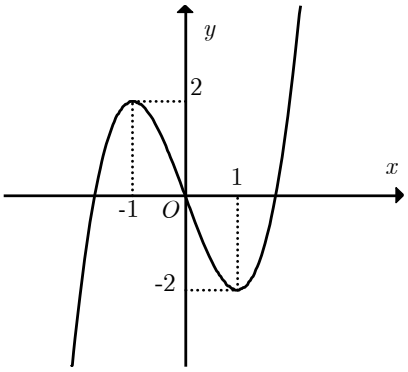
Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- Khi $x\to+\infty$ thì $y\to+\infty$. Loại C và D.
- Tọa độ các điểm cực trị là $(-1;2)$ và $(1;-2)$ nên đáp án A là phù hợp.

Câu 12: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số có hệ số $a<0$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.

Lời giải

Chọn B

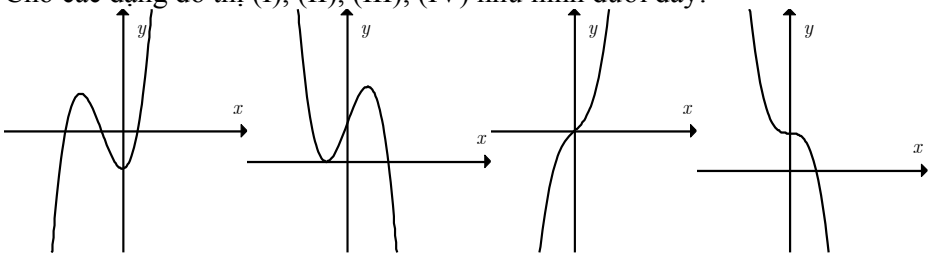
Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Do đó A sai.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó B đúng.

Hàm số có hai cực trị. Do đó C sai.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do của hàm số phải bằng 0. Do đó D sai.

Câu 13: Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III), (IV) như hình dưới đây:



Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$.

A. (I). **B.** (I) và (III). **C.** (II) và (IV). **D.** (III) và (IV).

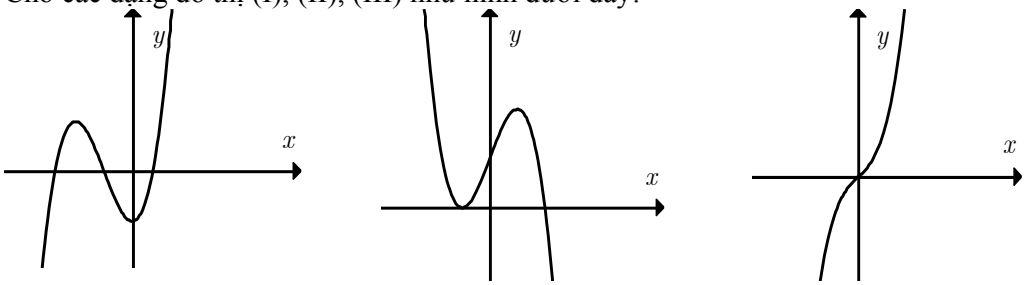
Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y'=3x^2+2bx+c$ có $\Delta'_{y'}=b^2-3c$. Ta chưa xác định được $\Delta'_{y'}$ mang dấu gì nên có thể xảy ra trường hợp (I) và cũng có thể xảy ra trường hợp (III).

Câu 14: Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III) như hình dưới đây:



(I) **(II)** **(III)**

Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$.

A. (I). **B.** (I) và (II). **C.** (III). **D.** (I) và (IIII).

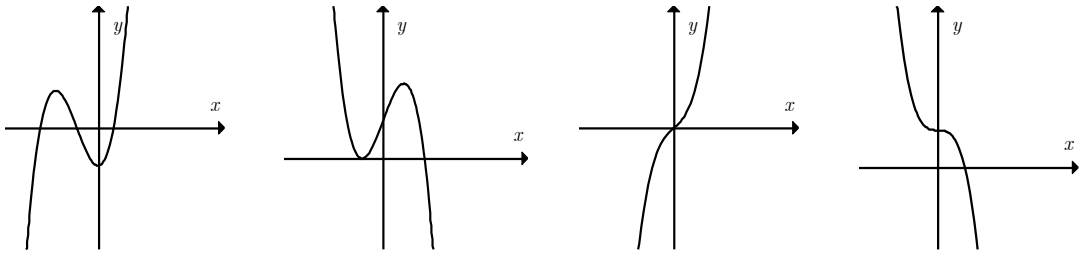
Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II).

Xét $y'=3x^2+2bx-1$ có $\Delta'_{y'}=b^2+3>0,\forall b\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị.

Câu 15: Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

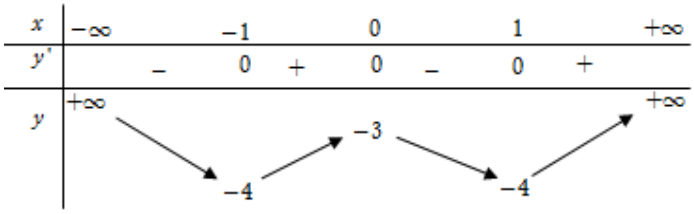
D. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

Lời giải

Chọn C

Dạng 2: Cho bảng biến thiên. Yêu cầu tìm hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng -3 và giá trị nhỏ nhất bằng -4.

D. Hàm số có ba giá trị cực trị.

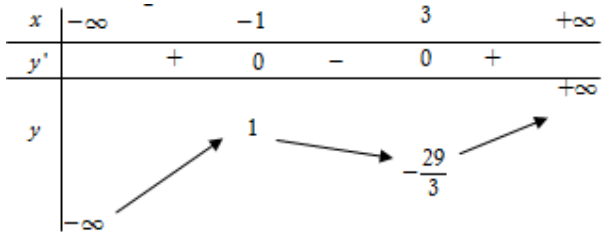
Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$. Do đó A sai.
- Hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Do đó B đúng.
- Hàm số có GTNN bằng -4 và không có GTLN. Do đó C sai.
- Hàm số có đúng hai giá trị cực trị là $y_{CD}=-3$ và $y_{CT}=-4$. (nếu nói đồ thị hàm số thì có ba điểm cực trị). Do đó D sai.

Câu 2: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=-x^3+3x^2+9x-2$.

B. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-\frac{2}{3}$.

C. $y=x^3-3x^2-9x-2$.

D. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+\frac{2}{3}$.

Lời giải

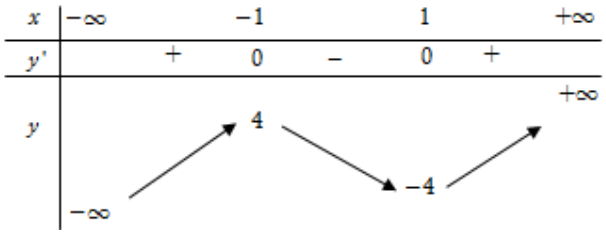
Chọn B

Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số bậc 3 có hệ số $a>0$. Loại A và D.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;1)$ nên loại C.

Câu 3: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=2x^3-6x$.

B. $y=-2x^3+6x-8$.

C. $y=-2x^3+6x$.

D. $y=2x^3-6x+8$.

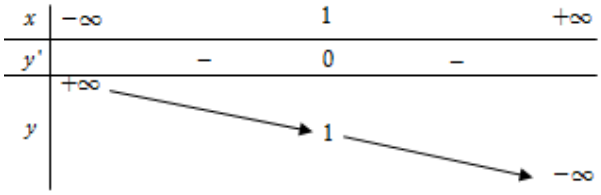
Lời giải

Chọn A

Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a>0$. Loại B & C.

Thử tại $x=1\rightarrow y=-4$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có A thỏa.

Câu 4: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau sau?



A. $y=-x^3+3x^2-3x+1$.

B. $y=x^3-x^2+2x$.

C. $y=x^3-3x^2+3x+2$.

D. $y=-x^3+3x^2-3x+2$.

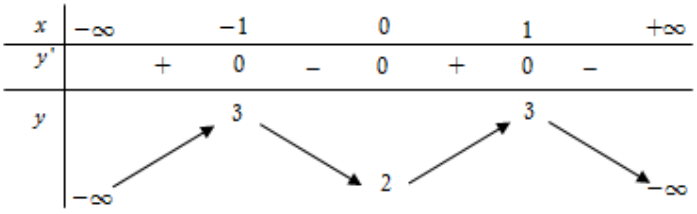
Lời giải

Chọn D

Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a<0$. Loại B & C.

Thử tại $x=1\to y=1$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 5: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=x^4-2x^2+1$.
B. $y=-x^4+2x^2+1$.
C. $y=x^4-2x^2+2$.
D. $y=-x^4+2x^2+2$.

Lời giải

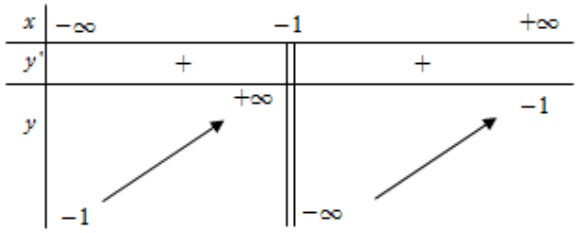
Chọn D

Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số trùng phương có hệ số $a<0$. Loại A và **C.**

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ nên loại **B.**

Câu 6: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$.
B. $y=\dfrac{-x-2}{x+1}$.
C. $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$.
D. $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$.

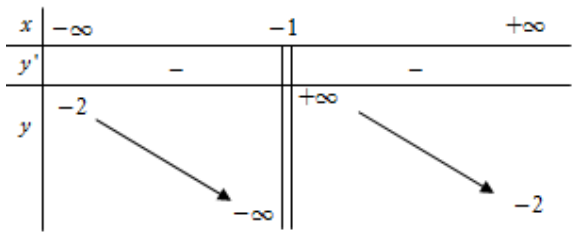
Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta có các nhận xét sau:

- Hàm số có TCĐ $x=-1$; TCN $y=-1$. Do đo ta loại phương án C & **D.**
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Thử đáp án A, ta có $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0$ không thỏa mãn.

Câu 7: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?



A. $y=\dfrac{x-1}{x-1}$.
B. $y=\dfrac{-2x}{x-1}$.
C. $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.
D. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C

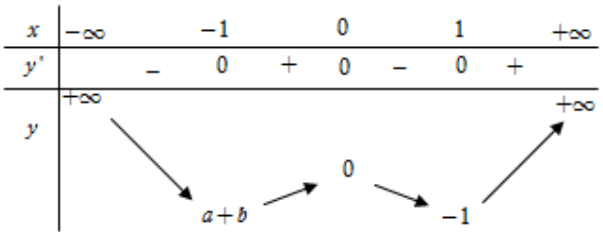
Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy

Đây là dạng hàm phân thức hữu tỉ, có tiệm cận đứng là $x=-1$. Loại A và **B.**

Do đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-2$.

Dạng 3: Cho bảng biến thiên, đồ thị hàm số . Tìm các tham số thuộc hàm số $y=f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Tính giá trị của a và b.

A. $a=1$ và $b=-2$.

B. $a=2$ và $b=-3$.

C. $a=\frac{1}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

D. $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{5}{2}$.

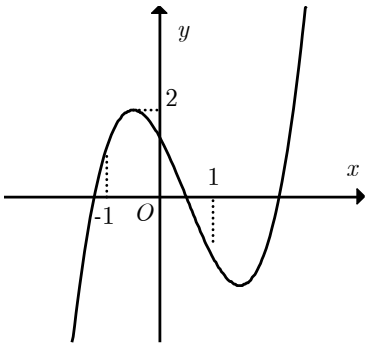
Lời giải

Chọn A

Đạo hàm $f'(x)=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1)=a+b=-1 \\ f'(1)=2(2a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Câu 2: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

D. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

Lời giải

Chọn C

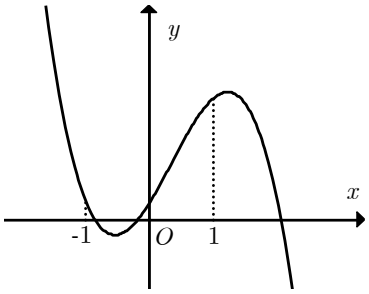
Đồ thị hàm số thể hiện $a>0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có $-1<x_{CD}<0,\ x_{CT}>1 \longrightarrow \begin{cases} x_{CD}+x_{CT}>0 \\ x_{CD}.x_{CT}<0 \end{cases}$. $(*)$

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c=0$. Do đó $(*)\leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2b}{3a}>0\longrightarrow\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a>0}b<0\\ \dfrac{c}{3a}<0\longrightarrow\dfrac{c}{a}<0\xrightarrow{a>0}c<0\end{cases}$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 3: Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.
B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.
C. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.
D. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải

Chọn A

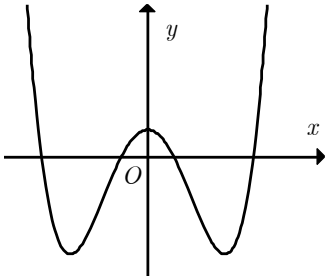
Đồ thị hàm số thể hiện $a<0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có $x_{CD}>1,\ -1<x_{CT}<0\longrightarrow\begin{cases}x_{CD}+x_{CT}>0\\ x_{CD}.x_{CT}<0\end{cases}$. $(*)$

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c=0$. Do đó $(*)\leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2b}{3a}>0\longrightarrow\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a<0}b>0\\ \dfrac{c}{3a}<0\longrightarrow\dfrac{c}{a}<0\xrightarrow{a<0}c>0\end{cases}$.

Vậy $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.

Câu 4: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0$.
B. $a>0,\ b<0,\ c<0$.
C. $a>0,\ b<0,\ c>0$.
D. $a<0,\ b>0,\ c<0$.

Lời giải

Chọn C

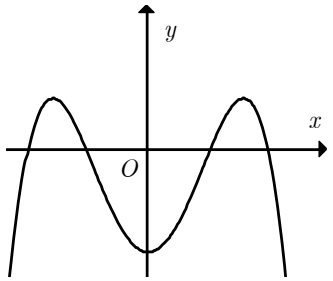
Đồ thị hàm số thể hiện $a>0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0\xrightarrow{a>0}b<0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c>0$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c>0$.

Câu 5: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0.$ **B.** $a<0,\ b>0,\ c<0.$

C. $a<0,\ b<0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Lời giải

Chọn B

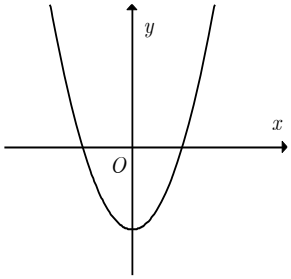
Đồ thị hàm số thể hiện $a<0.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0\longrightarrow b>0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0.$

Vậy $a<0,\ b>0,\ c<0.$

Câu 6: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$ **B.** $a>0,\ b<0,\ c\leq 0.$

C. $a>0,\ b\geq 0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Lời giải

Chọn A

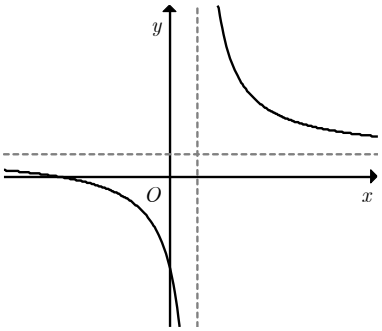
Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a>0.$

Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab\geq 0\xrightarrow{a>0}b\geq 0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0.$

Vậy $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$

Câu 7: Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $b>0,\ c>0,\ d<0.$ **B.** $b>0,\ c<0,\ d<0.$

C. $b<0,\ c<0,\ d<0.$ **D.** $b<0,\ c>0,\ d<0.$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số, ta thấy

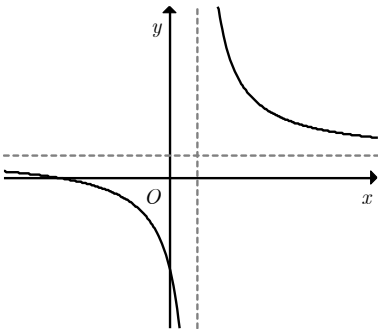
● Khi $y=0\longrightarrow x=-\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a>0}b>0.$

● Khi $x=0\longrightarrow y=\dfrac{b}{d}<0\xrightarrow{b>0}d<0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}>0\xrightarrow{d<0}c>0.$

Vậy $b>0,\ c>0,\ d<0.$

Câu 8: Hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}\ (a\neq 0;\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$ **B.** $a>0,\ b>0,\ c-ab>0.$

C. $a>0,\ b>0,\ c-ab=0.$ **D.** $a>0,\ b<0,\ c-ab<0.$

Lời giải

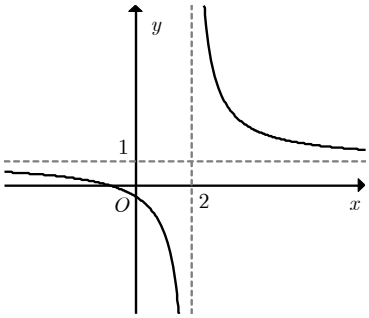
Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=a>0$; tiệm cận ngang $y=b>0.$

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y'=\dfrac{c-ab}{(x-a)^2}<0,\forall x\neq a\longrightarrow c-ab<0.$

Vậy $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$

Câu 9: Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $y'<0,\ \forall x\neq 1.$ **B.** $y'<0,\ \forall x\neq 2.$ **C.** $y'>0,\ \forall x\neq 1.$ **D.** $y'>0,\ \forall x\neq 2.$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số suy ra $y'<0,\ \forall x\neq 2$.

BÀI 6. TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ VÀ TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. TƯƠNG GIAO

Xét hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(D): y = g(x)$.

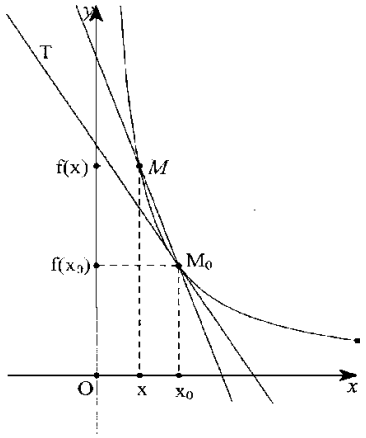
Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và (D) là: $f(x) = g(x)$. (1)

Số điểm chung giữa (C) và (D) đúng bằng số nghiệm của phương trình (1).

(C) và (D) được gọi là tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$.

II. TIẾP TUYẾN

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C), Giả sử (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).



Nhận xét rằng khi $x \to x_0$ thì $M(x; f(x))$ di chuyển trên (C) tới điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$ và ngược lại. Giả sử cát tuyến MM_0 ó vị trí giới hạn, kí hiệu là M_0T thì M_0T được gọi là **tiếp tuyến** của (C) tại M_0. Điểm M_0 được gọi là **tiếp điểm**.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tương giao của hai đồ thị

Câu 1: Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. **B.** $y_0 = 0$. **C.** $y_0 = 2$. **D.** $y_0 = -1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $-2x + 2 = x^3 + x + 2$

$\Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0 \longrightarrow y=2$.

Câu 2: Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) không cắt trục hoành. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$(x-2)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 3: Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=3$. **B.** $AB=2\sqrt{2}$. **C.** $AB=2$. **D.** $AB=1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+2x-1=x^2-3x+1$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \rightarrow y=-1 \\ x=2 \rightarrow y=-1 \end{bmatrix}.$$

Suy ra $A(1;-1), B(2;-1) \longrightarrow AB=1$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (4;+\infty)$. **B.** $m \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right)$.

C. $m \in (0;4)$. **D.** $m \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup (4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x-1)(x^2+mx+m)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x^2+mx+m=0 \quad (1) \end{bmatrix}.$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+m.1+m \neq 0 \\ \Delta=m^2-4m>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \neq 0 \\ m(m-4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} m>4 \\ m<0 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m>4 \\ \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m<0 \end{cases} \end{bmatrix}.$$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm bậc ba $y=x^3-3x^2$, có $y'=3x^2-6x\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\longrightarrow y_{CD}=0\\x=2\longrightarrow y_{CT}=-4\end{array}\right.$.

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có ycbt $\Leftrightarrow y_{CT}<m<y_{CD}\Leftrightarrow -4<m<0$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+3m-1=0$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

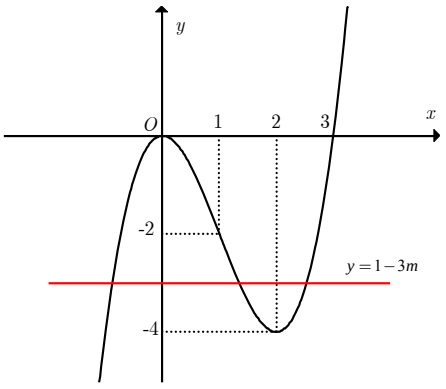
A. $\frac{1}{3}<m<\frac{5}{3}$. **B.** $1<m<\frac{5}{3}$. **C.** $2<m<\frac{7}{3}$. **D.** $-2<m<\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow x^3-3x^2=1-3m$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, ta được



Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow -4<1-3m<-2\Leftrightarrow 1<m<\frac{5}{3}$.

Chú ý: Sai lầm hay gặp là cho $-4<1-3m<0$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt:

A. $m=-\frac{1}{2}$, $m=-1$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{5}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$, $m=\frac{5}{2}$. **D.** $m=1$, $m=-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

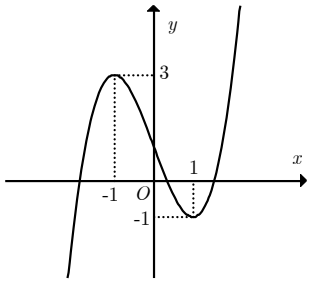
Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2$, có

$$f'(x)=6x^2-6x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \longrightarrow y_{CD}=0 \\ x=1 \longrightarrow y_{CT}=-1 \end{bmatrix}.$$

Dựa vào dạng đặc trưng của đồ thị hàm bậc ba, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi $\begin{bmatrix} 2m+1=y_{CD} \\ 2m+1=y_{CT} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2m+1=0 \\ 2m+1=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=-\frac{1}{2} \\ m=-1 \end{bmatrix}$.

Dạng 2: Dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên biện luận số nghiệm của phương trình

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m-2018=0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m=2015,\ m=2019.$ **B.** $2015<m<2019.$

C. $m<2015,\ m>2019.$ **D.** $m\le 2015,\ m\ge 2019.$

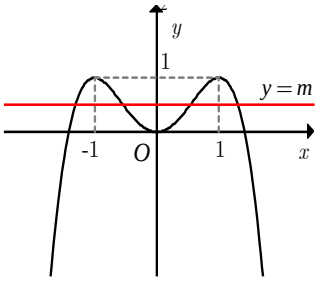
Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x)+m-2018=0 \longleftrightarrow f(x)=2018-m.$ Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2018-m$ (có phương song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2018-m>3 \\ 2018-m<-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<2015 \\ m>2019 \end{bmatrix}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $0\le m\le 1.$ **B.** $0<m<1.$ **C.** $m<1.$ **D.** $m>0.$

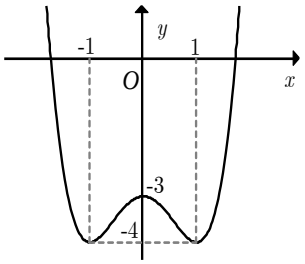
Lời giải

Chọn B

Phương trình $-x^4+2x^2=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<1.$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có sáu nghiệm phân biệt.

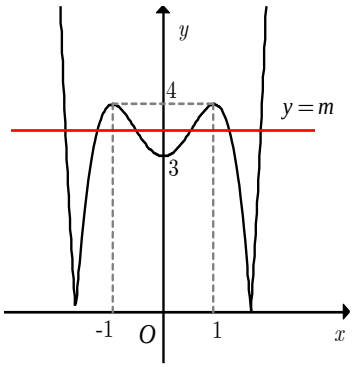


A. $0<m<4$. **B.** $0<m<3$. **C.** $3<m<4$. **D.** $-4<m<-3$.

Lời giải

Chọn C

Trước tiên từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình sau:



Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)|=m$ có sáu nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3<m<4$.

Dạng 3: Dựa vào bảng biến thiên. Biện luận số nghiệm của phương trình

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

A. $-2<m<-1$. **B.** $m>0,\ m=-1$.

C. $m=-2,\ m>-1$. **D.** $m=-2,\ m\geq -1$.

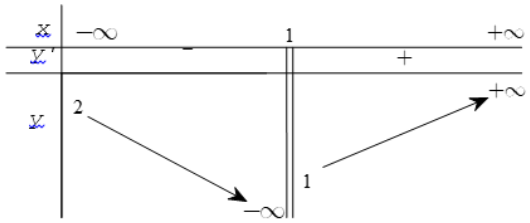
Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x)-1=m \longleftrightarrow f(x)=m+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m+1$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\begin{bmatrix} m+1>0 \\ m+1=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m>-1 \\ m=-2 \end{bmatrix}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1\le m<\frac{3}{2}$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le\frac{3}{2}$. **D.** $1<m<\frac{3}{2}$.

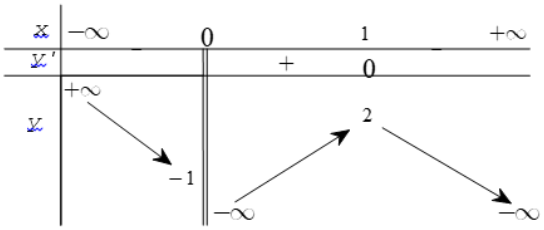
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow 1<2m-1<2\Leftrightarrow 1<m<\frac{3}{2}$.

Sai lầm hay gặp là cho $1\le 2m-1\le 2\Leftrightarrow 1\le m\le\frac{3}{2}\longrightarrow$ Đáp án C thường được chọn Lí do là giá trị của hàm số không bằng 2 mà chỉ tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ và giá trị của hàm số không bằng 1 mà chỉ tồn tại $\lim\limits_{x\to 1^+} y=1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm.

A. $m<2$. **B.** $m<-1,\ m=2$.

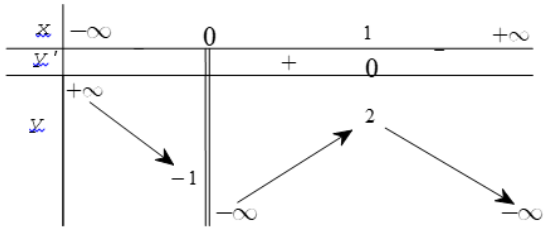
C. $m\le 2$. **D.** $m\le -1,\ m=2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt.

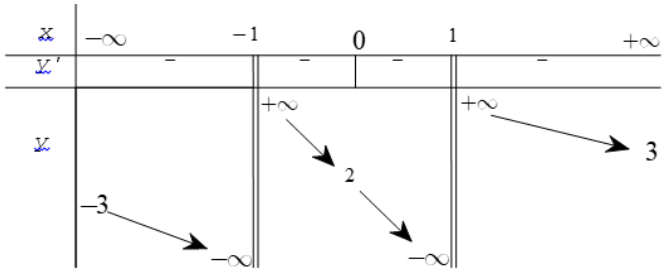
A. $-1\le m\le 2$. **B.** $-1<m<2$. **C.** $-1<m\le 2$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<m<2$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m\le -2$. **B.** $m\ge 1$.

C. $m\le -2$, $m\ge 1$. **D.** $m<-2$, $m>1$.

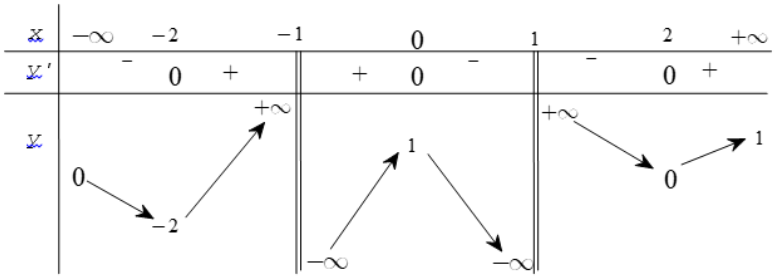
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 2m+1>3 \\ 2m+1<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3\le 2m+1\le 3$.

Câu 6: Giả sử tồn tại hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có bốn nghiệm.

A. $-2\le m\le 0.$ **B.** $-2<m<0$, $m=1.$ **C.** $-2<m\le 0.$ **D.** $-2<m<0.$

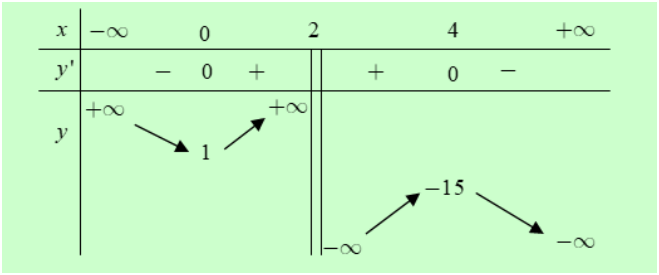
Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=m$ có bốn nghiệm khi và chỉ khi $-2<m\le 0.$

Nhận xét. Học sinh rất dễ sai lầm vì cho rằng $-2<m<0.$ Nếu bài toán yêu cầu có hai nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$, có ba nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$, có năm nghiệm $0<m<1.$

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m=0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

A. $m\in(-\infty;-1]\cup[15;+\infty).$ **B.** $m\in(-\infty;-15)\cup(1;+\infty).$

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(15;+\infty).$ **D.** $m\in(-\infty;-15]\cup[1;+\infty).$

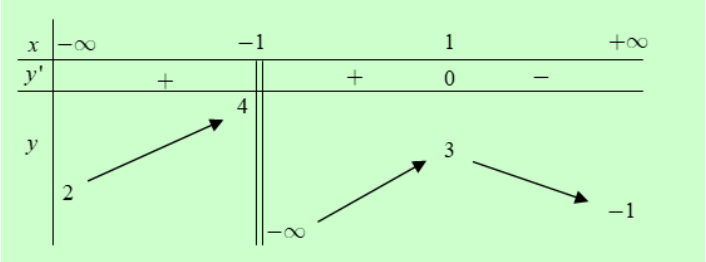
Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x)+m=0\longleftrightarrow f(x)=-m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có nhiều nghiệm thực nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} -m>1 \\ -m<-15 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>15 \end{array}\right.$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ 3<m<4 \end{array}\right.$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba đường tiệm cận.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;1)$.

Vì vậy khẳng đinh C là sai.

Dạng 4: Phương trình tiếp tuyến tại điểm

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng K và có đồ thị là đường cong (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(a;f(a))$, $(a\in K)$.

A. $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. **B.** $y=f'(a)(x+a)+f(a)$.

C. $y=f(a)(x-a)+f'(a)$. **D.** $y=f'(a)(x-a)-f(a)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(a;f(a))$ có dạng

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\Leftrightarrow y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Câu 2: hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-3x-2$. **B.** $y=3x-2$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=-2x+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(C)\cap Oy=A(0;-2)$; $y'(0)=3$.

Tiếp tuyến tại $A(0;-2)$ có dạng: $y=3(x-0)-2=3x-2$.

Câu 3: Gọi M là giao điểm của trục tung với đồ thị hàm số $(C): y=\sqrt{x^2+x+1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A. $y=\frac{1}{2}x+1$. **B.** $y=-\frac{1}{2}x+1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

$x_0=0 \Rightarrow \begin{cases} y'(0)=\frac{1}{2} \\ y_0=1 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(0;1)$ có dạng

$y=\frac{1}{2}(x-0)+1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$.

Dạng 5 : Tiếp tuyến có hệ số góc

Câu 1: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+2$ tại điểm $A(-1;1)$ vuông góc với đường thẳng $x-2y+3=0$. Tính a^2-b^2.

A. $a^2-b^2=10$. **B.** $a^2-b^2=13$. **C.** $a^2-b^2=-2$. **D.** $a^2-b^2=-5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$.

Đường thẳng $x-2y+3=0$ có hệ số góc $k=\frac{1}{2}$.

Suy ra $f'(-1)=-2 \Leftrightarrow -2(2a+b)=-2 \Leftrightarrow 2a+b=1$.

$A(-1;1)$ thuộc đồ thị hàm số nên $a+b+2=1 \Leftrightarrow a+b=-1$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=-5$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x+5$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y=3x+9$. **B.** $y=3x+3$. **C.** $y=3x+12$. **D.** $y=3x+6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3\geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1 \Rightarrow y=9$.

Do đó, tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 3 và là tiếp tuyến tại điểm $M(1;9)$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y=3(x-1)+9 \Leftrightarrow y=3x+6$.

Câu 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ song song với đường thẳng $y=3x+1$ có phương trình là

A. $y=3x-\frac{29}{3}$.

B. $y=3x-\frac{29}{3}$, $y=3x+1$.

C. $y=3x+\frac{29}{3}$.

D. $y=3x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=3x+1$ nên có hệ số góc $k=3$.

Ta có $y'=x^2-4x+3$ nên có phương trình $x^2-4x+3=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

+ Với $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(0;1)$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=3x+1$ (loại).

+ Với $x=4 \Rightarrow y=\frac{7}{3} \Rightarrow B\left(4;\frac{7}{3}\right)$ nên có phương trình tiếp tuyến là $y=3x-\frac{29}{3}$ (thỏa mãn).

Câu 4: Cho hàm số $y=-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x-2$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

A. $y=\frac{9}{2}x-\frac{25}{12}$.

B. $y=5x-\frac{25}{12}$.

C. $y=\frac{9}{4}x-\frac{25}{12}$.

D. $y=\frac{7}{2}x+\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (d) là tiếp tuyến cần tìm phương trình và x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) thì hệ số góc của $(d): k=y'(x_0)=-2x_0^2+2x_0+4=\frac{9}{2}-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{2}$; $k=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

Vậy $\max k=\frac{9}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0=\frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $(d): y=\frac{9}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}x-\frac{25}{12}$.

Câu 5: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2}{2-x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}x+1$.

A. $(d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

B. $(d): y=-\dfrac{3}{4}x, y=-\dfrac{3}{4}x-1$.

C. $(d): y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

D. $(d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}x+1$ suy ra phương trình (d) có dạng: $y=-\dfrac{3}{4}x+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2-x_0}=-\dfrac{3}{4}x_0+m\\ \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$ có nghiệm x_0

$\Rightarrow \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x_0=6\vee x_0=-2\Rightarrow (d): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}, y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+mx+m+1$ và (d) là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x=-1$. Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;8)$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là:

$y=y'(-1)(x+1)+y(-1)=(12+7m)(x+1)-3m-4\Leftrightarrow y=(12+7m)x+4m+8$.

$A(0;8)\in(d)\Leftrightarrow 8=4m+8\Leftrightarrow m=0$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x-4y+1=0$.

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}; y=\dfrac{3}{4}x+1$.

B. $y=\dfrac{3}{4}x-3; y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

C. $y=\dfrac{3}{4}x-9; y=\dfrac{3}{4}x+7$.

D. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}; y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với (C)

$d: y=\dfrac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}$

Vì d song song với đường thẳng $\Delta: y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$, nên ta có:

$\dfrac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$.

- $x_0=-1$ phương trình tiếp tuyến: $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$.
- $x_0=3\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 8: Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y=20x-35$. **B.** $y=-20x-35$ và $y=20x+35$.

C. $y=20x-35$ và $y=-20x-35$. **D.** $y=-20x+35$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=5\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f'(-2)=-20 \\ f'(2)=20 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là

☑ $y=-20(x+2)+5=-20x-35$,

☑ $y=20(x-2)+5=20x-35$.

Câu 9: Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc bằng 2018?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm x_0 trên đồ thị bằng $y'(x_0)=2018 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x-1)^2}=2018$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 2018.

Dạng 6 : Phương trình tiếp tuyến đi qua

Câu 1: Cho hàm số $y=-\dfrac{2x^3}{3}+x^2+4x-2$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(2;-2)$.

A. $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$. **C.** $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{2}$. **D.** $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) đi qua $A(2;-2)$ có dạng: $y=k(x-2)-2$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{2-x_0}=k(x_0-2)-2 \ (1)\\ \dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm x_0.

$\Rightarrow \dfrac{x_0^2}{2-x_0}=\dfrac{-x_0^2+4x_0}{(2-x_0)^2}(x_0-2)-2 \Leftrightarrow x_0=-2 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

BÀI 1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương, a là một số thực tùy ý. **Lũy thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số } a};\ a^1 = a$$

Trong biểu thức a^n, a được gọi là **cơ số**, số nguyên n là **số mũ**

Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của số a là số a^n xác định bởi: $a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Chú ý:

- Kí hiệu $0^0, 0^n$ (n nguyên âm) không có nghĩa.
- Với $a \neq 0$ và n nguyên, ta có $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

2. Phương trình $x^n = b$

a) Trường hợp n lẻ: Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất

b) Trường hợp n chẵn

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau

3. Căn bậc n

a)Khái niệm: Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn bậc số học của a) và $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất căn bậc n: Với *a, b ≥ 0, m, n ∈ N*, p, q ∈ Z* ta có:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0)$;

$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p (a > 0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$; *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & (n\,le) \\ |a|, & (n\,chan) \end{cases}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên, còn n là một số nguyên dương. Khi đó, lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: (SGK)

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho a,b là những số dương; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}=a^{\alpha-\beta}$; $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha\beta}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

Nếu $a>1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$

Nếu $a<1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính, rút gọn và biến đổi biểu thức

Câu 1: Cho $a,\ b$ là các số thực dương thỏa $a^{2b}=5$. Tính. $K=2a^{6b}-4$.

A. $K=226$. **B.** $K=202$. **C.** $K=246$. **D.** $K=242$.

Lời giải

Chọn C

$K=2a^{6b}-4=2\left(a^{2b}\right)^{3}-4=250-4=246$.

Câu 2: Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x^5}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $P=x^{\frac{4}{5}}$. **B.** $P=x^{9}$. **C.** $P=x^{20}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{4}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\sqrt[4]{x^5}=x^{\frac{5}{4}}$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^2$. **B.** $P=\sqrt{x}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{8}}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{9}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Câu 4: Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là?

A. $a^{\frac{5}{6}}$. **B.** $a^{\frac{7}{6}}$. **C.** $a^{\frac{4}{3}}$. **D.** $a^{\frac{6}{7}}$.

Lời giải

Chọn B

Với $a>0$, ta có $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 5: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$ $(x>0)$ dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{5}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{1}{12}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\left(x.x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 6: Biểu thức $Q=\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}$ với $(x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $Q=x^{\frac{2}{3}}$. **B.** $Q=x^{\frac{5}{3}}$. **C.** $Q=x^{\frac{5}{2}}$. **D.** $Q=x^{\frac{7}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $Q = x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{3}}$.

Câu 7: Cho biểu thức $P = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$. Rút gọn biểu thức P được kết quả

A. $P = a^5$. **B.** $P = a^4$. **C.** $P = a^3$. **D.** $P = a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}.a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

Câu 8: Viết biểu thức $P = \dfrac{a^2 a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}$, $(a > 0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $P = a$. **B.** $P = a^5$. **C.** $P = a^4$. **D.** $P = a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \dfrac{a^2 a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}} = \dfrac{a^2 a^{\frac{5}{2}} a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} = a^{2+\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}} = a^5$.

Câu 9: Cho $x > 0$, $y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Tính $m - n$.

A. $\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{8}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Với $x > 0$, $y > 0$, ta có

$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}} = x^{\frac{4}{5}}.\left(x^5.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}} \Rightarrow m = \dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{12}$.

$y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5\sqrt{y}} = \dfrac{y^{\frac{4}{5}}}{y^{\frac{5}{6}}.y^{\frac{1}{12}}} = y^{\frac{4}{5}-\frac{5}{6}-\frac{1}{12}} \Rightarrow n = \dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{12}$.

Do đó $m - n = \dfrac{11}{6}$.

Câu 10: Cho số thực dương $a > 0$ và khác 1. Hãy rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}}\right)}$.

A. $P = 1 + a$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = a$. **D.** $P = 1 - a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\left(1-a^{2}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{7}{12}}\left(1-a\right)}=\dfrac{a^{\frac{5}{6}}\left(1+a\right)}{a^{\frac{5}{6}}}=1+a$.

Câu 11: Cho biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^{2}\sqrt[k]{x^{3}}}}\ (x>0)$. Xác định k sao cho biểu thức $P=x^{\frac{23}{24}}$.

A. $k=2$. **B.** $k=6$. **C.** $k=4$. **D.** Không tồn tại k.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^{2}\sqrt[k]{x^{3}}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x^{2+\frac{3}{k}}}}=\sqrt{x^{1+\frac{2k+3}{k}}}=x^{\frac{5k+3}{6k}}$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi : $\dfrac{5k+3}{6k}=\dfrac{23}{24}\Leftrightarrow k=4$.

Câu 12: Cho $x>0$, $y>0,x\neq y$ và $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$. Xác định mệnh đề đúng.

A. $K=2x$. **B.** $K=x+1$. **C.** $K=x-1$. **D.** $K=x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}=x$.

Câu 13: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^{7}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^{4}.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^{*}$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m^{2}-n^{2}=-312$. **B.** $m^{2}-n^{2}=312$. **C.** $m^{2}+n^{2}=543$. **D.** $m^{2}+n^{2}=409$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^{7}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^{4}.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^{4}.a^{-\frac{5}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$.

Suy ra $m=19$, $n=7\ \Rightarrow m^{2}-n^{2}=312$.

Câu 14: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^{5}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^{4}.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^{*}$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^{2}-n^{2}=25$. **B.** $m^{2}+n^{2}=43$. **C.** $3m^{2}-2n=2$. **D.** $2m^{2}+n=15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-4+\frac{2}{7}}=a^{\frac{2}{7}}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=7\end{cases}\Rightarrow 2m^2+n=15$.

Dạng 2: So sánh đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản

Câu 1: Cho số thực $a>1$ và các số thực α, β. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a^{\alpha}>1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **B.** $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **C.** $\dfrac{1}{a^{\alpha}}<0,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **D.** $a^{\alpha}<1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho $a>0$, $b>0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?

A. $(a+b)^x=a^x+b^x$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=a^x.b^{-x}$. **C.** $a^{x+y}=a^x+a^y$. **D.** $a^xb^y=(ab)^{xy}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}=a^x.b^{-x}$.

Câu 3: Cho các số thực a,b,m,n với $(a,b>0)$. Tìm mệnh đề ***sai***?

A. $\sqrt{a^2}=a$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=a^m.b^{-m}$. **C.** $\left(a^m\right)^n=a^{m+n}$. **D.** $(ab)^m=a^m.b^m$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Cho các số dương $a\neq 1$ và các số thực α, β. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$. **B.** $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha\beta}$. **C.** $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$. **D.** $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5: Cho các số thực a, m, n và a dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^{m-n}=a^m-n$. **B.** $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$. **C.** $a^{m-n}=a^m-a^n$. **D.** $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{n}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$.

Câu 6: Cho a,b là các số thực dương và m,n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $(xy)^n=x^n.y^n$. **B.** $x^m.x^n=x^{m+n}$. **C.** $\left(x^m\right)^n=x^{m.n}$. **D.** $x^m.y^n=(xy)^{m+n}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(xy)^{m+n}=x^{m+n}.y^{m+n}$.

Câu 7: Cho a,b là các số thực dương, m,n là các số thực tùy ý. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $a^m.b^m=(ab)^{2m}$. **B.** $a^m.a^n=a^{mn}$. **C.** $a^m.b^n=(ab)^{mn}$. **D.** $a^{-m}b^m=\left(\frac{b}{a}\right)^m$.

Lời giải:

Chọn D

Câu 8: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(\frac{3}{4}\right)^5<\left(\frac{3}{4}\right)^6$. **B.** $\left(\frac{4}{3}\right)^{-7}>\left(\frac{4}{3}\right)^{-6}$. **C.** $\left(\frac{3}{2}\right)^6>\left(\frac{3}{2}\right)^7$. **D.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^a>\left(\sqrt{2}-1\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a>b$. **B.** $a<b$. **C.** $a=b$. **D.** $a\geq b$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10: Cho $x\in\left(0;\frac{3}{\pi}\right)$ và m, n là các số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $x^m>x^n\Leftrightarrow m<n$. **B.** $x^m>x^n\Leftrightarrow m>n$. **C.** $\left(x^m\right)^n=x^{m.n}$. **D.** $x^{m+n}=x^m.x^m$.

Lời giải

Chọn B

Do $\frac{3}{\pi}<1$ nên với $x\in\left(0;\frac{3}{\pi}\right)$ thì $x^m>x^n\Leftrightarrow m<n$.

Câu 11: Cho a thuộc khoảng $\left(0;\frac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\left(a^\alpha\right)^b=a^{\alpha.\beta}$. **B.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow a<\beta$. **C.** $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$. **D.** $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Lời giải

Chọn D

Câu 12: Cho $\pi^\alpha>\pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha.\beta=1$. **B.** $\alpha>\beta$. **C.** $\alpha<\beta$. **D.** $\alpha+\beta=0$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\pi\approx3,14>0$ nên $\pi^\alpha>\pi^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 13: Với α là số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(10^\alpha\right)^2=100^\alpha$. **B.** $\sqrt{10^\alpha}=\left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **C.** $\sqrt{10^\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}$. **D.** $\left(10^\alpha\right)^2=10^{\alpha^2}$.

Lời giải

Chọn D

Đáp án D sai do với mọi $a>0$ và $m,n\in\mathbb{R}$ ta có: $\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m=a^{m.n}$.

Khi đó $\left(10^\alpha\right)^2=\left(10^2\right)^\alpha=10^{2\alpha}$.

Câu 14: Cho các số thực a,b,α $(a>b>0,\alpha\neq1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$. **B.** $(a-b)^{\alpha}=a^{\alpha}-b^{\alpha}$. **C.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{-\alpha}}$. **D.** $(a+b)^{\alpha}=a^{\alpha}+b^{\alpha}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15: Cho a,b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\frac{3}{4}\right)^{a}>\left(\frac{4}{5}\right)^{a}$ và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $a>0$ và $b>1$. **B.** $a>0$ và $0<b<1$. **C.** $a<0$ và $0<b<1$. **D.** $a<0$ và $b>1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\left(\frac{3}{4}\right)^{a}>\left(\frac{4}{5}\right)^{a}\Rightarrow a<0$.

Và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}\Rightarrow 0<b<1$.

Câu 16: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$ **B.** $\frac{1}{a^{2017}}<\frac{1}{a^{2018}}$ **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **D.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a>1$.

Câu 17: Xét a, b là các số thực thỏa mãn $ab>0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}=\sqrt[6]{ab}$. **B.** $\sqrt[8]{(ab)^8}=ab$. **C.** $\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{a}.\sqrt[6]{b}$. **D.** $\sqrt[5]{ab}=(ab)^{\frac{1}{5}}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $ab>0\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}\vee\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$.

Với $a<0$, $b<0$ thì $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[6]{b}$ vô nghĩa. Nên khẳng định $\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{a}.\sqrt[6]{b}$ là sai.

Câu 18: Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

A. $2^{30}<3^{20}$. **B.** $0,99^{\pi}>0,99^{e}$. **C.** $2^{3}<3^{\pi}$. **D.** $4^{-\sqrt{3}}<4^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\pi>e$ và $0,999<1$ nên $0,99^{\pi}<0,99^{e}$, do đó đáp án B sai.

Câu 19: Cho a,b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\frac{3}{4}\right)^{a}>\left(\frac{4}{5}\right)^{a}$ và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $a>0$ và $b>1$. **B.** $a>0$ và $0<b<1$.

C. $a<0$ và $0<b<1$. **D.** $a<0$ và $b>1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\left(\frac{3}{4}\right)^{a}>\left(\frac{4}{5}\right)^{a}\Rightarrow a<0$.

Và $b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < b < 1$.

Câu 20: Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < 7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a < 1$. **B.** $a > 1$. **C.** $a > 0$. **D.** $a < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)=1$ nên $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < 7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < \left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow a-1 < -1 \Leftrightarrow a < 0$ (do $7+4\sqrt{3} > 1$).

Câu 21: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} 0 < \sqrt{3}-1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$ nên B sai.

Câu 22: Tìm khẳng định đúng?

A. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$. **B.** $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

C. $-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2016} > -\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}$. **D.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2016} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $0 < 2-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{2016} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Câu 23: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

A. $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a > 1$. **D.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[21]{a^6}$.

Ta có $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[21]{a^5} > \sqrt[21]{a^6}$ mà $5 < 6$ vậy $0 < a < 1$.

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC GIÁO KHOA CẦN NẮM

1.Khái niệm hàm lũy thừa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y=x^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$.

Chú ý: Tập xác định của hàm số lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α

- Với α nguyên dương thì tập xác định là R

- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Với α không nguyên thì tập xác định là $(0;+\infty)$

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x>0.$ Do đó, hàm số $y=x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y=\sqrt[n]{x}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Ví dụ $y=\sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc 3, xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$; còn hàm số lũy thừa $y=x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định khi $x>0$

2.Đạo hàm của hàm số lũy thừa

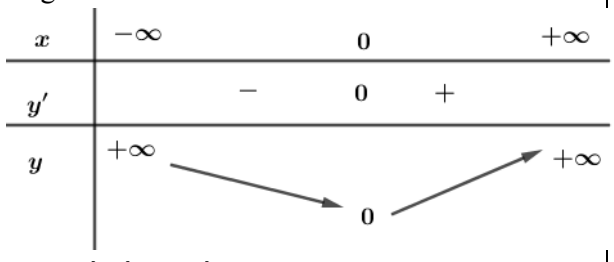
$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1} \text{ với } x>0;\quad \left(u^{\alpha}\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u', \text{với } u>0$$

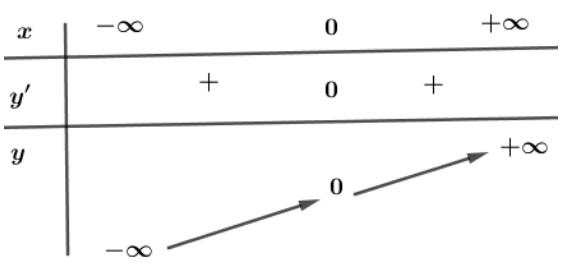
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \text{với mọi } x>0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi } x\neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}},\ \text{với mọi u}>0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi u}\neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$

3.Khảo sát hàm số lũy thừa

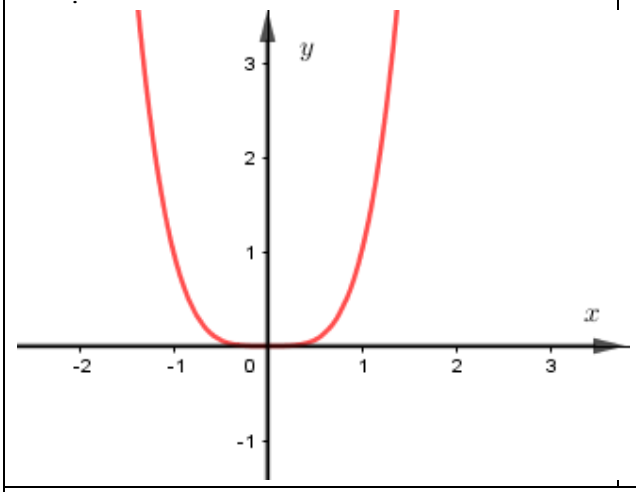
Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát ta khảo sát hàm số $y=x^{\alpha}$ trên khoảng này**.**

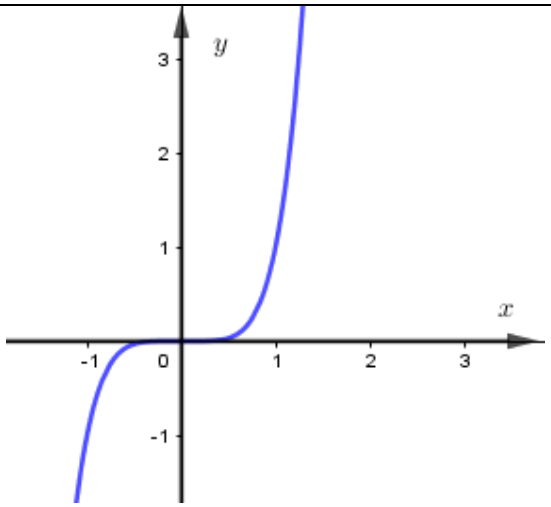
<table>
<tr><th colspan="2">$\alpha\in\mathbb{N}^*$</th></tr>
<tr><th>$\alpha=2n,\ n\in\mathbb{N}^*$</th><th>$\alpha=2n+1,\ n\in\mathbb{N}$</th></tr>
<tr><td>Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:
$y=x^{2n}\Rightarrow y'=2n.x^{2n-1}$.
$y'=0\Rightarrow x=0$.
Bảng biến thiên
 

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.</td><td>Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:
$y=x^{2n+1}\Rightarrow y'=(2n+1).x^{2n}\Rightarrow y'\geq 0\ \forall x\in D$.
$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D.
Bảng biến thiên
 

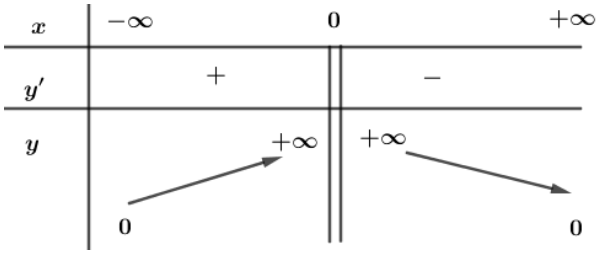
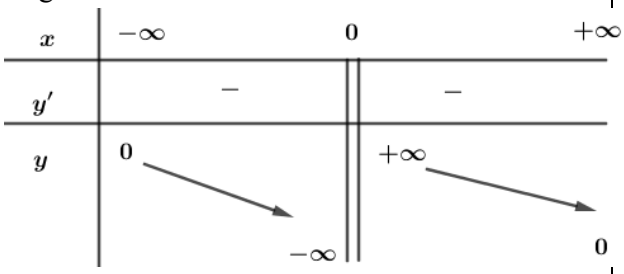
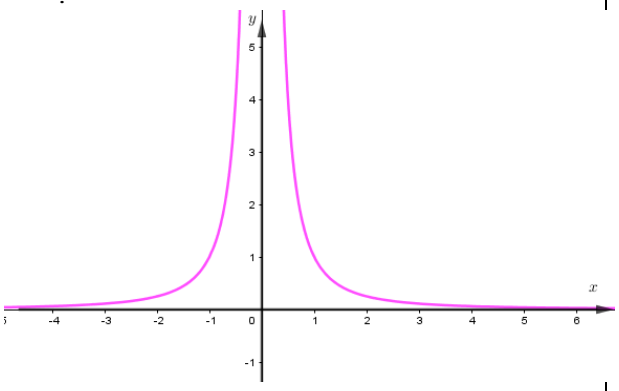
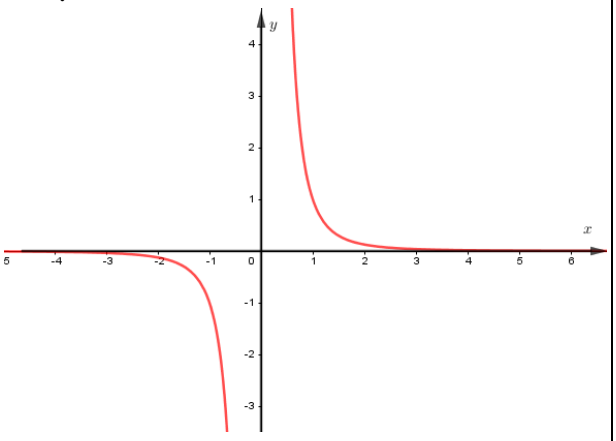
Đồ thị:</td></tr>
</table>

Đồ thị:



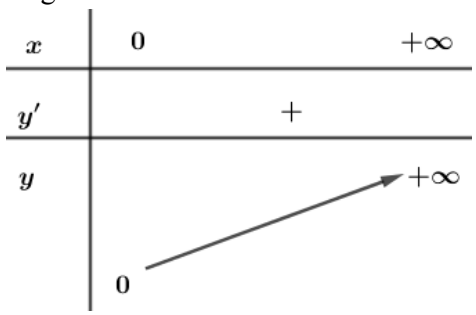
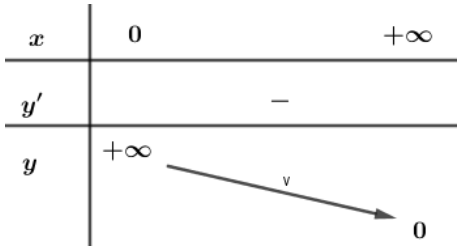


$\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$

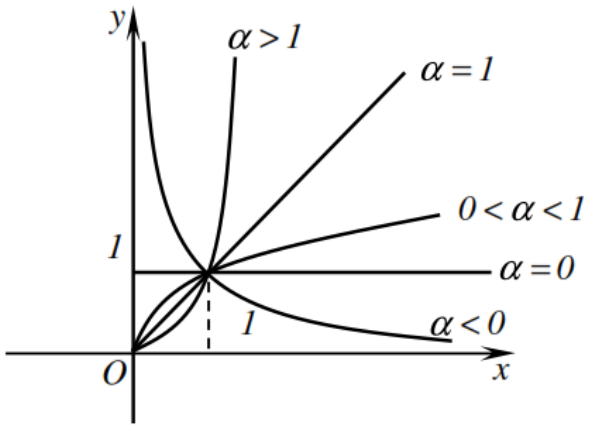
$\alpha = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$	$\alpha = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$
Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.	Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Sự biến thiên:	Sự biến thiên:
$y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n.x^{2n-1}$.	$y = x^{2k+1} \Rightarrow y' = (2k+1).x^{2k} \Rightarrow y' < 0\ \forall x \in D$.
	$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên D.
Giới hạn:	Giới hạn:
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN.
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = +\infty\end{cases} \Rightarrow x = 0$ là TCĐ.	$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty\end{cases} \Rightarrow x = 0$ là TCĐ.
Bảng biến thiên	Bảng biến thiên
	
Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.	
Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.	
Đồ thị:	Đồ thị:
	

$\alpha \notin \mathbb{Z}$

Trong giới hạn chương trình ta chỉ khảo sát trên $(0;+\infty)$.

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Tập khảo sát: $D=(0;+\infty)$. Sự biến thiên: $y'=\alpha.x^{\alpha-1}>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. $\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận. Bảng biến thiên 	Tập khảo sát: $D=(0;+\infty)$. Sự biến thiên: $y'=\alpha.x^{\alpha-1}<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \Rightarrow$ TCN: $y=0$ Bảng biến thiên 

Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(1;1)$.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định và tính đạo hàm của hàm số

1. Phương pháp

Cần nhớ lại: Xét hàm số $y=\left[f(x)\right]^a$

- Nếu a nguyên dương thì hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định.
- Nếu a nguyên âm hoặc bằng 0 thì hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)\neq 0$.
- Nếu a không nguyên thì hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)>0$.

2. Các ví dụ

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **C.** $y'=\dfrac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 5}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số lũy thừa có số mũ không nguyên thì điều kiện là cơ số phải dương, nên suy ra $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$ có điều kiện là $x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(2-x)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(-\infty;2]$. **B.** $D=(2;+\infty)$. **C.** $D=(-\infty;2)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

ĐKXĐ: $2-x>0\Leftrightarrow x<2$. Suy ra TXĐ: $D=(-\infty;2)$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-3}$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-3}$ là: $x^2-1\neq0\Leftrightarrow x\neq\pm1.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(2x-x^2\right)^{\sqrt{2019}}$.

A. $(-\infty;0]\cup[0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số là $2x-x^2>0\Leftrightarrow0<x<2$.

Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là $(0;2)$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-4x\right)^{\frac{2019}{2020}}$ là:

A. $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $R\setminus\{0;4\}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\left(x^2-4x\right)^{\frac{2019}{2020}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-4x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây có tập xác định **không** phải là khoảng $(0;+\infty)$?

A. $y=x^{-5}$. **B.** $y=x^{\sqrt{2}}$. **C.** $y=x^{\frac{1}{3}}$. **D.** $y=x^{-1,7}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=[f(x)]^{\alpha}$ *thì tập xác định phụ thuộc vào giá trị của* α.

Cụ thể:

+ Nếu α *nguyên dương thì hàm số xác định khi và chỉ khi* $f(x)$ *xác định.*

+ Nếu $\alpha=0$ *hoặc* α *nguyên âm thì hàm số xác định khi và chỉ khi* $f(x)\neq 0$.

+ Nếu α *không nguyên thì hàm số xác định khi và chỉ khi* $f(x)>0$.

Vì -5 là số nguyên âm nên tập xác định của hàm số $y=x^{-5}$ là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{3}{5}}+(x-3)^{-2}$ là

A. $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\setminus\{3\}$. **B.** $D=(-\infty;+\infty)\setminus(1;2)$.

C. $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{3\}$. **D.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{3}{5}}+(x-3)^{-2}$ xác định khi $\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.\\x\neq 3\end{cases}$.

Vậy $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{-2}$

A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số lũy thừa với số mũ nguyên âm nên điều kiện là $2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 9: Tập xác định D của hàm số $y=(3x-5)^{\frac{\pi}{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\}$. **B.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=(3x-5)^{\frac{\pi}{3}}$ xác định khi: $3x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$ nên tập xác định $D=\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-4;1]$. **D.** $(-4;1)$.

Lờigiải

Chọn A

Vì $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là hàm số lũy thừa có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định là $4-3x-x^2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -4\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=\left(-2x^2-x+3\right)^{2e-1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$. **B.** $\left(-\infty;\frac{-3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{-3}{2};1\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

+ Vì $2e-1$ không là số nguyên nên điều kiện là $-2x^2-x+3>0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-3}{2};1\right)$

Dạng 2: Tính đạo hàm

Câu 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

A. $y'=2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$. **B.** $y'=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

C. $y'=\frac{e}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$. **D.** $y'=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\ln\left(x^2+1\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $y'=\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\right)'=\frac{e}{2}.2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}=ex\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

Câu 2: Hàm số $y=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$ có đạo hàm là.

A. $y'=\frac{4}{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}}$. **B.** $y'=2x\sqrt{x^2+1}$. **C.** $y'=4x\sqrt[5]{x^2+1}$. **D.** $y'=\frac{4x}{5\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}}$

.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì Áp dụng công thức $\left(u^n\right)'=n.u^{n-1}.u'$.

Câu 3: Cho $f(x)=x^2.\sqrt[3]{x^2}$ Giá trị của $f'(1)$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Với $x>0$ thì $f(x)=x^{2+\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$ nên $f'(1)=\frac{8}{3}$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=(1-\cos 3x)^6$.

A. $y'=18\sin 3x(\cos 3x-1)^5$.

B. $y'=18\sin 3x(1-\cos 3x)^5$.

C. $y'=6\sin 3x(1-\cos 3x)^5$.

D. $y'=6\sin 3x(\cos 3x-1)^5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $y=(1-\cos 3x)^6\Rightarrow y=6(1-\cos 3x)^5.(1-\cos 3x)'$.

$=6(1-\cos 3x)^5.3\sin 3x=18\sin 3x(1-\cos 3x)^5$..

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

B. $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{8}{3}}$.

D. $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^2+x+1\right)'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $y'=\frac{2}{3}x\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

B. $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

C. $y'=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^2+3\right)$.

D. $y'=2x\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^2+3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2+3\right)'=\frac{2}{3}x\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\sqrt[4]{x^2-3}$, phương trình $y'=0$ có mấy nghiệm thực:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=\sqrt[4]{x^2-3}$.

Ta có: $y'=\left[\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{4}}\right]'=\frac{1}{4}\left(x^2-3\right)^{\frac{-3}{4}}.2x=\frac{1}{2\sqrt[4]{\left(x^2-3\right)^3}}$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ta thấy $y'>0$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ do đó phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=(x\sin x)^{\frac{2}{3}}$.

A. $y'=\frac{2}{3}(x\sin x)^{-\frac{1}{3}}$.

B. $y'=\frac{2}{3}(x\sin x)^{-\frac{1}{3}}.(\sin x+x\cos x)$.

C. $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin x+x\cos x}{\sqrt[3]{x\sin x}}$.

D. $y'=\frac{2}{3}(x\sin x)^{-\frac{1}{3}}.\cos x$.

Lời giải.

Chọn B

$y'=\frac{2}{3}(x\sin x)^{\frac{2}{3}-1}.(x\sin x)'=\frac{2}{3}(x\sin x)^{-\frac{1}{3}}.(\sin x+x\cos x)$.

Dạng 3. Sự biến thiên và nhận dạng đồ thị hàm số

1. Phương pháp

Lưu ý: Trong dạng bài toán này lưu ý những đặc điểm sau của đồ thị hàm số $y=x^\alpha$**:**

Đồ thị luôn đi qua điểm

Khi $\alpha>0$ hàm số luôn đồng biến, khi $\alpha<0$ hàm số luôn nghịch biến

Đồ thị hàm số không có tiệm cận khi $\alpha>0$. khi $\alpha<0$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.

2. Các ví dụ

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. Hàm số $y=x^\alpha$ có tập xác định tùy theo α.

B. Đồ thị hàm số $y=x^\alpha$ với $\alpha>0$ có tiệm cận.

C. Hàm số $y=x^\alpha$ với $\alpha<0$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

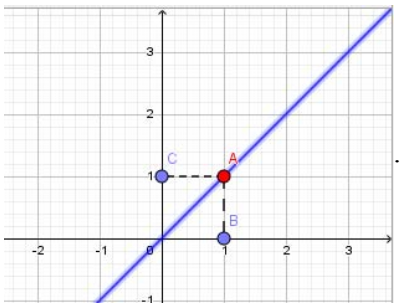
D. Đồ thị hàm số $y=x^\alpha$ với $\alpha<0$ có hai tiệm cận.

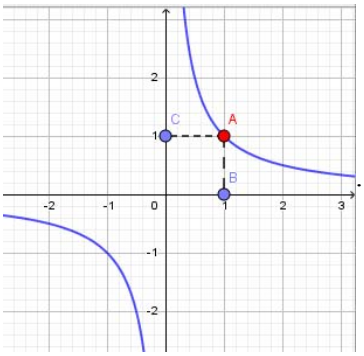
Lời giải

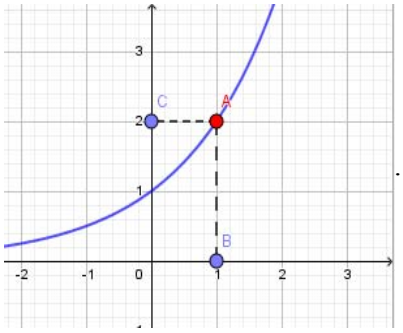
Chọn B

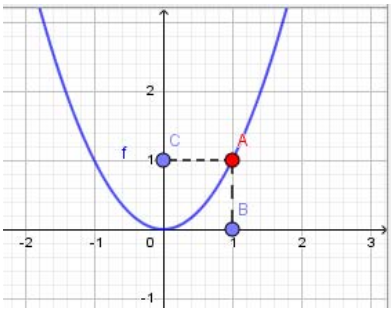
Đồ thị hàm số $y=x^\alpha$ với $\alpha>0$ không có tiệm cận.

Câu 2: Đồ thị nào dưới đây KHÔNG là đồ thị của hàm số $y=x^\alpha$?

A. 

B. 

C. 

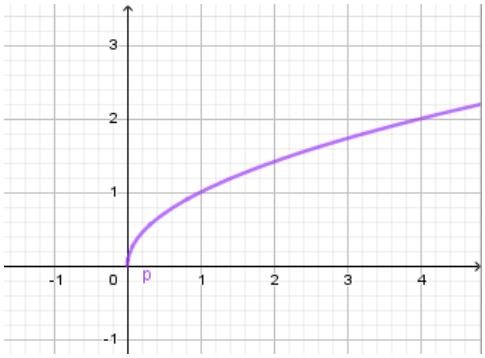
D. 

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ không đi qua điểm $(0;1)$.

Câu 3: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị hàm số nào?



A. $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **B.** $y=x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $y=2^{x}$. **D.** $y=2^{x-1}$.

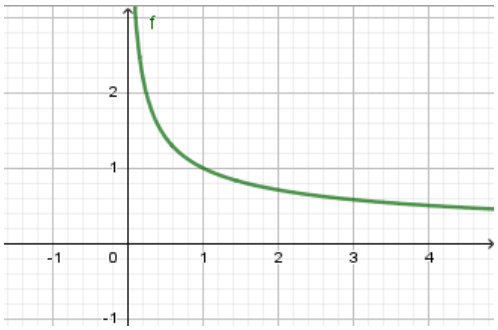
Lời giải

Chọn B

Nhận thấy đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên loại đáp án C và D

Nhận thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(4;2)$ nên loại đáp án A

Câu 4: Hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.



A. $y=x^{-2}$. **B.** $y=2^{-x}$. **C.** $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **D.** $y=\log_2 x$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số đi qua điểm nhận Ox,Oy làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng loại C,D

Dùng máy tính kiểm tra đáp án thấy đồ thị đi qua chọn đáp án **C.**

Câu 5: Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **SAI**?

A. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số có tập xác định là $(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$, suy ra C đúng.

Do $x>0$ nên $x^{-\sqrt{2}}>0$, suy ra A đúng.

Ta có: $y'=-\sqrt{2}.x^{-\sqrt{2}-1}<0;\forall x>0$, suy ra B đúng.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\sqrt{2}}=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận Oy làm tiệm cận đứng, đáp án D đúng.

Câu 6: Cho hàm số $y=x^{\sqrt{2}}$, có các khẳng định sau

I. Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

II. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc tập xác định của nó.

III. Hàm số luôn đi qua điểm $M(1;1)$.

IV. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Hỏi có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Do $\alpha=\sqrt{2}$ nên hàm số xác định với mọi $x>0$. Vậy khẳng định I đúng.

Do $y' = \sqrt{2}.x^{\sqrt{2}-1} > 0$ với mọi $x > 0$ nên hàm số đồng biến trên tập xác định. Khẳng định II đúng.

Do $y(1) = 1^{\sqrt{2}} = 1$ nên khẳng định III đúng.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\sqrt{2}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sqrt{2}} = 0$ nên đồ thì hàm số không có đường tiệm cận. Vậy IV đúng.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}}$ có đồ thị. Phương trình tiếp tuyến của tại điểm M_0 có hoành độ $x_0 = 1$ là:

A. $y = \frac{\pi}{2}x + 1$. **B.** $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$. **C.** $y = \pi x - \pi + 1$. **D.** $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$

Lời giải

Chọn B

Tự luận:

Ta có: $y' = \frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow y'(1) = \frac{\pi}{2}$

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$

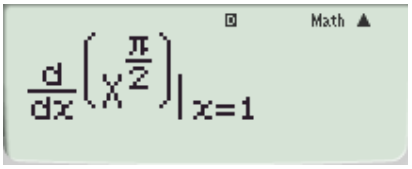
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$

Trắc nghiệm:

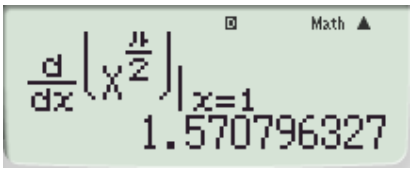
Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$. Thay vào các đáp án thấy A, D không thỏa mãn nên loại A và D

$y' = \frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow y'(1) = \frac{\pi}{2}$ Nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\frac{\pi}{2}$ nên loại đáp án **C.**

Lưu ý: Có thể dùng CASIO hỗ trợ tính đạo hàm tại $x_0 = 1$ như sau:

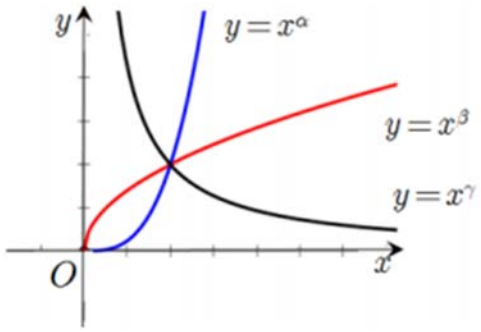


Và có kết quả



Thấy kết quả không bằng $\pi \approx 3{,}141..$ nên loại đáp án **C.**

Câu 8: Cho các hàm số $y = x^{\alpha}; y = x^{\beta}; y = x^{\gamma}$ có đồ thị trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng.



A. $\gamma<\alpha<\beta$. **B.** $\beta<\gamma<\alpha$. **C.** $\alpha<\gamma<\beta$. **D.** $\gamma<\beta<\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=x^{\gamma}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên $\gamma<0$.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=x^{\beta}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nằm dưới đường thẳng $y=x$ nên $0<\gamma<1$.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y=x^{\alpha}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nằm trên đường thẳng $y=x$ nên $\alpha>1$.

Vậy $\gamma<\beta<\alpha$.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{3}}$ khẳng định nào sau đây đúng?

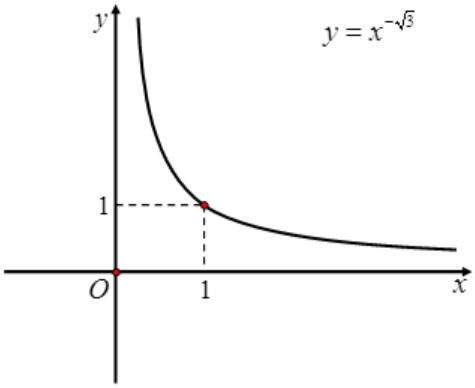
A. Đồ thị hàm số cắt trục Ox.
B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn D

* TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

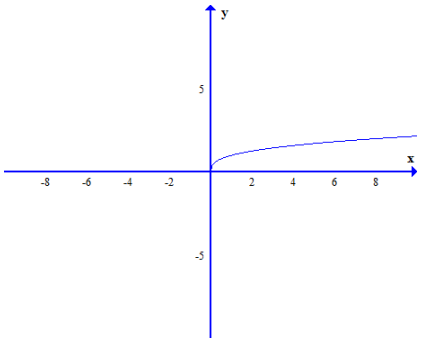
* Đồ thị hàm số:



Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy và một tiệm cận ngang là trục Ox.

Đáp án đúng là **D.**

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên, biết $f(x)$ là một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm $f(x)$.



A. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **C.** $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$. **D.** $f(x)=x^3$.

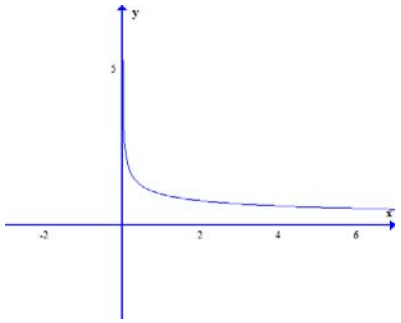
Lời giải.

Chọn A

Hàm số có tập xác định là $D=(0;+\infty)$, loại đáp án B,**D.**

Hàm số tăng trên D, loại **C.**

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên, biết $f(x)$ là một trong 4 hàm số dưới đây. Tìm $f(x)$.



A. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **C.** $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$. **D.** $f(x)=x^3$.

Lời giải.

Chọn C

Hàm số có tập xác định là $D=(0;+\infty)$, loại đáp án B,**D.**

Hàm số giảm trên $y'=\dfrac{bx^2}{\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}}$, loại **A.**

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=(1-x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên R. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

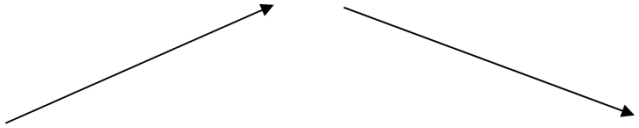
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên R.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm: $f'(x)=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.\left(1-x^2\right)'=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.(-2x)$

Nhận thấy ngay: $2019.\left(1-x^2\right)^{2018} \geq 0$. Nên ta có thể nhận thấy ngay dấu của đạo hàm cùng dấu với $(-x)$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$					

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

BÀI 3. LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM LOGARIT

1. Định nghĩa: Cho 2 số $a,b>0$ dương với a khác 1. Số α thỏa mãn đẳnng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và ký hiệu $\log_a b$

$$\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^{\alpha}=b$$

Chú ý

- Không có logarit của số 0 và số âm vì a^{α} luông dương với mọi α
- Cơ số của logarit phải dương và khác 1
- Theo đinh nghĩa logarit ta có các tính chất sau

2. Tính chất

Cho hai số dương a và b, $a\neq 0$. Ta có các tính chất sau

$$\log_a 1=0;\ \ \log_a a=1;\qquad a^{\log_a b}=b,\ \ \forall b\in\mathbb{R},b>0;\qquad \log_a\left(a^{\alpha}\right)=\alpha,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

Ví dụ. Tính

a) $4^{\log_2 3}$; b) $3^{\log_{\sqrt{3}} 4}$; c) $\sqrt{2}^{\log_2 3}$; d) $\log_2 4$ e) $\log_3\frac{1}{3}$

f) $\log_2\frac{1}{16}$ g) $(2a)^{\log_{3\sqrt{a}} 1}$ với $0<a\neq 1$ h) $49^{\log_7\sqrt{5}+\log_{49}3}$

II. CÁC QUY TẮC TÍNH LOGARIT

1. Logarit của một tích: Với $0<a\neq 1;\ \ b,c>0$ ta có $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$

Logarit của một tích bằng tổng các logarit

Ví dụ 3: Tính

a) $\log_{12}6+\log_{12}2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}6+\log_{\frac{1}{2}}24+\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}$

Chú ý: Công thức trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a\left(b_1.b_2...b_n\right)=\log_a b_1+\log_a b_2+...+\log_a b_n$$
$$\left(a,b_1,b_2,...,b_n>0,a\neq 1\right)$$

2. Logarit của một thương: a > 0; b_1> 0; b_2> 0, a $\neq 1$

$$\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=\log_a b_1-\log_a b_2$$

Logarit của một thương bằng hiệu các logarit

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right)=-\log_a b,\ \ (0<a\neq 1,b>0)$$

Ví dụ. Tính

a) $\log_{25}100-\log_{25}4$; b) $\log_{\sqrt{2}}20+\log_{\sqrt{2}}6-\log_{\sqrt{2}}15$.

c) $\log_2 5+\log_2 10-\log_2 25$. d) $\log_3 6+\log_3 7-\log_3 14$

3. Logarit của một lũy thừa: a > 0; b> 0, $a\neq 1$

$$\log_a\left(b^\alpha\right)=\alpha\log_a b$$

Logarit của một lũy thừa bằng tích của số mũ với logarit của cơ số

$$\log_a\left(\sqrt[n]{b}\right)=\frac{1}{n}\log_a b$$

Ví dụ 5. Cho $\log_a b=2;\log_a c=-3$. Hãy tính $\log_a x$, biết

a) $x=\frac{a^2b^3}{c^4}$ b) $x=\frac{a^2\sqrt{b}}{c^3}$ c) $x=a^2\sqrt[3]{b}c^2$

III. ĐỔI CƠ SỐ:

Cho a > 0; b > 0; c>0, $a\neq 1$, $c\neq 1$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a};\qquad \log_a b=\frac{1}{\log_b a},b\neq 1;\qquad \log_{a^\alpha} b=\frac{1}{\alpha}\log_a b,\alpha\neq 0$$

Ví dụ. a) Tính $\log_{36}2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}}3$; b)Cho $\log_2 3=a;\log_3 5=b;\log_7 2=c$. Tính $\log_{63}50$

V. LOGARIT THẬP PHÂN. LOGARIT TỰ NHIÊN

1. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là logarit cơ số 10 của một số dương x được gọi là logarit thập phân của x và được kí hiệu là $\log x$ hoặc lg .

Một ứng dụng quan trong của logarit thập phân trong các bài toán Casio

Rõ ràng khi $x=10^n$ thì $\log x=n$. Còn với số $x\geq 1$ tùy ý, viết x trong hệ thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $n+1$, trong đó n là phần nguyên của $\log x$, kí hiệu $n=[\log x]$.

Thật vậy, vì 10^n là số tự nhiên bé nhất có $n+1$ chữ số nên số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x bằng $n+1$ khi và chỉ khi $10^n\leq x<10^{n+1}$, tức là $n\leq\log x<n+1$; điều này chứng tỏ $n=[\log x]$.

Ví dụ: Để tìm số các chữ số của 2^{2008} khi viết trong hệ thập phân người ta lấy giá trị gần đúng của $\log 2$ là $0,3010$ và ta được

$[2008.\log 2]+1=[2008.0,3010]+1=605$. Vậy số 2^{2008} có 605 chữ số.

2. Lôgarit tự nhiên: Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Kí hiệu $\log_e b=\ln b$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính toán về logarit

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Tính $P = \log_2\left(a^2b^3\right)$.

A. $P = x^2y^3$ **B.** $P = x^2 + y^3$ **C.** $P = 6xy$ **D.** $P = 2x + 3y$

Lời giải

Chọn D

$P = \log_2\left(a^2b^3\right) = \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2\log_2 a + 3\log_2 b = 2x + 3y$.

Câu 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 . \log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 18. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$P = \log_{\sqrt{a}} b^3 . \log_b a^4 = (6\log_a b).(4\log_b a) = 24$.

Câu 3: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_b\left(b^2 . b^{\frac{1}{2}}\right)$.

A. $P = \frac{3}{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = \frac{5}{2}$. **D.** $P = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \log_b\left(b^2 . b^{\frac{1}{2}}\right) = \log_b b^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\log_b b = \frac{5}{2}$.

Câu 4: Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

A. $2a$. **B.** 2. **C.** 2^a. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_a a^2} = a^{2\log_a a} = a^2$.

Câu 5: Giá trị biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$ là:

A. $A = 8$. **B.** $A = 15$. **C.** $A = 405$. **D.** $A = 86$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5} = 2^{\log_4 9} . 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 3} . 2^{\log_2 5} = 3.5 = 15$.

Câu 6: Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$

A. $P = -9$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = 9$

Lời giải

Chọn A

Ta có: Thay số bất kỳ chẳng hạn $a = 3$ có ngay $P = -9$.

Câu 7: Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$

A. $P=-9$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=1$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Chọn A

• **Tự luận :** $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)=\log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{-3}=-9\log_a a=-9$

• **Trắc nghiệm :** Sử dụng máy tính, thay $a=2$ rồi nhập biểu thức $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ vào máy bấm = ta được kết quả $P=-9$.

Câu 8: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Lời giải

Chọn C

$I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)=2$.

Câu 9: Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+\frac{1}{3}\log_3 a-2\log_3|b|$. **B.** $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3 b$.

C. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3|b|$. **D.** $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a+2\log_3 b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=\log_3\left(3a^3\right)-\log_3 b^2=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b$.

$=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b=1+3\log_3 a-2\log_3|b|$.

Câu 10: Cho $\log 3=a$. Tính $\log 9000$ theo a.

A. $6a$. **B.** a^2+3. **C.** $3a^2$. **D.** $2a+3$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $\log 9000=\log 9+\log 1000=2\log 3+3=2a+3$.

Cách 2: Gán $\log 3=a$. Tính $\log 9000-(2a+3)=0$.

Câu 11: Cho $\log_6 9=a$. Tính $\log_3 2$ theo a

A. $\frac{a}{2-a}$. **B.** $\frac{a+2}{a}$. **C.** $\frac{a-2}{a}$. **D.** $\frac{2-a}{a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_6 9 = 2\log_{2.3} 3 \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{\log_3 2.3} \Leftrightarrow \log_3 2 + 1 = \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow \log_3 2 = \dfrac{2-a}{a}$.

Câu 12: Cho $a, b > 0$. Rút gọn biểu thức $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

A. $2\log_a b$ **B.** 0 **C.** $\log_a b$ **D.** $4\log_a b$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = 2\log_a b + \dfrac{1}{2}.4.\log_a b = 4\log_a b$.

Câu 13: Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. 6. **B.** -6. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{-1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Vì a, b là các số thực lớn hơn 1 nên ta có:

$$\begin{cases} \log_a x = 2 \\ \log_b x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 \\ x = b^3 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{b^3} \Leftrightarrow a = b^{\frac{3}{2}}.$$

$$P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}} x = \log_{b^{\frac{-1}{2}}} x = -2\log_b x = -6.$$

Câu 14: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$. **B.** $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$. **C.** $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$. **D.** $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 45 = \frac{\log_3 (5.3^2)}{\log_3 (2.3)} = \frac{\log_3 5 + 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{\frac{1}{b}+2}{\frac{1}{a}+1} = \frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Câu 15: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b$, $a \neq 1$, $\log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$.

A. $T = -\dfrac{2}{5}$. **B.** $T = \dfrac{2}{5}$. **C.** $T = \dfrac{2}{3}$. **D.** $T = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a b = 2 \Rightarrow \log_b a = \dfrac{1}{2}$.

$$T=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{ba}=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{b}+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{a}=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}}\frac{\sqrt{a}}{b}}+\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{\sqrt{a}}{b}}.$$

$$=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}}\sqrt{a}-\log_{\sqrt[3]{b}}b}+\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt{a}-\log_{\sqrt[3]{a}}b}=\frac{1}{\frac{3}{2}\log_b a-3}+\frac{1}{\frac{3}{2}-3\log_a b}.$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}-3}+\frac{1}{\frac{3}{2}-3.2}=-\frac{2}{3}.$$

Câu 16: Với $a=\log_2 5$ và $b=\log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. **B.** $\frac{a+b}{ab}$. **C.** $\frac{1}{a+b}$. **D.** $a+b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_6 5=\frac{1}{\log_5 6}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}$.

Câu 17: Biết $\log\left(xy^3\right)=1$ và $\log\left(x^2y\right)=1$, tìm $\log(xy)$?

A. $\log(xy)=\frac{5}{3}$. **B.** $\log(xy)=\frac{1}{2}$. **C.** $\log(xy)=\frac{3}{5}$. **D.** $\log(xy)=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log\left(xy^3\right)=1\Leftrightarrow\log(xy)+2\log y=1$, $\log\left(x^2y\right)=1\Leftrightarrow\log(xy)+\log x=1$

Vậy $\log x=2\log y\Leftrightarrow x=y^2$

Xét $\log\left(xy^3\right)=1\Leftrightarrow\log\left(y^2y^3\right)=1\Leftrightarrow5\log y=1\Leftrightarrow y=10^{\frac{1}{5}}$

Vậy $\log(xy)=\log\left(y^3\right)=\log\left(10^{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5}$

Câu 18: Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0<a\neq1;0<b\neq1$).

A. $P=2$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng các quy tắc biến đổi logarit

$$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.(-2)\log_b b.$$

$$=\frac{1}{2}\left[10+2\log_a b\right]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1.$$

Câu 19: Biết $\log_{27}5=a$, $\log_8 7=b$, $\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ tính theo a, b, c bằng:

A. $\frac{3(b+ac)}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+2ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$. **D.** $\frac{3(b+ac)}{c+1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{27} 5 = \frac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$, $\log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b$.

Mà $\log_{12} 35 = \frac{\log_2 (7.5)}{\log_2 (3.2^2)} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{\log_2 7 + \log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{3b + c.3a}{c+2} = \frac{3(b+ac)}{c+2}$.

Câu 20: Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 8. **C.** 2^{18}. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3 \end{cases}$.

Vậy $ab = 2^9$.

Dạng 2. So sánh hai số logarit

Câu 1: Số nào trong các số sau lớn hơn 1

A. $\log_{0,5} \frac{1}{8}$. **B.** $\log_{0,2} 125$. **C.** $\log_{\frac{1}{6}} 36$. **D.** $\log_{0,5} \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_{0,5} \frac{1}{8} = \log_{2^{-1}} 2^{-3} = 3 > 1$, $\log_{0,2} 125 = \log_{5^{-1}} 5^3 = -3 < 1$.

$\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{6^{-1}} 6^2 = -2 < 1$, $\log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1$.

Câu 2: Cho a, b là các số thực, thỏa mãn $0 < a < 1 < b$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_b a + \log_a b < 0$. **B.** $\log_b a > 1$. **C.** $\log_a b > 0$. **D.** $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $0 < a < 1 < b$ nên $\log_b a < \log_b 1 \Leftrightarrow \log_b a < 0$ và $\log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0$.

Suy ra : $\log_b a + \log_a b < 0$.

Câu 3: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a \neq 1, b \neq 1$. Điều kiện nào sau đây cho biết $\log_a b > 0$?

A. $ab>1$ **B.** $(a-1)(b-1)<0$ **C.** $b<1$ **D.** $ab<1$

Lời giải

Chọn C

$a, b>0$ hoặc $a^2+b^2=14ab$. nVậy $\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

Câu 4: Cho các số thực a, b thỏa mãn $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{\log_a b}<1<\dfrac{1}{\log_b a}$. **B.** $\dfrac{1}{\log_b a}<1<\dfrac{1}{\log_a b}$.

C. $1<\dfrac{1}{\log_a b}<\dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\dfrac{1}{\log_a b}<\dfrac{1}{\log_b a}<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $1<a<b$ nên ta có $\log_b a<\log_b b \Leftrightarrow \log_b a<1$ và $\log_a a<\log_a b \Leftrightarrow 1<\log_a b$.

Do đó $\log_b a<1<\log_a b \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b}<1<\dfrac{1}{\log_b a}$.

Câu 5: Cho $0<a<b<1$, mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_b a>\log_a b$. **B.** $\log_b a<\log_a b$. **C.** $\log_a b>1$. **D.** $\log_a b<0$.

Lời giải

Chọn A

Do $0<a<1$ nên hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Đáp án B sai, vì: Với $b<1 \Rightarrow \log_a b>\log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b>0$.

Đáp án D sai, vì: Với $a<b \Rightarrow \log_a a>\log_a b \Leftrightarrow \log_a b<1$.

Với $0<a<b<1$ ta có $0<\log_a b<1$.

Đáp án C sai, vì: Nếu $\log_b a<\log_a b \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b}<\log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2>1$ (vô lí).

Đáp án A đúng, vì: Nếu $\log_b a>\log_a b \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b}>\log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2<1$ (luôn đúng).

Câu 6: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_3 5>0$. **B.** $\log_{2+x^2} 2016<\log_{2+x^2} 2017$.

C. $\log_{0,3} 0,8<0$. **D.** $\log_3 4>\log_4\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{0,3} 0,8<0 \Leftrightarrow 0,8>0,3^0 \Leftrightarrow 0,8>1$ (sai)

Câu 7: Cho các số thực dương a, b với $a\neq 1$ và $\log_a b>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\0<a<1<b\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\1<a,\ b\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}0<b<1<a\\1<a,\ b\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}0<a,b<1\\0<b<1<a\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_a b>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\b>a^0=1\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\0<b<a^0=1\end{cases}\end{array}\right.$.

Câu 8: **K**hẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\log_3\pi=1$. **B.** $\ln 3<\log_3 e$. **C.** $\log_3 5>\log_7 4$. **D.** $\log_{\frac{1}{2}}2>0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 5>\log_3 3\Rightarrow\log_3 5>1$

$\log_7 4<\log_7 7\Rightarrow\log_7 4<1$

Vậy: $\log_3 5>\log_7 4$.

Câu 9: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0<a<b<1$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\log_b a<0$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-2$. **D.** $\log_a b>1$.

Lời giải

Chọn B

Vì $0<a<b<1$ nên

❍ $\log_b a>\log_b b=1\ \Rightarrow$ A sai.

❍ $\Leftrightarrow x+2y+5z-5=0\ \Rightarrow\log_b a>\log_a b\ \Rightarrow$ B đúng, C sai.

❍ $\log_a a>\log_a b\Leftrightarrow\log_a b<1\Rightarrow$ D sai.

Câu 10: Cho hai số thực a,b thỏa mãn điều kiện $0<a<b<1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1<\log_a b<\log_b a$. **B.** $\log_a b<1<\log_b a$. **C.** $1<\log_b a<\log_a b$. **D.** $\log_b a<1<\log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0<a<1$ nên với $a<b$ ta có: $1=\log_a a>\log_a b\Rightarrow\log_a b<1$.

Tương tự do $0<b<1$ nên với $a<b$ ta có: $\log_b a>\log_b b=1$.

Vậy $\log_a b<1<\log_b a$.

Câu 11: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{e}{2}}a<\log_{\frac{e}{2}}b$. **B.** Nếu $0<a<b$ thì $\log a<\log b$.

C. Nếu $0<a<b$ thì $\ln a<\ln b$. **D.** Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}}a<\log_{\frac{\pi}{4}}b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a>\log_{\frac{\pi}{4}} b$ do $\frac{\pi}{4}<1$.

Câu 12: Gọi $a=3^{\log_{0,5}4};b=3^{\log_{0,5}13}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a<1<b$. **B.** $b<a<1$. **C.** $a<b<1$. **D.** $b<1<a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=3^{\log_{0,5}4}<3^{\log_{0,5}1}=1$, $b=3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}1}=1$ (1)

Lại có $3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $b<a<1$

Dạng 3 : Đẳng thức logarit

Câu 1: Giả sử x,y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$ **B.** $\log_2\sqrt{xy}=\frac{1}{2}(\log_2 x+\log_2 y)$

C. $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 x-\log_2 y$ **D.** $\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$

Lời giải

Chọn D

Do $\log_2 x+\log_2 y=\log_2(xy)$.

Câu 2: Cho hai số thực dương a và b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$.

Lời giải

Chọn C

Với $a,\ b>0$ và $a\neq 1$, ta có $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a(ab)=\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)=\frac{1}{2}(1+\log_a b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b.$.

Câu 3: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. **B.** $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$. **C.** $\ln(ab)=\ln a.\ln b$. **D.** $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$. **B.** $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$. **D.** $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 5: Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab \ \ (a, b > 0)$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2\log_2 (a+b) = \log_2 a + \log_2 b.$ **B.** $2\log_2 \dfrac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b.$

C. $\log_2 \dfrac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b).$ **D.** $4\log_2 \dfrac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b.$

Lời giải

Chọn B

+) $2\log_2 (a+b) = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \log_2 (a+b)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -ab$.

+) $2\log_2 \dfrac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7ab$.

Câu 6: Cho $a,\ b$ là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\ln \dfrac{a+b}{4} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$. **B.** $2\log_2 (a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

C. $2\log_4 (a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$. **D.** $2\log \dfrac{a+b}{4} = \log a + \log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{4}\right) ab$

Nên ta có $\ln \dfrac{a+b}{4} = \ln \sqrt{ab} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$ vậy A

đúng $2\log_2 (a+b) = \log_2 (a+b)^2 = \log_2 (16ab) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$ vậy B đúng

$2\log_4 (a+b) = \log_4 (a+b)^2 = \log_4 (16ab) = 2 + \log_4 a + \log_4 b$ vậy C sai

$2\log \dfrac{a+b}{4} = \log_2 a + \log_2 b$ vậy D đúng

Cách 2:.

Câu này ý **C** sai vì $2\log_4 (a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b \Leftrightarrow \log_4 (a+b)^2 = 4\log_4 4 + \log_4 ab$

$\Leftrightarrow \log_4 (a+b)^2 = \log_4 4^4 + \log_4 ab = \log_4 64ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 64ab$.

Câu 7: Cho các số thực dương a , b thỏa mãn $3\log a + 2\log b = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a^3 + b^2 = 1$. **B.** $3a + 2b = 10$. **C.** $a^3 b^2 = 10$. **D.** $a^3 + b^2 = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\log a + 2\log b = 1 \Leftrightarrow \log a^3 + \log b^2 = 1 \Leftrightarrow \log (a^3 b^2) = 1 \Leftrightarrow a^3 b^2 = 10$.

Câu 8: Với các số thực dương a , b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_2 a - 3\log_2 b$.

B. $\ln \frac{9a^2}{b^3} = 2\ln 3 + 2\ln a - 3\ln b$.

C. $\log \frac{9a^2}{b^3} = 2\log 3 + 2\log a - 3\log b$.

D. $\log_3 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_3 a - 3\log_3 b$.

Hướngdẫngiải

Chọn A.

Nhận thấy $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = \log_2 \left(9a^2\right) - \log_2 b^3$

$= \log_2 9 + \log_2 a^2 - \log_2 b^3 = 2\log_2 3 + 2\log_2 a - 3\log_2 b$

Vậy B, C, D đúng.

Câu 9: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **C.** $\ln(ab) = \ln a . \ln b$. **D.** $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

D. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 11: Cho $P = \log_{a^4} b^2$ với $0 < a \neq 1$ và $b < 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P = -2\log_a (-b)$. **B.** $P = 2\log_a (-b)$. **C.** $P = -\frac{1}{2}\log_a (-b)$. **D.** $P = \frac{1}{2}\log_a (-b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \log_{a^4} b^2 = 2.\frac{1}{4}\log_{|a|} |b| = \frac{1}{2}\log_a (-b)$ (Do $0 < a \neq 1$ và $b < 0$).

Câu 12: Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab)$.

B. $3\ln(a+b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

D. $\ln(a+b) = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b)$.

Lời giải

Chọn C

Với $a>0$, $b>0$, ta có $a^2+b^2=7ab\Leftrightarrow(a+b)^2=9ab$

$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\ln(ab)$

$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\ln a+\ln b\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

Câu 13: Cho các số $a, b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

B. $\log_2(a+b)^2=4(\log_2 a+\log_2 b)$.

C. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)=2(\log_2 a+\log_2 b)$.

D. $\log_2\left(\frac{a+b}{16}\right)=\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2+b^2=14ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=16ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=ab$.

$\Rightarrow\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)^2=\log_2 ab\Leftrightarrow 2\log_2(a+b)-2\log_2 4=\log_2 a+\log_2 b$.

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

Câu 14: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\frac{1}{y}=1$, với $y>0, y>x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x=4y$.

B. $x=3y$.

C. $x=\frac{3}{4}y$.

D. $y=\frac{3}{4}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\frac{1}{y}=1\Leftrightarrow-\log_4(y-x)+\log_4 y=1\Leftrightarrow\log_4 y=1+\log_4(y-x)\Leftrightarrow\log_4 y=\log_4 4.(y-x)$

$\Leftrightarrow y=4(y-x)\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}y$.

Câu 15: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

B. $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.

C. $\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

D. $\log(a+b)=\frac{1}{2}+\log a+\log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2+b^2=8ab\Leftrightarrow(a+b)^2-2ab=8ab\Leftrightarrow(a+b)^2=10ab$.

Hay ta có $\log(a+b)^2=\log 10ab\Leftrightarrow 2\log(a+b)=1+\log a+\log b\Leftrightarrow\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

Câu 16: Cho $\log_2(x^2+y^2)=1+\log_2 xy$, với $xy>0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $x>y$.

B. $x<y$.

C. $x=y$.

D. $x=y^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2=2xy \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y$.

Câu 17: Cho $\log_a x=2$, $\log_b x=3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P=-6$. **B.** $P=\frac{1}{6}$. **C.** $P=-\frac{1}{6}$. **D.** $P=6$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\log_a x=2$, $\log_b x=3 \Rightarrow x=a^2=b^3 \Rightarrow a=b^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{a}{b^2}=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}=b^{\frac{-1}{2}}$.

Do đó $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x=\log_{b^{\frac{-1}{2}}} x=-2\log_b x=-2.3=-6$.

Cách 2: $\log_a x=2 \Rightarrow x=a^2>1$. $\log_a x=2$, $\log_b x=3 \Rightarrow \log_x a=\frac{1}{2}$, $\log_x b=\frac{1}{3}$.

Khi đó $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x=\frac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}}=\frac{1}{\log_x a-2\log_x b}=\frac{1}{\frac{1}{2}-2.\frac{1}{3}}=-6$.

Câu 18: Với các số thực a, $b>0$ bất kì, rút gọn biểu thức $P=2\log_2 a-\log_{\frac{1}{2}} b^2$ ta được

A. $P=\log_2\left(2ab^2\right)$. **B.** $P=\log_2(ab)^2$. **C.** $P=\log_2\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **D.** $P=\log_2\left(\frac{2a}{b^2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P=2\log_2 a-\log_{\frac{1}{2}} b^2=\log_2 a^2+\log_2 b^2=\log_2(ab)^2$.

$P=\sqrt{2014}$.

Câu 19: Với các số thực dương a, b bất kì, đặt $M=\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log M=-3\log a+\frac{1}{2}\log b$. **B.** $\log M=-3\log a-\frac{1}{2}\log b$.

C. $\log M=-3\log a+2\log b$. **D.** $\log M=3\log a+2\log b$.

Hướngdẫngiải

Chọn A.

$$M=\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}=\left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{3}}}\right)^{-0,3}=\frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}$$

$$\Rightarrow \log M=\log\left(\frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}\right)=\log a^{-3}-\log b^{-0,5}=-3\log a+\frac{1}{2}\log b$$

Câu 20: Cho $a,b>0$, $a\neq 1$, $ab\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**.

A. $\log_{ab} a = \dfrac{1}{1+\log_a b}$.

B. $\log_a \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1+\log_a b)$.

C. $\log_{a^2} \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{4}(1-\log_a b)$.

D. $\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4(1+\log_a b)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{ab} a = \dfrac{1}{\log_a ab} = \dfrac{1}{\log_a a + \log_a b} = \dfrac{1}{1+\log_a b}$.

$\log_a \sqrt{ab} = \log_a (ab)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\log_a b)$.

$\log_{a^2} \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{2}\log_a \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}(\log_a a - \log_a b) = \dfrac{1}{4}(1-\log_a b)$

Câu 21: Cho các số thực dương a, x, y ; a khác 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$.

B. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \mathrm{e}}$.

C. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\ln 10}$.

D. $\log x = \dfrac{\log_x a}{\log a}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$.

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa: Cho $a>0, a\neq 1$. Hàm số $y=a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a

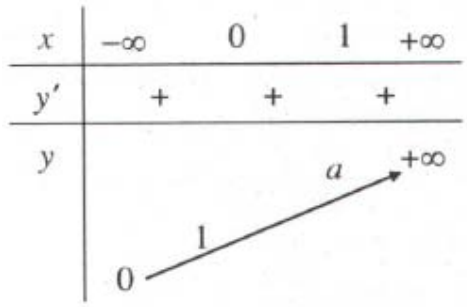
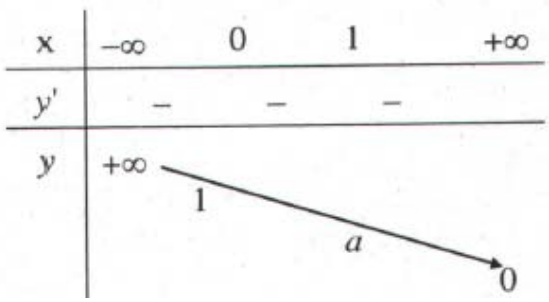
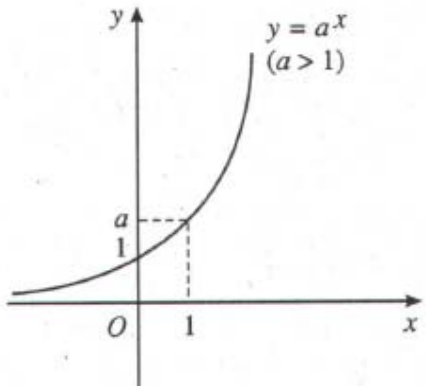
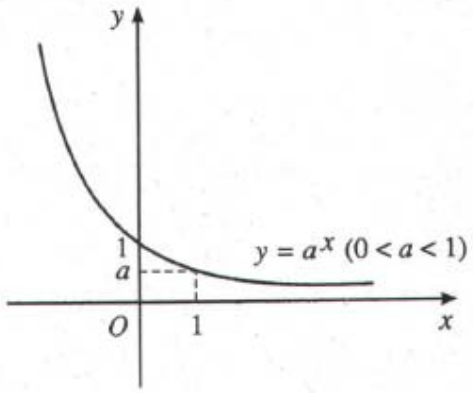
2. Đạo hàm của hàm số mũ: Với mọi $x\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1$

$$\left(e^x\right)'=e^x \qquad \left(a^x\right)'=a^x.\ln a$$
$$\left(e^u\right)'=u'e^u \qquad \left(a^u\right)'=u'a^u.\ln a$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm sau:

$1)y=e^{4x+x^2}$; $2)y=\cos 2x.e^{x^2}$; $3)y=3^{\sqrt{x^2+2x}}$; $4)y=\dfrac{e^x}{2^{-x}}$

3. Khảo sát hàm số mũ $y=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$

$y=a^x, a>1$	$y=a^x, 0<a<1$
Tập xác định D = R	
$y'=a^x.\ln a>0,\forall x$	$y'=a^x.\ln a<0,\forall x$
$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0;\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty;$	$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$
Tiệm cận ngang: trục Ox	
BBT 	BBT 
	

II. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Định nghĩa: Cho $a>0, a\neq 1$. Hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a

2. Đạo hàm của hàm số logarit: Với mọi $0 < a \neq 1$

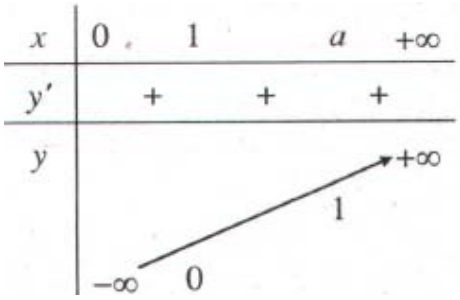
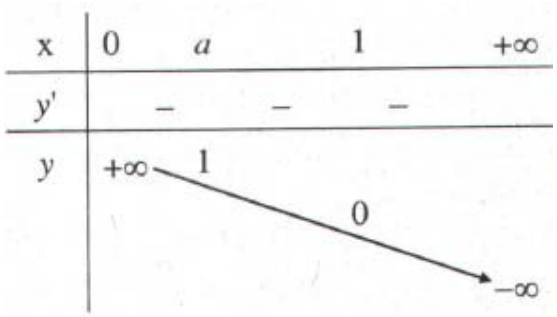
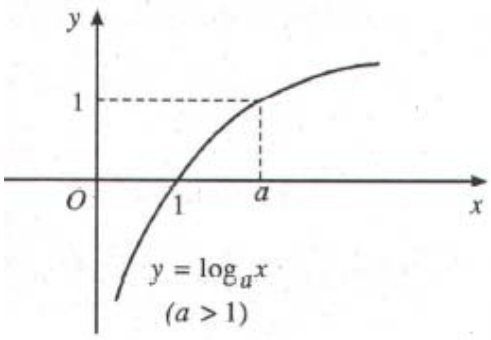
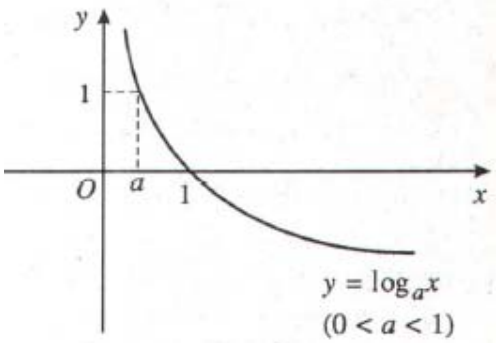
$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x.\ln a} \quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u.\ln a} \quad \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}.u'$$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm sau

$1)y = \ln\left(\sqrt{x - x^2}\right);$ $2)y = \frac{\ln x}{2x};$ $3)y = \log_2 \frac{e^x + 1}{x};$ $4)y = \log_4\left[\ln(\cos x)\right]$

4. Sự biến thiên và đồ thị hàm số logarit

$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$
Tập xác định $D = (0;+\infty)$	
$y' = \frac{1}{x.\ln a} > 0, \forall x > 0$ Hàm số đồng biến trên D	$y' = \frac{1}{x.\ln a} < 0, \forall x > 0$ Hàm nghịch biến trên D
$\lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty;$	$\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty;$
Tiệm cận đứng: trục Oy	
BBT 	BBT 
	

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(10 - 2x)$ là

A. $(-\infty; 2)$ **B.** $(5;+\infty)$ **C.** $(-\infty;10)$ **D.** $(-\infty;5)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 5 \Rightarrow D = (-\infty;5)$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\log\left(x^2+2x\right)$ là

A. $D=(-2;0)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **C.** $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x^2+2x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-2\end{array}\right.$. Vậy $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

Câu 3: Hàm số $y=\log_{x-1}x$. xác định khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$ **B.** $x>1$ **C.** $x>0$ **D.** $x\neq 2$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\log_{x-1}x$ xác định khi $\begin{cases}x>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>1\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$

Câu 4: Cho $0<a<1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

B. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

C. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

D. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

A. $D=(-1;3)$ **B.** $D=(0;1)$ **C.** $D=(-1;1)$ **D.** $D=(-3;1)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 3-2x-x^2>0\Leftrightarrow -3<x<1$. Vậy $D=(-3;1)$.

Câu 6: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m<\frac{1}{4}$ **B.** $m>0$ **C.** $m\geq\frac{1}{4}$ **D.** $m>\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m>2^x-4^x\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

Đặt $t=2^x>0\Rightarrow m>t-t^2\left(\forall t>0\right)\Leftrightarrow m>\max\limits_{t>0}f(t)\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in[-\infty;-2]\cup[2;+\infty]$ **B.** $m\in[-2;2]$

C. $m\in(-2;2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $m\in(-2;2)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Dạng 2. Tính đạo hàm và giới hạn

Câu 1: Hàm số $y = 8^{x^2+x+1}(6x+3)\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây?

A. $y = 8^{x^2+x+1}$ **B.** $y = 2^{x^2+x+1}$ **C.** $y = 2^{3x^2+3x+1}$ **D.** $y = 8^{3x^2+3x+1}$

Lời giải

Chọn A

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{2^x}$ là

A. $y' = \dfrac{1-(x+1)\ln 2}{4^x}$ **B.** $y' = \dfrac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$ **C.** $y' = -\dfrac{x}{4^x}$ **D.** $y' = -\dfrac{x}{2^x}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{2^x - (x+1)2^x \ln 2}{4^x} = \frac{1-(x+1)\ln 2}{2^x}$$

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{9^x}$

A. $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$. **B.** $y' = \dfrac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}$. **D.** $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)'.9^x - (9^x)'.(x+1)}{9^{2x}} = \frac{9^x - 9^x(x+1)\ln 9}{9^{2x}} = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-2)$.

A. $y' = \dfrac{1}{(2x-2)\ln 3}$ **B.** $y' = \dfrac{1}{x-1}$ **C.** $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 3}$ **D.** $y' = \dfrac{1}{2x-2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \dfrac{(2x-2)'}{(2x-2)\ln 3} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 3}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \log_3(2x+1)$, ta có:

A. $y' = \dfrac{1}{2x+1}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 3}$. **C.** $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$. **D.** $y' = \dfrac{2}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\log_2 x}$ là:

A. $y' = -\dfrac{\ln 2}{x\ln^2 x}$. **B.** $y' = \dfrac{\ln 2}{x\ln^2 x}$. **C.** $y' = -\dfrac{x\ln 2}{\log_2^2 x}$. **D.** $y' = \dfrac{x\ln 2}{\log_2^2 x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{(\log_2 x)'}{\ln^2 x} = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x}$$

Câu 7: Kết quả tính đạo hàm nào sau đây **sai**?

A. $\left(3^x\right)' = 3^x \ln 3$ **B.** $\left(10^x\right)' = 10^x \ln 10$ **C.** $\left(\log_3 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 3}$ **D.** $\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$, suy ra **D** sai.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-x}$. Bất phương trình $f'(x) \ge 0$ có tập nghiệm là:

A. $[-2;2]$ **B.** $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$ **D.** $[0;2]$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} \ge 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$$

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}\ln(x+2)$ là:

A. $\dfrac{3\ln(x+2)}{(x-1)^2}$. **B.** $\dfrac{x-1-3\ln(x+2)}{(x-1)^2}$.

C. $\dfrac{1}{x-1}\ln(x+2)$. **D.** $\dfrac{-3\ln(x+2)}{(x-1)^2} + \dfrac{\ln(x+2)}{x-1}$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}\ln(x+2) + \frac{x+2}{x-1}.\frac{1}{x+2} = \frac{-3\ln(x+2)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)\ln(1-x)$ là.

A. $2\ln(1-x) - \dfrac{2x+1}{1-x}$. **B.** $2x\ln(x-1)$. **C.** $\dfrac{2x+1}{1-x} + 2x$. **D.** $2\ln(1-x) + \dfrac{2x+1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (2x+1)'.\ln(1-x) + (2x+1).(\ln(1-x))' = 2.\ln(1-x) + (2x+1).\frac{-1}{(1-x)} = 2\ln(1-x) - \frac{2x+1}{1-x}$$

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)$ là:

A. $\frac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2}$. **B.** $\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)\ln x\ln 2}$. **C.** $\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)\ln 2}$. **D.** $\frac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2.\ln x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\frac{\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)'}{\frac{x-1}{\ln x}\ln 2}=\frac{x\ln x+1-x}{x(x-1)\ln 2.\ln x}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=2^{x^2+a}$ và $f'(1)=2\ln 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<a<0$ **B.** $0<a<1$ **C.** $a>1$ **D.** $a<-2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=2x.2^{x^2+a}\ln 2\Rightarrow f'(1)=2\ln 2.2^{a+1}=2\ln 2\Rightarrow 2^{a+1}=1\Rightarrow a=-1$

Câu 13: Cho hàm số $y=\ln\frac{1}{x}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $e^y+y'=0$ **B.** $e^y-y'=0$ **C.** $e^y.y'=0$ **D.** $e^y.y'=\frac{1}{x^2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{x}\right)'=x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$, $e^y=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\Rightarrow y'+e^y=0$

Dạng 3. So sánh, Đẳng thức, bất đẳng thức

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai?**

A. $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}>\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$. **B.** $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}>\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$. **C.** $(2,5)^{-3,1}>(2,6)^{-3,1}$. **D.** $(3,1)^{7,3}<(4,3)^{7,3}$.

Lời giải

Chọn A

Dùng tính chất: $\begin{cases}a,b>1\\a^x>b^x\Rightarrow a>b\\x>0\end{cases}$

Câu 2: Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$ **B.** $a>1$ **C.** $a>0$ **D.** $a<0$

Lời giải

Chọn D

BPT $\Leftrightarrow\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow a-1<-1\Leftrightarrow a<0$

Câu 3: Cho $\pi^{\alpha} > \pi^{\beta}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\alpha > \beta$ **B.** $\alpha < \beta$ **C.** $\alpha = \beta$ **D.** $\alpha \le \beta$

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Cho $M = \log_{0,3} 0,07; N = \log_3 0,2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $0 > N > M$. **B.** $M > 0 > N$. **C.** $N > 0 > M$. **D.** $M > N > 0$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $\begin{cases} 0 < 0,3 < 1 \\ 0 < 0,07 < 1 \end{cases} \Rightarrow M = \log_{0,3} 0,07 > 0$

$\begin{cases} 3 > 1 \\ 0 < 0,2 < 1 \end{cases} \Rightarrow N = \log_3 0,2 < 0$

+ Suy ra: $M > 0 > N$

Câu 5: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. **D.** $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Do $\begin{cases} 2018 > 2017 \\ \sqrt{3}-1 > 1 \end{cases}$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 6: Cho $0 < a \ne 1;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$ **B.** $a^{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a}\right)^{\alpha} (a > 0)$ **C.** $a^{\alpha^{\beta}} = \left(a^{\alpha}\right)^{\beta}$ **D.** $\sqrt{a^{\alpha}} = \left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{a^{\alpha}} = \left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Câu 7: Có kết luận gì về a nếu $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$ (1)

A. $a \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ **B.** $a \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$

C. $a \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right)$ **D.** $a \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left(-1; 0\right)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $2a + 1 \ne 0 \Leftrightarrow a \ne -\frac{1}{2}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(2a+1)^3} > \frac{1}{2a+1} \Leftrightarrow \frac{1-(2a+1)^2}{(2a+1)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(a+1)}{(2a+1)^3} < 0$

Lập bảng xét dấu ta được: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{array}\right.$.

Câu 8: Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào sai?

A. $\log_2 5 > \log_2 \pi$ **B.** $\log_{\sqrt{2}-1} \pi < \log_{\sqrt{2}-1} e$ **C.** $\log_{\sqrt{3}+1} \pi > \log_{\sqrt{3}+1} 7$ **D.** $\log_7 5 < 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{3}+1>1$ do đó $\pi < 7 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}+1} \pi < \log_{\sqrt{3}+1} 7$.

Câu 9: Cho $0<a<1$, $b>1$ và $M=\log_a 2$, $N=\log_2 b$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M>0$ và $N>0$. **B.** $M>0$ và $N<0$. **C.** $M<0$ và $N<0$. **D.** $M<0$ và $N>0$.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: Với những giá trị nào của a thì $(a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}}$?

A. $1<a<2$. **B.** $a>2$. **C.** $a>1$. **D.** $0<a<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\begin{cases} \frac{-2}{3} < \frac{-1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0<a-1<1 \Leftrightarrow 1<a<2$.

Câu 11: Nếu $a^{\frac{19}{5}} < a^{\frac{15}{7}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right) > \log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ thì:

A. $a>1, 0<b<1$ **B.** $0<a<1, b>1$ **C.** $0<a<1, 0<b<1$ **D.** $a>1, b>1$

Lời giải

Chọn B

$a^{\frac{19}{5}} < a^{\frac{15}{7}}$ vì mũ không là số nguyên nên $a>0$. Mặt khác $\frac{19}{5} > \frac{15}{7}$ nên $a<1 \Rightarrow 0<a<1$

$\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right) > \log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ để có nghĩa thì $1 \neq b > 0$ và $\sqrt{2}+\sqrt{7} > \sqrt{2}+\sqrt{5}$ nên $b>1$

Câu 12: Cho các số thực *a,b* thỏa mãn $a>b>1$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\log_a b > \log_b a$ **B.** $\log_a b < \log_b a$ **C.** $\ln a > \ln b$ **D.** $\log_{\frac{1}{2}}(ab) < 0$

Lời giải

Chọn A

Cho $a=4; b=2$ ta có: $\log_a b = \frac{1}{2}; \log_b a = 2$ nên A sai.

Câu 13: Cho a, b là các số thực dương, thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>1, 0<b<1$ **B.** $0<a<1, b>1$ **C.** $0<a<1, 0<b<1$ **D.** $a>1, b>1$

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < a < 1 \left(do \frac{3}{4} < \frac{4}{3} \right)$

Mặt khác $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3} \Rightarrow b > 1 \left(do \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \right)$

Câu 14: Cho hai số thực a và b sao cho với $a^{-5} > a^{-4}$ và $\log_b \left(\frac{3}{4} \right) < \log_b \left(\frac{4}{5} \right)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là **đúng**?

A. $a > 1; b > 1.$ **B.** $a > 1; 0 < b < 1.$ **C.** $0 < a < 1; b > 1.$ **D.** $0 < a < 1; 0 < b < 1.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} -5 < -4 \\ a^{-5} > a^{-4} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ \log_b \left(\frac{3}{4} \right) < \log_b \left(\frac{4}{5} \right) \end{cases} \Rightarrow b > 1.$

Vậy $0 < a < 1; b > 1.$

Câu 15: Cho $\left(\sqrt{2} - 1 \right)^a > \left(\sqrt{2} - 1 \right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a > b.$ **B.** $a < b.$ **C.** $a = b.$ **D.** $a \geq b.$

Lời giải

Chọn B

Do $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ nên hàm số mũ $y = \left(\sqrt{2} - 1 \right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$\left(\sqrt{2} - 1 \right)^a > \left(\sqrt{2} - 1 \right)^b \Leftrightarrow a < b$

Câu 16: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$

A. $0 < a < 1$ **B.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$ **C.** $a > 1$ **D.** $a > 0$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{5}{21}} > a^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Câu 17: Cho p, q là các số thực thỏa mãn $m = \left(\frac{1}{e} \right)^{2p-q}$, $n = e^{p-2q}$, biết $m > n$. So sánh p và q

A. $p \geq q$ **B.** $p > q$ **C.** $p \leq q$ **D.** $p < q$

Lời giải

Chọn D

Ta có $m = \left(\frac{1}{e} \right)^{2p-q} = e^{q-2p}, n = e^{p-2q}$. Vì $m > n$ nên $q - 2p > p - 2q \Leftrightarrow q > p.$

Câu 18: Cho $a > 1.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$ **B.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$ **D.** $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$

Lời giải

Chọn B

Do $a>1 \Rightarrow$ với $m>n$ thì $a^m>a^n$

Do $-\sqrt{3}>-\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}=\frac{1}{a^5}$

Câu 19: Cho $0<a<1$. Khẳng định nào đúng?

A. $a^{-\sqrt{2}}<\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}>1$ **C.** $a^{\frac{1}{3}}<\sqrt{a}$ **D.** $\frac{1}{a^{2017}}>\frac{1}{a^{2018}}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Xét hàm số có dạng $y=a^x, a>0, a\neq 1$:

+ Nếu $0<a<1$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$

+ Nếu $a>1$: hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Cách giải: Với $0<a<1$:

$a^{-\sqrt{2}}<\frac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow a^{\sqrt{2}}>a^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0<a<1$ (luôn đúng). Vậy phương án A đúng.

$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}>1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a}>1 \Leftrightarrow a>1$ (Loại). Vậy phương án B sai.

$a^{\frac{1}{3}}<\sqrt{a} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}}<a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a>1$ (Loại). Vậy phương án C sai.

$\frac{1}{a^{2017}}>\frac{1}{a^{2018}} \Leftrightarrow a^{2017}<a^{2018} \Leftrightarrow a>1$ (Loại). Vậy phương án D sai.

Câu 20: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Khi $x>0$ thì $\log_2 x^2=2\log_2 x$. **B.** Khi $0<a<1$ và $b<c$ thì $a^b>a^c$.

C. Với $a<b$ thì $\log_a b<\log_b a<1$. **D.** Điều kiện để $x^{\sqrt{2}}$ có nghĩa là $x>0$.

Lời giải

Chọn C

Đáp án C sai vì với $a<b \Rightarrow \begin{cases}1<\log_a b\\ \log_b a<1\end{cases} \Rightarrow \log_b a<1<\log_a b$

Câu 21: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực x_1, x_2. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $x_1>x_2$. **B.** Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $x_1<x_2$.

C. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)>0$. **D.** Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)<0$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}a>1: a^{x_1}>a^{x_2} \to x_1>x_2\\ a<1: a^{x_1}<a^{x_2} \to x_1<x_2\end{cases} \to (a-1)(x_1-x_2)>0.$

Dạng 4. GTLN và Gtnn của hàm số

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x-2)e^x$ trên $[0;4]$.

A. $\min\limits_{[0;3]} y=-e$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y=0$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y=-2e^2$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y=2e^4$.

Lời giải

Chọn A

Em có $y' = e^x(x-1), y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;4]$.

Khi đó $y(0) = -2, y(1) = -e, y(3) = 2e^4$.

Vậy $\min\limits_{[0;3]} y = y(1) = -e$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\max\limits_{x\in[0;1]} y = 2e$ **B.** $\max\limits_{x\in[0;1]} y = e^2 + 1$ **C.** $\max\limits_{x\in[0;1]} y = e^2$ **D.** $\max\limits_{x\in[0;1]} y = 1$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x + e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$, ta có $y' = 1 + 2e^{2x} > 0 \forall x \in (0;1)$. Suy ra hàm số đã cho là hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = 1 + e^2$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x-2)^2 e^x$ trên $[1;3]$ là

A. e. **B.** 0. **C.** e^3. **D.** e^4.

Lời giải

Chọn C

$y' = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x = e^x(x^2 - 2x)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Ta có: $y(1) = 3; y(3) = e^3; y(2) = 0$.

Vậy GTLN của hàm số $y = (x-2)^2 e^x$ trên $[1;3]$ là e^3.

Câu 4: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2e}; e\right]$ lần lượt là

A. $M = e, m = -\frac{1}{2e}\ln(2e)$ **B.** $M = e, m = -\frac{1}{2e}$

C. $M = -\frac{1}{2e}\ln(2e), m = -e^{-1}$ **D.** $M = e, m = -\frac{1}{e}$

Lời giải

Chọn D

$y' = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \in \left[\frac{1}{2e}; e\right]$

Ta có $y\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{\ln 2 + 1}{2e}; y(e) = e; y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \Rightarrow M = Maxy = e;\ m = \min y = -\frac{1}{e}$

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ lần lượt là

A. 1 và $e-1$ **B.** 1 và e **C.** $\frac{1}{2} + \ln 2$ và $e-1$ **D.** 1 và $\frac{1}{2} + \ln 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2; y(1) = 1; y(e) = e - 1$

$\Rightarrow Maxy = e - 1; Miny = 1$

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ là

A. $\max\limits_{[2;3]} y = 4 - 2\ln 2$ **B.** $\max\limits_{[2;3]} y = 1$ **C.** $\max\limits_{[2;3]} y = e$ **D.** $\max\limits_{[2;3]} y = -2 + 2\ln 2$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $y = x(2 - \ln x)$ trên $[2;3]$

Có $y'(x) = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \in [2;3]$

$y(2) = 4 - 2\ln 2; y(e) = e; y(3) = 6 - 3\ln 3$

Vậy $\max\limits_{[2;3]} y = y(e) = e$

Câu 7: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 2\ln x$ trên $[e^{-1}; e]$ là

A. $M = e^2 - 2$, $m = e^{-2} + 2$. **B.** $M = e^{-2} + 2$, $m = 1$.

C. $M = e^{-2} + 1$, $m = 1$. **D.** $M = e^2 - 2$, $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x > 0$

$y = x^2 - 2\ln x \Rightarrow y' = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \in [e^{-1}; e]$

Ta có: $y(1) = 1$, $y(e) = e^2 - 2$, $y(e^{-1}) = e^{-2} + 2$

$\Rightarrow M = e^2 - 2$, $m = 1$.

Câu 8: M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2;0]$ Tích M.m là

A. 0. **B.** $1 - 4\ln 2$. **C.** $4\ln 2 - 1$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 2x + \dfrac{4}{1 - x} = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{1 - x}$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2;0] \\ x = 2 \notin [-2;0] \end{array}\right.$

• $f(-1) = 1 - 4\ln 2$; $f(-2) = 4 - 4\ln 3$; $f(0) = 0$

• Trong các kết quả trên, số nhỏ nhất là: 1 – 4ln2, số lớn nhất là: 0

• Vậy, $m = \min\limits_{[-2;0]} y = 1 - 4\ln 2$ khi x = –1; $M = \max\limits_{[-2;0]} y = 0$ khi x = 0

Suy ra M.m = 0

Câu 9: Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính tổng $M + N$.

A. $M+N=3e$. **B.** $M+N=e$. **C.** $M+N=2e-1$. **D.** $M+N=2e+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow xe^{-x}(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (N)\\x=2\ (L)\end{array}\right.$.

Khi đó $y(-1)=e$; $y(1)=\frac{1}{e}$; $y(0)=0$.

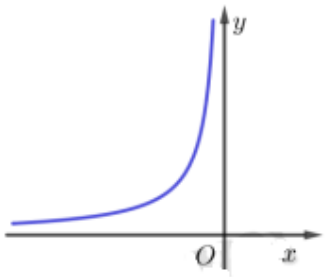
Do đó $m=\underset{[-1;1]}{\text{Min}}\, y=0$ tại $x=0$ và $M=\underset{[-1;1]}{\text{Max}}\, y=e$ tại $x=-1$.

Vậy $M+m=e$.

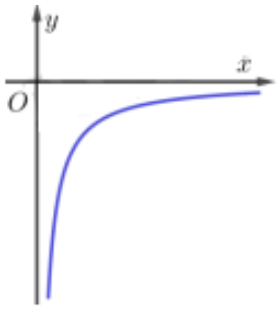
Dạng 5. Nhận dạng đồ thị

Câu 1: Cho a là số thực dương khác 1. Hình nào sau đây là đồ thị của hàm số mũ $y=a^x$?

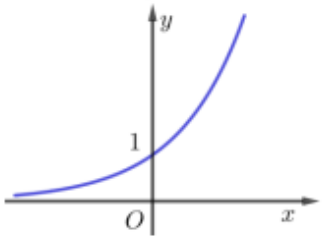
A.



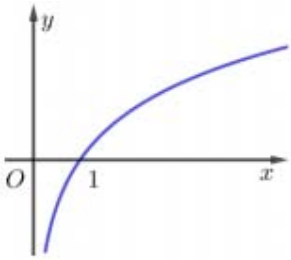
B.



C.



D.

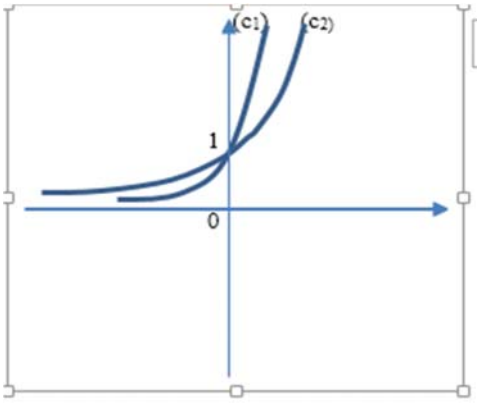


Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$

Câu 2: Biết *(C1), (C2)* ở hình bên là hai trong bốn đồ thị của các hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x, y=5^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Hỏi *(C2)* là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ **C.** $y=5^x$ **D.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

Chọn A

- Ta thấy (C_1), (C_2) đều có hướng đi lên khi x tăng $\Rightarrow$ (C_1), (C_2) đồng biến $\forall x\in\mathbb{R}$.

- Mà hàm $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$. Do đó ta loại hàm $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ và $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Xét khi $x>0$ thì (C_1) ở trên (C_2) $\Rightarrow y\left(C_1\right)>y\left(C_2\right)$. Mà $5^x>\left(\sqrt{3}\right)^x\Rightarrow\left(C_2\right):y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Câu 3: Đối xứng qua đường thẳng $y=x$ của đồ thị hàm số $y=5^{\frac{x}{2}}$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y=\log_{\sqrt{5}}x$ **B.** $y=\log_5 x^2$ **C.** $y=\log_5 x$ **D.** $y=\frac{1}{2}\log_5 x$

Lời giải

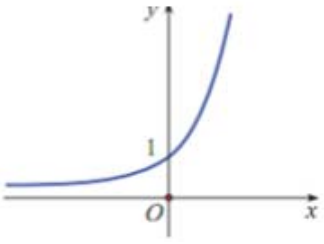
Chọn A

Ta đưa hàm số về dạng: $y=5^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{5}\right)^x$.

Dựa vào lý thuyết "Hai hàm số $y=a^x, y=\log_a x$ có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất y = x"

Hoặc thay x = y và y = x ta có $x=\left(\sqrt{5}\right)^y\Leftrightarrow y=\log_{\sqrt{5}}x$

Câu 4: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **B.** $y=x^2$

C. $y=\log_2 x$ **D.** $y=2^x$

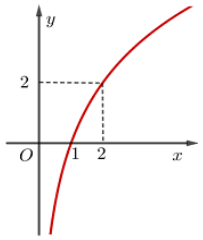
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn

Câu 5: Tìm a để hàm số $\log_a x\ (0<a\neq 1)$ có đồ thị là hình bên



A. $a=\sqrt{2}$ **B.** $a=2$ **C.** $a=\frac{1}{2}$ **D.** $a=-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;2)\Rightarrow \log_a 2=2\Rightarrow a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$

Câu 6: Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y=a^x$ và (G_2) là đồ thị hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

C. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$

D. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$

Lời giải

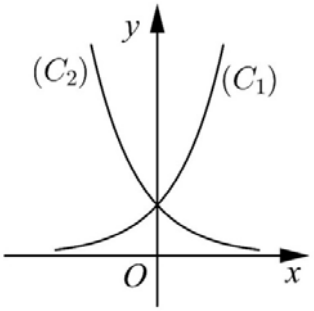
Chọn C

Mọi điểm $A(m;n)\in(G_1)\Rightarrow a^m=n\Rightarrow m=\log_a n\Rightarrow B(n;m)\in(G_2)$

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

Do đó (G_1) và (G_2) đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

Câu 7: Cho hai hàm số $y=a^x, y=b^x$ với a,b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $0<a<b<1$ **B.** $0<b<1<a$ **C.** $0<a<1<b$ **D.** $0<b<a<1$

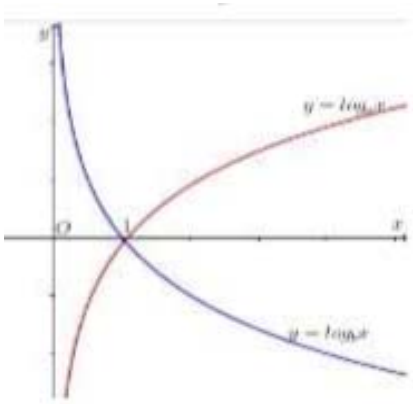
Lời giải

Chọn B

- Đồ thị hàm số (C_1) đồng biến nên $y'=a^x\ln a>0\Leftrightarrow a>1$

- Đồ thị hàm số (C_2) nghịch biến nên $y'=b^x\ln b<0\Leftrightarrow 0<b<1$. Do đó $0<b<1<a$

Câu 8: Cho hai hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ có đồ thị $(C_1),(C_2)$, được vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $0<b<a<1.$ **B.** $0<b<1<a.$ **C.** $0<a<b<1.$ **D.** $0<a<1<b.$

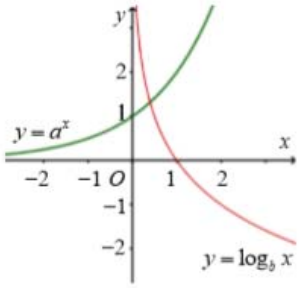
Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_b x$ nghịch biến nên $0<b<1$

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_a x$ đồng biến nên $a>1$

Câu 9: Cho $a>0, b>0, b\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



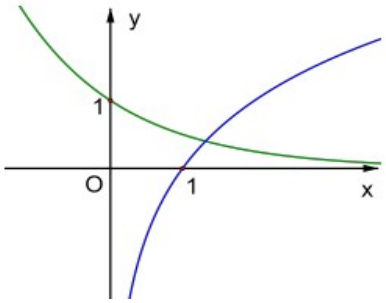
A. $a>1; 0<b<1.$ **B.** $1>a>0; b>1.$ **C.** $0<a<1; 0<b<1.$ **D.** $a>1; b>1.$

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị ta thấy. Hàm số $y=a^x$ đồng biến $\Rightarrow a>0$. Hàm số $y=\log_b x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<b<1$

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<a<\frac{1}{2}<b$ **B.** $0<a<1<b$ **C.** $0<b<1<a$ **D.** $0<a<1, 0<b<\frac{1}{2}$

Lời giải

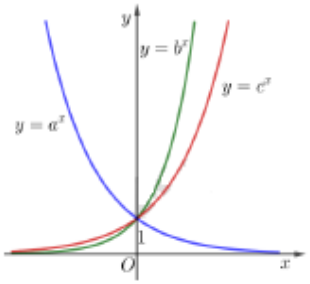
Chọn B

+ Xét hàm số $y=a^x$ đi qua $(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đường nghịch biến, suy ra $0<a<1$.

+ Xét hàm số $y=\log_b x$ đi qua (1;0) suy ra đồ thị hàm số (2) là đường đồng biến suy ra b>1.

Suy ra $0<a<1<b$.

Câu 11: Cho 3 số $a,b,c>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=a^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

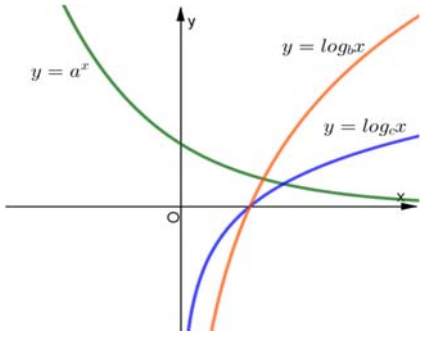
A. $b<c<a$ **B.** $a<c<b$ **C.** $a<b<c$ **D.** $c<a<b$

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y=b^x; y=c^x$ đồng biến, hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $a<1; b,c>1$. Thay $x=10$, ta có $b^{10}>c^{10}\Rightarrow b>c$

Câu 12: Cho các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x, y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

A. $c>b>a$. **B.** $b>a>c$. **C.** $a>b>c$. **D.** $b>c>a$.

Lời giải:

Chọn A

Hàm số $y=a^x$ đồ thị có dáng đi xuống từ trái sang phải nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $0<a<1$ (1).

Hai hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ đồ thị có dáng đi lên từ trái sang phải nên đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó $b>1>a,\ c>1>a$ (2).

Quan sát đồ thị ta thấy với $0<x<1$ thì $\log_b x<\log_c x$, suy ra $c>b$.

Quan sát đồ thị ta thấy với $x>1$ thì $\log_b x>\log_c x$, suy ra $c>b$.

Suy ra $1<b<c$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $c>b>a$.

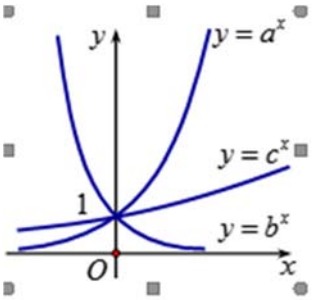
Cách khác:

Dễ thấy $a<1$, $b>1$, $c>1$. Nên a là số nhỏ nhất.

Xét đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hai hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm $B(b;1)$ và $C(c;1)$

(hình vẽ). Dễ thấy $c>b$ vậy $c>b>a$.

Câu 13: Hình vẽ dưới đây vẽ đồ thị của 3 hàm số mũ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a>b>c$. **B.** $a>c>1>b$. **C.** $b>c>1>a$. **D.** $b>a>c$.

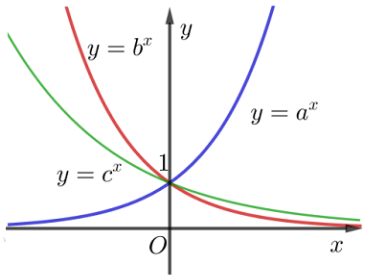
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ở hình 5 ta thấy đồ thị của hàm số $y=b^x$ là nghịch biến nên $0<b<1$.

Vẽ đường thẳng $x=1$ ta có đường thẳng $x=1$ cắt đồ thị hàm số $y=a^x$ tại điểm có tung độ $y=a$ và cắt đồ thị hàm số $y=c^x$ tại điểm có tung độ là $y=c$. Khi đó điểm giao với $y=a^x$ nằm trên điểm giao với $y=c^x$ nên $a>c>1$. Vậy $a>c>1>b$.

Câu 14: Trên hình 2.13, đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c



A. $c>b>a$ **B.** $b>c>a$ **C.** $a>c>b$ **D.** $a>b>c$

Lời giải

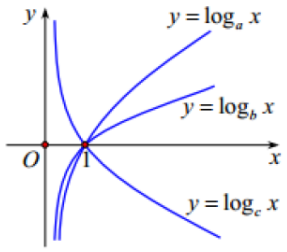
Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng: Hàm số $y=a^x$ là hàm số đồng biến; hàm số $y=b^x, y=c^x$ là hàm số nghịch biến.

Suy ra $a>1$ và $\begin{cases}0<b<1\\0<c<1\end{cases}\rightarrow a>\{b;c\}$. Gọi $B(-1;y_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y=b^x \Rightarrow y_B=\frac{1}{b}$;

Và $C(-1;y_C)$ thuộc đồ thị hàm số $y=c^x \Rightarrow y_C=\frac{1}{c}$. Dựa vào đồ thị, ta có $y_B>y_C \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{c} \Leftrightarrow c>b.$

Câu 15: Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $a<b<c$ **B.** $c<a<b$ **C.** $c<b<a$ **D.** $b<c<a$

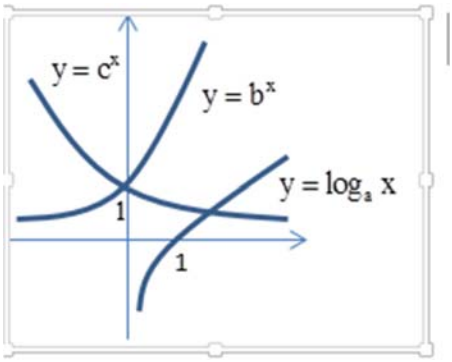
Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<c<1$, các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến nên $a;b>1$

Chọn $x=100 \Rightarrow \log_a 100>\log_b 100 \Rightarrow a<b \Rightarrow c<a<b.$

Câu 16: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $b<c<a$ **B.** $a<b<c$ **C.** $c<a<b$ **D.** $c<b<a$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=c^x$ là hàm nghịch biến nên $0<c<1$.

Hàm số $y=b^x$ là hàm đồng biến nên $b>1$

Hàm số $y=\log_a x$ là hàm đồng biến nên $a>1$. Lấy đối xứng đồ thị hàm $y=\log_a x$ qua đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng toạ độ ta có đồ thị hàm số $y=a^x$ tăng nhanh hơn đồ thị hàm số $y=b^x$ nên $a>b$

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản là phương trình có dạng $a^x = b \quad (a > 0; a \neq 1)$

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm $x = \log_a b$;
- Nếu $b = 0$ hoặc $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\boxed{a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x), (a > 0, a \neq 1)}$$

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$\alpha a^{2x} + \beta . a^x + \gamma = 0$. Đặt $t = a^x, (t > 0)$

c) Logarit hóa

Nếu phương trình cho ở dạng $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Phương trình logarit cơ bản: là phương trình có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$

$\log_a x = b \Leftrightarrow \quad x = a^b$

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \overset{a>0, a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) > 0 \ (hoac\ g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}}$$

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$\alpha \log_a^2 x + \beta . \log_a x + \gamma = 0$. Đặt $t = \log_a x, (x > 0)$

c) Mũ hóa

$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

Câu 1: Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 2: Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x+1}\Leftrightarrow x^2-2x-3=-x+1\Leftrightarrow x^2-x-4=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

Câu 3: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}x=\log_2(x+2)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\log_{\sqrt{2}}x=\log_2(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x^2=\log_2(x+2)\\x>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=x+2\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=2\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}x^2+4x>0\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-4\end{array}\right.\\x>-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>0.$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\log_3(x^2+4x)=\log_3(2x+3)$

$\Leftrightarrow x^2+4x=2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta được $x=1$.

Câu 5: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0$ là

A. $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{4}{7}\right)^x\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0\Leftrightarrow\left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1}=\left(\frac{4}{7}\right)^2\Leftrightarrow-2x+1=2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2\left(x^2+x-1\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}\Leftrightarrow 2x^2+2x-2=x-2\Leftrightarrow 2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\log_2\left(x+1\right)+1=\log_2\left(3x-1\right)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\left\{\begin{array}{l}x+1>0\\3x-1>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-1\\x>\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$.

Khi đó phương trình trở thành

$\log_2\left(2x+2\right)=\log_2\left(3x-1\right)\Leftrightarrow 2x+2=3x-1\Leftrightarrow -x=-3\Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

Câu 8: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-5\right)^3=3$ là

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>5$

$3\log_3\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-5\right)^3=3\Leftrightarrow 3\log_3\left(x-1\right)+3\log_3\left(x-5\right)=3\Leftrightarrow\log_3\left(x-1\right)+\log_3\left(x-5\right)=1$

$\Leftrightarrow\log_3\left[\left(x-1\right)\left(x-5\right)\right]=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-5\right)=3$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x=3+\sqrt{7}$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+1}.4^{x-1}.\frac{1}{8^{1-x}}=16^x$ là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

$2^{x+1}.4^{x-1}.\frac{1}{8^{1-x}}=16^x\Leftrightarrow 2^{x+1}.2^{2\left(x-1\right)}.2^{3\left(x-1\right)}=2^{4x}$

$\Leftrightarrow x+1+2\left(x-1\right)+3\left(x-1\right)=4x\Leftrightarrow x=2.$

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18\Leftrightarrow 6^{x^2-2x}=36\Leftrightarrow x^2-2x=2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0$.

Phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí vi-et tổng hai nghiệm của phương trình là: $x_1+x_2=2$.

Câu 11: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2<x\neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0\Leftrightarrow\log_3(x-2)|x-4|=0\Leftrightarrow(x-2)|x-4|=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$

So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{2};x_2=3$

Ta được: $S=x_1+x_2=6+\sqrt{2}\Rightarrow a=6;b=1$. Vậy $Q=a.b=6$.

Dạng 2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Câu 1: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2-3=0$. **B.** $t^2+t-3=0$. **C.** $4t-3=0$. **D.** $t^2+2t-3=0$.

Lời giải

Chọn D

$4^x+2^{x+1}-3=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+2.2^x-3=0$

Đặt $t=2^x\ \ (t>0)$. Phương trình trở thành $t^2+2t-3=0$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$. Tính $P=x_1+x_2$.

A. 6. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\\log_2 x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=4\end{array}\right.$.

Vậy $P=x_1+x_2=2+4=6$.

Câu 3: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_3 x.\log_2 3+2=0$

A. 20 **B.** 18 **C.** 6 **D.** 25

Lời giải

Chọn A

$\log_2^2 x-3\log_3 x.\log_2 3+2=0\Leftrightarrow\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\\log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=4\end{array}\right.\Rightarrow x_1^2+x_2^2=20$

Câu 4: Phương trình $6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Khi đó tổng hai nghiệm x_1+x_2 là.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0\Leftrightarrow\dfrac{6^{2x}}{6}-\dfrac{5.6^x}{6}+1=0\Leftrightarrow 6^{2x}-5.6^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6^{x_1}=2\\6^{x_2}=3\end{array}\right.$.

$\Rightarrow 6^{x_1}.6^{x_2}=3.2\Leftrightarrow 6^{x_1+x_2}=6\Leftrightarrow x_1+x_2=1$.

Câu 5: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0$ bằng

A. 18. **B.** 27. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0\Leftrightarrow 3^{2x}-18.3^{x}+27=0$.

Đặt $t=3^x\ (t>0)$. Phương trình trở thành: $t^2-18t+27=0.$

Nhận thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt $t_1;\ t_2>0$.

Khi đó, $t_1.t_2=27$ suy ra $3^{x_1}.3^{x_2}=27\Leftrightarrow 3^{x_1+x_2}=27\Leftrightarrow x_1+x_2=3$.

Câu 6: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0$. Tính T.

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=84$. **D.** $T=-4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0\Leftrightarrow \log_3^2 x-5\log_3 x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=81\end{array}\right.$.

Vậy $T=3+81=84$.

Câu 7: Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có: $9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=-1(L)\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

Câu 8: Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1$. Đặt $t=\left(2-\sqrt{3}\right)^x, t>0\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t+\frac{1}{t}=4\Rightarrow t^2-4t+1=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$.

Với $t=2-\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2+\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x_1^2+2x_2^2=3$.

Câu 9: Biết rằng phương trình $\log_2^2 x-\log_2(2018x)-2019=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2. Tích x_1x_2 bằng

A. $\log_2 2018$ **B.** 0,5 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

$\log_2^2 x - \log_2(2018x) - 2019 = 0$. (1)

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình trở thành $t^2 - t - \log_2 2018 - 2019 = 0$. (2)

Do $ac < 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2. Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $t_1 = \log_2 x_1; t_2 = \log_2 x_2$.

Theo Vi-et ta có $t_1 + t_2 = 1$ hay $\log_2(x_1 x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 2$.

Câu 10: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x^2 - \log_4(4x^2) - 5 = 0$.

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình $\log_2^2 x^2 - \log_4(4x^2) - 5 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2 - \frac{1}{2}\log_2 x^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2 = \frac{1+\sqrt{97}}{4} \vee \log_2 x^2 = \frac{1-\sqrt{97}}{4}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 11: Cho phương trình $\log_5(5^x - 1).\log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$. Khi đặt $t = \log_5(5^x - 1)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2 - 1 = 0$ **B.** $t^2 + t - 2 = 0$ **C.** $t^2 - 2 = 0$ **D.** $2t^2 + 2t - 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

$\log_5(5^x - 1).\log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$ (1)

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

Ta có $\log_{25}(5^{x+1} - 5) = \log_{5^2}(5.5^x - 5) = \frac{1}{2}\left(\log_5(5^x - 1) + 1\right)$.

Đặt $t = \log_5(5^x - 1)$ $(t > 0)$.

Phương trình (1) trở thành $t.\frac{1}{2}(t+1) = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$.

Câu 12: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x + 3^{4-x} = 30$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

$3^x + 3^{4-x} = 30 \Leftrightarrow 3^x + \frac{81}{3^x} = 30$.

Đặt $t = 3^x (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t + \frac{81}{t} = 30 \Leftrightarrow t^2 - 30t + 81 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 27 \Rightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3 \\ t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \end{array}\right.$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là $1.3 = 3$.

Câu 13: Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$

A. $T = 64$. **B.** $T = 32$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x+3\log_x 2=7 \Leftrightarrow 2\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}=7$

$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x-7\log_2 x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=3 \\ \log_2 x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1=\sqrt{2}$; $x_2=8 \Rightarrow T=(x_1)^{x_2}=\left(\sqrt{2}\right)^8=16$.

Câu 14: Phương trình $3.9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-1}+3=0$ có tổng các nghiệm thực là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^{x^2+x-1}$, điều kiện $t>0$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t=3\Rightarrow 3^{x^2+x-1}=3\Leftrightarrow x^2+x-1=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^{x^2+x-1}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x^2+x-1=-1\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-2;-1;0;1\}$ nên tổng tất cả các nghiệm thực là -2.

Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=4^x,(t>0)$. Phương trình trở thành: $t^2-4mt+5m^2-45=0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $t>0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+45>0 \\ 5m^2-45>0 \\ 4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5}<m<3\sqrt{5} \\ m<-3\vee m>3 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m<3\sqrt{5}$.

Vì m nguyên nên $m\in\{4;5;6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x-2m.2^x+2m=0\ (1)$

Đặt $t=2^x$, $t>0$ phương trình trở thành $t^2-2m.t+2m=0\ (2)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm t_1, $t_2>0$ thỏa mãn $t_1.t_2=2^{x_1}.2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=8$ suy ra $2m=8\Leftrightarrow m=4$.

Câu 17: Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x-m\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=81$.

A. $m=-4$ **B.** $m=44$ **C.** $m=81$ **D.** $m=4$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_3 x$ ta được $t^2-mt+2m-7=0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1,t_2

$t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3(x_1x_2)=\log_3 81=4$

Theo vi-et suy ra $t_1+t_2=m\Rightarrow m=4$

Dạng 3. Phương pháp logarit hóa, mũ hóa

Câu 1: Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2-5x+6)+1\right]=0$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x^2-5x+6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<2\end{array}\right.$.

Kết hợp ĐKXĐ ta có:

$(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2-5x+6)+1\right]=0\Leftrightarrow\log_{0,5}(x^2-5x+6)=-1$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0,5^{-1}\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Đối chiếu với ĐKXĐ ta thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $9-7=2$

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-x+2)=1$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2-x+2)=1\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\log(x-1)=2$ là

A. 5. **B.** 21. **C.** 101. **D.** 1025.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình là $x>1$.

$\log(x-1)=2\Leftrightarrow x-1=10^2\Leftrightarrow x=101$.

Vậy $x=101$ thỏa mãn điều kiện nên phương trình đã cho có nghiệm là $x=101$.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$ là:

A. $\{16\}$. **B.** $\{\sqrt{2}\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}\log_2 x=7.$

$\Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=2^4 \Leftrightarrow x=16$.

Câu 5: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$ bằng

A. $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** -4. **D.** $1-\log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2-1}=3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2-2\log_2 3.x-1-3\log_2 3=0$.

Vì $ac<0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$x_1x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 27=-\log_2 54$.

Câu 6: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$. **B.** $-2+\log_5 2$. **C.** $2+\log_5 2$. **D.** $2-\log_2 5$.

Lời giải

$2^x.5^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow \log_5\left(2^x.5^{x^2-2x}\right)=0 \Leftrightarrow x\log_5 2+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(\log_5 2+x-2)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2-\log_5 2 \end{array}\right.$.

Câu 7: Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\neq 0$.

Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72 \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)}.2^x=3^2.2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2}=\frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2}=2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}}=2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x}=\log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x}=-(x-3)\log_3 2 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{x}+\log_3 2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ -\log_3 2=\frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3(N) \\ x=-\log_2 3(N) \end{array}\right.$.

Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$. Vậy tổng $S=a+b=5$.

Câu 8: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4(3.2^x-1)=x-1$

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

$\log_4(3.2^x-1)=x-1 \Leftrightarrow 3.2^x-1=4^{x-1} \Leftrightarrow 4^x-12.2^x+4=0$

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành: $t^2-12t+4=0\Leftrightarrow t=6\pm 4\sqrt{2}$

Với $t=6+4\sqrt{2}\Rightarrow 2^x=6+4\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)$.

Với $t=6-4\sqrt{2}\Rightarrow 2^x=6-4\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$.

Tổng các nghiệm là $\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)+\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)=\log_2 4=2$.

Câu 9: Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$ có hai ngiệm x_1, x_2. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x<5$

$$\log_2\left(5-2^x\right)=2-x\Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x}\Leftrightarrow 5-2^x=\frac{4}{2^x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$\Rightarrow\ P=x_1+x_2+x_1x_2=2$

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6\left(3.4^x+2.9^x\right)=x+1$ bằng

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương $3.4^x+2.9^x=6^{x+1}\Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-6.\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,\left(t>0\right)$. Khi đó ta có phương trình $3t^2-6t+2=0$

Hiển nhiên phương trình có 2 nghiệm phân biệt t_1,t_2 dương và thỏa mãn $t_1.t_2=\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}=\frac{2}{3}\Rightarrow x_1+x_2=1.$

Dạng 4: Sử Dụng Tính Đơn Điệu Hàm Số

Câu 1: Hỏi phương trình $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\left(\frac{4}{5}\right)^x-6=0$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=3\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\left(\frac{4}{5}\right)^x-6$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Có $f'\left(x\right)=3\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+5\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $\left(1\right)$.

Mặt khác $f\left(1\right).f\left(2\right)=\frac{8}{5}.\left(-\frac{22}{25}\right)=-\frac{176}{125}<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(1;2\right).\left(2\right)$.

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)}=x$ là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-3$

Đặt $t=\log_5(x+3)\Rightarrow x=5^t-3$, phương trình đã cho trở thành

$$2^t=5^t-3\Leftrightarrow 2^t+3=5^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^t+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t=1$$

Dễ thấy hàm số $f(t)=\left(\frac{2}{5}\right)^t+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=1$.

Với $t=1$, ta có $\log_5(x+3)=1\Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 3: Tích tất cả các nghiệm phương trình $\log_5 x\log_3 x=\log_5 x+\log_3 x$ bằng

A. 15. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Phương trình $\log_5 x\log_3 x=\log_5 x+\log_3 x\Leftrightarrow \log_5 x(\log_3 x-1)=\log_3 x$

$$\Leftrightarrow \log_5 x=1+\frac{1}{\log_3 x-1},(x\neq 3).$$

Hàm số $y=\log_5 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, hàm số $y=1+\frac{1}{\log_3 x-1}$ nghịch biến trên các khoảng $(0;3)$ và $(3;+\infty)$. Do đó phương trình trên có tối đa hai nghiệm, mỗi khoảng có tối đa một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 1 và 15.

BÀI 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

2. Cách giai bất phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Đặt ẩn phụ

$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \lambda = 0$. Đặt $t = a^{f(x)}, (t > 0)$

c) Phương pháp logarit hóa

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x).\log_a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x).\log_a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Bất phương pháp logarit cơ bản

2. Cách giải một số bất phương trình logarit đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Phương pháp mũ hóa

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ f(x)>a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ 0<f(x)<a^b\end{cases}\end{array}\right.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số

Câu 1: Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$ là

A. $x \ge -4$. **B.** $x < 0$. **C.** $x > 0$. **D.** $x < 4$.

Lời giải.

Chọn A

$3^{x+2} \ge \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \ge 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Câu 2: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là:

A. $S = (-\infty;3)$. **B.** $S = (1;+\infty)$.

C. $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$. **D.** $S = (1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x > -3 \Leftrightarrow x^2-4x+3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$

.

Vậy $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Câu 3: Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \ge 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A. $T = [-2;2]$. **B.** $T = [2;+\infty)$.

C. $T = (-\infty;-2]$. **D.** $T = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \ge 1 \Leftrightarrow x^2-4 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2;2]$

Vậy tập nghiệm $T = [-2;2]$.

Câu 4: Bất phương trình $2^x > 4$ có tập nghiệm là:

A. $T=(2;+\infty)$. **B.** $T=(0;2)$. **C.** $T=(-\infty;2)$. **D.** $T=\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

$2^x>4\Leftrightarrow 2^x>2^2\Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=(2;+\infty)$.

Câu 5: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{2}}4$.

A. $S=(3;7]$. **B.** $S=[3;7]$. **C.** $S=(-\infty;7]$. **D.** $S=[7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq\log_{\frac{1}{2}}4\Leftrightarrow 0<x-3\leq 4\Leftrightarrow 3<x\leq 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;7]$.

Câu 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2+3x}<4$

A. $S=(\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với

$2^{-x^2+3x}<2^2\Leftrightarrow -x^2+3x<2\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$.

Câu 7: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=(-\infty;1)$. **C.** $S=(1;+\infty)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}\Leftrightarrow 5^{x+2}<(5)^{2x}\Leftrightarrow 2<x$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+4}$ là

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(0;16)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2\ln(4x+4)$ là:

A. $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$. **B.** $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **C.** $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)\setminus\{0\}$. **D.** $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đk: $-1 < x \neq 0$; $\ln x^2 < 2\ln(4x+4) \Leftrightarrow x^2 < (4x+4)^2 \Leftrightarrow 15x^2+32x+16>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{4}{3} \\ x > -\frac{4}{5} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S = \left(-\frac{4}{5};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < \log_2(12-3x)$ là:

A. $(0;6)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2 x < \log_2(12-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 12-3x>0 \\ x<12-3x \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<3$.

Câu 11: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

A. 9. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

$\log_2(2x+5) > \log_2(x-1) \Leftrightarrow 2x+5 > x-1 \Leftrightarrow x > -6$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S = (1;+\infty)$.

Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

Câu 12: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > -1$.

$\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow x+7 > x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Do điều kiện nên tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{0,1\}$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>0 \\ 9-x>0 \\ 2x>9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<9 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<9.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;9)$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{5}{9};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} 9x-5>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{9} \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{5}{9}$.

Ta có: $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1) \Leftrightarrow 9x-5<3x+1 \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là: $S=\left(\frac{5}{9};1\right)$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2(x-3)+\log_2 x \geq 2$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(3;4]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x\ge 3$.

$\log_2(x-3)+\log_2 x\ge 2 \Leftrightarrow x^2-3x\ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le -1 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=[4;+\infty)$

.

Câu 16: Bất phương trình $2^{x^2-3x+4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+4}\le 2^{10-2x} \Leftrightarrow x^2-3x+4\le 10-2x \Leftrightarrow x^2-x-6\le 0$ $\Leftrightarrow -2\le x\le 3$. Do $x>0$ nên $0<x\le 3$.

Mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\in\{1;2;3\}$.Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}$ là:

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-5;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}\Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}}<5^{x+3}\Leftrightarrow \frac{x-1}{3}<x+3\Leftrightarrow x-1<3x+9\Leftrightarrow x>-5$.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A. $S=(-\infty;1]$. **B.** $S=[1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;1)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}+2\right)^{-x+1}\Leftrightarrow x-1\le -x+1\Leftrightarrow x\le 1$.

Vậy $S=(-\infty;1]$.

Dạng 2: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x>3^{x+1}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x(1-\log_2 3)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 2: Giải bất phương trình $3^{x^2}<2^x$

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in(0;\log_2 3)$. **C.** $x\in(0;\log_3 2)$. **D.** $x\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x^2}<2^x\Leftrightarrow\log_3 3^{x^2}<\log_3 2^x\Leftrightarrow x^2-x\log_3 2<0\Leftrightarrow 0<x<\log_3 2$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trinh $2^x>3^{x+1}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x(1-\log_2 3)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2+x\log_2 5>0$. **B.** $f(x)>1\Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$.

C. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2-x\log_5 2>0$. **D.** $f(x)>1\Leftrightarrow -x\ln 2+x^2\ln 5>0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}>1\Leftrightarrow\log_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}\right]>0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_2 5^{x^2} > 0 \Leftrightarrow -x + x^2 \log_2 5 > 0$ nên phương án A sai.

Câu 5: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1) > 3$

A. $x > 4$. **B.** $x > 14$ **C.** $x < 2$. **D.** $2 < x < 14$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(2x-1) > 3 \Leftrightarrow 2x-1 > 3^3 \Leftrightarrow x > 14$.

Câu 6: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1) < 2$ ta được nghiệm là

A. $\frac{1}{2} < x < 5$. **B.** $x > \frac{1}{5}$. **C.** $x < 5$. **D.** $x > 5$.

Lời giải

Chọn A

$\log_3(2x-1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$.

Câu 7: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < 0$?

A. $x = 0$. **B.** $x < 0$. **C.** $x > 0$. **D.** $-1 < x < 0$.

Lời giải

Chọn B

$\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$.

Câu 8: Các giá trị x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$ là:

A. $x > 3$. **B.** $\frac{1}{3} < x < 3$. **C.** $x < 3$. **D.** $x > \frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(3x-1) > 3 \Leftrightarrow 3x-1 > 8 \Leftrightarrow x > 3$.

Câu 9: Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1) \geq 0$ có tập nghiệm là?

A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **C.** $(1; +\infty)$ **D.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

$\log_{0,5}(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\leq 0,5^0 \Leftrightarrow 2x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq 1$.

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệp của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 10: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(9-x)\leq 3$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(9-x)\leq 3 \Leftrightarrow 0<9-x\leq 8 \Leftrightarrow 1\leq x<9$. Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là:

A. $(-\infty;10)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(1;10)$. **D.** $(-\infty;9)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_2(x-1)<3 \Rightarrow x-1<8 \Leftrightarrow x<9$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;9)$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x^2+2)\leq 3$ là:

A. $S=(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=\mathbb{R}$. **D.** $P=[-5;5]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(x^2+2)\leq 3 \Leftrightarrow x^2+2\leq 27 \Leftrightarrow x^2\leq 25 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$.

Câu 13: Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log(2x^2-11x+15)\leq 1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $2x^2-11x+15>0 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$ hoặc $x>3$.

$\log\left(2x^2-11x+15\right)\le 1 \Leftrightarrow 2x^2-11x+15\le 10 \Leftrightarrow 2x^2-11x+5\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 5$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{2}$ hoặc $3<x\le 5$. Vậy BPT có 4 nghiệm nguyên là: $x\in\{1;2;4;5\}$.

Câu 14: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2$.

A. $S=\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=(1;9)$. **C.** $S=\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ \frac{2}{x-1}<\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<9 \end{cases}.$$

Câu 15: Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x,\ \log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;27)$. **B.** $(8;27)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};27\right)$. **D.** $(27;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

$$\max\left\{\log_3 x,\log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x<3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<27 \\ x>\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8}<x<27.$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $\left(\frac{1}{8};27\right)$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ là:

A. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Chọn B

* ĐKXĐ: $\begin{cases}\log_2\left(x^2-1\right)>0\\ x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-1>1\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right).$

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right).$

* Kết hợp điều kiện ta được: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right).$

Dạng 3: Phương Pháp Đặt Ẩn Phụ

Câu 1: Cho phương trình $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0(1)$. Nếu đặt $t=3^{x+5}(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình nào?

A. $9t^2-6t-2<0.$ **B.** $t^2-2t-2<0.$ **C.** $t^2-18t-2<0.$ **D.** $9t^2-2t-2<0.$

Lời giải.

Chọn B

$3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0\Leftrightarrow 3^{2(x+5)}-2.3^{x+5}-2<0$

Vậy khi đặt $t=3^{x+5}(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2-2t-2<0.$

Câu 2: Cho phương trình $25^{x+1}-26.5^x+1>0$. Đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trở thành

A. $t^2-26t+1>0$. **B.** $25t^2-26t>0$. **C.** $25t^2-26t+1>0$. **D.** $t^2-26t>0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $25^{x+1}-26.5^x+1>0\Leftrightarrow 25.5^{2x}-26.5^x+1>0$.

Vậy nếu đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trên trở thành $25t^2-26t+1>0$.

Câu 3: Xét bất phương trình $5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0$. Nếu đặt $t=5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t+32<0$. **B.** $t^2-16t+32<0$. **C.** $t^2-6t+32<0$. **D.** $t^2-75t+32<0$.

Lời giải

Chọn D

$5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0\Leftrightarrow 5^{2x}-3.5^2.5^x+32<0\Leftrightarrow 5^{2x}-75.5^x+32<0$.

Nếu đặt $t=5^x>0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2-75t+32<0$.

Câu 4: Cho phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\ge 0$. Khi đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+8t-3\ge 0$. **B.** $2t^2-3\ge 0$. **C.** $t^2+2t-3\ge 0$. **D.** $4t-3\ge 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\ge 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-2x}\right)^2+2^3.2^{x^2-2x}-3\ge 0$.

Kho đó, đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình $t^2+8t-3\ge 0$.

Câu 5: Khi đặt $t=\log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\le 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-6t-4\le 0$. **B.** $t^2-6t-5\le 0$. **C.** $t^2-4t-4\le 0$. **D.** $t^2-3t-5\le 0$.

Lời giải

Chọn C

$\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\le 0 \Leftrightarrow (\log_5 x+1)^2-6\log_5 x-5\le 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x-4\log_5 x-4\le 0$.

Với $t=\log_5 x$ bất phương trình trở thành: $t^2-4t-4\le 0$.

Câu 6: Bất phương trình $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left[10;10^{2018}\right]$. **B.** $S=\left[10;10^{2018}\right)$. **C.** $S=[1;2018]$. **D.** $S=\left(10;10^{2018}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0 \Leftrightarrow 1\le \log x\le 2018 \Leftrightarrow 10\le x\le 10^{2018}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[10;10^{2018}\right]$.

Câu 7: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0$

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-8\log_2 x^{\frac{1}{2}}+3<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-4\log_2 x+3<0$

$\Leftrightarrow 1<\log_2 x<3 \Leftrightarrow 2<x<8$. So với điều kiện ta được $2<x<8$.

Câu 8: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$

A. $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$. **B.** $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $S=[2;16]$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$, $t\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương $t^2-5t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le 1\\t\ge 4\end{array}\right.$.

- $\log_2 x\le 1\Leftrightarrow 0<x\le 2$.
- $\log_2 x\ge 4\Leftrightarrow x\ge 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 9: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x+9.3^{-x}<10$ là

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x\ (t>0)$, bất phương trình có dạng $t+\frac{9}{t}<10\Leftrightarrow t^2-10t+9<0\Leftrightarrow 1<t<9$.

Khi đó $1<3^x<9\Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $x=1$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x-5.4^x+4\ge 0$ là:

A. $T=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $T=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=4^x$, $t>0$.

$16^x-5.4^x+4\ge 0$ trở thành $t^2-5.t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\0<t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x\ge 4\\0<4^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Câu 11: Biết $S=[a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x-10.3^x+3\le 0$. Tìm $T=b-a$.

A. $T=\frac{8}{3}$. **B.** $T=1$. **C.** $T=\frac{10}{3}$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3.9^x-10.3^x+3\le 0 \Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2-10.3^x+3\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le 3^x\le 3 \Leftrightarrow \log_3\frac{1}{3}\le x\le \log_3 3$

$\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Khi đó bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-1;1]$, do vậy $T=1-(-1)=2$.

Câu 12: Nghiệm của bất phương trình $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$ là.

A. $0\le x\le 1$. **B.** $0<x<1$. **C.** $0<x\le 1$. **D.** $0\le x<1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow \left(5^{\sqrt{x}}\right)^2-6.5^{\sqrt{x}}+5<0 \Rightarrow \begin{cases}5^{\sqrt{x}}<5\\5^{\sqrt{x}}>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<1\\x>0\end{cases}$$

Câu 13: Bất phương trình $64.9^x-84.12^x+27.16^x<0$ có nghiệm là:

A. $1<x<2$. **B.** $\frac{9}{16}<x<\frac{3}{4}$. **C.** $x<1$ hoặc $x>2$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

$64.9^x-84.12^x+27.16^x<0 \Leftrightarrow 27.\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-84.\left(\frac{4}{3}\right)^x+64<0 \Leftrightarrow 1<x<2$.

Câu 14: Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $9^x-2(m+1)3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

A. $m\in\left(-5-2\sqrt{3};-5+2\sqrt{3}\right)$. **B.** $m<-\frac{3}{2}$.

C. $m\le -\frac{3}{2}$. **D.** $m\ne 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$t^2-2(m+1)t-3-2m>0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3-2m)>0 \Leftrightarrow t-3-2m>0 \Leftrightarrow t>3+2m \quad (1)$

(Do $t>0$).

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t \in (0;+\infty)$.

Điều này tương đương với $3+2m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \le -\frac{3}{2}$.

Câu 15: Cho Hàm số $f(x)=\frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f(x)>1 \Leftrightarrow (x-2)\log 3-(x^2-4)\log 7>0$.

B. $f(x)>1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3-(x^2-4)\log_{0,3} 7>0$.

C. $f(x)>1 \Leftrightarrow (x-2)\ln 3-(x^2-4)\ln 7>0$.

D. $f(x)>1 \Leftrightarrow x-2-(x^2-4)\log_3 7>0$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x)>1 \Leftrightarrow \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}>1 \Leftrightarrow \log_{0.3}\frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}<\log_{0,3}1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3}3-(x^2-4)\log_{0,3}7<0.$$

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.

Hai định lý trên cho thấy:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x)+C, \mathrm{C}\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C.}$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\boxed{\int f'(x)dx=f(x)+C}$$

Tính chất 2

$\boxed{\int kf(x)dx=k\int f(x)dx}$, k là hằng số khác 0.

Tính chất 3

$$\boxed{\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.}$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý 3: Mọi hàm số *f* liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm

$\int 0dx=C$	$\int dx=x+C$
$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^{\alpha}dx=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\dfrac{1}{(ax+b)}dx=\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{a \ln a} + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C, (a \neq 0)$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C, (a \neq 0)$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{3}.\frac{1}{a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = 2.\frac{1}{a}\sqrt{ax+b} + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

Hệ quả: Với $u = ax + b(a \neq 0)$ ta có

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.}$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Nguyên Hàm Đa Thức

Câu 1: Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A. $\int 0\,dx = C$. **B.** $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$. **C.** $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. **D.** $\int e^x\,dx = e^x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \Rightarrow$ C sai.

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 \mathrm{d}x$.

A. $F(x) = \pi^2 x + C$. **B.** $F(x) = 2\pi x + C$. **C.** $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$. **D.** $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \pi^2 \mathrm{d}x = \pi^2 x + C$.

Câu 3: Cho $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. **B.** $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a+b}F(ax+b) + C$.

C. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = F(ax+b) + C$. **D.** $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = aF(ax+b) + C$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$. **B.** $\frac{x^3}{3} + x + C$. **C.** $6x + C$. **D.** $x^3 + x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int (3x^2 + 1)\mathrm{d}x = 3.\frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C$.

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$. **B.** $F(x) = x^3 + x + C$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$. **D.** $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Câu 6: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

A. $\frac{-x^4+x^2+3}{3x}+C$. **B.** $\frac{-2}{x^2}-2x+C$. **C.** $-\frac{x^4+x^2+3}{3x}+C$. **D.** $\frac{-x^3}{3}-\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\left(\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{-2}-x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{3}+C$.

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}}+4$ là

A. 101376. **B.** $\mathrm{e}^2.x^{\mathrm{e}-1}+C$. **C.** $\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$. **D.** $\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}}+4\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}.x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Câu 8: Hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+1)^5$?

A. $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{18}+8$. **B.** $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{18}-2$.

C. $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{18}$. **D.** $F(x)=\frac{(3x+1)^6}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng $\int(ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ với $\alpha\neq-1$ và C là hằng số.

Vậy hàm số ở phương án D thỏa yêu cầu đề.

Câu 9: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-6x^2+1$ là

A. $20x^3-12x+C$. **B.** x^5-2x^3+x+C. **C.** $20x^5-12x^3+x+C$. **D.** $\frac{x^4}{4}+2x^2-2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\left(5x^4-6x^2+1\right)\mathrm{d}x=x^5-2x^3+x+C$.

Câu 10: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{2018}$, $(x\in\mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x)=2017.x^{2018}+C$, $(C\in\mathbb{R})$. **B.** $F(x)=\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

C. $F(x)=x^{2019}+C$, $(C\in\mathbb{R})$. **D.** $F(x)=2018.x^{2017}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int x^{2018}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$.

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2x+3$ thỏa mãn $F(0)=2$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int x^2-2x+3\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x+C$.

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có $F(0)=2\Rightarrow C=2$.

Vậy $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x+2\Rightarrow F(1)=\dfrac{13}{3}$.

Câu 12: Xét $I=\int x^3\left(4x^4-3\right)^5\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt: $u=4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I=\dfrac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$. **B.** $I=\dfrac{1}{12}\int u^5\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int u^5\mathrm{d}u$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}\int u^5\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn A

$u=4x^4-3\Rightarrow \mathrm{d}u=16x^3\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{1}{16}\mathrm{d}u=x^3\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\dfrac{1}{16}\int u^5\mathrm{d}u$.

Câu 13: Cho $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với A, $B\in\mathbb{Q}$ và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\dfrac{23}{252}$. **B.** $\dfrac{241}{252}$. **C.** $\dfrac{52}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3x-2 \Rightarrow x=\dfrac{t+2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có:

$$\frac{2}{3}\int \frac{t+2}{3}.t^6\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\int\left(t^7+2t^6\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{9}.\frac{t^8}{8}+\frac{4}{9}.\frac{t^7}{7}+C=\frac{1}{36}.(3x-2)^8+\frac{4}{63}.(3x-2)^7+C.$$

Suy ra $A=\dfrac{1}{36}$, $B=\dfrac{4}{63}$, $12.\dfrac{1}{36}+7.\dfrac{4}{63}=\dfrac{7}{9}$.

Dạng 2: Nguyên Hàm Phân Thức

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=7x^6+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-2$ là

A. $x^7+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-2x$.

B. $x^7+\ln|x|+\dfrac{1}{x}-2x+C$.

C. $x^7+\ln x+\dfrac{1}{x}-2x+C$.

D. $x^7+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-2x+C$.

Lời giải

Chọn D

$$\int f(x)\mathrm{d}x=x^7+\ln|x|-\frac{1}{x}-2x+C.$$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ là:

A. $\ln|x+2|+C$.

B. $\dfrac{1}{2}\ln|x+2|+C$.

C. $\ln(x+2)+C$.

D. $\dfrac{1}{2}\ln(x+2)+C$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\ln|1-2x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln|1-2x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|1-2x|+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\dfrac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

Câu 4: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

A. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{(x+1)^3}+C$.

B. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x+1}+C$.

C. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x+1}+C$.

D. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{-2}{(x+1)^3}+C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int (x+1)^{-2}\mathrm{d}x=-(x+1)^{-1}+C=\frac{-1}{x+1}+C.$$

Câu 5: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+1$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x+1|+x+1$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\ln(x+1)$.

D. $x+\ln(x+1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{x+1-1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$$

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+1$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 6: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ và $F(0)=2$ thì $F(1)$ bằng.

A. $\ln 2$.

B. $2+\ln 2$.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$F(x)=\int \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|+C$ mà $F(0)=2$ nên $F(x)=\ln|x+1|+2$.

Do đó $F(1)=2+\ln 2$.

Câu 7: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$, biết $F\left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$ là:

A. $F(x)=2\ln|2x+1|-\dfrac{1}{2}$.

B. $F(x)=2\ln|2x+1|+1$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+1$.

D. $F(x)=\ln|2x+1|+\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng

$F(x)=\int\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Mà $F\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln\left|2\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right)+1\right|+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=1$.

Câu 8: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$; biết $F(1)=2$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3-2$. **B.** $F(2)=\frac{1}{2}\ln 3+2$. **C.** $F(2)=\ln 3+2$. **D.** $F(2)=2\ln 3-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; $F(1)=2\Rightarrow C=2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+2\Rightarrow F(2)=\frac{1}{2}\ln 3+2$.

Câu 9: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$. **B.** $1+\frac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Câu 10: Tính nguyên hàm $I=\int\frac{2x^2-7x+5}{x-3}\mathrm{d}x$.

A. $I=x^2-x+2\ln|x-3|+C.$ **B.** $I=x^2-x-2\ln|x-3|+C.$

C. $I=2x^2-x+2\ln|x-3|+C.$ **D.** $I=2x^2-x-2\ln|x-3|+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\frac{2x^2-7x+5}{x-3}\mathrm{d}x=\int\left(2x-1+\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x=x^2-x+2\ln|x-2|+C$.

Câu 11: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x = a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có

$$\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 5\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - 3\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$= 5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C.$$

Vậy $\begin{cases} a=5 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=8$.

Câu 12: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\frac{1}{2x+1}$. Biết $F(0)=0$, $F(1)=a+\frac{b}{c}\ln 3$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng.

A. 4. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int\left(3x^2+\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = x^3+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Do $F(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=x^3+\frac{1}{2}\ln|2x+1|$.

Vậy $F(1)=1+\frac{1}{2}\ln 3 \Rightarrow a=1;\ b=1;\ c=2 \Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $3+\ln 15$. **C.** $2+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx = \int\frac{2}{2x-1}dx = \int\frac{2.\frac{1}{2}d(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1|+c$.

$f(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+1$.

$\begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+1 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1)+f(3)=2+\ln 15$.

Dạng 3: Nguyên Hàm Căn Thức

Câu 1: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1$.

B. $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có : $\int\left(\sqrt{x}-1\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+C$.

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x}+\frac{x^{2019}}{673}+C$.

B. $2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2019}}{2019}+C$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x^{2019}}{673}+C$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2017}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$\int\left(3\sqrt{x}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x=3.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{2019}}{2019}+C=2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2019}}{2019}+C.$$

Câu 3: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{2x+3}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+3}+C$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\left(\sqrt{2x+3}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{2x+3}=t \Leftrightarrow t^2=2x+3 \Leftrightarrow 2t\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

$$I=\int t.t\mathrm{d}t=\int \mathrm{t}^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3+C \Leftrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C.$$

Câu 4: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{1-2x}$ là:

A. $\frac{3}{2}(2x-1)\sqrt{1-2x}$. **B.** $-\frac{3}{2}(1-2x)\sqrt{1-2x}$. **C.** $\frac{3}{4}(2x-1)\sqrt{1-2x}$. **D.** $-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)$, với $x\le\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{(1-2x)^3}+C=-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}+C$

Câu 5: Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+C$. **B.** $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C$.

C. $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$. **D.** $F(x)=\frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\sqrt[3]{x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int t.3t^2\mathrm{d}t=\int 3t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{4}t^4+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Vậy $F(x)=\frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+C$.

Câu 6: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. **B.** $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

C. $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}2}+\frac{1}{2}$. **D.** $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}$ suy ra $t^2=x$ và $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$. Khi đó $I=\int t.2t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3+C\Rightarrow I=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Vì $F(1)=1$ nên $C=\frac{1}{3}$.Vậy $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$.

Câu 7: Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x)=4\sqrt{x}-x$ và $f(4)=0$.

A. $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{40}{3}$. **B.** $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$.

C. $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{88}{3}$. **D.** $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}+C$.

$f(4)=0\Leftrightarrow\frac{8.4\sqrt{4}}{3}-\frac{4^2}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{40}{3}=\int\left(4\sqrt{x}-x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{40}{3}$.

Câu 8: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

A. $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. **B.** $F(x)=4\sqrt{x-1}$. **C.** $F(x)=2\sqrt{x-1}$. **D.** $F(x)=\sqrt{x-1}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t^2=x-1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có:

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{4t}{t}\mathrm{d}t\ h'(2)=-\frac{4}{49}=4t+C=4\sqrt{x-1}+C$.

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$ là $F(x)=4\sqrt{x-1}$.

Câu 9: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1\right)\mathrm{d}x=\sqrt{x+1}+(m-1)x+C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}F(0)=0\\F(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+1=0\\C+3m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-1\\m=3\end{cases}$.

Vậy $F(x)=\sqrt{x+1}+2x-1$.

Câu 10: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\sqrt{4+x^3}$ là

A. $\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$. **B.** $2\sqrt{4+x^3}+C$. **C.** $\frac{1}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$. **D.** $2\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x^2\sqrt{4+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sqrt{4+x^3}\mathrm{d}\left(4+x^3\right)\to\frac{1}{3}\int\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(4+x^3\right)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\left(4+x^3\right)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$.

Chú ý: Trong lời giải viết dấu "$\to$" thay cho dấu "$=$" vì $\sqrt{4+x^3}\neq\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ nhưng ta mượn tạm công thức nguyên hàm của $\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ để tính nguyên hàm của $\sqrt{4+x^3}$.

Câu 11: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\sqrt{2x+1}=t\Rightarrow 2x+1=t^2\Rightarrow\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Khi đó ta có $\int\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{t\mathrm{d}t}{t}==\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 12: Với cách đổi biến $u=\sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int_1^e\frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\mathrm{d}x$ trở thành

A. $\frac{2}{3}\int_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\frac{2}{9}\int_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$. **C.** $2\int_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\frac{2}{9}\int_1^2\frac{u^2-1}{u}\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn B

$u=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow u^2=1+3\ln x\Rightarrow \ln x=\dfrac{u^2-1}{3}\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{2u}{3}\mathrm{d}u$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{\frac{u^2-1}{3}}{u}\frac{2u}{3}\mathrm{d}u=\frac{2}{9}\int_1^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

Câu 13: Khi tính nguyên hàm $\displaystyle\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\int\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **C.** $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $u\ge 0$ nên $u^2=x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u\\ x=u^2-1\end{cases}$.

Khi đó $\displaystyle\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{u^2-1-3}{u}.2u\mathrm{d}u=\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 14: Tìm nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F\left(5\right)=7$.

A. $F\left(x\right)=2\sqrt{2x-1}$. **B.** $F\left(x\right)=2\sqrt{2x-1}+1$.

C. $F\left(x\right)=\sqrt{2x-1}+4$. **D.** $F\left(x\right)=\sqrt{2x-1}-10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\displaystyle\int\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}\left(2x-1\right)}{2\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2x-1}+C$;

Do $F\left(5\right)=7$ nên $6+C=7\Rightarrow C=1$.

Dạng 4. Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng**.

A. $\int\tan x dx=-\ln\left|\cos x\right|+C.$ **B.** $\int\sin\frac{x}{2}dx=2\cos\frac{x}{2}+C.$

C. $\int\cot x dx=-\ln\left|\sin x\right|+C.$ **D.** $\int\cos\frac{x}{2}dx=-2\sin\frac{x}{2}+C.$

Lời giải

Chọn A

Xét $\left(-\ln\left|\cos x\right|+C\right)'=-\dfrac{\left(\cos x\right)'}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$ Suy ra khẳng định A đúng.

Câu 2: Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$

A. $I=\dfrac{\pi+2}{8}$ **B.** $I=\dfrac{\pi+2}{4}$ **C.** $I=\dfrac{1}{3}$ **D.** $I=\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Cách giải: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8}$

Câu 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}$.

A. $\int f(x)dx=-\cot x+\cos x+C$. **B.** $\int f(x)dx=-\tan x+\cos x+C$.

C. $\int f(x)dx=-\cot x-\cos x+C$. **D.** $\int f(x)dx=-\tan x-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx=\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx-\int\sin x dx=-\cot x+\cos x+C$

Câu 4: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^3 x\cos x$. Tính $I=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-F(0)$

A. $I=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x dx=\int\limits_0^1 t^3 dt=\dfrac{1}{4}$

Câu 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$

A. $\int f(x)dx=x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

C. $\int f(x)dx=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

$\int(\sin x+\cos x)^2 dx=\int(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)dx=\int(1+\sin 2x)dx=x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

Câu 6: Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\cos^2 x$. **B.** $f(x)=\tan^2 x$ và $g(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x^2}$.

C. $f(x)=e^x$ và $g(x)=e^{-x}$. **D.** $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\sin^2 x$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

Dạng 5: Nguyên Hàm Hàm Mũ, Loga

Câu 1: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$

A. $\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C.$ **B.** $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

C. $\int e^{2x}dx = 2e^{2x} + C.$ **D.** $\int e^{2x}dx = -2e^{2x} + C.$

Lời giải

Chọn B

Theo công thức nguyên hàm cơ bản $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$. Suy ra $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = 12^{12x}$.

A. $\int 12^{2x}dx = 12^{12-4x}\ln 12 + C$ **B.** $\int 12^{2x}dx = 12^{12x}\ln 12 + C$

C. $\int 12^{2x}dx = \frac{12^{12x}}{\ln 12} + C$ **D.** $\int 12^{2x}dx = \frac{12^{12x-1}}{\ln 12} + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 12^{12x}dx = \frac{1}{12}\int 12^{12x}d(12x) = \frac{12^{12x}}{12.\ln 12} + C = \int 12^{12x}dx = \frac{12^{12x-1}}{\ln 12} + C$

Câu 3: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e) - F(1)$

A. $I = e$. **B.** $I = \frac{1}{e}$. **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Chọn C

$F_{(x)} = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int \ln(x)d\ln(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$

$\Rightarrow F_{(e)} - F_{(1)} = \frac{1}{2}$

Câu 4: Biết F làm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2016e^{2016x}$ và $F(0) = 2018$. Giá trị của F là

A. $F(1) = 2016.$ **B.** $F(1) = 2016e^{2016}.$

C. $F(1) = 2016e^{2016} + 2.$ **D.** $F(1) = e^{2016} + 2017.$

Lời giải

Chọn D

$F(x) = \int 2016e^{2016x}dx = e^{2016x} + C \to F(0) = 1 + C = 2018 \to C = 2017$

$\to F(x) = e^{2016x} + 2017 \to F(1) = e^{2016} + 2017.$

Câu 5: Tìm nguyên hàm $I=\int \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$

A. $I=\ln\left(x^2+1\right)+C$ **B.** $I=\frac{1}{4}\ln^2\left(x^2+1\right)+C$

C. $I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$ **D.** $I=\ln^2\left(x^2+1\right)+C$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức nguyên hàm hợp $d\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)=\frac{2x}{x^2+1}dx$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int \ln\left(x^2+1\right)d\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)=\frac{1}{4}.\ln^2\left(x^2+1\right)+C$

Câu 6: Kí hiệu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{e^x+1}$, biết $F\left(0\right)=-\ln 2$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $F\left(x\right)+\ln\left(e^x+1\right)=3$.

A. $S=\left\{-3;3\right\}$ **B.** $S=\left\{3\right\}$ **C.** $S=\varnothing$ **D.** $S=\left\{-3\right\}$

Lời giải

Chọn B

$\int \frac{1}{e^x+1}dx=\int dx-\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=x-\ln\left(e^x+1\right)+C$

Vì $F\left(0\right)=-\ln 2\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F\left(x\right)=x-\ln\left(e^x+1\right)$

Xét phương trình $F\left(x\right)+\ln\left(e^x+1\right)=3\Leftrightarrow x=3$

Dạng 6: Nguyên Hàm Từng Phần

Câu 1: Biết $F\left(x\right)=\left(ax+b\right).e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y=\left(2x+3\right).e^x$. Khi đó $a+b$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

$y=\left(2x+3\right)e^x\Rightarrow F\left(x\right)=\int\left(2x+3\right)e^xdx$

$\begin{cases}u=2x+3\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=e^x\end{cases}$

$F\left(x\right)=\int\left(2x+3\right)e^xdx=\left(2x+3\right)e^x-\int e^x2dx=\left(2x+3\right)e^x-2e^x=\left(2x+1\right)e^x$

Khi đó $a+b=3$.

Câu 2: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(x-1\right)\sin 2xdx$. Tìm đẳng thức đúng

A. $I=-(x-1)\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$. **B.** $I=-(x-1)\cos 2x-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$.

C. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$. **D.** $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=x-1\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$ ta có $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$

Câu 3: Biết rằng $\int e^{2x}\cos 3xdx=e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)+c$, trong đó a, b, c là các hằng số, khi đó tổng
a + b có giá trị là

A. $-\frac{1}{13}$ **B.** $-\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{5}{13}$ **D.** $\frac{1}{13}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)+c$. Ta có

$$f'(x)=2ae^{2x}\cos 3x-3ae^{2x}\sin 3x+2be^{2x}\sin 3x+3be^{2x}\cos 3x$$
$$=\left(2a+3b\right)e^{2x}\cos 3x+\left(2b-3a\right)e^{2x}\sin 3x$$

Để f là một nguyên hàm của hàm số $e^{2x}\cos 3x$, điều kiện là

$$f'(x)=e^{2x}\cos 3x\Leftrightarrow\begin{cases}2a+3b=1\\2b-3a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{13}\\b=\frac{3}{13}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{5}{13}.$$

Câu 4: Tính nguyên hàm $I=\int(x-2)\sin 3xdx=-\frac{(x-2)\cos 3x}{a}+b\sin 3x+C$. Tính $M=a+27b$. Chọn đáp án **đúng:**

A. 6 **B.** 14 **C.** 34 **D.** 22

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\dv=\sin 3xdx\end{cases}$. Ta được $\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{\cos 3x}{3}\end{cases}$

Do đó:

$$I=-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=-\frac{(x-2)\cos 3x}{3}+\frac{1}{9}\sin 3x+C\Rightarrow a=3;b=\frac{1}{9}\Rightarrow M=6$$

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin 2x$ là

A. $F(x)=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

C. $F(x)=-x\cos 2x+\sin 2x+C$. **D.** $F(x)=x\cos 2x-\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt

$$\begin{cases} u=x\Rightarrow u'=1 \\ v'=\sin 2x\Rightarrow v=-\frac{\cos 2x}{2} \end{cases}\Rightarrow I=-\frac{x\cos 2x}{2}+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$$

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(5x+1)e^x$ và $F(0)=3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=11e-3$. **B.** $F(1)=e+3$. **C.** $F(1)=e+7$. **D.** $F(1)=e+2$.

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_0^1(5x+1)e^x dx$$

$$u=5x+1\Rightarrow du=5dx, dv=e^x dx\Rightarrow v=e^x$$

$$\Rightarrow I=(5x+1)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x 5dx=(5x+1)e^x-5e^x\Big|_0^1=e+4=F(1)-F(0)\Rightarrow F(1)=e+7$$

Câu 7: Tìm $\int x\cos 2xdx$.

A. $\frac{1}{2}x.\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **B.** $x.\sin 2x+\cos 2x+C$.

C. $\frac{1}{2}x.\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\frac{1}{2}x.\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=x \\ dv=\cos 2xdx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}\Rightarrow\int x\cos 2xdx=\frac{1}{2}x\sin x2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx$$

$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Câu 8: $\int(x-2)\sin 3xdx=-\frac{(x-m)\cos 3x}{n}+\frac{1}{p}\sin 3x+C$. Tính giá trị của $m+n+p$.

A. 14 **B.** –2. **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=x-2 \\ dv=\sin 3xdx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=-\frac{\cos 3x}{3}. \end{cases}$$

Khi đó $\int (x-2)\sin 3x dx = -\dfrac{(x-2)\cos 3x}{3} + \dfrac{1}{9}\sin 3x + C.$

Suy ra $m = 2, n = 3, p = 9$

Vậy $m + n + p = 14.$

BÀI 2.TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Quy ước:

+ Nếu $a=b$ thì $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

+ Nếu $a>b$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \ldots$$

2. Tính chất:

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (k\in\mathbb{R})$$

$$\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (a<c<b)$$

Một số tính chất mở rộng:

Nếu $f(x)\ge 0\forall x\in[a;b]$ thì: $\int_a^b f(x)dx \ge 0\forall x\in[a;b]$

Nếu: $\forall x\in[a;b]: f(x)\ge g(x)\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Nếu: $\forall x\in[a;b]$ và với hai số M, N ta luôn có: $M\le f(x)\le N$ thì: $M(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN.

1. Phương pháp đổi biến số

1.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha\le u(x)\le\beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$.

Khi đó, ta có: $I=\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$

Bài toán: Tính tích phân $I=\int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx$

Cách giải: Đặt $t=u\left(x\right)\Rightarrow dt=u'(x)dx$

Đổi cận: $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=u(a)\\x=b\Rightarrow t=u(b)\end{cases}$. Khi đó $I=\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt.$

Chú ý: *Khi đổi biến ta phải đổi cả cận*

Dấu hiệu chung:

Nếu hàm số chứa căn $\Rightarrow$ *đặt* $t=$*căn*

Nếu hàm số chứa mẫu $\Rightarrow$ *đặt* $t=$*mẫu*

Nếu hàm số chứa lũy thừa bậc cao $\Rightarrow$ *đặt* $t=$*biểu thức chứa lũy thừa bậc cao*

Dấu hiệu cụ thể:

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tính phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	$I=\int_0^3\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	$I=\int_{-1}^0 x(x+1)^{2018}\mathrm{d}x$. Đặt $t=x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ *và* $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$	$I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x}{x}.\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}$
5	Có $e^x dx$	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x	$I=\int_0^{\ln 3}e^{2x}\sqrt{4e^x-3}.\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{4e^x-3}$
6	Có $\sin x dx$	$t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}\mathrm{d}x$ Đặt $t=2\cos x+1$
7	Có $\cos x dx$	$t=\sin x dx$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sin x$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ Đặt $t=\tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\cot x$

1.2. Phương pháp đổi biến số dạng 2.

Đặt $x=u\left(t\right)$

Bài toán 1: Tính $I=\int_a^b \mathrm{f(x)d}x$

Phương pháp: Đặt $x=u\left(t\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=u'\left(t\right)\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=a\Rightarrow u=\alpha$

$x=b\Rightarrow u=\beta$

Suy ra $I=\int_a^b \mathrm{f}\left[u(t)\right]u'(t)\mathrm{d}t$

Dấu hiệu	Đặt

Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì	đặt $x=\lvert a\rvert\sin t \to \begin{cases} dx=d(a\sin t)=a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\lvert a\rvert\cos t \end{cases}$
Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2+x^2}$ thì	đặt $x=\lvert a\rvert\tan t \to \begin{cases} dx=d(a\tan t)=\dfrac{adt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=\dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t} \end{cases}$
Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì	đặt $x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t} \to \begin{cases} dx=\dfrac{-a\cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \end{cases}$
Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ thì	đặt $x=a\cos 2t \to \begin{cases} dx=d(a\cos 2t)=-2a\sin 2t dt \\ \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\mathrm{t}}{1-\cos 2\mathrm{t}}}=\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \end{cases}$

Bài toán 2.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó ta có $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

Chứng minh:

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Khi đó $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

Bài toán 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên $[-a;a]$. Chứng minh rằng: $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

Chứng minh:

Ta có: $I=\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Xét tích phân: $J=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$, Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-a\Rightarrow t=a$; $x=0\Rightarrow t=0$.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-t)=-f(t)$.

Khi đó: $J=-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t=-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được: $I=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Công thức: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tích Phân Hữu Tỉ

Câu 1: Tích phân $\int_0^2 \frac{2}{2x+1}dx$ bằng

A. $2\ln 5$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 5$. **C.** $\ln 5$. **D.** $4\ln 5$

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^2 \frac{2}{2x+1}dx = \int_0^2 \frac{2}{2x+1}d(2x+1) = \ln|2x+1|\Big|_0^2 = \ln 5.$$

Câu 2: Nguyên hàm $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$?

A. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.

B. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.

C. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$.

D. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$

Lời giải

Chọn A

$$I = \int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{2(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$$

Câu 3: Cho hàm $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3}$ có nguyên hàm là hàm $F(x)$. Biết $F(1) = 6$. Khi đó $F(x)$ có dạng:

A. $\ln|x| - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + 6$ **B.** $\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + 4$. **C.** $\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + 6$ **D.** $\ln|x| - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + 12$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3} = \frac{x^2+4x+4}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ $(x \neq 0)$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{x^2} + 4\int \frac{dx}{x^3} = \ln|x| - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + C.$$

Mà $F(1)=6\Rightarrow C=12\Rightarrow F(x)=\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+12$.

Câu 4: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=\frac{4x^2+4x+3}{2x+1}$ và $f(0)=1$. Biết $f(x)$ có dạng: $f(x)=ax^2+bx+\ln|2x+1|+c$. Tìm tỉ lệ của $a:b:c$

A. $a:b:c=1:2:1$. **B.** $a:b:c=1:1:1$. **C.** $a:b:c=2:2:1$. **D.** $a:b:c=1:2:2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int\frac{4x^2+4x+3}{2x+1}dx=\int\left(2x+1+\frac{2}{2x+1}\right)dx=x^2+x+\ln|2x+1|+c$

Mà $f(0)=1\Rightarrow c=1\Rightarrow f(x)=x^2+x+\ln|2x+1|+1$.

Câu 5: Cho $I=\int_0^1\frac{x^3dx}{x^4+1}=\frac{1}{a}\ln b$ Chọn phát biểu đúng

A. $a:b=2:1$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a-b=1$. **D.** Tất cả đều đúng

Lời giải

Chọn A

$I=\int_0^1\frac{x^3dx}{x^4+1}$. Đặt: $u=x^4+1\Rightarrow du=4x^3dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1;x=1\Rightarrow u=2\Rightarrow I=\int_1^2\frac{du}{4u}=\frac{1}{4}\ln|u|\Big]_1^2=\frac{1}{4}\ln 2$.

Câu 6: Một học sinh làm tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ theo các bước

Bước 1: Đặt $x=\tan t$, suy ra

Bước 2: Đổi $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}, x=0\Rightarrow t=0$

Bước 3: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

Các bước làm trên, bước nào bị sai

A. Bước 3. **B.** Bước 2. **C.** Bước 1 **D.** Không bước nào sai

Lời giải

Chọn A

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

Câu 7: Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{2x+5}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{7}$. **D.** $-\frac{4}{35}$

Lời giải

Chọn B

Câu 8: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dt=\ln a+b$. Khi đó $S=a+2b$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** -1

Lời giải

Chọn C

$I=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{x+1-x}{x(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx-\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$

Suy ra $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\int_1^2 (x+1)^{-2}dx(x+1)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2+(x+1)^{-1}\Big|_1^2=\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$

$\Rightarrow a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{6}\Rightarrow S=1$.

Câu 9: Biết $\int_1^3 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx=a+\ln\frac{b}{2}$, với a,b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=10$

Lời giải

Chọn C

$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx=\int_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_3^5+\ln(x+1)\Big|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}$

Câu 10: Giá trị tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\ln 2$. **D.** $\ln\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C.

Câu 11: Biết $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x-5}{2x+2}dx=a+\ln b$ với a,b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=\frac{9}{30}$. **B.** $ab=\frac{9}{8}$. **C.** $ab=\frac{8}{81}$. **D.** $a+b=\frac{7}{24}$

Lời giải

Chọn C

Phương pháp: Chia tử cho mẫu.

Cách giải: $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x-5}{2x+2}dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x+1-6}{2x+2}dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x-3\ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}$

$=\frac{1}{2}-3\ln 2-\frac{1}{6}+3\ln\frac{4}{3}=\frac{1}{3}+3\ln\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\ln\frac{8}{27}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{8}{27}\end{cases}\Rightarrow ab=\frac{8}{81}$

Câu 12: Cho $\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5x+6}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5x+6}dx=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\Big|_{1}^{2}$

$=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4}=4\ln 2-\ln 3-\ln 5\Rightarrow a+b+c=2$

Câu 13: Cho $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)dx=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+b=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

Đồng nhất thức ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A+B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_{0}^{1}=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)$$

$=2\ln 2-\ln 3$

$\Rightarrow a=2,b=-1$

Vậy $a+2b=0$

Câu 14: Tích phân $I=\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a\ln b+c$, trong đó a; b; c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$$

$$=1-\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

$a=-1$, $b=2$, $c=1$ nên $a+b+c=2$.

Câu 15: Giả sử tích phân $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 2$ trong đó a, b, c là các số hữu tỉ. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $\frac{77}{36}$. **B.** $\frac{73}{36}$. **C.** $\frac{67}{36}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{x+1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{1}{(x+1)}\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\ln\left|x+1\right|\Big|_1^2+\frac{1}{x+1}\Big|_1^2=-\frac{1}{6}+\ln 3-\ln 2.$$

Suy ra $a=-\frac{1}{6}$; $b=1$; $c=-1$.

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=\left(-\frac{1}{6}\right)^2+1^2+(-1)^2=\frac{73}{36}$.

Dạng 2. Tích phân vô tỉ

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$. **B.** $\int \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x}+C$. **C.** $\int \frac{dx}{x+1}=\ln|x|+C$. **D.** $\int 2^x dx=2^x+C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathrm{x}}}=2\int \frac{\mathrm{dx}}{2\sqrt{\mathrm{x}}}=2\sqrt{\mathrm{x}}+\mathrm{C}$ nên A đúng.

Câu 2: $\int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ bằng:

A. $-\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C$. **B.** $\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}+C$.

C. $-\left(x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}+C$. **D.** $\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C$

Lời giải

Chọn A

$t=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow dt=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx; x^2=1-t^2$

$\int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int -3\left(1-t^2\right)dt=\int \left(3t^3-3\right)dt=t^3-3t+C$

$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3-3\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2-3\right)=-\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x)=\int x\sqrt{x^2+1}dx$. Biết $F(0)=\frac{4}{3}$, khi đó $F\left(2\sqrt{2}\right)$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{85}{4}$. **C.** 19. **D.** 10

Lời giải

Chọn D

$\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1}d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}\Big|_0^{2\sqrt{2}}=\frac{26}{3}$.

$\Leftrightarrow F\left(2\sqrt{2}\right)-F(0)=\frac{26}{3} \Leftrightarrow F\left(2\sqrt{2}\right)=10$

Câu 4: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\sqrt{4+x^3}$ là

A. $2\sqrt{x^3+4}+C$. **B.** $\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$. **C.** $2\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$. **D.** $\frac{1}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$

Lời giải

Chọn B

$\int x^2\sqrt{4+x^3}dx=\frac{1}{3}\int \sqrt{4+x^3}.d\left(x^3+4\right)=\frac{1}{3}\frac{\left(4+x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$.

Câu 5: Tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ ta được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị $S=a^2+ab+3b^2$ là

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx,\begin{cases}x=1\to t=2\\x=5\to t=4\end{cases}$

Suy ra

$$I=2\int_2^4\frac{dt}{t^2-1}=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^4$$

$$=\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}=2\ln 3-\ln 5\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=5$$

Câu 6: Cho $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=a+b\sqrt{2}$, với a,b là các số hữu tỉ. Khi đó giá trị của a là

A. $-\frac{26}{27}$. **B.** $\frac{26}{27}$. **C.** $-\frac{27}{26}$. **D.** $-\frac{25}{27}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{x\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)}{9x^2-9x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3x^2-x\sqrt{9x^2-1}\right)dx$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{1}3x^2dx-\frac{1}{18}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\sqrt{9x^2-1}d\left(9x^2-1\right)=\left(x^3-\frac{1}{18}.\frac{2}{3}\sqrt{\left(9x^2-1\right)^3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{26}{27}-\frac{16}{27}\sqrt{2}$$

Suy ra $a=\frac{26}{27};b=\frac{-16}{27}$.

Câu 7: Tích phân $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}dx$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt{3x+1}=t\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}\Rightarrow\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\int_1^2\frac{1}{t}.\frac{2t}{3}dt\int_1^2\frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

Câu 8: Cho $I=\frac{1}{2}\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\left(x^2-1\right)dx$. **B.** $I=\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$.

C. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$

Lời giải

Chọn B

$u=\sqrt{2x+1} \Rightarrow u\,du=x\,dx$ Đổi cận ta có: $\begin{matrix} u=1 \text{ khi } x=0 \\ u=3 \text{ khi } x=4 \end{matrix}$

$$I=\int_1^3 u^2\frac{\left(u^2-1\right)}{2}du=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3.$$

Câu 9: Cho tích phân $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\frac{m}{n}$, với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 91

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2} \Leftrightarrow t^3=1+x^2 \Leftrightarrow 2xdx=3t^2dt \Leftrightarrow xdx=\frac{3t^2}{2}dt$ và $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{7} \Rightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}}.xdx=\int_1^2\frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}dt=\frac{3}{2}\int_1^2\left(t^4-t\right)dt=\frac{141}{20}$

Vậy $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\frac{m}{n}\Rightarrow\begin{cases} m=141 \\ n=20 \end{cases}\rightarrow m=7n=141-7.20=1.$

Câu 10: Tích phân $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=\sqrt{2x+1}\Big|_0^4=2.$

Câu 11: Biết $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx=\frac{a+b\sqrt{3}}{9}$, với a,b là các số thực. Tính tổng $T=a+b.$

A. $T=-10..$ **B.** $T=-4..$ **C.** $T=15..$ **D.** $T=8.$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp giải: Nhân liên hợp với biểu thức mẫu số, đưa về tính tích phân cơ bản

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx=\int_0^1\frac{x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}dx$

$$\int_0^1\frac{x\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{3x+1-2x-1}=\int_0^1\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}\right)dx.$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{(3x+1)^3}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x+1)^3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{9}\left[2\sqrt{(3x+1)^3}-3\sqrt{(2x+1)^3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{9}\left(16-9\sqrt{3}+1\right)=\frac{17-9\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\begin{cases}a=17\\b=-9\end{cases}.$$

Vậy $T=a+b=17-8=8.$.

Câu 12: Biết $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}-b\right)$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a+b$

A. $T=7$. **B.** $T=10$. **C.** $T=6$. **D.** $T=8$

Lời giải

Chọn B

Nhân liên hợp, bỏ mẫu số đưa về tìm nguyên hàm của hàm chứa căn thức cơ bản

Ta có

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int_0^1\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^1\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

mặt khác $\frac{2}{3}\left(\sqrt{a}-b\right)=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-2\right)\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=2\end{cases}$

Vậy $T=a+b=8+2=10$.

Câu 13: Biết $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{5x^2+4}}=\frac{a}{b}$ với a,b. là các số nguyên dương và phân thức $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính giá trị của biểu $T=a^2+b^2$

A. $T=13$. **B.** $T=26$. **C.** $T=29$. **D.** $T=34$

Lời giải

Chọn B

Dùng máy tính bỏ túi tính $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{5x^2+4}}=\frac{1}{5}\Rightarrow T=1^2+5^2=26$.

Câu 14: Tích phân $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=\sqrt{2x+1}\Big|_0^4=2$

Câu 15: Biết $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{a\sqrt{2}-1}{b}$ với a, b là số tự nhiên. Giá trị a^2-b^2 là

A. -5. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

$\Rightarrow a=2,\ b=3$. Vậy $a^2-b^2=-5$.

Cách 2: Đặt $\sqrt{x^2+1}=t\Rightarrow x^2+1=t^2\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$.

Ta có $x=0\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\Rightarrow a=2,\ b=3$.

Cách 3: dùng MTCT

Bước 1: Tính tích phân rồi lưu lại là A.

Bước 2: Rút $b=\frac{a\sqrt{2}-1}{\mathrm{A}}$.

Bước 3: MODE 7 nhập $f(x)=\frac{x\sqrt{2}-1}{\mathrm{A}}$ với Start: 0, End: 18, Step: 1.

Được cặp số $x=2,\ f(x)=3$ thỏa mãn. Suy ra $a=2, b=3$.

Dạng 3: Tích Phân Lượng Giác

Câu 1: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$

A. $I=\frac{\pi+2}{8}$. **B.** $I=\frac{\pi+2}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Biểu thức trong tích phân là hàm lượng giác bậc chẵn, ta thường sử dụng công thức biến đổi lượng giác hạ bậc rồi mới tính tích phân.

Cách giải: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8}$.

Câu 2: Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}dx=a\pi+b$ với $a,b\in Q$. Giá tri của $P=1-a^3-b^2$ là

A. $P=9$. **B.** $P=-29$. **C.** $P=-7$. **D.** $P=-27$.

Lời giải

Chọn C

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\cos^2 x-2+1}{1-\cos x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\frac{1}{1-\cos x}-2(1+\cos x)\right]dx$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}-2(x+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}-\pi+2=-\cot\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\pi+2=3-\pi.$$

Do đó $a=-1;b=3\Rightarrow P=1-(-1)^3-3^2=-7$..

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin 2x$ là

A. $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}cos2x+C$. **C.** $x^2+\frac{1}{2}cos2x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}cos2x+C$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int(x-sin2x)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}cos2x+C$.

Câu 4: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn D

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{1}{2}cos2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Câu 5: Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=a+b\sqrt{3}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $T=2a+6b$.

A. $T=3$.. **B.** $T=-1$.. **C.** $T=-4$.. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow T=-1$..

Câu 6: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$.

A. $I=1-\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\ln 2$. **D.** $I=\frac{\pi}{12}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

Câu 7: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)dx$ được viết ở dạng $\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=5$. **C.** $2a-3b=2$. **D.** $a-b=2$

Lời giải

Chọn B

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)dx=\left(x^2-x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}-1=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-1$

$\Rightarrow a=4;b=2\Rightarrow a+b=6\Rightarrow$ khẳng định **B** sai.

Câu 8: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$

A. $I=-1$. **B.** $I=1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$

Lời giải

Chọn C

Phương pháp: $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

Cách giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Câu 9: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x)dx=7$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx$

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x\Leftrightarrow dt=\cos xdx$ $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx=7$.

Dạng 4: Tích Phân Từng Phần

Câu 1: Giá trị của $\int_0^1 x.e^{2x}dx$ bằng:

A. $\frac{e^2+1}{2}$ **B.** $\frac{e^2-1}{2}$ **C.** $\frac{e^2+1}{4}$ **D.** $\frac{e^2-1}{4}$

Lời giải:

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$. Do đó $I=\dfrac{xe^{2x}}{2}\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{e^{2x}}{2}dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^{2x}}{4}\Big|_0^1=\dfrac{e^2+1}{4}$

Câu 2: Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ bằng:

A. $\dfrac{\pi}{2}+1$ **B.** $\dfrac{\pi}{2}-1$ **C.** $\dfrac{\pi+1}{2}$ **D.** $\dfrac{\pi-1}{2}$

Lời giải:

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\sin x \end{cases}$. Do đó $I=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\dfrac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}-1$

Câu 3: Giá trị của $\int_1^2 \left(x^2-1\right)\ln x dx$ bằng:

A. $\dfrac{2\ln 2+6}{9}$ **B.** $\dfrac{6\ln 2+2}{9}$ **C.** $\dfrac{2\ln 2-6}{9}$ **D.** $\dfrac{6\ln 2-2}{9}$

Lời giải:

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\left(x^2-1\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{x^3-3x}{3} \end{cases}$.

Do đó $I=\dfrac{\left(x^3-3x\right)\ln x}{3}\Big|_1^2-\int_1^2\dfrac{x^2-3}{3}dx=\dfrac{2\ln 2}{3}-\left(\dfrac{x^3}{9}-x\right)\Big|_1^2=\dfrac{2\ln 2}{3}+\dfrac{2}{9}$

Câu 4: Biết $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-a+b.e^{-1}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $a+b=3$. **B.** $a+b=-3$. **C.** $a+b=6$. **D.** $a+b=-6$.

Lời giải

Chọn D

Đặt

$\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \int_1^e \dfrac{2\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=2\left(-\dfrac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^e+2\int_1^e\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=2\left(-\dfrac{1}{x}\ln x-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^e=2\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$

Sau khi nhân thêm 2 ta được $a=-2,b=-4\Rightarrow a+b=-6$

Câu 5: Giá trị của $\int_1^e \ln x dx$ bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=x \end{cases}$. Do đó $I=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx=e-x\Big|_1^e=1$

Câu 6: Tích phân $I=\int\limits_1^e\left(\frac{1}{x}+x\right)\ln x dx$ có giá trị là:

A. $I=\frac{e^2+1}{4}$ **B.** $I=\frac{e^2+3}{4}$ **C.** $I=\frac{e^2+5}{4}$ **D.** $I=\frac{e^2+7}{4}$

Lời giải:

Chọn C

Ta có:

$$I=\int\limits_1^e\left(\frac{1}{x}+x\right)\ln x dx=\int\limits_1^e\frac{1}{x}\ln x dx+\int\limits_1^e x\ln x dx=\int\limits_0^1 d\left(\ln x\right)+\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int\limits_1^e x dx=1+\frac{e^2}{2}-\left(\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+5}{4}.$$

Câu 7: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$. **B.** $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-2\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$. **D.** $I=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

Câu 8: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\sin x\end{cases}$.

$$I=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\left(x\sin x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Câu 9: Tính $I=\int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{2}\left(e^2-2\right)$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Câu 10: Cho biết tích phân $I=\int\limits_0^1(x+2)\ln(x+1)\mathrm{d}x=a\ln 2+\frac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a=b$. **B.** $a<b$. **C.** $a>b$. **D.** $a=b+3$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=(x+2)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}+2x\end{cases}$.

$I=\left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2+4x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+3x-3\ln(x+1)\right]\Big|_0^1=4\ln 2+\frac{-7}{4}$.

Suy ra $a=4$, $b=4$.

Vậy $a=b$.

Câu 11: Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a-8b$

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\tan x\end{cases}$. Ta có

$I=\frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=-\frac{1}{4}$

Do đó, $16a-8b=4$.

Câu 12: Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 3-c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=60$. **B.** $S=70$. **C.** $S=72$. **D.** $S=68$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$$I=\int_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{x^2\ln(2x+1)}{2}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{x^2}{2x+1}\mathrm{d}x$$

$$=8\ln 9-\int_0^4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x+1)}\right)\mathrm{d}x=16\ln 3-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^4=\frac{63}{4}\ln 3-3.$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}\ln 3-c=\frac{63}{4}\ln 3-3\Rightarrow\begin{cases}a=63\\b=4\\c=3\end{cases}\Rightarrow S=70.$$

Câu 13: Biết $\int_0^4 x\ln(x^2+9)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=8$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x^2+9)\\\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{(x^2+9)}\mathrm{d}x\\v=\dfrac{x^2+9}{2}\end{cases}$

Suy ra $\int_0^4 x\ln(x^2+9)\mathrm{d}x=\frac{x^2+9}{2}\ln(x^2+9)\Big|_0^4-\int_0^4\frac{x^2+9}{2}.\frac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x=25\ln 5-9\ln 3-8$.

Do đó $a=25$, $b=-9$, $c=-8$ nên $T=8$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1[(3x+1).f'(x)]dx=1\ \&\ 4f(1)-f(0)=2017$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=-2016$. **B.** $I=672$. **C.** $I=2016$. **D.** $I=-672$.

Hướng dẫn

Chọn B

Ta có $\int_0^1[(3x+1).f'(x)]dx=\int_0^1[(3x+1)]df(x)=f(x)(3x+1)\Big|_0^1-3\int_0^1 f(x)dx$

$$=4f(1)-f(0)-3\int_0^1 f(x)dx=2017-3\int_0^1 f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=672.$$

Câu 15: Cho $\int_0^1 f'(x)\cos x.dx=1$ và $f(1).\cos 1-f(0)=2018$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\sin x.dx$.

A. $I=2017$. **B.** $I=2019$. **C.** $I=-2019$. **D.** $I=-2017$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

+ Tính $\int_0^1 f'(x)\cos x.dx$ theo từng phần, đặt $\begin{cases}u=\cos x\\dv=f'(x)dx\end{cases}=>\begin{cases}du=\sin x.dx\\v=f(x)\end{cases}$ suy ra

$$1=\int_0^1 f'(x)\cos x.dx=\cos x.f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\sin x.dx$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\sin x.dx=f(1).\cos 1-f(0)-1=2017$$

Câu 16: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2F(1)-F(0)=1$ và $\int_0^1 F(x)dx=10$.

Tính $I=\int_0^1 (x+1)f(x)dx$.

A. $I=11$. **B.** $I=9$. **C.** $I=-9$. **D.** $I=-11$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ dv=f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=1 \\ v=F(x) \end{cases}$

Khi đó: $I=\int_0^1 (x+1)f(x)dx=(x+1).F(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)dx=2F(1)-F(0)-10=1-10=-9$

Câu 17: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ với $F(1)=1$, $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=F(x) \end{cases}$.

$I=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=2$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x^3 \Rightarrow \mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v=f(x) \end{cases} \Rightarrow I=\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=x^3 f(x)\Big|_0^1-3\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=f(1)-3.\frac{1}{3}=-1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$.

Khi đó, $I = x.\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 8 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra $I = 8 - \frac{1}{4}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 8 - 1 = 7$.

Dạng 5: Tích Phân Chưa Dấu Giá Trị Tuyệt Đối

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ $(a<b)$ và $f(x) \le 0$, $\forall x \in [a;b]$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $f(x) \le 0$, $\forall x \in [a;b]$ nên $|f(x)| = -f(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Vậy $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 2: Tích phân $I = 2\int_{-1}^2 |x|dx$ bằng

A. 5 **B.** 2 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn A

$$I = 2\int_{-1}^2 |x|dx = 2\int_{-1}^0 |x|dx + 2\int_0^2 |x|dx = 2\int_{-1}^0 -xdx + 2\int_0^2 xdx = 5$$

Câu 3: Tích phân $\int_0^4 |x-2|dx$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^4 |x-2|dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^4 (x-2)dx = 4$$

Câu 4: Tích phân $\int_{-1}^2 \frac{dx}{1+|1-x|}$ bằng

A. 2ln3 **B.** ln3 **C.** ln2 **D.** ln6

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_{-1}^2 \frac{1}{1+|1-x|}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2-x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx = -\ln(2-x)\Big|_{-1}^1 + \ln x\Big|_1^2 = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$

Câu 5: Vậy $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ .Tích phân $I = \int_{-1}^{2} |x^2 - x|dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{3}{2}$ **B.** $I = \frac{1}{6}$ **C.** $I = -\frac{3}{2}$ **D.** $I = -\frac{1}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\underbrace{x^2 - x}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Bảng xét dấu:

$$I = \int_{-1}^{2} |x^2 - x|dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 6: Tích phân $I = \int_{-1}^{1} |x^3 + x^2 - x - 1|dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4}{3}$ **B.** $I = \frac{1}{2}$ **C.** $I = -\frac{4}{3}$ **D.** $I = -\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\underbrace{x^3 + x^2 - x - 1}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Bảng xét dấu:

$$I = \int_{-1}^{1} |x^3 + x^2 - x - 1|dx = -\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1)dx = -\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Câu 7: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x = 4 + a\ln 2 + b\ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 9$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = -3$. **D.** $S = 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ khi } x \geq 2 \\ 2-x \text{ khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Do đó $I = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

$= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2\right)\mathrm{d}x + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$

$= (5\ln|x| - 2x)\Big|_1^2 + (2x - 3\ln|x|)\Big|_2^5 = 4 + 8\ln 2 - 3\ln 5$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 5$.

Câu 8: Tích phân $I = \int_{-1}^{2} (|x| - |x-1|)dx$ có giá trị bằng

A. $I = -2$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{2}\left(\left|x\right|-\left|x-1\right|\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(-1\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(1-2x\right)dx+\int\limits_{1}^{2}\left(1\right)dx=0$

Dạng 6: Tích Phân Hàm Hợp Hàm Ẩn

Câu 1: Biết $f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{9}f\left(x\right)\mathrm{d}x=9$. Khi đó giá trị của $\int\limits_{1}^{4}f\left(3x-3\right)\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 24. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I=\int\limits_{1}^{4}f\left(3x-3\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3x-3\Rightarrow\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0;\ x=4\Rightarrow t=9$.

Khi đó: $I=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{9}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.9=3$.

Câu 2: Cho $\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-1$. Khi đó $I=\int\limits_{0}^{1}f\left(4x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=\frac{1}{4}$ **B.** $I=-2$ **C.** $I=\frac{-1}{4}$ **D.** $I=\frac{-1}{2}$

Lời giải.

Chọn C

Cách 1: Đặt $t=4x\Rightarrow dt=4dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=4$. Khi đó: $I=\int\limits_{0}^{4}\frac{1}{4}f\left(t\right)dt=-\frac{1}{4}$.

Cách 2: Gọi $F\left(x\right)$ là 1 nguyên hàm của $f\left(x\right)$. Ta có: $\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow F\left(4\right)-F\left(0\right)=-1$

$I=\int\limits_{0}^{1}f\left(4x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}F\left(4x\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}\left[F\left(4\right)-F\left(0\right)\right]=-\frac{1}{4}$

Câu 3: Biết rằng hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và $\int\limits_{0}^{9}f(x)dx=9$. Tính $\int\limits_{0}^{3}f(3x)dx$.

A. $\int\limits_{0}^{3}f(3x)dx=9$ **B.** $\int\limits_{0}^{3}f(3x)dx=3$ **C.** $\int\limits_{0}^{3}f(3x)dx=-3$ **D.** $\int\limits_{0}^{3}f(3x)dx=-9$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt $3x=t\Rightarrow 3dx=dt$. Ta có $I=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{9}f(t)dt=\frac{1}{3}.9=3$

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=1$. Tính $\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx$.

A. $\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx=0$. **B.** $\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx=2$. **C.** $\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx=-1$. **D.** $\int\limits_{0}^{1}f\left(1-x\right)dx=1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=1-x \Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

Vậy $\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt=1$.

Câu 5: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x=a$, $(a\in\mathbb{R})$. Tích phân $I=\int_1^2 f(2x+1)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=\frac{1}{2}a+1$. **B.** $I=2a+1$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=\frac{1}{2}a$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=3$; $x=2\Rightarrow t=5$.

$\Rightarrow I=\int_3^5 \frac{1}{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a$.

Câu 6: Cho $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}.f(\sqrt{x})\mathrm{d}x$

A. $I=5$. **B.** $I=10$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=16\Rightarrow t=4$.

Khi đó $I=\int_1^4 \frac{1}{t}.f(t)2t\mathrm{d}t=2\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=2\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=10$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^9 f(x)dx=1, \int_0^3 f(x+6)dx=2$. Tính $\int_0^2 f(3x)dx$

A. $\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}$. **B.** $\int_0^2 f(3x)dx=-\frac{1}{3}$.

C. $\int_0^2 f(3x)dx=1$. **D.** $\int_0^2 f(3x)dx=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2=\int_0^3 f(x+6)dx=\int_0^3 f(x+6)d(x+6)=\int_6^9 f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^6 f(x)dx=\int_0^9 f(x)dx-\int_6^9 f(x)dx=1-2=-1$

Khi đó: $\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d(3x)=\frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx=-\frac{1}{3}$

Câu 8: Biết $\int_{-1}^{11} f(x)\mathrm{d}x=18$. Tính $I=\int_0^2 x\left(2+f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=7$. **C.** $I=8$ **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3x^2-1$, $\mathrm{d}t=6x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-1$, $x=2\Rightarrow t=11$

$$I=\int_0^2 x\left(2+f\left(3x^2-1\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 2x\mathrm{d}x+\int_0^2 xf\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x=4+\frac{1}{6}\int_{-1}^{11} f\left(t\right)\mathrm{d}t=4+\frac{1}{6}.18=7.$$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^2-x+1$. Tính $\int_1^2 f(x^2)dx$.

A. $\int_1^2 f(x^2)dx=-\frac{4}{3}$. **B.** $\int_1^2 f(x^2)dx=\frac{4}{3}$. **C.** $\int_1^2 f(x^2)dx=-\frac{2}{3}$. **D.** $\int_1^2 f(x^2)dx=\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^2-x+1\Rightarrow f(x)=x-1\Rightarrow f(x^2)=x^2-1$$

$$\int_1^2 f(x^2)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

Câu 10: Cho $\int_3^8 f\left(x+1\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $J=\int_0^1 f\left(5x+4\right)\mathrm{d}x$

A. $J=4$. **B.** $J=10$. **C.** $J=32$. **D.** $J=2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x+1$. Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=4$; $x=8\Rightarrow t=9$. Khi đó ta có $\int_4^9 f\left(t\right)\mathrm{d}t=10$.

Đặt $u=5x+4$. Đổi cận $x=0\Rightarrow u=4$; $x=1\Rightarrow u=9$. Khi đó ta có

$$J=\int_0^1 f\left(5x+4\right)\mathrm{d}x=\int_4^9 f\left(u\right)\mathrm{d}u=10.$$

BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN

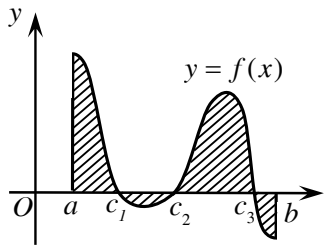
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Định lý 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=a,x=b$ là: $S=\int_a^b f(x)dx$

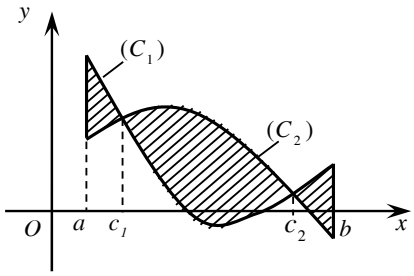
2. Bài toán liên quan

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases} \qquad \boxed{S=\int_a^b \left|f(x)\right|dx}$$

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y=f_1(x) \\ (C_2): y=f_2(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b \left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

Bài toán 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, $x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ được xác định: $S=\int_c^d |g(y)-h(y)|dy$

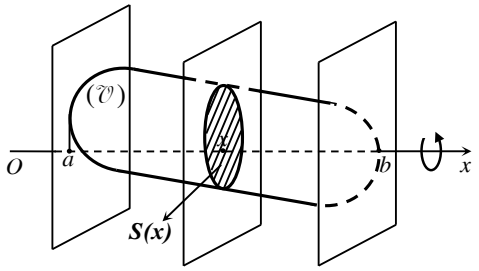
Bài toán 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $(C_1):f_1(x),(C_2):f_2(x)$ là: $S=\int_{x_1}^{x_n} |f(x)-g(x)|dx$.

Trong đó: x_1,x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $f(x)=g(x)$

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

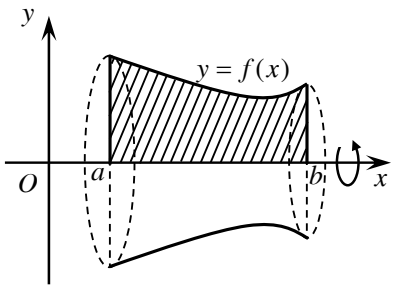
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

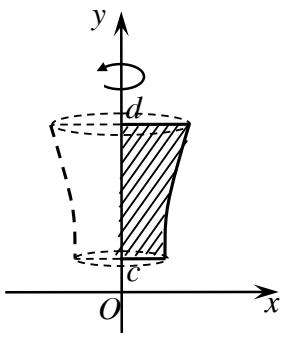
2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy}$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính Diện Tích Giới Hạn Bởi 1 Đồ Thị

Câu 1: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x \mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int_0^2 3^{2x} \mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int_0^2 3^x \mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^2 3^{2x} \mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ có diện tích là

$$S=\int_0^2 \left|3^x\right| \mathrm{d}x=\int_0^2 3^x \mathrm{d}x$$

Vậy $S=\int_0^2 3^x \mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\pi\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$ được tính theo công thức $S=\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, các đường thẳng $x=a$, $x=b$ và trục Ox là

A. $-\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Tổng quát

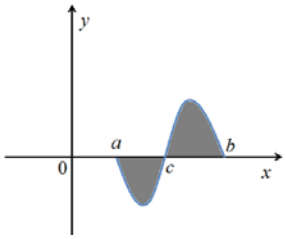
Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên D $([a;b]\subset D)$.

Diện tích giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int_a^b |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x$.

Phương trình trục Ox là $y=0$. Do đó áp dụng cho bài toán trên ta có diện tích cần tìm là:

$$S=\int_a^b |f(x)-0|\mathrm{d}x=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 4: Ký hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường $x=a,\ x=b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

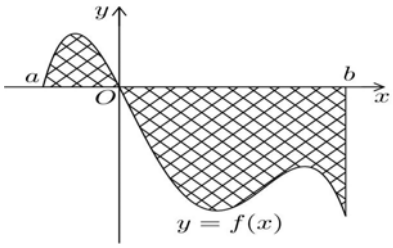
Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích hình phẳng được tính $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c |f(x)|\mathrm{d}x+\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Do $f(x)<0,\ \forall x\in(a;c)$; $f(x)>0,\ \forall x\in(c;b)$ nên ta có: $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn $\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x=m$, $\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=n$. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ bên bằng



A. $m.n$.

B. $m-n$.

C. $m+n$.

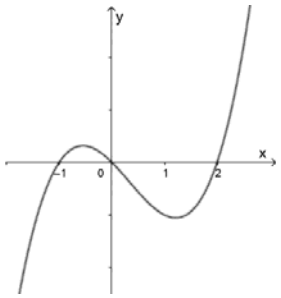
D. $n-m$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=m-n$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox là

A. $S=\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{2} -f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta có: $S=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 7: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Biết $S=a\sqrt{2}+b\ \ (a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $a+b$.

A. $a+b=\frac{1}{6}$.

B. $a+b=\frac{1}{2}$.

C. $a+b=\frac{1}{3}$.

D. $a+b=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x\sqrt{1+x^2}=0\ \Leftrightarrow x=0$.

Ta có $S=\int_{0}^{1}\left|x\sqrt{1+x^2}\right|\mathrm{d}x\ =\left|\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x\right|$.

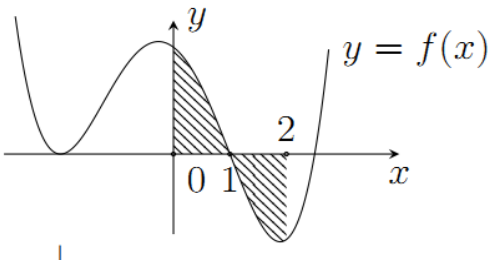
Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\ \Rightarrow t^2=1+x^2\ \Rightarrow t.\mathrm{d}t=x.\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó $S=\int_{1}^{\sqrt{2}} t^2.\mathrm{d}t\ =\frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{\sqrt{2}}\ =\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}$.

Suy ra $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ nên $a+b=\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên dưới.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

A. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

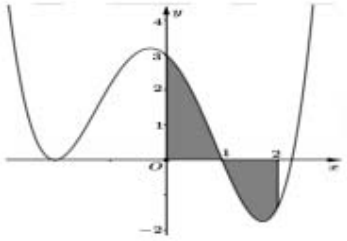
D. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là $S=\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là



A. $S=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích S của hình phẳng cần tìm là: $S=\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0, x\in[0;2]$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Do đó $S=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_1^2|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)\ge 0,\forall x\in[0;1]$ và $f(x)\le 0,\forall x\in[1;2]$.

Vậy $S=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-2x-8$ và trục hoành được xác định theo công thức nào dưới đây

A. $S=\int_{-4}^{2}\left(x^2-2x-8\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-2}^{4}\left(x^2-2x-8\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-4}^{2}\left(-x^2+2x+8\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-2}^{4}\left(8+2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

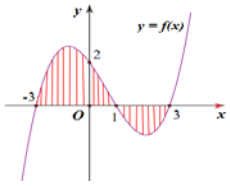
Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$. Do đó: $S=\int_{-2}^{4}\left|x^2-2x-8\right|\mathrm{d}x$.

Mặt khác, vì $x^2-2x-8\le 0,\forall x\in[-2;4]$ nên $S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{4}\left(8+2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 11: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox được tính bởi công thức

A. $S=\left|\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x\right|$.

B. $S=\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\ge 0$ với $x\in[-3;1]$, $f(x)\le 0$ với $x\in[1;3]$.

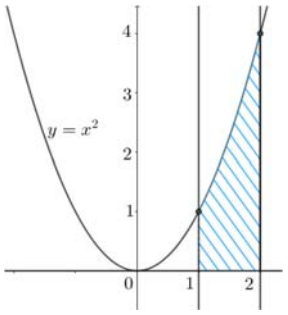
Do đó $S=\int_{-3}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2;y=0;x=1;x=2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

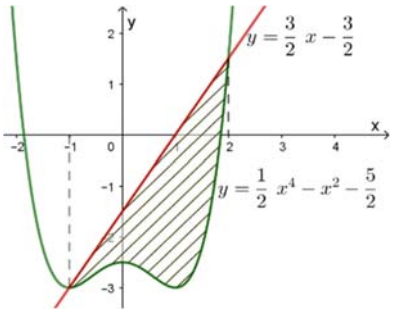
Chọn B



Ta có $S=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3}$.

Dạng 2: Tính Diện Tích Giới Hạn Bởi 2 Hai Đồ Thị

Câu 1: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào sau đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{3}{2}x-4\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^4+x^2+\frac{3}{2}x+1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{3}{2}x-1\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^4+x^2+\frac{3}{2}x+4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy phần diện tích hình phẳng cần tính là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số: $y=f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$; $y=g(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{5}{2}$ và hai đường thẳng $x=-1;x=2$.

Ngoài ra ta thấy đường $y=f(x)$ nằm trên đường $y=g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ nên ta có diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{5}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^4+x^2+\frac{3}{2}x+1\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=2x^2+x+1$ và $y=x^2+3$

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị:

$$2x^2+x+1=x^2+3 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số là:

$$\int_{-2}^{1}|2x^2+x+1-x^2-3|\,dx=\int_{-2}^{1}|x^2+x-2|\,dx=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x$; $y=\sqrt{x}$; $x=5$.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là

A. $V=\pi\int_0^5\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\left[\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^5\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right]$

C. $V=\pi\int_0^5\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^5\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

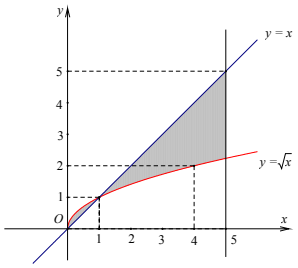
Chọn B

Bước 1: Tìm cận.

Xét phương trình: $x=\sqrt{x}\,(x\ge 0)\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

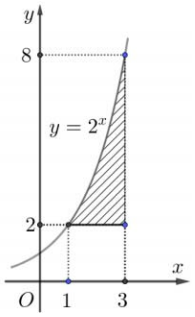
Bước 2: Vẽ hình.

Hình phẳng (H) gới hạn bởi các đường $y=x$; $y=\sqrt{x}$; $x=5$ như hình vẽ.



Bước 3: Từ hình vẽ ta thấy khi cho hình phẳng (H) quay xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay với thể tích là $V=\pi\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\pi\int_1^5\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\pi\left[\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^5\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right]$.

Câu 4: Diện tích hình mặt phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên bằng



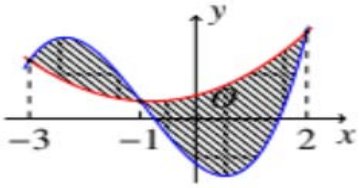
A. $\int_1^3 2^x \mathrm{d}x$. **B.** $\int_1^3 \left(2-2^x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_1^3 \left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_1^3 \left(2^x+2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy diện tích phần gạch sọc giới hạn bởi các đường $y=2^x, y=2, x=1, x=3$ và trên $[1;3]$ đồ thị hàm số $y=2^x$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=2$ nên diện tích phần gạch sọc bằng $\int_1^3 \left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ và hàm số bậc ba $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích phần gạch chéo được tính bằng công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int_{-3}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int_{-3}^{-1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-3}^{-1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

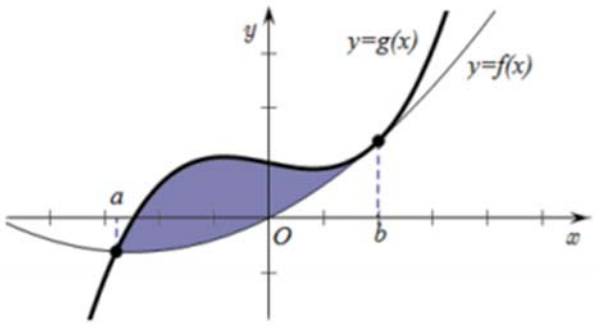
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là: $x=-3; x=-1; x=2$.

Mặt khác, trên khoảng $(-3;-1)$, đồ thị hàm $y=g(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=f(x)$; trên khoảng $(-1;2)$, đồ thị hàm $y=f(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=g(x)$ nên diện tích cần tìm là: $S=\int_{-3}^{2}\left|\left[g(x)-f(x)\right]\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị giao nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ a và b. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số này.



Diện tích của (H) được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. Quan sát hình vẽ ta thấy $g(x)\geq f(x)$ trên $[a,b]$ nên $S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x$.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=-x^2+4$ và $y=-x+2$?

A. $\frac{5}{7}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$-x^2+4=-x+2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=-x^2+4$ và $y=-x+2$ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+4\right)-\left(-x+2\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Câu 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+1$ và đường thẳng $y=x+3$.

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{13}{3}$.

C. $\frac{11}{3}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^2+1=x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{9}{2}$.

Câu 9: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y^2-2y+x=0$ và đường thẳng $x+y-2=0$. Tính diện tích S của hình (H).

A. $S=6$. **B.** $S=14$. **C.** $S=\frac{17}{6}$. **D.** $S=\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y^2-2y+x=0 \Leftrightarrow x=-y^2+2y$; $x+y-2=0 \Leftrightarrow x=-y+2$.

Phương trình tung độ giao điểm của đường cong $y^2-2y+x=0$ và đường thẳng $x+y-2=0$ là:

$-y^2+2y=-y+2 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right.$.

Diện tích S của hình (H) là $S=\int_{1}^{2}\left|\left(-y^2+2y\right)-\left(-y+2\right)\right|\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$.

Câu 10: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$; $y=6-x$ và trục hoành.

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{23}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}\,(C)$ với trục hoành là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (C)\cap Ox=O(0;0)$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y=6-x\,(\Delta)$ với trục hoành là: $(\Delta)\cap Ox=A(6;6)$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}(C)$ và đường thẳng $y=6-x(\Delta)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=6-x \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=\sqrt{x} \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (C)\cap\Delta=B(4;2)$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{0}^{4}\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x+\int_{4}^{6}\left|6-x\right|\mathrm{d}x=\frac{22}{3}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x$; $y=2x$ và các đường $x=1$; $x=-1$ được xác định bởi công thức:

A. $S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{0}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int_{-1}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int_{-1}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x$; $y=2x$ và các đường $x=1$; $x=-1$ là $S=\int_{-1}^{1}\left|\left(x^3-x\right)-\left(2x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x\right|\mathrm{d}x$.

Bảng xét dấu x^3-3x

x	-1		0		1
x^3-3x		+	0	–	

Do đó dựa vào bảng ta có: $S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(3x-x^3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-x^2$ và đường thẳng $y=-x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

Lời giải

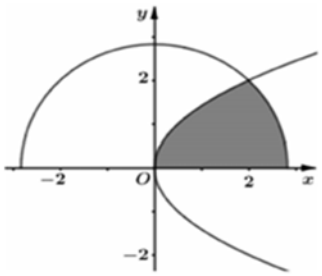
Chọn A

Ta có $-x^2=-x-2\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng là

$$S=\int_{-1}^{2}\left|-x^2+x+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}\right|=\left|\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}.$$

Câu 13: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{2x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{8-x^2}$ và trục hoành. Tính diện tích (H) tính bởi công thức nào



A. $\int_0^2 \left|\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2}\right|\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^{2\sqrt{2}} (\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2})\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^2 (\sqrt{2x}-\sqrt{8-x^2})\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

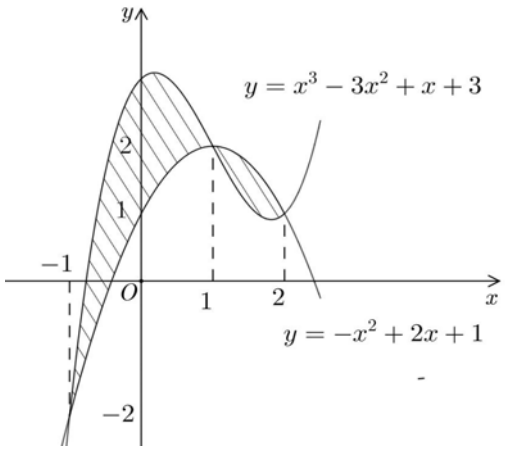
Gọi S là diện tích hình (H) cần tìm.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{2x}$ và cung tròn $y=\sqrt{8-x^2}$

$$\sqrt{2x}=\sqrt{8-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2\sqrt{2} \\ -x^2-2x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Khi đó: $S=\int_0^2 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Câu 14: Cho đồ thị hai hàm số $y=x^3-3x^2+x+3$ và $y=-x^2+2x+1$ như hình sau



Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

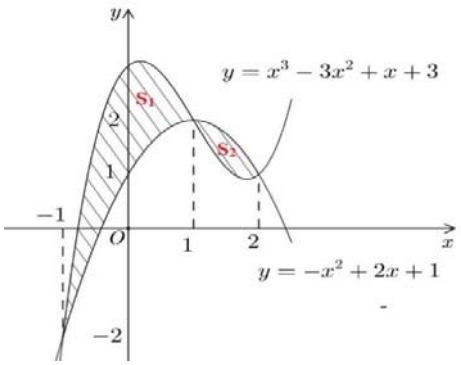
C. $\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_{-1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Chia phần diện tích S cần tính thành 2 phần S_1 và S_2 như hình vẽ sau



+ Phần S_1: phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+3$, $g(x)=-x^2+2x+1$ và các đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

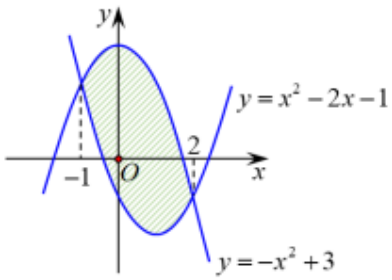
Dựa vào đồ thị ta có $S_1=\int\limits_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

+ Phần S_2: phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+3$, $g(x)=-x^2+2x+1$ và các đường thẳng $x=1$, $x=2$.

Dựa vào đồ thị ta có $S_2=\int\limits_{1}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $S=S_1+S_2=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 15: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

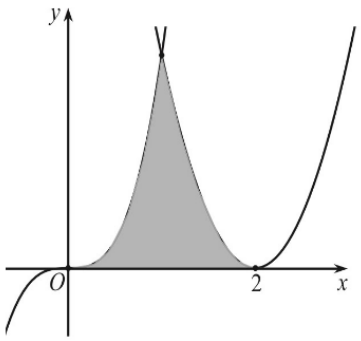
Lời giải

Chọn D

Gọi S là diện tích cần tìm

$\Rightarrow S=\int_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 16: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=(x-2)^2$, đường cong $y=x^3$ và trục hoành bằng



A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{73}{12}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm là: $(x-2)^2=x^3\Leftrightarrow x=1$.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases}y=x^3\\y=0\\x=0;\ x=1\end{cases}$; S_2 là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases}y=(x-2)^2\\y=0\\x=1;\ x=2\end{cases}$.

Dễ thấy: $x^3\geq 0$, $\forall x\in[0;1]$ và $(x-2)^2\geq 0$, $\forall x\in[1;2]$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trong hình là $S=S_1+S_2=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2(x-2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$.

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y=\frac{1}{2}x^2$ và $y=6-x^2$ bằng

A. $\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2}-6\right)dx$. **B.** $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-6\right)dx$. **C.** $-\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2}-6\right)dx$. **D.** $-\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-6\right)dx$

.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol $y=\frac{1}{2}x^2$ và $y=6-x^2$ là:

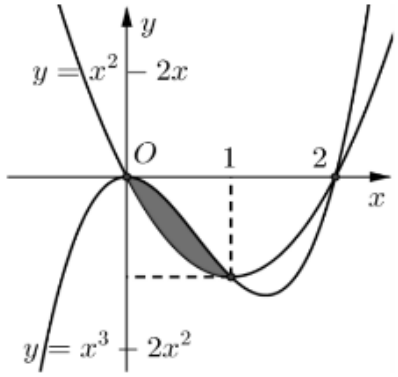
$\frac{1}{2}x^2=6-x^2\Leftrightarrow\frac{3x^2}{2}-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$.

Lại có $\frac{3x^2}{2}-6<0,\ \forall x\in(-2;2)$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S=\int\limits_{-2}^{2}\left|\frac{1}{2}x^2-\left(6-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\left|\frac{3x^2}{2}-6\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2}-6\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18: Diện tích phần tô đậm trong hình bên được tính theo công thức nào trong các công thức sau?



A. $\int\limits_{0}^{1}\left(-x^3+3x^2-2x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{0}^{2}\left(-x^3+3x^2-2x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{0}^{2}\left(x^3-3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

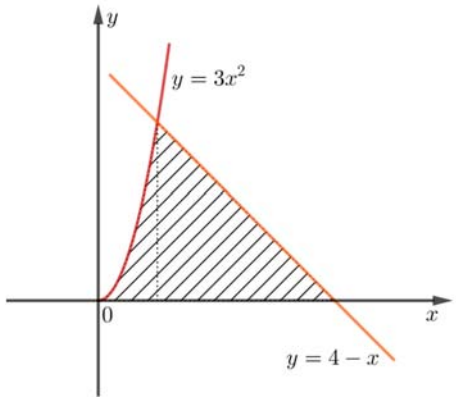
Ta có công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,x=b$; các hàm số $y=f(x),y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ là:

$S=\int\limits_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. Áp dụng công thức, diện tích phần tô đậm là:

$S=\int\limits_{0}^{1}\left|\left(x^2-2x\right)-\left(x^3-2x^2\right)\right|\mathrm{d}x$. Với $x\in[0,1]$ thì $x^3-2x^2>x^2-2x\Rightarrow x^2-2x-\left(x^3-2x^2\right)<0$ nên

$S=\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-2x^2-x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 19: Gọi (H) là phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x^2$, $y=4-x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?



A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$(H):\begin{cases} y=3x^2 \\ y=4-x \\ y=0 \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$4-x=0 \Leftrightarrow x=4$

$3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$$3x^2=4-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (t/m) \\ x=\frac{-4}{3}\ (Loai) \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng $S_{(H)}=\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x+\int_1^4(4-x)\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4=\frac{11}{2}$.

Câu 20: Diện tích miền phẳng giới hạn bởi parabol $y=\frac{x^2}{2}$ và đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thuộc khoảng nào sau đây.

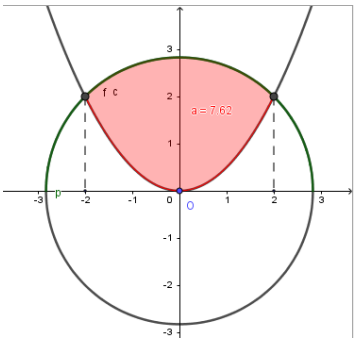
A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $2\sqrt{2}$ là : $x^2+y^2=8$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường tròn : $x^2+\frac{x^4}{4}=8\Leftrightarrow x=\pm 2$.



Vậy diện tích hình phẳng là : $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx\approx 7,616518641$.

Câu 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x,\ y=1$ và đường thẳng $x=1$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

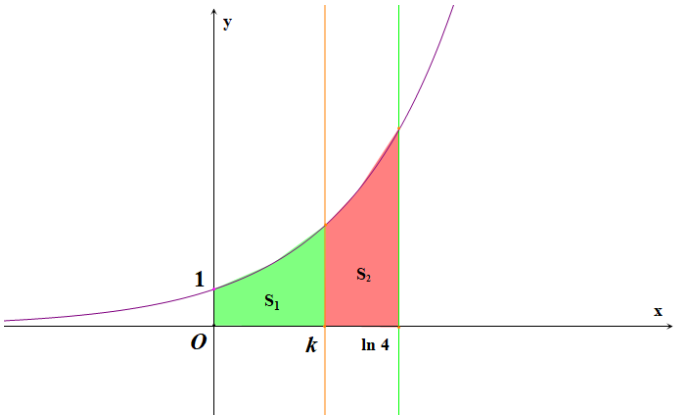
Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln x-1=0\Leftrightarrow x=e$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x,\ y=1$ và đường thẳng $x=1$ là: $S=\int\limits_{1}^{e}|\ln x-1|dx=\left|\int\limits_{1}^{e}(\ln x-1)dx\right|=\left|x(\ln x-1)\Big|_{1}^{e}-\int\limits_{1}^{e}dx\right|=\left|1-x\Big|_{1}^{e}\right|=|1-(e-1)|=|2-e|=e-2$

Câu 22: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$ là

$$S=\int_0^{\ln 4}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln 4}=\mathrm{e}^{\ln 4}-\mathrm{e}^0=4-1=3.$$

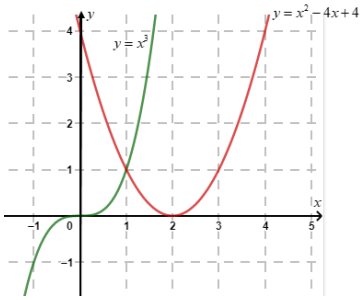
Ta có $S=S_1+S_2=S_1+\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1=\frac{2S}{3}=\frac{2.3}{3}=2$.

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=k$ nên

$$2=S_1=\int_0^k\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^k=\mathrm{e}^k-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^k-1.$$

Do đó $\mathrm{e}^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Câu 23: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ và trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2\left|x^3-\left(x^2-4x+4\right)\right|\mathrm{d}x$.

B. $-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x-\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 24: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y=2-x$ với $x\ge 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

$V=\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

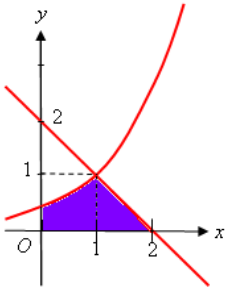
B. $V=\frac{\pi\left(5\mathrm{e}^2-3\right)}{6\mathrm{e}^2}$.

C. $V=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\pi$.

D. $V=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y=\mathrm{e}^{x-1}$ và đường thẳng $y=2-x$:

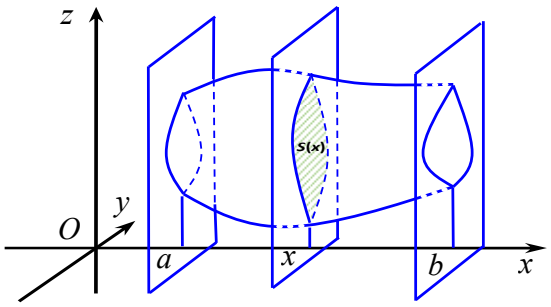
$\mathrm{e}^{x-1}=2-x\Leftrightarrow x=1$.

Đường thẳng $y=2-x$ cắt trục hoành tại $x=2$.

$$V=\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_1^2(2-x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}^{2x-2}\Big|_0^1+\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x+4\right)\Big|_1^2=\frac{\pi\left(5\mathrm{e}^2-1\right)}{6\mathrm{e}^2}$$

Dạng 3: Tính Thể Tích Vật Thể Tròn Xoay Dựa Vào Định Nghĩa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a\le x\le b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y=S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



A. $V=\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa ta có: $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

Câu 2: Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x

$(0 \le x \le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A. $V = \frac{4}{3}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = 4\sqrt{3}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta} = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\Im} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

.

Câu 3: Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $32+2\sqrt{15}$. **B.** $\frac{124\pi}{3}$. **C.** $\frac{124}{3}$. **D.** $\left(32+2\sqrt{15}\right)\pi$

.

Lời giải

Chọn C

Thể tích vật thể cần tìm là $V = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x = \int_1^5 t.t\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{124}{3}$.

Câu 4: Cho vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, biết rằng thiết diện của vật thể với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ là một đường tròn có bán kính $R = \sqrt{\cos x}$. Thể tích của vật thể đó là

A. 2π. **B.** π^2. **C.** π. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Diện tích của đường tròn là $S(x) = \pi r^2 = \pi\cos x$.

Vậy thể tích của vật thể là $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \pi$.

Câu 5: Cho phần vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$.. Cắt phần vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2),$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể (T).

A. $V=\frac{4}{3}.$ **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $V=4\sqrt{3}.$ **D.** $V=\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B

$$V=\int_0^2\frac{1}{2}.x.\sqrt{2-x}.\frac{\sqrt{3}}{2}.x.\sqrt{2-x}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2x^2(2-x)dx=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 6: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng x = 1 và x = 3, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là 3x và $\sqrt{3x^2-2}$

A. $V=32+2\sqrt{15}$ **B.** $V=\frac{124\pi}{3}$ **C.** $V=\frac{124}{3}$ **D.**

$V=(32+2\sqrt{15})\pi$

Lời giải

Chọn C

$$V=\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}dx=\frac{1}{3}\left[\left(3x^2-2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^3=\frac{124}{3}.$$

Câu 7: Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1;x=1$ và thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x(-1\le x\le 1)$ là một hình tròn có diện tích bằng 3π. Thể tích của vật thể là

A. $3\pi^2.$ **B.** $6\pi.$ **C.** 6. **D.** $2\pi.$

Lời giải

Chọn B

Có $V=\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}3\pi dx=6\pi.$

Dạng 4: Tính Thể Tích Vật Thể Tròn Xoay Khi Quay Hình Phẳng Giới Hạn Bởi 1 Đồ Thị

Câu 1: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{496\pi}{15}.$ **B.** $\frac{32\pi}{15}.$ **C.** $\frac{4\pi}{3}.$ **D.** $\frac{16\pi}{15}.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và trục hoành $-x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^2+2x\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 2: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox.

A. $\frac{160\pi}{3}$. **B.** $\frac{320\pi}{3}$. **C.** $\frac{160}{3}$. **D.** $\frac{320}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Elip cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(-5;0)$ và $(5;0)$.

Do đó: $V=\pi\int_{-5}^5\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=\frac{320\pi}{3}$.

Câu 3: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1;x=3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

* Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_1^3\left[x^2-4x+3\right]^2 dx=\pi\int_1^3\left[x^4-5x^3+19x^2-12x+9\right]dx=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành ta được khối nói tròn xoay có thể tích là:

A. $V=\pi\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|dx$ **B.** $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|dx$

C. $V=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|^2 dx$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2 dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y=-x^3+3x-2 \\ y=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$ là

$V=\pi\int_1^2\left(-x^2+3x-2\right)^2dx = V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx \Rightarrow$ Chọn đáp án D

Câu 5: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V=\pi\int_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_0^1\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $x=1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** π. **D.** $\sqrt{\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\int_0^1x\mathrm{d}x=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

Câu 7: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

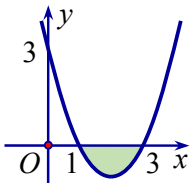
A. $V=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. **B.** $V=\frac{\pi\ln 2}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi^2}{4}$. **D.** $V=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\pi\ln\left|\cos x\right|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V=\pi\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

B. $V=\dfrac{1}{3}\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi^2\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

D. $V=\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x=1$, $x=3$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V=\pi\int\limits_{1}^{3}\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Câu 9: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V=\int\limits_{0}^{1}x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int\limits_{0}^{1}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_{0}^{1}x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int\limits_{0}^{1}x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ xác định bởi:

$V=\pi\int\limits_{a}^{b}f^2(x)\mathrm{d}x$.

Vậy, $V=\pi\int\limits_{0}^{1}x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 10: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$.

B. $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int_0^{\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $V=\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

B. $V=\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_1^2(x.\ln x)\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $(H):\begin{cases}y=x.\ln x\\ y=0\\ x=1;x=2\end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi $V=\pi\int_1^2(x.\ln x)^2\mathrm{d}x$.

Câu 12: Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{81\pi}{10}$.

B. $\frac{85\pi}{10}$.

C. $\frac{41\pi}{7}$.

D. $\frac{8\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^3\left(3x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx=\pi\left(3x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3=\frac{81\pi}{10}.$$

Câu 13: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành có thể tích là:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 14: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $\mathrm{y}=\dfrac{1}{\mathrm{x}}$, $\mathrm{y}=0$, $\mathrm{x}=1$, $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, $(\mathrm{a}>1)$. Tìm a để V = 2.

A. $\mathrm{a}=\dfrac{\pi}{\pi-2}$. **B.** $\mathrm{a}=\dfrac{\pi}{\pi+2}$. **C.** $\mathrm{a}=\dfrac{\pi+2}{\pi}$. **D.** $\mathrm{a}=\dfrac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn A

$$V=\pi\int_1^a\frac{1}{x^2}dx=\pi(-\frac{1}{x})\Big|_1^a=-\frac{\pi}{a}+\pi=2\Rightarrow a=\frac{\pi}{\pi-2}$$

Câu 15: Kí hiệu là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$. Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình xung quanh trục Ox là.

A. $V=\pi$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=\pi\sqrt{3}$ **D.** $V=\pi\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos x}-0\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\pi(\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\pi.$$

Câu 16: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550. **B.** 400. **C.** 670. **D.** 335.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Do elip nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên thể tích V cần tính bằng 4 lần thể tích hình sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}, y=0$ và các đường thẳng $x=0, x=5$ quay xung quanh Ox.

Ta có $V=4\pi\int_0^5\left(\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}\right)^2 dx=\frac{640\pi}{3}\approx 670,2$.

Câu 17: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox là $V=\frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng

A. 11. **B.** 17. **C.** 31. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ta có $V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2 \mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15} \Rightarrow a=16,\ b=15$.

Vậy $a+b=31$.

Dạng 5: Ứng Dụng Tích Phân Trong Vật Lý

Câu 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Chọn D

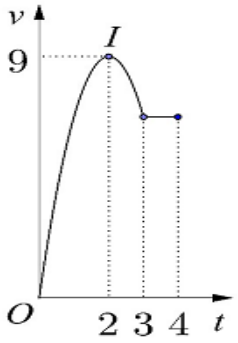
Xét phương trình $-5t+10=0 \Leftrightarrow t=2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s=\int_0^2\left(-5t+10\right)dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10m.$$

Câu 2: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục

tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=26,5$ **B.** $s=24$ **C.** $s=28,5$ **D.** $s=27$

Lời giải

Chọn C

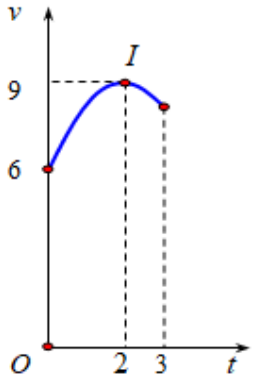
Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y=\dfrac{-9}{4}x^2+9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\dfrac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S=\int_0^3\left(\dfrac{-9}{4}x^2+9x\right)\mathrm{d}x+\int_3^4\dfrac{27}{4}\mathrm{d}x=27\ \ (km)$.

Câu 3: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\mathrm{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\mathrm{h})$có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 26,75\left(\text{km}\right)$ **B.** $s = 25,25\left(\text{km}\right)$ **C.** $s = 24,25\left(\text{km}\right)$ **D.** $s = 24,75\left(\text{km}\right)$

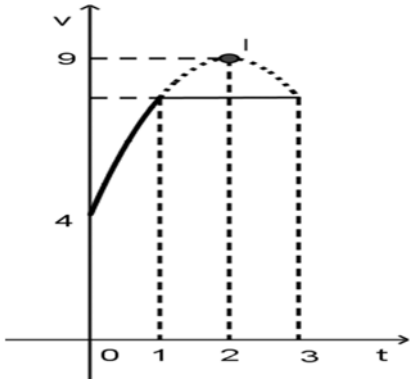
Lời giải

Chọn D

Tìm được phương trình của vận tốc là $v\left(t\right) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$

Vậy $S = \int_0^3 (-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6)dt = 24,75$

Câu 4: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó.



A. $s = 15,50(km)$ **B.** $s = 23,25(km)$ **C.** $s = 13,83(km)$ **D.** $s = 21,58(km)$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:

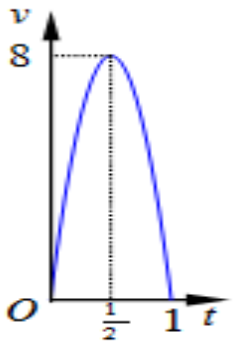
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s=\int_0^1\left(-\frac{5}{4}t^2+5t+4\right)dt+\int_1^3\frac{31}{4}dt=\frac{259}{12}\approx 21{,}583$$

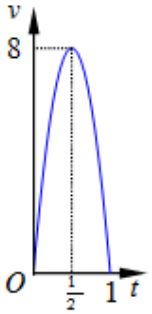
Câu 5: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s=4$ **B.** $s=2{,}3$ **C.** $s=4{,}5$ **D.** $s=5{,}3$

Lời giải

Chọn C



Gọi parabol là $(P): y=ax^2+bx+c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Suy ra $\begin{cases}c=0\\a+b+c=0\\\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-32\\b=32\\c=0\end{cases}$.

Vậy $(P): y=-32x^2+32x$. Quảng đường người đó đi được là

$s=\int\limits_0^{\frac{3}{4}}\left(-32x^2+32x\right)\mathrm{d}x=4,5$

Câu 6: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\mathrm{m/s^2})$. Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25\,(\mathrm{m/s})$. **B.** $9\,(\mathrm{m/s})$. **C.** $42\,(\mathrm{m/s})$. **D.** $15\,(\mathrm{m/s})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v_B(t)=\int a.\mathrm{dt}=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$S_A=\int\limits_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\mathrm{dt}=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}$.

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là : $S_B=\int\limits_0^{15}at.\mathrm{dt}=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}$.

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\frac{5}{3}.15=25\,(\mathrm{m/s})$.

Câu 7: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$. Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25\,(m/s)$ **B.** $36\,(m/s)$ **C.** $30\,(m/s)$ **D.** $21\,(m/s)$

Lời giải

Chọn C

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B\left(t\right)=\int a\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B\left(0\right)=0$ nên $v_B\left(t\right)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau.

Do đó: $\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{15}at\mathrm{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B\left(t\right)=2.15=30\left(m/s\right)$.

CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

BÀI 1. SỐ PHỨC

1. Số i

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$. Với $-1=i^2$ **với** i là đơn vị ảo

2. Định nghĩa số phức: Số phức là số có dạng $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, i là đơn vị ảo, tức là $i^2=-1$

a gọi là phần thực của z

b gọi là phần ảo của z

Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$

3. Số phức bằng nhau

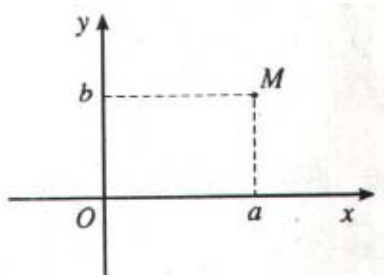
Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau

$z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i$

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

4. Biểu diễn hình học số phức

Điểm $M(a,b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$



5. Mô đun của số phức

Cho số phức $z=a+bi$. Khi đó đại lượng $\sqrt{a^2+b^2}$ gọi là môđun của z. Kí hiệu $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

6. Số phức lien hợp

Cho số phức $z=a+bi$. Khi đó số phức $\overline{z}=a-bi$ gọi là số phức liên hợp của z.

BÀI 2. CỘNG, TRÙ, NHÂN SỐ PHỨC

1. Phép cộng và phép trừ

Cho $z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

2. Phép nhân

$z_1.z_2=(a_1+b_1i).(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$

BÀI 3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1. Tổng và tích của hai số phức liên hiệp

Cho $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Lúc đó $\overline{z}=a-bi,(a,b\in\mathbb{R})$

$z+\overline{z}=2a,\ z.\overline{z}=a^2+b^2$

2. Phép chia số phức

Cho $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$. Khi đó

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Dạng 1. Phần Thực – Phần Ảo & Các Phép Toán

Câu 1: Phần thực và phần ảo của các số phức $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$ là:

A. 1 và 1 **B.** 1 và 2 **C.** 2 và 1 **D.** 2 và 3

Lời giải.

Chọn A

$(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i) = (4 + 2 - 5) + (-1 + 3 - 1)i = 1 + i$

Câu 2: Phần thực và phần ảo của các số phức $(2 - 3i) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}i\right)$ là:

A. $\frac{8}{3}$ và $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{12}{3}$ và $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{4}{3}$ và $-\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$ và $\frac{9}{2}$

Lời giải.

Chọn C

$(2 - 3i) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}i\right) = \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(-3 + \frac{5}{4}\right)i = \frac{4}{3} - \frac{7}{4}i$

Câu 3: Phần thực và phần ảo của các số phức $(2 - 3i)(3 + i)$ là:

A. -1 và 2 **B.** 9 và -7 **C.** 2 và 3 **D.** 4 và -1

Lời giải.

Chọn B

$(2 - 3i)(3 + i) = 6 + 2i - 9i - 3i^2 = (6 + 3) + (2 - 9)i = 9 - 7i$

Câu 4: Phần thực và phần ảo của các số phức $\frac{3}{1 + 2i}$ là:

A. $\frac{3}{5}$ và $-\frac{6}{5}$ **B.** $\frac{1}{5}$ và $-\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{7}{5}$ và $\frac{6}{5}$ **D.** $\frac{1}{2}$ và 3

Lời giải.

Chọn A

$\frac{3}{1 + 2\mathrm{i}} = \frac{3(1 - 2\mathrm{i})}{1 - 4\mathrm{i}^2} = \frac{3 - 6\mathrm{i}}{5} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}$

Câu 5: Phần thực và phần ảo của các số phức $\frac{1 + i}{1 - i}$ là:

A. 1 và 0 **B.** 2 và 0 **C.** 0 và 2 **D.** 0 và 1

Lời giải.

Chọn D

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$$

Câu 6: Phần thực và phần ảo của các số phức $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$ là:

A. $\sqrt{\frac{b}{a}}$ và $-\sqrt{a}$ **B.** $\sqrt{\frac{2a}{b}}$ và $-\sqrt{a}$ **C.** $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ và $\sqrt{a}$ **D.** $-\sqrt{\frac{2a}{b}}$ và $\sqrt{a}$

Lời giải.

Chọn A

$$\frac{\mathrm{a}+\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{b}}}{\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{a}}}=\frac{\left(\mathrm{a}+\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{b}}\right)\left(-\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{a}}\right)}{-\mathrm{i}^2\mathrm{a}}=\frac{-\mathrm{ia}\sqrt{\mathrm{a}}+\sqrt{\mathrm{ab}}}{\mathrm{a}}=\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{a}}$$

Câu 7: Kết quả của phép tính $(1+i)^2-(1-i)^2$ là:

A. 1-2i **B.** 2+i **C.** 4i **D.** 5i

Lời giải.

Chọn C

$$(1+i)^2-(1-i)^2=\left(1+2i+i^2\right)-\left(1-2i+i^2\right)=4i$$

Câu 8: Kết quả của phép tính $(2+i)^3-(3-i)^3$ là:

A. $-6+33i$ **B.** $5+27i$ **C.** $-7+24i$ **D.** $-16+37i$

Lời giải.

Chọn D

$$(2+i)^3-(3-i)^3=\left(8+12i+6i^2+i^3\right)-\left(27-27i+9i^2-i^3\right)$$

$$=2+11i-(18-26i)=-16+37i$$

Câu 9: Kết quả của phép tính $(2-i)^6$ là:

A. $-1-44i$ **B.** $-117-44i$ **C.** $-17+24i$ **D.** $-112-25i$

Lời giải.

Chọn B

$$(2-i)^6=\left[(2-i)^3\right]^2=(2-11i)^2=-117-44i$$

Câu 10: Kết quả của phép tính $(1-i)^{100}$ là:

A. -2^{25} **B.** -2^{50} **C.** 2^{50} **D.** 2^{25}

Lời giải.

Chọn B

$$(1-i)^{100}=\left[(1-i)^2\right]^{50}=(-2i)^{50}=-2^{50}$$

Chú ý: $i^{2n}=-1, n\in\mathbb{N}^*$

Câu 11: Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Phần thực và phần ảo của số phức $z^2-2z+4i$ là:

A. x^2-2y^2-2y và $3xy+2y+3$ **B.** x^2+2y^2-2x và $2xy-2y+4$

C. x^2-y^2+5x và $2xy+2x-1$ **D.** x^2+4y^2+2x và $2xy+y-4$

Lời giải.

Chọn B

$z^2-2z+4i=(x+yi)^2-2(x+yi)+4i=(x^2+2xyi-y^2)-2x-2yi+4i$

$=\left(x^2-y^2-2x\right)+(2xy-2y+4)i$

Câu 12: Phân tích a^2+1 tành nhân tử. **Chọn đáp án đúng:**

A. $-(a-2i)(a+2i)$ **B.** $(a-2i)(a+2i)$ **C.** $(a-i)(a+i)$ **D.** $-(a-i)(a+i)$

Lời giải.

Chọn C

$a^2+1=0\Leftrightarrow a^2-(i^2)=0\Leftrightarrow(a-i)(a+i)=0$

Câu 13: Phân tích $2a^2+3$ tành nhân tử. **Chọn đáp án đúng:**

A. $\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i\right)$ **B.** $\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i^2\right)$

C. $-\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}i^2\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i^2\right)$ **D.** $\left(\sqrt{2}a^2-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a^2+\sqrt{3}i\right)$

Lời giải.

Chọn A

$2a^2+3=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}a\right)^2-\left(\sqrt{3}i\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}i\right)=0$

Câu 14: Phân tích $4a^4+9b^2$ tành nhân tử. **Chọn đáp án đúng:**

A. $-\left(2a^2-9b^2i\right)\left(2a^2+9b^2i\right)$ **B.** $\left(2a^2-9b^2i\right)\left(2a^2+9b^2i\right)$

C. $-\left(2a^2-9bi\right)\left(2a^2+9bi\right)$ **D.** $\left(2a^2-9bi\right)\left(2a^2+9bi\right)$

Lời giải.

Chọn D

$4a^4+9b^2=\left(2a^2\right)^2-(9bi)^2=\left(2a^2-9bi\right)\left(2a^2+9bi\right)=0$

Câu 15: Phân tích a^4+16 tành nhân tử. **Chọn đáp án đúng:**

A. $\left(a^2-4i\right)\left(a^2+4i\right)$ **B.** $\left(a^2-16i\right)\left(a^2+16i\right)$

C. $-\left(a^2-4i\right)\left(a^2+4i\right)$ **D.** $\left(a^4-4i\right)\left(a^4+4i\right)$

Lời giải.

Chọn A

$a^4+16=\left(a^2\right)^2-\left(4i\right)^2=\left(a^2-4i\right)\left(a^2+4i\right)$

Câu 16: Nếu $z=x+yi$ và a là số thực thì z^2+a^2 bằng:

A. $(x-ai)(y+ai)$ **B.** $(z-ai)(z+ai)$ **C.** $(y-ai)(y+ai)$ **D.** $(x+y)(z-i)$

Lời giải.

Chọn B

$\Rightarrow$ Ta có $z^2+a^2=z^2-\left(ai\right)^2=\left(z-ai\right)\left(a+ai\right)$

Câu 17: Số phức liên hợp của $a+bi$ là

A. $-(a+bi)$ **B.** $a-bi$ **C.** $a-(-b)i$ **D.** $-a+bi$

Lời giải.

Chọn B

Số phức liên hiệp của $a+bi$ là $a+(-b)i=a-bi$

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i\ (1)$. Tìm môđun của số phức $\omega=z+1+i$

A. $\sqrt{5}$ **B.** 5 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 3

Lời giải.

Chọn B

Giả sử $z=a+bi$

$(1)\Leftrightarrow(2+i)(a+bi)+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$

$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai+bi^2+\frac{2(1+2i)(1-i)}{1+i^2}=7+8i$

$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai-bi+1-i+2i-2i^2=7+8i\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b+3=7\\2b+a+1=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$

Do đó $\omega=3+2i+1+i=4+3i\Rightarrow|\omega|=\sqrt{16+9}=5$.

Câu 19: Tìm phần ảo của số phức z, biết $\overline{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

A. $\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải.

Chọn C

Ta có: $\overline{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=5+\sqrt{2}i\Leftrightarrow z=5-\sqrt{2}i$

$\Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$

Dạng 2: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện

Câu 1: Tính môđun của số phức z biết: $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$ (1)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải.

Chọn C

$(1)\Leftrightarrow(2a+2bi-1))(1+i)+(a-bi+1)(1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow 2a+2ai+2bi+2bi^2-1-i+a-ai-bi+bi^2+1-i=2-2i$

$\Leftrightarrow 3a-3ba+ai+bi-2i=2-2i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b=2\\a+b-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{-1}{3}\end{cases}$ Suy ra $|z|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2: Tìm số phức z biết: $\overline{z}+3z=\left(3-2i\right)^2\left(2+i\right)(1)$

A. $z=-\frac{11}{2}-\frac{19}{2}i$ **B.** $z=\frac{11}{2}+\frac{19}{2}i$ **C.** $z=-\frac{11}{2}+\frac{19}{2}i$ **D.** $z=\frac{11}{2}-\frac{19}{2}i$

Lời giải.

Chọn D

Giả sử z=a+bi, ta có:

$(1)\Leftrightarrow a-bi+3a+3bi=\left(9-12i+4i^2\right)\left(2+i\right)=\left(5-12i\right).\left(2+i\right)$

$\Leftrightarrow 4a+2bi=10-24i+5i-12i^2=22-19i\Leftrightarrow a=\frac{11}{12};b=\frac{-19}{2}$. Vậy $z=\frac{11}{2}-\frac{19}{2}i$

Câu 3: Tìm phần ảo của z biết: $z+3\overline{z}=\left(2+i\right)^3\left(2-i\right)$ (1)

A. -5 **B.** -10 **C.** -15 **D.** 10

Lời giải.

Chọn B

Giả sử z=a+bi

$(1)\Leftrightarrow a+bi+3a-3bi=\left(8+12i+6i^2+i^3\right)\left(2-i\right)=\left(2+11i\right).\left(2-i\right)$

$\Leftrightarrow 4a-2bi=4-2i+22i-11i^2=20i+15\Leftrightarrow a=\frac{15}{4};b=-10$.

Vậy phần ảo của z bằng -10

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2\left(1+i\right)z+2i=0$. Tìm phần thực và phần ảo của $\frac{1}{z}$

A. $-\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}$

Lời giải.

Chọn B

Ta có: $z^2-2(1+i)z+2i=0\Leftrightarrow(z-1-i)^2=0\Leftrightarrow z=1+i\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

Vậy phần thực của $\frac{1}{z}$ là $\frac{1}{2}$ và phần ảo là $-\frac{1}{2}$

Câu 5: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo

A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải.

Chọn B

Đặt $z=a+bi$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Từ giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases}a^2-b^2=0\\a^2+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\b^2=1\end{cases}$

Vậy: $z_1=1+i, z_2=1-i, z_3=-1+i, z_4=-1-i$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

A. -2 và -5 **B.** -2 và 5 **C.** 2 và 5 **D.** 2 và -5.

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ (với $x,y\in\mathbb{R}$)

Ta có $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$

$\Leftrightarrow(2-3i)(x+yi)+(4+i)(x-yi)=8-6i$

$\Leftrightarrow(6x+4y)-(2x+2y)i=8-6i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+4y=8\\2x+2y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$

Vậy phần thực của z là -2 và phần ảo của z là 5

Dạng 3. Biểu diễn số phức

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $z-(1+i)\overline{z}=(1-2i)^2$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(10;3)$ **B.** $M(10;-3)$ **C.** $M(3;-10)$ **D.** $M(-3;-10)$

Lời giải.

Chọn A

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$a+bi-(1+i)(a-bi)=-3-4i \Leftrightarrow -b+(2b-a)i=-3-4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -b=-3 \\ 2b-a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow M(10;3)$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $z=(3+2i)(2-3i)+(1+i)^2-8$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(4;-3)$ **B.** $M(4;3)$ **C.** $M(-4;3)$ **D.** $M(-4;-3)$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z=6-9i+4i-6i^2+t^2+2i+1-8=4-3i \Rightarrow M(4;-3)$.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$. Điểm M biểu diễn số phức $w=2z+1$ trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(2;3)$ **B.** $M(-2;-3)$ **C.** $M(5;6)$ **D.** $M(-4;-6)$

Lời giải.

Chọn C

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$(1+i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)=2-6i \Leftrightarrow 4a-2b-2bi=2-6i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow w=5+6i \Rightarrow M(5;6)$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $z=(1+i)(3-2i)+\dfrac{1}{3+i}$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M\left(\dfrac{53}{10};-\dfrac{9}{10}\right)$ **B.** $M\left(-\dfrac{53}{10};-\dfrac{9}{10}\right)$ **C.** $M\left(\dfrac{53}{10};\dfrac{9}{10}\right)$ **D.** $M\left(\dfrac{-53}{10};\dfrac{9}{10}\right)$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $z=3-2i+3i-2i^2+\dfrac{3-i}{\sqrt{3^2+1}}=\dfrac{53}{10}+\dfrac{9}{10}i \Rightarrow M\left(\dfrac{53}{10};\dfrac{9}{10}\right)$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\overline{z}-1-3i=0$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(2;1)$ **B.** $M(2;-1)$ **C.** $M(-1;2)$ **D.** $M(-2;-1)$

Lời giải.

Chọn B

Ta có: $\overline{z}=\dfrac{1+3i}{1+i} \Leftrightarrow \overline{z}=2+i \Rightarrow z=2-i \Rightarrow M(2;-1)$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{1+i}=\bar{z}-\frac{1}{2}(3+i)$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(-4;1)$ **B.** $M(4;-1)$ **C.** $M(-4;-1)$ **D.** $M(4;1)$

Lời giải.

Chọn D

Gọi $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$\frac{a+bi}{1+i}=a-bi-\frac{1}{2}(3+i)\Leftrightarrow(a+b)+(-a+b)i=2a-3+(-2b-1)i\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}\Rightarrow M(4;1)$$

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z+(2-3i)\bar{z}=-2-2i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;-1)$ **B.** $M(1;1)$ **C.** $M(-1;1)$ **D.** $M(-1;-1)$

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$(1+2i)(x+yi)+(2-3i)(x-yi)=-2-2i\Leftrightarrow(3x-5y)+(-x-y)i=-2-2i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow M(1;1).$$

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z=4-3i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;-2)$ **B.** $M(1;2)$ **C.** $M(-1;2)$ **D.** $M(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z=\frac{4-3i}{2+i}=1-2i\Rightarrow M(1;-2)$

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $z+(1-i)\bar{z}=8-3i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(3;2)$ **B.** $M(-3;2)$ **C.** $M(3;-2)$ **D.** $M(-3;-2)$

Lời giải.

Chọn C

Gọi $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$a+bi+(1-i)(a-bi)=8-3i\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=8\\-a=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}\Rightarrow M(3;-2)$$

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $z=(1+i)(2-i)-8+i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(-5;2)$ **B.** $M(5;2)$ **C.** $M(-5;-2)$ **D.** $M(5;2)$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z = 2 - i + 2i - i^2 - 8 + i = -5 + 2i \Rightarrow M(-5;2)$

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(-2;-1)$ **B.** $M\left(\frac{21}{5};-\frac{2}{5}\right)$ **C.** $M(2;-1)$ **D.** $M\left(\frac{-21}{5};\frac{-2}{5}\right)$

Lời giải.

Chọn C

Ta có: $\bar{z} = \frac{1+3i}{1+i} = 2 + i \Rightarrow z = 2 - i \Rightarrow M(2;-1)$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $z = (1-2i)(4-3i) - 2 + 8i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(-4;3)$ **B.** $M(4;-3)$ **C.** $M(4;3)$ **D.** $M(-4;-3)$

Lời giải.

Chọn D

Ta có $z = 4 - 3i - 8i + 6i^2 - 2 + 8i = -4 - 3i \Rightarrow M(-4;-3)$

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 1 - 4i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(-4;3)$ **B.** $M(3;-4)$ **C.** $M(3;4)$ **D.** $M(-4;-3)$

Lời giải.

Chọn C

Gọi $z = a + bi;\ a,b \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$(1+i)(a+bi) + (2-i)(a-bi) = 1 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow M(3;4)$$

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2 - 6i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(2;3)$ **B.** $M(-2;3)$ **C.** $M(2;-3)$ **D.** $M(-2;-3)$

Lời giải.

Chọn A

Gọi $z = a + bi;\ a,b \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$(i+1)z + (3-i)\bar{z} = 2 - 6i \Leftrightarrow (1+i)(1+bi) + (3-i)(a-bi) = 2 - 6i \Leftrightarrow 4a - 2b - 2bi = 2 - 6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ -2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3i \Rightarrow M(2;3)$$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $2(z+1)=3\bar{z}+i(5-i)$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;-1)$ **B.** $M(1;1)$ **C.** $M(1;-1)$ **D.** $M(-1;-1)$

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$2(z+1)=3\bar{z}+i(5-i)\Leftrightarrow 2(a+bi+1)=3(a-bi)+1+5i\Leftrightarrow a-1+5(1-b)i=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow M(1;1)$$

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}+2z=3-2i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;2)$ **B.** $M(-1;2)$ **C.** $M(1;-2)$ **D.** $M(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn C

Gọi $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$(a-bi)+2(a+bi)=3-2i\Leftrightarrow 3a+bi=3-2i\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow M(1;-2)$$

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+(1-i)\bar{z}=-5+4i$. Điểm M biểu diễn số phức z trong hệ tọa độ Oxy có tọa độ là:

A. $M(1;2)$ **B.** $M(-1;2)$ **C.** $M(1;-2)$ **D.** $M(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn A

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết cho ta:

$$(2+3i).z+(1-i).\bar{z}=-5+4i\Leftrightarrow(2+3i).(x+yi)+(1-i).(x-yi)=-5+4i$$

$$\Leftrightarrow 3x-4y+(2x+y).i=-5+4i\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-5\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow z=1+2i\Rightarrow M(1;2).$$

Câu 18: Trên mặt phẳng phức, nếu A(1;2) thì điểm B đối xứng qua trục tung của A là điểm biểu diễn của số phức:

A. $2+i$ **B.** $2-i$ **C.** $-1+2i$ **D.** $-2-i$

Lời giải.

Chọn C

Câu 19: Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số $z=x+yi$ sao cho z^2 là số thực được biểu diễn bởi:

A. Đường có phương trình $xy=0$

B. Đường có phương trình $x=0$

C. Đường có phương trình $y=0$

D. Nửa mặt phẳng bờ là Ox.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$.

Như thế, z^2 là số thực khi và chỉ khi $xy=0$

Câu 20: Cho các số phức $z_1=1; z_2=2+2i, z_3=-1+3i$ được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là M,N,P, các điểm này lần lượt là trung điểm của ba cạnh tam giác EFH. Tọa độ trọng tâm G của tam giác EFH là:

A. $(2;3)$ **B.** $(3;2)$ **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$

Lời giải.

Chọn D

$M(1;0), N(2;2), P(-1;3)$ là điểm biểu diễn các số phức trên.

Hai tam giác EFH và MNP có 3 trung tuyến trùng nhau từng đôi một nên có cùng trọng tâm G.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G=\frac{1+2-1}{3}=\frac{2}{3} \\ y_G=\frac{0+2+3}{3}=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$$

Câu 21: Cho 2 số phức $z_1=-3+4i$ và $z_2=7+2i$ được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy là hai điểm M và N. Đường tròn đường kính MN có phương trình là:

A. $x(x+3)+y(y-4)=0$ **B.** $x(x-3)+y(y+4)=0$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2=26$ **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

Lời giải.

Chọn C

Trong mặt phẳng oxy 2 điểm $M(-3;4), N(7;2) \Rightarrow$ Tâm $I(2;3)$

Bán kính $R=\frac{MN}{2}=\frac{\sqrt{104}}{2}=\sqrt{26} \Rightarrow (C):(x-2)^2+(y-3)^2=26$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M là điểm biểu diễn của số phức $z=4+2i$. Phương trình đường trung trực của đoạn OM là:

A. $x+2y+5=0$ **B.** $2x+y-5=0$ **C.** $x-2y+5=0$ **D.** $2x+y+5=0$

Lời giải.

Chọn B

Gọi (Δ) là trung trực của đoạn OM

$\Rightarrow (\Delta)$ qua trung điểm I của $OM \Rightarrow I(2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{OM}=(4;2)$

$\Rightarrow (\Delta): 4(x-2)+2(y-1)=0 \leftrightarrow 4x+2y-10=0 \Leftrightarrow 2x+y-5=0$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm M,N,P là điểm biểu diễn của 3 số phức: $z_1=8+3i;z_2=1+4i;z_3=5+xi$. Với giá trị nào của x thì tam giác MNP vuông tại P?

A. 1 và 2 **B.** 0 và 7 **C.** -1 và -7 **D.** 3 và 5

Lời giải.

Chọn B

Ta có 3 điểm $M(8;3),N(1;4),P(5;x)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}=(-3;x-3);\overrightarrow{NP}=(4;x-4)$

Để ΔMNP vuông tại $P \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow -12+(x-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0;x=7$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác MNP có M, N,P là điểm biểu diễn của số phức $z_1=1+2i;z_2=-3+i;z_3=x+yi$ và O là trọng tâm. Tọa độ đỉnh P là:

A. $(3;-2)$ **B.** $(2;-3)$ **C.** $(2;1)$ **D.** $(1;-3)$

Lời giải.

Chọn B

$M(1;2),\ N(-3;1),\ P(x_p;y_p)$

O là trọng tâm tam giác MNP

$\Rightarrow \begin{cases} x_M+x_N+x_P=3x_O \\ y_M+y_N+y_P=3y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3+x_p=0 \\ 2+1+y_p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p=2 \\ y_p=-3 \end{cases}$. Vậy $P(2;-3)$

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm M, N. là điểm biểu diễn của số phức $z_1=m+2i;z_2=4-2i$ Nếu $MN=5$ thì tất cả các giá trị của m là:

A. 1 và 7 **B.** 7 **C.** -1 và -7 **D.** $(1;-3)$

Lời giải.

Chọn A

$M(m;2),\ N(4;-2)$

$MN=5 \Leftrightarrow MN^2=25$

$\Leftrightarrow (4-m)^2+16=25 \Leftrightarrow 16-8m+m^2=25$

$\Leftrightarrow m^2-8m+7=0 \Leftrightarrow m=1,\ m=7$

Dạng 4. Tập hợp

Câu 1: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó có tọa độ là:

A. $I(1;1)$ **B.** $I(0;1)$ **C.** $I(1;-1)$ **D.** $I(-1;0)$

Lời giải.

Chọn C

Gọi số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$|z-1+i|=1 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=1 \Rightarrow I(1;-1)$

Câu 2: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó là

A. $R=1$ **B.** $R=2$ **C.** $R=4$ **D.** $R=8$

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$|z-1+i|=1\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=1\Rightarrow R=1.$$

Câu 3: Cho các số phức z thỏa mãn $|zi-(2+i)|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là:

A. $\mathrm{I}\ (1;-2)$ **B.** $I(1;2)$ **C.** $I(-1;2)$ **D.** $I(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$|zi-(2+i)|=2\Leftrightarrow|-y-2+(x-1)i|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4\Rightarrow I(1;-2)$$

Câu 4: Cho các số phức z thỏa mãn $|-2+i(z-1)|=5$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là:

A. $\mathrm{I}\ (1;-2)$ **B.** $I(1;2)$ **C.** $I(-1;2)$ **D.** $I(-1;-2)$

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$|-2-i(x-1+yi)|=5\Leftrightarrow|-y-2+(x-1)i|=5\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=25\Rightarrow \mathrm{I}(1;-2)$$

Câu 5: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}+3|=4$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z trong mặt phẳng Oxy là:

A. Đường thẳng **B.** Đường tròn

C. E – líp **D.** Một điểm xác định.

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$|x+yi+x-yi+3|=4\Leftrightarrow\sqrt{(x+3)^2}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.$$

Câu 6: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-\overline{z}+1-i|=2$.

A. Đường thẳng **B.** Đường tròn **C.** E – líp **D.** Một điểm xác định.

Lời giải.

Chọn A

Gọi số phức $z = x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$\left|x + yi - \left(x + yi + 1 - i\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|1 + \left(2y - 1\right)i\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \left(2y - 1\right)^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Câu 7: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z + 8 - 4i\right| = 6$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là:

A. Đường thẳng **B.** Đường tròn **C.** E – líp **D.** Một điểm xác định.

Lời giải.

Chọn B

Gọi số phức $z = x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có:

$$\left|x + yi + 8 - 4i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|x + 8 + \left(y - 4\right)i\right| = 6 \Leftrightarrow \left(x + 8\right)^2 + \left(y - 4\right)^2 = 36$$

Câu 8: Cho các số phức z thỏa mãn phần thực thuộc đoạn $\left[-2;1\right]$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là:

A. Đường thẳng $x = -2$.

B. Đường thẳng $x = 1$

C. Phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 1$.

D. Phần mặt phẳng không giới hạn bởi hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 1$.

Lời giải.

Chọn C

Câu 9: Cho các số phức z thỏa mãn phần thực thuộc $\left[0;3\right]$ và phần ảo thuộc đoạn $\left[-2;4\right]$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn.

A. Phần mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 3$ và $x = 0$

B. Phần mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = -2$ và $y = 4$

C. Miền ngoài của hình chữ nhật có bốn đỉnh là giao của $x = 0, x = 3, y = -2, y = 4.$

D. Miền trong của hình chữ nhật có bốn đỉnh là giao của $x = 0, x = 3, y = -2, y = 4.$

Lời giải.

Chọn D

Gọi $z=x+yi,\ z,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$ nên suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình chữ nhật có bốn đỉnh là giao của $x=0, x=3, y=-2, y=4.$

Câu 10: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|\leqslant 2$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là:

A. Đường tròn $(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

B. Những điểm nằm trong đường tròn $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

C. Những điểm nằm trong và nằm trên đường tròn $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

D. Những điểm nằm ngoài đường tròn $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

Lời giải.

Chọn C

Gọi $z=x+yi,\ z,y\in\mathbb{R}$. Ta có $|a+bi-1+2i|\leqslant 2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\leqslant 4$

Câu 11: Cho các số phức z thỏa mãn $2\leqslant|z|\leqslant 3$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là:

A. Hình tròn. **B.** Hình quạt **C.** E – líp **D.** Hình vành khăn.

Lời giải.

Chọn D

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}.$. Từ giả thiết ta có:

$2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 3\Leftrightarrow 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O có bán kính lần lượt là 2 và 3.

Câu 12: Cho các số phức z thỏa mãn $|\overline{z}-1|+|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó là:

A. $I(-1;0)$ **B.** $I(1;0)$ **C.** $I(0;1)$ **D.** $I(0;-1)$

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có: $|x+yi-1|+|x-yi-1|=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow I(1;0)$

Câu 13: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{z-i}\right|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tâm I của đường tròn đó là:

A. $I\left(0;\frac{9}{8}\right)$ **B.** $I\left(0;-\frac{9}{8}\right)$ **C.** $I\left(\frac{9}{8};0\right)$ **D.** $I\left(-\frac{9}{8};0\right)$

Lời giải.

Chọn A

Gọi $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$\left|\frac{z}{z-i}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+(b-1)^2}}=3\Leftrightarrow a^2+b^2-\frac{9}{4}b+\frac{9}{8}=0\Leftrightarrow a^2+\left(b-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{9}{64}\Rightarrow \mathrm{I}\left(0;\frac{9}{8}\right).$$

Câu 14: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+4i|+|z-4i|=4$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là:

A. Đường cong $(C):\sqrt{x^2+(y+4)^2}=4$

B. Đường cong $(C):\sqrt{x^2+(y+4)^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=4$

C. Đường tròn $x^2+(y+4)^2=16$

D. Đường tròn $x^2+(y-4)^2=16.$

Lời giải.

Chọn B

Gọi $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$|x+yi+4i|+|x+yi-4i|=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y+4)^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=4$$

Câu 15: Quĩ tích các điểm M biểu diễn số phức $\omega=(1+i\sqrt{3})z+2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z-1|\le 2$ (1).

A. Là đường tròn có bán kính 16 **B.** Là hình tròn tâm I(1,2)

C. Là đường tâm I (1,2) **D.** Là hình tròn bán kính 4

Lời giải.

Chọn D

Giả sử $\omega=a+bi$

Ta có $a+bi=(1+i\sqrt{3})z+2\Leftrightarrow z=\frac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}}\Leftrightarrow z-1=\frac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}}$

$$(1)\Leftrightarrow\left|\frac{a-3+(b-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}}\right|\le 2\Leftrightarrow\frac{|a-3+(b-\sqrt{3})i|}{|1+i\sqrt{3}|}\le 2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(a-3)^2+(b-\sqrt{3})^2}}{2}\le 2$$

$$\Leftrightarrow(a-3)^2+(b-\sqrt{3})^2\le 16$$

Vậy quĩ tích các điểm M biểu diễn số phức là hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2 \le 16$ (kể cả những điểm nằm trên biên).

Câu 16: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo. Là một đường tròn tâm $I(a;b)$. Tính tổng a + b

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 3

Lời giải.

Chọn C

Giả sử $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng (Oxy).

Khi đó $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}=\dfrac{x+2+yi+3i}{x+(y-1)i}=\dfrac{[x+2+(y+3)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2}$

Từ số bằng: $x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i$; u là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ x^2+(y-1)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ x^2+(y-1)^2\neq 0 \end{cases}$$

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$, loại đi điểm $(0;1)$.

Câu 17: Trên mặt phẳng phức, tích phân hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z|\le 3$ là

A. Hình tròn tâm O, bán kính $R=3$

B. Hình tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{3}$

C. Hình tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=3$

D. Hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=3$

Lời giải.

Chọn A

Đặt $z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$, M(x,y) là điểm biểu diễn z trên mặt phẳng phức.

Giả thiết $|z|\le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\le 3 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 9$

Câu 18: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2i|\le 1$ là

A. Hình tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$

B. Hình tròn tâm $I(0;-2)$, bán kính $R=1$

C. Hình tròn tâm $I(-2;0)$, bán kính $R=1$

D. Đường tròn tâm $I(0;-2)$, bán kính $R=1$

Lời giải.

Chọn B

Đặt $z=x+iy\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức

$\Rightarrow z+2i=x+\left(y+2i\right)\Rightarrow\left|z+2i\right|=\sqrt{x^2+\left(y+2\right)^2}$

Theo giả thiết $\left|z+2i\right|\le1\Leftrightarrow x^2+\left(y+2\right)^2\le1$

Câu 19: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ là:

A. Đường tròn tâm $I\left(0;1\right)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I\left(\sqrt{3};0\right)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

C. Parabol $y=\frac{x^2}{4}$

D. Parabol $x=\frac{y^2}{4}$

Lời giải.

Chọn C

Đặt $z=x+iy\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức

Ta có: $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow2\left|x+\left(y-1\right)i\right|=2\left|\left(y+1\right)i\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}=\sqrt{\left(y+1\right)^2}\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1\Leftrightarrow x^2=4y$

Câu 20: Gọi $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Hãy xác định tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $\left|z-\overline{z}+1-i\right|=2$. **Chọn đáp án đúng:**

A. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng song song với trục hoành $y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

B. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường parabol $y=4x^2-4x-2$

C. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường tròn tâm $I\left(1;2\right),R=4$

D. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một hình tròn tâm $I\left(1;2\right),R=4$

Lời giải.

Chọn A

$\left|z-\overline{z}+1-i\right|=2\Leftrightarrow\left|x+yi-x+yi+1-i\right|=2\Leftrightarrow\left|1+\left(2y-1\right)i\right|=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2y-1)^2}=2 \Leftrightarrow 4y^2-4y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Kết luận: Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng song song với trục hoành $y=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Câu 21: Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Hãy xác định tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $|2i.z-1|=2|z+3|$. **Chọn đáp án đúng:**

A. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường tròn tâm $I(1;4), R=4$

B. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một hình tròn tâm $I(1;4), R=4$

C. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường parapol $y=6x^2+\dfrac{35}{4}$

D. Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường đường thẳng $y=6x+\dfrac{35}{4}$

Lời giải.

Chọn D

$$|2i.z-1|=2|z+3| \Leftrightarrow |2i(x+yi)-1|=2|x+yi+3| \Leftrightarrow |-2y-1+2xi|=2|x+3+yi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2y-1)^2+4x^2}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow (-2y-1)^2+4x^2=4\left[(x+3)^2+y^2\right] \Leftrightarrow y=6x+\frac{35}{4}$$

Kết luận: Tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là một đường đường thẳng $y=6x+\dfrac{35}{4}$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Phương trình bậc hai với hệ số thực là phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

Cách giải:

Tính $\Delta = b^2-4ac$

Nếu: $\Delta \geq 0 \rightarrow$ giải giống lớp 9

Nếu $\Delta < 0$ **:**. khi đó (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ x=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{array}\right.$

Dạng 1 : Phương trình bậc hai hệ số thực

Câu 1. Phương trình $x^2+x+1=0$ có nghiệm là

A. $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ **C.** Cả A và B **D.** Tất cả đều sai

Lời giải

Chọn C

$$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Câu 2. Nghiệm của phương trình: $z^2+4z+7=0$

A. $-2-\sqrt{3}i$ **B.** $2-\sqrt{3}i$ **C.** $-3-\sqrt{3}i$ **D.** $2+\sqrt{3}i$

Lời giải

Chọn A

$\Delta' = 2^2-7=-3=3i^2 \Rightarrow$ các căn bậc hai của Δ' là $\pm i\sqrt{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $z=-2+\sqrt{3}i,\ z=-2-\sqrt{3}i$

Câu 3. Tìm phương trình bậc hai chứa các nghiệm $x_1=3+4; x_2=3-4i$. **Chọn đáp án đúng:**

A. $x^2+6x+25=0$ **B.** $x^2-6x-25=0$

C. $x^2+6x-25=0$ **D.** $x^2-6x+25=0$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} x_1x_2=25 \\ x_1+x_2=6 \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+25=0$$

Câu 4. Tìm phương trình bậc hai chứa các nghiệm $x_1=\sqrt{7}-i\sqrt{3}; x_2=\sqrt{7}+i\sqrt{3}$. **Chọn đáp án đúng:**

A. $x^2+2\sqrt{7}x-10=0$ **B.** $x^2-2\sqrt{7}x+10=0$

C. $x^2-10x-2\sqrt{7}=0$ **D.** $x^2+2\sqrt{7}x+10=0$

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases} x_1+x_2=2\sqrt{7} \\ x_1.x_2=10 \end{cases} \Rightarrow x^2-2\sqrt{7}x+10=0$

Câu 5. Tìm tham số m để phương trình số phức $z^2-mz+m+1=0$ có 2 nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=z_1z_2+1$. **Chọn đáp án đúng:**

A. $m=-1;m=-4$ **B.** $m=4$ **C.** $m=-1;m=4$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn C

$z^2-mz+m+1=0$

- $\begin{cases} z_1+z_2=m \\ z_1z_2=m+1 \end{cases}$
- $z_1^2+z_2^2=z_1z_2+1 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-2z_1z_2=z_1z_2+1 \Leftrightarrow m^2-3(m+1)-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4(N) \\ m=-1(N) \end{array}\right.$

Câu 6. Tìm tham số m để phương trình $z^2-9mz+2mi=0$ có 2 nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1^3+z_2^3=36m-8i$. **Chọn đáp án đúng:**

A. $m=-\frac{2}{3}i$ **B.** $m=-2i$ **C.** $m=\frac{2}{3}i$ **D.** $m=2i$

Lời giải

Chọn C

- $\begin{cases} z_1+z_2=9m \\ z_1z_2=2mi \end{cases}$
- $z_1^3+z_2^3=36m-8i \Leftrightarrow (z_1+z_2)^3-3z_1z_2(z_1+z_2)=18 \Leftrightarrow (3m)^3-3.(2mi)(9m)=36m-8i$

$\Leftrightarrow (3m)^3-3.(3m)^2.2i+3.3m.(2i)^2-(2i)^3=0 \Leftrightarrow (3m-2i)^3=0 \Leftrightarrow m=\frac{2}{3}i$

Dạng 2 : Phương trình quy về phương trình bậc hai

Câu 1. Phương trình $\left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2-5\frac{4z+i}{z-i}+6=0$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\frac{-3}{2}i;-4i\right\}$ **B.** $S=\left\{\frac{-3}{2}i;4i\right\}$ **C.** $S=\left\{\frac{3}{2}i;-4i\right\}$ **D.** $S=\left\{\frac{3}{2}i;4i\right\}$

Lời giải

Chọn A

$\left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2-5\frac{4z+i}{z-i}+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4z+i}{z-i}=2 \\ \frac{4z+i}{z-i}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{-3}{2}i \\ z=-4i \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{\frac{-3}{2}i;-4i\right\}$

Câu 2. Phương trình $(z+i)(z^2-2z+2)=0$ có bao nhiêu nghiệm phức phân biệt

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

$$(z+i)(z^2-2z+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i \\ z=1+i \\ z=1-i \end{array}\right.$$

Câu 3. Câu phương trình: $(z^2+3z+6)^2+2z(z^2+3z+6)-3z^2=0$ Có bao nhiêu nghiệm thực

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$$(z^2+3z+6)^2+2z(z^2+3z+6)-3z^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+3z+6=z \\ z^2+3z+6=-3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+2z+6=0 \\ z^2+6z+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1\pm\sqrt{5}i \\ z=-3\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Câu 4. Cho phương trình $x^2+x+1=0$. Tính tổng phần thực của 2 số phức

A. -1 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Phương trình có biệt thức $\Delta=-3=3i^2$

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt:

$$x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Câu 5. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Câu phương trình $(z+3i)(z^2-2z+5)=0$. Giá trị x và y là:

A. $(x;y)=(0;-3),(-1;-2),(-1;-2)$ **B.** $(x;y)=(0;3),(-1;2),(1;2)$

C. $(x;y)=(0;-3),(1;2),(1;-2)$ **D.** $(x;y)=(0;3),(1;-2),(1;-2)$

Lời giải

Chọn C

$$(z+3i)(z^2-2z+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3i \\ z^2-2z+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3i \\ z=1+2i \\ z=1-2i \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)=(0;-3),(1;2),(1;-2)$$

Câu 6. Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Câu phương trình $(z^2+9)(z^2-z+1)=0$. **Giá trị x và y là:**

A. $(x;y)=\left(0;\pm\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\pm2\right)$ **B.** $(x;y)=(0;\pm1),(2;\pm1)$

C. $(x;y)=(0;\pm1),\left(2;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **D.** $(x;y)=(0;\pm3),\left(\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Lời giải

Chọn D

$$(z^2+9)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+9=0 \\ z^2-z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm 3i \\ z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow (x;y)=(0;\pm 3),\left(\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

Câu 7. Cho phương trình $z^3+8=0(1)$ .Hỏi có bao nhiêu nghiệm thuần ảo

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

$$(1) \Leftrightarrow (z+2)\left(z^2-2z+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z^2-2z+4=0\ (*) \end{array}\right.$$

Câu phương trình (*): $\Delta=-12=12i^2$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phức $x=\frac{2-i2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}i;\ x=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}i$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là $z=-2;x=1-\sqrt{3}i;x=1+\sqrt{3}i$

Câu 8. Cho phương trình $z^4+z^2-6=0$ .Có bao nhiêu nghiệm thuần thực

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=z^2$. Phương trình trở thành: $t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \end{array}\right.$

+ Với $t=2: z^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\sqrt{2} \\ z=-\sqrt{2} \end{array}\right.$

+ Với $t=-3: z^2=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i\sqrt{3} \\ z=-i\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $z=\sqrt{2};z=-\sqrt{2};z=i\sqrt{3};z=-i\sqrt{3}$

Câu 9. Cho phương trình $z^4-1=0\ (1)$ .Tổng các nghiệm thuần ảo

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

$$(1) \Leftrightarrow \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=1 \\ z^2=-1 \end{array}\right.$$

+) Với $z^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$

+) Với $z^2=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z=-i \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là $z=1; z=-1; z=i; z=-i$

Câu 10. Cho phương trình $z^3+i=0$. Tính tổng các phần ảo nghiệm phức của phương trình trên

A. 2 **B.** 0 **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow z^3-i^3=0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2+iz-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z^2+iz-1=0(*) \end{array}\right.$

Câu phương trình $(*): \Delta = i^2+4=3$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phức $z=\frac{-i+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; z=\frac{-i-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là: $z=i; z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

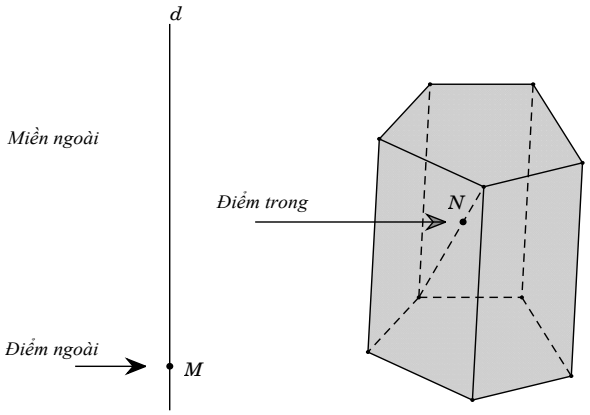
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

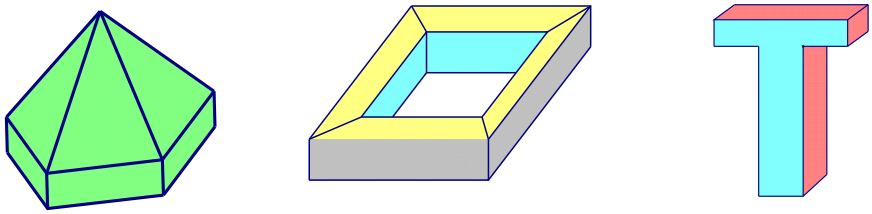
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của hình đa diện tương ứng.

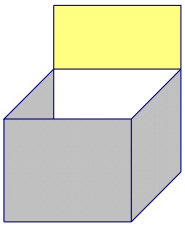


Ví dụ

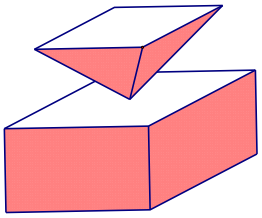
- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



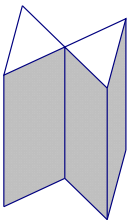
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a



Hình b



Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của $(\mathscr{H})$.

c) Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'.

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của $(\mathscr{H})$.

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ là là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

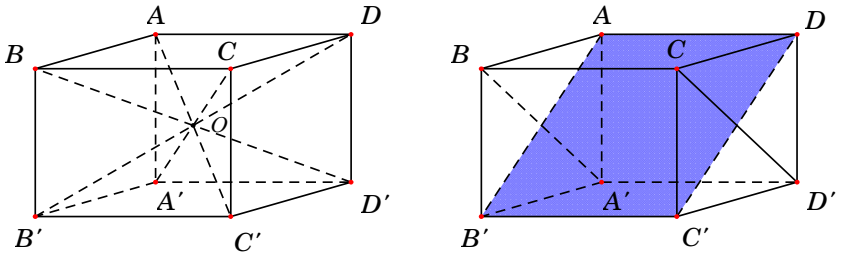
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của $(\mathscr{H})$.

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện $(\mathscr{H})$ thành đa diện $(\mathscr{H}')$, biến đỉnh, cạnh, mặt của $(\mathscr{H})$ thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của $(\mathscr{H}')$.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

- Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
- Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$).



2. Hai hình bằng nhau

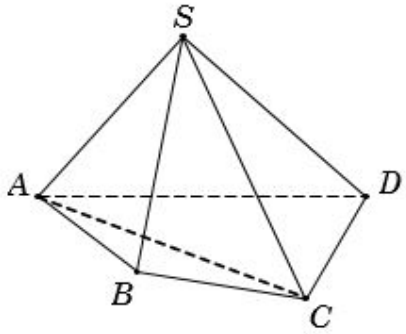
Hai hình được gọi là nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này đa diện kia.

IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

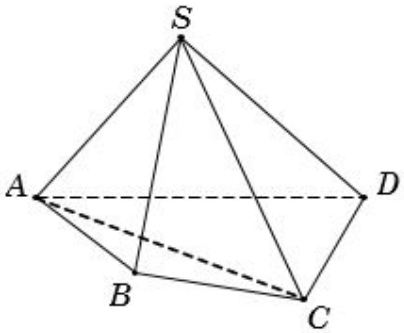
Nếu khối đa diện $(\mathscr{H})$ là hợp của hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ sao cho $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện $(\mathscr{H})$ thành hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$. Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ để được khối đa diện $(\mathscr{H})$.

Ví dụ 1. Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$.

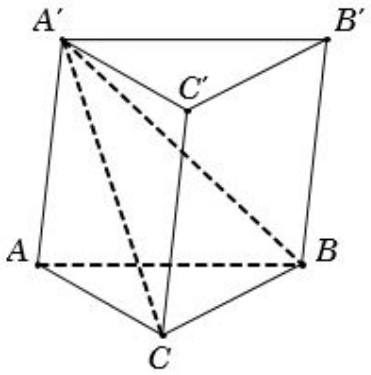


Ta thấy rằng:

- Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).
- Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD$. Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD$.



Ví dụ 2. Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$.



Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.

Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.

Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

Kết quả 3: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

Kết quả 4: Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

Kết quả 5: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

Kết quả 6: Cho $(\mathscr{H})$ là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của $(\mathscr{H})$ là lẻ thì p phải là số chẵn.

Chứng minh:Gọi M là số các mặt của khối đa diện $(\mathscr{H})$. Vì mỗi mặt của $(\mathscr{H})$ có p cạnh nên M mặt sẽ có $p.M$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của $(\mathscr{H})$ bằng $C=\frac{pM}{2}$. Vì M lẻ nên p phải là số chẵn.

Kết quả 7 (Suy ra từ chứng minh kết quả 6): Cho $(\mathscr{H})$ là đa diện có M mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của $(\mathscr{H})$ là $C=\frac{pM}{2}$.

Kết quả 8: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

Chứng minh:Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là C và M.

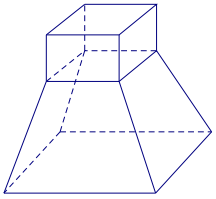
Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $C=\frac{3M}{2}\xrightarrow{C\in\mathbb{Z}}M$ chẵn.

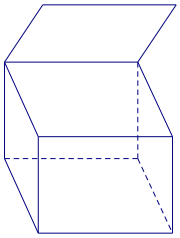
Kết quả 9: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.

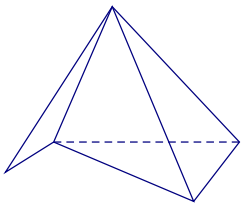
Kết quả 10: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn. (Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn).

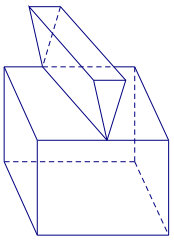
B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho các hình sau:


Hình 1


Hình 2


Hình 3


Hình 4

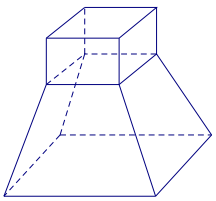
Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình đa diện là:

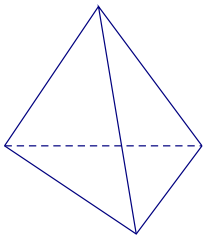
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

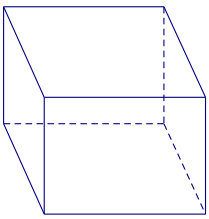
Hướng dẫn giải

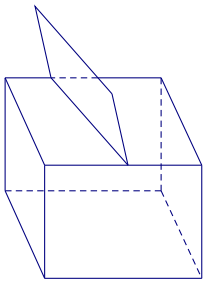
Chọn A

Câu 2: Cho các hình sau:


Hình 1


Hình 2


Hình 3


Hình 4

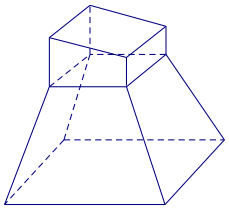
Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện là:

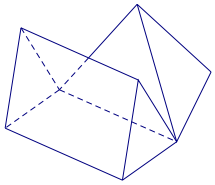
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

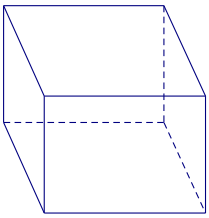
Hướng dẫn giải

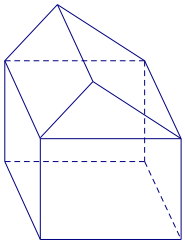
Chọn D

Câu 3: Cho các hình sau:


Hình 1


Hình 2


Hình 3


Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số hình đa diện là:

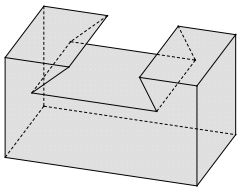
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

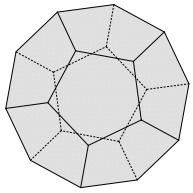
Chọn C

Các hình đa diện là: Hình 1; Hình 3; Hình 4.

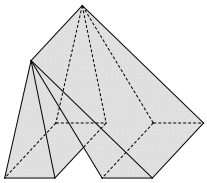
Câu 4: Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện?



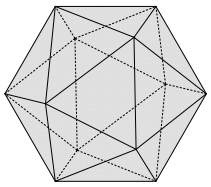
A.



B.



C.



D.

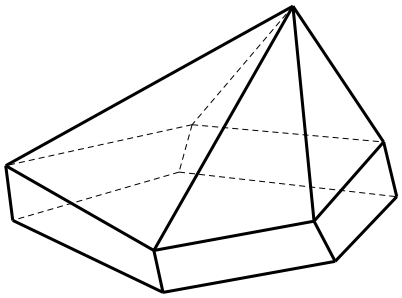
Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì hình C vi phạm tính chất "Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác".

Câu 5: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A. 6. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

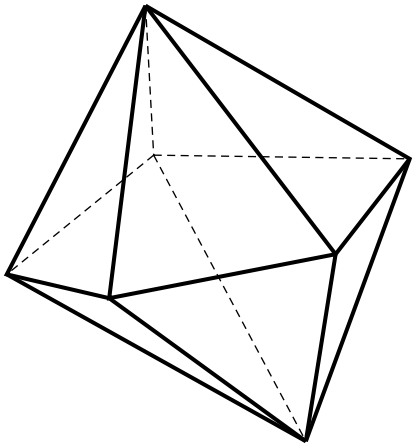


Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 6: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

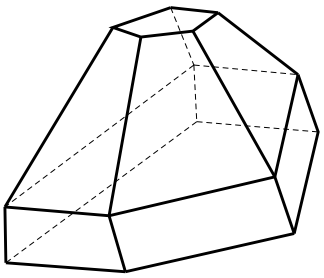


Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 7: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

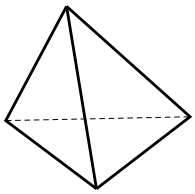
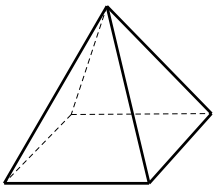
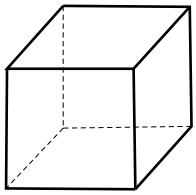
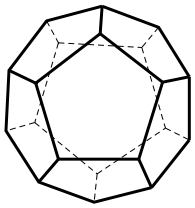
A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.



Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 8: Khối đa diện nào sau đây có số mặt nhỏ nhất?

A. Khối tứ diện đều. **B.** Khối chóp tứ giác.

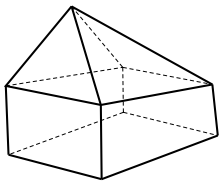
C. Khối lập phương. **D.** Khối 12 mặt đều.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 9: Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu cạnh?

A. 8. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 16.



Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 10: Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy các đáp án A, B, D đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện.

Câu 11: Gọi $Đ$ là số các đỉnh, M là số các mặt, C là số các cạnh của một hình đa diện bất kỳ. mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $Đ > 4,\ M > 4,\ C > 6.$ **B.** $Đ > 5,\ M > 5,\ C > 7.$

C. $Đ \geq 4,\ M \geq 4,\ C \geq 6.$ **D.** $Đ \geq 5,\ M \geq 5,\ C \geq 7.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét hình đa diện là hình tứ diện thì kết quả về quan hệ số đỉnh và số mặt thỏa mãn đáp án C

Câu 12: Một hình đa diện có các mặt là những tam giác. Gọi M là tổng số mặt và C là tổng số cạnh C của đa diện đó. Mệnh đề nào sau đây đúng.

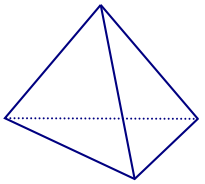
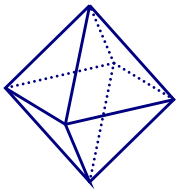
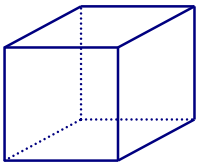
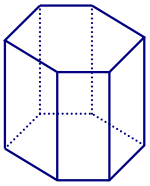
A. $3C = 2M$. **B.** $C = M + 2$. **C.** $M \geq C$. **D.** $3M = 2C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì mỗi mặt là những tam giác nên có tổng số cạnh là $3M$. Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có hệ thức $3M = 2C$.

Câu 13: Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều.

C. Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 14: Gọi n_1, n_2, n_3 lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $n_1 = 0,\ n_2 = 0,\ n_3 = 6.$ **B.** $n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = 9.$

C. $n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 9.$ **D.** $n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = 3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện ; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện).

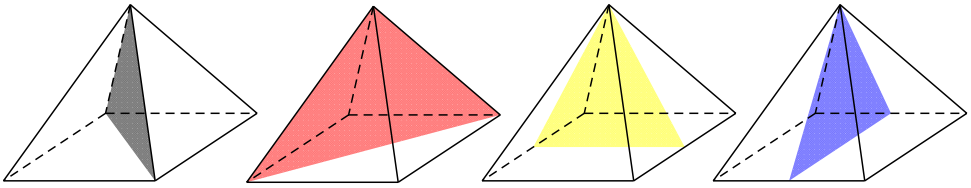
Câu 15: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

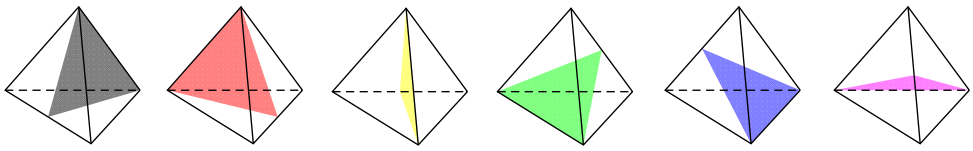
Câu 16: Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 8 mặt phẳng. **D.** 10 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.



Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

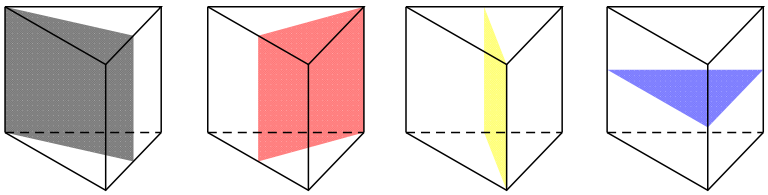
Câu 17: Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng (hình vẽ bên dưới).



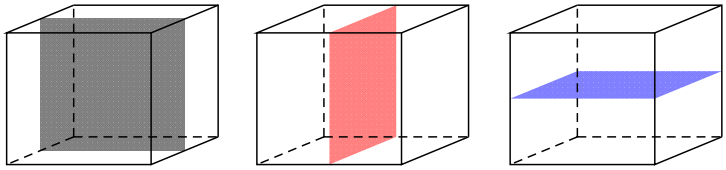
Câu 18: Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 9 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp chữ nhật (không là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.



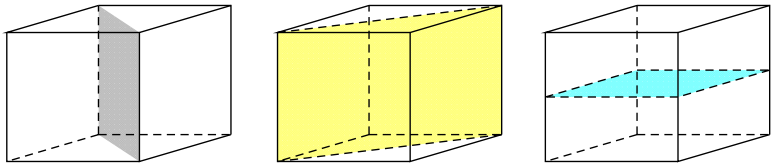
Câu 19: Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

Câu 20: Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

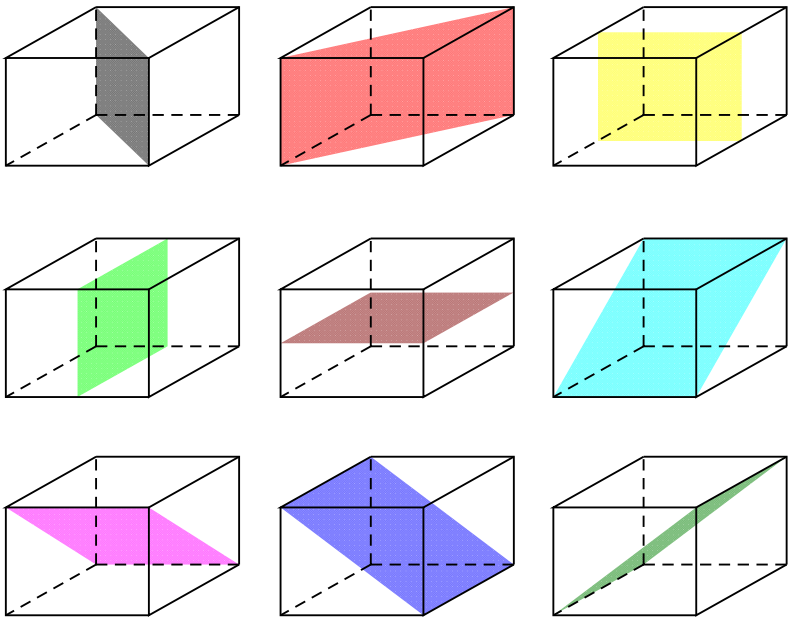
A. 8 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 10 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau).



Câu 21: Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

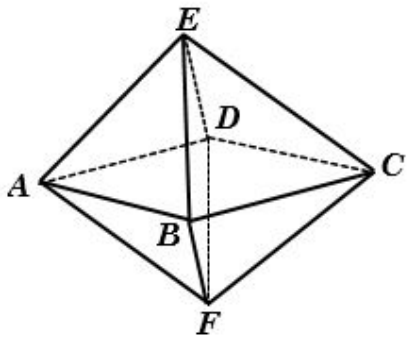
A. 4 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi bát diện đều $ABCDEF$. Có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).



Câu 22: Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của một tứ diện?

A. 1 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng.

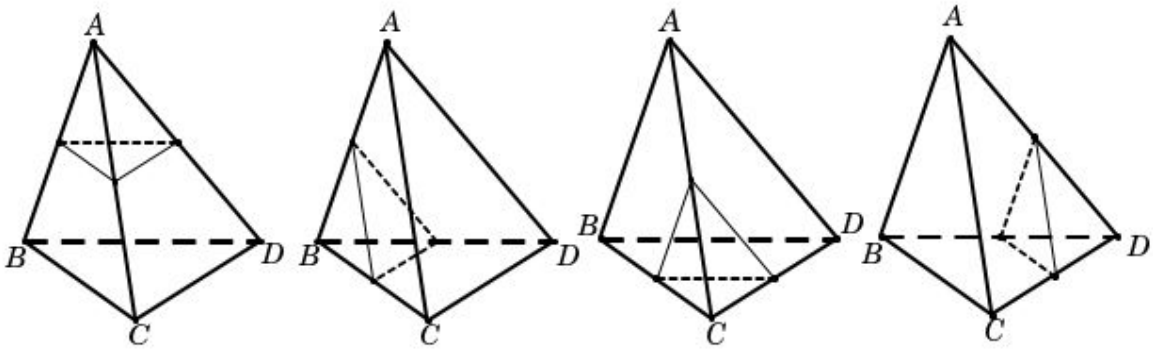
C. 7 mặt phẳng. **D.** Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

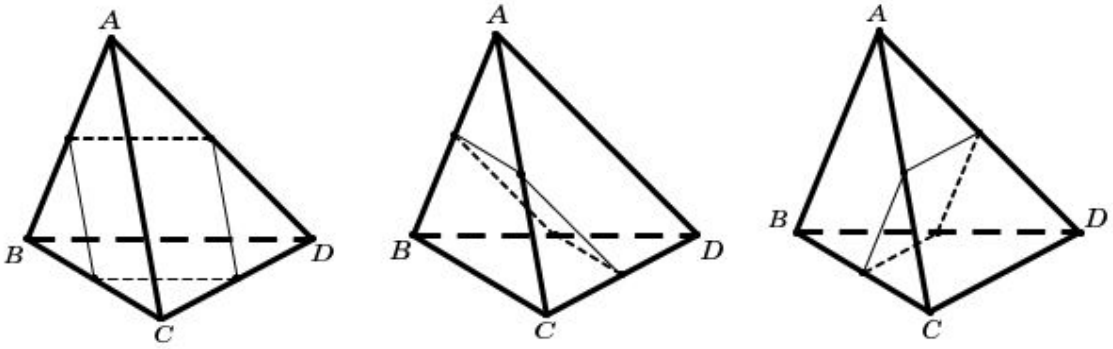
Có 2 loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài là:

● Loại 1: Mặt phẳng qua trung điểm của 3 cạnh bên có chung đỉnh. Có 4 mặt phẳng thỏa mãn loại này (vì có 4 đỉnh)



Nhận xét. Loại này ta thấy có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại.

● Loại 2: Mặt phẳng qua trung điểm của 4 cạnh (4 cạnh này thuộc 2 cặp cạnh, mỗi cặp cạnh là chéo nhau). Có 3 mặt phẳng như thế.



Nhận xét. Loại này ta thấy có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại.

Câu 23: Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

B. Hai khối chóp tam giác.

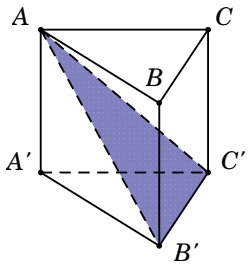
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

D. Hai khối chóp tứ giác.

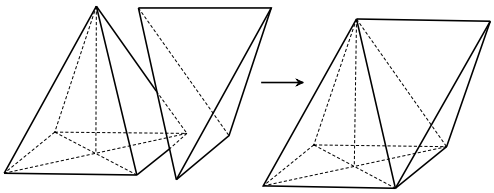
Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.



Câu 24: Lắp ghép hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ để tạo thành khối đa diện $(\mathscr{H})$, trong đó $(\mathscr{H}_1)$ là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a, $(\mathscr{H}_2)$ là khối tứ diện đều cạnh a sao cho một mặt của $(\mathscr{H}_1)$ trùng với một mặt của $(\mathscr{H}_2)$ như hình vẽ. Hỏi khối da diện $(\mathscr{H})$ có tất cả bao nhiêu mặt?



A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khối đa diện $(\mathscr{H})$ có đúng 5 mặt.

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt.

Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện $(\mathscr{H})$ có 8 mặt.

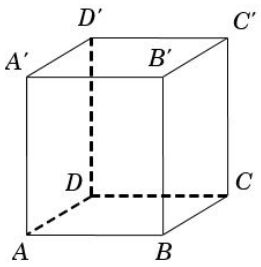
Câu 25: Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.



- Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$ và $(AB'D)$ chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.
- Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.

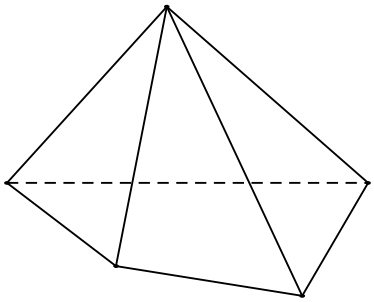
Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau.

BÀI 2. KHÁI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

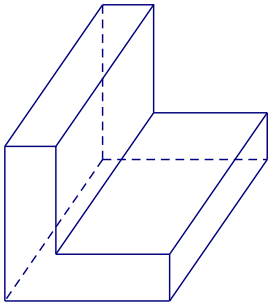
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Khối đa diện $(\mathscr{H})$ được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của $(\mathscr{H})$ luôn thuộc $(\mathscr{H})$. Khi đó đa diện giới hạn $(\mathscr{H})$ được gọi là đa diện lồi.

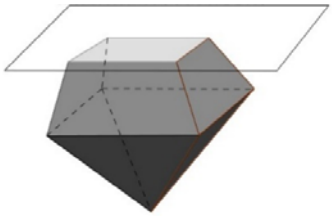


Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.



II – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Định nghĩa

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

- Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

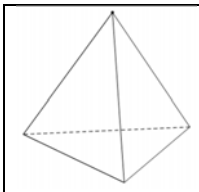
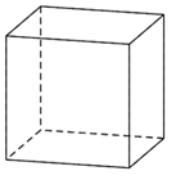
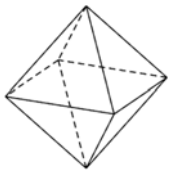
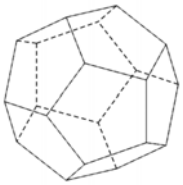
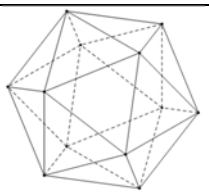
Định lí

Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

- Loại $\{3;3\}$: khối tứ diện đều.
- Loại $\{4;3\}$: khối lập phương.
- Loại $\{3;4\}$: khối bát diện đều.

□ Loại $\{5;3\}$: khối 12 mặt đều.

□ Loại $\{3;5\}$: khối 20 mặt đều.

				
Khối tứ diện đều	Khối lập phương	Bát diện đều	Hình 12 mặt đều	Hình 20 mặt đều

Khối đa diện đều		**Số đỉnh**	**Số cạnh**	**Số mặt**	**Loại**
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$

Chú ý.Gọi $Đ$ là tổng số đỉnh, C là tổng số cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n;p\}$. Ta có

$$\boxed{pĐ = 2C = nM}$$

- Xét tứ diện đều $\{3;3\} \to \begin{cases} n=3,\ p=3 \\ M=4 \end{cases} \xrightarrow{pĐ=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 6 \ \ \& \ \ Đ = \frac{nM}{p} = 4.$
- Xét khối lập phương $\{4;3\} \to \begin{cases} n=4,\ p=3 \\ M=6 \end{cases} \xrightarrow{pĐ=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \ \ \& \ \ Đ = \frac{nM}{p} = 8.$
- Xét bát diện đều $\{3;4\} \leftrightarrow \begin{cases} n=3,\ p=4 \\ M=8 \end{cases} \xrightarrow{pĐ=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \ \ \& \ \ Đ = \frac{nM}{p} = 6.$
- Xét khối mười hai mặt đều

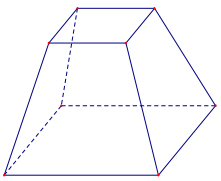
$$\{5;3\}\to\begin{cases}n=5,\ p=3\\ M=12\end{cases}\xrightarrow{pĐ=2C=nM}C=\frac{nM}{2}=30\ \&\ Đ=\frac{nM}{p}=20.$$

- Xét khối hai mươi mặt đều

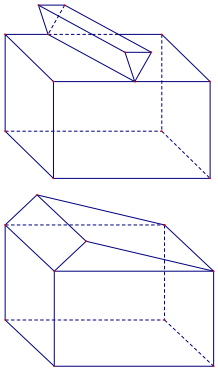
$$\{3;5\}\to\begin{cases}n=3,\ p=5\\ M=20\end{cases}\xrightarrow{pĐ=2C=nM}C=\frac{nM}{2}=30\ \&\ Đ=\frac{nM}{p}=12.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

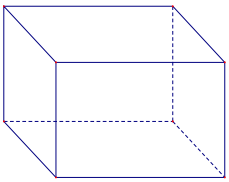
Câu 1: Cho các hình khối sau:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện lồi là

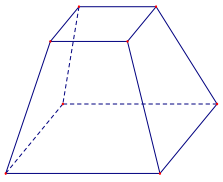
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Hướng dẫn giải

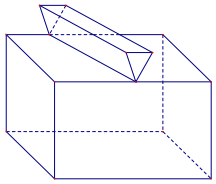
Chọn B

Áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi $(\mathscr{H})$: "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của $(\mathscr{H})$ luôn thuộc $(\mathscr{H})$".

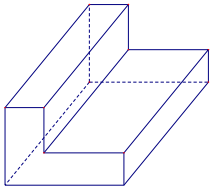
Câu 2: Cho các hình khối sau:



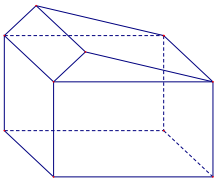
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

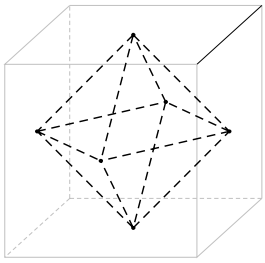
Có hai khối đa diện lồi là: Hình 1 & Hình 4.

Câu 3: Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của hình nào trong các hình sau đây?

A. Bát diện đều. **B.** Tứ diện đều. **C.** Lục giác đều. **D.** Ngũ giác đều.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Câu 4: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình lập phương.

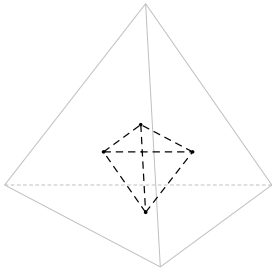
B. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

C. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

D. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Câu 5: Trung điểm các cạnh của một tứ diện đều tạo thành

A. các đỉnh của một hình tứ diện đều.

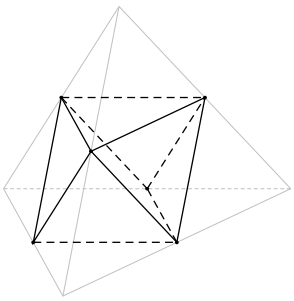
B. các đỉnh của một hình bát diện đều.

C. các đỉnh của một hình mười hai mặt đều.

D. các đỉnh của một hình hai mươi mặt đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.

B. Tồn tại khối lặng trụ đều là khối đa diện đều.

C. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.

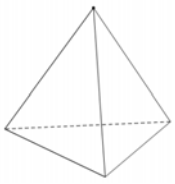
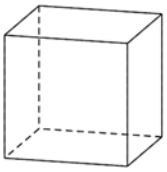
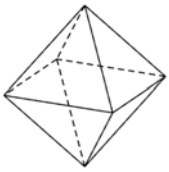
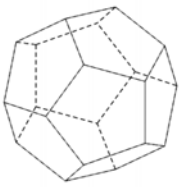
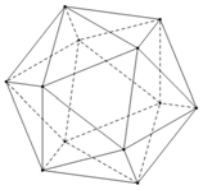
D. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trong 5 loại khối đa diện đều không tồn tại khối chóp có đáy là tứ giác.

Câu 7: Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ

				
Khối tứ diện đều	Khối lập phương	Bát diện đều	Hình 12 mặt đều	Hình 20 mặt đều

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.

B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.

C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.

D. Khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều có cùng số đỉnh.

Hướng dẫn giải

Chọn B

- Khối lập phương có 6 mặt. Do đó A sai.

- Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh là 12.
- Khối tứ diện đều không có tâm đối xứng. Do đó C sai.
- Khối 12 mặt đều có 20 đỉnh. Khối 20 mặt đều có 12 đỉnh. Do đó D sai.

Câu 8: Mỗi khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh $Đ$ và số cạnh C của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn:

A. $Đ = C - 2$. **B.** $Đ \geq C$. **C.** $3Đ = 2C$. **D.** $3C = 2Đ$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba mặt nên suy ra số cạnh của khối đa diện là $3Đ$. Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có hệ thức $3Đ = 2C$.

Câu 9: Tổng các góc ở đỉnh của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 12π. **D.** 10π.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, gồm 6 mặt là các hình vuông nên tổng các góc bằng $6.2\pi = 12\pi$.

Câu 10: Tổng các góc ở đỉnh của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là:

A. 12π. **B.** 16π. **C.** 20π. **D.** 24π.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều, gồm 20 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $20.\pi = 20\pi$.

Câu 11: Tổng độ dài ℓ của tất cả các cạnh của một tứ diện đều cạnh a.

A. $\ell = 4a$. **B.** $\ell = 6a$. **C.** $\ell = 6$. **D.** $\ell = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tứ diện đều có tất cả 6 cạnh nên có tổng độ dài các cạnh là $6a$.

Câu 12: Tổng độ dài ℓ của tất cả các cạnh của khối mười hai mặt đều cạnh bằng 2.

A. $\ell = 8$. **B.** $\ell = 16$. **C.** $\ell = 24$. **D.** $\ell = 60$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Khối mười hai mặt đều có 30 cạnh nên có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng $\ell = 30.2 = 60$.

Câu 13: Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4a^2$. **B.** $S = 6a^2$. **C.** $S = 8a^2$. **D.** $S = 10a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a. Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2$.

Câu 14: Cho hình bát diện đều cạnh a. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$. **B.** $S = \sqrt{3}a^2$. **C.** $S = 2\sqrt{3}a^2$. **D.** $S = 8a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều. Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh $a \longrightarrow S_0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 8.S_0 = 8.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$.

Câu 15: Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 10\sqrt{3}$. **B.** $S = 20\sqrt{3}$. **C.** $S = 20$. **D.** $S = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh bằng $2 \longrightarrow S_0 = \dfrac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}$.

BÀI 3. KHÁI NIỆM VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

1. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

2. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

3. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

I – THEẢ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$\boxed{V=\frac{1}{3}S.h}$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$\boxed{V=B.h}$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là hiều cao khối lăng trụ

● **Thể tích khối hộp chữ nhật**: $V=a.b.c$

Trong đó: $a,\ b,\ c$ là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

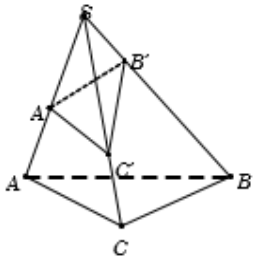
● **Thể tích khối lập phương**: $V=a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

III – TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}}.$$



Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác đinh được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=a^3\sqrt{2}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=4$, $AB=6$, $BC=10$ và $CA=8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=40$. **B.** $V=192$. **C.** $V=32$. **D.** $V=24$.

Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC, có $AB^2+AC^2=6^2+8^2=10^2=BC^2$

$\longrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A $\longrightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=24$.

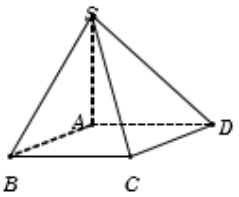
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=32$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, $BC=2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA=a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V=2a^3\sqrt{15}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA \perp (ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC = 2a^2$.

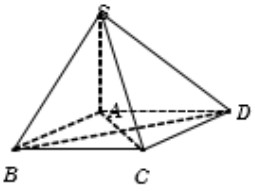
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đường chéo hình vuông $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC, ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

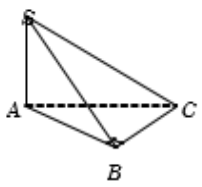
Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA.BC = \frac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA=2a$.

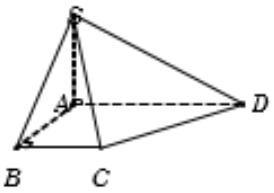
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{a^3}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=1$, $AD=2$. Cạnh bên $SA=2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=1$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{1}{3}$. **D.** $V=2$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S_{ABCD}=\left(\frac{AD+BC}{2}\right).AB=\frac{3}{2}.$$

Chiều cao khối chóp là $SA=2$.

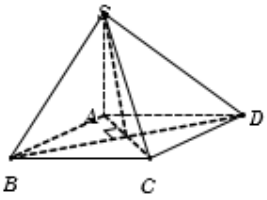
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=1.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\Delta SAB=\Delta SAD\longrightarrow SB=SD.$

Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD}=60^0$.

Do đó ΔSBD đều cạnh $SB=SD=BD=a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, ta có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2.$

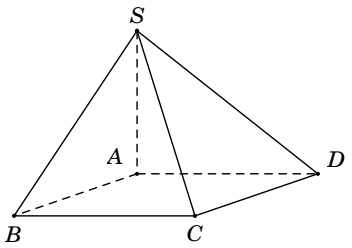
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AC=5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=6\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=4\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=2\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông ABC, ta có $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2\sqrt{6}a$.

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB.

Do đó $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD}=AB.BC=2\sqrt{6}a^2$.

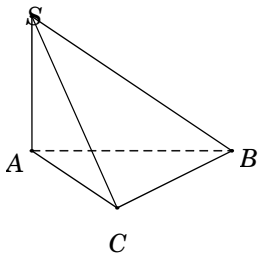
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=2\sqrt{2}a^3$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA\perp(ABCD)$ nên ta có

$60^0=\widehat{SB,(ABC)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

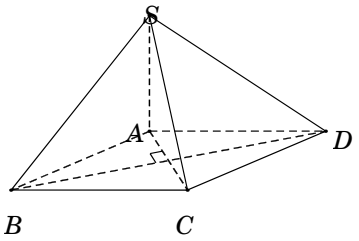
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{a^3}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=120^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.

Lời giải

Chọn C



Do $SA\perp(ABCD)$ nên ta có $60^0=\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{SD,AD}=\widehat{SDA}$.

Tam giác vuông SAD, có $SA=AD.\tan\widehat{SDA}=a\sqrt{3}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD}=2S_{\Delta BAD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

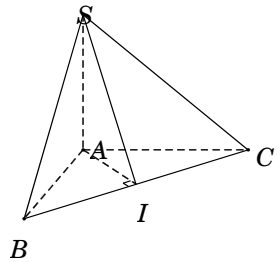
Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI. Do đó $60^o=\widehat{SI,(ABC)}=\widehat{SI,AI}=\widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A, suy ra trung tuyến $AI=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI, có $SA = AI.\tan\widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **B.** $V = \sqrt{3}a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

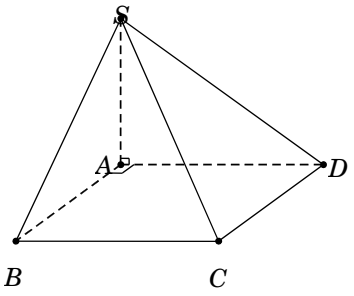
$ABCD$ là hình vuông suy ra $AB \perp AD$. (1)

Vì $SA \perp (ABCD) \longrightarrow SA \perp AD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AD \perp (SAB)$.

Khi đó SA là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAB).

Do đó $30^0 = \widehat{SD;(SAB)} = \widehat{(SD;SA)} = \widehat{DSA}$.



Tam giác SAD vuông tại A, có $SA = \frac{AD}{\tan\widehat{DSA}} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

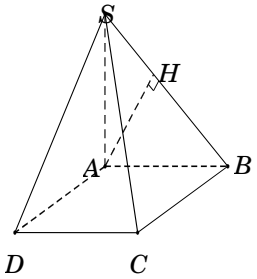
A. $V = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của A trên SB $\Rightarrow AH \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$



Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A,(SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A, có

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\Rightarrow SA=a.$

Vậy $V=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}.$

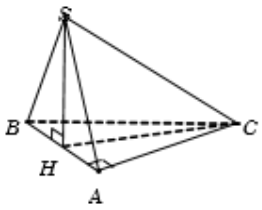
Dạng 2 : Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH\perp AB$.

Do $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH\perp(ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB=a$ nên $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

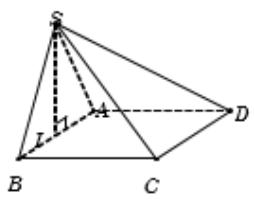
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA=2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SIA, có

$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

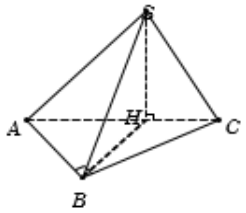
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SI = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2a$, $AB = SA = a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $SH \perp AC$. Do $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$.

Trong tam giác vuông SAC, ta có

$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = a\sqrt{3}$, $SH = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

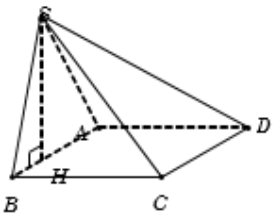
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SH = \frac{a^3}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH = 2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông SAB, ta có $SA^2 = AH.AB = \frac{2}{3}AB.AB = \frac{2}{3}a^2$;

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $V = \sqrt{6}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $SH \perp BC$. Vì $(SBC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$. Do đó $60^0 = \widehat{SD,(SBC)} = \widehat{SD,SC} = \widehat{DSC}$.

Từ $DC \perp (SBC) \longrightarrow DC \perp SC$.

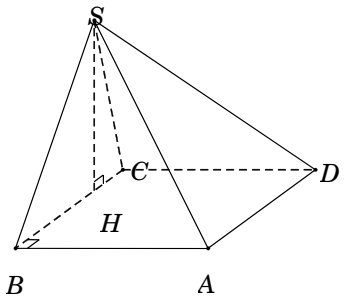
Tam giác vuông SCD, có $SC = \frac{DC}{\tan \widehat{DSC}} = 1$.

Tam giác vuông SBC, có

$$SH = \frac{SB.SC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - SC^2}.SC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



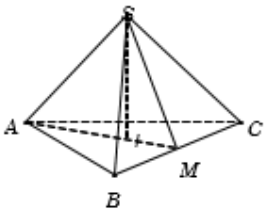
Dạng 3: Khối chóp đều

Câu 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

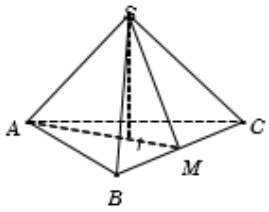
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

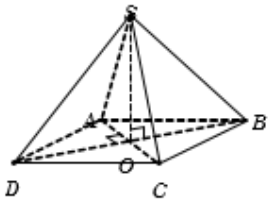
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 3: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,OB}=\widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB, có $SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông ABC là $S_{ABCD}=AB^2=a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O=AE\cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$.

Khi đó $60^0=\widehat{(SBC),(ABC)}=\widehat{SE,OE}=\widehat{SEO}$.

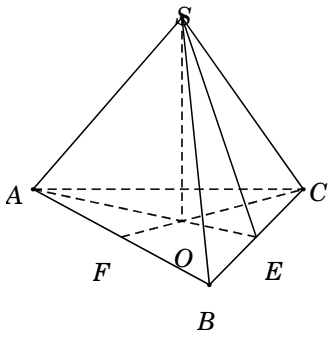
Tam giác vuông SOE, có

$SO=OE.\tan\widehat{SEO}=\dfrac{AE}{3}.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=$

.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.



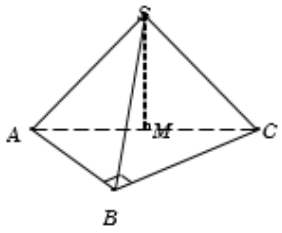
Dạng 4: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AC. Theo giả thiết, ta có $SM\perp(ABC)\Rightarrow SM\perp AC$.

Tam giác vuông ABC, có $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SMA, có

$$SM=\sqrt{SA^2-AM^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2}{2}$.

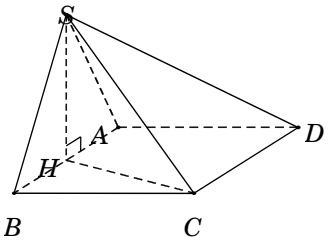
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SM=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB, góc giữa SC và mặt đáy bằng 30^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{15}}{18}$. **C.** $V=\dfrac{1}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC.

Do đó $30^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,HC}=\widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH, có $HC=\sqrt{BC^2+BH^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHC, có $SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=1$.

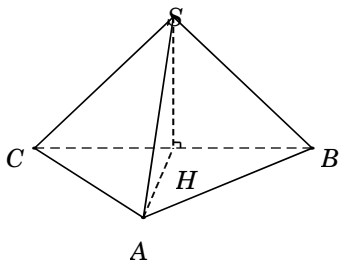
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{\sqrt{15}}{18}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $SH\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA. Do đó $60^0=\widehat{SA,(ABC)}=\widehat{SA,HA}=\widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SHA, có $SH=AH.\tan\widehat{SAH}=\frac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Dạng 5: Một số dạng khác

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S, $SB=2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=4a^3$. **C.** $V=6a^3$ **D.** $V=12a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta chọn (SBC) làm mặt đáy $\longrightarrow$ chiều cao khối chóp là $d[A,(SBC)]=3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}SB^2=2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V=\frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.d\left[A,(SBC)\right]=2a^3.$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$ **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $h=a\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn D

Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h\longrightarrow h=\frac{3.V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}}=a\sqrt{3}.$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

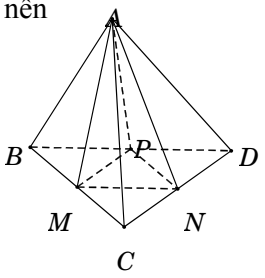
A. $V=\frac{7}{2}a^3.$ **B.** $V=14a^3.$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3.$ **D.** $V=7a^3.$

Lời giải

Chọn D

Do AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.AC.AD=\frac{1}{6}.6a.7a.4a=28a^3.$



Dễ thấy $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3.$ **B.** $V=4.$ **C.** $V=6.$ **D.** $V=5.$

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\Delta GBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$

Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng, lăng trụ đều

Câu 1: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$

Lời giải

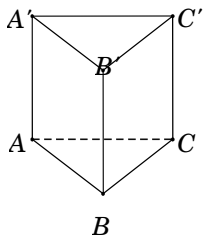
Chọn C

Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a.

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h=AA'=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=S.h=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 2: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

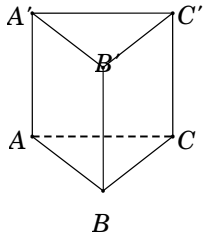
Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA'\perp(ABC)$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq}=3.S_{ABB'A'}$

$\Leftrightarrow 3a^2=3.(AA'.AB)\Leftrightarrow 3a^2=3.(AA'.a)\Rightarrow AA'=a.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 3: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=a^3$.

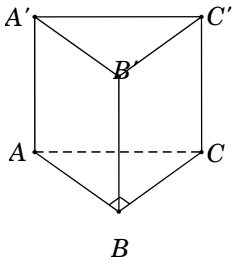
Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC vuông cân tại B,

suy ra $BA=BC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V=S_{\Delta ABC}.BB'=\frac{a^3}{2}$.



Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$, $AA'=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=4a^3\sqrt{5}$. **B.** $V=a^3\sqrt{15}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=a^3\sqrt{15}.$

Câu 5: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}.$

A. $V=a^3.$ **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}.$ **C.** $V=3\sqrt{3}a^3.$ **D.** $V=\dfrac{1}{3}a^3.$

Lời giải

Chọn A

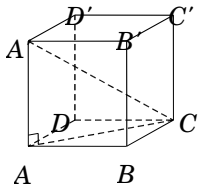
Đặt cạnh của khối lập phương là $x\ (x>0).$

Suy ra $CC'=x;\ AC=x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC', có

$AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}\Leftrightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a.$

Vậy thể tích khối lập phương $V=a^3.$



Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a, biết $A'B=3a$.

A. $V=\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $V=4\sqrt{5}a^3$. **C.** $V=2\sqrt{5}a^3$. **D.** $V=12a^3$.

Lời giải

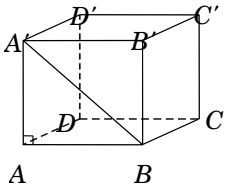
Chọn B

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA'\perp AB$.

Xét tam giác vuông $A'AB$, ta có $A'A=\sqrt{A'B^2-AB^2}=a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB^2=4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'A=4\sqrt{5}a^3.$



Câu 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, $AB'=a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V=a^3\sqrt{10}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=a^3\sqrt{2}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Trong tam giác vuông ABB', có $BB'=\sqrt{AB'^2-AB^2}=2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.AD=a^2\sqrt{2}$.

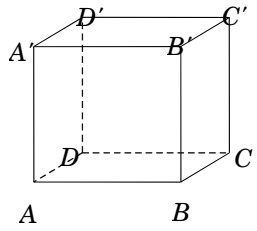
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.BB' = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2, 20cm^2, 32cm^2. Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

A. $V = 80\text{cm}^3$. **B.** $V = 160\text{cm}^3$. **C.** $V = 40\text{cm}^3$. **D.** $V = 64\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} S_{ABCD} = 10\,\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'} = 20\,\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'} = 30\,\text{cm}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB.AD = 10 \\ AB.AA' = 20 \\ AA'.AD = 32 \end{cases}$.

Nhân vế theo vế, ta được $(AA'.AB.AD)^2 = 6400 \Rightarrow AA'.AB.AD = 80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = 80\,\text{cm}^3$.

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = 1$. Cạnh $A'B$ tạo với mặt đáy (ABC) góc 60^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

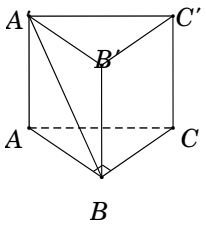
Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt đáy (ABC) là AB.

Do đó $60^0 = \widehat{A'B,(ABC)} = \widehat{A'B,AB} = \widehat{A'BA}$.

Tam giác vuông $A'AB$, ta có $AA' = AB.\tan\widehat{A'BA} = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V=\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $V=8a^3$. **D.** $V=4a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

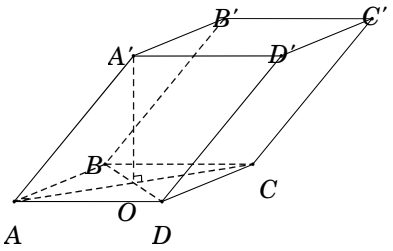
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, suy ra $A'O\perp(ABCD)$.

Tam giác vuông $A'OA$, có

$A'O=\sqrt{AA'^2-AO^2}=\sqrt{4a^2-2a^2}=a\sqrt{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD}=4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{\Delta ABCD}.A'O=4a^3\sqrt{2}$.



Câu 2: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA'=a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

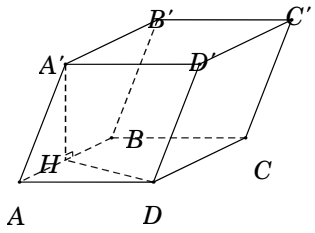
Chọn B

Theo giả thiết, ta có $A'H\perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD}=a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'H=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=a^3\sqrt{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{2}$.

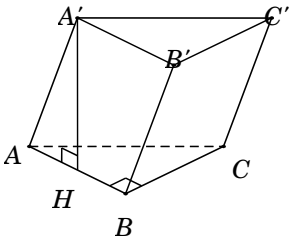
Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = a^2$.



Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.A'O = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 5: Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

A. $V = 6a^3$. **B.** $V = \dfrac{5a^3}{2}$. **C.** $V = 4a^3$. **D.** $V = 3a^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{2}V_{A.BCB'C'} = \dfrac{3}{2}.2a^3 = 3a^3$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45^0. Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 3$. **B.** $V = 1$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A

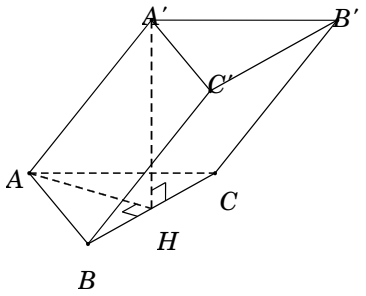
Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH=\sqrt{3}$. Vì $A'H\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH. Do đó

$45^0=\widehat{AA',(ABC)}=\widehat{AA',AH}=\widehat{A'AH}$.

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H=HA=\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$.

Vậy $V=S_{\Delta ABC}.A'H=3$.



Câu 7: Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S=10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

A. $V=100\text{cm}^3$. **B.** $V=50\sqrt{3}\text{cm}^3$. **C.** $V=50\text{cm}^3$. **D.** $V=100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC.

Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow A'H\perp(ABC)$.

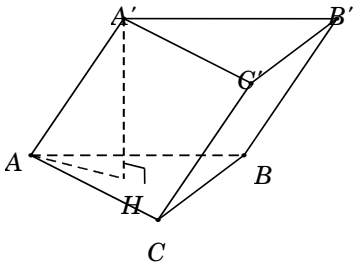
Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC). Do đó

$60^0=\widehat{AA',(ABC)}=\widehat{(AA',AH)}=\widehat{A'AH}$.

Tam giác $A'AH$ vuông tại H, có

$A'H=AA'.\sin\widehat{A'AH}=5\sqrt{3}$.

Vậy $V=S_{\Delta ABC}.A'H=50\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.



CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

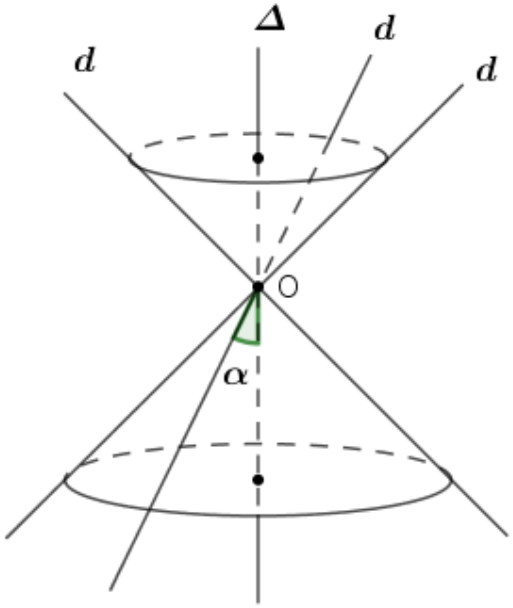
BÀI 1. MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT NÓN

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng d cắt Δ tại O tạo thành một góc α với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng d như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản hơn là mặt nón).

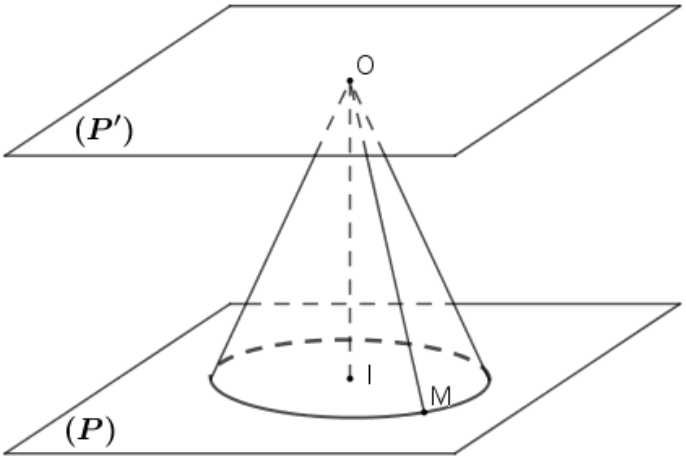
- Δ gọi là trục của mặt nón.
- d gọi là đường sinh của mặt nón.
- O gọi là đỉnh của mặt nón.
- Góc 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.



II. HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

1. Hình nón

Cho mặt nón N với trục Δ, đỉnh O, góc ở đỉnh 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm I khác O. Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo một đường tròn (C) có tâm I. Lại gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O.



● Phần của mặt nón N giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi (C) được gọi là hình nón.

● O gọi là đỉnh của hình nón.

● Đường tròn (C) gọi là đường tròn đáy của hình nón.

● Với mỗi điểm M nằm trên đường tròn (C), đoạn thẳng OM gọi là đường sinh của hình nón.

● Đoạn thẳng OI gọi là trục của hình nón, độ dài OI gọi là chiều cao của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh O đến mặt đáy.)

2. Khối nón

Một hình nón chia không gian thành hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài của nó. Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

III. KHÁI NIỆM VỀ DIỆN TÍCH HÌNH NÓN VÀ THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Một hình chóp gọi là nội tiếp một hình nón nếu:

● Đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón.

● Đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

1. Định nghĩa

Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của một hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích của khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh tăng lên vô hạn.

2. Định lí 1

Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy R và đường sinh ℓ là

$$\boxed{S_{xq}=\pi R\ell}.$$

3. Định lí 2

Thể tích của khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h là

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi R^2 h}.$$

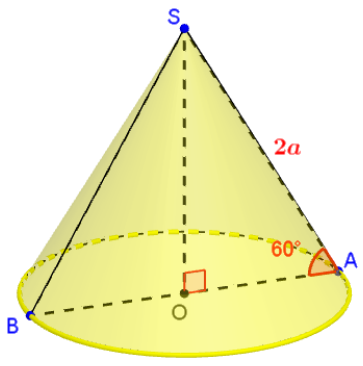
B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Hình nón có đường sinh $\ell=2a$ và hợp với đáy góc $\alpha=60^0$. Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết, ta có

$SA = \ell = 2a$ và $\widehat{SAO} = 60^0$.

Suy ra

$R = OA = SA.\cos 60^0 = a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng:

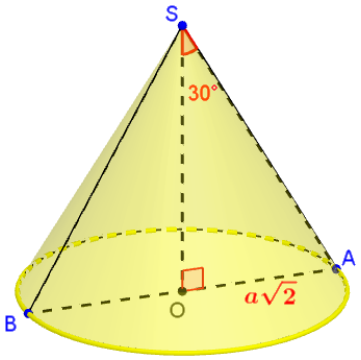
$S = \pi Rl + \pi R^2 = 3\pi a^2$ (đvdt).

Câu 2: Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = a\sqrt{2}$, góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, ta có

$OA = a\sqrt{2}$ và $\widehat{OSA} = 30^0$.

Suy ra độ dài đường sinh:

$\ell = SA = \dfrac{OA}{\sin 30^0} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy diện tích xung quanh bằng:

$S_{xq} = \pi R\ell = 4\pi a^2$ (đvdt).

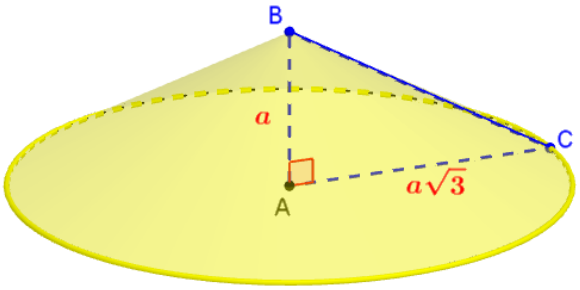
Câu 3: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB bằng:

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra hình nón có đỉnh là B, tâm đường tròn đáy là A, bán kính đáy là $AC = a\sqrt{3}$ và chiều cao hình nón là $AB = a$.



Vậy độ dài đường sinh của hình nón là:

$\ell = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$

Câu 4: Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Diện tích toàn phần và thể tích hình nón có giá trị lần lượt là:

A. $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

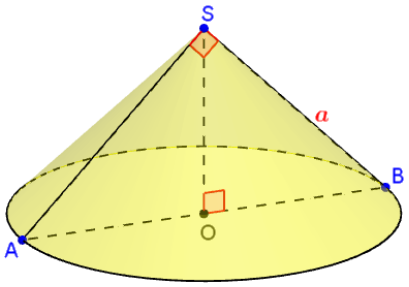
B. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

C. $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

D. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông cân tại S nên

$AB = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, $SO = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = SA = a$ và

$SB\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi R\ell + \pi R^2 = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ (đvdt).

Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ (đvtt).

Câu 5: Cạnh bên của một hình nón bằng $2a$. Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120°. Diện tích toàn phần của hình nón là:

A. $\pi^2\left(3+\sqrt{3}\right)$.

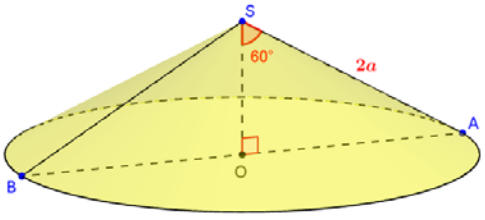
B. $2\pi a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$.

C. $6\pi a^2$.

D. $\pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S là đỉnh, O là tâm của đáy, thiết diện qua trục là SAB.

Theo giả thiết, ta có $SA=2a$ và $\widehat{ASO}=60^\circ$.

Trong tam giác SAO vuông tại O, ta có

$OA=SA.\sin 60^\circ=a\sqrt{3}.$

Vậy diện tích toàn phần:

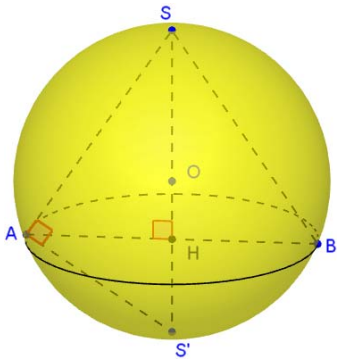
$S_{tp}=\pi R\ell+\pi R^2=\pi.OA.SA+\pi(OA)^2=\pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right)$ (đvdt).

Câu 6: Cho mặt cầu tâm O, bán kính $R=a$. Một hình nón có đỉnh là S ở trên mặt cầu và đáy là đường tròn tương giao của mặt cầu đó với mặt phẳng vuông góc với đường thẳng SO tại H sao cho $SH=\dfrac{3a}{2}$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng:

A. $\ell=a.$ **B.** $\ell=a\sqrt{2}.$ **C.** $\ell=a\sqrt{3}.$ **D.** $\ell=2a.$

Lời giải

Chọn C



Gọi S' là điểm đối xứng của S qua tâm O và A là một điểm trên đường tròn đáy của hình nón.

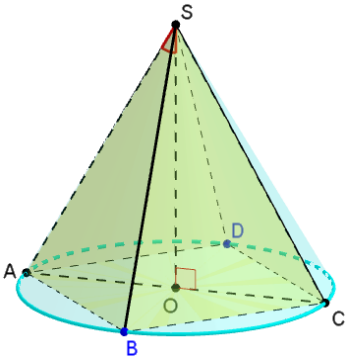
Tam giác SAS' vuông tại A và có đường cao AH nên $SA^2=SH.SS'\Rightarrow SA=a\sqrt{3}.$

Câu 7: Cho hình nón có đỉnh S, đường cao $SO=h$, đường sinh SA. Nội tiếp hình nón là một hình chóp đỉnh S, đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Nửa góc ở đỉnh của hình nón có tan bằng:

A. $\dfrac{h\sqrt{2}}{2a}.$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2h}.$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{h}.$ **D.** $\dfrac{h\sqrt{2}}{a}.$

Lời giải

Chọn C



Nửa góc ở đỉnh của hình nón là góc $\widehat{ASO}$.

Hình vuông $ABCD$ cạnh a nên suy ra

$OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA, ta có

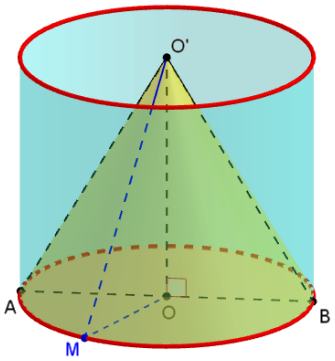
$\tan \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{SO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2h}$.

Câu 8: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O;R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Diện tích xung quanh của hình trụ:

$S_{xq(T)} = 2\pi R.h = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$ (đvdt).

Kẻ đường sinh $O'M$ của hình nón, suy ra

$\ell = O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R$.

Diện tích xung quanh của hình nón:

$S_{xq(N)} = \pi R\ell = \pi R.2R = 2\pi R^2$ (đvdt).

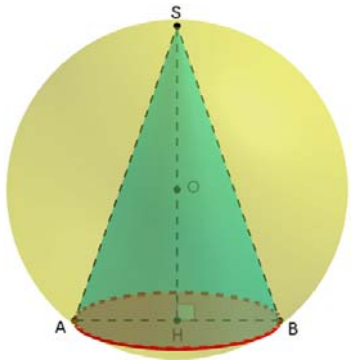
Vậy $\dfrac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}} = \sqrt{3}$.

Câu 9: Một hình nón có đường cao bằng $9cm$ nội tiếp trong một hình cầu bán kính bằng $5cm$. Tỉ số giữa thể tích khối nón và khối cầu là:

A. $\dfrac{27}{500}$. **B.** $\dfrac{81}{500}$. **C.** $\dfrac{27}{125}$. **D.** $\dfrac{81}{125}$.

Lời giải

Chọn B



Hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $SH = 9\text{cm}$, $OS = OA = 5\text{cm}$.

Suy ra $OH = 4\text{cm}$ và $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 3\text{cm}$.

Thể tích khối nón $V_n = \frac{1}{3}\pi AH^2.SH = 27\pi$ (đvtt).

Thể tích khối cầu $V_c = \frac{4}{3}\pi.SO^3 = \frac{500\pi}{3}$ (đvtt).

Suy ra $\frac{V_n}{V_c} = \frac{81}{500}$.

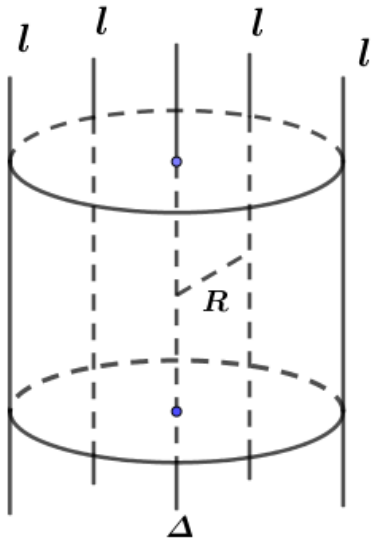
BÀI 2. MẶT TRỤ_HÌNH TRỤ_ KHỐI TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

Cho hai đường thẳng ℓ và Δ sao cho ℓ song song với Δ và $d[\ell,\Delta]=R$. Khi ta quay ℓ quanh trục Δ một góc 360^0 thì ℓ tạo thành một mặt trụ tròn xoay (T) (hoặc đơn giản hơn là mặt trụ).

- Δ gọi là trục của mặt trụ (T).
- ℓ gọi là đường sinh của mặt trụ (T).
- R gọi là bán kính của mặt trụ (T).



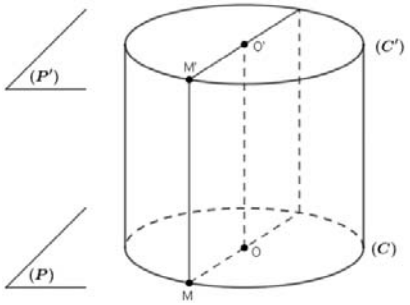
II. HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa hình trụ

Cắt mặt trụ (T) trục Δ, bán kính R bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn (C) và (C').

- Phần của mặt trụ (T) nằm giữa (P) và (P') cùng với hai hình tròn xác định bởi (C) và (C') gọi là hình trụ.
- Hai đường tròn (C) và (C') gọi là hai đường tròn đáy của hình trụ.
- OO' gọi là trục của hình trụ.
- Độ dài OO' gọi là chiều cao của hình trụ.
- Phần giữa hai đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Với mỗi điểm $M\in(C)$, có một điểm $M'\in(C')$ sao cho $MM'\|OO'$.

Các đoạn thẳng như MM' gọi là đường sinh của hình trụ.



2. Nhận xét

Các đường sinh của hình trụ đều bằng nhau và bằng với trục của hình trụ.

Các thiết diện qua trục của hình trụ là các hình chữ nhật bằng nhau.

Thiết diện vuông góc vơi trục của hình trụ là một hình tròn bằng hình tròn đáy.

Nếu một điểm M di động trong không gian có hình chiếu vuông góc M' lên một mặt phẳng (α) và M' di động trên môt đường tròn (C) cố định thì M thuộc một mặt trụ cố định (T) chứa (C) và có trục vuông góc (α).

3. Khối trụ

Định nghĩa. Hình trụ cùng với phần bên trong nó được gọi là khối trụ.

III. DIỆN TÍCH HÌNH TRỤ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính R và chiều cao h là: $\boxed{S_{xq}=2\pi Rh}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh hình trụ với diện tích hai đáy của nó.

Thể tích của khối trụ có bán kính R và chiều cao h là: $\boxed{V=\pi R^2h}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Xét các mệnh đề

(I) Tập hợp các đường thẳng d thay đổi nhưng luôn luôn song song và cách đường thẳng Δ cố định một khoảng không đổi là một mặt trụ.

(II) Hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian mà diện tích tam giác MAB không đổi là một mặt trụ.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả (I) và (II). **D.** Không có mệnh đề đúng.

Lời giải

Chọn C

Hiển nhiên (I) đúng.

Diện tích tam giác MAB không đổi khi và chỉ khi khoảng cách từ M đến đường thẳng AB không đổi (giả sử bằng R).

Vậy tập hợp các điểm M là mặt trụ bán kính R và trục là AB.

Vì vậy Mệnh đề (II) cũng đúng.

Câu 2: Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng a. Thể tích khối trụ bằng:

A. πa^3. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h=a$.

Bán kính đáy $R=\frac{a}{2}$. Do đó thể tích khối trụ $V=R^2\pi.h=\frac{\pi a^3}{4}$ (đvtt).

Câu 3: Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lần lượt có giá trị là:

A. $2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2$.

B. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$.

C. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\pi R^2$.

D. $2\sqrt{3}\pi R^2$ và $2\sqrt{3}\pi R^2+R^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq}=2\pi R.R\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi R^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$S_{tp}=S_{xq}+2.S_{\text{day}}=2\sqrt{3}\pi R^2+2\left(\pi R^2\right)=2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi R^2$ (đvdt).

Câu 4: Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh có cạnh bằn $2R$. Diện tích toàn phần của khối trụ bằng:

A. $4\pi R^2$.

B. $6\pi R^2$.

C. $8\pi R^2$.

D. $2\pi R^2$.

Lời giải

Chọn B

Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h=2R$.

Diện tích toàn phần là: $S_{tp}=2\pi R\left(R+h\right)=6\pi R^2$ (đvdt).

Câu 5: Một hình trụ có bán kính đáy $R=70\text{cm}$, chiều cao hình trụ $h=20\text{cm}$. Một hình vuông có các đỉnh nằm trên hai đường tròn đáy sao cho có ít nhất một cạnh không song song và không vuông góc với trục hình trụ. Khi đó cạnh của hình vuông bằng bao nhiêu?

A. 80cm.

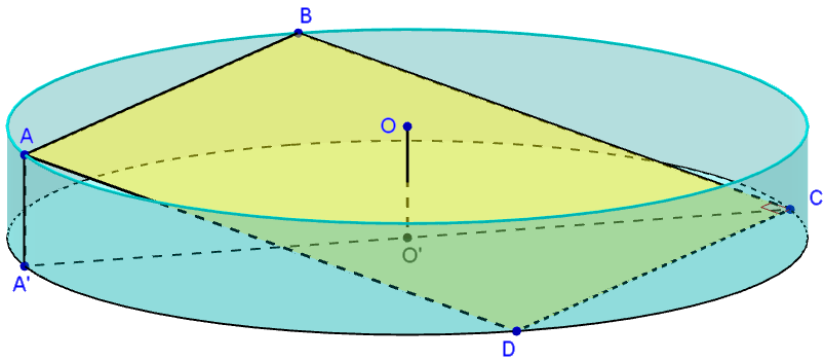
B. 100cm.

C. $100\sqrt{2}$cm.

D. 140cm.

Lời giải

Chọn B



Xét hình vuông $ABCD$ có AD không song song và không vuông góc với trục OO' của hình trụ.

Dựng đường sinh AA', ta có

$\begin{cases}CD\perp AA'\\CD\perp AD\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(AA'D\right)\Rightarrow CD\perp A'D$.

Suy ra $A'C$ là đường kính đáy nên

$A'C=2R=140\text{cm}$.

Xét tam giác vuông $AA'C$, ta có

$AC=\sqrt{AA'^2+A'C^2}=100\sqrt{2}\text{cm}$.

Suy ra cạnh hình vuông bằng 100cm.

Câu 6: Bán kính đáy hình trụ bằng 4cm, chiều cao bằng 6cm. Độ dài đường chéo của thiết diện

qua trục bằng:

A. 10cm. **B.** 6cm. **C.** 5cm. **D.** 8cm.

Lời giải

Chọn A

Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt bằng đường kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Vậy hai cạnh của hình chữ nhật là 8cm và 6cm.

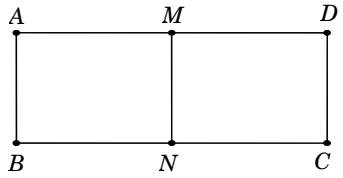
Do đó độ đài đường chéo: $\sqrt{8^2+6^2}=10\text{cm}.$

Câu 7: Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

A. 2π. **B.** 3π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết ta được hình trụ có chiều cao $h=AB=1$, bán kính đáy $R=\dfrac{AD}{2}=1$.

Do đó diện tích toàn phần:

$S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=4\pi.$

Câu 8: Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chu vi đáy bằng $2a$ thì thể tích của nó bằng:

A. $\dfrac{a^3}{\pi}$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{a^3}{2\pi}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy là R.

Hình trụ có chu vi đáy bằng $2a$ nên ta có $2\pi R=2a\Leftrightarrow R=\dfrac{a}{\pi}$.

Suy ra hình trụ này có đường cao $h=a.$

Vậy thê tích khối trụ $V=\pi R^2h=\pi\left(\dfrac{a}{\pi}\right)^2 a=\dfrac{a^3}{\pi}$ (đvtt).

Câu 9: Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chiều dài đường sinh bằng $2a$ thì bán kính đáy bằng:

A. $\dfrac{a}{\pi}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2\pi}$. **D.** $2\pi a$.

Lời giải

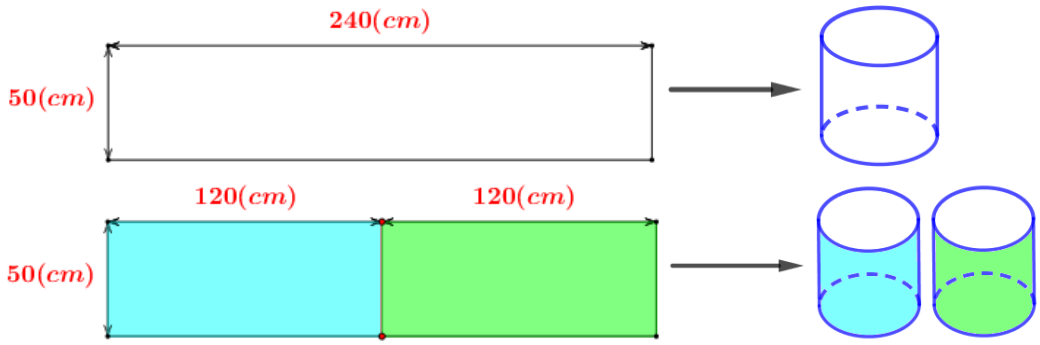
Chọn C

Gọi bán kính đáy là R.

Từ giả thiết suy ra $h=2a$ và chu vi đáy bằng a.

Do đó $2\pi R=a\Leftrightarrow R=\dfrac{a}{2\pi}$.

Câu 10: Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm}\times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa sau đây):



● **Cách 1**: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

● **Cách 2**. Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm tôn bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là thể tích của thùng gò được theo cách 2. Khi đó tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Công thức thể tích khối trụ $V=\pi R^2h$.

● Ở cách 1, suy ra $h=50\text{cm}$ và $2\pi R_1=240\Leftrightarrow R_1=\dfrac{120}{\pi}$. Do đó $V_1=\pi.\left(\dfrac{120}{\pi}\right)^2.50$ (đvtt).

● Ở cách 2, suy ra mỗi thùng có $h=50\text{cm}$ và $2\pi R_2=120\Leftrightarrow R_2=\dfrac{60}{\pi}$.

Do đó $V_2=2\times\left[\pi.\left(\dfrac{60}{\pi}\right)^2.50\right]$ (đvtt).

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=2$.

Câu 11: Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

A. $h=R$. **B.** $h=\sqrt{2}R$. **C.** $h=\sqrt{3}R$. **D.** $h=2R$.

Lời giải

Chọn A

Công thức tính thể tích $V=\pi R^2h$, suy ra $h=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

Hộp sữa chỉ kín một đáy nên diện tích tôn cần dùng là:

$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 2\pi Rh + \pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + \pi R^2.$

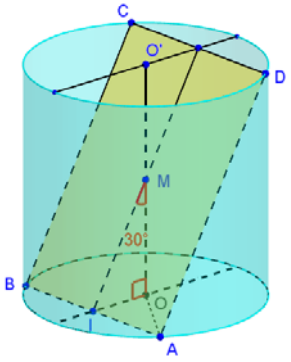
Xét hàm $f(R) = \dfrac{2V}{R} + \pi R^2$ trên $(0;+\infty)$, ta được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(R)$ đạt tại $R = h.$

Câu 12: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tọa với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}.$ **B.** $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}.$ **C.** $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$ **D.** $\dfrac{2R}{3}.$

Lời giải

Chọn C



Hình vẽ, kết hợp với giả thiết ta có:

$OA = OB = R$, $OO' = 2R$ và $\widehat{IMO} = 30^0$.

Trong tam giác vuông MOI, ta có $OI = MO.\tan 30^0 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}.$

Trong tam giác vuông AIO, ta có

$IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Suy ra $AB = 2IA = \dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

BÀI 3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Mặt cầu

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R.

Kí hiệu: $S(O;R)=\{M\,|OM=R\}$.

2. Khối cầu

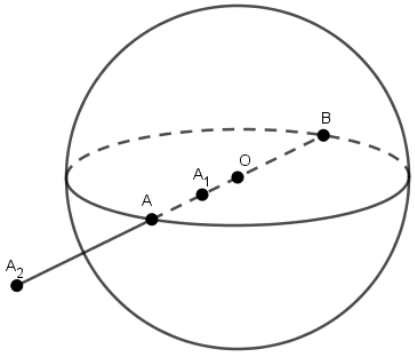
Mặt cầu $S(O;R)$ cùng với các điểm nằm bên trong nó được gọi là một khối cầu tâm O, bán kính R.

Kí hiệu: $B(O;R)=\{M\,|OM\le R\}$.

Nếu OA, OB là hai bán kính của mặt cầu sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB gọi là đường kính của mặt cầu.

Định lí. Cho hai điểm cố định A, B. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB}=90^0$ là mặt cầu đường kính AB.

- $A\in S(O;R)\Leftrightarrow OA=R$.
- $OA_1<R\Leftrightarrow A_1$ nằm trong mặt cầu.
- $OA_2>R\Leftrightarrow A_2$ nằm ngoài mặt cầu.

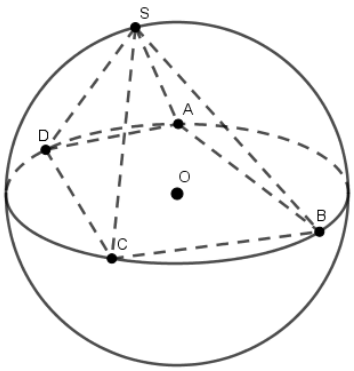


II. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Định nghĩa: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện (H) gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện (H) và khi đó (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.



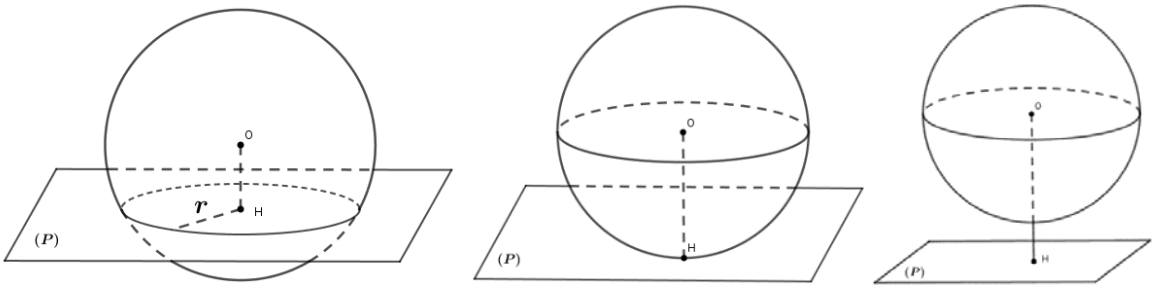
III. MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP

1. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với với tất các mặt của hình chóp.

2. Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O đến (P) và H là hình chiếu vuông góc của O trên (P). Khi đó



● Nếu $d<R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Khi $d=0$ thì mặt phẳng (P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có tâm O và bán kính R, đường tròn đó gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

●Nếu $d=R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ có một điểm chung duy nhất H.

Khi đó ta nói (P) tiếp xúc với $S(O;R)$ tại H và (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.

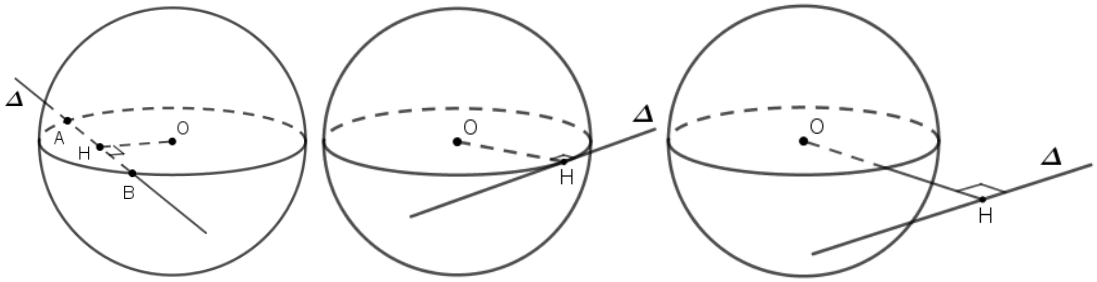
Chú ý. Cho H là một điểm thuộc mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P) qua H. Thế thì:

(P) tiếp xúc với $S(O;R)\Leftrightarrow OH\perp(P)$.

●Nếu $d>R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ không có điểm chung.

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ. Khi đó



● Nếu $d<R$ thì Δ cắt $S(O;R)$ tại hai điểm A, B và H là trung điểm của AB.

● Nếu $d=R$ thì Δ và $S(O;R)$ chỉ có một điểm chung H, trong trường hợp này Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O;R)$ hay Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ và H là tiếp điểm.

● Nếu $d>R$ thì Δ và $S(O;R)$ không có điểm chung.

VI. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Gọi R là bán kính của mặt cầu thì

● Diện tích mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$.

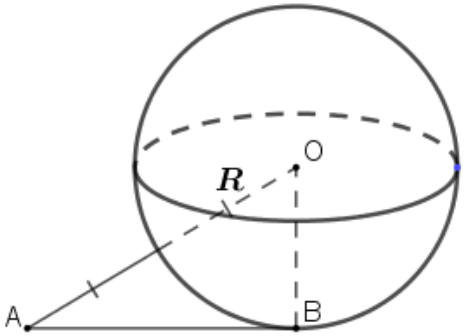
● Thể tích khối cầu: $\boxed{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A, biết $OA=2R$. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B. Khi đó độ dài đoạn AB bằng:

A. R. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $R\sqrt{2}$. **D.** $R\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn D

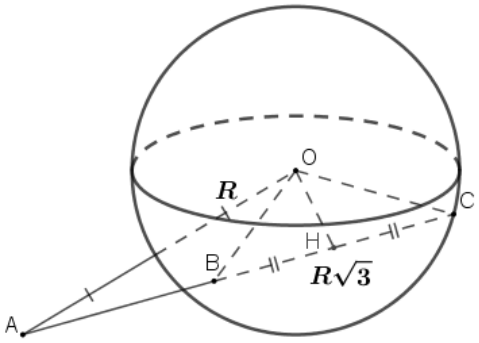
Vì AB tiếp xúc với (S) tại B nên $AB\perp OB$.

Suy ra $AB=\sqrt{OA^2-OB^2}=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A, biết $OA=2R$. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại B và C sao cho $BC=R\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ O đến BC bằng:

A. R. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $R\sqrt{2}$. **D.** $R\sqrt{3}$.

Lời giải



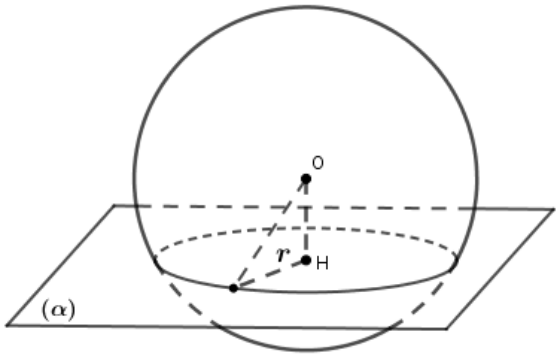
Chọn B

Gọi H là hình chiếu của O lên BC.

Ta có $OB=OC=R$, suy ra H là trung điểm của BC nên $HC=\frac{CD}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OH=\sqrt{OC^2-HC^2}=\frac{R}{2}$.

Câu 3: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (α). Biết khoảng cách từ O đến (α) bằng $\frac{R}{2}$. Khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với $S(O;R)$ là một đường tròn có đường kính bằng:



A. R. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R}{2}$. **D.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của O xuống (α).

Ta có $d[O,(\alpha)]=OH=\frac{R}{2}<R$ nên (α) cắt $S(O;R)$ theo đường tròn $C(H;r)$.

Bán kính đường tròn $C(H;r)$ là $r=\sqrt{R^2-OH^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra đường kính bằng $R\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho mặt cầu tâm I bán kính $R=2,6\text{cm}$. Một mặt phẳng cắt mặt cầu và cách tâm I một khoảng bằng $2,4\text{cm}$. Thế thì bán kính của đường tròn do mặt phẳng cắt mặt cầu tạo nên là:

A. $1,2\text{cm}$. **B.** $1,3\text{cm}$. **C.** 1cm. **D.** $1,4\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng cắt mặt cầu $S(I;2,6\text{cm})$ theo một đường tròn $(H;r)$.

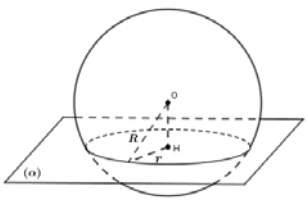
Vậy $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{(2,6)^2-(2,4)^2}=1\text{cm}$.

Câu 5: Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là p. Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là $\frac{p}{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng:

A. $\sqrt{\frac{p}{\pi}}$. **B.** $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. **C.** $\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$. **D.** $\sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Lời giải

Chọn D



Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu. Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là R.

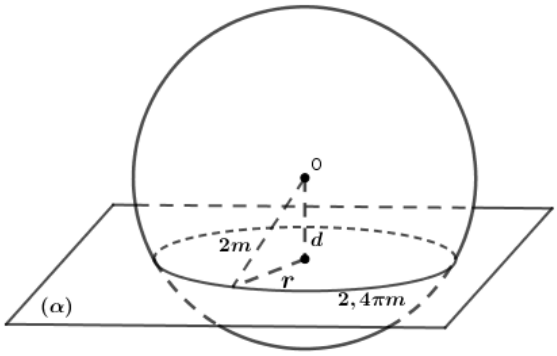
Theo giả thiết, ta có $\pi R^2 = p \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$ và $\pi r^2 = \frac{p}{2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Suy ra $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{p}{2\pi}}$.

Câu 6: Một hình cầu có bán kính là 2m, một mặt phẳng cắt hình cầu theo một hình tròn có độ dài là $2,4\pi\text{m}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là:

A. $1,6\text{m}$. **B.** $1,5\text{m}$. **C.** $1,4\text{m}$. **D.** $1,7\text{m}$.

Lời giải



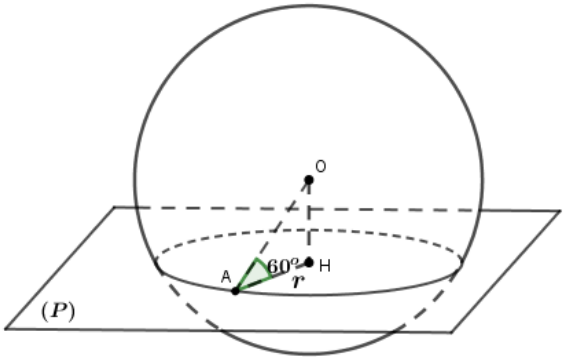
Chọn A

Gọi khoảng cách từ tâm cầu đến mặt phẳng là d, ta có $d^2 = R^2 - r^2$.

Theo giả thiết $R = 2\text{m}$ và $2\pi r = 2,4\pi m \Rightarrow r = \frac{2,4\pi}{2\pi} = 1,2\text{m}$.

Vậy $d = \sqrt{R^2 - r^2} = 1,6\text{m}$.

Câu 7: Cho mặt cầu $S(O;R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng 60^0.



Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng:

A. πR^2. **B.** $\frac{\pi R^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi R^2}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì

- H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) và (S).

- $\widehat{OA,(P)}=\widehat{(OA,AH)}=60^0$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến: $r=HA=OA.\cos 60^0=\dfrac{R}{2}$.

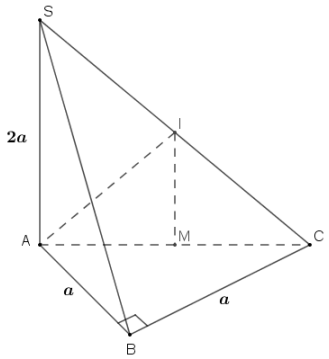
Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến: $\pi r^2=\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2=\dfrac{\pi R^2}{4}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA=BC=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm AC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra

$IM \parallel SA$ nên $IM \perp (ABC)$.

Do đó IM là trục của ΔABC, suy ra

$IA=IB=IC.$ (1)

Hơn nữa, tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm SC nên $IS=IC=IA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $IS=IA=IB=IC$

hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

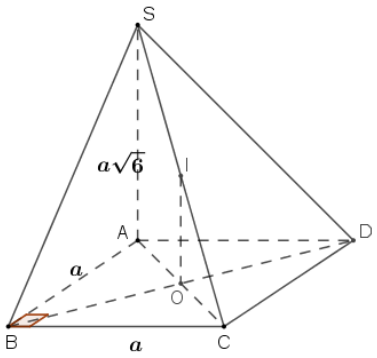
Vậy bán kính $R=IS=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ ta được:

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra

$IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

Do đó IO là trục của hình vuông $ABCD$, suy ra

$IA = IB = IC = ID.\ (1)$

Tam giác SAC vuông tại A có I là trung điểm cạnh huyền SC nên $IS = IC = IA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $R = IA = IB = IC = ID = IS = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}.$

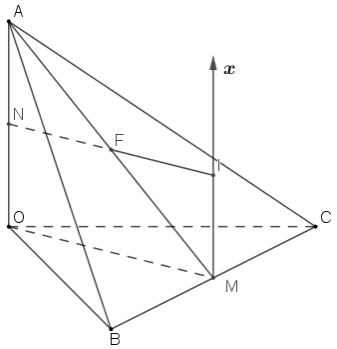
Vậy diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$ (đvdt).

Câu 10: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{3a}{2}.$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC,

suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOBC.

Kẻ $Mx \perp (OBC)$ (như hình vẽ).

Suy ra Mx là trục của ΔOBC.

Trong mặt phẳng (OA, Mx), kẻ trung trực d của đoạn thẳng OA cắt Mx tại I.

Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bán kính mặt cầu: $R = IO = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}.$

CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Vecto trong không gian:

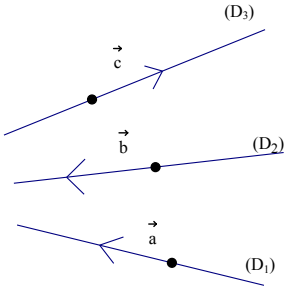
1. Định nghĩa

Trong không gian, vecto là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu.

 Chú ý: Các định nghĩa về hai vecto bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các vecto trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

2. Vecto đồng phẳng

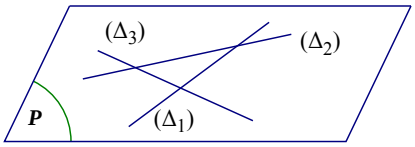
a. Định nghĩa: Ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



 Chú ý:

 n vecto khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

 Các giá của các vecto đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.



b. Điều kiện để ba vecto khác $\vec{0}$ đồng phẳng:

 Định lý 1:

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n\in R:\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$

c. Phân tích một vecto theo ba vecto không đồng phẳng:

 Định lý 2: Cho ba vecto $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kỳ một vecto $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba vecto đó, nghĩa là có một bộ ba số thực (x_1,x_2,x_3) duy nhất sao cho:

$$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}$$

 Chú ý: Cho ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$:

 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0$$

□ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow m=n=p=0$

II. Tọa độ của vecto:

Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng $Oxyz$ tại O. Các vectơ đơn vị trên từng trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;0;1)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.

1. Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

2. $M(x_M;y_M;z_M)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$

3.Cho $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ tacó:

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

4. M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

III. Tọa độ của véctơ

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

1. $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

2. Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có

□ $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$

□ $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$

□ $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

□ $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

□ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

□ $cos\varphi=cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

□ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

□ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùngphương $\Leftrightarrow\exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

III. Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng:

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2a_3\\b_2b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3a_1\\b_3b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1a_2\\b_1b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

1. Tính chất:

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
- $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|sin(\vec{a},\vec{b})$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$

2. Các ứng dụng tích có hướng:

- Diện tích tam giác: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$
- Thểtích tứ diện$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích khối hộp:

$V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

IV. Phương trình mặt cầu

1. Mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

2. Phương trình: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Các dạng toán mở đầu về hệ tọa độ oxyz

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1;2;3);\vec{b}(2;2;-1);\vec{c}(4;0;-4)$.

Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2.4;2-2+2.0;3+1+2.(-4))=(7;0;-4)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vecto $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$ **B.** $(-1;-2;3)$ **C.** $(3;5;1)$ **D.** $(3;4;1)$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(1;2;3)$

Câu 3: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-3;4)$ và $B(5;6)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;5)$. **B.** $(4;1)$. **C.** $(5;1)$. **D.** $(8;2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó ta có: $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-3+5}{2}=1 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{4+6}{2}=5 \end{cases}$

$\Rightarrow I(1;5)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vecto $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vecto $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$.

C. $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2;-6;-1)$

Vậy chọn đáp án **D**

Câu 5: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là:

A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{a}(2;-3;-1)$. **C.** $\vec{a}(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{a}(x;y;z)$ nên $\vec{a}(-1;2;-3)$. Do đó Chọn A

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;9)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(0;3;3)$. **B.** $(4;-2;12)$. **C.** $(2;-1;6)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Ta có $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+9}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow I(2;-1;6)$.

Câu 7: Cho $\vec{a} = (2;1;3)$, $\vec{b} = (4;-3;5)$, $\vec{c} = (-2;4;6)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ là

A. $(10;9;6)$ **B.** $(12;-9;7)$ **C.** $(10;-9;6)$ **D.** $(12;-9;6)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (2+8+2;1-6-4;3+10-6) = (12;-9;7)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB.

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 11 **C.** $\sqrt{11}$ **D.** 27

Lời giải

Chọn C

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;-3)$, $\vec{b} = (-2;-4;6)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\vec{a} = 2\vec{b}$. **B.** $\vec{b} = -2\vec{a}$. **C.** $\vec{a} = -2\vec{b}$. **D.** $\vec{b} = 2\vec{a}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-2 = -2.1; -4 = -2.2; 6 = -2.(-3)$ suy ra $\vec{b} = -2\vec{a}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0;2;-1), B(-5;4;2), C(-1;0;5)$. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là:

A. $(-1;1;1)$. **B.** $(-6;6;6)$. **C.** $(-3;3;3)$. **D.** $(-2;2;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{0-5-1}{3} \\ y_G = \dfrac{2+4+0}{3} \\ z_G = \dfrac{-1+2+5}{3} \end{cases} \Rightarrow G(-2;2;2)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;2;1)$, $\vec{b}=(-2;0;1)$. Độ dài của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(1;2;2) \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$.

Câu 12: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, B vectơ $\overrightarrow{AB}(1;3;1)$. Xác định tọa độ B.

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Lời giải.

Chọn A

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;1;3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là:

A. $(0;1;0)$. **B.** $(-2;0;0)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(0;1;3)$.

Lờigiải

Chọn B

Chiếu vuông góc một điểm bất kỳ lên trục Ox khi đó giữ nguyên hoành độ còn tung độ và cao độ bằng 0.

Vậy hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là: $(-2;0;0)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tìm tọa độ của $\vec{a}$.

A. $(-2;-1;-3)$ **B.** $(-3;2;-1)$ **C.** $(2;-3;-1)$ **D.** $(-1;2;-3)$

Lời giải

Chọn D

$\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(-1;2;-3)$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm:

A. $M_3(3;0;0)$. **B.** $M_4(0;2;0)$. **C.** $M_1(0;0;-1)$. **D.** $M_2(3;2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$ và $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}(0;6;4)$ Suy ra $AB=\sqrt{0^2+6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1), B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(2;2;3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn A

Hai điểm $A(0;1;-1), B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(2;2;3)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5), \overrightarrow{AC}=(x+1;y-2;1)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

Câu 19: Tìm tọa độ véctơ $\vec{u}$ biết rằng $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}$ và $\vec{a}=(1;-2;1)$.

A. $\vec{u}=(-3;-8;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;-2;8)$.

C. $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(6;-4;-6)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{u}=-\vec{a}=(-1;2;-1)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(m;1;0)$, $\vec{b}=(2;m-1;1)$, $\vec{c}=(1;m+1;1)$. Tìm m để ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

A. $m=-2$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\left(1;-m;m^2-m-2\right)\Rightarrow\left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c}=-2m-1$

Ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c}=0\Leftrightarrow-2m-1=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=\left(2;m-1;3\right)$, $\vec{b}=\left(1;2;-2n\right)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=1$; $n=0$.

C. $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$. **D.** $m=4$; $n=-3$.

Lời giải

Chọn A

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Rightarrow\vec{a}=k\vec{b}\Rightarrow\begin{cases}2=k\\m-1=3k\\3=-2k.n\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\m=7\\n=-\frac{3}{4}\end{cases}$.

Câu 22: Cho điểm $M\left(1;2;-3\right)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ là điểm

A. $M'\left(1;2;0\right)$. **B.** $M'\left(1;0;-3\right)$. **C.** $M'\left(0;2;-3\right)$. **D.** $M'\left(1;2;3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ hình chiếu vuông góc M' của $M\left(1;2;-3\right)$ lên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ có dạng $M'\left(1;2;0\right)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M\left(1;-3;-5\right)$ trên mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ có toạ độ là

A. $\left(0;-3;5\right)$. **B.** $\left(0;-3;0\right)$. **C.** $\left(1;-3;0\right)$ **D.** $\left(0;-3;-5\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $\left(Oyz\right)$.

$\left(Oyz\right)$ có phương trình: $x=0$

Đường thẳng d qua $M(1;-3;-5)$ và vuông góc với (Oyz) có phương trình: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3 \\ z=-5 \end{cases}$

Ta có $(Oyz)\cap d=\{H\}$ nên toạ độ H thoả mãn hệ: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3 \\ z=-5 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ z=-5 \\ x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow H(0;-3;-5)$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC biết $A(2,4,-3)$; $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,1)$; $\overrightarrow{AC}=(2,-6,6)$. Tìm tọa độ vector trung tuyến $\overrightarrow{AM}$

A. $(1,7,-7)$. **B.** $(-1,-7,7)$. **C.** $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2},-\frac{7}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$

.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$

Câu 25: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC: biết $A(2,4,-3)$; $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,1)$; $\overrightarrow{AC}=(2,-6,6)$. Tìm tọa độ vector trung tuyến $\overrightarrow{AM}$

A. $\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(-1,3,-\frac{8}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}\begin{cases} x-x_A=-3 \\ y-y_A=-1 \\ z-z_A=1 \end{cases}\Rightarrow B(-1;3;-2)$; $\overrightarrow{AC}\begin{cases} x-x_A=2 \\ y-y_A=-6 \\ z-z_A=6 \end{cases}\Rightarrow C(4;-2;3)$

$\Rightarrow G\begin{cases} x=\frac{1}{3}(2-1+4)=\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{3}(4+3-2)=\frac{5}{3} \\ z=\frac{1}{3}(-3-2+3)=\frac{-2}{3} \end{cases}$

Câu 26: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC biết $A(2,4,-3)$; $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,1)$; $\overrightarrow{AC}=(2,-6,6)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành

A. $(-7,1,-2)$. **B.** $(1,-3,4)$. **C.** $(7-,1,2)$. **D.** $(-1,3,-4)$.

Lời giải

Chọn C

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A=2+3 \\ y-y_A=-6+1 \Rightarrow D(7;-1;2) \\ z-z_A=6-1 \end{cases}$$

Câu 27: Cho ba điểm $A(3,1,0);\ B(2,1,-1);\ C(x,y,-1)$. Tìm tọa độ của C để ABC là tam giác đều:

A. $(3,2,-1)$. **B.** $(3,0,-1)$.

C. $(-3,-2,1);\ (3,0,-1)$. **D.** $(3,2,-1);\ (3,0,-1)$.

Lời giải

Chọn D

Tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC=AB \\ BC=AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-6x-2y+9=0 & (1) \\ x^2+y^2-4x-2y+3=0 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1): 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y^2-2y=0 \Leftrightarrow y=2 \vee y=0$

Hai điểm $C(3;2;-1); C'(3;0;-1)$

Câu 28: Cho ba điểm $A(3,1,0);\ B(2,1,-1);\ C(x,y,-1)$. Tìm tọa độ của C để tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A

A. $(4,1+\sqrt{2});\ (4,1-\sqrt{2})$. **B.** $(4,1)$.

C. $(2,1)$. **D.** $(2,-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tam giác ABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} \\ AB=AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ AC^2=AB^2 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=(-1,0,1-1) \Rightarrow AB^2=2; \quad \overrightarrow{AC}=(x-3,y-1,-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1(x-3)+0(y-1)+1=0 \\ (x-3)^2+(y-1)^2+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^2+y^2-6x-2y+9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(4;1)$$

Câu 29: Cho ba điểm $A(3,1,0);\ B(2,1,-1);\ C(x,y,-1)$. Tính x và y để A,B,C thẳng hàng:

A. $x=2,\ y=1$. **B.** $x=2,\ y=-1$. **C.** $x=-2,\ y=-1$. **D.** $x=1,\ y=2$.

Lời giải

Chọn A

A,B,C thẳng thàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2-a_2b_1=0\\a_2b_3-a_3b_2=0\\a_3b_1-a_1b_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1(y-1)-0(x-3)=0\\0(-1)-(-1)(y-1)=0\\-1(x-3)-(-1)(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Câu 30: Cho ba điểm $A(3,1,0);\ B(2,1,-1);\ C(x,y,-1)$. Tính $x,\ y$ để $G\left(2,-1,-\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC

A. $x=2,\ y=1$. **B.** $x=2,\ y=-1$. **C.** $x=-2,\ y=-1$. **D.** $x=1,\ y=-5$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases}3+2+x=3.2=6\\1+1+y=3(-1)=-3\\0-1-1=3\left(-\frac{2}{3}\right)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}$$

Câu 31: Cho ba điểm $A(2,-1,1);\ B(3,-2,-1);\ C(1,3,4)$. Tìm điểm N trên $x'Ox$ cách đều A và B.

A. $(4,0,0)$. **B.** $(-4,0,0)$. **C.** $(1,0,0)$. **D.** $(2,0,0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $N(x,0,0)$ trên $x'Ox$. Ta có $AN^2=BN^2$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(1)^2+(-1)^2=(x-3)^2+(2)^2+1^2\Leftrightarrow x=4\Rightarrow N(4,0,0)$$

Câu 32: Cho ba điểm $A(2,-1,1);\ B(3,-2,-1);\ C(1,3,4)$. Tìm điểm E trên mặt phẳng (xOy) cách đều A,B,C.

A. $\left(\frac{14}{3},\frac{26}{3},0\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{3},\frac{13}{3},0\right)$. **C.** $\left(\frac{26}{3},-\frac{14}{3},0\right)$. **D.** $\left(\frac{26}{3},\frac{14}{3},0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $E(x,y,0)$ trên mặt phẳng (xOy). Ta có: $EA=EB=EC$

$$\Rightarrow\begin{cases}AE^2=BE^2\\AE^2=CE^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2+(-1)^2=(x-3)^2+(y+2)^2+1^2\\(x-2)^2+(y+1)^2+(-1)^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(-4)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=4\\x-4y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{26}{3}\\y=\frac{14}{3}\end{cases}\Rightarrow E\left(\frac{26}{3},\frac{14}{3},0\right)$$

Câu 33: Tính góc của hai vectơ $\vec{a}=(-4,2,4)$; $\vec{b}=\left(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0\right)$

A. 60^0. **B.** 135^0. **C.** 30^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn B

$$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\frac{-8\sqrt{2}-4\sqrt{2}+0}{\sqrt{36}.\sqrt{16}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=135^0$$

Câu 34: Cho hai vectơ $\vec{V}=m\vec{a}-2\vec{b}$ và $\vec{W}=m\vec{b}-\vec{a}$ với $\vec{a}=(2,1,-1)$ và $\vec{b}=(1,-2,1)$. Định m để $\vec{V}$ và $\vec{W}$ vuông góc.

A. $-3\pm\sqrt{7}$. **B.** $3\pm\sqrt{7}$. **C.** $9\pm\sqrt{79}$. **D.** $-9\pm\sqrt{79}$.

Lời giải

Chọn D

$\vec{V}$ vuông góc $\vec{W}\Leftrightarrow\left(m\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(m\vec{b}-\vec{a}\right)=0$ (1)

Với $\vec{a}^2=6;\vec{b}^2=6;\vec{a}.\vec{b}=-1$

$(1)\Leftrightarrow m^2+18m+2=0\Leftrightarrow m=-9\pm\sqrt{79}$

Dạng 2: Các bài toán cơ bản về phương trình mặt cầu

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$. Tính bán kính R của (S).

A. 1. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu

$(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$

Ta có: $a=-2,b=1,c=0,d=-4\Rightarrow$ Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=3$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(3;1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(3;-1;1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2xy-4y+4z-1=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+8=0$

Lời giải

Chọn A

Đáp án B vì không có số hạng y^2. Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$. Đáp án D loại vì $a^2+b^2+c^2-d=1+1+4-8=-2<0$.

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2+b^2+c^2-d=1+0+4+1=6>0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0$$
$$\Leftrightarrow m^2-2m-10<0$$
$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$$

Theo bài ra $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):\mathrm{x}-2\mathrm{y}-2\mathrm{z}-8=0$ có phương trình là :

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách từ tâm $I(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình là :

$$d(I;(P))=\frac{|1-2.2+2-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$$

Đây là bán kính mặt cầu. Vậy chọn C

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$. **B.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$. **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải.

Chọn B

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3;3;1)$, bán kính $R=IA=3$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

A. $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=18$. **B.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=16$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$ nên có bán kính $R=IA=3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 8: Với giá trị nào của m thì mặt phẳng $(P):2x-y+z-5=0$ tiếp xúc với mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2mx+2(2-m)y-4mz+5m^2+1=0$?

A. $m=-3$. **B.** $m=1 \vee m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Lời giải

Chọn A

$a=m;b=m-2;c=2m;d=5m^2+1$. Tâm $I(m,m-2,2m)$

$\Rightarrow R^2=m^2+(m-2)^2+4m^2-5m^2-1=m^2-4m+3>0$

$\Rightarrow m<1 \vee m>3.(P)$ tiếp xúc (S) khi:

$d(I,P)=\dfrac{|3m-3|}{\sqrt{6}}=R=\sqrt{m^2-4m3}$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow m=-3 \vee m=1$ (loại)

$\Rightarrow m=-3$.

Câu 9: Với giá trị nào của m thì mặt phẳng $(Q):x+y+z+3=0$ cắt mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my-2mz+2m^2+9=0$?

A. $-4<m<5$. **B.** $m=-4 \vee m=5$. **C.** $m>5$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>5 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

$a=m+1; b=-m; c=m; d=2m^2+9$. Tâm $I(m+1,-m,m)$

$\Rightarrow R^2=(m+1)^2+m^2+m^2-2m^2-9=m^2+2m-8>0$

$\Rightarrow m<-4 \vee m>2$. (P) cắt (S) khi:

$d(I,P)<R \Leftrightarrow \dfrac{|m+4|}{\sqrt{3}}<\sqrt{m^2+2m-8} \Leftrightarrow m<-4 \vee m>5$.

Câu 10: Mặt phẳng $(P): 2x-4y+4z+5=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$.

A. Tiếp xúc. **B.** Không cắt nhau.

C. Cắt nhau. **D.** (P) qua tâm (S)

Lời giải

Chọn C

$a=1; b=-2; c=-1; d=-3 \Rightarrow R=3$. Tâm $I=(1,-2,-1)$

$d(I,P)=\dfrac{11}{6}<R=3 \Rightarrow (P)$ cắt (S).

Câu 11: Xét vị trí tương đối của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2--6x-4y-8z+13=0$ và mặt phẳng $(Q): x-2y+2z+5=0$.

A. Cắt nhau. **B.** Tiếp xúc.

C. (Q) là mặt phẳng đối xứng của (S). **D.** Không cắt nhau

Lời giải

Chọn B

$a=3; b=2; c=4; d=13 \Rightarrow R=4$. Tâm $I(3,2,4)$

$d(I,P)=\dfrac{12}{3}=4=R \Rightarrow (P)$ tiếp xúc (S).

Câu 12: Với giá trị nào của m thì mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2my+4mz+4m^2+3m+2=0$ tiếp xúc trục $z'Oz$.

A. -2. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(-2,m,-2m)$, bán kính $R=\sqrt{m^2-3m+2}, m<1 \vee m>2$

Hình chiếu A của I trên z'Oz là tiếp điểm của (S) và z'Oz $\Rightarrow A(0,0,-2m)$

Ta có: $d(I,z'Oz)=AI=\sqrt{4+m^2}=R=\sqrt{m^2-3m+2}$

$\Leftrightarrow 4+m^2=m^2-3m+2 \Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 13: Tính bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-2=0$

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 7. **D.** $\sqrt{7}$

Lời giải

(S) có tâm $I(2,1,-3)$, bán kính $R=4 \Rightarrow d(I,P)=3=IH, IH \perp (P)$

$\Rightarrow r^2=R^2-IH^2=16-9=7 \Rightarrow r=\sqrt{7}$.

Câu 14: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-2,1,-1)$ qua $A(4,3,-2)$.

A. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+35=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-35=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+35=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y-2z-35=0$

Lời giải

Chọn B

$M(x,y,z) \in (S) \Rightarrow IM^2=IA^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(4+2)^2+(3-1)^2+(-2+1)^2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y+2z-35=0$

Câu 15: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $E(-1,2,4)$ qua gốc O.

A. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z+42=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z+21=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z-42=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z=0$

Lời giải

Chọn D

$M(x,y,z) \in (S) \Rightarrow EM^2=OE^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1+4+16$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-8z=0$

Câu 16: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1,2,-3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 4x-2y+4z-3=0$.

A. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+\frac{31}{4}=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+31=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+\frac{25}{4}=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+-2x-4y+6z+25=0$

Lời giải

Chọn A

Bán kính $R=d(I,P)=\frac{5}{2} \Rightarrow (S): (x-1)^2+(y-2)^2+(y+3)^2=\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+\frac{31}{4}=0$.

BÀI 2. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Định nghĩa:

Trong không gian Oxyz phương trình dạng Ax + By + Cz + D = 0

với $A^2+B^2+C^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Phương trình mặt phẳng (P): Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2+B^2+C^2 > 0$. Có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C), \vec{n}\neq\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng (P): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
- Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương,có giá song song hoặc nằm trên (P).Thì vectơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

1. Các trường hợp riêng của mặt phẳng:

Trong không gian Oxyz cho mp(α): Ax + By + Cz + D = 0, với $A^2+B^2+C^2 > 0$ Khi đó:

- D = 0 khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
- A=0, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$ Khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox
- A=0, B = 0, $C\neq 0$, $D\neq 0$ Khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)
- A, B, C, $D\neq 0$. Đặt $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ Khi đó $(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho (α): Ax+By+Cz+D=0 và (α'):A'x+B'y+C'z+D'=0

- (α) cắt (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB' \neq A'B \\ BC' \neq B'C \\ CB' \neq C'B \end{cases}$
- (α) // (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB' = A'B \\ BC' = B'C \\ CB' = C'B \end{cases}$ và $AD' \neq A'D$
- (α) $\equiv$ (α') $\Leftrightarrow \begin{cases} AB' = A'B \\ BC' = B'C \\ CB' = C'B \\ AD' = A'D \end{cases}$

Đặc biệt

(α) $\perp$ (α') $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

3. Góc giữa hai mặt phẳng:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(0^0 \le \varphi \le 90^0\right)$.

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua điểm $B(3,4,-5)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$ là:.

A. $x-4y-7z-16=0$. **B.** $x-4y+7z+16=0$.

C. $x+4y+7z+16=0$. **D.** $x+4y-7z-16=0$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-1,-4,-7)$ có thể thay thế bởi $\vec{n}=(1,4,7)$

Phương trình (α) có dạng $x+4y+7z+D=0$.

$B\in(\alpha)\Leftrightarrow 3+16-35+D=0\Leftrightarrow D=16$

$(\alpha): x+4y+7z+16=0$.

Câu 2: Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua $A(3,-1,2)$, $B(4,-2,-1)$, $C(2,0,2)$ là:

A. $x+y-2=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-3), \overrightarrow{AC}=(-1,1,0); \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3,3,0)$: Chọn $\vec{n}=(1,1,0)$ làm vectơ pháp tuyến:phương trình (ABC) có dạng $x+y+D=0$

Qua A $\Leftrightarrow 3-1+D=0\Leftrightarrow D=-2$

Phương trình $(ABC): x+y-2=0$.

Câu 3: Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua $A(2,-1,3)$, $B(3,1,2)$ và song song với vectơ $\vec{a}=(3,-1,-4)$ là:

A. $9x+y-7z+40=0$. **B.** $9x-y+7z-40=0$.

C. $9x-y-7z+40=0$. **D.** $9x+y+7z-40=0$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(1,2,-1); \left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=\vec{n}=(-9,1,-7)$.Chọn $\vec{n}=(9,-1,7)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng phải tìm có dạng: $9x-y+7z+D=0$

Qua A nên $9.2-(-1)+7.3+D=0\Leftrightarrow D=-40$

Phương trình cần tìm là: $9x-y+7z-40=0$.

Câu 4: Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua $A(4,-1,1), B(3,1,-1)$ và song song với trục Ox là:

A. $y+z+2=0$. **B.** $y-z-2=0$. **C.** $y+z=0$. **D.** $y-z=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$: vectơ chỉ phương của trục Ox: $\vec{i}=(1,0,0)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0,-2,-2)$:Chọn $\vec{n}=(0,1,1)$ làm vectơ pháp tuyến thì phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $y+z+D=0,$ qua A nên: $-1+1+D=0\Leftrightarrow D=0$

Câu 5: Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua điểm $H(2,2,2)$ và nhận $\overrightarrow{OH}$ làm vectơ pháp tuyến.

A. $(P): x+y+z=6$. **B.** $(P): x+y=4$.

C. $(P): y+z=4$. **D.** Ba câu A, B và C đúng.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{OH}=(2;2;2)$ suy ra phương trình mặt phẳng

$(P): 2(x-2)+2(y-2)+2(z-2)=0\Leftrightarrow (P): x+y+z=6$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(3,-2,1), B(-4,0,3), C(1,4,-3), D(2,3,5)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng chứa AC và song song với BD là:

A. $12x+10y+21z+35=0$. **B.** $12x-10y+21z-35=0$.

C. $12x-10y-21z-35=0$. **D.** $12x+10y-21z+35=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AC}=(-2,6,-4); \overrightarrow{BD}=(6,3,2); \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]=(24,-20,-42)$.Có thể chọn

$\vec{n}=(12,-10,-21)$ làm vectơ pháp tuyến cho mặt phẳng.

Phương trình mặt phẳng này có dạng $12x-10y-21z+D=0$.Điểm A thuộc mặt phẳng nên: $12.3-10(-2)-21.1+D=0\Leftrightarrow D=-35$

Phương trình cần tìm: $12x-10y-21z-35=0$,

Câu 7: Cho vectơ chỉ phương điểm $A(4,3,2), B(-1,-2,1), C(-2,2,-1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua A và vuông góc với BC là:

A. $x-4y+2z+4=0$. **B.** $x+4y-2z-4=0$.

C. $x-4y+2z+4=0$. **D.** $x-4y-2z-4=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{BC}=(-1,4,-2)$. Chọn $\vec{n}=(1,-4,2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng chứa A và vuông góc với BC có dạng $x-4y+2z+D=0$

Chứa A nên $4-4.3+2.2+D=0\Leftrightarrow D=4$

Vậy: $x-4y+2z+4=0$.

Câu 8: Cho hai mặt phẳng điểm $A(1,-4,4),B(3,2,6)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $x-3y+z+4=0$. **B.** $x-3y-z+4=0$.

C. $x+3y-z-4=0$. **D.** $x+3y+z-4=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB: $I(2,-1,5)$.

$\overrightarrow{AB}=(2,6,2)$.Chọn $\vec{n}=(1,3,1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB có dạng $x+3y+z+D=0$

I thuộc mặt phẳng này: $2+3(-1)+5+D=0\Leftrightarrow D=4$.

Phương trình cần tìm: $x+3y+z-4=0$.

Câu 9: Phương trình tổng quát của mặt phẳng qua điểm $M(3,0,-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $x+2y-z+1=0$ và $2x-y+z-2=0$ là:

A. $x-3y-5z-8=0$. **B.** $x-3y+5z-8=0$.

C. $x+3y-5z+8=0$ **D.** $x+3y+5z+8=0$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{a}=(1,2,-1);\vec{b}=(2,-1,1)$ là hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng cho trước.

Chọn $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(1,-3,-5)$ làm vectơ pháp tuyến,ta có mặt phẳng có dạng

$x-3y-5z+D=0$.

Qua M nên: $3-3.0-5.(-1)+D=0\Leftrightarrow D=-8$

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x-3y-5z-8=0$

Câu 10: Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2,-1,1),B(-2,1,-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $3x+2y-z+5=0$ là:

A. $x+5y+7z-1=0$. **B.** $x-5y+7z+1=0$.

C. $x-5y-7z=0$. **D.** $x+5y-7z=0$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(-4,2,-2)$; vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng $3x+2y-z+5=0$:

$\vec{n}=(3,2,-1);\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=\vec{n}=(2,-10,-14)$.chọn $\vec{b}=(1,-5,-7)$ làm vectơ pháp tuyến.có mặt phẳng $x-5y-7z+D=0$

A thuộc mặt phẳng này: $2-5.9-1)-7.1+D=0\Leftrightarrow D=0$

Vậy $x-5y-7z=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 11: Cho hai mặt phẳng $(\alpha):x+5y-z+1=0,(\beta):2x-y+z+4=0$.

Gọi φ là góc nhọn tạo bởi (α) và (β) thì giá trị đúng của $\cos\varphi$ là:

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{a}=(1,5,-2)$

(β) có vectơ pháp tuyến $\vec{b}=(2,-1,1)$

$$\cos\varphi=\frac{|1.2+5(-1)+(-2).1|}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

Câu 12: Ba mặt phẳng $x+2y-z-6=0, 2x-y+3z+13=0, 3x-2y+3z+16=0$ cắt nhau tại điểm A. Tọa độ của A là:

A. $A(1,2,3)$. **B.** $A(1,-2,3)$. **C.** $A(-1,-2,3)$. **D.** $A(-1,2,-3)$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ giao điểm của ba mặt phẳng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y-z-6=0(1)\\2x-y+3z+13=0(2)\\3x-2y+3z+16=0(3)\end{cases}$$

Giải (1),(2) tính x,y theo z được $x=-z-4; y=z+5$. Thế vào phương trình (3) được $z=-3$, từ đó có $x=-1, y=2$

Vậy $A(-1,2,-3)$.

Câu 13: Cho hai điểm $A(1,-4,5), B(-2,3,-4)$ và vectơ $\vec{a}=(2,-3,-1)$. Mặt phẳng (β) chứa hai điểm A, B và song song với vectơ $\vec{a}$ có phương trình:

A. $34x-21y+5z-25=0$. **B.** $34x+21y-5z+25=0$.

C. $34x+21y+5z+25=0$. **D.** $34x-21y-5z-25=0$.

Lời giải

Chọn C

$A(1,-4,5); B(-2,3,-4)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-3,7,-9); \vec{a}=(2,-3,-1)$

$\overrightarrow{AB}$ và $\vec{a}$ sẽ là cặp vectơ chỉ phương của (β)

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(-34,-21,-5)$

Chọn $\vec{n}=(34,21,5)$ làm vectơ pháp tuyến của (β)

Phương trình mặt phẳng (β) có dạng $34x+21y+5z+D=0$

Điểm A $\in(\beta)\Leftrightarrow 34-84+25+D=0\Leftrightarrow D=25$

Phương trình $(\beta): 34x+21y+5z+25=0$

Câu 14: Cho hai điểm $C(-1,4,-2), D(2,-5,1)$.Mặt phẳng chứa đường thẳng CD và song song với Oz có phương trình:

A. $3x-y+1=0$. **B.** $3x+y-1=0$. **C.** $x-3y+1=0$. **D.** $x+3y-1=0$.

Lời giải

Chọn B

$C(-1,4,-2); D(2,-5,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD}=(3,-9,3)$ cùng phương với vecto $\vec{a}=(1,-3,1)$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k}=(0,0,1)$

$\left[\vec{a},\vec{k}\right]=(-3,-1,0)$ cùng phương với vecto $\vec{n}=(3,1,0)$

Chọn $\vec{n}=(3,1,0)$ làm vectơ pháp tuyến cho mặt phẳng chứa CD và song song với trục Oz.

Phương trình mặt phẳng này có dạng: $3x+y+D=0$

Mặt phẳng qua C $\Leftrightarrow -3+4+D=0 \Leftrightarrow D=-1$

Phương trình mặt phẳng cần tìm: $3x+y-1=0$

Câu 15: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(2,-3,1)$ và vuông góc với đường thẳng (D) qua hai điểm $A(3,-4,5)$; $B(-1,2,6)$.

A. $4x-6y-z+11=0$. **B.** $4x+6y-z+11=0$.

C. $4x+6y-z+25=0$. **D.** $4x-6y-z+25=0$.

Lời giải

Chọn D

Pháp vecto của (P): $\overrightarrow{AB}=(-4,6,1)$

$\Rightarrow (P):(x-2)(-4)+(y+3)6+(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x-6y-z-25=0$

Câu 16: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(-2,3,5)$; $B(-4,-2,3)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2,-3,4)$.

A. $9x+3y-z+4=0$. **B.** $9x+3y-z-4=0$.

C. $13x-2y-8z+72=0$. **D.** $13x+2y+8z+72=0$.

Lời giải

Chọn C

Pháp vecto của (P): $\overrightarrow{AB}=(-2,-5,-2) \Rightarrow \vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=2(13,-2,-8)$ 0.

$\Rightarrow (P):(x+2)13+(y-3)(-2)+(z-5)(-8)=0 \Leftrightarrow 13x-2y-8z+72=0$

Câu 17: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(-2,1,3)$ và song song với mặt phẳng (Q): $2x+5y-3z+7=0$.

A. $2x+5y-3z-8=0$. **B.** $2x+5y-3z-7=0$.

C. $2x+5y-3z-18=0$. **D.** $2x+5y-3z+8=0$.

Lời giải

Chọn D

$(P): 2x+5y-3z+D=0$ qua $M(-2,1,3) \Rightarrow D=8$

$\Rightarrow (P): 2x+5y-3z+8=0$

Câu 18: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua hai điểm $E(3,-2,4)$; $F(1,3,6)$ và song song với trục $y'Oy$

A. $x+y+z-7=0$. **B.** $x+z-7=0$. **C.** $x+y+z+7=0$. **D.** $x+z+7=0$

.

Lời giải

Chọn B

$(P)//y'Oy \Rightarrow$ ecto chỉ phương của (P) là: $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$

Vecto chỉ phương thứ hai $\overrightarrow{EF}=(-2,5,2) \Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{EF}\right]=2(1,0,1)$

$\Rightarrow (P): (x-3).1+(y+2).0+(z-4).1 \Leftrightarrow x+z-7=0$

Câu 19: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $M(-3,5,2)$ và vuông góc với $x'Ox$

A. $x-3=0$. **B.** $x+3=0$.

C. $x+y-3=0$. **D.** $x-y+3=0$.

Lời giải

Chọn B

$(P) \perp x'Ox$ tại $A(-3,0,0) \Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$

$A(-3,0,0) \in (P) \Rightarrow (P): (x+3).1+y.0+z.0=0 \Leftrightarrow x+3=0$

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có $A(5,1,3), B(1,6,2), C(5,0,4), D(4,0,6)$. Mặt phẳng chứa BC và song song với AD có phương trình:

A. $8x-7y+5z-60=0$. **B.** $8x+7y+5z-60=0$.

C. $8x-7y-5z-60=0$. **D.** $8x+7y-5z-60=0$.

Lời giải

Chọn B

$A(5,1,3), B(1,6,2), C(5,0,4), D(4,0,6)$

$\overrightarrow{BC}=(4,-6,2); \overrightarrow{AD}=(-1,-1,3)$

$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right]=(-16,-14,-10)$ cùng phương với $\vec{n}=(8,7,5)$

Chọn $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến cho mặt phẳng chứa BC và song song với AD.

Phương trình (P) có dạng: $8x+7y+5z+D=0$

Điểm $B \in (P) \Leftrightarrow 8+42+10+D=0 \Leftrightarrow D=-60$

Phương trình $(P): 8x+7y+5z-60=0$

Câu 21: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua hai điểm $M(2,-4,1)$; $N(3,-2,-4)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $3x+4y-2z-5=0$.

A. $16x+13y-2z+82=0$.
B. $16x-13y+2z-82=0$.
C. $16x-13y-2z-82=0$.
D. $16x+13y+2z-82=0$.

Lời giải

Chọn C

Cặp vecto chỉ phương của (P): $\overrightarrow{MN}=(1,2,-5)$; $\overrightarrow{n_Q}=(3,4,-2)$

$\Rightarrow$ Pháp vecto của (P): $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_Q}\right]=(16,-13,-2)$

$\Rightarrow (P):(x-2)16+(y+4)(-13)+(z-1)(-2)=0 \Leftrightarrow 16x-13y-2z-82=0$

Câu 22: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) qua $E(-4,1,-2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): $2x-3y+5z-4=0$; (R): $x+4y-2z+3=0$.

A. $14x-9y+11z+43=0$.
B. $14x+9y-11z-43=0$.
C. $14x+9y+11z-43=0$.
D. $14x-9y-11z+43=0$.

Lời giải

Chọn D

Cặp vecto chỉ phương của (P): $\vec{a}=(2,-3,5)$; $\vec{b}=(1,4,2)$

Pháp vecto của (P): $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-14,9,11)$

$\Rightarrow (P):(x+4)(-14)+(y-1)9+(z+2)11=0 \Leftrightarrow 14x-9y-11z+43=0$

Câu 23: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0,1,-1)$; $B(1,1,2)$; $C(1,-1,0)$; $(0,0,1)$. Gọi H,I,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C,D trên ba trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (HIK).

A. $x-y+z+1=0$.
B. $x-y+z-1=0$.
C. $x+y+z-1=0$.
D. $x+y+z+1=0$.

Lời giải

Chọn B

$H(1,0,0); I(0,-1,0); K(0,0,1)$

$\Rightarrow (HIK): \frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow x-y+z-1=0$

Câu 24: Cho mặt phẳng $(P): 3x-4y+2z-5=0$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đối xứng của (P) qua trục $y'Oy$:

A. $3x+4y+2z-5=0$.
B. $3x-4y-2z+5=0$.
C. $3x+4y-2z+5=0$.
D. $3x+4y+2z+5=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $E(x,y,z)\in(\alpha)$ là điểm đối xứng của $M(x_M,y_M,z_M)\in(P)$ qua trục $y'Oy: x_M=-x; y_M=y; z_M=-z$

$\Rightarrow 3(-x)-4y+2(-z)-5=0\Leftrightarrow(\alpha):3x+4y+2z+5=0$

Câu 25: Cho điểm $M(1,-4,-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+5z-14=0$. Tính khoảng cách từ M đến (P).

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$d(M,P)=\frac{|1-4+5(-2)-14|}{\sqrt{1+1+25}}=\frac{27}{3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

Câu 26: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q):2x-4y+4z+3=0$ và cách điểm $A(2,-3,4)$ một khoảng bằng 3:

A. $2x-4y+4z-14=0$.

B. $2x-4y+4z-50=0$.

C. $2x-4y+4z-14=0;\ 2x-4y+4z-50=0$.

D. $2x-4y+4+-14=0;\ 2x-4y+4z-50=0$.

Lời giải

Chọn C

$(P)//(Q):2x-4y+4z+3=0\Rightarrow(P):2x-4y+4z+D=0$

$$d(A,P)=3\Leftrightarrow\frac{4+12+16+D}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{|D+32|}{6}=3\Leftrightarrow D=-14\vee D=-50$$

$\Rightarrow(P):2x-4y+4z-14=0;(P'):2x-4y+4z-50=0$

Câu 27: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cách mặt phẳng $(Q):3x-2y-6z+5=0$ một khoảng bằng 4:

A. $3x-2y-6z-23=0;\ 3x-2y-6z+33=0$.

B. $3x-2y-6z+23=0;\ 3x-2y-6z+33=0$.

C. $3x-2y-6z-23=0;\ 3x-2y-6z-33=0$.

D. $3x-2y-6z+23=0;\ 3x-2y-6z-33=0$.

Lời giải

Chọn A

$(P)//(Q):3x-2y-6z+5=0; M(x,y,z)\in(P)\Rightarrow d(M,Q)=4$

$$\Leftrightarrow\frac{|3x-2y-6z+5|}{\sqrt{9+4+36}}=3\Leftrightarrow 3x-2y-6z+5=\pm 28$$

$\Leftrightarrow 3x-2y-6z-23=0; 3x-2y-6z+33=0$

Câu 28: Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng sau song song:

$(P):(m-2)x-3my+6z-6=0;\ \ (Q):(m-1)x+2y+(3-m)z+5=0$

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

$A_1B_2-A_2B_1=(m-2)2+(m-1)3m=3m^2-m-4=0\Leftrightarrow m=-1,m=\frac{4}{3}$

$B_1C_2-B_2C_1=-3m(3-m)-2.6=3m^2-9m-12=0\Leftrightarrow m=-1,m=4$

$C_1A_2-C_1A_1=6(m-1)-(3-m)(m-2)=m^2+m=0\Leftrightarrow m=-1,m=0$

Với $m=-1$ thoả cả 3 điều trên $\Rightarrow (P)//(Q)$

Câu 29: Giá trị m thỏa mãn điều kiện nào để hai mặt phẳng $(P):mx+(m-2)y+2(1-m)z+2=0;\ (Q):(m+2)x-3y+(1-m)z-3=0$ cắt nhau?

A. $m\neq 1$. **B.** $m\neq 1$ và $m\neq -4$. **C.** $m\neq -4$. **D.** $m\neq 4$.

Lời giải

Chọn B

(P) cắt (Q) $\Leftrightarrow \begin{cases} m(-3)-(m+2)(m-2)\neq 0 \\ (m-2)(1-m)+6(1-m)\neq 0 \\ 2(1-m)(m+2)-(1-m)\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-3m+4\neq 0 \\ (1-m)(m+4)\neq 0 \\ (1-m)(m+4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1\ \&\ m\neq -4$

Câu 30: Với giá trị nào của m và n thì hai mặt phẳng sau song song:

$(P):x+my-z+2=0;\ (Q):2x+y+4nz-3=0$

A. $m=\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{2}$.

C. $m=\frac{1}{4};\ n=-\frac{1}{4}$. **D.** $m=\frac{1}{2};\ n=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Để hai mặt phẳng song song chắc chắn $n\neq 0$ nên:

$(P)//(Q)\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{m}{1}=-\frac{1}{4n}\neq\frac{2}{-3}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2};n=-\frac{1}{2}$

Câu 31: Hai mặt phẳng $(P):4x-2y+4z+5=0$ và $(Q):x\sqrt{3}-y\sqrt{3}-2=0$ tạo với nhau một góc bằng:

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn A

$$\cos\alpha = \frac{\left|4\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right|}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^o$$

Câu 32: Cho hai mặt phẳng $(P): mx+(m-1)y-z-3=0$ và $(Q): (m-1)x+my+z+5=0$. Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) vuông góc?

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{3}\right)$. **D.** $1\pm\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$(P)\perp(Q) \Leftrightarrow m(m-1)+(m-1)m-1=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Câu 33: Cho hai mặt phẳng $(P): mx+(m-1)y-z-3=0$ và $(Q): (m-1)x+my+z+5=0$. Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) tạo với nhau một góc 60°?

A. -1. **B.** 2. **C.** 1 và 2. **D.** -1 và 2.

Lời giải

Chọn D

$$\cos 60^o = \frac{\left|2m^2-2m-1\right|}{\sqrt{m^2+(m-1)^2+1}.\sqrt{(m-1)^2+m^2+1}} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 4m^2-3m-2=2m^2-2m+2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$

$\Leftrightarrow m=-1 \vee m=2$

Câu 34: Tìm tập hợp các điểm $M(x,y,z)$ sao cho $MA^2-MB^2=4$ với $A(2,-1,3)$; $B(-4,3,1)$

A. $3x+2y-z-4=0$. **B.** $3x-2y+z+4=0$.

C. $3x-2y+z+5=0$. **D.** $3x+2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

$MA^2-MB^2=4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

$=(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2+4$

$\Leftrightarrow 3x-2y+z+4=0$

Câu 35: Tìm tập hợp các điểm M cách đều hai mặt phẳng:

$(P): 2x-y+2z+9=0;\ (Q): 4x-2y+4z-3=0$

A. $2x-y+2z+2=0$. **B.** $2x-y+2z-2=0$.

C. $6x-3y+6z-5=0$. **D.** $8x-4y+8z+15=0$.

Lời giải

Chọn D

$$d\left(M,P\right)=\pm d\left(M,Q\right)\Leftrightarrow\frac{2x-y+2z+9}{3}=\pm\frac{4x-2y+4z-3}{6}$$
$$\Leftrightarrow 8x-4y+8z+15=0$$

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Định nghĩa:

Phương trình ttham số của đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{a}\neq\vec{0}$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t \in R) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không.Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

1. Vị Trí tương đối của hai đường thẳng:

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng. Trong Kg Oxyz cho hai đường thẳng $d:\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x = x'_o + a'_1 t' \\ y = y'_o + a'_2 t' \\ z = z'_o + a'_3 t' \end{cases}$ vtcp $\vec{u}$ đi qua $M_o$và d'có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_o' □ $\vec{u},\vec{u'}$ **cùng phương** □ d // d'$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\ M_0\notin d'\end{cases}$ □ d ≡ d'$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\ M_0\in d'\end{cases}$ □ $\vec{u},\vec{u'}$ **Không cùng phương** $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1 t' \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_o + a'_3 t' \end{cases}$ □ d chéo d'$\Leftrightarrow$Hệ Ptrình vô nghiệm □ d cắt d'$\Leftrightarrow$ Hệ Ptrình có một nghiệm	**1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng.** Trong Kg Oxyz cho hai đường thẳng $d:\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x = x'_o + a'_1 t' \\ y = y'_o + a'_2 t' \\ z = z'_o + a'_3 t' \end{cases}$ vtcp $\vec{u}$ đi qua $M_o$và d'có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_o' □ // $\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\ M_o\notin d'\end{cases}$ □ ≡ $\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\ M_0\in d'\end{cases}$ □ cắt $\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\neq 0\\ \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_oM'_0}=0\end{cases}$ □ chéo $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2

Trong Kg Oxyz cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $d:\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ **Phương trình** $A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0$ □ P.trình vô nghiệm thì d // □ P.trình có một nghiệm thì d cắt □ P. trình cóvôsốnghiệm thìd thuộc Đặc biệt : $(d)\perp(\alpha)\Leftrightarrow \vec{a},\vec{n}$ cùng phương	Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d qua M có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$ □ cắt $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}\neq 0$ □ // $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\notin(\alpha)\end{cases}$ □ nằm trên mp $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\M\in(\alpha)\end{cases}$

3. Khoảng cách :

□ Khoảng cách từ M_0 đến mặt phẳng : Ax+By+Cz+D=0 cho bởi côngthức

$$d(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

□ Khoảng cách từ M đến đường thẳng <u>Phương pháp 1</u>: □ Lập ptmp(α) đi qua M và vuông góc với d. □ Tìm tọa độ giao điểm H của mp(α) và d □ d =MH □ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau <u>Phương pháp</u> 1: d đi qua M; cóvtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ d'qua M'; vtcp $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ □ Lập ptmp(α) chứa d và song song với d' □ d= d)	□ Khoảng cách từ M đến đường thẳng <u>Phương pháp 2</u>: $d(M,\Delta)=\frac{\left\|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ □ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau <u>Phương pháp</u> 2: d đi qua M; cóvtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ d'qua M'; vtcp $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ $d(\Delta,\Delta')=\frac{\left\|[\vec{a},\vec{a'}].\overrightarrow{MM'}\right\|}{\left\|[\vec{a},\vec{a'}]\right\|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}$

4. Góc giữa hai đường thẳng:

□ Góc giữa hai đường thẳng

đi qua M có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

đi qua M' có VTCP $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{a},\vec{a'})\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|} = \frac{\left|a_1.a'_1 + a_2.a'_2 + a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mp có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$

Gọi φ là góc hợp bởi và mp

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right| = \frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$ **B.** $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ **D.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{EF} = (3;1;-7)$. Đường thẳng EF đi qua điểm $E(-1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{EF} = (3;1;-7)$ có phương trình: $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x = -2+4t \\ y = 6t \\ z = 1+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -6 \\ z = 2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 3t \\ z = 1+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a} = (4;-6;2) = 2(2;-3;1)$ \

Do đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3;1)$. Vậy phương trình tham số của Δ đi qua $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-3;1)$ là: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -1+t \end{cases}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $z=0$.

B. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Trục Oz đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$ là

A. $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6\\z=2-t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Theo lý thuyết về đường thẳng trong không gian $Oxyz$, ta có phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ là

$\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

Do đó, đáp án D đúng.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(3;4;1), C(-5;2;-4)$. Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC có phương trình

A. $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$. **B.** $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$.

C. $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$. **D.** $\frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{BC}=(-8;-2;-5)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng qua A và song song với đường thẳng BC.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-3+5t\end{cases};t\in\mathbb{R}$. Khi đó, phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$. **B.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-3}{5}$.

C. $x-2=y=z+3$. **D.** $x+2=y=z-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình đường thẳng d: $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-3+5t\end{cases}$ đi qua điểm $A(2;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3;5)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$.

Câu 8: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $I(1;-2;3)$ và nhận $\vec{u}=(4;-5;6)$ là vectơ chỉ phương có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=-1+4t\\y=2-5t\\z=-3+6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4+t\\y=5-2t\\z=6+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4+t\\y=-5-2t\\z=6+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=-2-5t\\z=3+6t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;-2;3)$ và nhận $\vec{u}=(4;-5;6)$ là vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+4t\\y=-2-5t\\z=3+6t\end{cases}$.

Câu 9: Trong hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{3}$. Phương trình nào sau đây là phương là phương trình tham số của d ?

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=-2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có một VTCP $\vec{u}(1;-2;3)$ và đi qua $M(1;2;-2)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-2;5)$ và $B(3;1;1)$?

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{5}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{5}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-4}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{-4}$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;3;-4)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB, từ đáp án ta loại đáp án **A** và đáp án **B.**

+ Đáp án **C** thỏa mãn đi qua điểm $A(1;-2;5)$ nên đáp án **C** là đáp án **đúng**.

+ Thay tọa độ điểm $A(1;-2;5)$ vào đáp án **D**: $\frac{1+1}{2}\neq\frac{-2-2}{3}\neq\frac{5+5}{-4}$ nên loại đáp án **D.**

Câu 11: Viết phương trình tham số của đường thẳng qua điểm $E(2,-4,3)$ và song song với đường thẳng MN với $M(3,2,5);N(1,-1,2)$.

A. $\begin{cases} x=3-2m \\ y=2-3m \\ z=5-3m \end{cases} ;m\in\mathbb{R}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=2+3t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$.

C. $\begin{cases} x=2+2n \\ y=-4+3n \\ z=3+3n \end{cases} ;n\in\mathbb{R}$. **D.** Hai câu A và B

Lời giải

Chọn C

Một vectơ chỉ phương của $(d):\overrightarrow{MN}=(-2,-3,-3)=-(2,3,3)$

$$\Rightarrow (d)\begin{cases} x = 2+2n \\ y = 3n-4 \\ z = 3+3n \end{cases} ; n \in \mathbb{R}$$

Câu 12: Phương trình tham số đường thẳng qua $I(-1,5,2)$ và song song với trục $x'Ox$ là

A. $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$ **B.** $\begin{cases} x = -m \\ y = 5m \\ z = 2m \end{cases} ; m \in \mathbb{R}.$ **C.** $\begin{cases} x = -2t \\ y = 10t \\ z = 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$ **D.** Cả A và C

Lời giải

Chọn A

$(D)//x'Ox \Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của $(D): \vec{e_1} = (1,0,0)$

$$\Rightarrow (D)\begin{cases} x = t-1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Câu 13: Viết phương trình tham số của đường thẳng (D) qua $E(2,-1,-3)$ và vuông góc với hai đường thẳng $(D_1): \frac{x-1}{3} = y-1 = \frac{z+2}{2}$; $(D_2): \frac{x}{2} = \frac{y+3}{4} = 2-z.$

A. $\begin{cases} x = 2-7t \\ y = t-1 \\ z = 3+10t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$ **B.** $\begin{cases} x = 2+7t \\ y = -1-t \\ z = 3-10t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

C. $\begin{cases} x = 2+8t \\ y = 7t-1 \\ z = 3+10t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$ **D.** $\begin{cases} x = 2-9m \\ y = 7m-1 \\ z = 10m-3 \end{cases} ; m \in \mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn D

Hai vectơ chỉ phương của (D_1) và $(D_2): \vec{a} = (3,1,2); \vec{b} = (2,4,-1)$

Một vectơ chỉ phương của $(D): \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (-9,7,10)$

$\Rightarrow (D): x = 2-9t; y = 7t-1; z = 10t-1; t \in \mathbb{R}$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $A(1,2,-3)$; $B(2,-1,4)$; $C(3,-2,5)$. Viết phương trình tham số của trung tuyến AM:

A. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-7t \\ z = 15t-3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$ **B.** $\begin{cases} x = 1-3m \\ y = 2-7m \\ z = -3-15m \end{cases} ; m \in \mathbb{R}.$

C. $\begin{cases} x = 1+3\cos t \\ y = 2-7\cos t \\ z = 15\cos t-3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$ **D.** Hai câu A và **B.**

Lời giải

Chọn A

Trung điểm M của BC: $M\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

Một vecto chỉ phương của AM: $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{2},\frac{15}{2}\right)=\frac{1}{2}(3,-7,15)$

$\Rightarrow AM: x=1+3t;\ y=2-7t;\ z=15t-3;\ t\in\mathbb{R}$

Câu 15: Cho tam giác ABC có $A(1,2,-3);\ B(2,-1,4);\ C(3,-2,5)$. Viết phương trình chính tắc của cạnh AB.

A. $x-1=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{7}$.

B. $x-2=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{7}$.

C. $x-1=\frac{2-y}{3}=\frac{z+3}{7}$.

D. Ba câu A, B và C đúng.

Lời giải

Chọn D

Một vecto chỉ phương của AB:

$\overrightarrow{AB}=(1,-3,7)$

$\Rightarrow AB: x-1=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{7}$ hay $x-2=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{7}$

hay $x-1=\frac{2-y}{3}=\frac{z+3}{7}$

Câu 16: Hai đường thẳng $(D):\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z-2}{3};\ \ (d):\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{4}$.

A. Song Song. **B.** Trùng nhau. **C.** Chéo nhau. **D.** Cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

$A(1,-3,2)\in(D)$ và (D) có vecto chỉ phương $\vec{a}=(2,1,3)$

$B(-2,1,-4)\in(d)$ và (d) có vecto chỉ phương $\vec{b}=(3,2,4)$

$\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=(-2,1,1).(-3,4,-6)=4\neq 0$

$\Rightarrow (D)$ và (d) chéo nhau.

Câu 17: Hai đường thẳng

$(D): x=2t+3;\ y=t+1;\ z=3t-2;\ \ (d): x=4t-1;\ y=2t-5;\ z=6t+1;\ t\in\mathbb{R}$

A. Song song. **B.** Chéo nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Trùng nhau.

Lời giải

Chọn A

(D) qua $M(3,1,-2)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(2,1,3)$

(d) qua $M(-1,-5,1)$ và có vecto chỉ phương $\vec{b}=(4,2,6)=2(2,1,3)$

$\Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Rightarrow (D)$ và (d) cùng phương.

$\overrightarrow{MN} = (-4,-6,3)$ không cùng phương với $\vec{a} \Rightarrow (D)//(d)$

Câu 18: Đường thẳng $(D): \frac{x-1}{2} = 1-y = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-4z-23=0$:

A. Song song. **B.** Vuông góc. **C.** Cắt nhau. **D.** chứa .

Lời giải

Chọn C

(D) có vecto chỉ phương $\vec{a} = (2,-1,3)$

(P) có pháp vecto: $\vec{n} = (1,2,-4)$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{n} = 2.1-1.2+3(-4) = -12 \neq 0 \Rightarrow (D)$ và (P) cắt nhau.

Chú ý: nếu đòi hỏi hình tọa độ giao điểm thì viết phương trình tham số của $(d): x = 2t+1; y = 1-t; z = 3t-2$. Thay x, y, z vào phương trình (P) ta có $t = -1 \Rightarrow$ Tọa độ giao điểm $M(-1,2,-5)$.

Câu 19: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng sau song song?

$(D): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{m-2}$; $(d): x-3 = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$

A. 0. **B.** 2. **C.** $m \neq 0, \quad m \neq 2$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

(D) qua $(-1,3,1)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a} = (2,m,m-2); m \neq 0$ và $m \neq 2$

(d) qua $B(3,-1,2)$ và có vecto chỉ phương $\vec{b} = (1,3,2)$

$(D)//(d) \Leftrightarrow 2 = \frac{m}{3} = \frac{m-2}{2}$ và $A \notin (d) \Leftrightarrow m = 6$

Câu 20: Với giá trị nào của m và n thì đường thẳng $(D): \begin{cases} x = 3+4t \\ y = 1-4t \\ z = t-3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ song song với mặt phẳng $(P): (m-1)x+2y-4z+n-9=0$?

A. $m=4;\ n=14$. **B.** $m=-4;\ n=-10$. **C.** $m=3;\ n=-11$. **D.** $m=4;\ n=-14$.

Lời giải

Chọn D

(D) qua $A(3,1,-3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{a} = (4,-4,1)$

Vecto pháp tuyến của $(P): (m-1,2,-4)$

$(D) \subset (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ A \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ 3m+n = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -14 \end{cases}$

Câu 21: Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D):\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y+2z=2$

A. 1. **B.** 5. **C.** 6. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

Vecto chỉ phương của $(D):\vec{a}=(2,m,m-2)$

Vecto pháp tuyến của $(P):\vec{n}=(1,3,2)$

$(D)\perp(P)\Leftrightarrow\vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương: $2=\frac{m}{3}=\frac{m-2}{2}\Leftrightarrow m=6$

Câu 22: Tính góc của hai đường thẳng $(D):\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{4}$ và $(d):x=3+2t;\ y=2t-4;\ z=2\ (t\in\mathbb{R})$.

A. 75^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn D

(D) và (d) có vec-tơ chỉ phương $\vec{a}=(2,4,4);\vec{b}=(2,2,0)$

$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{|2.2+4.2+4.0|}{6.2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^0$.

Câu 23: Hai đương thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-2\\z=4t+6\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=5+t'\\y=-1-4t'\\z=20+t'\end{cases}$ cắt nhau tại C.
Tọa độ điểm C là:

A. $C(3,-7,18)$. **B.** $C(3,7,18)$. **C.** $C(3,-7,-18)$. **D.** $C(-3,7,18)$.

Lời giải

Chọn B

Hệ phương trình $\begin{cases}2t-3=5+t'\\3t-2=-1-4t'\\4t+6=20+t'\end{cases}$ có nghiệm $t=3,t'=-2$.

Từ đó có $C(3,7,18)$.

Câu 24: Cho hai đường thẳng: $(d_1):\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ và $(d_2):\begin{cases}\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}\end{cases}$.

Chọn câu trả lời đúng:

A. (d_1) và (d_2) cắt nhau. **B.** (d_1) và (d_2) vuông góc nhau.

C. (d_1) và (d_2) trùng nhau. **D.** (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $(d_1)\in(d_1)$ cho $A(7,3,7)$ và vectơ chỉ phương của (d_1):

$\vec{a}=(1,2,-1)$.

Phương trình (d_2) cho $B(3,1,1)\in(d_2)$ và vectơ chỉ phương của (d_2):

$\vec{b}=(-7,2,3)$.

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(8,4,16)$; $\overrightarrow{AB}=(-4,-2,-8)$.

$\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}=-32-8-128\neq 0\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.

Câu 25: Cho điểm $A(3,2,1)$ và đương thẳng $(d):\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=z+3$.Mặt phẳng (α) chứa điểm A và (d) có phương trình tổng quát là:

A. $14x-15y-8z+24=0$. .

B. $14x+5y-8z-24=0$. .

C. $14x-5y+8z+24=0$. .

D. $14x-5y-8z-24=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình (d) cho $B(0,0,-3)\in(d)$ và vectơ chỉ phương của (d):

$\vec{a}=(2,4,1)$.

$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,-4)$; $\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(14,-5,-8)$

Gọi $M(x,y,z)\in(\alpha)$, $\overrightarrow{BM}=(x,y,z+3)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right].\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow 14x-5y-8z-24=0$ là phương trình của (α).

Câu 26: Cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=3t\end{cases}$ và điểm $I(2,-1,3)$.Điểm K đối xứng với điểm I qua đường thẳng (d) có tọa độ:

A. $K(4,-3,-3)$. .

B. $K(-4,3,-3)$. .

C. $K(4,-3,3)$. .

D. $K(4,3,3)$.

Lời giải

Chọn D

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2,-1,3)$.Xét mặt phẳng $(\alpha):2x-y+3z+D=0$.

$I\in(\alpha)$ nên $D=-14$

$(\alpha):2x-y+3z-14=0$. Thế x,y,z theo t vào phương trình (α) được

$t=1\Rightarrow(d)$ cắt (α) tại $M(3,1,3)$.

M là trung điểm của IK nên $K(4,3,3)$

Câu 27: Cho ba điểm $A(-1,2,3),B(-2,1,1),C(5,0,0)$.Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tọa độ điểm H là:

A. $H\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{-7}{3}\right)$.

B. $H\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{3},\frac{-7}{2}\right)$.

C. $H\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

D. $H\left(\frac{-4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đương thẳng AB có phương trình tham số $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z-3+2t \end{cases}$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa C và vuông góc với A**B.** Phương trình (α) có dạng:

$x+2y+2z+D=0$.

$C\in(\alpha)\Rightarrow D=-5$.

Phương trình $(\alpha): x+y+2z-5=0$.

Thế x,y,z theo t từ phương trình tham số của AB được $t=-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow H$ có tọa độ:

$H\left(\frac{-4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

.

Câu 28: Cho điểm $A(2,3,5)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0.$ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P).Tọa độ điểm A' là:

A. $A'\left(\frac{12}{7},\frac{18}{7},\frac{34}{7}\right)$. **B.** $A'\left(\frac{12}{7},-\frac{18}{7},\frac{34}{7}\right)$.

C. $A'\left(\frac{12}{7},-\frac{18}{7},-\frac{34}{7}\right)$. **D.** $A'\left(-\frac{12}{7},\frac{18}{7},-\frac{34}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng (d) qua A vuông góc với $(P):\begin{cases} x=2+2t \\ y=3+3t \\ z=5+t \end{cases}$.Thế

x,y,z theo t vào phương trình của (P) được $t=-\frac{1}{14}$.

Thế $t=-\frac{1}{14}$ vào phương trình của (d) được guao điểm I của (d)và (P):

$I\left(\frac{26}{14},\frac{39}{14},\frac{69}{14}\right)$.

I là trung điểm của AA' nên:.

$\Rightarrow A'\left(\frac{12}{7},\frac{18}{7},\frac{34}{7}\right)$.

Câu 29: Cho ba điểm $A(-4,4,0), B(2,0,4), C(1,2,-1)$.Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{19}$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{CA}=(-5,2,1);\overrightarrow{CB}=(1,-2,5);\overrightarrow{AB}=(6,-4,4)$.

Khoảng cách cần tìm bằng: $\frac{\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]\right|}{\overrightarrow{AB}}=\frac{2\sqrt{36+169+16}}{2\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}..$

Câu 30: Cho hai đường thẳng: $(d_1):\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},(d_2):\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z+3=0$. Hình chiếu của (d_2) theo phương của (d_1) lên mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát:

A. $\begin{cases}2x-y+4z+53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$..

B. $\begin{cases}2x+y-4z+53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$..

C. $\begin{cases}2x+y+4z-53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$..

D. $\begin{cases}2x-y-4z+53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ chỉ phương của $(d_1):\vec{a}=(-7,2,3)$. Vectơ chỉ phương của $(d_2):\vec{b}=(1,2,-1)$.

Phương trình của mặt phẳng chứa (d_2) và có phương của (d_1) có dạng:

$2x+y+4z+D=0$.

Điểm $A(7,3,9)$ thuộc mặt phẳng này $\Rightarrow D=-53$.

Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng (α) là hình chiếu của (d_2) theo phương của (d_1) lên $(\alpha):\begin{cases}2x+y+4z-53=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$

Câu 31: Hai đường thẳng $(d_1):\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-7}{6}$ và $(d_2):\frac{x-3}{14}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-1}{2}$ cắt nhau tại**A.**

Tọa độ của A là:

A. $A(3,2,1)$..

B. $A(3,-2,1)$..

C. $A(3,-2,-1)$..

D. $A(-3,2,1)$.

Lời giải

Chọn B

(d_1) có dạng tham số: $\begin{cases}x=5+2t\\y=1+3t\\z=7+6t\end{cases}$; (d_2) có dạng tham số: $\begin{cases}x=3+14t'\\y=-2-5t'\\z=1+2t'\end{cases}$

Hệ phương trình: $\begin{cases}5+2t=3+14t'\\1+3t=-2-5t'\\7+6t=1+2t'\end{cases}$ có nghiệm $t=-1,t'=0$

$\Rightarrow(d_1)$ cắt (d_2) tại $A(3,-2,1)$.

Câu 32: Cho hai đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$ và d2 $(d_2):\frac{x-3}{14}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-4}$ cắt nhau tại**A.**

Tọa độ của A là:

A. $A(3,2,1)$..

B. $A(3,-2,1)$..

C. $A(3,-2,-1)$..

D. $A(-3,2,1)$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $(d_1)//(d_2)$.

$A(1,2,0)\in(d_1)$; $B(2,2,0)\in(d_2)$.

$\vec{a}=(1,2,-2)$ là vectơ chỉ phương của (d_1); $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(0,2,2)\nearrow\swarrow\vec{n}=(0,1,1)$.

Phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2) có dạng $y+z+D=0$,cho qua A được $D=-2$.

Vậy $y+z-2=0$.