

CHINH PHỤC KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2020

CHUYÊN ĐỀ

VẬN DỤNG CAO

MÔN TOÁN

HÌNH HỌC



2020

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO

CHUYÊN ĐỀ
VẬN DỤNG CAO
MÔN TOÁN
(HÌNH HỌC)

GROUP: CHINH PHỤC KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2020

LỜI NÓI ĐẦU

Xin chào toàn thể cộng đồng học sinh 2k2!

*Đầu tiên, thay mặt toàn thể các Admin group “**CHINH PHỤC KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2020**” chân thành cảm ơn các em đã đồng hành cùng **GROUP** trong những ngày tháng vừa qua.*

Cuốn sách các em đang cầm trên tay này là công sức của tập thể đội ngũ Admin Group, chính tay các anh chị đã sưu tầm và biên soạn những câu hỏi hay nhất, khó nhất từ các đề thi của các sở, trường chuyên trên cả nước. Thêm vào đó, là những câu hỏi được chính các anh chị thiết kế ý tưởng riêng. Giúp các bạn có thể ôn tập, rèn luyện tư duy để chinh phục 8+ môn Toán trong kì thi sắp tới.

Sách gồm 4 chương của phần Giải tích lớp 12 bao gồm: Hàm số và các bài toán liên quan, Hàm số mũ và Logarit, Nguyên hàm – tích phân và Ứng dụng, Số phức. Đây đủ từng dạng, rất thuận lợi cho các em trong quá trình ôn tập.

Trong quá trình biên soạn, tài liệu không thể tránh được những sai sót, mong bạn đọc và các em 2k2 thông cảm.

*Chúc các em học tập thật tốt!
Tập thể ADMIN.*

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU:.....	3
CHƯƠNG 1: KHỐI ĐA DIỆN – HÌNH HỌC KHÔNG GIAN	
CHỦ ĐỀ 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP.....	7
CHỦ ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ.....	34
CHỦ ĐỀ 3: BÀI TOÁN ĐỘ DÀI – KHOẢNG CÁCH – THỂ TÍCH.....	66
CHỦ ĐỀ 4: CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN.....	96
CHỦ ĐỀ 5: TỌA ĐỘ HÓA – TOÁN THỰC TẾ.....	117
CHƯƠNG 2: MẶT NÓN – MẶT TRỤ - MẶT CẦU	
CHỦ ĐỀ 1: HÌNH NÓN – KHỐI NÓN.....	133
CHỦ ĐỀ 2: KHỐI TRỤ.....	157
CHỦ ĐỀ 3: KHỐI CẦU.....	176
CHƯƠNG 3: HÌNH HỌC OXYZ	
CHỦ ĐỀ 1: HỆ TRỤ TỌA ĐỘ.....	214
CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU.....	231
CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (LOẠI 1).....	253
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (LOẠI 2).....	266
CHỦ ĐỀ 5: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.....	275

CHỦ ĐỀ 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

LÝ THUYẾT:

- Công thức tính thể tích khối chóp: $S = \frac{1}{3}Bh$. Trong đó: B là diện tích đa giác đáy
 h là đường cao của hình chóp
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} =$ tổng diện tích các mặt bên.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} +$ diện tích đáy.
- Các khối chóp đặc biệt:
 - Khối tứ diện đều: tất cả các cạnh bên đều bằng nhau
 Tất cả các mặt đều là các tam giác đều
 - Khối chóp tứ giác đều: tất cả các cạnh bên đều bằng nhau
 Đáy là hình vuông tâm O , SO vuông góc với đáy.

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA:

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AB = 3AD$. Gọi H là hình chiếu của B trên CD , M là trung điểm đoạn thẳng CH . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABM$ biết $SA = AM = a$ và $BM = \frac{2}{3}a$.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

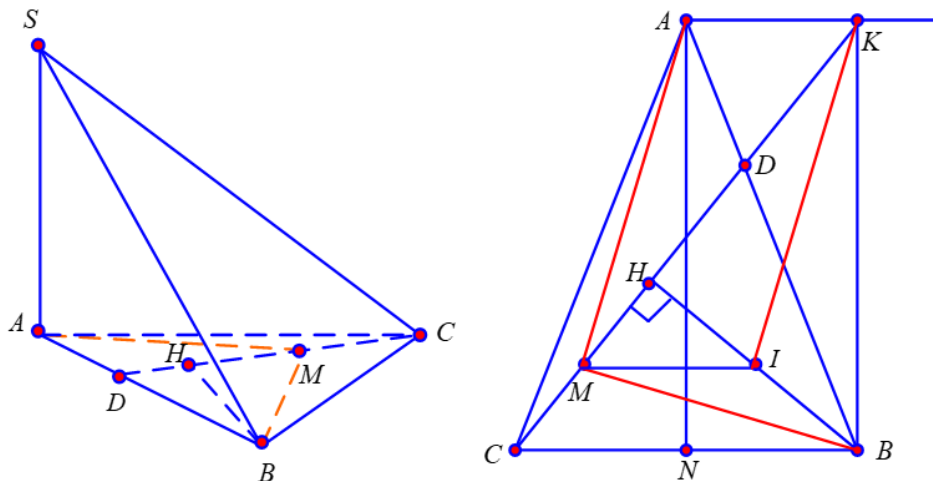
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

C. $\frac{a^3}{9}$.

D. $\frac{a^3}{18}$.

Lời giải

Chọn C



- Trong mặt phẳng đáy (ABC): Kẻ $Ax \parallel BC$ và $Ax \cap CD = K$, gọi N là trung điểm của BC .
- Khi đó do $\triangle ABC$ cân ở A nên $AN \perp BC$ và tứ giác $ANBK$ là hình chữ nhật.
- Suy ra $CN = BN = AK$; $KB \perp BC$
- Gọi I là trung điểm của BH , do M là trung điểm đoạn thẳng CH nên $MI \parallel BC$ và $MI = \frac{1}{2}BC$
 (đường trung bình của tam giác $\triangle BHC$. Vậy $MI \parallel AK$, $MI \perp BK$ và $MI = AK$ hay tứ giác $AMIK$ là hình bình hành và I là trực tâm của tam giác BMK .
- Suy ra $IK \perp BM$ và $AM \parallel IK$ nên $AM \perp BM$.
- Vậy $\triangle AMB$ vuông tại M . Suy ra $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AM.BM$.
- Theo giả thiết ta có: $V_{S.ABM} = \frac{1}{3}SA.S_{\triangle AMB} = \frac{1}{6}SA.AM.BM$; với $SA = AM = a$ và $BM = \frac{2}{3}a$.

- Suy ra $V_{S.ABM} = \frac{1}{3} SA.S_{\triangle ABM} = \frac{1}{6} SA.AM.BM = \frac{a^3}{9}$.

VÍ DỤ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) , với $\varphi < 45^\circ$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $4a^3$

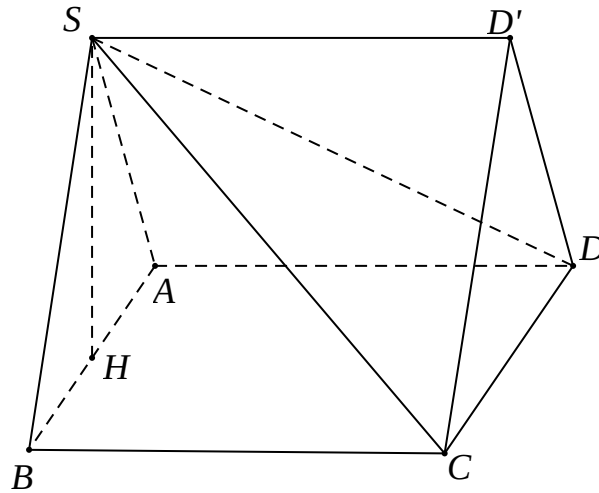
B. $\frac{8a^3}{3}$

C. $\frac{4a^3}{3}$

D. $\frac{2a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



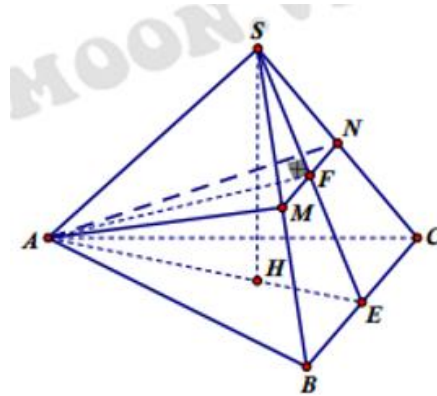
- Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.
- Khi đó $DD' \parallel SA$ mà $SA \perp (SBC)$ (vì $SA \perp SB$, $SA \perp BC$) nên D' là hình chiếu vuông góc của D lên (SBC) .
- Góc giữa SD và (SBC) là $\alpha = \angle DSD' = \angle SDA$, do đó $SA = AD \cdot \tan \alpha = 2a \cdot \tan \alpha$.
- Đặt $\tan \alpha = x$, $x \in (0; 1)$.
- Gọi H là hình chiếu của S lên AB , theo đề ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot SH$.
- Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất.
- Vì tam giác SAB vuông tại S nên :
- $SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{SA \cdot \sqrt{AB^2 - SA^2}}{AB} = \frac{2ax \sqrt{4a^2 - 4a^2x^2}}{2a} = 2ax \sqrt{1 - x^2} \leq 2a \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = a$
- Từ đó $\max SH = a$ khi $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Suy ra $\max V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 4a^2 = \frac{4}{3} a^3$.

VÍ DỤ 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, BC . Tính thể tích khối chóp $ABCNM$. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{32}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{32}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{16}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{48}$.

Lời giải

• Chọn B



• E là trung điểm BC nên $CB \perp AE, CB \perp SH \longrightarrow CB \perp (SAE) \rightarrow CB \perp SE$.

• SE vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle SBC$ cân tại S

• F là giao điểm của MN với $SE \longrightarrow SF \perp MN, SF = \frac{1}{2} SE$.

• Giả thiết $\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \end{cases} \xrightarrow{SF \perp MN} SF \perp (AMN)$

• $\rightarrow SE \perp AF$ và $SF = \frac{1}{2} SE$ nên $\triangle SAE$ cân tại $A \rightarrow AE = AS = \frac{3a}{2}$

• $AH = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a \longrightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

• $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \left(a\sqrt{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{8}$.

• $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4} \longrightarrow V_{S.AMN} = \frac{a^3\sqrt{15}}{32}$.

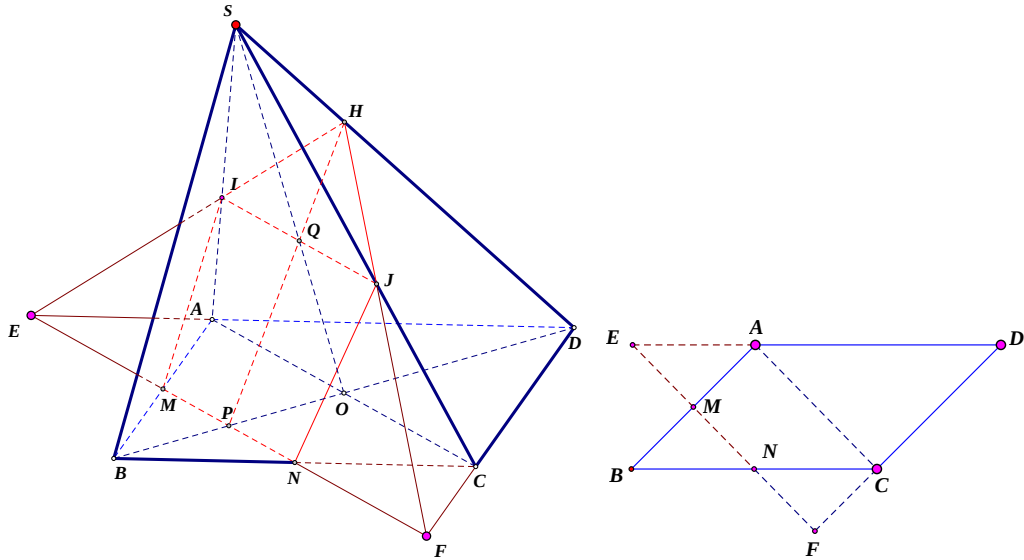
• Vậy $V = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{32}$.

VÍ DỤ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{IA}{IS}$?

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

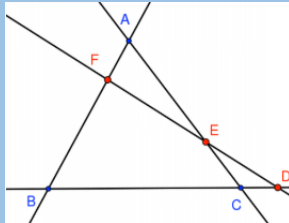
Lời giải

• Chọn D



- Dễ thấy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNI) với hình chóp là hình ngũ giác $IMNJH$ với $MN \parallel JI$.
- Ta có MN, AD, IH đồng qui tại E với $EA = \frac{1}{3}ED$ và MN, CD, HJ đồng qui tại F với $FC = \frac{1}{3}FD$, chú ý E, F cố định.

ĐỊNH LÝ MENELAUS: Cho 3 điểm thẳng hàng $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$ với DEF là một đường thẳng cắt ba đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F



- Dùng định lý Menelaus với tam giác SAD ta có $\frac{HS}{HD} \cdot \frac{ED}{EA} \cdot \frac{IA}{SI} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HD} \cdot 3k = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HD} = \frac{1}{3k}$.
- Từ đó $\frac{d(H, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{HD}{SD} = \frac{3k}{3k+1}$.
- Suy ra $V_{HJIAMNCD} = V_{H, DFE} - V_{I, AEM} - V_{J, NFC}$.
- Đặt $V = V_{S, ABCD}$ và $S = S_{ABCD}$, $h = d(S, (ABCD))$
- Ta có $S_{AEM} = S_{NFC} = \frac{1}{8}S$ và $\frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}$
- Thay vào ta được $V_{HJIAMNCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3k}{3k+1} h \cdot \left(\frac{9}{8}S\right) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{k+1} h \cdot \frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot \frac{21k^2 + 25k}{(3k+1)(k+1)} V$.
- Theo giả thiết ta có $V_{HJIAMNCD} = \frac{13}{20}V$ nên ta có phương trình $\frac{1}{8} \cdot \frac{21k^2 + 25k}{(3k+1)(k+1)} = \frac{13}{20}$

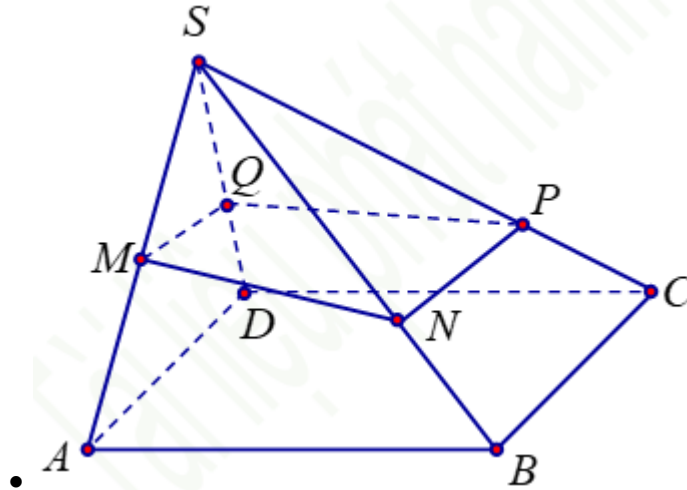
- Giải phương trình này được $k = \frac{2}{3}$.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA , N là điểm trên đoạn SB sao cho $SN = 2NB$. Mặt phẳng (R) chứa MN cắt đoạn SD tại Q và cắt đoạn SC tại P . Tỉ số $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ lớn nhất bằng

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

- Chọn D



- Đặt $\frac{SP}{SC} = x$ $0 < x \leq 1$. Ta có $\frac{SM}{SA} + \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} + \frac{SQ}{SD} \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{2} + x - \frac{2}{3} = x - \frac{1}{6} \left(x > \frac{1}{6} \right)$.
- Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{S.ACD}$
- $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{3}x$; $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}x \left(x - \frac{1}{6} \right)$.
- Suy ra $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x \left(x - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$.
- Xét $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$ với $\frac{1}{6} < x \leq 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \notin \left(\frac{1}{6}; 1 \right]$
- Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{6}$	1
$f'(x)$		+
$f(x)$		$\frac{3}{8}$

- Từ BBT ta có $\max_{\left(\frac{1}{6}; 1 \right]} f(x) = \frac{3}{8}$. Vậy $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{8}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OB = OC = a$. Gọi H là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối tứ diện $OABH$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

CÂU 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

CÂU 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $ABC = 120^\circ$, $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° . Tính SA

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ C. $a\sqrt{6}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

CÂU 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = a$, $BC = 2a$. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $AC = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{3a^2}{2}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC . Tính theo a thể tích của khối chóp $H.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$.

CÂU 6: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

CÂU 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD , cạnh SB hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6\sqrt{3}}$.

CÂU 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , mặt phẳng (SAG) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối tứ diện $ACGS$ bằng

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

CÂU 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC) . Các mặt bên (SAB) , (SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

CÂU 10: chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\frac{2\sqrt{17}}{17}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{13}}{6}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{17}}{6}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{17}}{2}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{13}}{2}$

CÂU 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, ΔSAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết (SCD) tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

CÂU 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$.

Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

CÂU 13: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích 2017. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD . Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{2017}{9}$ B. $\frac{4034}{81}$ C. $\frac{8068}{27}$ D. $\frac{2017}{27}$

CÂU 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Gọi M là trung điểm của SC . Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD cắt SB tại E và cắt SD tại F . Tính thể tích V khối chóp $S.AEMF$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$

CÂU 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$ D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

CÂU 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{6}{5}$

CÂU 17: Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM, BD = \frac{3}{2}BN, AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{13}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{19}$.

CÂU 18: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính $V_1 + V_2$.

- A. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$. B. $\frac{17\sqrt{2}}{72}$. C. $\frac{17\sqrt{2}}{144}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

CÂU 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V , đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ cắt các đoạn SA, SB, SC, SD tương ứng tại M, N, E, F (M, N, E, F khác S và không nằm trên $(ABCD)$). Các điểm H, K, P, Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của M, N, E, F lên $(ABCD)$. Thể tích lớn nhất của khối đa diện $MNEFHKPQ$ là:

- A. $\frac{2}{3}V$. B. $\frac{4}{27}V$. C. $\frac{4}{9}V$. D. $\frac{2}{9}V$.

CÂU 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$ và $\vec{NC} = -2\vec{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V . Tính V .

- A. $V = \frac{\sqrt{2}}{18}$. B. $V = \frac{11\sqrt{2}}{216}$. C. $V = \frac{7\sqrt{2}}{216}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{108}$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC GIẢI NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

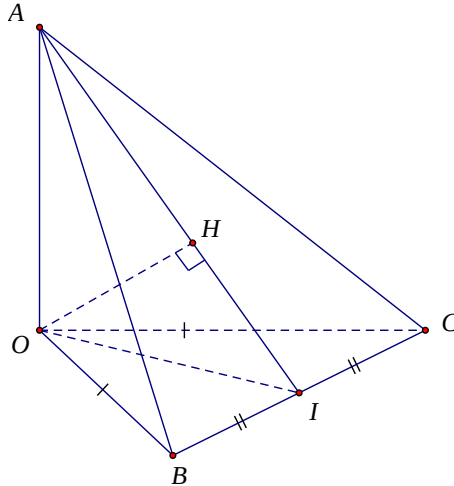
- **Công thức 1:** Thể tích tứ diện đều cạnh a : $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
- **Công thức 2:** Với tứ diện $ABCD$ có $AB = a; AC = b; AD = c$ đôi một vuông góc thì $V = \frac{1}{6}abc$.
- **Công thức 3:** Với tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a; BC = AD = b; AC = BD = c$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$$
- **Công thức 4:** Khối chóp $S.ABC$ có $SA = a; SB = b; SC = c; \angle BSC = \alpha, \angle CSA = \beta, \angle ASB = \gamma$

$$\Rightarrow V = \frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$$

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D



Từ giả thiết suy ra: $\triangle ABC$ cân tại A có:
$$\begin{cases} AB = AC = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ BC = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Giả sử H là trực tâm của tam giác ABC .
Ta thấy $OA \perp (OBC)$. Vì $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC$ và $AC \perp BH$ nên:

$$AC \perp (OBH) \Rightarrow OH \perp AC \quad (1); \quad BC \perp (OAI) \Rightarrow OH \perp BC \quad (2)$$

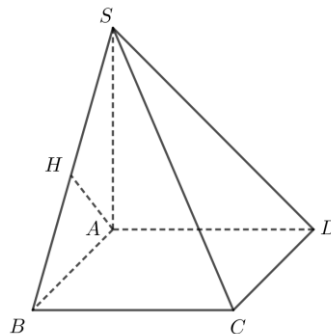
Từ (1) và (2) suy ra: $OH \perp (ABC)$. Có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OA$.

$\Rightarrow \triangle AOI$ vuông cân tại $O \Rightarrow H$ là trung điểm AI và $OH = \frac{1}{2}AI = \frac{a}{2}$.

$$\text{Khi đó: } S_{ABH} = \frac{1}{2}S_{ABI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AI \cdot BI = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}.$$

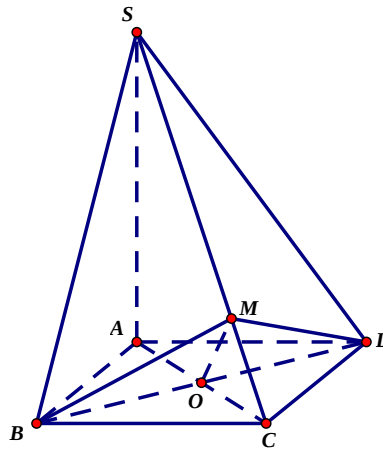
$$\text{Vậy thể tích khối tứ diện } OABH \text{ là: } V = \frac{1}{3}OH \cdot S_{ABH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$$

CÂU 2 : Chọn A



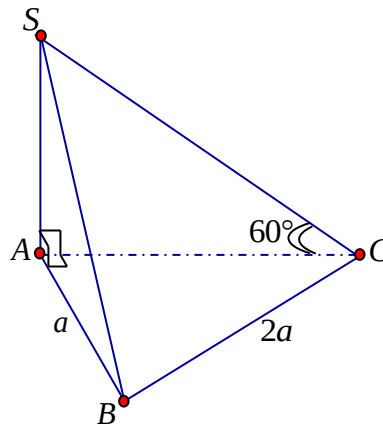
- Kẻ $AH \perp SB$ tại H . Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$
- Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$.

CÂU 3: Chọn D



- Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $ABC = 120^\circ$ nên $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$.
- Nhận xét $BD \perp SC \Rightarrow$ kẻ $OM \perp SC \Rightarrow (BDM) \perp SC$ do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $BMD = 120^\circ$ hoặc $BMD = 60^\circ$.
- TH1:** Nếu $BMD = 120^\circ$ mà tam giác BMD cân tại M nên $BMO = 60^\circ \Rightarrow MO = BO \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
- Mà tam giác OCM đồng dạng với tam giác SCA nên $OM = \frac{SA \cdot CD}{SC} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
- TH2:** Nếu $BMD = 60^\circ$ thì tam giác BMD là tam giác đều nên $OM = a \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\Rightarrow OM = OC$ vô lý vì $\triangle OMC$ vuông tại M .

CÂU 4: Chọn A.

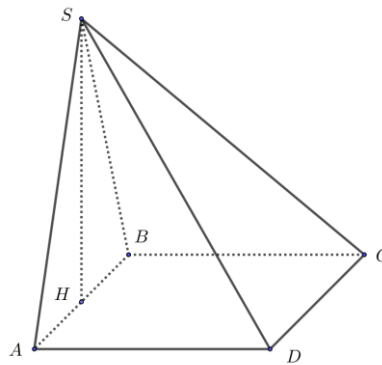


- Vì $SA \perp (ABC)$ nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$, góc giữa SC và mặt phẳng đáy ABC bằng góc giữa SC và AC bằng góc $SCA = 60^\circ$.
- Trong tam giác ABC vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}$.
- Khi đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
- Trong tam giác SAC vuông tại A có: $SA = AC \cdot \tan SCA = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ \Leftrightarrow SA = 3a$.
- Do vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 5: Chọn C

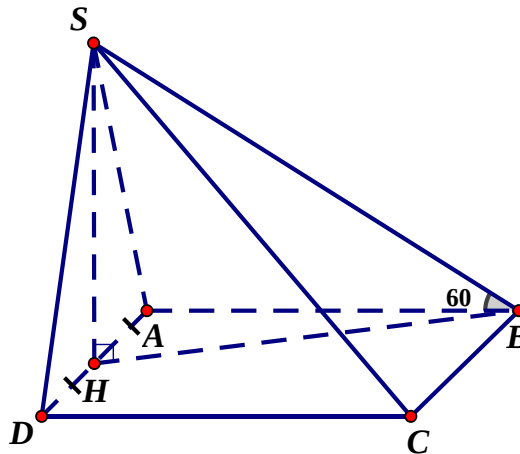
- Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ Góc toạ bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle SCA = 60^\circ$.
- Lại có $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{6a^2 + 2a^2} = 2a\sqrt{2}$.
- Do đó $AC^2 = CH \cdot SC \Rightarrow \frac{CH}{SC} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{2a^2}{8a^2} = \frac{1}{4}$.
- $\frac{d(H, (ABCD))}{d(H, (ABCD))} = \frac{SH}{SC} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(H, (ABCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Thể tích của khối chóp $H.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

CÂU 6. Chọn B



- Gọi H là trung điểm AB , ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
- Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

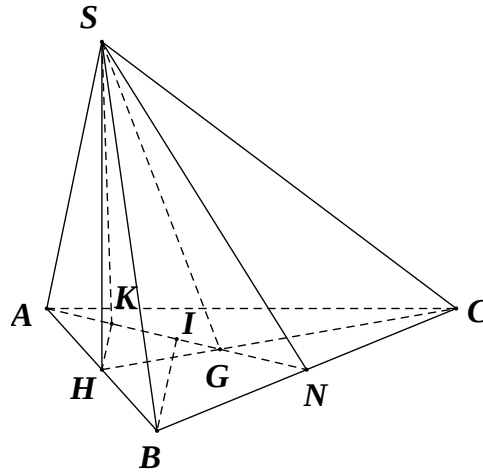
CÂU 7: Chọn B



- Gọi H là trung điểm của cạnh AD .
- Do H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $ABCD$ nên $SH \perp (ABCD)$.
- Cạnh SB hợp với đáy một góc 60° , do đó: $\angle SBH = 60^\circ$.
- Xét tam giác AHB vuông tại A : $HB = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
- Xét tam giác SBH vuông tại H :

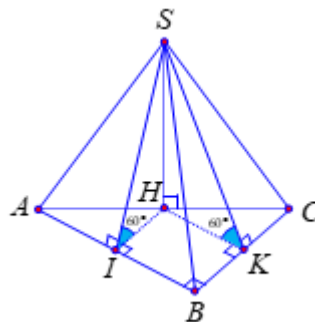
- $\tan SBH = \frac{SH}{BH} \Leftrightarrow SH = BH \cdot \tan SBH \Leftrightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{2} \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.
- Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$.
- Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

CÂU 8: Chọn A



- Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2 \Rightarrow S_{\triangle ACG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{3}$.
- Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
- Gọi N là trung điểm của BC , I là trung điểm của AN và K là trung điểm của AI .
- Ta có $AB = BN = a \Rightarrow BI \perp AN \Rightarrow HK \perp AN$.
- Do $AG \perp (SHK)$ nên góc giữa (SAG) và đáy là $SKH = 60^\circ$.
- Ta có: $BI = \frac{1}{2} AN = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HK = \frac{1}{2} BI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $SH = SK \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Vậy $V = V_{ACGS} = V_{S.ACG} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ACG} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

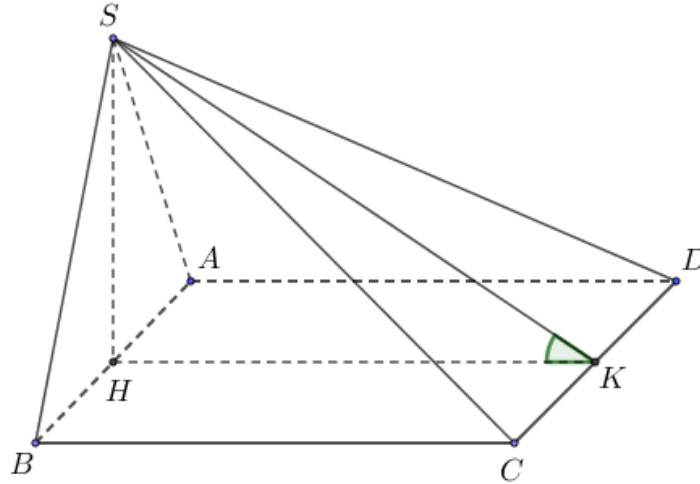
CÂU 9: Chọn D



- Ta có: $(SAC) \perp (ABC)$ và $(SAC) \cap (ABC) = AC$.
- Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $SH \perp AC$ thì $SH \perp (ABC)$.
- Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và AC thì
- $\left((SAB), (ABC) \right) = SIH$ và $\left((SAC), (ABC) \right) = SKH$.

- Mà $SIH = SKH = 60^\circ$ nên $HI = HK \Rightarrow$ tứ giác $BIHK$ là hình vuông $\Rightarrow H$ là trung điểm cạnh AC .
- Khi đó tứ giác $BIHK$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và $SH = HI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH \Leftrightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

CÂU 10: Chọn A



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$, K là trung điểm $CD \Rightarrow CD \perp SK$

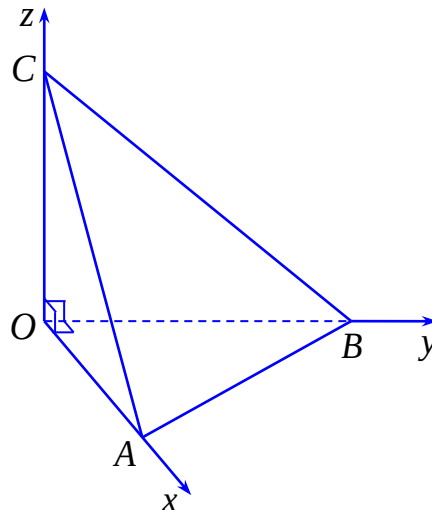
Ta có $((SCD), (ABCD)) = (SK, HK) = SKH$. $\cos SKH = \frac{HK}{SK} \Rightarrow SK = \frac{a\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{13}}{6}$.

CÂU 11: Chọn B

- Gọi E là trung điểm AB , $SE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SE \perp (ABCD)$ Gọi G là trung điểm của CD .
- $((SCD), (ABCD)) = SGE = 30^\circ$, $EG = SE \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2} \Rightarrow AD = BC = \frac{3a}{2}$
- $\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot CD = a \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot SE \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

CÂU 12: Chọn B.

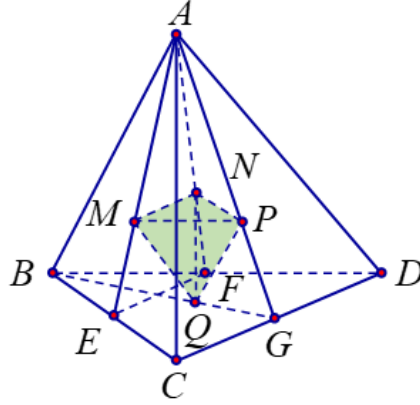


$$\text{Ta có } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(O, (ABC))} = \frac{3}{d(O, (ABC))}$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2} \text{ nên } d(O, (ABC)) = 2.$$

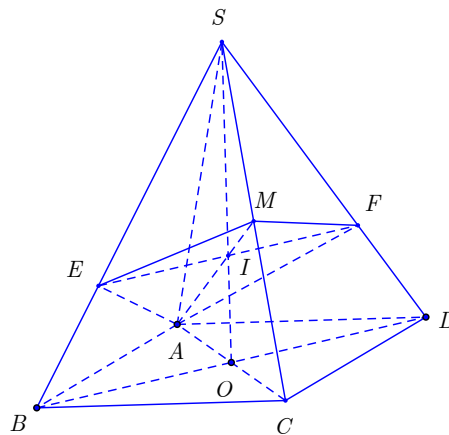
Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O , bán kính $R = 2$.

CÂU 13: Chọn D



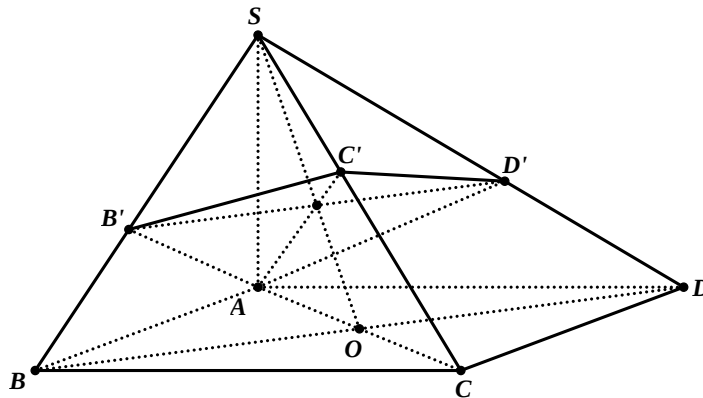
- $\frac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{EFG}}{S_{BCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AEFG} = \frac{1}{4} V_{ABCD}$
- .
- $\frac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}} = \frac{SM}{SE} \cdot \frac{SN}{SE} \cdot \frac{SP}{SG} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{8}{27} V_{AEFG} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{4} V_{ABCD} = \frac{2}{27} V_{ABCD}$
- Do mặt phẳng $(MNP) \parallel (BCD)$ nên $\frac{V_{QMNP}}{V_{AMNP}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V_{QMNP} = \frac{1}{2} V_{AMNP}$
- $V_{QMNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{27} V_{ABCD} = \frac{1}{27} V_{ABCD} = \frac{2017}{27}$.

CÂU 14: Chọn D



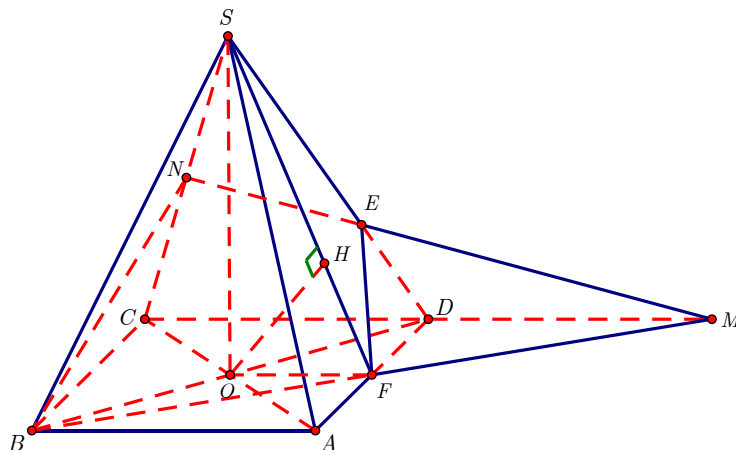
- Trong mặt phẳng (SBD) : $EF \cap SO = I$. Suy ra A, M, I thẳng hàng.
- Trong tam giác SAC hai trung tuyến AM, SO cắt nhau tại I suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.
- Lại có $EF \parallel BD \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

- Ta có: $\frac{V_{S.AEM}}{V_{SABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V_{S.AFM}}{V_{SADC}} = \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3}$.
- Vậy $\frac{V_{S.AEM} + V_{S.AFM}}{V_{S.ABC} + V_{S.ADC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{S.AEMF}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}$.
- Góc giữa cạnh bên và đáy của $S.ABCD$ bằng góc $SBO = 60^\circ$ suy ra $SO = BO\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
- Vậy $V_{S.AEMF} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.
- CÂU 15: Chọn C**



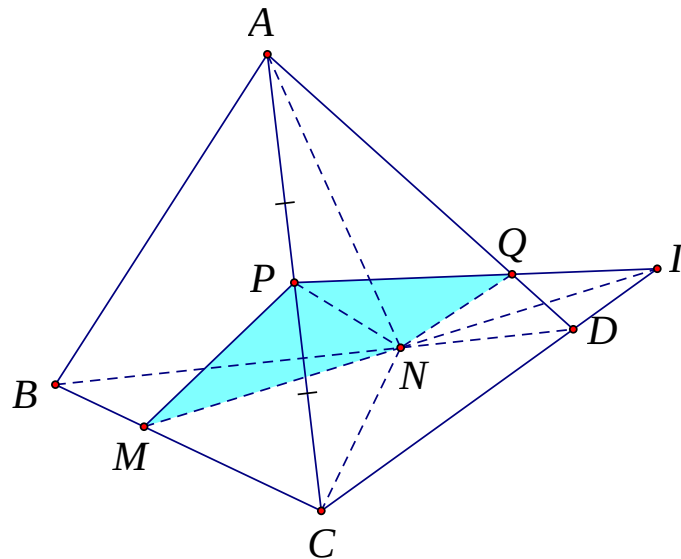
- Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.
- Vì B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD nên ta có $SC \perp (AB'D')$.
- Gọi C' là hình chiếu của A lên SC suy ra $SC \perp AC'$ mà $AC' \cap (AB'D') = A$ nên $AC' \subset (AB'D')$ hay $C' = SC \cap (AB'D')$.
- Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC .
- Trong tam giác vuông SAB' ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$.
- $\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{SAB'C'} + V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} \right) = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Vậy $V_{SAB'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

CÂU 16: Chọn A



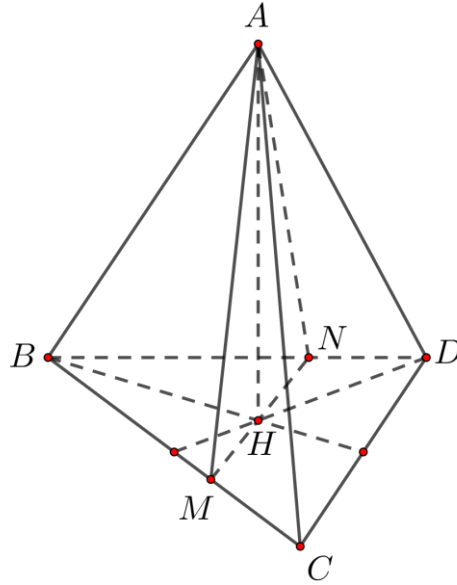
- Giả sử các điểm như hình vẽ.
- $E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM , $DF \parallel BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM .
- Ta có: $\left(SD, (ABCD) \right) = SDO = 60^\circ \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$
- $\Rightarrow d(O, (SAD)) = OH = h = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{SAD} = \frac{1}{2} SF \cdot AD = \frac{a^2\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \frac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \frac{ME}{MN} \cdot \frac{MF}{MB} \cdot \frac{MD}{MC} = \frac{1}{6}$
- $\Rightarrow V_{BFDCNE} = \frac{5}{6} V_{MNBC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(M, (SAD)) \cdot \frac{1}{2} S_{SBC} = \frac{5}{18} \cdot 4h \cdot \frac{1}{2} S_{SAD} = \frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$
- $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{36}$.
- Suy ra: $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \frac{7}{5}$.

CÂU 17: Chọn B



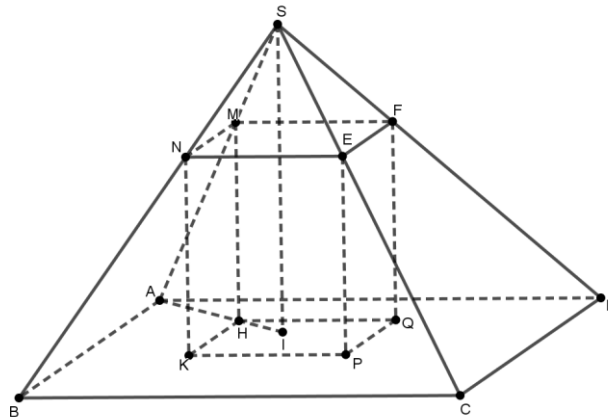
- Gọi $V_{ABCD} = V$, $I = MN \cap CD$, $Q = IP \cap AD$ ta có $Q = AD \cap (MNP)$.
- Thiết diện của tứ diện $ABCD$ được cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNPQ$.
- Áp dụng định lý Menelaus trong các tam giác BCD và ACD ta có:
- $\frac{NB}{ND} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{MC}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{1}{4}$ và $\frac{ID}{IC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QD} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QD} = 4$.
- Áp dụng bài toán tỉ số thể tích của hai khối chóp tam giác, ta có:
- $\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow V_{ANPQ} = \frac{2}{5} V_{ANCD} = \frac{2}{15} V$. Suy ra $V_{N.PQDC} = \frac{1}{3} V - \frac{2}{15} V = \frac{1}{5} V$.
- và $\frac{V_{CMNP}}{V_{CBNA}} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CP}{CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3} V_{CBNA} = \frac{2}{9} V$.
- Suy ra $V_2 = V_{N.PQDC} + V_{CMNP} = \frac{19}{45} V$. Do đó $V_1 = V - V_2 = \frac{26}{45} V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$.

CÂU 18: Chọn A



- Gọi H là tâm tam giác BCD , ta có $AH \perp (BCD)$, mà $(AMN) \perp (BCD)$ nên $AH \subset (AMN)$ hay MN luôn đi qua H .
- Ta có $BH = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- Thể tích khối chóp $ABMN$ là $V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{12} BM \cdot BN$.
- Do MN luôn đi qua H và M chạy trên BC nên $BM \cdot BN$ lớn nhất khi $M \equiv C$ hoặc $N \equiv D$ khi đó $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{24}$.
- $BM \cdot BN$ nhỏ nhất khi $MN \parallel CD$ khi $BM = BN = \frac{2}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{\sqrt{2}}{27}$. Vậy $V_1 + V_2 = \frac{17\sqrt{2}}{216}$.

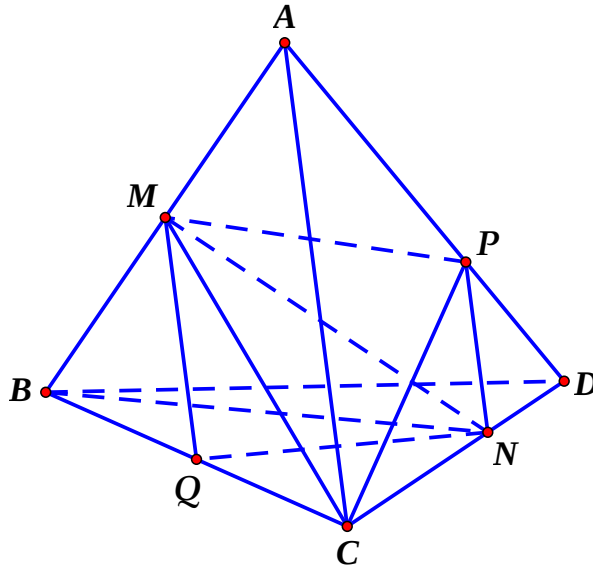
CÂU 19: Chọn C



- Đặt $k = \frac{SM}{SA}$. Ta có: $MNEF$ và $ABCD$ đồng dạng với tỉ số $k = \frac{SM}{SA}$ ($0 < k < 1$).
- Do đó $S_{MNEF} = k^2 S_{ABCD}$.

- Gọi SI là đường cao của $S.ABCD$. Ta có: $\frac{MH}{SI} = \frac{MA}{SA} = \frac{SA-SM}{SA} = 1-k$
- $V_{MNEFHKPQ} = S_{MNEF} \cdot MH = S_{ABCD} \cdot k^2 \cdot (1-k) \cdot SI = 3V \cdot k^2 \cdot (1-k)$
- $= \frac{3V}{2} \cdot k \cdot (2-2k) \leq \frac{3V}{2} \cdot \left(\frac{k+k+2-2k}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}V$.
- Vậy thể tích lớn nhất của khối đa diện $MNEFHKPQ$ là $\frac{4}{9}V$ khi $k = 2-2k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$.

CÂU 20: Chọn B



- Từ N kẻ $NP \parallel AC$, $N \in AD$. Từ M kẻ $MQ \parallel AC$, $Q \in BC$. Mặt phẳng (P) là $MPNQ$
 - Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}$; $V = V_{ACMPNQ} = V_{AMPC} + V_{MQNC} + V_{MPNC}$
 - Ta có $V_{AMPC} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AD} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{ABCD}$
 - $V_{MQNC} = \frac{1}{2} V_{AQNC} = \frac{1}{2} \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{CN}{CD} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABCD} = \frac{1}{2} V_{ABCD}$
 - $V_{MPNC} = \frac{2}{3} V_{MPCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} V_{MACD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{AM}{AB} \cdot V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{ABCD} = \frac{1}{9} V_{ABCD}$
- Vậy $V = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) V_{ABCD} \Rightarrow V = \frac{11}{18} V_{ABCD} = \frac{11\sqrt{2}}{216}$.

CÁC DẠNG HÌNH KHÔNG GIAN THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI

CÂU 1: Xét tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) . Khi đó, tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau $M = (3 + \cot^2 \alpha)(3 + \cot^2 \beta)(3 + \cot^2 \gamma)$

- A. Số khác B. $48\sqrt{3}$ C. 48 D. 125

CÂU 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều, đường cao SH với H nằm trong ΔABC và $2SH = BC, (\angle SBC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Biết có một điểm O nằm trên đường cao SH sao cho $d(O; AB) = d(O; AC) = d(O; (\angle SBC)) = 1$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $\frac{256\pi}{81}$. B. $\frac{125\pi}{162}$. C. $\frac{500\pi}{81}$. D. $\frac{343\pi}{48}$.

CÂU 3: Xét khối tứ diện $SABC$ có cạnh SA, BC thỏa mãn: $SA^2 + BC^2 = 18$ và các cạnh còn lại đều bằng 5.

Biết thể tích khối tứ diện $SABC$ đạt giá trị lớn nhất có dạng: $V_{\max} = \frac{x\sqrt{y}}{4}$; $x, y \in \mathbb{N}^*$; $(x, y) = 1$. Khi đó: x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây?

- A. $x + y^2 - xy > 4550$. B. $xy + 2xy > 2550$. C. $x^2 - xy + y^2 < 5240$. D. $x^3 - y > 19602$.

CÂU 4: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB cân tại $O, OA = OB = 2a, \angle AOB = 120^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O lấy hai điểm C, D , nằm về hai phía của mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC vuông tại C và tam giác ABD đều. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{5a\sqrt{2}}{3}$

CÂU 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{15}}{3}$ D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

CÂU 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $O, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAO cân tại S , mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{3a}{4}$

CÂU 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\angle BAD = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$ B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$ C. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$ D. $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$

CÂU 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Tính thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKB$.

- A. $\sqrt{2}\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{6}$. C. $\frac{\pi a^3}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

CÂU 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi H là trung điểm của AB . Biết rằng tam giác SAB cân tại H và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAC$

- A. $\frac{9\sqrt{2}a}{8}$ B. $\frac{\sqrt{62}a}{16}$ C. $\frac{\sqrt{62}a}{8}$ D. $\frac{\sqrt{31}a}{32}$

CÂU 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $\overrightarrow{SM} = 3\overrightarrow{MD}$. Mặt phẳng (ABM) cắt cạnh SC tại điểm N . Thể tích khối đa diện $MNABCD$ bằng

- A. $\frac{7a^3}{32}$ B. $\frac{15a^3}{32}$ C. $\frac{17a^3}{32}$ D. $\frac{11a^3}{96}$

CÂU 11 Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

CÂU 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$ trùng với trung điểm AB . Biết $AB = a, BC = 2a, BD = a\sqrt{10}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

- A. $V = \frac{3\sqrt{30}a^3}{8}$ B. $V = \frac{\sqrt{30}a^3}{4}$ C. $V = \frac{\sqrt{30}a^3}{12}$ D. $V = \frac{\sqrt{30}a^3}{8}$

CÂU 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a, AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa đường thẳng MN và (SAC) .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{\sqrt{55}}{10}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

CÂU 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC .

- A. $\frac{2}{\sqrt{35}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{7}}$ C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

CÂU 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật, $AB = a; AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC)

- A. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$ B. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$ C. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$ D. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$

GIẢI CHI TIẾT

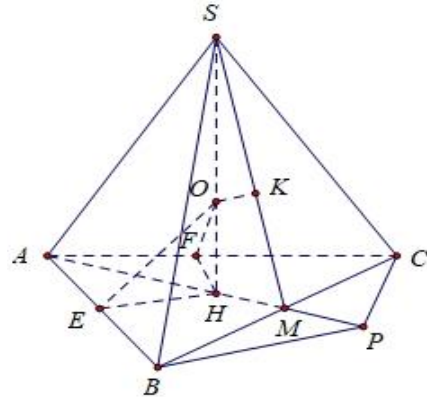
CÂU 1: Đáp án D

- Gọi H là hình chiếu của O lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABC
- Ta có $OA; (ABC) = (OA; AH) = OAH = \alpha$; tương tự $OBH = \beta; OCH = \gamma$
- Lại có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$
- Đặt $x = \sin^2 \alpha, y = \sin^2 \beta, z = \sin^2 \gamma \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$
- Khi đó $M = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) = \left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{y}\right) \left(2 + \frac{1}{z}\right)$
 $= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz}$
- $\geq 8 + \frac{36}{x + y + z} + \frac{18}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xyz} \geq 8 + \frac{36}{1} + \frac{18}{1} + \frac{1}{\frac{1}{27}} = 125$

Vậy $M_{\min} = 125$.

CÂU 2 : Đáp án D.

- Dựng hình như hình bên với
- $HE \perp AB; HF \perp AC; HM \perp BC$.
- Ta có: $OE = OF = OK = 1; SMH = 60^\circ$
- Đặt $BC = 2a \Rightarrow SH = a; HSM = 30^\circ$
- Ta có: $HM \tan 30^\circ = SH \Rightarrow HM = \frac{a}{\sqrt{3}}; SM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.
- $SO \sin 30^\circ = OK = 1 \Rightarrow SO = 2 \Rightarrow OH = |a - 2|$
- $\Rightarrow HE = \sqrt{1^2 - (a - 2)^2}; AH = a\sqrt{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$
- Lại có: $\sin EAH = \frac{1}{2} = \frac{HE}{AH} = \frac{\sqrt{1 - (a - 2)^2}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow 3a^2 = 1 - (a^2 - 4a + 4) \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.
- Trên AM lấy điểm P sao cho $BPC = 120^\circ \Rightarrow ABPC$ nội tiếp.
- Khi đó $R_{S.ABC} = R_{SAP} = \frac{SA \cdot AP \cdot SM}{2 \cdot AP \cdot SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{7}{4} \Rightarrow V_{(C)} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{343\pi}{48}$.

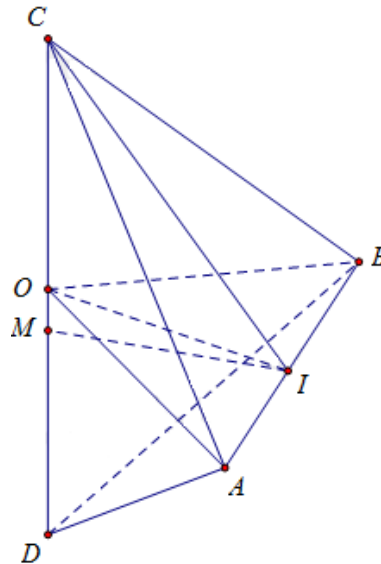


CÂU 3: Đáp án A.

- Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, BC. Ta có $\begin{cases} BI \perp SA \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BIC)$ và $V_{S.IBC} = V_{A.IBC}$.
- Đặt $SA = a, BC = b$, theo giả thiết ta được $a^2 + b^2 = 18$.
- Lại có $BI = \sqrt{SB^2 - SI^2} = \sqrt{25 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{100 - a^2}{4}}$.
- Và $IH = \sqrt{IB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{100 - a^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{100 - a^2 - b^2}}{2}$.

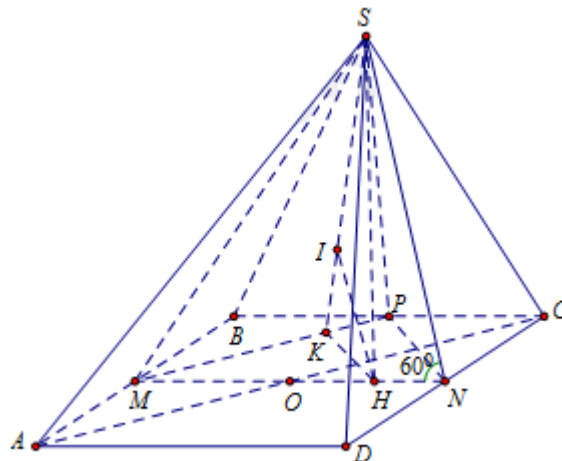
- Diện tích tam giác IBC là $S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2} \cdot IH \cdot BC = \frac{y}{4} \sqrt{100 - a^2 - b^2}$.
- Suy ra $V_{S.IBC} = V_{A.IBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{4} \sqrt{100 - a^2 - b^2} = \frac{ab}{24} \sqrt{100 - a^2 - b^2}$.
- Khi đó, thể tích khối chóp S.ABC là $V_{S.ABC} = 2V_{S.IBC} = \frac{ab}{12} \sqrt{100 - a^2 - b^2}$.
- Ta có $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow V \leq \frac{a^2 + b^2}{24} \sqrt{100 - a^2 - b^2} = \frac{18}{24} \cdot \sqrt{100 - 18} = \frac{3\sqrt{82}}{4} = \frac{x\sqrt{y}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 82 \end{cases}$.
- Vậy $x + y^2 - xy = 4 + 82^2 - 4 \cdot 82 = 6400 > 4550$.

CÂU 4: Đáp án A



- Gọi M là trung điểm của CD khi đó $MC = MD; MA = MB$
- Ta có $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos A} = 2a\sqrt{3}; OI = a$
- $CI = \frac{AB}{2} = a\sqrt{3}; DI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3a \Rightarrow CO = a\sqrt{2}; DO = 2a\sqrt{2}$
- Khi đó $OC \cdot OD = OB^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B. Suy ra $MC = MD = MB$
- Vậy M là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Khi đó $R = \frac{CD}{2} = \frac{OC + DO}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

CÂU 5: Đáp án A



- Ta có: $SM^2 = (2a)^2 - a^2 - 3a^2$ và $SM^2 = MN^2 + SN^2 - 2MN \cdot SN \cos 60^\circ$
- $\Leftrightarrow 3a^2 = (2a)^2 + SN^2 - 2 \cdot 2a \cdot SN \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow SN^2 - 2aSN + a^2 = 0 \Leftrightarrow (SN - a)^2 = 0 \Leftrightarrow SN = a$
- $SH = SN \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $MP = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $HN = SN \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow HO = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$
- Ta có $\frac{OM}{HM} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$ nên $d(O; (SMP)) = \frac{2}{3} d(H; (SMP))$
- $PN = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Mà $\frac{KH}{PN} = \frac{MH}{MN}$
- $\Rightarrow KH = \frac{MH}{MN} \cdot PN = \frac{2}{2a} a\sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$

CÂU 6: Đáp án D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD)

Ta có $SA = SO \Rightarrow \triangle SHA = \triangle SHO$ (c - g - c) $\Rightarrow HA = HO$

$\Rightarrow \triangle HAO$ cân tại H, có $\begin{cases} \angle HAO = 30^\circ \\ OA = a \end{cases} \Rightarrow HA = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Xác định góc $SD; (ABCD) = \angle SDH = 60^\circ \Rightarrow SH = 2a$

Qua B kẻ đường thẳng $d // AC$, K là hình chiếu của H trên d

$\Rightarrow AC // (SBK) \Rightarrow d(SB; AC) = d(AC; (SBK)) = d(A; (SBK))$

Mặt khác $\frac{d(H; d)}{d(A; d)} = \frac{4}{3} \Rightarrow d(A; (SBK)) = \frac{3}{4} d(H; (SBK))$

Vậy $d(A; (SBK)) = \frac{3}{4} \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(SB; AC) = \frac{3a}{4}$

CÂU 7: Đáp án C

Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC, H là hình chiếu vuông góc của I trên

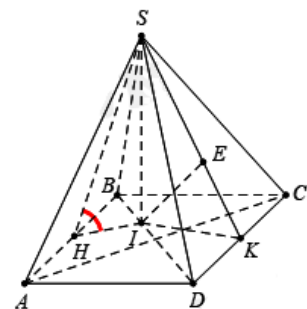
$\Rightarrow (SAB); (ABCD) = \angle SHI; HI = SHI = 60^\circ$

Mà $IH = \frac{1}{3} d(C; (AB)) = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SI = \tan 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2}$

Kẻ $IK \perp CD; IE \perp SK \Rightarrow IE \perp (SCD) \Rightarrow d(I; (SCD)) = IE$

Mà $IK = \frac{2}{3} d(B; (CD)) = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IE = \frac{SI \cdot IK}{\sqrt{SI^2 + IK^2}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

Vậy $d(B; (SCD)) = \frac{3}{2} d(I; (SCD)) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$



CÂU 8: Đáp án D

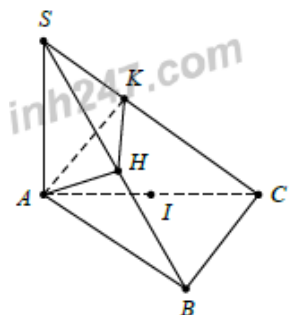
Theo giả thiết, ta có $\angle ABC = 90^\circ$ và $\angle ACB = 90^\circ$ (1).

Do $\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \end{cases} (BC \perp (SAB)) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ ba điểm B, H, K cùng nhìn xuống AC dưới một góc 90° .

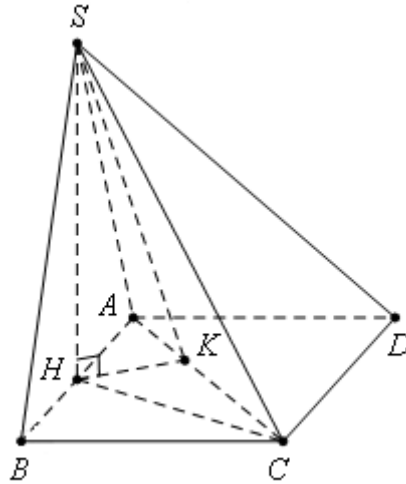
Nên hình chóp A.HKCB nội tiếp mặt cầu tâm I là trung điểm AC.

$\Rightarrow R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



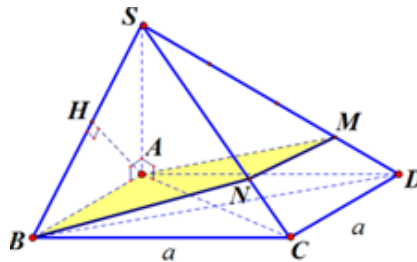
- Vậy thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

CÂU 9: Đáp án C



- Kẻ $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow (SAC); (ABCD) = SKH = 60^\circ$
- Tam giác HAC có $AH = \frac{a}{2}, HC = \frac{3a}{2}$ và $AC = a\sqrt{3}$
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔHAC là $R_{\Delta HAC} = \frac{HC}{2 \cdot \sin HAC} = \frac{3a\sqrt{6}}{8}$
- Và $HK = d(H; AC) = \frac{1}{2}d(B; AC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
- Tam giác SHK vuông tại H, có $SH = \tan SKH \times HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Vậy $R = \sqrt{R_{\Delta HAC}^2 + \frac{SH^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{6}}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{62}a}{8}$

CÂU 10: Đáp án D



- Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A $\Rightarrow SA = a$
- $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}$. Kẻ $MN \parallel CD \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SN}{SC} = \frac{3}{4}$
- Ta có: $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$

$$\frac{V_{S.AMNB}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABM} + V_{S.BMN}}{2V_{S.ABD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABD}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SD} + \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{21}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MNABCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{11}{32} V_{S.ABCD} = \frac{11}{32} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{11a^3}{96}$$

$$\bullet \text{ Vậy } V_{MNABCD} = \frac{11}{32} V_{S.ABCD} = \frac{11}{32} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{11a^3}{96}$$

CÂU 11: Đáp án B

- Gọi M là trung điểm của BC ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Trong (SAM) kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = 3$

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = (AM; SM) = SMA = \alpha$$

$$\bullet \Rightarrow AM = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha} \Rightarrow BC = 2AM = \frac{6}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sin \alpha} \cdot \frac{6}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin^2 \alpha}$$

$$\bullet \text{ Trong tam giác vuông SAM có: } SM = \frac{AM}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

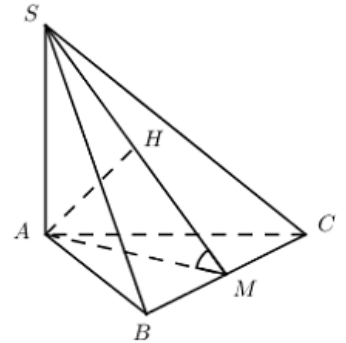
$$\Rightarrow SA = \sqrt{SM^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{8}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \frac{9}{\sin^2 \alpha}} = \frac{3\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{3}{\cos \alpha}$$

$$\bullet \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\cos \alpha} \cdot \frac{9}{\sin^2 \alpha} = \frac{9}{(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha}$$

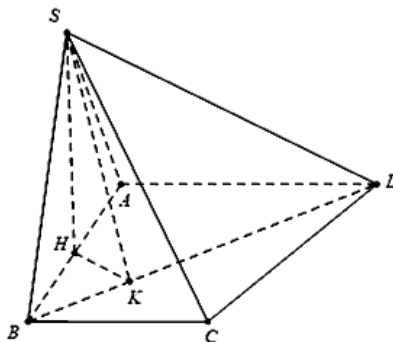
$$\bullet \text{ Đặt } t = \cos \alpha (0 < t < 1) \Rightarrow f(t) = \frac{9}{(1 - t^2)t}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{243}{8}; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18\sqrt{2}; f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{243}{10}$$

$$\bullet \Rightarrow \min_{x \in (0;1)} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$



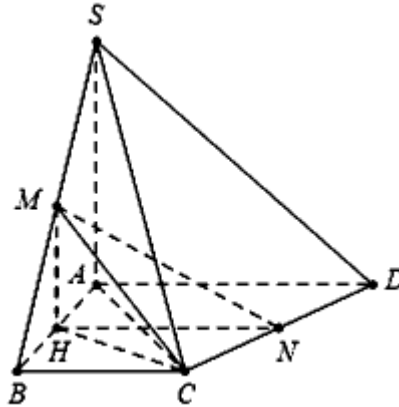
CÂU 12: Đáp án D.



- Dựng $HK \perp BD$, do $SH \perp BD$ nên ta có:
- $(SKH) \perp BD \Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là $SKH = 60^\circ$.

- Lại có: $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 3a$, $HK = \frac{1}{2}d(A; BD) = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{3a}{2\sqrt{10}}$.
- Do đó $SH = HK \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$. Vậy $V = \frac{1}{3} \frac{AD+BC}{2} \cdot AB \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{30}}{8}$.

CÂU 13: Đáp án B.



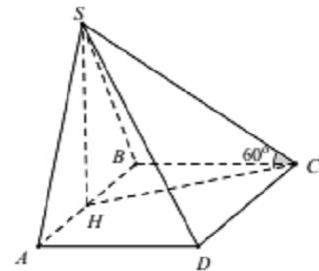
- Dễ thấy $CD \perp (SAC) \Rightarrow \cos(MN; (SAC)) = \sin(MN; CD)$.
- Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow MH \perp (ABCD)$
- Tam giác MHN vuông tại H, có $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.
- Tam giác MHC vuông tại H, có $MC = \sqrt{MH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- Tam giác MNC, có $\cos MNC = \frac{MN^2 + NC^2 - MC^2}{2 \cdot MN \cdot NC} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.
- Vậy $\cos(MN; (SAC)) = \sin MNC = \sqrt{1 - \cos^2 MNC} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

CÂU 14: Đáp án A

- Cách giải: $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$
- Ta có $(SC; (ABCD)) = (SC; HC) = SHC = 60^\circ$

Xét tam giác vuông SHC có $SH = HC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}$

- Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$
 $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{6a^2 + a^2} = a\sqrt{7}$
 $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC}}_0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Ta có: $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = HB \cdot AC \cdot \cos(HB; AC) = HB \cdot AC \cdot \cos BAC = HB \cdot AC \cdot \frac{AB}{AC} = a \cdot 2a = 2a^2$
- Lại có $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = SB \cdot AC \cdot \cos(SB; AC) \Rightarrow \cos(SB; AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{SB \cdot AC} = \frac{2a^2}{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$



CÂU 15: Đáp án D

- Ta có $(SC; (ABCD)) = (SC; HC) = SCH = 45^\circ$

- $\Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân tại H $\Rightarrow SH = HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$
- $d(M; (SAC)) = \frac{1}{2}d(D; (SAC)) = \frac{1}{2}d(B; (SAC)) = d(H; (SAC))$
- Trong (ABD) kẻ $HI \perp AC$, trong (SHI) kẻ $HK \perp SI$ ta có:
- $\begin{cases} AC \perp HI \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H; (SAC)) = HK$
- Ta có $\Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta ACB(g.g) \Rightarrow \frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow HI = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$
- $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{\frac{17a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{5}} = \frac{89}{17a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{89}} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$

CHỦ ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

VÍ DỤ 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

A. $\frac{a^3}{3}$.

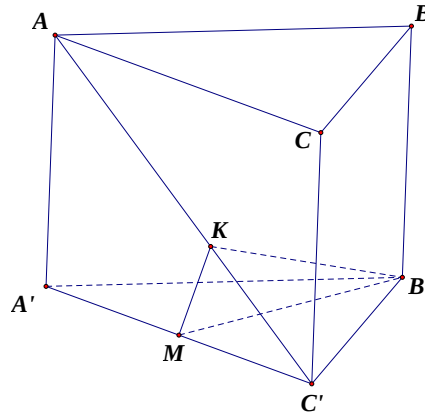
B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên

$B'M \perp A'C' \Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$. Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ là $V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3} B'M \cdot AA' \cdot AC$.

Ta có $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$. Do $MB' \perp (AA'C'C) \Rightarrow MB' \perp AC'$. Kẻ

$MK \perp AC' \Rightarrow B'K \perp AC'$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ là

$\angle MKB' \Rightarrow \angle MKB' = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông MKB' ta có $\tan 60^\circ = \frac{MB'}{MK} \Rightarrow MK = \frac{MB'}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong tam giác vuông MKC' ta có $\tan \angle MC'K = \frac{MK}{KC'} = \frac{MK}{\sqrt{MC'^2 - MK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{6a^2}{36}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác trong tam giác vuông $AA'C'$ ta có $AA' = A'C' \cdot \tan \angle MC'K = \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = a$.

Vậy $V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3} B'M \cdot AA' \cdot AC = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}$.

VÍ DỤ 2. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\angle BAC = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$.

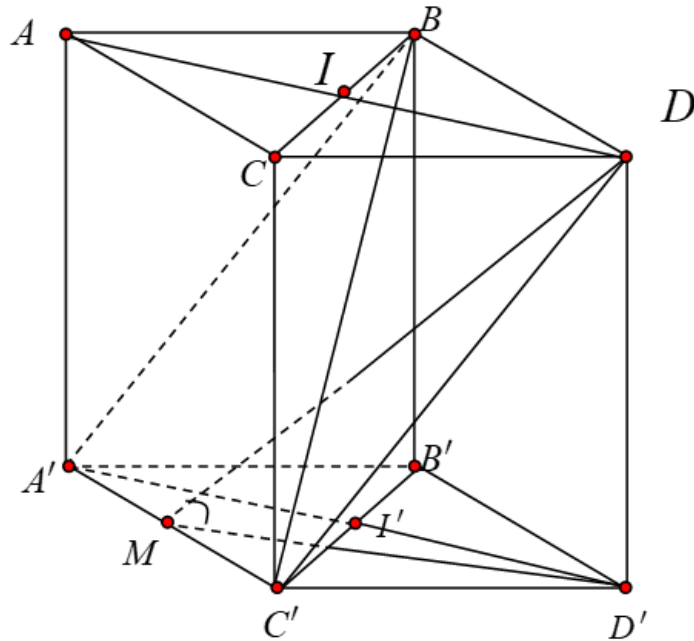
B. $V = \frac{9a^3}{8}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, I, I' lần lượt là trung điểm của $A'C', BC, B'C'$.

D là điểm đối xứng với A qua I , D' là điểm đối xứng với A' qua I' .

Khi đó mặt phẳng $(A'BC') \equiv (A'BDC')$.

$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng $A'BC'$ với đáy là góc giữa mặt phẳng $(A'BDC')$ với đáy.

Ta có tứ giác $A'B'D'C'$ là hình thoi

Vì $B'A'C' = 120^\circ$ nên tam giác $A'C'D'$ là tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow D'M \perp A'C'$.

Mà $A'C' \perp DD'$

Nên $A'C' \perp DM$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BDC')$ với đáy là góc $DMD' = 60^\circ$

$$\text{Xét tam giác } A'C'D', \text{ có: } \begin{cases} D'M = \frac{a\sqrt{3}}{2} = C'I' \\ A'I' = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow C'B' = a\sqrt{3}$$

Xét tam giác MDD' vuông tại D' có $DMD' = 60^\circ \Rightarrow \triangle MDD'$ là nửa tam giác đều có đường cao DD'
 $\Rightarrow DD' = D'M \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} A'I' \cdot B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'B'C'} \cdot DD' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

VÍ DỤ 3. Cho khối trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $8a^2$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 8\sqrt{3}a^3$.

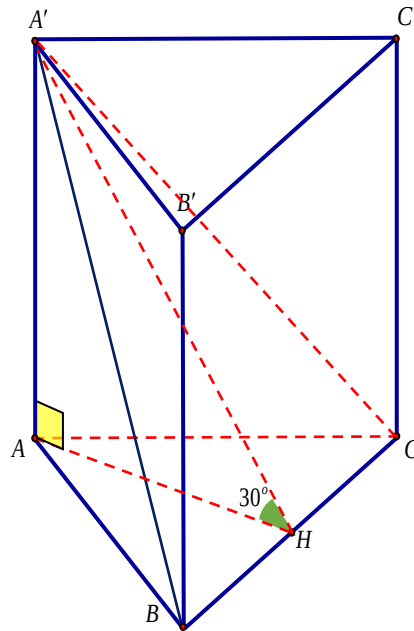
B. $V = 2\sqrt{3}a^3$.

C. $V = 64\sqrt{3}a^3$.

D. $V = 16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta lại có: $\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AA'$

$\Rightarrow$ góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

Gọi $BC = 2x$, theo đề ta có: $\begin{cases} AH = x\sqrt{3} \\ AA' = AH \cdot \tan(30^\circ) = x \end{cases} \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = 2x$.

$$S_{\Delta A'BC} = 8a^2 \Rightarrow \frac{1}{2} BC \cdot A'H = 8a^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x = 8a^2 \Rightarrow x = 2a.$$

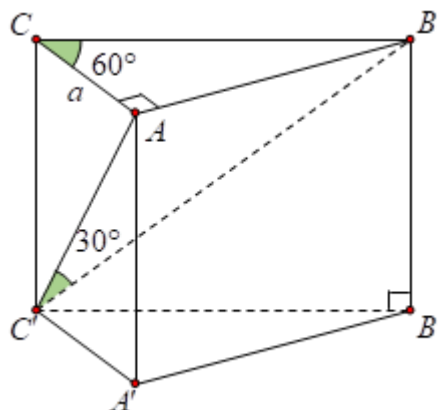
$$\text{Vậy thể tích cần tìm: } V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \left((4a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 2a = 8\sqrt{3}a^3.$$

VÍ DỤ 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = 3a^3$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có:

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = a\sqrt{3}. \text{ Khi đó } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có hình chiếu vuông góc của cạnh BC' trên mặt phẳng $(ACC'A')$ là AC' . Khi đó góc $BC'A = 30^\circ$. Xét tam giác ABC' vuông tại A ta có:

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = 3a.$$

$$\text{Khi đó: } CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}. \text{ Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = a^3\sqrt{6}.$$

VÍ DỤ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $BAC = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC' . Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{11}}{11}.$

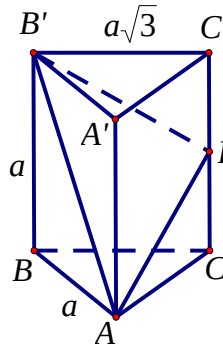
B. $\frac{\sqrt{33}}{11}.$

C. $\frac{\sqrt{10}}{10}.$

D. $\frac{\sqrt{30}}{10}.$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } B'AB \text{ có } AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } IAC \text{ có } IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } IB'C' \text{ có } B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } IB'A \text{ có } B'A^2 + IA^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \triangle IB'A \text{ vuông tại } A$$

$$\Rightarrow S_{IB'A} = \frac{1}{2} AB' \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Lại có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α .

Ta có $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle AB'I$ trên mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Do đó } S_{ABC} = S_{IB'A} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

CÂU 2: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 3: Cho hình lập phương cạnh $2a$. Tâm các mặt của hình lập phương là đỉnh của một hình bát diện đều. Tính tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đều đó.

A. $\sqrt{3}a^2$. B. $8\sqrt{3}a^2$. C. $2\sqrt{3}a^2$. D. $4\sqrt{3}a^2$.

CÂU 4: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB = AC = 2x$, $BAC = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{4x^3}{3}$. B. $V = x^3$. C. $V = \frac{3x^3}{16}$. D. $V = \frac{9x^3}{8}$.

CÂU 5: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 3$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{2}$.

CÂU 6: Cho lăng trụ đứng tam giác có độ dài các cạnh đáy là $37cm$; $3cm$; $30cm$ và biết tổng diện tích các mặt bên là $480cm^2$. Tính thể tích V của lăng trụ đó.

A. $V = 2160cm^3$. B. $V = 360cm^3$. C. $720cm^3$. D. $V = 1080cm^3$.

CÂU 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh $BC = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ bằng 60° . Biết diện tích của tam giác $\Delta A'BC$ bằng $2a^2$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $V = 3a^3$. B. $V = a^3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1, AC = 2, BAC = 120^\circ$. Giả sử D là trung điểm của cạnh CC' và $BDA' = 90^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $2\sqrt{15}$. B. $\sqrt{15}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. D. $3\sqrt{15}$.

CÂU 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $ABC = 60^\circ$, cạnh $BC = a$, đường chéo AB' của mặt bên $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

B. $a^3\sqrt{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $a^3\sqrt{3}$.

CÂU 10: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $a^3\sqrt{6}$.

CÂU 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A , mặt bên là $BCC'B'$ hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

D. a^3 .

CÂU 12: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a , góc giữa mặt phẳng $(D'AB)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

CÂU 13: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Một mặt phẳng đi qua $A'B'$ và trọng tâm tam giác ABC , cắt AC và BC lần lượt tại E và F . Thể tích V của khối $C.A'B'FE$ là:

A. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{54}$.

B. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{18}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

D. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{27}$.

CÂU 14: Một nhà kho có dạng khối hộp chữ nhật đứng $ABCD.A'B'C'D'$, nền là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{m}$, $BC = 6\text{m}$, chiều cao $AA' = 3\text{m}$, chắp thêm một lăng trụ tam giác đều mà một mặt bên là $A'B'C'D'$ và $A'B'$ là một cạnh đáy của lăng trụ. Tính thể tích của nhà kho?

A. $\frac{9(12+\sqrt{3})}{2}\text{m}^3$.

B. $\frac{27\sqrt{3}}{2}\text{m}^3$.

C. 54m^3 .

D. $\frac{27(4+\sqrt{3})}{2}\text{m}^3$.

CÂU 15: Cho khối lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCC'B'$ theo a .

A. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $V = a^3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = 2a^3\sqrt{3}$.

CÂU 16: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $a^3\sqrt{6}$.

CÂU 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $ACB = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = 3a^3$.

D. $V = a^3\sqrt{3}$.

CÂU 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A , mặt bên là $BCC'B'$ là hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. B. $\sqrt{2}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. D. a^3 .

CÂU 19: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C với $CA=CB=a$. Trên đường chéo CA' lấy hai điểm M, N . Trên đường chéo AB' lấy được hai điểm P, Q sao cho $MNPQ$ là tứ diện đều. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. a^3 . C. $\frac{a^3}{2}$. D. $2a^3$.

CÂU 20: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Điểm M là trung điểm cạnh AA' . Tính theo V thể tích khối chóp $M.BCC'B'$.

- A. $\frac{2V}{3}$. B. $\frac{3V}{4}$. C. $\frac{V}{3}$. D. $\frac{V}{2}$.

CÂU 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$ D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$

CÂU 22: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AD=a$, $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BAD=60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $A'D', A'B'$. Tính thể tích của khối đa diện $ABDMN$.

- A. $\frac{3a^3}{16}$. B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. C. $\frac{9a^3}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

CÂU 23: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $AC=2a$ và góc giữa CB' và (ABC) bằng 60° . Mặt phẳng (P) qua trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$, song song với mặt đáy lăng trụ và cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại E, F, Q . Tỉ số thể tích của khối tứ diện $CEFQ$ và khối lăng trụ đã cho gần số nào sau đây nhất?

- A. 0,07. B. 0,06. C. 0,25. D. 0,09.

CÂU 24: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $AC=2a$ và góc giữa CB' và (ABC) bằng 60° . Mặt phẳng (P) qua trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$, song song với mặt đáy lăng trụ và cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại E, F, Q . Tỉ số thể tích của khối tứ diện $CEFQ$ và khối lăng trụ đã cho gần số nào sau đây nhất?

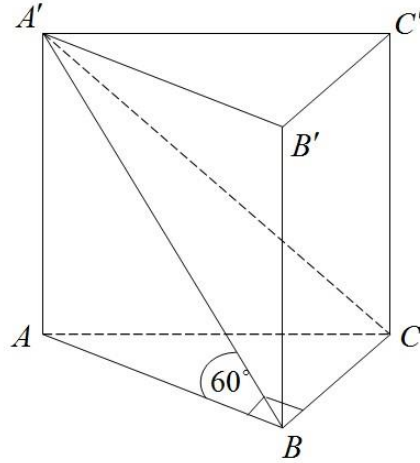
- A. 0,07. B. 0,06. C. 0,25. D. 0,09.

CÂU 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB=2a, AC=3a$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng $(A'B'C')$ một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $\frac{6a^3\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{18a^3\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{9a^3\sqrt{39}}{26}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{39}}{26}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn A



Tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

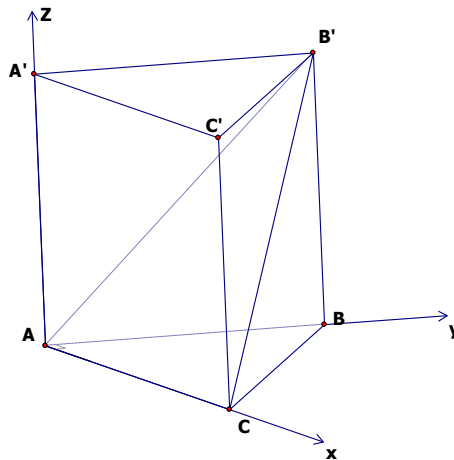
$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

Góc giữa $(A'BC)$ và đáy là góc $A'BA = 60^\circ$.

$$A'A = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'A = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

CÂU 2: Chọn D



Vì tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$ nên $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $C(a\sqrt{3};0;0)$, $B(0;a\sqrt{3};0)$, $A'(0;0;z)$ ($z > 0$).

$$\Rightarrow B'(0;a\sqrt{3};z); \overrightarrow{BC} = (-a\sqrt{3};a\sqrt{3};0), \overrightarrow{BB'} = (0;0;z).$$

$$\text{VTPT của } (BCC'B') \text{ là: } \vec{n}_1 = \frac{1}{za\sqrt{3}} [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}] = (1;1;0).$$

$$\overrightarrow{AC} = (a\sqrt{3};0;0), \overrightarrow{AB'} = (0;a\sqrt{3};z).$$

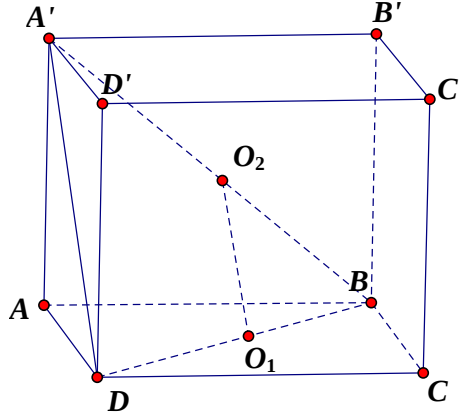
$$\Rightarrow \text{VTPT của mặt phẳng } (BA'C) \text{ là: } \vec{n}_2 = \frac{1}{a\sqrt{3}} [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}] = (0;-z;a\sqrt{3}).$$

Vì góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° nên:

$$\cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| \Leftrightarrow \frac{|z|}{\sqrt{2(z^2 + 3a^2)}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = a\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot AA' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$

CÂU 3: Chọn A

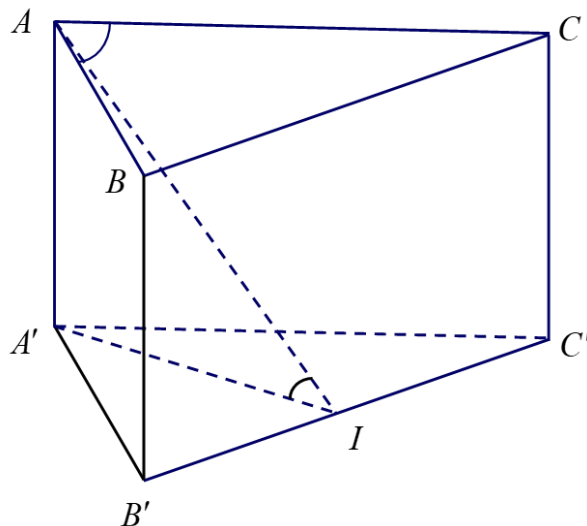


Xét hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm của $ABCD$ và $ABB'A'$ suy ra: $O_1O_2 = \frac{1}{2} B'C = \frac{1}{2} 2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ và O_1, O_2 là cạnh của bát diện đều có đỉnh là tâm của hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$.

Suy ra hình bát diện đều có tổng diện tích các mặt là:

$$S = 8 \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}a^2 \text{ (đvdt)}.$$

CÂU 4: Chọn B

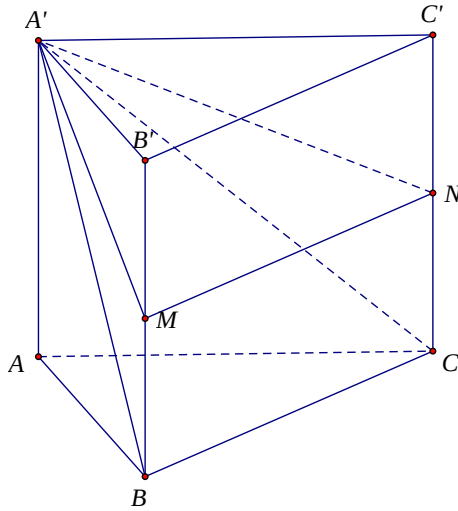


Gọi I là trung điểm $B'C'$.

Ta có $((AB'C'), (A'B'C')) = \angle AIA' = 30^\circ$, $A'I = A'B' \cdot \tan 60^\circ = x$, $AA' = A'I \cdot \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}.$

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x \cdot \sin 120^\circ = x^3.$$

CÂU 5. Chọn B



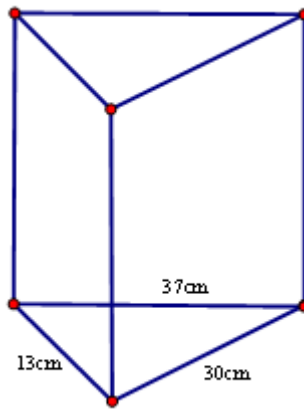
Đặt thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là V , khi đó ta có thể tích khối chóp $A'.ABC$ là $\frac{V}{3} \Rightarrow$

$$\text{thể tích khối chóp } A'.BCC'B' = \frac{2V}{3}.$$

Mặt khác thể tích khối chóp $A'.BCNM$ bằng thể tích khối chóp $A'.B'C'NM$ nên thể tích khối chóp $A'.BCNM$ bằng $\frac{V}{3}$.

$$\text{Vậy } V_1 = \frac{2V}{3}, V_2 = \frac{V}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

CÂU 6: Chọn D.



Nửa chu vi đáy: $p = \frac{37+13+30}{2} = 40$.

Diện tích đáy là: $S = \sqrt{40.(40-37).(40-13).(40-30)} = 180cm^2$

Gọi x là độ dài chiều cao của lăng trụ.

Vì các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật nên ta có:

$$S_{xq} = 13.x + 37.x + 30.x = 480 \Rightarrow x = 6$$

Vậy thể tích của lăng trụ là: $V = 6.180 = 1080cm^3$

CÂU 7: Chọn B

Gọi H là hình chiếu của A trên $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có

$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC \text{ v\`a } AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AH) \Rightarrow ((ABC); (A'BC)) = A'HA = 60^\circ.$$

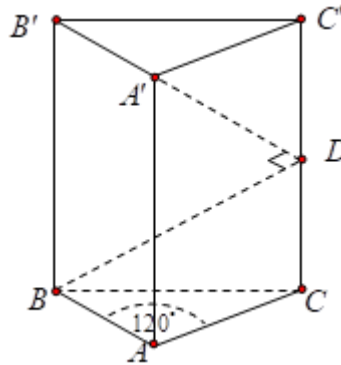
$$\text{Diện tích } \Delta A'BC \text{ là } S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2} \cdot A'H \cdot BC \Rightarrow A'H = \frac{2 \cdot S_{\Delta A'BC}}{BC} = \frac{4a^2}{2a} = 2a.$$

$$\sin A'HA = \frac{AA'}{A'H} \Rightarrow AA' = \sin 60^\circ \cdot 2a = a\sqrt{3},$$

$$AH = \sqrt{A'H^2 - A'A^2} = \sqrt{4a^2 - (a\sqrt{3})^2} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = a^2.$$

$$\text{Vậy thể tích lăng trụ là } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}.$$

CÂU 8: Chọn B.



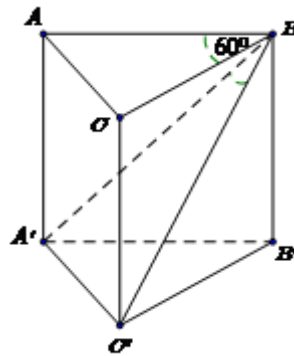
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}.$$

$$\text{Đặt } AA' = h \Rightarrow BD^2 = \frac{h^2}{4} + 7, A'B^2 = h^2 + 1, A'D^2 = \frac{h^2}{4} + 4.$$

$$\text{Do tam giác } BDA' \text{ vuông tại } D \text{ nên } A'B^2 = BD^2 + A'D^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } V = \sqrt{15}.$$

CÂU 9: Chọn B



Tam giác ABC vuông tại C có $ABC = 60^\circ$; $BC = a$.

$$\text{suy ra } AC = BC \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

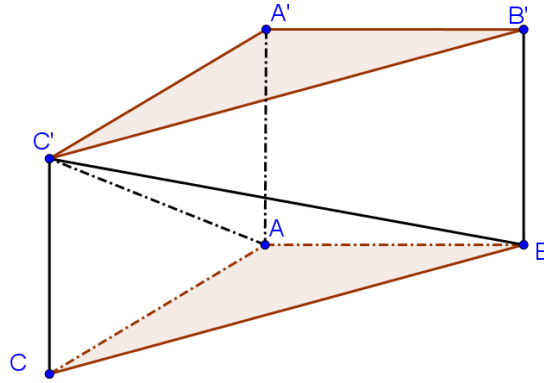
Mặt khác: $AC \perp (BCC'B')$ suy ra góc giữa AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $AB'C = 30^\circ$.

$$\text{Tam giác } AB'C \text{ vuông tại } C \text{ có } AB'C = 30^\circ; BC = a \text{ suy ra } B'C = \frac{AC}{\tan 30^\circ} = 3a.$$

$$\text{Tam giác } BB'C \text{ vuông tại } B \text{ có } BC = a; B'C = 3a \Rightarrow BB' = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot BB' = a^3\sqrt{6}.$$

CÂU 10: Chọn D



Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , $AC = a \Rightarrow AB = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

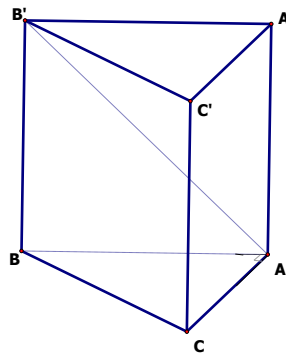
BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ góc $30^\circ \Rightarrow \angle BC'A = 30^\circ$.

Lại có $\triangle ABC'$ vuông tại A , suy ra $AC' = 3a$. Từ đó

$$AA' = \sqrt{(AC')^2 - (A'C')^2} = \sqrt{(AC')^2 - AC^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{6}.$$

CÂU 11. Chọn C



Ta có: $AC \perp AB$ (giả thiết), $AC \perp AA'$ (vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng) $\Rightarrow AC \perp (AA'B'B)$.

Ta có: $CC' \parallel BB' \Rightarrow CC' \parallel (AA'B'B)$

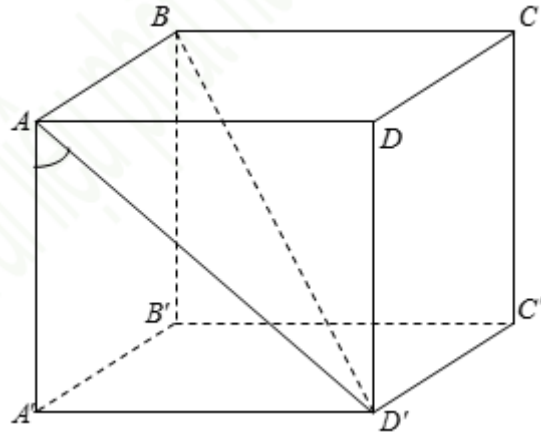
$$\Rightarrow d(CC', AB') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B)) = AC = a.$$

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $BC = AC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $BCC'B'$ hình vuông nên $BB' = BC = a\sqrt{2}$.

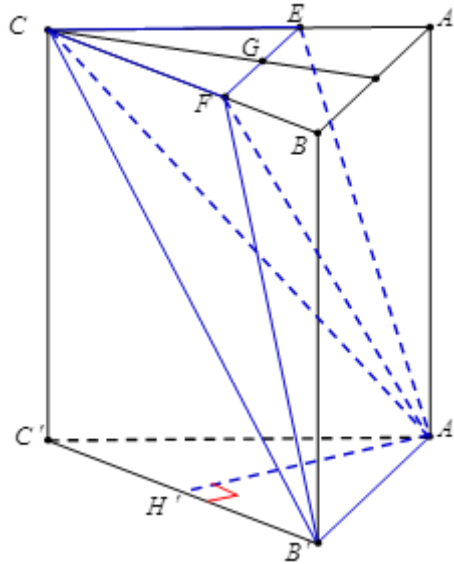
$$\text{Thể tích khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 12: Chọn B



Ta có $(ADD'A') \perp (AB)$ nên góc giữa mặt phẳng $(D'AB)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc AD' và AA' hay $A'AD' = 30^\circ$. Suy ra $AA' = \frac{A'D'}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$. Vậy thể tích hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3\sqrt{3}$.

CÂU 13: Chọn A



Trong mặt phẳng (ABC) qua G kẻ đường thẳng song song với AB cắt CA , CB lần lượt tại E , F .

Ta chia khối $C.A'B'FE$ thành hai khối $A'.B'CF$ và $A'.CEF$.

Kẻ $A'H' \perp B'C' \Rightarrow A'H' \perp (B'C'CB)$. $A'H' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

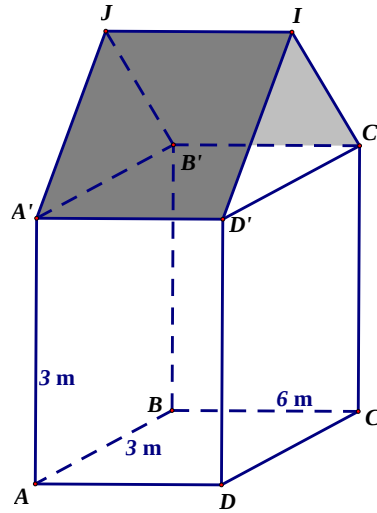
Ta có $V_{A'.B'CF} = \frac{1}{3} A'H' \cdot \frac{1}{2} B'B \cdot CF = \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Ta lại có $\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CF}{CB}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{4}{9} S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

$\Rightarrow V_{A'.CEF} = \frac{1}{3} A'A \cdot S_{CEF} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

Vậy $V_{C.A'B'FE} = V_{A'.B'CF} + V_{A'.CEF} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18} + \frac{a^3\sqrt{3}}{27} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{54}$.

CÂU 14: Chọn D



Ta có : $V_{kho} = V_{ABCD.A'B'C'D'} + V_{A'B'C'.D'IJ}$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.A'A = 3.3.6 = 54\text{m}^3.$$

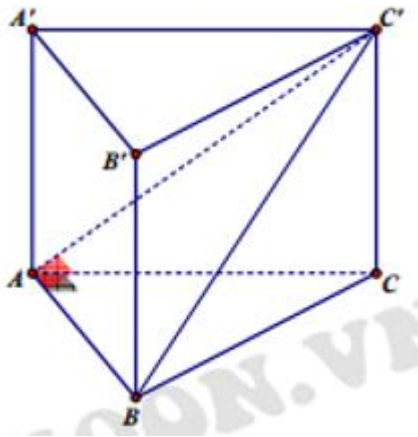
$$V_{A'B'C'.D'IJ} = S_{\Delta A'B'J}.A'D' = \left(3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 6 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\text{m}^3.$$

$$\Rightarrow V_{kho} = \frac{27(4 + \sqrt{3})}{2}\text{m}^3$$

CÂU 15: Chọn A

$$\text{Ta có: } V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{3}AB.S_{BCC'B'} = \frac{1}{3}.AB.BC.BB' = \frac{1}{3}.2a.2a.a\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3.$$

CÂU 16: Chọn D



Ta có $BC \perp (ACC'A') \rightarrow C'A$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ACC'A')$.

Vậy góc $[BC', (ACC'A')] = BC'A = 30^\circ$.

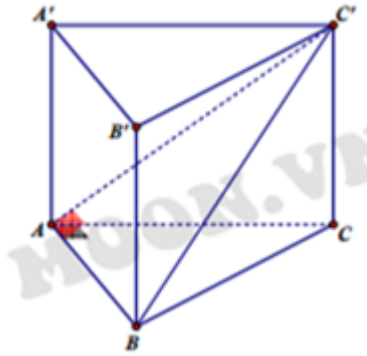
ΔABC vuông tại A có $AB = AC.tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$\Delta ABC'$ vuông tại A có $AC' = AB.cot 30^\circ = 3a$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.CC' = \frac{1}{2}AB.AC.CC' = a^3\sqrt{6}.$$

CÂU 17. Chọn A



Ta có $BA \perp (ACC'A') \rightarrow C'A$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ACC'A')$. Vậy góc $[BC', (ACC'A')] = BC'A = 30^\circ$.

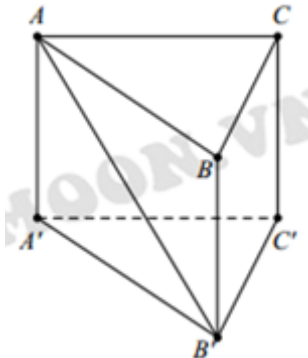
ΔABC vuông tại A có $AB = AC$, $\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$\Delta ABC'$ vuông tại A có $AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = 3a$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot CC' = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot CC' = a^3 \sqrt{6}.$$

CÂU 18. Chọn C



Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AC \perp AB$.

Và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AC$.

Suy ra $AC \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = AC$.

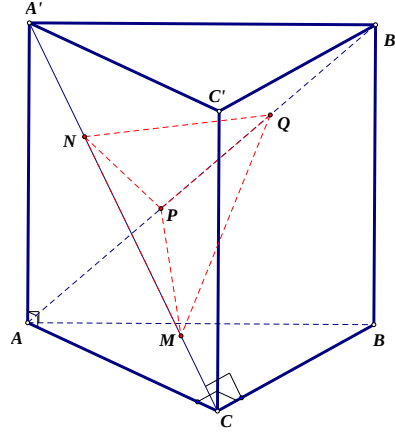
Mặt khác $CC' \parallel (ABB'A') \Rightarrow d(AB', CC') = d(CC', (ABB'A')) = AC$.

$\Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = BB' = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 19: Chọn C



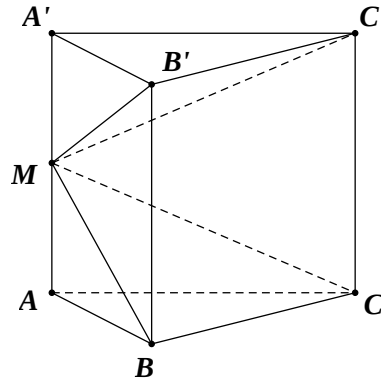
Do $MNPQ$ là tứ diện đều suy ra $AB' \perp A'C$. Đặt $A'A = x$.

Ta có $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \overrightarrow{A'C} = 0$

$$\Leftrightarrow x \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} - x \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{2}.$$

CÂU 20: Chọn A

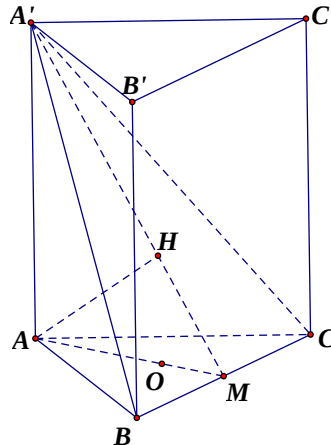


Gọi: $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC}$.

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot MA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} V.$$

$$\text{Ta có: } V_{M.BCC'B'} = V - V_{M.ABC} - V_{M.A'B'C'} = V - \frac{1}{6} V - \frac{1}{6} V = \frac{2V}{3}.$$

CÂU 21: Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

$$\text{Mà } AH \perp A'M \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH.$$

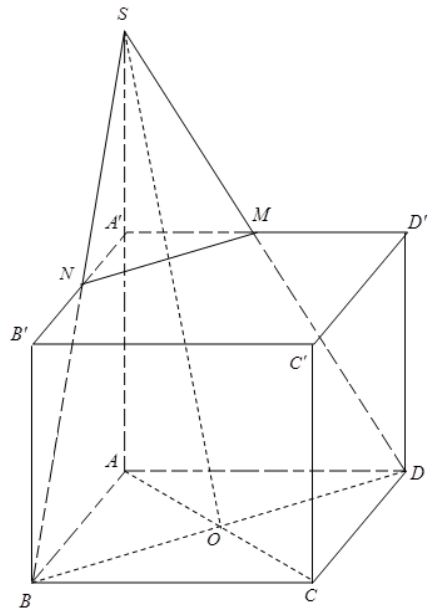
$$\text{Ta có } \frac{d(O, (A'BC))}{d(A, (A'BC))} = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3} \quad (\text{do tính chất trọng tâm}).$$

$$\Rightarrow d(A, (A'BC)) = 3d(O, (A'BC)) = \frac{a}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } A'AM : \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra thể tích lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{16}.$$

CÂU 22: Chọn A



Gọi $S = BN \cap AA'$. Suy ra: S, M, D thẳng hàng.

$$\text{Có: } \frac{SM}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } M \text{ là trung điểm của } SD.$$

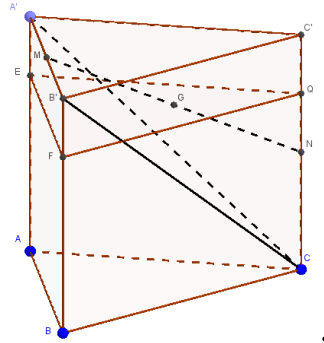
$$\frac{S_{\triangle SMN}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNBD} = \frac{3}{4} S_{\triangle SBD}.$$

Tam giác ABD có $AB = AD = a$, $BAD = 60^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều.

$$V_{A.BDMN} = \frac{1}{3} d[A, (BDMN)] \cdot S_{BDMN} = \frac{1}{3} d[A, (SBD)] \cdot \frac{3}{4} S_{\triangle SBD} = \frac{3}{4} V_{S.ABD}.$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot h = \frac{1}{4} a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}.$$

CÂU 23: Chọn C



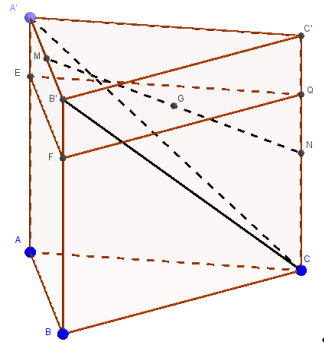
Gọi M , N lần lượt là trung điểm $A'B'$, CC' ; G là trung điểm MN . Suy ra G là trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$.

(P) qua G và cắt các cạnh AA' , BB' , CC' lần lượt tại E , F , Q thì $AE = BF = CQ = \frac{3}{4}AA'$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{ABC}$.

Thể tích tứ diện $CEFQ$ là: $V_{CEFQ} = \frac{1}{3}CQ \cdot S_{EFQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}AA' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4}V \Rightarrow \frac{V_{CEFQ}}{V} = \frac{1}{4} = 0,25$.

CÂU 24: Chọn C



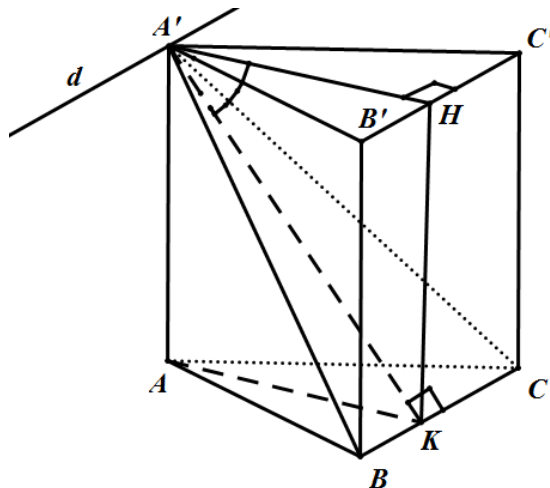
Gọi M , N lần lượt là trung điểm $A'B'$, CC' ; G là trung điểm MN . Suy ra G là trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$.

(P) qua G và cắt các cạnh AA' , BB' , CC' lần lượt tại E , F , Q thì $AE = BF = CQ = \frac{3}{4}AA'$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{ABC}$.

Thể tích tứ diện $CEFQ$ là: $V_{CEFQ} = \frac{1}{3}CQ \cdot S_{EFQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}AA' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4}V \Rightarrow \frac{V_{CEFQ}}{V} = \frac{1}{4} = 0,25$.

CÂU 25: Chọn B



$$\text{Ta có } \begin{cases} A' \in (A'BC) \cap (A'B'C') \\ B'C' // BC \\ B'C' \subset (A'B'C'); BC \subset (A'BC) \end{cases} \Rightarrow (A'BC) \cap (A'B'C') = A'd // BC // B'C'.$$

Dựng $A'H \perp B'C' \Rightarrow A'H \perp A'd$

Dựng $A'K \perp BC \Rightarrow A'K \perp A'd$.

Góc mặt phẳng $(A'BC)$ với mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\angle KA'H \Rightarrow \angle KA'H = 60^\circ$.

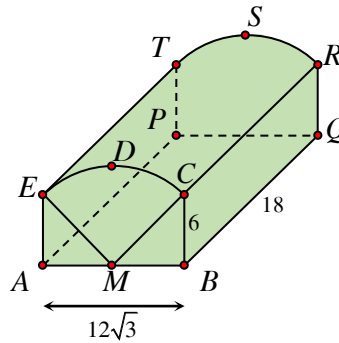
$$\text{Ta có } A'H = \sqrt{\frac{A'B'^2 \cdot A'C'^2}{A'B'^2 + A'C'^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}a.$$

$$\text{Ta có } BB' = HK = \tan 60^\circ \cdot A'H = \frac{6\sqrt{39}}{13}a.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot BB' = \frac{1}{2}2a \cdot 3a \cdot \frac{6\sqrt{39}}{13}a = \frac{18\sqrt{39}}{13}a^3.$$

DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI

CÂU 1: Một hộp nữ trang (xem hình vẽ) có mặt bên $ABCDE$ với $ABCE$ là hình chữ nhật, cạnh cong CDE là một cung của đường tròn có tâm là trung điểm M của đoạn thẳng AB . Biết $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm và $BQ = 18$ cm. Hãy tính thể tích của hộp nữ trang.



A. $216(4\pi - 3\sqrt{3})\text{cm}^3$.

B. $261(4\pi - 3\sqrt{3})\text{cm}^3$.

C. $261(3\sqrt{3} + 4\pi)\text{cm}^3$.

D. $216(3\sqrt{3} + 4\pi)\text{cm}^3$.

CÂU 2: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{47}$

B. $\frac{1}{23}$

C. $\frac{1}{11}$

D. $\frac{1}{7}$

CÂU 3: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC là:

A. $\frac{2a}{3}$.

B. $\frac{4a}{3}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{3a}{2}$.

CÂU 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' lần lượt tại M , N , P , Q . Biết $AM = \frac{1}{3}a$, $CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{2a^3}{3}$.

D. $\frac{11}{15}a^3$.

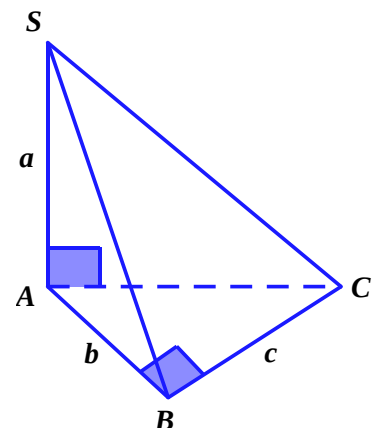
CÂU 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5} + q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2 + q^2 = ?$

A. $p^2 + q^2 = \frac{37}{36}$

B. $p^2 + q^2 = \frac{37}{9}$

C. $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$

D. $p^2 + q^2 = \frac{25}{16}$



CÂU 6: Một hình hộp chữ nhật có kích thước a (cm) $\times$ b (cm) $\times$ c (cm), trong đó a, b, c là các số nguyên và $1 \leq a \leq b \leq c$. Gọi V (cm³) và S (cm²) lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp. Biết $V = S$, tìm số các bộ ba số (a, b, c) ?

A. 4

B. 10

C. 12

D. 21

CÂU 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $BD = 3a$, hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $A'C'$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{9a^3}{4}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

CÂU 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BCD = 120^\circ$ và $AA' = \frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = 3a^3$.

B. $V = 12a^3$.

C. $V = 6a^3$.

D. $V = 9a^3$.

CÂU 9: Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$ có các cạnh đều bằng $2a$, với $a > 0; a \in \mathbb{R}$. Biết $QMN = 60^\circ$, $M'MQ = M'MN = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$ theo a .

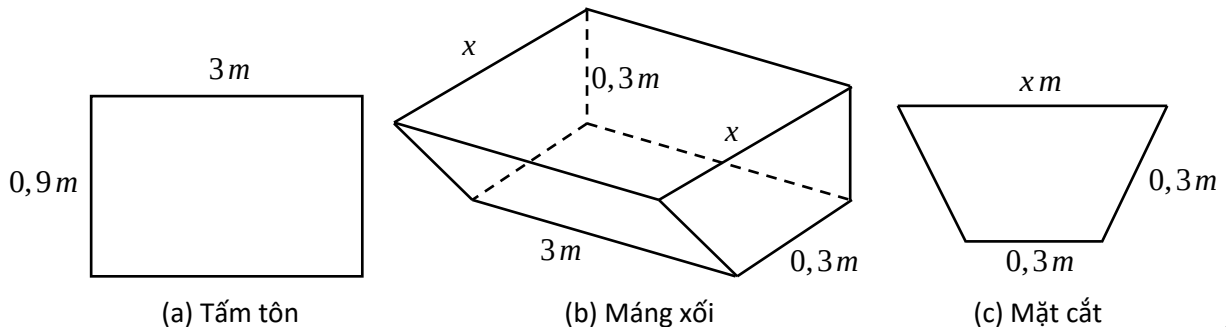
A. $V = \sqrt{2}.a^3$.

B. $V = 4\sqrt{2}.a^3$.

C. $V = 8.a^3$.

D. $V = 2\sqrt{2}.a^3$.

CÂU 10: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới biết mặt cắt của máng xối (bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



A. $x = 0,6m$.

B. $x = 0,65m$.

C. $x = 0,4m$.

D. $x = 0,5m$.

CÂU 11: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích $V = 36 \text{ cm}^3$. Mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$ chia khối lăng trụ thành 4 khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện có chứa một mặt là hình bình hành $BCC'B'$.

A. 18 cm^3 .

B. 15 cm^3 .

C. 9 cm^3 .

D. 12 cm^3 .

CÂU 12: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA' ; N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN = 2B'N$, $CP = 3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $\frac{32288}{27}$.

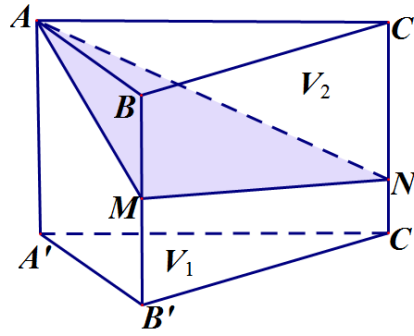
B. $\frac{40360}{27}$.

C. $\frac{4036}{3}$.

D. $\frac{23207}{18}$.

CÂU 13: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' , N là điểm trên cạnh CC' sao

cho $CN = 3NC'$. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 như hình vẽ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

CÂU 14: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Tính thể tích V khối đa diện $MBP.A'B'N$.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. B. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. C. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{48}$. D. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

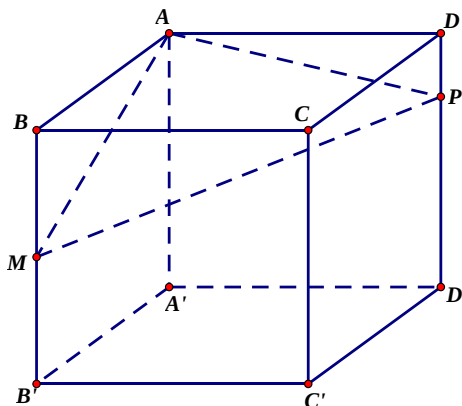
CÂU 15: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh B' và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{2}$.

CÂU 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $6a^3$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích V' của đa diện $ABC.MNP$.

- A. $V' = \frac{11}{27}a^3$. B. $V' = \frac{9}{16}a^3$. C. $V' = \frac{11}{3}a^3$. D. $V' = \frac{11}{18}a^3$.

CÂU 17: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng



- A. $V = 2a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = \frac{9a^3}{4}$. D. $V = \frac{11a^3}{3}$.

CÂU 18: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ bằng.

- A.** $\frac{11}{18}V$. **B.** $\frac{20}{27}V$. **C.** $\frac{9}{16}V$. **D.** $\frac{2}{3}V$.

CÂU 19: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA', NB' = 2NB, PC = PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

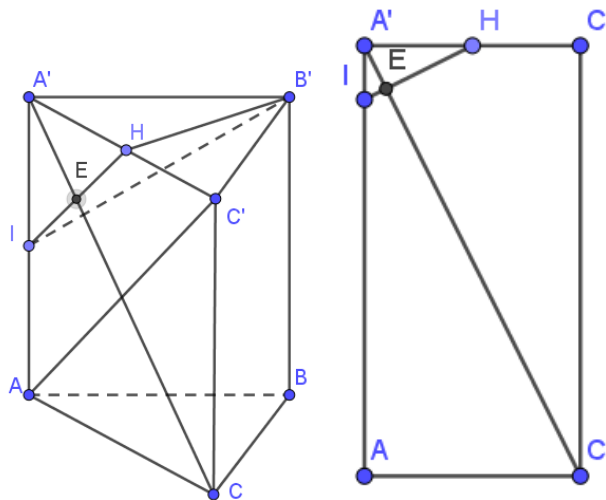
- A.** $\frac{V_1}{V_2} = 2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = 1$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

- Ta có $V = BQ.S_{ABCDE}$.
- Trong đó $S_{ABCDE} = S_{ABCE} + S_{CDE} = S_{ABCE} + (S_{MCDE} - S_{\Delta MCE})$.
- $= 6.12\sqrt{3} + \left(\frac{\pi.12^2.120}{360} - \frac{1}{2}.6.12\sqrt{3} \right) = 12(3\sqrt{3} + 4\pi)$.
- Thể tích hộp nữ trang là $V = 18.12(3\sqrt{3} + 4\pi) = 216(3\sqrt{3} + 4\pi)\text{cm}^3$.

CÂU 2: Chọn A



Gọi H là trung điểm của $A'C'$, giác $\Delta A'B'C'$ đều nên $B'H \perp A'C'$.

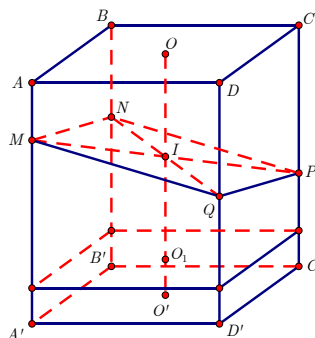
Trong $(A'C'CA)$, kẻ $HE \perp A'C', HE \cap A'A = I$.

Ta có: $\begin{cases} B'H \perp A'C' \\ HI \perp A'C' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (B'HI) \Rightarrow (P) \equiv (B'HI)$.

$$\Delta A'EH \sim \Delta A'C'C \Rightarrow \frac{A'E}{A'H} = \frac{A'C'}{A'C} \Rightarrow A'E = \frac{A'C'.A'H}{A'C} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

$$\Delta A'IH \sim \Delta A'C'C \Rightarrow \frac{IH}{A'H} = \frac{A'C'}{C'C} \Rightarrow IH = \frac{A'C'.A'H}{C'C} = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

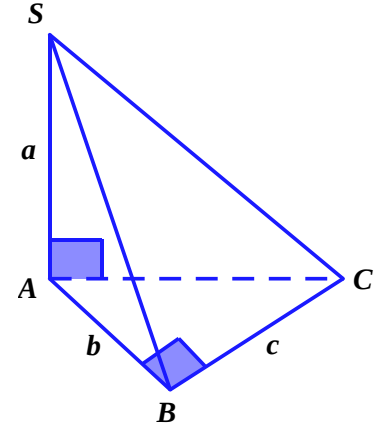
$$S_{B'HI} = \frac{1}{2} B'H.HI = \frac{a^2\sqrt{15}}{16}. V_1 = \frac{1}{3}. S_{B'HI}.A'E = \frac{1}{3}. \frac{a^2\sqrt{15}}{16}. \frac{a\sqrt{5}}{10} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$



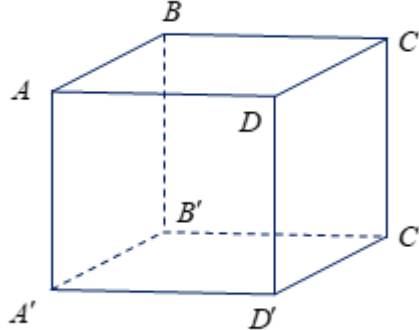
- Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành có tâm là I thuộc đoạn OO' .
- Ta có: $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{30}a < \frac{a}{2}$. Gọi O_1 là điểm đối xứng O qua I thì:
- $OO_1 = 2OI = \frac{11}{15}a < a$. Vậy O_1 nằm trong đoạn OO' .
- Vẽ mặt phẳng qua O_1 song song với $(ABCD)$ cắt các cạnh AA' ; BB' ; CC' ; DD' lần lượt tại A_1 , B_1 , C_1 , D_1 .
- Khi đó I là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$
- Vậy $V_{ABCD.MNPQ} = V_{MNPQ.A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}a^2OO_1 = \frac{11}{30}a^3$.

CÂU 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5} + q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2 + q^2 = ?$

- A. $p^2 + q^2 = \frac{37}{36}$ B. $p^2 + q^2 = \frac{37}{9}$
 C. $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$ D. $p^2 + q^2 = \frac{25}{16}$



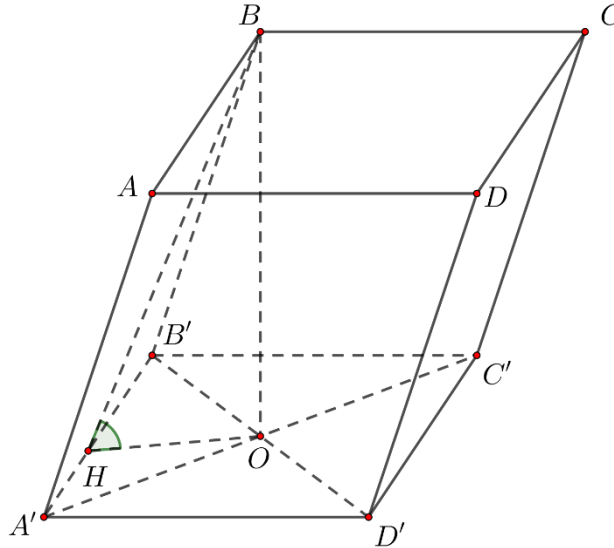
CÂU 6: Chọn.B



- $V = a.b.c . S = 2(ab + bc + ca)$
- Ta có $V = S$ suy ra $2(ab + bc + ca) = a.b.c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{3}{a} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a \leq 6$ (do $1 \leq a \leq b \leq c$).
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < a \leq 6$.
- Với $a = 3$ ta có $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (b-6)(c-6) = 36$.
- Suy ra $(b, c) \in \{(7; 42), (8; 24), (9; 18), (10; 15), (12; 12)\} \Rightarrow$ có 5 cách chọn thỏa mãn.
- Với $a = 4$ ta có $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (b-4)(c-4) = 16$.
- Suy ra $(b, c) \in \{(5; 20), (6; 12), (8; 8)\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn thỏa mãn.

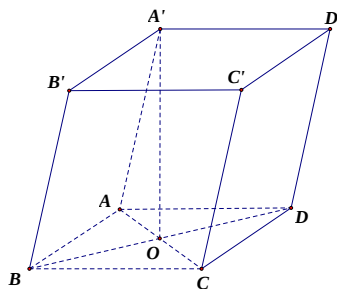
- Với $a=5$ ta có $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{3}{10} \leq \frac{2}{b} \Rightarrow b \leq \frac{20}{3} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=10 \end{cases}, \begin{cases} b=6 \\ c=\frac{15}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.
- Suy ra có 1 cách chọn thỏa mãn.
- Với $a=6$ ta có $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow b=c=6$. Suy ra có 1 cách chọn.
- Vậy tổng cộng có 10 cách chọn.

CÂU 7: Chọn C



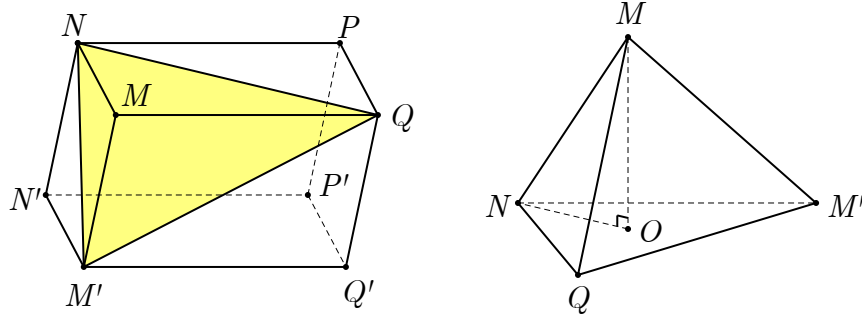
- Do $(DCC'D') \parallel (ABB'A')$ và $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDD'C')$ cũng bằng góc giữa hai mặt phẳng nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(ABB'A')$ và bằng góc $OH B$ với H là hình chiếu của O lên $A'B'$.
- Trong $\Delta A'B'D'$ có $OA'^2 = A'D'^2 - OD'^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow OA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'C' = a\sqrt{3}$.
- Ta có $OH \cdot A'B' = OA' \cdot OB' \Rightarrow OH = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{3a}{4}$.
- $\cos \alpha = \frac{OH}{BH} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow BH = \frac{7}{\sqrt{21}} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$.
- $BO = \sqrt{BH^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{21a^2}{16} - \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot 3a = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Vậy $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{4}$.

CÂU 8: Chọn A



- Gọi $O = AC \cap BD$. Từ giả thiết suy ra $A'O \perp (ABCD)$.
- Cũng từ giả thiết, suy ra ABC là tam giác đều nên: $S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Đường cao khối hộp: $A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = 2a\sqrt{3}$.
- Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\square ABCD} \cdot A'O = 3a^3$ (đvtt).

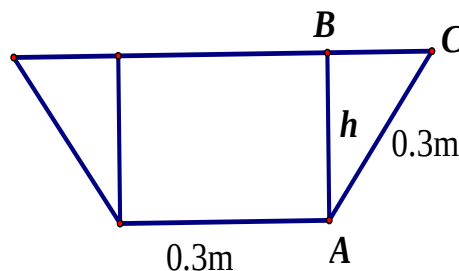
CÂU 9: Chọn B



- Do hình chóp $M.NQM'$ có 3 cạnh bên cùng bằng $2a$ nên chân đường cao của hình chóp $M.NQM'$ là tâm O của đường tròn ngoại tiếp mặt đáy NQM' .
- Như thế $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = 6.V_{M.NQM'} = 2S_{\triangle NQM'} \cdot OM$. Từ giả thiết ta có $\triangle MNQ$ đều, suy ra $NQ = 2a$.
- Dùng định lý cosin cho $\triangle M'MN$ và $\triangle M'MQ$ ta tính được $M'N = M'Q = 2a\sqrt{3}$.
- Dùng Hêrông cho $\triangle NQM'$ ta tính được $S_{\triangle NQM'} = a^2\sqrt{11}$.
- Từ đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle NQM'$ là $ON = \frac{NQ \cdot QM' \cdot NM'}{4S_{\triangle NQM'}} = \frac{6a}{\sqrt{11}}$.
- Xét tam giác OMN , ta có $OM = \sqrt{MN^2 - ON^2} = \frac{2a\sqrt{22}}{11}$.
- Vậy $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = 2 \cdot a^2\sqrt{11} \cdot \frac{2a\sqrt{22}}{11} = 4a^3\sqrt{2}$.

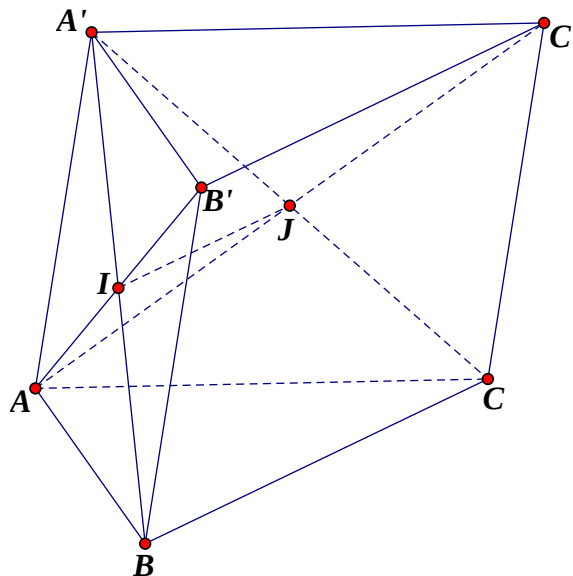
CÂU 10: Chọn A

- Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tám tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất. Ta có $S = \frac{h}{2}(x + 0,3)$.
- $BC = \frac{x-0,3}{2} \Rightarrow h = \sqrt{(0,3)^2 - \frac{(x-0,3)^2}{4}} \Rightarrow S = \frac{(x+0,3)}{2} \cdot \sqrt{(0,3)^2 - \frac{(x-0,3)^2}{4}}$.



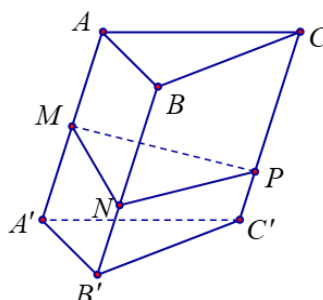
- $S = \frac{1}{4}(x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}$.
- Xét hàm số $f(x) = (x+0,3)\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}$.
- $\Rightarrow f'(x) = \sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2} + (x+0,3) \frac{-2(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}}$.
- $= \frac{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2 - (x+0,3)(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}} = \frac{0,36 - 2x(x-0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x-0,3)^2}}$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 0,3x + 0,18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,3 \\ x = 0,6 \end{cases}$.
- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $x = 0,6$.
- Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x = 0,6m$.

CÂU 11. Chọn B



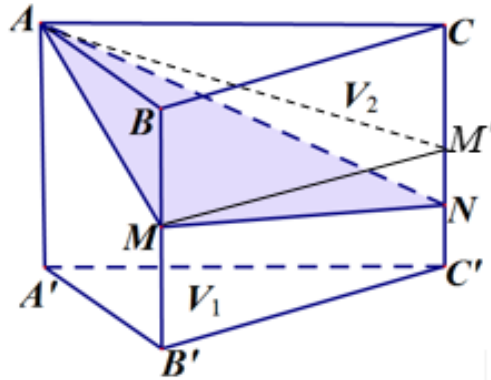
- Gọi $I = AB' \cap A'B$, $J = A'C \cap AC'$. Ta có $V_{IJB'B'C'C} = V_{A.BB'C'C} - V_{A.BCIJ}$.
- Mặt khác $V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V = 24$.
- Ta lại có $\frac{V_{A.IJA'}}{V_{A.A'B'C'}} = \frac{AI}{AB'} \cdot \frac{AJ}{AC'} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{A.IJA'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 36 = 3$. $V_{A.IJBC} = V_{A'.ABC} - V_{A.IJA'} = \frac{1}{3} \cdot 36 - 3 = 9$.
- Vậy $V_{IJB'B'C'C} = 24 - 9 = 15 \text{ (cm}^3\text{)}$.

CÂU 12: Chọn D



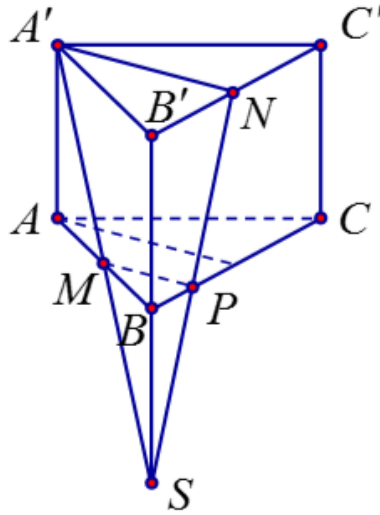
Ta có $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) = \frac{23}{36}$. Vậy $V_{ABC.MNP} = \frac{23207}{18}$.

CÂU 13: Chọn D



- Gọi M' là trung điểm của CC' , ta có:
- $dt_{BCMM} = \frac{1}{2} dt_{BCC'B'}, dt_{MNM} = \frac{1}{4} dt_{BCM} = \frac{1}{8} dt_{BCC'B'} \Rightarrow dt_{BMNC} = \frac{5}{8} dt_{BCC'B'}$
- $\Rightarrow \frac{V_2}{V_{A.BCB'C'}} = \frac{\frac{1}{3} d(A, (BCB'C')) \cdot dt_{BCNM}}{\frac{1}{3} d(A, (BCB'C')) \cdot dt_{BCB'C'}} = \frac{5}{8}$.
- $\frac{V_{A.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{3} d(A, (A'B'C')) \cdot dt_{A'B'C'}}{d(A, (A'B'C')) \cdot dt_{A'B'C'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{A.BCC'B'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$.
- Do $V_{ABC.A'B'C'} = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$

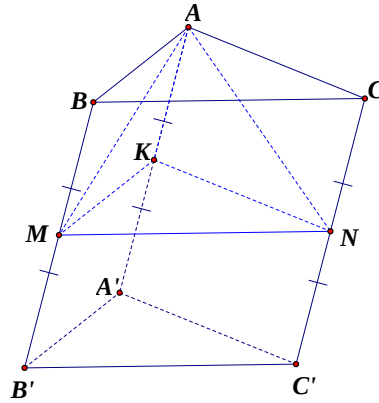
CÂU 14: Chọn B



- Gọi S là giao điểm của các đường $A'M$; NP và BB' . Có M ; B ; P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA' ; SB' và SN .
- Vì $\triangle ABC$ đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- $\frac{V_{S.BMP}}{V_{S.A'B'N}} = \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SM}{SA'} \cdot \frac{SP}{SN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.BMP} = \frac{1}{8} V_{S.A'B'N} \Rightarrow V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8} V_{S.A'B'N}$.
- Vì B là trung điểm của SB' nên $V_{S.A'B'N} = 2V_{B.A'B'N}$. Vì N là trung điểm của $B'C'$ nên $V_{B.A'B'N} = \frac{1}{2} V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

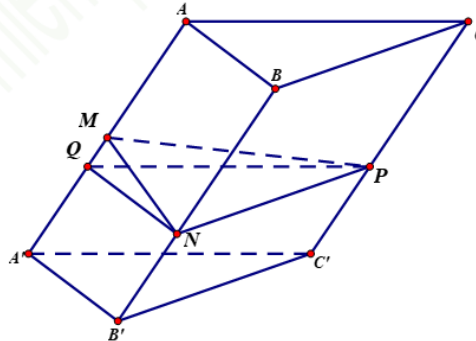
- Từ và ta có $V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8}V_{S.A'B'N} = \frac{7}{8} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

CÂU 15: Chọn B



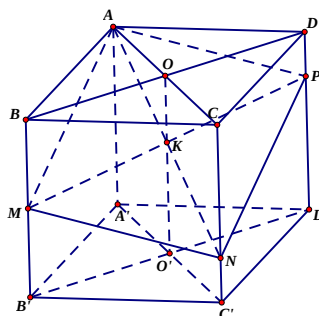
- Gọi K là trung điểm của AA' và V , $V_{ABC.KMN}$, $V_{A.MNK}$ lần lượt là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khối lăng trụ $ABC.KMN$ và thể tích khối chóp $AMNK$.
- Khi đó $V_2 = V_{ABC.KMN} - V_{A.MNK}$.
- Lại có $V_{ABC.KMN} = \frac{1}{2}V$; $V_{A.MNK} = \frac{1}{3}V_{ABC.KMN} = \frac{1}{6}V$ suy ra $V_2 = \frac{1}{2}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V$
- từ đó ta có $V_1 = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

CÂU 16: Chọn C



- Lấy điểm $Q \in AA'$ sao cho $PQ \parallel AC$. Ta có $MQ = AQ - AM = \frac{1}{6}AA'$.
- Dễ thấy $V_{ABC.MNP} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$, $V_{M.QNP} = \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$.
- Vậy $V' = V_{ABC.MNP} - V_{M.QNP} = \frac{11}{18}V = \frac{11}{3}a^3$.

CÂU 17: Chọn B

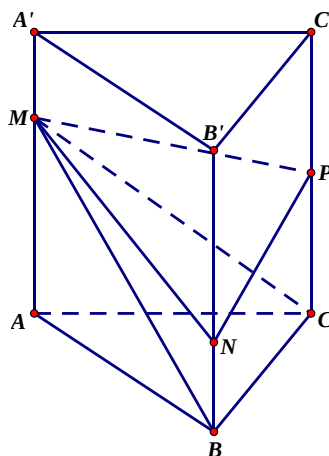


- Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = (2a)^3 = 8a^3$.
- Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$, gọi $K = OO' \cap MP$, khi đó $N = AK \cap CC'$.
- Ta có $OK = \frac{1}{2}(DP + BM) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a}{4}$. Do đó $CN = 2OK = \frac{3a}{2}$. Diện tích hình thang $BMNC$ là
- $S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BM + CN).BC = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{2}\right).2a = \frac{5a^2}{2}$. Thể tích khối chóp $A.BMNC$ là
- $V_{A.BMNC} = \frac{1}{3}.S_{BMNC}.AB = \frac{1}{3}.\frac{5a^2}{2}.2a = \frac{5a^3}{3}$. Diện tích hình thang $DPNC$ là
- $S_{DPNC} = \frac{1}{2}(DP + CN).CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right).2a = 2a^2$.
- Thể tích khối chóp $A.DPNC$ là $V_{A.DPNC} = \frac{1}{3}.S_{DPNC}.AD = \frac{1}{3}.2a^2.2a = \frac{4a^3}{3}$.
- Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng $V = V_{A.BMNC} + V_{A.DPNC} = \frac{5a^3}{3} + \frac{4a^3}{3} = 3a^3$.

CÂU 18: Chọn A

- Có $V_{A'.B'C'CB} = \frac{2}{3}V = V_{M.B'C'CB}$.
- Đặt: $V_1 = V_{M.NPCB} = \frac{1}{3}d(M, (CC'B'B)).S_{NPCB}$.
- $= \frac{1}{3}d(M, (CC'B'B)).\frac{2}{3}S_{CC'B'B} = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}d(M, (CC'B'B)).S_{CC'B'B} = \frac{2}{3}V_{M.CC'B'B} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.V = \frac{4}{9}V$.
- $V_2 = V_{M.ABC} = \frac{1}{3}d(M, (ABC)).S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}d(A', (ABC)).S_{ABC} = \frac{1}{6}V$.
- Vậy $V_{ABC.MNP} = V_1 + V_2 = \frac{4}{9}V + \frac{1}{6}V = \frac{11}{18}V$.

CÂU 19: Chọn C



- Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.
- $V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.d(M, (ABC)) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S_{ABC}.d(A', (ABC)) = \frac{2}{9}V$.
- $V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d(M, (A'B'C')) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d(M, (A'B'C')) = \frac{1}{9}V$.
- Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB' = 2NB$, $PC = PC'$ nên $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5}S_{BCPN}$.

- Suy ra $V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5} V_{M.BCPN}$, Từ đó $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$
- $\Leftrightarrow V = \frac{2}{9} V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9} V + \frac{7}{5} V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18} V$.
- Như vậy $V_1 = \frac{2}{9} V + \frac{5}{18} V = \frac{1}{2} V \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} V$. Bởi vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

CHỦ ĐỀ 3: TÍNH TOÁN ĐỘ DÀI – KHOẢNG CÁCH – THỂ TÍCH

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa đường thẳng SM và AC .

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

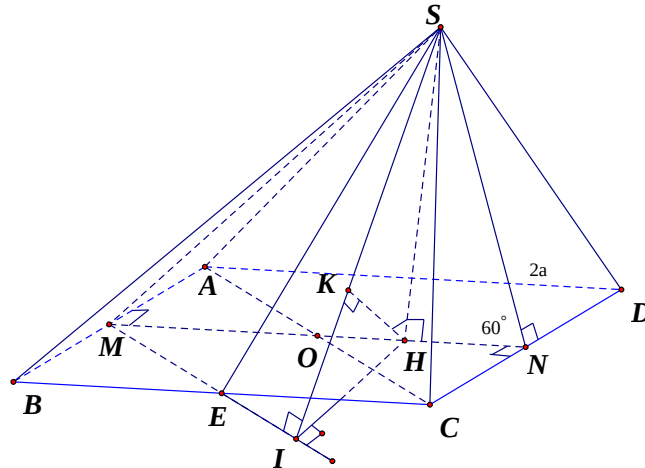
B. $\frac{2a\sqrt{15}}{3}$.

C. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



- Gọi N, E lần lượt là trung điểm của CD, BC .
- Ta có: $\triangle SAB$ đều nên $SM \perp AB$ mà $AB \parallel CD$ $SM \perp CD$ và $MN \perp CD$ do đó $SN \perp CD$ hay góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là $SNM = 60^\circ$.
- Trong mặt phẳng (SNM) từ S kẻ $SH \perp MN, H \in MN$ ta có $SH \perp CD$ nên $SH \perp (ABCD)$.
- Trong mặt phẳng $(ABCD)$ từ H kẻ $HI \perp ME, I \in ME$, từ H kẻ $HK \perp SI, K \in SI$
- ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp ME$ nên $ME \perp (SIH) \Rightarrow ME \perp HK$ mà $HK \perp SI$ do đó $HK \perp (SIH)$ hay $d(H, (SME)) = HK$. Xét $\triangle SAB$ đều cạnh $2a$ nên $SM = a\sqrt{3}$.
- Xét $\triangle SMN$ có $SM^2 = MN^2 + SN^2 - 2 \cdot SN \cdot MN \cdot \cos SNM \Leftrightarrow 3a^2 = 4a^2 + SN^2 - 2a \cdot SN$.
- $\Leftrightarrow SN^2 - 2a \cdot SN + a^2 = 0 \Leftrightarrow SN = a \Rightarrow HN = SN \cdot \cos SNM = \frac{a}{2}$ và $SH = SN \cdot \sin SNM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Do đó: $MH = \frac{3a}{2}$ và $MO = a$ nên $d(O, (SME)) = \frac{MO}{MH} d(H, (SME)) = \frac{2}{3} d(H, (SME))$
- Lại có: $ME \parallel AC$ nên $AC \parallel (SME) \Rightarrow d(SM, AC) = d(AC, (SME)) = d(O, (SME)) = \frac{2}{3} HK$.
- Xét $\triangle MHI$ vuông tại I có $HMI = 45^\circ$ nên $\triangle MHI$ vuông cân tại I do đó $MI = HI = \frac{MH}{\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.
- Xét $\triangle SHI$ có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SH^2} \Leftrightarrow HK = \frac{HI \cdot SH}{\sqrt{HI^2 + SH^2}} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{8} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

- Vậy $\Rightarrow d(SM, AC) = d(O, (SME)) = \frac{2}{3}HK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh $AB = 2a\sqrt{3}$, góc $BAD = 120^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) .

A. $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

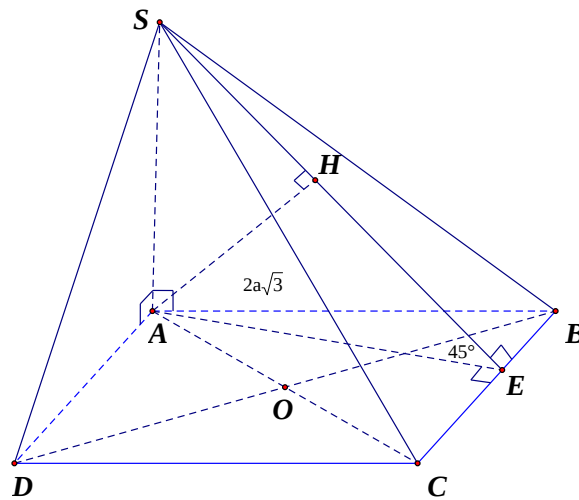
B. $h = 3a$.

C. $h = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



- Trong mặt phẳng $(ABCD)$ từ A kẻ $AE \perp BC, E \in BC$ (*).
- Lại có hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp (ABCD)$ do đó $SA \perp BC$ (**).
- Từ (*) và (**) ta có: $(SAE) \perp BC$, trong mặt phẳng (SAE) từ A kẻ $AH \perp SE, H \in SE$ mà $(SAE) \perp BC$ nên $AH \perp BC$ do đó $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.
- Ta lại có: $d(O, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{1}{2}AH$.
- Xét tam giác ABC có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin ABC = \frac{1}{2}AE.BC \Rightarrow AE = AB \sin ABC = 3a$.
- Mặt khác góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° nên $SEA = 45^\circ$. Khi đó: $SA = AE.\tan SEA = 3a$.
- Xét tam giác SAE có:
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} \Leftrightarrow AH = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{9a^2}{3a\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên bằng SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) ?

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

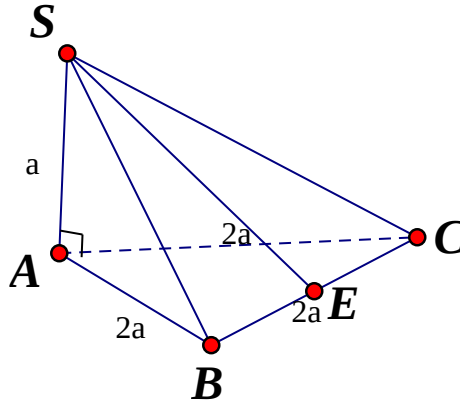
B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

. Lời giải

Chọn A



Ta có $SB = SC = a\sqrt{5}$; $SE = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.

Diện tích của tam giác SBC là $S' = \frac{1}{2} SE.BC = \frac{1}{2}.2a.2a = 2a^2$.

Thể tích hình chóp S.ABC là $V = \frac{1}{3} a \cdot \sqrt{3} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$.

$$\text{Mặt khác } V = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 = \frac{1}{3} d(A; (SBC)). S' \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{\sqrt{3}a^3}{2a^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

VÍ DỤ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SB = 4\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Tính khoảng cách l từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) .

A. $l=2$

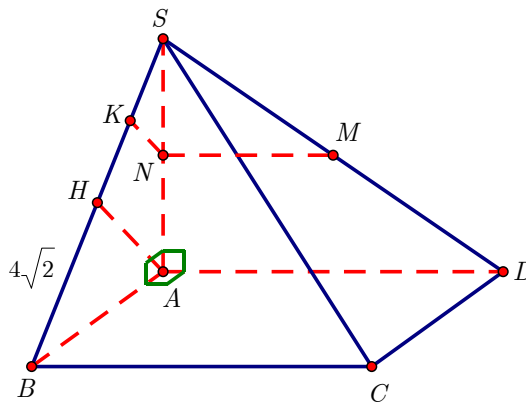
B. $l = 2\sqrt{2}$

C. $l = \sqrt{2}$

D. $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn B



- Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$
- Gọi N, H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và đoạn SH .

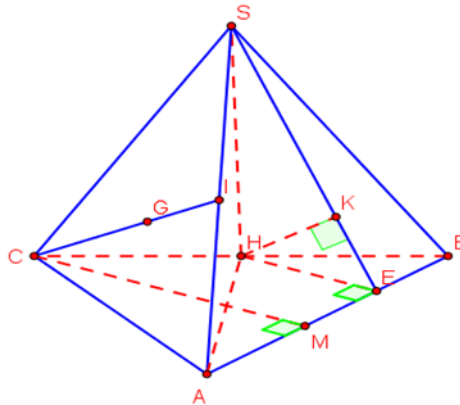
- Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
- Mà $AH \perp SB$ ($\triangle ABC$ cân tại A có AH là trung tuyến).
- Suy ra $AH \perp (SBC)$, do đó $KN \perp (SBC)$ (vì $KN \parallel AH$, đường trung bình).
- Mặt khác $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.
- Nên $d(M, (SBC)) = d(N, (SBC)) = NK = \frac{1}{2}AH = 2\sqrt{2}$.

VÍ DỤ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SAC , R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $R = d[G, (SAB)]$. B. $3\sqrt{13}R = 2SH$. C. $\frac{R^2}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$. D. $\frac{R}{a} = \sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D



- Ta có $60^\circ = \angle SAH$, $HA = SH$. Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Trong tam giác vuông SHA , ta có $SH = AH \cdot \tan \angle SAH = \frac{3a}{2}$.
- Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d[G, (SAB)]$.
- Ta có $d[G, (SAB)] = \frac{1}{3}d[C, (SAB)] = \frac{2}{3}d[H, (SAB)]$.
- Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB và MB .
- Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.
- Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE , suy ra $HK \perp SE$. (1)

- Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK. \quad (2)$
- Từ (1) và (2), suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $d[H, (SAB)] = HK$.
- Trong tam giác vuông SHE , ta có $HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$.
- Vậy $R = \frac{2}{3}HK = \frac{a}{\sqrt{13}}$. **Chọn D.**

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$, mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{3a}{4}$.

CÂU 2: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của AB , dựng $SH \perp (ABCD)$ với $SH = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{8a\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{66}}{23}$. D. $\frac{10a\sqrt{5}}{27}$.

CÂU 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E, F là hai điểm lần lượt nằm trên các đoạn thẳng BC và AC sao cho $\frac{EC}{EB} = \frac{1}{3}$; $\frac{CF}{CA} = \frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABEF$ và khoảng cách d giữa SA và EF .

- A. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}$; $d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$. B. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}$; $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
C. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}$; $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}$; $d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

CÂU 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB . Góc tạo bởi SC và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB .

- A. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$. B. $d = \frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{13}$. D. $d = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

CÂU 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$. Biết $BAD = 120^\circ$ và hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $h = a\sqrt{3}$. B. $h = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. C. $h = 2a\sqrt{2}$. D. $h = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 6: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$; $BC = 4a$, $(SBC) \perp (ABC)$. Biết $SB = 6a$; $SBC = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ B đến (SAC) .

- A. $\frac{19a\sqrt{57}}{57}$. B. $\frac{6a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{17a\sqrt{57}}{57}$. D. $\frac{16a\sqrt{57}}{57}$.

CÂU 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là.

- A. $\frac{4a}{3}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

CÂU 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

CÂU 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của AD . Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a .

A. $\frac{3a}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

CÂU 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

B. $\frac{3a}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

CÂU 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = 7a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G , I , J thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB , SAD và trung điểm của CD . Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (GIJ) bằng

A. $\frac{93a^2}{40}$

B. $\frac{23a^2}{60}$

C. $\frac{31\sqrt{33}a^2}{45}$

D. $\frac{3\sqrt{33}a^2}{8}$

CÂU 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Biết các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy các góc bằng nhau và thể tích của khối chóp bằng $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa SA và CD .

A. $\sqrt{5}a$

B. $\sqrt{2}a$

C. $\sqrt{3}a$

D. $3\sqrt{2}a$

CÂU 13: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều. Biết rằng diện tích tứ giác $BCC'B'$ bằng $2a^2$. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

B. $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

C. $h = \frac{3a}{4}$

D. $h = a$

CÂU 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E, F là hai điểm lần lượt nằm trên các đoạn thẳng BC và AC sao cho $\frac{EC}{EB} = \frac{1}{3}$; $\frac{CF}{CA} = \frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABEF$ và khoảng cách d giữa SA và EF .

A. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

B. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $V = \frac{7\sqrt{6}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{192}; d = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

CÂU 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{3}$, các tam giác ABC , ACD , ABD là các tam giác vuông tại đỉnh A . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

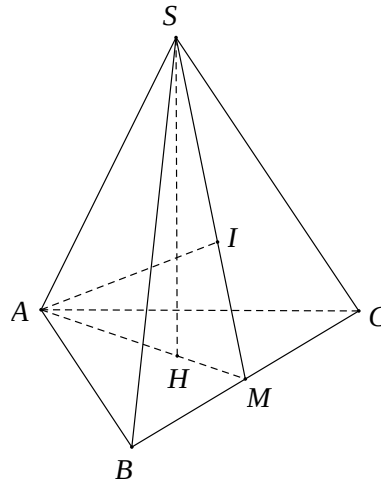
B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , ta có $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC , ta có $BC \perp (SAM)$.

Do đó, ta có góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy bằng $\angle SMH = 60^\circ$.

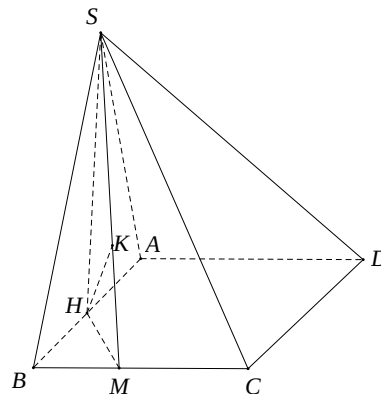
Đặt $AB = x \Rightarrow HM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$; $SH = HM \tan 60^\circ = \frac{x}{2}$. Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^3 \sqrt{3}}{24} \Rightarrow \frac{x^3 \sqrt{3}}{24} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24} \Rightarrow x = a.$$

Kẻ $AI \perp SM$ ($I \in SM$) $\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI = d(A, (SBC))$; $SM = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

$$AI = \frac{SH \cdot AH}{SM} = \frac{3a}{4}.$$

CÂU 2: Chọn B



Dựng $HM \perp BC$ ($M \in BC$); $SH \perp BC \Rightarrow (SHM) \perp (SBC)$; $(SHM) \cap (SBC) = SM$.

Trong mặt phẳng (SHM) , dựng $HK \perp SM$ ($K \in SM$) $\Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$.

Ta có: $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$.

$$HM = BH \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}; \quad \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{57}a}{19}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2HK = \frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

CÂU 3: Chọn A

$$\text{Để thấy } KB = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow EF \perp BC \Rightarrow S_{EFC} = \frac{a^2}{16} \Rightarrow S_{BAFE} = \frac{7a^2}{16} \text{ lại có}$$

$$SH = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V_{SABEF} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{192}.$$

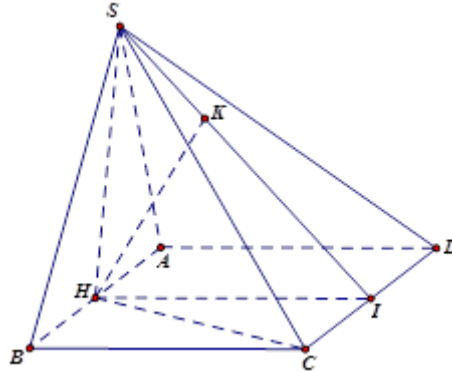
Gọi M là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow AM \parallel EF \Rightarrow d(SA, EF) = d(EF, (SAM)) = d(F, (SAM)) = (H, (SAM)) = HJ$$

Với H là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$.

$$\text{Ta có } HJ = \frac{a\sqrt{6}}{8}.$$

CÂU 4: Chọn B



Xác định được đúng góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\angle SCH = 45^\circ$.

$$\text{Tính được } HC = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vì $AB \parallel (SCD), H \in AB$ nên $d(AB; SD) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

Gọi I là trung điểm của CD . Trong (SHI) , dựng $HK \perp SI$ tại K .

Chứng minh được $HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H; (SCD)) = HK$.

Xét tam giác SHI vuông tại H , HK đường cao:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{5a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{5a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AB; SD) = HK = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

CÂU 5: Chọn D

Dựng $AH \perp BC$ và $AK \perp SH$.

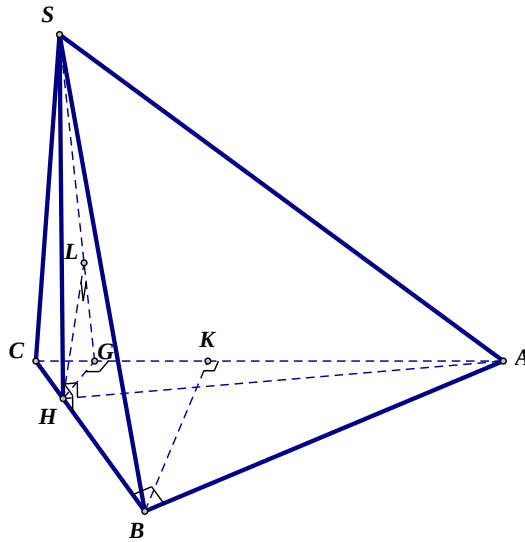
Ta có $AK = d(A; (SBC))$.

Vì $\angle BAD = 120^\circ$ nên $\triangle ACB$ đều.

$$\text{Suy ra } AH = \frac{2a\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3a.$$

$$\text{Mặt khác, vì góc giữa } (SBC) \text{ và } (ABCD) \text{ bằng } 45^\circ \text{ nên } \angle SAH = 45^\circ \text{ nên } AK = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 6: Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên BC . Gọi $K; G$ lần lượt là hình chiếu của $B; H$ lên CA .
Gọi L là hình chiếu của H lên SG . Lúc đó $SH \perp (ABC)$.

$$\frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BC}{HC} \Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{BC}{HC} HL.$$

$$\text{Xét } \triangle SHG \text{ vuông tại } H, \text{ ta có: } HL = \frac{SH \cdot HG}{SG} = \frac{SH \cdot HG}{\sqrt{SH^2 + HG^2}}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } B, \text{ ta có: } BK = \frac{BC \cdot BA}{\sqrt{BC^2 + BA^2}} = \frac{4a \cdot 3a}{\sqrt{16a^2 + 9a^2}} = \frac{12a}{5}.$$

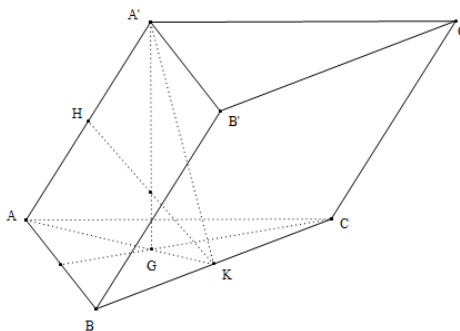
Xét $\triangle SHB$ vuông tại H , ta có.

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{SB} \Rightarrow BH = 6a \cdot \frac{1}{2} = 3a \text{ và } \sin 60^\circ = \frac{SH}{SB} \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2} 6a = 3\sqrt{3}a.$$

$$\text{Khi đó } CH = BC - BH = a; \frac{HG}{BK} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow HG = \frac{12a}{5} \cdot \frac{a}{4a} = \frac{3}{5}a.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SAC)) = \frac{BC}{HC} \cdot \frac{SH \cdot HG}{\sqrt{SH^2 + HG^2}} = \frac{4a}{a} \cdot \frac{3\sqrt{3}a \cdot \frac{3}{5}a}{\sqrt{27a^2 + \frac{9}{25}a^2}} = \frac{6\sqrt{57}}{19}a.$$

CÂU 7: Chọn B



G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AK \\ BC \perp A'G \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'K).$$

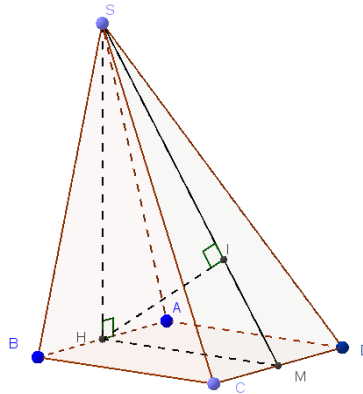
Dựng $KH \perp AA'$, vì $KH \subset (AA'K) \perp BC \Rightarrow KH \perp BC$. Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là KH .

$$\text{Vì thể tích khối lăng trụ } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \text{ nên } A'G = \frac{V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$$

$$\text{Tam giác } AA'G \text{ vuông tại } G \text{ nên } AA' = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\text{Trong tam giác } AA'K \text{ ta có } A'G \cdot AK = KH \cdot AA' \Rightarrow KH = \frac{A'G \cdot AK}{AA'} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3a}{4}.$$

CÂU 8: Chọn A



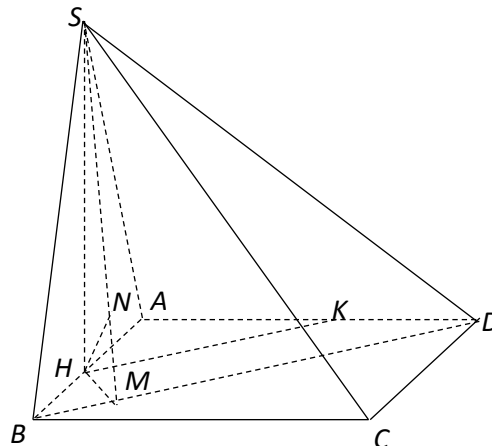
Gọi H, M lần lượt là trung điểm AB, CD . Ta có: $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ là đường cao hình chóp.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên SM suy ra $HI \perp (SCD)$.

Vì $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI$.

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

CÂU 9: Chọn B



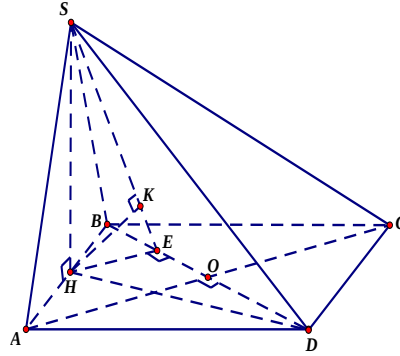
$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - HA^2 - AD^2} = a\sqrt{3}; \quad AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$HK // BD \Rightarrow KH // (SBD) \Rightarrow d(HK, (SBD)) = d(H, (SBD))$$

Kẻ $HM \perp BD$, $HN \perp SM$ tại M . Khi đó $d(H, (SBD)) = HN$.

$$\text{Mà } \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{NH^2} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{3}}{5} \Rightarrow d(HK, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

CÂU 10: Chọn D



+ Gọi H là trung điểm AB , ta có $SH \perp (ABCD)$.

+ Gọi $O = AC \cap BD$, E là trung điểm BO ; khi đó $HE \perp BO$.

+ Lại có $SH \perp BO$ ($SH \perp (ABCD)$) nên $BO \perp (SHE) \Rightarrow (SHE) \perp (SBD)$.

Hạ $HK \perp SE \Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HK$.

$$+ \text{ Xét } \triangle AHD: HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

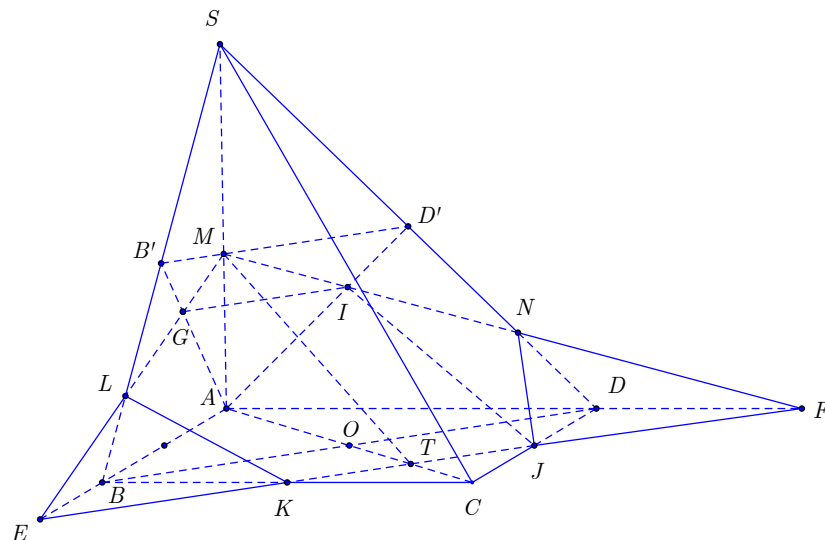
$$+ \text{ Xét } \triangle SHD: SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{3}.$$

$$HK = \frac{1}{2} AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$+ \text{ Xét } \triangle SHK: HK = \frac{HE \cdot HS}{\sqrt{HE^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Vậy chiều cao của khối chóp $H.SBD$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

CÂU 11: Chọn A



Ta có $GI \parallel B'D'$ nên $GI \parallel BD$.

Suy ra (GIJ) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng d đi qua J và song song với BD .

Trong $(ABCD)$ có d cắt BC tại K , cắt AD tại F , cắt AB tại E .

Do J là trung điểm của CD nên K là trung điểm của BC và $\frac{EB}{EA} = \frac{FD}{FA} = \frac{1}{3}$.

Trong (SAB) : đường thẳng EG cắt SA tại M , cắt SB tại L .

Định lí mê nê la ụyt cho tam giác $B'AB$ và cát tuyến $\overline{G, L, E}$ ta được $\frac{LB'}{LB} = \frac{2}{3}$.

Định lí mê nê la ụyt cho tam giác $B'AS$ và cát tuyến $\overline{G, L, M}$ ta được $\frac{MS}{MA} = \frac{4}{3}$.

Tương tự ta có FI đi qua M và cắt SD tại N thỏa mãn $\frac{DN}{DS} = \frac{1}{5}$.

Định lí mê nê la ụyt cho tam giác MAF và cát tuyến $\overline{D, N, S}$ ta được $\frac{MN}{NF} = \frac{8}{7}$.

Thiết diện cần tìm là $MNJKL$.

Gọi $S = S_{MEF}$. Ta có $\frac{S_{FNJ}}{S_{FME}} = \frac{FN}{FM} \cdot \frac{FJ}{FE} = \frac{7}{45} \Rightarrow S_{FNJ} = \frac{7}{45} S$.

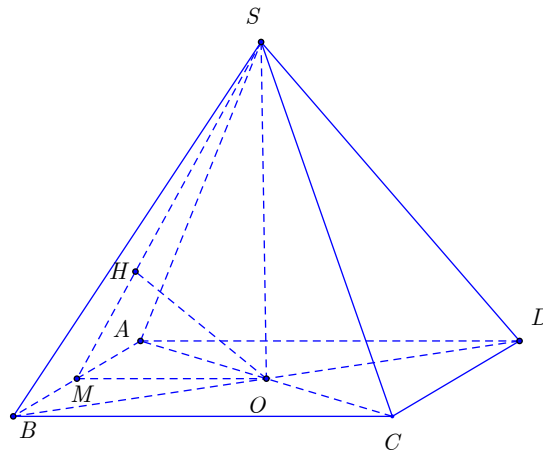
Tương tự suy ra $S_{ELK} = \frac{7}{45} S$. Do đó $S_{MNJKL} = \frac{31}{45} S$.

Gọi $T = AC \cap KJ \Rightarrow AT = \frac{3}{4} AC = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$. Suy ra $MT = \sqrt{AM^2 + AT^2} = \frac{9a}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $S_{MEF} = \frac{1}{2} MT \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{9a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{27a^2}{8}$.

Vậy diện tích thiết diện bằng $\frac{93}{40} a^2$.

CÂU 12: Chọn C



Do các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của S trên mặt đáy cách đều 4 cạnh của hình vuông $ABCD$. Suy ra SO vuông góc với đáy (O là tâm $ABCD$).

Suy ra $SO = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \sqrt{3}a$.

Ta có

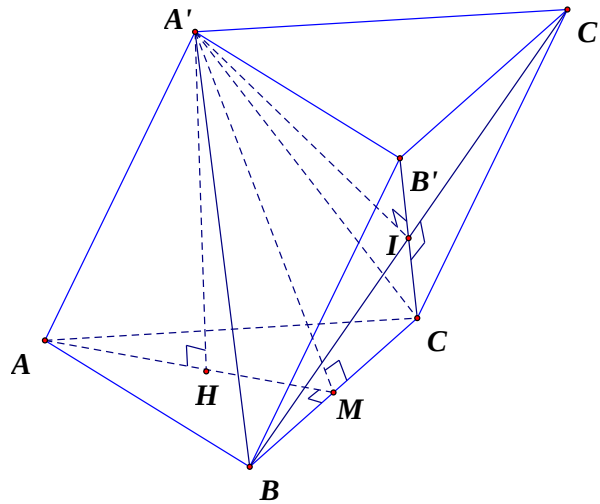
$CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(CD; SA) = d(CD; (SAB)) = d(C; (SAB)) = 2d(O; (SAB))$.

Kẻ OM vuông góc AB tại M và $OH \perp SM$ tại H .

Suy ra $OH = d(O; (SAB))$. Lại có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = a\sqrt{3}.$$

CÂU 13: Chọn B



Gọi cạnh của tam giác ABC là x , chiều cao của hình lăng trụ là h .

Gọi I là giao điểm của BC' và $B'C$.

Ta có: $A'B = A'C = A'B' = A'C' = BB' = CC' = BC = B'C' = x$ nên $A'I \perp B'C$; $A'I \perp BC'$

$\Rightarrow A'I \perp (BCC'B')$ do đó tứ giác $BCC'B'$ là hình vuông nên $x \cdot x = 2a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$

Trong tam giác ABC có $AM = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Do đó: $h = A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{3}} = \frac{x\sqrt{6}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

CÂU 14: Chọn A

Để thấy $KB = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow EF \perp BC \Rightarrow S_{EFC} = \frac{a^2}{16} \Rightarrow S_{BAFE} = \frac{7a^2}{16}$ lại có

$$SH = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V_{SABEF} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{192}.$$

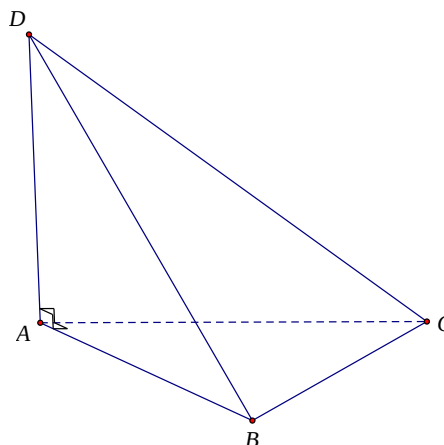
Gọi M là trung điểm của BC .

$\Rightarrow AM \parallel EF \Rightarrow d(SA, EF) = d(EF, (SAM)) = d(F, (SAM)) = (H, (SAM)) = HJ$

Với H là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$.

Ta có $HJ = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

CÂU 15. Chọn A



Do các tam giác ABC , ACD , ABD vuông tại A nên nếu D là đỉnh hình chóp thì AD là đường cao của hình chóp. Khi đó thể tích khối chóp $D.ABC$ là:

$$V_{D.ABC} = \frac{1}{3} \cdot DA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Ta lại có } V_{ABCD} = V_{D.ABC} = \frac{1}{3} \cdot d(A, (BCD)) \cdot S_{BCD} \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}.$$

Ta có $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{3}$ nên $BC = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, $CD = a\sqrt{5}$.

Theo công thức Hê rông, ta có $S_{BCD} = \frac{\sqrt{11}}{2} a^2$.

$$\text{Vậy } d(A, (BCD)) = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{2} a^2} = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

CÁC DẠNG THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI

CÂU 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết $OA=a, OB=2a, OC=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{19}}$. C. $\frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{19}}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

CÂU 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a}{3}$

CÂU 3: Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên và cạnh đáy cùng bằng a . Khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC) là

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $h = \frac{3}{4}a$. B. $h = \frac{2}{3}a$. C. $h = \frac{4}{3}a$. D. $h = \frac{8}{3}a$.

CÂU 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4, AC=BD=5, AD=BC=6$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 6 : Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{4a}{3}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{3a}{5}$.

CÂU 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB=a, AC=2a, AA_1=2a\sqrt{5}$ và $BAC=120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC_1, BB_1 . Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK) .

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. B. $a\sqrt{15}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

CÂU 9: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng a^3 . Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tính theo a khoảng cách giữa SA và CD .

A. $2\sqrt{3}a$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a}{2}$.

CÂU 10: Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S . Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

A. $\frac{nV}{S}$.

B. $\frac{V}{nS}$.

C. $\frac{3V}{S}$.

D. $\frac{V}{3S}$.

CÂU 11: Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, biết thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{4a^3}{3}$. Tính khoảng cách h giữa AB và $B'C'$.

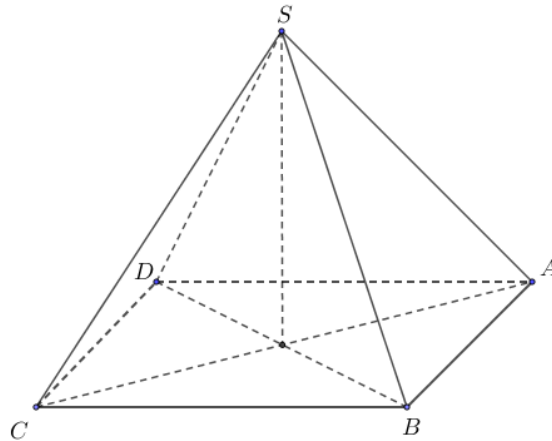
A. $h = \frac{8a}{3}$.

B. $h = \frac{3a}{8}$.

C. $h = \frac{2a}{3}$.

D. $h = \frac{a}{3}$.

CÂU 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $BAD = 60^\circ$, cạnh đáy bằng a , thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Biết hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của hình thoi (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\frac{a}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 13 : Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AB , góc giữa mặt phẳng $(A'CD)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60° .

Thể tích của khối chóp $B'.ABCD$ là $\frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$. Tính độ dài đoạn thẳng AC theo a .

A. $\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt[3]{3}}$.

B. $2\sqrt{2}a$.

C. $2a$.

D. $\frac{2a}{\sqrt[3]{3}}$.

CÂU 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân đỉnh C , đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 60° và $AB = AA' = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BB', CC', BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và NP bằng.

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{15}$.

CÂU 15: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD và (P) là mặt phẳng đi qua B, M sao cho (P) cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM . Khoảng cách từ điểm S đến (P) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{9}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{4a\sqrt{2}}{9}$

CÂU 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc bằng 60° , M là trung điểm của BC . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

CÂU 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = CSB = 60^\circ$, $ASC = 90^\circ$, $SA = SB = SC = a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $d = 2a\sqrt{6}$.

B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $d = a\sqrt{6}$.

D. $d = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

CÂU 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$, góc BAD bằng 120° . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $h = 2a\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

C. $h = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. $h = a\sqrt{3}$.

CÂU 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a .

A. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$.

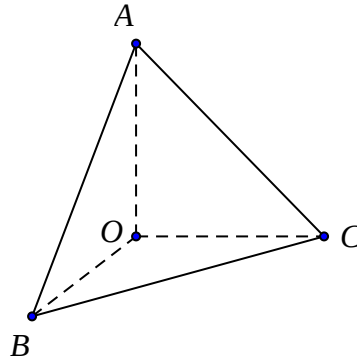
B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

D. $\frac{3a}{5}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D



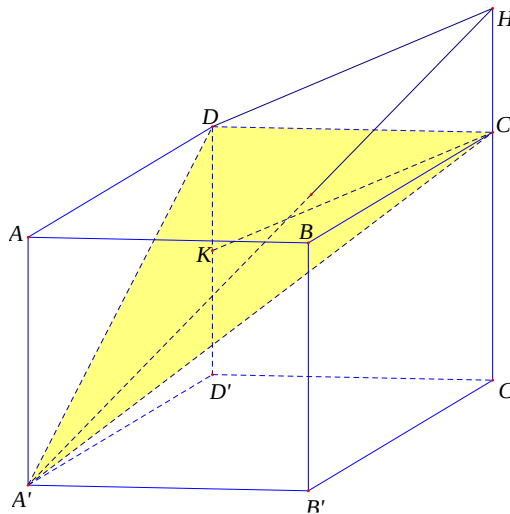
$$V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Tính được $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 2a$, $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{7}$.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{\sqrt{19}}{2} \quad (\text{với } p = \frac{AB+AC+BC}{2})$$

Gọi $h = d(O; (ABC))$. Ta có $V_{OABC} = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} \Rightarrow h = \frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

CÂU 2: Chọn D



Từ D kẻ $DH \parallel CK$ ($H \in CC'$).

Khi đó $d(CK, A'D) = d(CK, (A'DH)) = d(C, (A'DH)) = \frac{3V_{CAHD}}{S_{ADH}}$.

Ta có $V_{A'CDH} = \frac{1}{3} A'D \cdot S_{DHC} = \frac{a^3}{12}$.

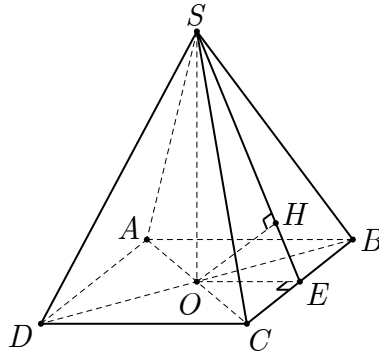
Mà $A'D = a$, $DH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'H = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Xét tam giác $A'DH$ có $\cos DA'H = \frac{A'D^2 + A'H^2 - DH^2}{2A'D \cdot A'H} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin DA'H = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'DH} = \frac{1}{2} A'D \cdot A'H = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(C, (A'DH)) = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\frac{12}{3a^2}} = \frac{a}{3}.$$

CÂU 3:



$$d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}$$

$$\text{Gọi } O \text{ là tâm của mặt đáy, ta có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Ngoài ra, } S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(AD, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

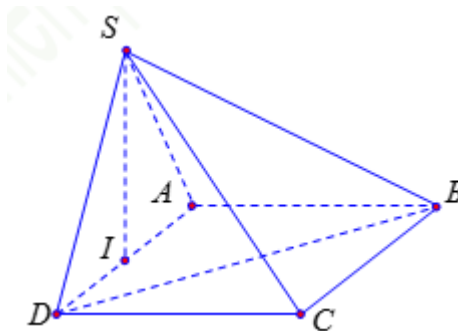
Cách 2:

Gọi $O = AC \cap BD$, E là trung điểm BC và $OH \perp SE$ tại $H \in SE$ thì $OH \perp (SBC)$

$$\text{Do đó } d(AD, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OH = 2 \frac{SO \cdot OE}{SE}$$

$$\text{Cũng tính được } SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ thay vào tính được } d(AD, (SBC)) = 2 \frac{SO \cdot OE}{SE} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

CÂU 4: Chọn C



Ta có chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ là SI với I là trung điểm của AD .

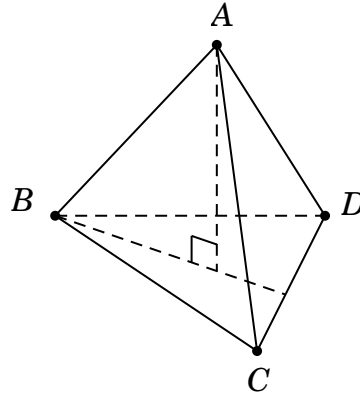
$$\text{Suy ra thể tích của khối chóp } S.ABCD \text{ bằng } \frac{4}{3}a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}2a^2 \cdot SI = \frac{4}{3}a^3 \Leftrightarrow SI = 2a.$$

Xét tam giác SCD vuông tại D có:

$$SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \text{ nên } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Thấy ngay } V_{S.ABCD} = 2V_{S.BCD} = 2V_{B.SCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = 2 \cdot \frac{1}{3}S_{\Delta SCD} \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}a.$$

CÂU 5: Chọn C

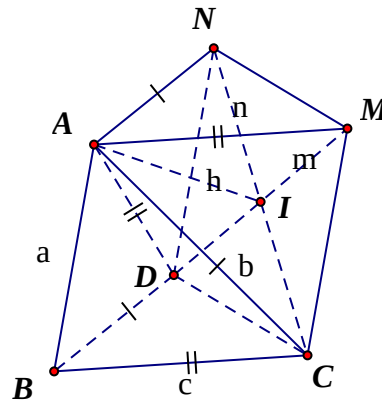


$$\text{Thể tích khối tứ diện đều: } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } BCD: S_{BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Ta có } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}.$$

ADMIN sẽ xây dựng bài toán tổng quát:



Từ giả thiết ta có: MNDC là hình thoi; các tam giác CAN, DAM là các tam giác cân, suy ra: $AI \perp NC, AI \perp DM \Rightarrow AI \perp (CDMN)$

$$\text{Ta có: } V_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2} \cdot 4V_{A.IMN} = 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA \cdot IM \cdot IN = \frac{1}{3}h \cdot m \cdot n$$

$$\text{Từ } \begin{cases} h^2 + m^2 = c^2 \\ h^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + n^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ n^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ h^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$$

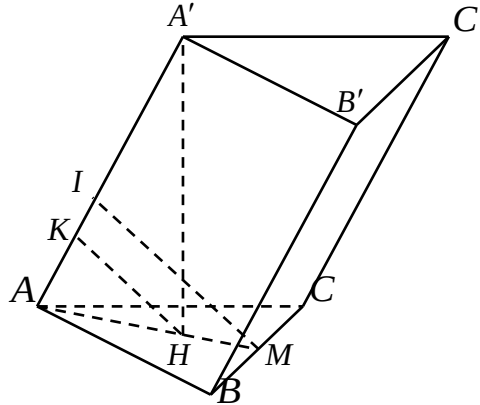
$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } V_{ABCD} &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-4^2 + 5^2 + 6^2)(4^2 - 5^2 + 6^2)(4^2 + 5^2 - 6^2)} = \frac{15\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } p = \frac{BC + CD + DB}{2} = \frac{4 + 5 + 6}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-6)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Ta có } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{A.BCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot \frac{15\sqrt{6}}{4}}{\frac{15\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}.$$

Câu 6 : Chọn C



Gọi H là trọng tâm của $\triangle ABC$, M là trung điểm BC .

Kẻ $MI \perp AA'$ tại I .

Kẻ $HK \perp AA'$ tại K .

Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$ mà $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp MI$.

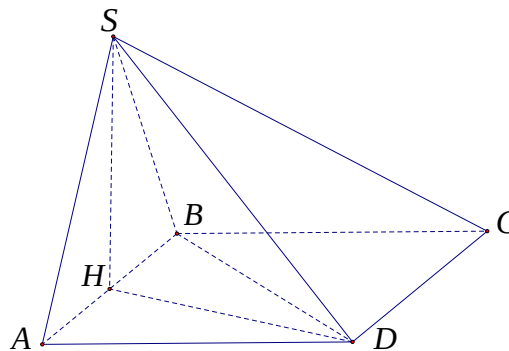
Suy ra MI là đoạn vuông góc chung của AA' và BC .

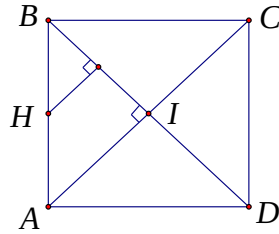
$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = a$$

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{2}$$

$$d(AA', BC) = MI = \frac{3}{2}HK = \frac{3a}{4}.$$

Câu 7: Chọn A





Ta có $\triangle SHD$ vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left[a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]} = a\sqrt{3}$.

Cách 1. $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \Rightarrow V_{H.SBD} = \frac{1}{2} V_{A.SBD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Tam giác SHB vuông tại $H \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác SBD có $SB = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, $BD = a\sqrt{2}$, $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{SBD} = \frac{5a^2}{4}$.

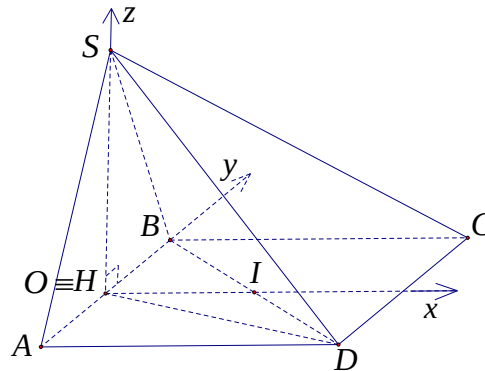
$\Rightarrow d(H, (SBD)) = \frac{3V_{S.HBD}}{S_{SBD}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Cách 2. Ta có $d(H, BD) = \frac{1}{2} d(A, BD) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Chiều cao của chóp $H.SBD$ là

$d(H, (SBD)) = \frac{SH \cdot d(H, BD)}{\sqrt{SH^2 + [d(H, BD)]^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Cách 3. Gọi I là trung điểm BD . Chọn hệ trục $Oxyz$ với $O \equiv H$, $Ox \equiv HI$, $Oy \equiv HB$, $Oz \equiv HS$.



Ta có $H(0;0;0)$, $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $S(0;0;a\sqrt{3})$, $I\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$.

Vì $(SBD) \equiv (SBI)$

$\Rightarrow (SBD): \frac{2x}{a} + \frac{2y}{a} + \frac{z}{a\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y + \frac{\sqrt{3}}{3}z - a = 0$.

Suy ra $d(H, (SBD)) = \frac{\left|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 - a\right|}{\sqrt{4 + 4 + \frac{1}{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Ta có $IK = B_1C_1 = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$

Kẻ $AH \perp B_1C_1$ khi đó AH là đường cao của tứ diện A_1BIK

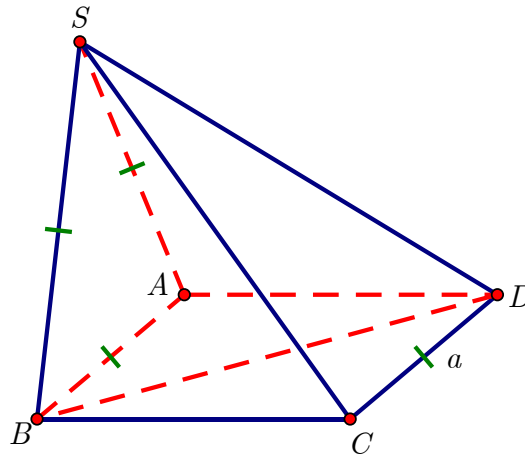
Vì $A_1H.B_1C_1 = A_1B_1.A_1C_1.\sin 120^\circ \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

$S_{\triangle IKB} = \frac{1}{2}IK.KB = \frac{1}{2}a^2\sqrt{35} \Rightarrow V_{A_1.IBK} = \frac{1}{6}a^3\sqrt{15}(\text{dvtt})$

Mặt khác áp dụng định lý Pitago và công thức Hê-rông ta tính đc $S_{\triangle A_1BK} = 3a\sqrt{3}(\text{dvdt})$

Do đó $d(I, (A_1BK)) = \frac{3V_{A_1IBK}}{S_{\triangle A_1BK}} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$.

CÂU 9: Chọn A



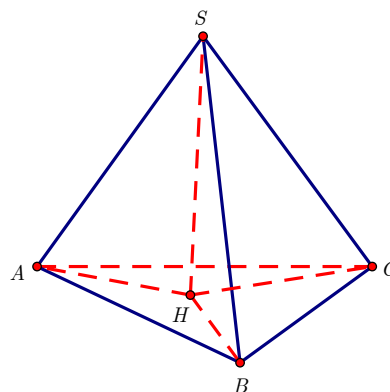
Vì đáy $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{2}$.

Ta có: Vì tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow S_{SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vì $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$ nên

$d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = \frac{3V_{SABD}}{S_{SBD}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 2\sqrt{3}a$.

CÂU 10: Chọn C



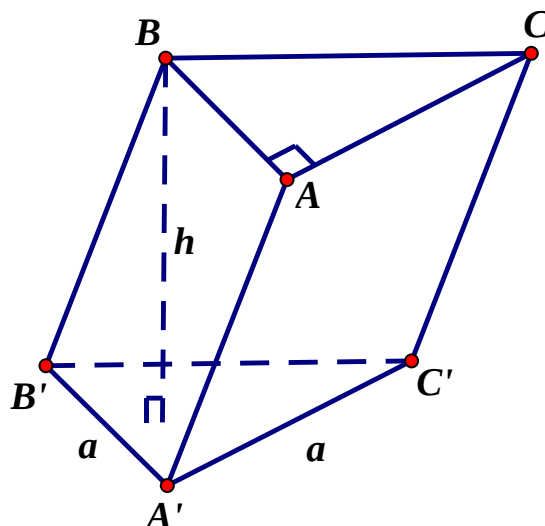
Xét trong trường hợp khối tứ diện đều.
Các trường hợp khác hoàn toàn tương tự.

$$V_{H.ABC} = \frac{1}{3}h_1.S; V_{H.SBC} = \frac{1}{3}h_2.S; V_{H.SAB} = \frac{1}{3}h_3.S; V_{H.SAC} = \frac{1}{3}h_4.S$$

$$h_1 = \frac{3V_1}{S}; h_2 = \frac{3V_2}{S}; h_3 = \frac{3V_3}{S}; h_4 = \frac{3V_4}{S}$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{S} = \frac{3V}{S}$$

CÂU 11: Chọn A

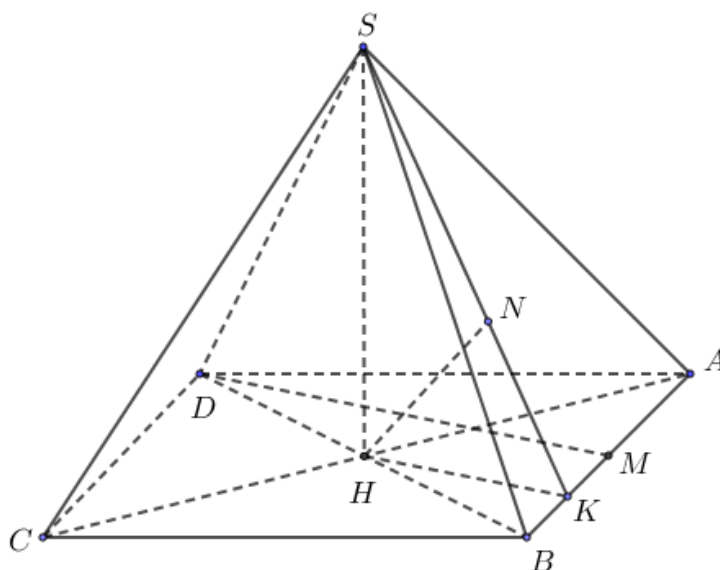


Ta có $AB \parallel (A'B'C') \Rightarrow d(AB, B'C') = d(AB, (A'B'C')) = d(B, (A'B'C'))$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{4a^3}{3}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{8a}{3}.$$

CÂU 12: Chọn B



$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB \cdot AD \sin A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}. \text{ Độ dài đường cao } SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Gọi M là trung điểm AB , K là trung điểm của BM

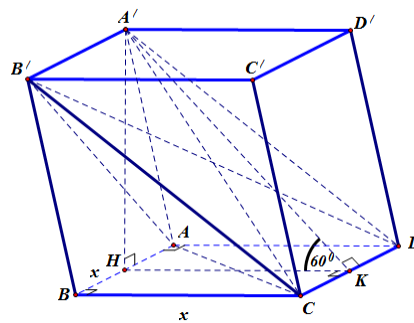
$$\text{Ta có } DM \perp AB \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HK \parallel DM \text{ và } HK = \frac{DM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ta có } AB \perp (SHK) \Rightarrow (SAB) \perp (SHK), (SAB) \cap (SHK) = SK$$

$$\text{Vẽ } HN \perp SK \text{ tại } N \Rightarrow HN \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HN.$$

$$HN = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}, d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = 2HN = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

CÂU 13 : Chọn B



Đặt $AB = x$. Dựng $HK \perp CD$.

$$\text{Vì } A'H \perp (ABCD) \Rightarrow A'H \perp CD \Rightarrow CD \perp (A'HK) \Rightarrow A'K \perp CD.$$

$$\Rightarrow ((A'CD); (ABCD)) = (KA'; KH) = A'KH \text{ (1)}.$$

$$\text{Vì } \triangle A'HK \text{ vuông tại } H \text{ nên } A'H = x \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}.$$

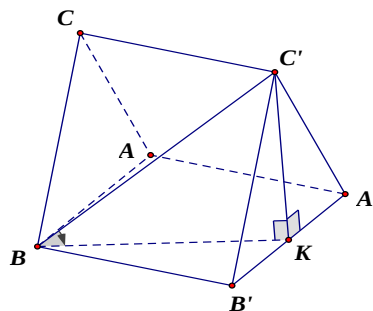
$$\text{Nhận thấy } V = 3 \cdot V_{B'.ABCD} \Leftrightarrow A'H \cdot S_{ABCD} = 3 \cdot \frac{8\sqrt{3}a^3}{3} \Leftrightarrow x\sqrt{3} \cdot x^2 = 3 \cdot \frac{8\sqrt{3}a^3}{3} \Leftrightarrow x = 2a.$$

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình vuông nên } AC = x\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}.$$

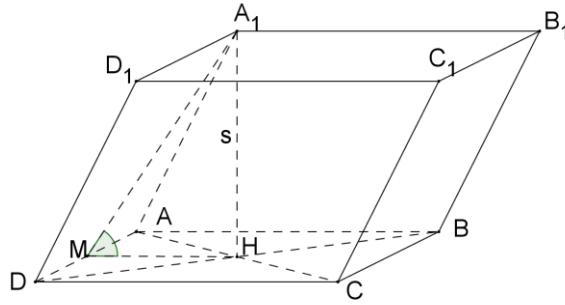
CÂU 14: Chọn A

$$\text{Ta có: } KC' \perp (AA'BB'), BK = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow KC' = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow S_{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2 \sqrt{15}}{4}.$$

$$V_{LT} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{4}.$$



CÂU 15: Chọn A



Gọi H là giao điểm của AC và BD và là trung điểm của đoạn thẳng AD .

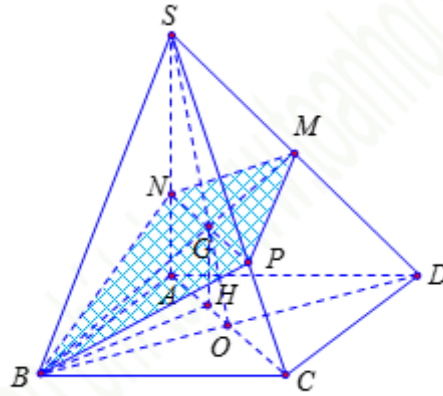
Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ là góc A_1MH , suy ra $A_1MH = 60^\circ$.

$$A_1H = MH \cdot \tan A_1MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{A_1B_1BD} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{6}A_1H.S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}.$$

$$d(B_1; (A_1BD)) = \frac{3V_{A_1B_1BD}}{S_{A_1BD}} = \frac{\frac{3a^3}{2}}{a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

CÂU 16: Chọn A



Dễ thấy:

$$\Rightarrow BD = AC = a\sqrt{3}; SB = 2a; SD = a\sqrt{5} \Rightarrow BM^2 = \frac{2(BD^2 + SB^2) - SD^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\ominus V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Kẻ $BH \perp AC$ thì $AH.AC = BA.BC \Rightarrow BH = \frac{BA.BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{AH}{AO} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABD

Gọi G là trọng tâm tam giác SBD thì $GH \parallel SA$ và $NP \parallel AC$ vì $BM \perp NP$

Ta có:

$$\Rightarrow \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3} \text{ v\`a } \frac{SN}{SA} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}; NP = \frac{2}{3}AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

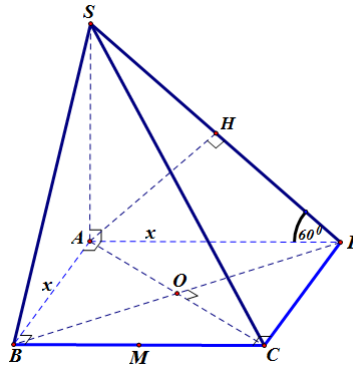
$$\Rightarrow \frac{V_{S.BNP}}{V_{S.BAC}} = \frac{4}{9} \text{ và } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.DAC}} = \frac{2}{9}.$$

$$\Rightarrow V_{S.BNMP} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{S.BNMP} = \frac{1}{3} S_{BNMP} \cdot d(S, (P)) \Rightarrow d(S, (P)) = \frac{3V_{S.BNMP}}{S_{BNMP}}.$$

$$\text{Mà } S_{BNMP} = \frac{1}{2} BM \cdot NP \Rightarrow S_{BNMP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(S, (P)) = \frac{3V_{S.BNMP}}{S_{BNMP}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

CÂU 17: Chọn B



Đặt $AD = x$ ($x > 0$).

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = SDA = 60^\circ.$$

Trong $\triangle SAD$, có $SA = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$. Theo giả thiết $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = a.$$

$$\text{Ta có } d(M; (SCD)) = \frac{1}{2} d(B; (SCD)) = \frac{1}{2} d(A; (SCD)) \quad (1)$$

Về $AH \perp SD$. Ta có $CD \perp AH$ (vì $CD \perp (SAD)$)

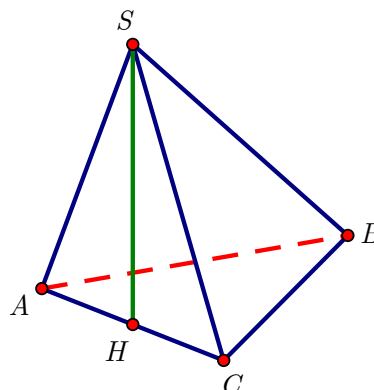
Do đó $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A; (SCD))$.

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } d(M; (SCD)) = \frac{1}{2} AH$$

$$\text{Trong } \triangle SAD \text{ có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(M; (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

CÂU 18: Chọn B



+ Ta có: $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ là các đều cạnh a nên $AB = BC = a$

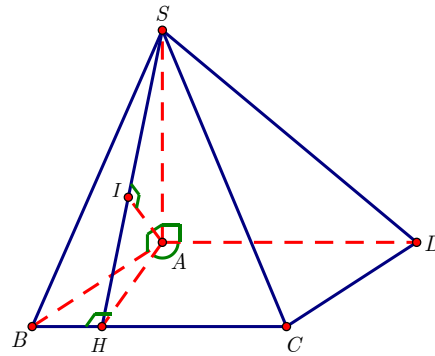
+ Ta có: ΔSAC vuông cân tại S nên $AC = a\sqrt{2}$

+ Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên ΔABC vuông tại B có $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$

+ Gọi H là trung điểm của AC . Ta có: $HA = HB = HC$ và $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$+ \text{Vậy } d[A; (SBC)] = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}} = \frac{SH \cdot S_{ABC}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

CÂU 19: Chọn C



Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC .

Xét tam giác ABH : $\sin \angle B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = 2a\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 3a$.

$\cos \angle B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = 2a\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = a\sqrt{3}$.

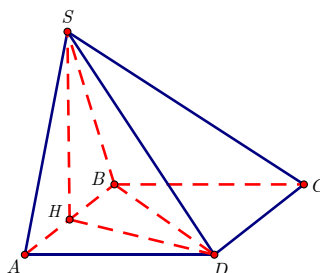
Xét tam giác SAH vuông tại A : $\tan \angle SHA = \frac{SA}{AH} \Rightarrow SA = 3a \tan 45^\circ = 3a$.

Trong tam giác SAH vuông tại A , kẻ $AI \perp SH$ tại I . Ta có $AI \perp (SBC)$ nên AI là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Xét tam giác SAH , ta có: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(3a)^2} = \frac{2}{9a^2}$.

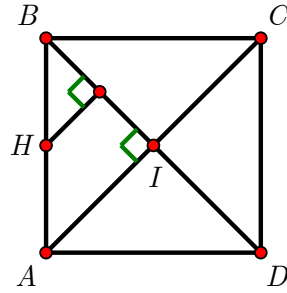
$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AI = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 20: Chọn A



Ta có $\triangle SHD$ vuông tại H

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} = a\sqrt{3}.$$



Cách 1. Ta có $d(H, BD) = \frac{1}{2}d(A, BD) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Chiều cao của chóp $H.SBD$

$$\text{là } d(H, (SBD)) = \frac{SH \cdot d(H, BD)}{\sqrt{SH^2 + [d(H, BD)]^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a^2 \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}}{4.5a} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Cách 2. $S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3 \Rightarrow V_{H.SBD} = \frac{1}{2}V_{A.SBD} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3.$

Tam giác $\triangle SHB$ vuông tại $H \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$

Tam giác $\triangle SBD$ có $SB = \frac{a\sqrt{13}}{2}; BD = a\sqrt{2}; SD = \frac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{\triangle SBD} = \frac{5a^2}{4}.$

$$\Rightarrow d(H, (SBD)) = \frac{3V_{S.HBD}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

CHỦ ĐỀ 4: CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

VÍ DỤ 1: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng 2. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

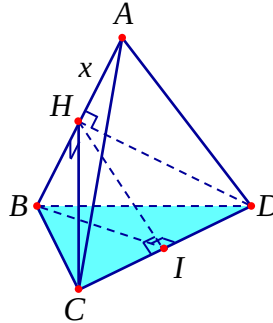
A. $x = 2\sqrt{3}$.

B. $x = \sqrt{6}$.

C. $x = 2$.

D. $x = \sqrt{3}$.

Lời giải



• **Chọn B**

• **Cách 1.** Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} CH \perp AB \\ DH \perp AB \end{cases}$ (do $\triangle ABC, \triangle ABD$ cân đáy AB)

• $\Rightarrow AB \perp (CDH)$.

• Mặt khác $\triangle CDH$ cân tại H , $HC^2 = HD^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$.

• Gọi I là trung điểm $CD \Rightarrow HI = \sqrt{HC^2 - CI^2} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - 1} = \frac{\sqrt{12 - x^2}}{2}$.

• Suy ra $S_{\triangle CDH} = \frac{1}{2} HI \cdot CD = \frac{1}{2} \sqrt{12 - x^2}$

• Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot S_{\triangle CDH} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{12 - x^2} = \frac{1}{6} x \sqrt{12 - x^2}$.

• **Cách 2:** Xét $f(x) = x\sqrt{12 - x^2}$, $x \in (0; 2\sqrt{3})$

• $f'(x) = \sqrt{12 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{12 - x^2}} = \frac{12 - 2x^2}{\sqrt{12 - x^2}}$, $x \in (0; 2\sqrt{3})$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$ do $x \in (0; 2\sqrt{3})$.

• Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	1	0

Vậy $V_{\max} = 2$ khi $x = \sqrt{6}$.

VÍ DỤ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = x$, $SB = AC = y$, $SC = AB = z$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$.

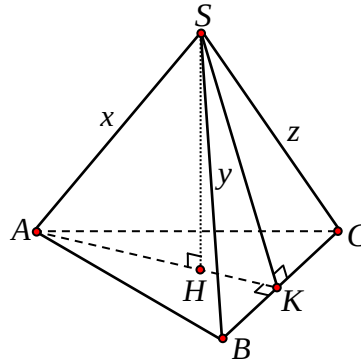
B. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích khối tứ diện $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)}$.

Mà $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nên $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(9 - 2x^2)(9 - 2y^2)(9 - 2z^2)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $(9 - 2x^2)$, $(9 - 2y^2)$, $(9 - 2z^2)$ ta có

$$\left[\frac{(9 - 2x^2) + (9 - 2y^2) + (9 - 2z^2)}{3} \right]^3 \geq (9 - 2x^2)(9 - 2y^2)(9 - 2z^2)$$

$$\Leftrightarrow 27 \geq (9 - 2x^2)(9 - 2y^2)(9 - 2z^2) \Rightarrow V \leq \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{27} \Leftrightarrow V \leq \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $V_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, đạt được khi $x = y = z = \sqrt{3}$ tức là tứ diện đã cho là tứ diện đều cạnh $\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $AD = 5a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB , DBC , DCA . Tính thể tích V của tứ diện $DMNP$ khi thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $V = \frac{10a^3}{4}$.

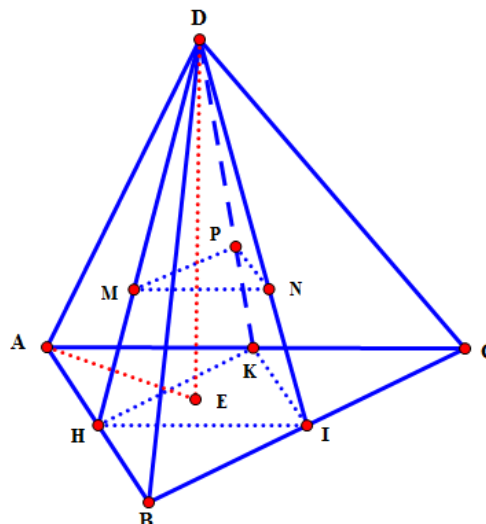
B. $V = \frac{80a^3}{7}$.

C. $V = \frac{20a^3}{27}$.

D. $V = \frac{120a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } \frac{V_{D.MNP}}{V_{D.HIK}} = \frac{DM}{DH} \cdot \frac{DN}{DI} \cdot \frac{DP}{DK} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{D.MNP} = \frac{8}{27} V_{D.HIK} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{4} \cdot V_{D.ABC} = \frac{2}{27} \cdot V_{D.ABC}$$

$$\text{Ta có: } V_{D.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \cdot DE \leq \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot DE \leq \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot DE$$

(DE là đường cao của hình chóp $D.ABC$)

Dấu bằng xảy ra khi: $DA = DE$ và $BAC = 90^\circ$

$$\text{Suy ra: } V_{D.ABC} \max = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot DA = \frac{1}{6} \cdot 3a \cdot 4a \cdot 5a = 10a^3$$

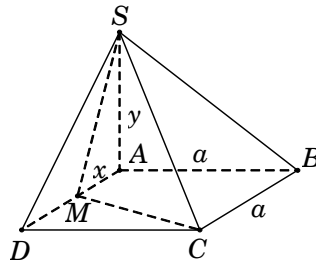
$$\text{Vậy: } V_{D.MNP} = \frac{2}{27} \cdot 10a^3 = \frac{20}{27} a^3$$

VÍ DỤ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ ($y > 0$) và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2 + y^2 = a^2$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.. B. $V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$ D. $V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn B



$$\text{Từ } x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}. \text{ Diện tích mặt đáy } S_{ABCM} = \left(\frac{BC + AM}{2}\right) \cdot AB = \left(\frac{a + x}{2}\right) a.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCM} = \frac{1}{3} S_{ABCM} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a + x}{2} \cdot a\right) \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{6} (a + x) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = (a + x) \sqrt{a^2 - x^2} \text{ trên } (0; a), \text{ ta được } \max_{(0; a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

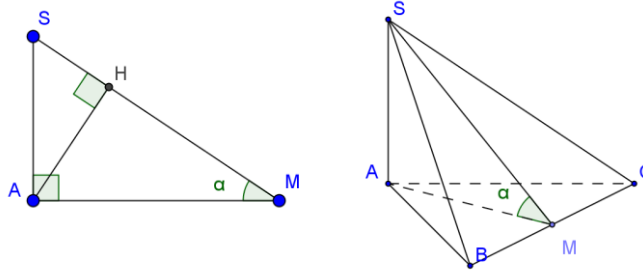
$$\text{Suy ra } V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}.$$

VÍ DỤ 5: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC , H là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với SM .

Ta được: Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là SMA . $AM = \frac{3}{\sin \alpha}$; $SA = \frac{3}{\cos \alpha}$; $AM = \frac{1}{2}BC$.

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot AM^2 \cdot SA = \frac{9}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Thể tích khối chóp nhỏ nhất khi $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - \cos^3 x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = -\sin x + 3\cos x \cdot \sin x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Đặt $AB = AC = x$; $SA = y$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}x^2y$.

Vì AB, AC, AS đôi một vuông góc nên $\frac{1}{9} = \frac{1}{d^2[A, (SBC)]} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{x^4y^2}}$.

$$\text{Suy ra } x^2y \geq 81\sqrt{3} \longrightarrow V_{SABC} = \frac{1}{6}x^2y \geq \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 3\sqrt{3} \longrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1 : Xét khối tứ diện $ABCD$, $AB = x$, các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

- A. $x = \sqrt{6}$. B. $x = 2\sqrt{2}$. C. $x = \sqrt{14}$. D. $x = 3\sqrt{2}$.

CÂU 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

- A. $a^3\sqrt{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

CÂU 3: Cho x, y là các số thực dương thay đổi. Xét hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, $BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì tích $x.y$ bằng :

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

CÂU 4 : Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = a^3\sqrt{6}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

CÂU 5 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SC = 6$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{40}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{80}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{20}{3}$. D. $V_{\max} = 24$.

CÂU 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và có $SA = SB = SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{1}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{1}{12}$.

CÂU 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 4$. Các cạnh bên bằng nhau và bằng 6. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{130}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{128}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{125}{3}$. D. $V_{\max} = \frac{250}{3}$.

CÂU 8 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{8a^3}{3}$. B. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{6}}{3}a^3$. C. $V_{\max} = 8a^3$. D. $V_{\max} = 4\sqrt{6}a^3$.

CÂU 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SC = 1$, tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

- A. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. B. $V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$. D. $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{27}$.

CÂU 10: Cho tứ diện $SABC$ có SA, AB, AC đôi một vuông góc với nhau, độ dài các cạnh $BC = a$, $SB = b$, $SC = c$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ khối tứ diện đã cho.

A. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{4}$. B. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{8}$. C. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}$. D. $V_{\max} = \frac{abc\sqrt{2}}{24}$.

CÂU 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Trên SB, SD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{SM}{SB} = m > 0, \frac{SN}{SD} = n > 0$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AMN$ biết $2m^2 + 3n^2 = 1$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3}{6}$. B. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{6}}{72}$. C. $ABCD$. D. $V_{\max} = \frac{a^3}{48}$.

CÂU 12 : Cho hình lăng trụ đứng có thể tích V và có đáy là tam giác đều. Khi diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì độ dài cạnh đáy bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt[3]{4V}$. B. $\sqrt[3]{V}$. C. $\sqrt[3]{2V}$. D. $\sqrt[3]{6V}$.

CÂU 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Với giá trị nào của x thì thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất?

A. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 14: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $SAB = SCB = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $AB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $AB = a\sqrt{3}$. C. $AB = 2a$. D. $AB = 3a\sqrt{5}$.

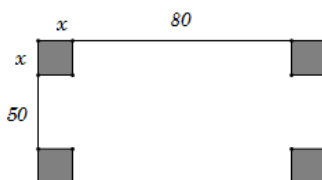
CÂU 15: Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c . Dựng một hình lập phương có cạnh bằng tổng ba kích thước của hình hộp chữ nhật trên. Biết rằng thể tích hình lập phương luôn gấp 32 lần thể tích hình hộp chữ nhật. Gọi S là tỉ số giữa diện tích toàn phần hình lập phương và diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật. Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{1}{10}$. B. $S_{\max} = \frac{16}{5}$. C. $S_{\max} = \frac{32}{5}$. D. $S_{\max} = \frac{48}{5}$.

CÂU 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$; mặt phẳng (α) đi động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt K, Q . Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.MNKQ$.

A. $V_{\max} = \frac{V}{2}$. B. $V_{\max} = \frac{V}{3}$. C. $V_{\max} = \frac{3V}{4}$. D. $V_{\max} = \frac{2V}{3}$.

CÂU 17: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $80\text{cm} \times 50\text{cm}$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại thì được một cái thùng không nắp dạng hình hộp. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hộp tạo thành.



A. $V_{\max} = 18000\text{cm}^3$.

B. $V_{\max} = 28000\text{cm}^3$.

C. $V_{\max} = 38000\text{cm}^3$.

D. $V_{\max} = 8000\text{cm}^3$.

CÂU 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

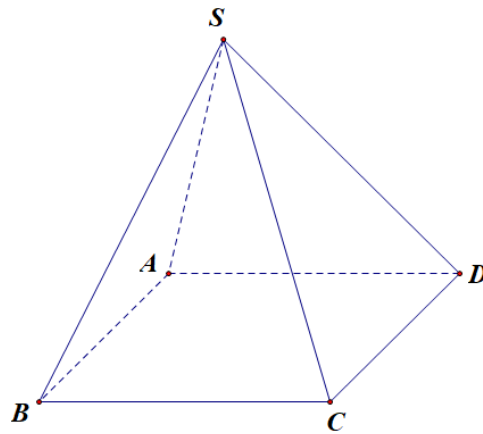
A. $\frac{3a^3}{8}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

CÂU 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), các cạnh còn lại đều bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{a}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}^+$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a^2 - 2b < 30$.

B. $a^2 - 8b = 20$.

C. $b^2 - a < -2$.

D. $2a - 3b^2 = -1$.

CÂU 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{17}{14}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

CÂU 21: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

B. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

CÂU 22: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5} + q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$.

Tính giá trị biểu thức: $p^2 + q^2 = ?$

A. $p^2 + q^2 = \frac{37}{36}$

B. $p^2 + q^2 = \frac{37}{9}$

C. $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$

D. $p^2 + q^2 = \frac{25}{16}$

CÂU 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng 1; SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SC = 1$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp đã cho.

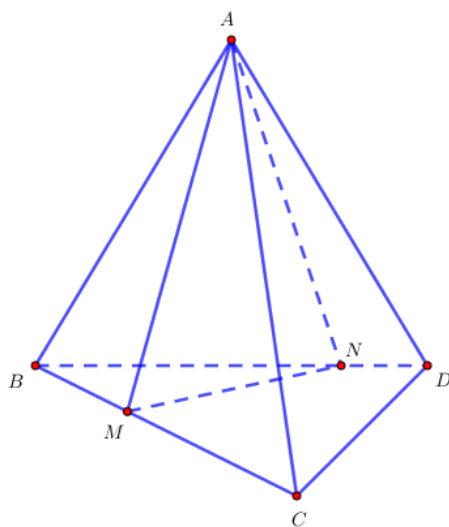
A. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

B. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

D. $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$.

CÂU 24: Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{3}{8}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{2}{7}$.

D. $\frac{6}{25}$.

CÂU 25: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $SAB = SCB = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $AB = 3a\sqrt{5}$.

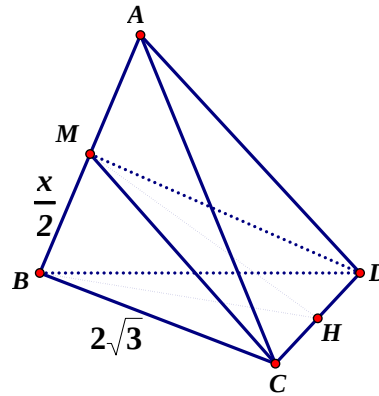
B. $AB = a\sqrt{3}$.

C. $AB = 2a$.

D. $AB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1 : Chọn D



TỰ LUẬN :

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Ta có tam giác ABC, ABD cân lần lượt tại C và D . Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (CDM)$.

Ta có: $\triangle CAB = \triangle DAB (c.c.c)$ suy ra $MC = MD$. Ta được $MH \perp CD$.

Tứ diện $BMCH$ có đường cao BM , đáy là tam giác MHC vuông tại H .

$$\text{Có } BM = \frac{x}{2}; BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$$

$$HC = \sqrt{3}; HM = \sqrt{BH^2 - BM^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}. \text{ Suy ra } S_{MHC} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= 2V_{BMCD} = 2 \cdot 2V_{BMHC} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{x\sqrt{3}}{3} \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^2}{4} + 9 - \frac{x^2}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, đạt khi

$$\frac{x^2}{4} = 9 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

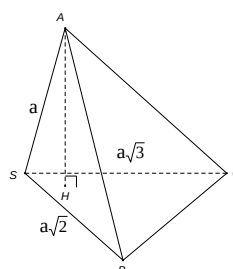
CASIO :

Thực hiện như phương pháp tự luận để có được $V = \frac{x\sqrt{3}}{3} \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$. Nhập hàm số bên vào máy tính.

CALC $\sqrt{6}$, được $V \approx 3.872$. CALC $2\sqrt{2}$, được $V \approx 4.320$.

CALC $\sqrt{14}$, được $V \approx 5.066$. CALC $3\sqrt{2}$, được $V \approx 5.196$.

CÂU 2: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBC) \Rightarrow V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{SBC}$.

Ta có $AH \leq SA$; dấu “=” xảy ra khi $AS \perp (SBC)$.

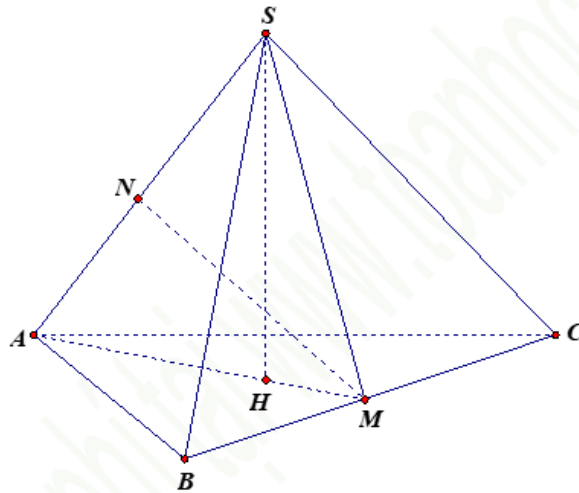
$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin SBC \leq \frac{1}{2} SB \cdot SC$, dấu “=” xảy ra khi $SB \perp SC$.

Khi đó, $V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{SBC} \leq \frac{1}{3} AS \cdot \frac{1}{2} SB \cdot SC = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC$.

Dấu “=” xảy ra khi SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là $V = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$.

CÂU 3: Chọn A



- Do $SB = SC = AB = AC = 1$ nên các tam giác SBC và ABC cân tại S và A .

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SA , ta có:

$\begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$. Hạ $SH \perp AM$ tại H thì $SH \perp (ABC)$.

- Ta có: $AM = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} y \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

Mặt khác: vì $SM = AM$ nên tam giác MSA cân tại $M \Rightarrow MN = \sqrt{MA^2 - AN^2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$.

Lại có: $SH \cdot AM = MN \cdot SA \Rightarrow SH = \frac{MN \cdot SA}{AM} = \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}} = \frac{x \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{4 - y^2}}$

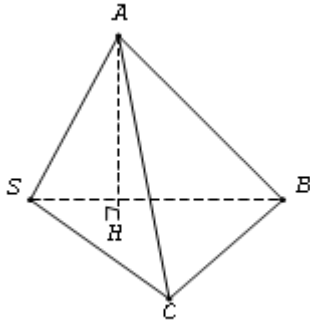
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{4 - y^2}} \cdot \frac{1}{2} y \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{12} xy \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$= \frac{1}{12} \sqrt{x^2 y^2 (4 - x^2 - y^2)} \leq \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3} \right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, do đó $x \cdot y = \frac{4}{3}$.

CÂU 4 : Chọn D

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(SBC) \longrightarrow AH \perp (SBC)$.



Ta có

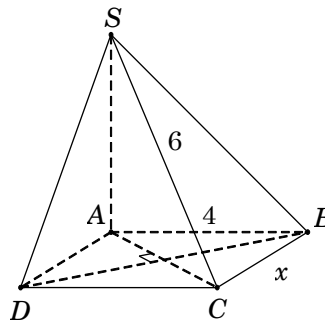
- $AH \leq AS$; Dấu "=" xảy ra khi $AS \perp (SBC)$.
- $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin BSC \leq \frac{1}{2} SB \cdot SC$. Dấu "=" xảy ra khi $SB \perp SC$.

$$\text{Khi đó } V = \frac{1}{3} S_{\Delta SBC} \cdot AH \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} SB \cdot SC \right) AS = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC$$

Dấu "=" xảy ra khi SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

$$\text{Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp là } V_{\max} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}.$$

CÂU 5 : Chọn A



Đặt cạnh $BC = x > 0$. Tam giác vuông ABC , có $AC^2 = 16 + x^2$.

Tam giác vuông SAC , có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{20 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4x$.

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{4}{3} x \sqrt{20 - x^2}.$$

Áp dụng BĐT Côsi, ta có

$$x \cdot \sqrt{20 - x^2} \leq \frac{x^2 + (\sqrt{20 - x^2})^2}{2} = 10. \text{ Suy ra } V_{S.ABCD} \leq \frac{4}{3} \cdot 10 = \frac{40}{3}.$$

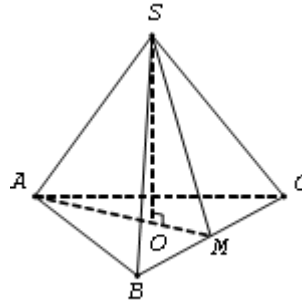
$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \sqrt{20 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}. \text{ Vậy } V_{\max} = \frac{40}{3}.$$

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{3} x \sqrt{20 - x^2}$ trên $(0; 2\sqrt{5})$.

NOTE: Hiểu rõ bản chất rồi mới dùng cách trắc nghiệm nhé. Đừng phụ thuộc vào máy tính quá nhiều!!

CÂU 6:

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Vì $S.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x > 0$. Diện tích tam giác đều $S_{\triangle ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$.

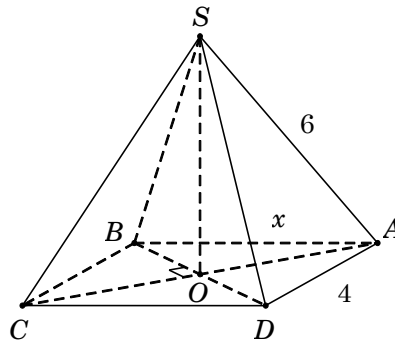
Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{2}{3} AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác vuông SOA , có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} x^2 \sqrt{3-x^2}$.

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{12} x^2 \sqrt{3-x^2}$ trên $(0; \sqrt{3})$, ta được $\max_{(0; \sqrt{3})} f(x) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{6}$.

CÂU 7: Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $SA = SB = SC = SD$ suy ra hình chiếu của S trên mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x > 0$.

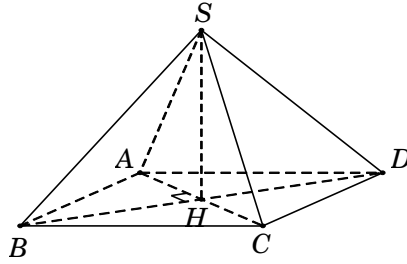
Tam giác vuông ABC , có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 16}$.

Tam giác vuông SOA , có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{128 - x^2}}{2}$

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4x \cdot \frac{\sqrt{128 - x^2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot (2x\sqrt{128 - x^2}) \leq \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 128 - x^2) = \frac{128}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $x = \sqrt{128 - x^2} \Leftrightarrow x = 8$. Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{128}{3}$.

CÂU 8 : Chọn A



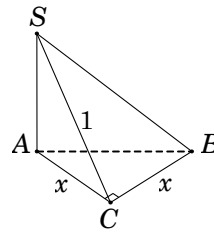
Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, do đó tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $H = AC \cap BD$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x > 0$. Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 16a^2}$.

Tam giác vuông SHA , có $SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SH \\ &= \frac{1}{3} \cdot x \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2} = \frac{a}{3} (2x\sqrt{8a^2 - x^2}) \leq \frac{a}{3} (x^2 + 8a^2 - x^2) = \frac{8a^3}{3}. \end{aligned}$$

CÂU 9: Chọn D



Cách 1

Giả sử $CA = CB = x > 0$. Suy ra $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{1 - x^2}$.

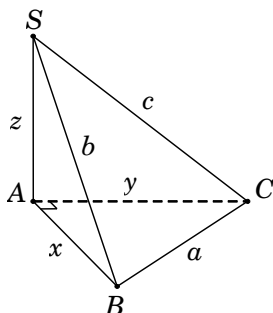
Diện tích tam giác $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{2} x^2$.

Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{1 - x^2}$.

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{1 - x^2}$ trên $(0; 1)$, ta được $\max_{(0;1)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{27}$.

Cách 2. Ta có $x^2 \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot (2 - 2x^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 2 - 2x^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

CÂU 10: Chọn D



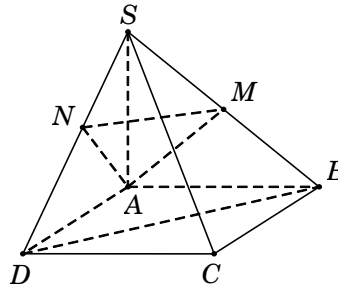
Đặt $AB = x, AC = y, AS = z$. Ta có
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \end{cases}$$

Khi đó $V = \frac{xyz}{6} \rightarrow V^2 = \frac{(2xy)(2yz)(2zx)}{288}$

$$\leq \frac{(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)}{288} = \frac{a^2 b^2 c^2}{288} \rightarrow V \leq \frac{abc\sqrt{2}}{24}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z \rightarrow a = b = c.$

CÂU 11: Chọn B



Thể tích khối chóp $S.ABD$ là $V_{S.ABD} = \frac{a^3}{6}.$

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = mn \rightarrow V_{S.AMN} = mn \cdot V_{S.ABD} = \frac{mna^3}{6}.$

Mặt khác $mn = \frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot \sqrt{3} \cdot n}{\sqrt{6}} \leq \frac{2m^2 + 3n^2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}m = \sqrt{3}n \\ 2m^2 + 3n^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}; n = \frac{1}{\sqrt{6}}.$ Suy ra $V_{S.AMN} \leq \frac{a^3\sqrt{6}}{72}.$

CÂU 12 : Chọn A

Gọi $h > 0$ là chiều cao lăng trụ; $a > 0$ là độ dài cạnh đáy.

Theo giả thiết ta có $V = S_{\text{day}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \rightarrow h = \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}.$

Diện tích toàn phần của lăng trụ: $S_{\text{tp}} = S_{\text{2 day}} + S_{\text{xung quanh}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}.$

Áp dụng BĐT Côsi, ta có $S_{\text{toàn phần}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}V}{a}$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}V}{a} + \frac{2\sqrt{3}V}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}V}{a} \cdot \frac{2\sqrt{3}V}{a}} = 3\sqrt[3]{6\sqrt{2}V^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}V}{a} = \frac{2\sqrt{3}V}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V}..$

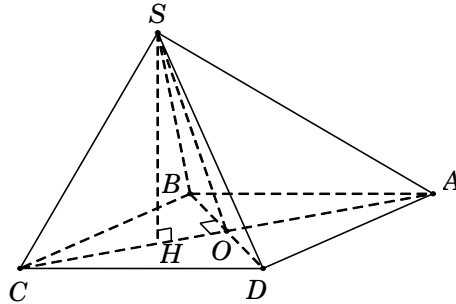
CÂU 13: Chọn C

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OA = OC.$ (1)

Theo bài ra, ta có $\triangle SBD = \triangle CBD \Rightarrow OS = OC.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $OS = OA = OC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 1}$.

Suy ra $OA = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}$ và $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$.



Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2.OA.OB = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2}$.

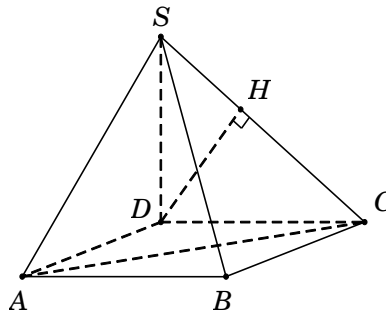
Ta có $SB = SC = SD = 1$, suy ra hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $BCD \longrightarrow H \in AC$.

Trong tam giác vuông SAC , ta có $SH = \frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{6} x \sqrt{3 - x^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^2 + 3 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{4}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 14: Chọn B



Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ SAB = 90^\circ \rightarrow AB \perp SA \end{cases} \longrightarrow AB \perp (SAD) \longrightarrow AB \perp SD$.

Tương tự, ta cũng có $BC \perp SD$. Từ đó suy ra $SD \perp (ABDC)$.

Kẻ $DH \perp SC$ ($H \in SC$) $\longrightarrow DH \perp (SBC)$.

Khi đó $d[A, (SBC)] = d[D, (SBC)] = DH$.

Đặt $AB = x > 0$.

Trong tam giác vuông SDC , có $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Suy ra } SD = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ax^3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}.$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} \text{ trên } (a\sqrt{2}; +\infty), \text{ ta được } \min_{(a\sqrt{2}; +\infty)} f(x) = f(a\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}a^2..$$

CÂU 15: Chọn D

Theo giả thiết ta có cạnh của hình lập phương bằng $a + b + c$.

- Hình hộp chữ nhật có: $V = abc$ và $S_{\text{tp}} = 2(ab + ac + bc)$.
- Hình lập phương có: $V' = (a + b + c)^3$ và $S'_{\text{tp}} = 6(a + b + c)^2$.

$$\text{Suy ra } S = \frac{S_1}{S_2} = 3 \cdot \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}.$$

$$\text{Ta có } (a + b + c)^3 = 32abc \Leftrightarrow \frac{(a + b + c)^3}{a^3} = 32 \frac{bc}{a^2} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 1\right)^3 = 32 \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}\right).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{b}{a} = x \\ \frac{c}{a} = y \end{cases} \longrightarrow (x + y + 1)^3 = 32xy \Leftrightarrow xy = \frac{(x + y + 1)^3}{32}.$$

$$\text{Khi đó } S = 3 \cdot \frac{(x + y + 1)^2}{x + y + xy} = 3 \cdot \frac{(x + y + 1)^2}{x + y + \frac{(x + y + 1)^3}{32}} \xrightarrow{t = x + y + 1 > 1} S = 96 \cdot \frac{t^2}{t^3 + 32t - 32}.$$

$$\text{Ta có } (x + y + 1)^3 = 32xy \leq 8(x + y)^2 \longrightarrow t^3 \leq 8(t - 1)^2 \longleftrightarrow t^3 - 8t^2 + 16t - 8 \leq 0 \longleftrightarrow 2 \leq t \leq 3 + \sqrt{5}.$$

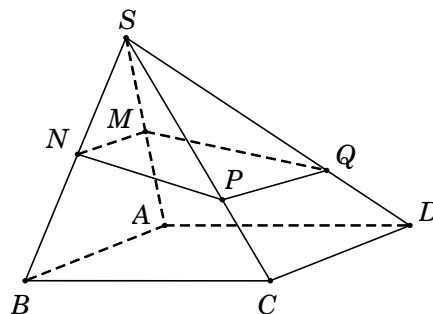
$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t^2}{t^3 + 32t - 32} \text{ trên đoạn } [2; 3 + \sqrt{5}], \text{ ta được } \max_{[2; 3 + \sqrt{5}]} f(t) = f(4) = \frac{1}{10}..$$

CÂU 16: Chọn B

$$\text{Gọi } a = \frac{SK}{SC} \quad (0 \leq a \leq 1).$$

Vì mặt phẳng (α) đi động đi qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm

$$\text{phân biệt } K, Q \text{ nên ta có đẳng thức } \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SK} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{a} = \frac{3}{2} + \frac{SD}{SQ} \longrightarrow \frac{SQ}{SD} = \frac{2a}{2 + a}.$$



$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MNKQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{3} - \frac{2}{a + 2} \right) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{a + 2}.$$

Xét hàm $f(a) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{a+2}$. trên đoạn $[0;1]$, ta được $\max_{[0;1]} f(a) = f(1) = \frac{1}{3}$.

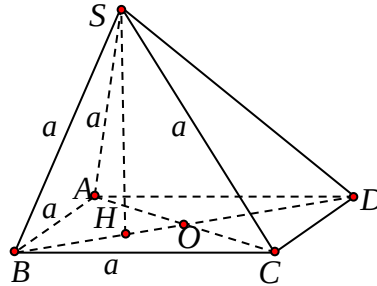
CÂU 17: Chọn A

Hình hộp được tạo thành có kích thước: chiều dài $80-2x(\text{cm})$, chiều rộng $50-2x(\text{cm})$, chiều cao $x(\text{cm})$.

Suy ra thể tích thùng tạo thành $V = x(80-2x)(50-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

Khảo sát $f(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$ trên $(0;25)$, được $\max_{(0;25)} f(x) = f(10) = 18000\text{cm}^3$.

CÂU 18: Chọn D



Kẻ $SH \perp (ABCD)$ tại $H \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Mà $\triangle ABC$ cân tại B và $AC \perp BD \Rightarrow H \in BD$. Gọi O là giao điểm AC và BD .

Ta có: $OB^2 = AB^2 - OA^2 = a^2 - (SA^2 - SO^2) = SO^2 \Rightarrow SO = OB = OD \Rightarrow \triangle SBD$ vuông tại S .

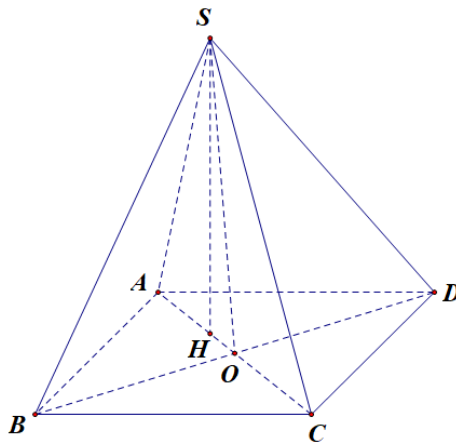
$$\Rightarrow SH \cdot BD = SB \cdot SD \Rightarrow V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{6} SB \cdot SD \cdot AC = \frac{1}{6} a \cdot AC \cdot SD$$

Lại có $SD = \sqrt{BD^2 - SB^2} = \sqrt{BD^2 - a^2}$.

$$\text{Mà } AC = 2OA = 2\sqrt{AB^2 - OB^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{BD^2}{4}} = \sqrt{4a^2 - BD^2}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} a \cdot \sqrt{4a^2 - BD^2} \cdot \sqrt{BD^2 - a^2} \leq \frac{a}{6} \cdot \frac{(4a^2 - BD^2) + (BD^2 - a^2)}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

CÂU 19: Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, vì $SA = SB = SD$ nên $H \in AO$ với O là trung điểm của BD

Ta xét hai tam giác SBD và ABD có cạnh BD chung, $SB = AB$, $SD = AD$ nên $\triangle SBD = \triangle ABD$ suy ra $AO = SO = OC$ do đó $\triangle SAC$ vuông tại S .

$$\text{Ta có } AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \Rightarrow BO = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{\sqrt{(1+x^2)(3-x^2)}}{2} \quad (0 < x < \sqrt{3})$$

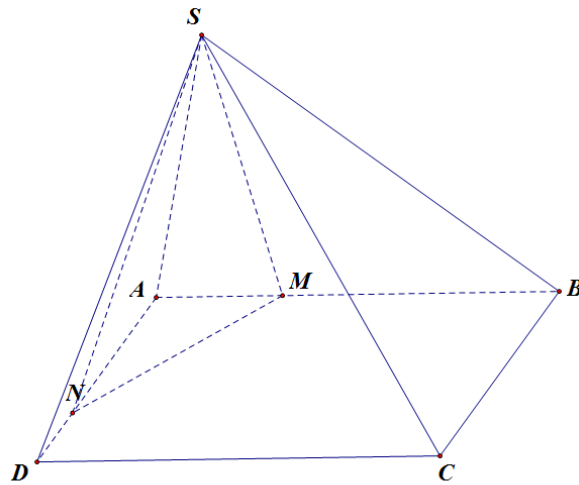
$$\text{Mặt khác } SH = \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{x^2(3-x^2)}}{6} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Suy ra } a^2 - 8b = 20.$$

CÂU 20: Chọn A



$$\text{Đặt } \frac{AB}{AM} = x; \frac{AD}{AN} = y, \text{ theo giả thiết ta có } x + 2y = 4.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin DAB}{AB \cdot AD \cdot \sin DAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2yx}.$$

$$\text{Theo đầu bài } \frac{AB}{AM} + 2 \frac{AD}{AN} = 4 \Rightarrow x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y.$$

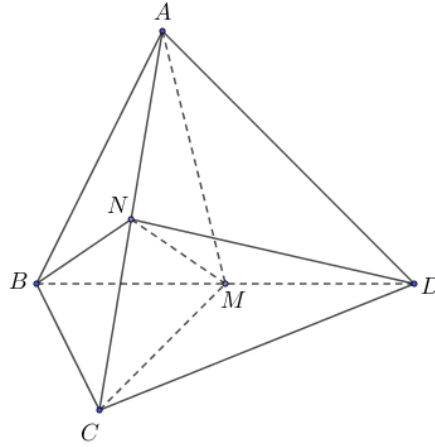
$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2y(4-2y)}; \quad 0 < y < 2.$$

$$\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = 1 - \frac{1}{2y(4-2y)}; \quad 0 < y < 2.$$

$$\text{Theo BĐT Côsi ta có } 2y(4-2y) \leq \left(\frac{2y+4-2y}{2} \right)^2 = 4.$$

$$\text{Nên } \frac{V_1}{V} \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \max \frac{V_1}{V} = \frac{3}{4}.$$

CÂU 21: Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC . Đặt $BD = 2x, AC = 2y$ ($x, y > 0$).

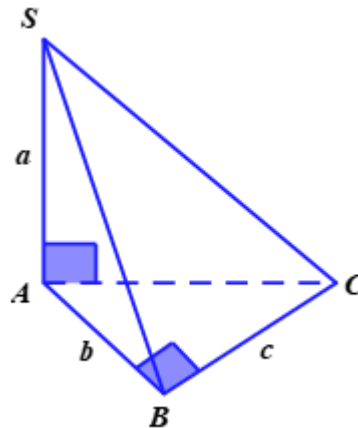
Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}$, $MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AC = \frac{1}{2}y \cdot \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot BD \cdot S_{AMC} = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot y \cdot \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 \cdot y^2 \cdot (1-x^2-y^2)} \leq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)^3}{27}}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

CÂU 22: Chọn D



Đặt $SA = a, AB = b, BC = c$, ta có: $abc = \frac{5}{4}$.

Diện tích toàn phần: $2S = ab + bc + a\sqrt{b^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có: $\left(\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 1^2 \right) (b^2 + c^2) \geq \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}b + c \right)^2$.

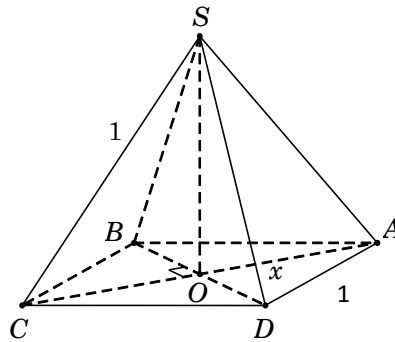
Như vậy: $\frac{3\sqrt{5}}{5} \sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}b + c \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{2}{3}b + \frac{\sqrt{5}}{3}c$.

Do đó: $2S = ab + bc + a \left(\frac{2}{3}b + \frac{\sqrt{5}}{3}c \right) + c \left(\frac{2}{3}b + \frac{\sqrt{5}}{3}a \right) = \frac{5}{3}b(a+c) + \frac{2\sqrt{5}}{3}ac \geq \frac{10}{3}b\sqrt{ac} + \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{5}{4b}$

$\Rightarrow 2S \geq \frac{10}{3}b\sqrt{\frac{5}{4b}} + \frac{5\sqrt{5}}{6b} = \frac{5\sqrt{5}}{3}\sqrt{b} + \frac{5\sqrt{5}}{6b} = \left(\frac{5\sqrt{5}}{6} \right) \left(\sqrt{b} + \sqrt{b} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S \geq \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $b=1, a=c=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Vậy $p=\frac{5}{4}, q=0 \Rightarrow \boxed{p^2+q^2=\frac{25}{16}}$

CÂU 23: Chọn D



Đặt $OA=OC=x$. Tam giác vuông AOD , có $OD=\sqrt{AD^2-OA^2}=\sqrt{1-x^2}$.

Suy ra $BD=2\sqrt{1-x^2}$. Diện tích hình thoi $S_{ABCD}=OA.BD=2x\sqrt{1-x^2}$.

Tam giác vuông SOC , có $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}.2x\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-x^2}=\frac{2}{3}x(1-x^2)$.

Xét hàm $f(x)=x(1-x^2)$ trên $(0;1)$, ta được $\max_{(0;1)} f(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Suy ra $V_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

Cách 2. Áp dụng BDT Côsi, ta có

$$\frac{2x(1-x^2)}{3}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}}{3}\leq\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}..$$

CÂU 24: Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}d(A;(BMN)).S_{\triangle BMN}}{\frac{1}{3}d(A;(BCD)).S_{\triangle BCD}}=\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle BCD}}.$$

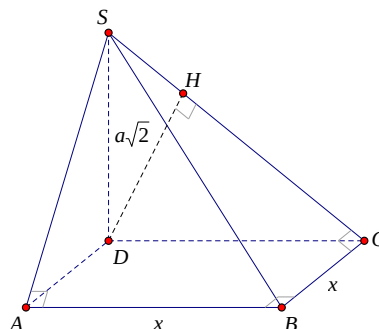
Gọi H là hình chiếu của M lên BD và K là hình chiếu của C lên BD , khi đó ta có

$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{MH.BN}{CK.BD}=\frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}$$

$$10=2\frac{BC}{BM}+3\frac{BD}{BN}\geq\sqrt{6.\frac{BC}{BM}.\frac{BD}{BN}}\Rightarrow\frac{BC}{BM}.\frac{BD}{BN}\leq\frac{25}{6}\Rightarrow\frac{BM}{BC}.\frac{BN}{BD}\leq\frac{6}{25}.$$

Suy ra $\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle BCD}}\leq\frac{6}{25}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}$ nhỏ nhất bằng $\frac{6}{25}$.

CÂU 25: Chọn B



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp DC \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD$; $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp SD$. Suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Kẻ DH vuông góc cắt SC tại $H \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow SD = \frac{\sqrt{2}ax}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$$

$$V = V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}ax^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} \quad (x > a\sqrt{2}) \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}a}{6} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 2a^2) - x^4}{(x^2 - 2a^2) \cdot \sqrt{x^2 - 2a^2}} = \frac{2x^2 - 6a^2}{(x^2 - 2a^2) \cdot \sqrt{x^2 - 2a^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$

x	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$3a^2\sqrt{3}$	$+\infty$

$$\text{Vậy } \max V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2} \text{ khi } AB = x = a\sqrt{3}.$$

CHỦ ĐỀ 5: TỌA ĐỘ HÓA – TOÁN THỰC TẾ

VÍ DỤ 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng

A. $\frac{a}{2}$.

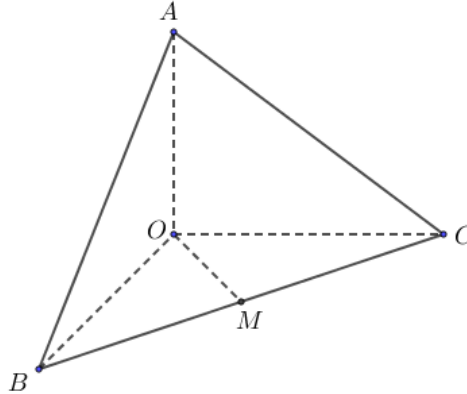
B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $A(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{AB} = (a;0;-a) \Rightarrow AB$ có một vtcp $\vec{u} = (1;0;-1)$.

$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right) \Rightarrow OM$ có một vtcp $\vec{v} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{OA} = (0;0;a)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (1;-1;1) \Rightarrow d(OM, BC) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{OA}|}{\|[\vec{u}, \vec{v}]\|} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

VÍ DỤ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD . Đặt $BM = x$, $DN = y$ ($0 < x, y < a$). Hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là:

A. $x^2 + a^2 = a(x + 2y)$.

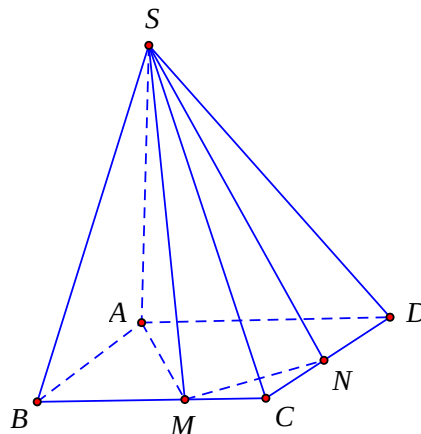
B. $x^2 + a^2 = a(x + y)$.

C. $x^2 + 2a^2 = a(x + y)$.

D. $2x^2 + a^2 = a(x + y)$.

Lời giải

Chọn B



Tọa độ hóa với $O \equiv A$, $Ox \equiv AD$, $Oy \equiv AB$, $Oz \equiv AS$.

Đặt $SA = z > 0$, ta có $S(0; 0; z)$, $M(x; a; 0)$, $N(a; y; 0)$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{AS} = (0; 0; z) \\ \overrightarrow{AM} = (x; a; 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AM}] = (-az; xz; 0).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SM} = (x; a; -z) \\ \overrightarrow{SN} = (a; y; -z) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SN}] = (yz - az; xz - az; xy - a^2).$$

Mặt phẳng (SAM) nhận $[\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AM}] = (-az; xz; 0)$ là một VTPT.

Mặt phẳng (SMN) nhận $[\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SN}] = (yz - az; xz - az; xy - a^2)$ là một VTPT.

$$\text{Ta có } (SAM) \perp (SMN) \Leftrightarrow [\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AM}] \cdot [\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SN}] = 0$$

$$\Leftrightarrow az(az - yz) + xz(xz - az) = 0 \Leftrightarrow a(a - y) + x(x - a) = 0 \Leftrightarrow x^2 + a^2 = a(x + y).$$

VÍ DỤ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , góc $BAC = 120^\circ$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm cạnh BC và SC . SH vuông góc với (ABC) ; $SA = 2a$ và tạo với mặt đáy một góc 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC là.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{7}$.

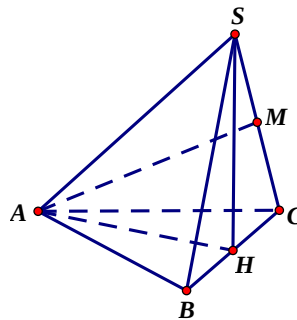
B. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

C. $\frac{a}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(SA, (ABC)) = \angle SAH = 60^\circ$; $SH = 2a \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$, $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = a$.

$$BH = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, BC = 2a\sqrt{3}.$$

Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho: $H \equiv O(0; 0; 0)$, $S \in Oz \Rightarrow S(0; 0; a\sqrt{3})$.

$$A \in Ox \Rightarrow A(a; 0; 0); B \in Oy \Rightarrow B(0; -a\sqrt{3}; 0); C \in Oy \Rightarrow C(0; a\sqrt{3}; 0).$$

Tọa độ M là trung điểm của SC nên $M\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(-a; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right); \overrightarrow{BC} = (0; 2a\sqrt{3}; 0).$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng chứa AM và song song với BC .

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BC}] = (-3a; 0; -2\sqrt{3}a).$$

$$(P): -3a(x - a) - 2\sqrt{3}az = 0 \Leftrightarrow -3ax - 2\sqrt{3}az + 3a^2 = 0.$$

$$d(AM, BC) = d(C, (P)) = \frac{|3a^2|}{\sqrt{9a^2 + 12a^2}} = \frac{3a}{\sqrt{21}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

VÍ DỤ 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Lấy điểm M thuộc đoạn AD' , điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

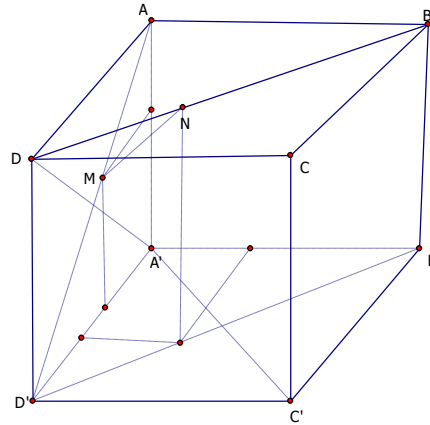
B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $x = \frac{a}{3}$.

D. $x = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A'$, $A'D' \equiv Ox$, $A'B' \equiv Oy$, $A'A \equiv Oz$.

$A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C'(a;a;0)$, $C(a;a;a)$.

$$M\left(\frac{x}{\sqrt{2}}; 0; \frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}; a\right).$$

$$\Rightarrow MN^2 = (\sqrt{2}x - a)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3\left(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}ax + \frac{2a^2}{9}\right) + \frac{a^2}{3}.$$

$$\Rightarrow MN^2 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}. \text{ Vậy } MN \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

VÍ DỤ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d . Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

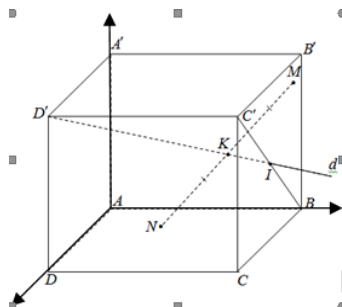
B. $\frac{3\sqrt{5}.a}{10}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}.a}{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}.a}{5}$.

Lời giải

Chọn D Cho $a=1$. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



$$A(0;0;0), D'(1;0;1), B(0;1;0), C'(1;1;1)$$

$$I \text{ là trung điểm } BC' \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1;-2;1).$$

Đường thẳng $D'I$ đi qua $D'(1;0;1)$, có một VTCP là $\vec{u} = (1;-2;1)$ có phương trình là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=1+t \end{cases}. \text{ Mặt phẳng } (ABCD): z=0. \text{ Mặt phẳng } (BCC'B'): y=1$$

$$M \in (BCC'B') \Rightarrow M(m;1;n), K \in D'I \Rightarrow K(1+t;-2t;1+t)$$

$$K \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow N(2t-m+2;-4t-1;2t-n+2).$$

$$N \in (ABCD) \Leftrightarrow z_N = 0 \Leftrightarrow 2t-n+2=0 \Leftrightarrow t = \frac{n-2}{2} \Rightarrow N(n-m;3-2n;0).$$

$$\overrightarrow{MN} = (n-2m;2-2n;-n) \Rightarrow MN^2 = (n-2m)^2 + (2-2n)^2 + n^2 = (n-2m)^2 + 5n^2 - 8n + 4$$

$$= (n-2m)^2 + 5\left(n-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow MN \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{5} \\ a = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $AB'D'$ và $BC'D$..

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

CÂU 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{24}$.

CÂU 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC$, $HBC = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính cosin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) ?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

CÂU 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m, n > 0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{245}{108}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{64}{27}$. D. $\frac{75}{32}$.

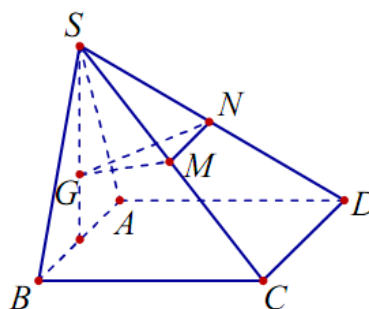
CÂU 5: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{30}}{8}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{16}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{1}{4}$.

CÂU 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $AB'D'$ và $BC'D$..

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

CÂU 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

CÂU 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $ABC = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overline{SB} = 2\overline{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60° . Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. 60° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

CÂU 9: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{256}{3} \text{ m}^3$, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là

500000 đồng/ m^3 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?

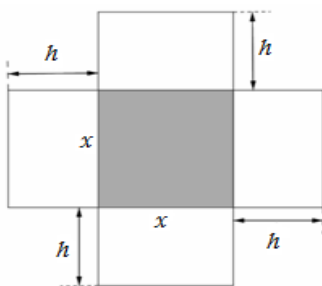
A. 48 triệu đồng.

B. 47 triệu đồng.

C. 96 triệu đồng.

D. 46 triệu đồng.

CÂU 10: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao là $h(\text{cm})$ và thể tích là 500cm^3 . Tìm độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



A. $x = 2\text{cm}$.

B. $x = 3\text{cm}$.

C. $x = 5\text{cm}$.

D. $x = 10\text{cm}$.

CÂU 11: Một người đã cắt tám bìa các tông và đặt kích thước như hình vẽ. Sau đó bạn ấy gấp theo đường nét đứt thành cái hộp hình hộp chữ nhật. Hình hộp có đáy là hình vuông cạnh $a(\text{cm})$, chiều cao $h(\text{cm})$ và diện tích toàn phần bằng 6m^2 . Tổng $(a + h)$ bằng bao nhiêu để thể tích hộp là lớn nhất.

A. $a + h = 2\text{cm}$.

B. $a + h = 3\text{cm}$.

C. $a + h = 4\text{cm}$.

D. $a + h = 6\text{cm}$.

CÂU 12: Một xưởng sản xuất những thùng bằng nhôm hình hộp chữ nhật không nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x : y = 1 : 3$, thể tích khối hộp bằng 18dm^3 . Để tốn ít vật liệu nhất thì tổng $x + y + z$ bằng:

A. 10dm.

B. $\frac{19}{2}\text{dm}$.

C. 26dm.

D. $\frac{26}{3}\text{dm}$.

CÂU 13: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là 60cm, thể tích 96000cm^3 . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100.000 đồng/ m^2 . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

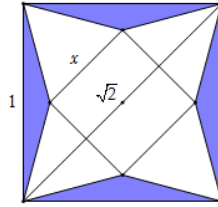
A. 320.000 đồng.

B. 32.000 đồng.

C. 83.200 đồng.

D. 68.800 đồng.

CÂU 14: Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp như hình vẽ. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì cạnh đáy x của hình chóp bằng:



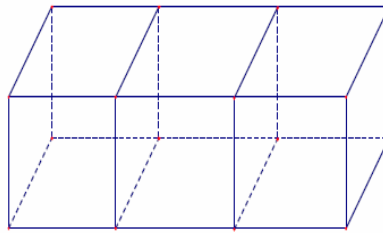
A. $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

C. $x = 2\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{2}{5}$.

CÂU 15: Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).



A. $16\text{m} \times 24\text{m}$.

B. $8\text{m} \times 48\text{m}$.

C. $12\text{m} \times 32\text{m}$.

D. $24\text{m} \times 32\text{m}$.

CÂU 16: Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4\text{m}$ và đặt ở độ cao $1,4\text{m}$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC nhọn.

A. $AO = 2,4\text{m}$.

B. $AO = 2\text{m}$.

C. $AO = 2,6\text{m}$.

D. $AO = 3\text{m}$.

CÂU 17: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

A. 108 triệu đồng.

B. 54 triệu đồng.

C. 168 triệu đồng.

D. 90 triệu đồng.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn C

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$

$A'(0;0;1)$ $B'(1;0;1)$ $C'(1;1;1)$ $D'(0;1;1)$.

$\overrightarrow{AB'} = 1;0;1$, $\overrightarrow{AD'} = 0;1;1$,

$\overrightarrow{BD} = -1;1;0$, $\overrightarrow{BC'} = 0;1;1$.

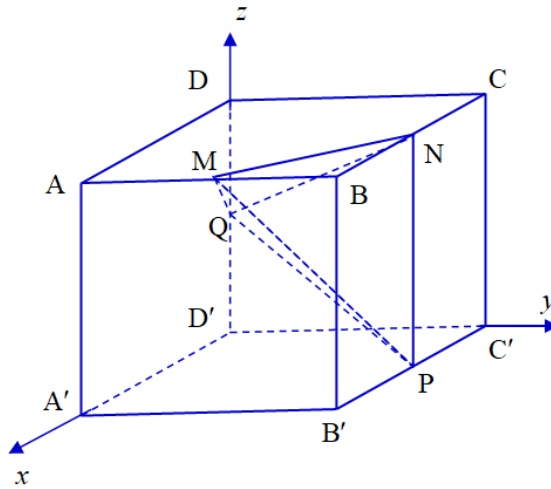
* Mặt phẳng $AB'D'$ qua $A(0;0;0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AD'}] = 1;1;-1$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình $AB'D'$ là: $x + y - z = 0$.

* Mặt phẳng $BC'D$ qua $B(1;0;0)$ và nhận vectơ $\vec{m} = [\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC'}] = 1;1;-1$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình $BC'D$ là: $x + y - z - 1 = 0$.

Suy ra hai mặt phẳng $AB'D'$ và $BC'D$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $BC'D$: $d(A, BC'D) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}..$

CÂU 2: Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:
$$\begin{cases} D' \equiv O \\ Ox \equiv D'A' \\ Oy \equiv D'C' \\ Oz \equiv D'D \end{cases}$$

Khi đó:

$$A(1;0;1), B(1;1;1), C(0;1;1), D(0;0;1), A'(1;0;0), B'(1;1;0), C'(0;1;0)$$

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN}\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP}\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right), \overrightarrow{MQ}\left(-1; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$$

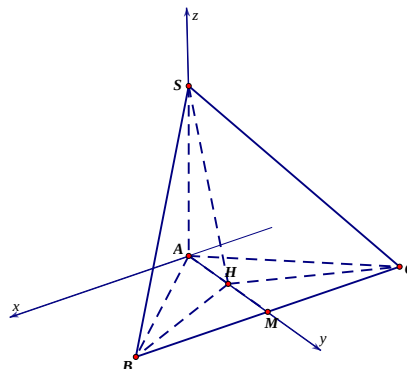
$$\left| \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \right] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \right] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \frac{1}{24}.$$

CÂU 3: Chọn C

Từ M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM , $HB=HC$ suy ra $AM \perp BC$, hay tam giác ABC cân đỉnh A .

$$\text{Đặt } BC = a \Rightarrow BM = \frac{a}{2}. \text{ Do } HBC = 30^\circ \text{ suy ra } HM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Đặt } SA = b.$$

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có $A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right)$; $H\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $S(0;0;b)$.

Ta có $\overrightarrow{HC} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$; $\overrightarrow{SH} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; -b\right)$.

$$\text{Nên } [\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{SH}] = \left(-\frac{ab\sqrt{3}}{6}; -\frac{ab}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{12} \right).$$

Suy ra (SHC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2b\sqrt{3}; 6b; a\sqrt{3})$.

Mặt phẳng (HBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° nên

$$\cos((SHC), (HBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_1| |\vec{k}|} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{|a\sqrt{3}|}{\sqrt{12b^2 + 36b^2 + 3a^2}}$$

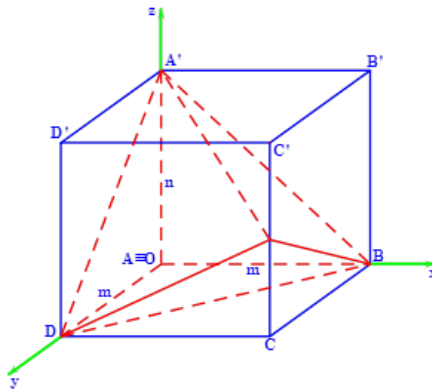
$$\Leftrightarrow \sqrt{12b^2 + 36b^2 + 3a^2} = 2|a\sqrt{3}| \Leftrightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Khi đó $\vec{n}_1 = \left(\frac{3a}{2}; \frac{3a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3} \right)$, đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) , ta có

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{i}|} = \frac{\left| \frac{3a}{2} \right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{27a^2}{4} + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ Do đó } \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

CÂU 4: Chọn C



Tọa độ điểm $C(m;m;0), C'(m;m;n), M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$

$$\overrightarrow{BA'} = (-m; 0; n), \overrightarrow{BD} = (-m; m; 0), \overrightarrow{BM} = \left(0; m; \frac{n}{2}\right)$$

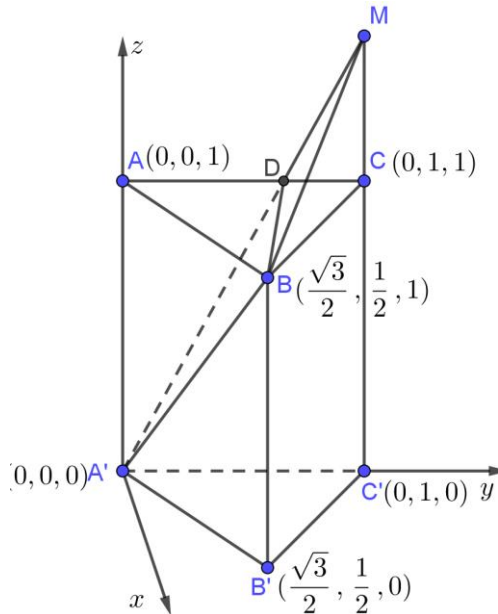
$$[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}] = (-mn; -mn; -m^2)$$

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{m^2 n}{4}$$

$$\text{Ta có } m.m.(2n) \leq \left(\frac{m+m+2n}{3} \right)^3 = \frac{512}{27} \Rightarrow m^2 n \leq \frac{256}{27} \Rightarrow V_{BDA'M} \leq \frac{64}{27}$$

CÂU 5: Chọn C

Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gắn hệ trục như hình vẽ quy ước $a=1$ (đơn vị).



Gọi D là giao điểm của $A'M$ và AC .

Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác cân cạnh bằng a nên ta suy ra độ dài các đường trung tuyến là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra tọa độ các điểm như hình vẽ.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} \text{ vậy } \Rightarrow \triangle ADA' \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{AD}{CD} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{DC}$$

$$\text{Vậy tọa độ của điểm } D \text{ là: } D\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$$

Ta có mặt phẳng ABC có phương trình $z=1 \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = (0;0;1)$

Mặt khác mặt phẳng $(A'MB)$ là mặt phẳng đi qua ba điểm A', D và B .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A'D} = \left(0; \frac{2}{3}; 1\right) \text{ và } \overrightarrow{A'B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \vec{n}_{(A'BM)} = [\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{A'B}] = \left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

Vậy $\Rightarrow$ cô sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) là:

$$\cos\left((A'BM), (ABC)\right) = \left| \cos\left(\vec{n}_{(A'BM)}, \vec{n}_{(ABC)}\right) \right| = \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}} \cdot \sqrt{1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

CÂU 6: Chọn C

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:

$$A \ 0;0;0 \quad B \ 1;0;0 \quad C \ 1;1;0 \quad D \ 0;1;0$$

$$A' \ 0;0;1 \quad B' \ 1;0;1 \quad C' \ 1;1;1 \quad D' \ 0;1;1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} &= 1;0;1, \overrightarrow{AD'} = 0;1;1, \\ \overrightarrow{BD} &= -1;1;0, \overrightarrow{BC'} = 0;1;1.\end{aligned}$$

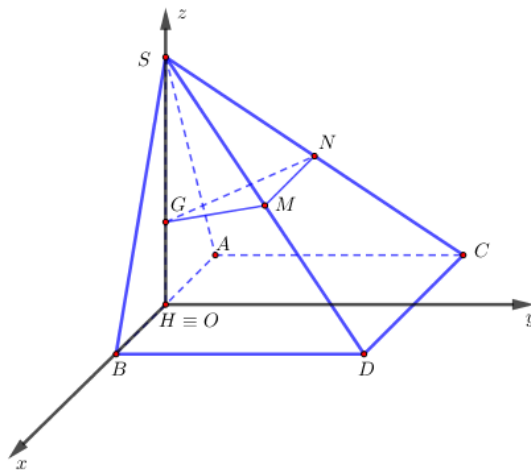
* Mặt phẳng $AB'D'$ qua $A(0;0;0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AD'}] = 1;1;-1$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình $AB'D'$ là: $x + y - z = 0$.

* Mặt phẳng $BC'D$ qua $B(1;0;0)$ và nhận vectơ $\vec{m} = [\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC'}] = 1;1;-1$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình $AB'D'$ là: $x + y - z - 1 = 0$.

Suy ra hai mặt phẳng $AB'D'$ và $BC'D$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $BC'D$: $d(A, BC'D) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 7: Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(\frac{-a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};a;0\right); D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$$

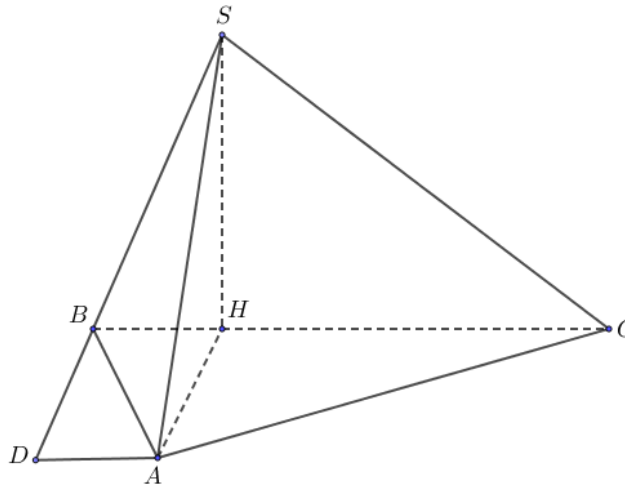
$$\text{suy ra } G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GN}] = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{24}; \frac{a}{4}\right)$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (GMN) \text{ và } (ABCD), \text{ ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

CÂU 8:

Chọn C



Ta có $AH^2 = BH^2 + BA^2 - 2.BH.BA.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2.\frac{a}{2}.a.\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\tan 60^\circ = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$,

$B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{SB} = \left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SD} = \left(-\frac{3}{4};0;-\frac{9}{4}\right) \Rightarrow D\left(-\frac{3}{4};0;-\frac{3}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{DA} = \left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \vec{u} = (\sqrt{3};2;\sqrt{3})$ là một vtcp của AD .

$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{3}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{v} = (1;0;-1)$ là một vtcp của SC . Ta có $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow AD \perp SC$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng 90° .

CÂU 9: Chọn A

Gọi x (m) là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ (m) và h (m) là chiều cao bể.

Bể có thể tích bằng $\frac{256}{3} \text{ m}^3 \Rightarrow 2x^2h = \frac{256}{3} \Leftrightarrow h = \frac{128}{3x^2}$.

Diện tích cần xây là: $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x\frac{128}{3x^2} + 2x^2 = \frac{256}{x} + 2x^2$.

Xét hàm $S(x) = \frac{256}{x} + 2x^2, (x > 0) \Rightarrow S'(x) = -\frac{256}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Lập bảng biến thiên suy ra $S_{\min} = S(4) = 96$.

x	0	4	$+\infty$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$	$\searrow$ 96 $\nearrow$ $+\infty$		

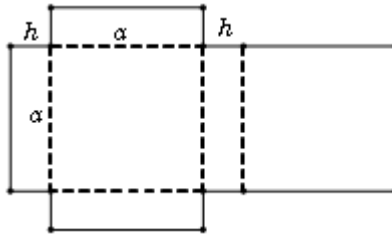
Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 96$.

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là $96.500000 = 48000000$ đồng.

Chú ý: Có thể sử dụng BĐT Cô si để tìm min, cụ thể

$$S = \frac{256}{x} + 2x^2 = \frac{128}{x} + \frac{128}{x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{128^2 \cdot 2} \Leftrightarrow S \geq 96 \Rightarrow S_{\min} = 96 \text{ khi } \frac{128}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x = 4.$$

CÂU 10: Chọn D



Thể tích khối hộp $V = x \cdot x \cdot h = x^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}.$

Để chiếc hộp làm ra ít tốn bìa các tông nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất.

Diện tích toàn phần của hộp (không nắp) $S_{\text{tp}} = S_{\text{day}} + S_{\text{xung quanh}} = x \cdot x + 4 \cdot hx = x^2 + 4hx$

$$x^2 + 4x \cdot \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} = x^2 + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{x} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 3\sqrt[3]{1000^2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1000}{x} = \frac{1000}{x} \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10.$

Chọn D.

Cách 2. Xét hàm $f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$ với $x > 0.$

CÂU 11: Chọn A

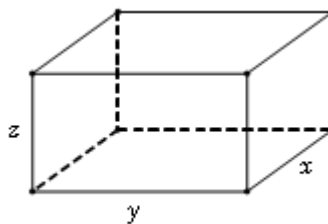
Diện tích toàn phần $S_{\text{tp}} = 4ah + 2a^2 = 6 \Rightarrow h = \frac{6 - 2a^2}{4a}.$

Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot \frac{6 - 2a^2}{4a} = \frac{6a - 2a^3}{4}.$

Khảo sát hàm $f(a) = \frac{6a - 2a^3}{4}$ trên $(0; \sqrt{3})$, ta được $f(a)$ lớn nhất tại $a = 1.$

Với $a = 1 \rightarrow h = 1 \rightarrow a + h = 2\text{cm}.$ **Chọn. A.**

CÂU 12: Chọn A



Ta có $x : y = 1 : 3 \Rightarrow y = 3x.$

Theo giả thiết, ta có $xyz = 18 \Rightarrow z = \frac{6}{x^2}.$

Tổng diện tích vật liệu (nhôm) cần dùng là:

$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= S_{\text{day}} + S_{\text{xung quanh}} \text{ (do hộp không nắp)} \\ &= xy + 2(xz + yz) = x \cdot 3x + 2\left(x \cdot \frac{6}{x^2} + 3x \cdot \frac{6}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{48}{x}. \end{aligned}$$

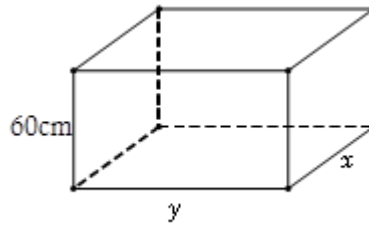
Xét hàm $f(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$ trên $(0; +\infty)$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 2.$

Khi $x = 2 \rightarrow y = 6, z = \frac{3}{2} \rightarrow x + y + z = \frac{19}{2}$ dm. **Chọn A.**

Cách 2. BĐT Côsi $3x^2 + \frac{48}{x} = 3\left(x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}\right) \geq 3 \cdot 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 36.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{x} = \frac{8}{x} \rightarrow x = 2..$

CÂU 13: Chọn C



Gọi $x(m), y(m)$ ($x > 0, y > 0$) là chiều dài và chiều rộng của đáy bể.

Theo giả thiết, ta có: $0,6xy = 0,096 \Rightarrow y = \frac{0,16}{x}.$

Diện tích mặt đáy: $S_{\text{day}} = xy = x \cdot \frac{0,16}{x} = 0,16$

$\rightarrow$ giá tiền $0,16 \times 100.000 = 16.000$ đồng.

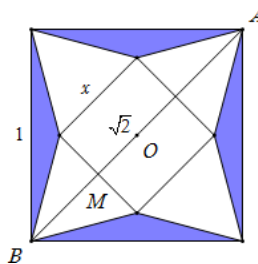
Diện tích xung quanh: $S_{\text{xung quanh}} = 2x \cdot 0,6 + 2y \cdot 0,6 = 1,2\left(x + \frac{0,16}{x}\right)$

$\rightarrow$ giá tiền $1,2\left(x + \frac{0,16}{x}\right) \cdot 70000 = 84000\left(x + \frac{0,16}{x}\right)$ đồng.

Suy ra tổng chi phí $f(x) = 84000\left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000$

$\stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 84000 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{0,16}{x}} + 16000 = 83.200$ đồng. **Chọn C.**

CÂU 14: Chọn B



Ta có $BM = BO - MO = \frac{1}{2}AB - MO = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}.$

Chiều cao của hình chóp: $h = \sqrt{BM^2 - MO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 - x\sqrt{2}}{2}}.$

Suy ra thể tích của khối chóp: $V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{1 - x\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^4 - x^5\sqrt{2}}{2}}.$

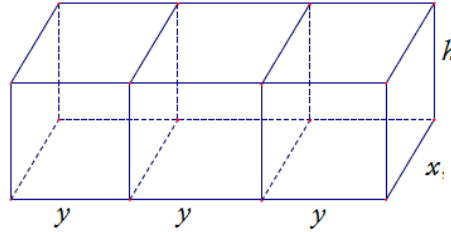
Khảo sát hàm $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$ trên $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ta được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Chọn B.

Cách làm trắc nghiệm. Đầu tiên ta loại đáp án C do $x = 2\sqrt{2} \notin \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Thay ba đáp án còn lại vào hàm số $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$. So sánh kết quả nào lớn nhất ta chọn. Nếu đề bài hỏi giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp thì ta không làm theo cách này được.

CÂU 15: Chọn A

Đặt x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao mỗi phòng.



Theo giả thiết, ta có $x \cdot 3y = 1152 \longrightarrow y = \frac{384}{x}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{\text{tp}} = 4xh + 6yh + 3xy = 4xh + 6 \cdot \frac{384}{x}h + 1152 = 4h \left(x + \frac{576}{x} \right) + 1152$.

Vì h không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(x) = x + \frac{576}{x}$ (với $x > 0$) nhỏ nhất.

Khảo sát $f(x) = x + \frac{576}{x}$ với $x > 0$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 24 \longrightarrow y = 16$.

Chọn A.

Cách 2. BĐT Côsi $x + \frac{576}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{576}{x}} = 48$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{576}{x} \rightarrow x = 24$.

CÂU 16: Chọn A

Đặt độ dài cạnh $AO = x \text{ m}$, $x > 0$

Suy ra $BO = \sqrt{3,24 + x^2}$, $CO = \sqrt{10,24 + x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\begin{aligned} \cos BOC &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC} = \frac{3,24 + x^2 + 10,24 + x^2 - 1,96}{2\sqrt{3,24 + x^2} \sqrt{10,24 + x^2}} \\ &= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{3,24 + x^2} \sqrt{10,24 + x^2}} \end{aligned}$$

Vì góc BOC nên bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{3,24 + x^2} \sqrt{10,24 + x^2}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $3,24 + x^2 = t, t > 3,24$. Suy ra $F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t} + 7} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t} + 7}$

Ta đi tìm t để $F(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t} + 7} = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t} + 7 - 25t + 63}{2\sqrt{t} + 7} \right)$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{50t^2 + 7t - 25t + 63}{2t + 7\sqrt{t} + 7} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t - 441}{2t + 7\sqrt{t} + 7} \right) F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

Thay vào đặt ta có: $3,24 + x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4 \text{ m}$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4 \text{ m}$

CÂU 17: Chọn A.

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là $a, 2a, c$. ($a(m) > 0, c(m) > 0$)

Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

Thể tích bể $V = a.2a.c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$.

Vậy $S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} = 216$.

Vậy $S_{\min} = 216 \text{ m}^2$

Chi phí thấp nhất là $216 \times 500000 = 108$ triệu đồng.

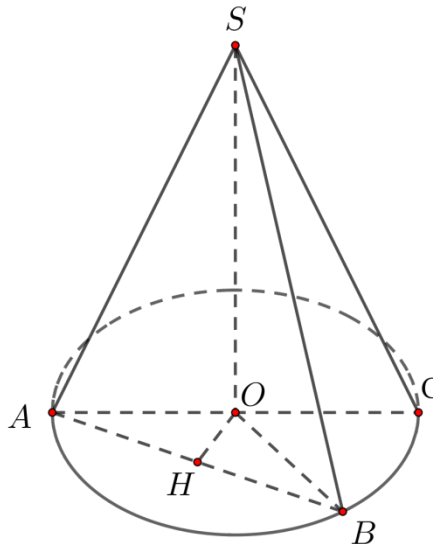
CHỦ ĐỀ 1: HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

VÍ DỤ 1: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\angle SAO = 30^\circ$, $\angle SAB = 60^\circ$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. C. $S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt{3}$. D. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{3}$.

Chọn D

Lời giải



Ta có $OH = a$. Đặt $OA = x$ thì $OA = SA \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow SA = \frac{2x}{\sqrt{3}}$.

Do góc $\angle SAB = 60^\circ$ nên tam giác SAB đều $\Rightarrow AB = SA = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Do $AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + a^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

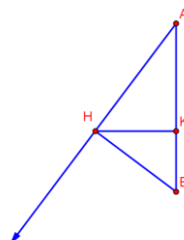
Vậy $OA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; $SA = a\sqrt{2}$ nên diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \pi a^2 \sqrt{3}$.

VÍ DỤ 2 : Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a . Gọi H là hình chiếu của B lên tia, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A. $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ B. $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ C. $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

Lời giải

Chọn B



Khi quay quanh tam giác AHB thì đường gấp khúc AHB vẽ lên một mặt tròn xoay. Diện tích mặt tròn xoay này bằng tổng diện tích xung quanh hai hình nón đường sinh AH và BH .

$$\text{Ta có } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = a\sqrt{3}$$

$$HK = \frac{AH \cdot BH}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh } AH \text{ là } S_1 = \pi \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2\pi}{2}$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh } BH \text{ là } S_2 = \pi \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}a^2\pi}{2}$$

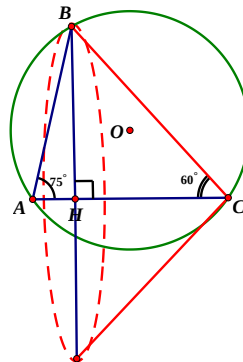
$$\text{Diện tích mặt tròn xoay cần tìm là } S = S_1 + S_2 = \frac{(3 + \sqrt{3})a^2\pi}{2}.$$

VÍ DỤ 3: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R có $BAC = 75^\circ, ACB = 60^\circ$. Kẻ $BH \perp AC$. Quay $\triangle ABC$ quanh AC thì $\triangle BHC$ tạo thành hình nón xoay (N). Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay (N) theo R .

A. $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}\pi R^2$. B. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi R^2$. C. $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{4}\pi R^2$. D. $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\pi R^2$.

Lời giải

Chọn B



- ♦ Hình nón (N) có đường sinh là đoạn $l = BC$, đường cao $h = CH$ và bán kính $r = BH$.
- ♦ Trong $\triangle ABC$ ta có $BC = 2R \sin 75^\circ$.
- ♦ Trong $\triangle BHC$ ta có $BH = BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$.
- ♦ Diện tích xung quanh hình nón (N):

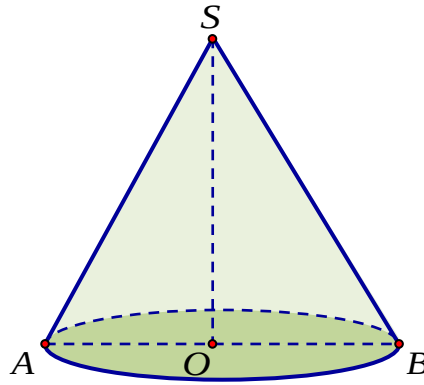
$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot BC \cdot BH = \pi \frac{\sqrt{3}}{2} BC^2 = \pi \frac{3+2\sqrt{3}}{2} R^2.$$

VÍ DỤ 4: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO.$$

$$\text{Ta có } \angle ASB = 60^\circ \Rightarrow \angle ASO = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OA}{SO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO = OA\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot OA \sqrt{OA^2 + SO^2} = 6\pi a^2$$

$$\Rightarrow OA \sqrt{OA^2 + 3OA^2} = 6a^2 \Rightarrow 2OA^2 = 6a^2 \Rightarrow OA = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = 3a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3.$$

VÍ DỤ 5: Một hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Thiết diện qua đỉnh của hình nón là 1 tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác là bao nhiêu?

A. $S_{\max} = 8a^2$

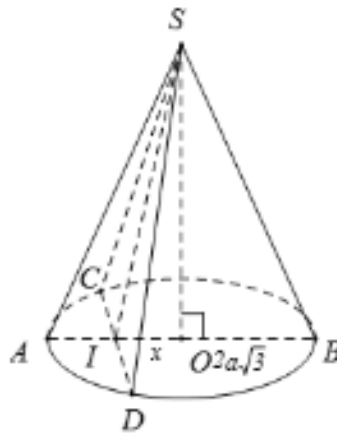
B. $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$

C. $S_{\max} = 4a^2$

D. $S_{\max} = 16a^2$

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Gọi thiết diện của hình chóp là $\triangle SCD$, I là trung điểm của CD .

$$\text{Ta có } SO = \frac{OB}{\tan 60^\circ} = 2a.$$

Đặt $OI = x$ suy ra

$$IC = \sqrt{OC^2 - OI^2} = \sqrt{12a^2 - x^2}$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{4a^2 + x^2}.$$

$$S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SI = SI \cdot IC = \sqrt{(4a^2 + x^2)(12a^2 - x^2)}.$$

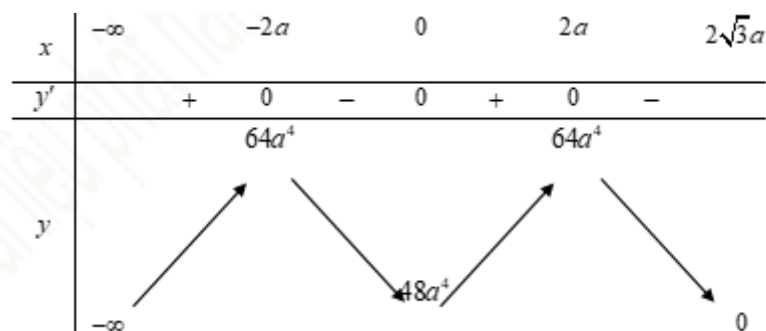
$$\Rightarrow (S_{\triangle SCD})^2 = -x^4 + 8a^2x^2 + 48a^4$$

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 8a^2x^2 + 48a^4$ với $0 < x < 2\sqrt{3}a$.

$$f'(x) = -4x^3 + 16a^2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2a \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $(S_{\max})^2 = 64a^4 \Rightarrow S_{\max} = 8a^2$.

Cách 2: Gọi thiết diện của hình chóp là ΔSCD .

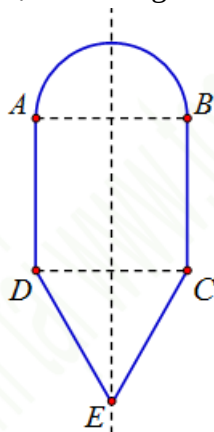
Vì ΔSOB vuông tại O , có $OB = r = 2a\sqrt{3}$, $OSB = 60^\circ$ nên $l = SB = \frac{r}{\sin 60^\circ} = 4a$.

Khi đó, $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} SC \cdot SD \cdot \sin CSD \leq \frac{1}{2} SC \cdot SD = 8a^2$ (vì $\sin CSD \leq 1$).

Vậy Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là $8a^2$ khi $CSD = 90^\circ$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho một hình phẳng gồm nửa đường tròn đường kính $AB = 2$, hai cạnh BC , DA của hình vuông $ABCD$ và hai cạnh ED , EC của tam giác đều DCE (như hình vẽ bên). Tính diện tích S của mặt tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục đối xứng của nó.



- A. $S = 8\pi$. B. $S = \left(\frac{20 + \sqrt{3}}{6}\right)\pi$. C. $S = 6\pi$. D. $S = \left(6 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$.

CÂU 2: Thiết diện qua trục của một hình nón (N) là một tam giác vuông cân, có cạnh góc vuông bằng a , diện tích toàn phần của hình nón (N) bằng:

- A. $\frac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$. B. $\frac{\pi(1 + \sqrt{2})a^2}{2}$. C. $\frac{\pi(1 + \sqrt{3})a^2}{2}$. D. $\frac{\pi a^2}{2}$.

CÂU 3: Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là

$\frac{16\pi}{9} dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:

A. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$. B. $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10} dm^2$. C. $S_{xq} = 4\pi dm^2$. D. $S_{xq} = \frac{3\pi}{2} dm^2$

CÂU 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC , quanh cạnh AC , quanh cạnh AB , ta được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_b > S_c > S_a$. B. $S_b > S_a > S_c$. C. $S_c > S_a > S_b$. D. $S_a > S_c > S_b$.

CÂU 5: Hình nón (N) có đỉnh S , tâm đường tròn đáy là O , góc ở đỉnh bằng 120° . Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB . Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N)

A. $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$. B. $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$. C. $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$. D. $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$.

CÂU 6: Cho hình nón đỉnh S và đường tròn đáy có tâm là O . Điểm A thuộc đường tròn đáy. Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy là 2. Số đo của góc SAO là?

A. 45° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .

CÂU 7: Một hình nón đỉnh S , đáy hình tròn tâm O và $SO = h$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt đường tròn (O) theo dây cung AB sao cho góc $AOB = 90^\circ$, biết khoảng cách từ O đến (P) bằng $\frac{h}{2}$. Khi đó diện tích xung quanh hình nón bằng.

A. $\frac{\pi h^2 \sqrt{10}}{6}$. B. $\frac{\pi h^2 \sqrt{10}}{3}$. C. $\frac{\pi h^2 \sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{2\pi h^2 \sqrt{10}}{3}$.

CÂU 8 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính diện tích xung quanh của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{8}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{16}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{2}$.

CÂU 9: Đường cao của một hình nón bằng a ($a > 0$). Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120° . Diện tích toàn phần của hình nón là:

A. $\pi a^2 (3 + 2\sqrt{3})$. B. $\pi a^2 (2 + \sqrt{3})$. C. $\pi a^2 (3 + \sqrt{3})$. D. $\pi a^2 (3 + 3\sqrt{3})$.

CÂU 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Hình nón có đỉnh là S , đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ có diện tích xung quanh là:

A. $S = \frac{3}{2} \pi a^2$ B. $S = \pi a^2$ C. $S = \frac{\pi a^2 (\sqrt{7} + 1)}{4}$ D. $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$

CÂU 11: Cho khối nón đỉnh O , trục OI . Mặt phẳng trung trục của OI chia khối chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần là:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

CÂU 12: Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=6$, $AD=4$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm bốn cạnh AB , BC , CD , DA . Cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh QN , tứ giác $MNPQ$ tạo thành vật tròn xoay có thể tích bằng:

- A. $V=8\pi$. B. $V=2\pi$. C. $V=6\pi$. D. $V=4\pi$

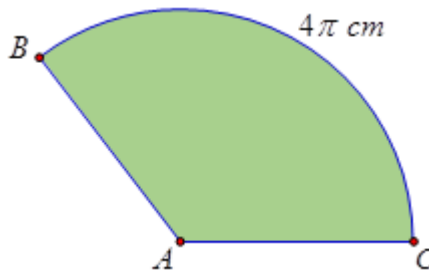
CÂU 13: Cho hình nón N có đường sinh tạo với đáy góc 60° . Mặt phẳng qua trục của N cắt N được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi N .

- A. $V=3\pi$. B. $V=3\sqrt{3}\pi$. C. $V=9\sqrt{3}\pi$. D. $V=9\pi$.

CÂU 14: Cho một hình nón đỉnh S có chiều cao bằng 8cm, bán kính đáy bằng 6cm. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa đáy được một hình nón (N) đỉnh S có đường sinh bằng 4cm. Tính thể tích của khối nón (N).

- A. $V=\frac{768}{125}\pi\text{ cm}^3$ B. $V=\frac{786}{125}\pi\text{ cm}^3$ C. $V=\frac{2304}{125}\pi\text{ cm}^3$ D. $V=\frac{2358}{125}\pi\text{ cm}^3$

CÂU 15: Một mảnh giấy hình quạt như hình vẽ. Người ta dán mép AB và AC lại với nhau để được một hình nón đỉnh A . Tính thể tích V của khối nón thu được (xem phần giấy dán không đáng kể).



- A. $4\sqrt{21}\pi$. B. $\frac{20\pi}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{21}}{3}\pi$. D. 20π .

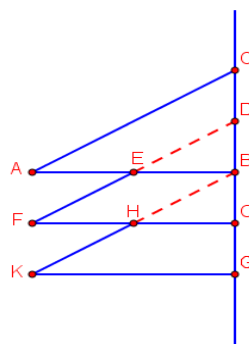
CÂU 16: Cho tam giác ABC cân tại A có $BC=10\text{cm}$, $AB=6\text{cm}$. Quay tam giác ABC xung quanh cạnh AB ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

- A. $200\pi\text{ cm}^3$. B. $\frac{325\pi}{2}\text{ cm}^3$. C. $\frac{4216\pi}{27}\text{ cm}^3$. D. $\frac{550\pi}{9}\text{ cm}^3$.

CÂU 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

- A. $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{6}$. B. $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. C. $V=\frac{\pi a^3}{2}$. D. $V=\frac{\pi a^3}{6}$.

CÂU 18: Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng a chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam giác dưới). Tính theo a thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng d .



A. $\frac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

B. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

D. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

CÂU 19: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 1\text{cm}$; $AB = 2\text{cm}$, M là trung điểm của AB . Quay tam giác BMC quanh trục AB ta được khối tròn xoay. Gọi V và S lần lượt là thể tích và diện tích của khối tròn xoay đó. Chọn mệnh đề đúng.

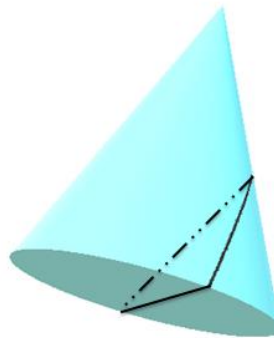
A. $V = \frac{1}{3}\pi$; $S = \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

B. $V = \pi$; $S = \pi(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

C. $V = \frac{1}{3}\pi$; $S = \pi(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

D. $V = \pi$; $S = \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

CÂU 20: Cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R , đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60° tính tỷ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α) ?



A. $\frac{2}{\pi}$.

B. $\frac{1}{2(\pi-1)}$.

C. $\frac{2}{3\pi}$.

D. $\frac{3\pi-4}{6\pi}$.

CÂU 21: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh $S_{xp} = 2\pi a^2$. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đáy của khối nón (N) và đỉnh S trùng với đỉnh của khối nón (N) .

A. $V = \frac{2\sqrt{5}a^3}{3}$.

B. $V = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

C. $V = 2\sqrt{3}a^3$.

D. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

CÂU 22: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 45° . Tính diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}\pi a^2$.

B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

C. $4\sqrt{2}\pi a^2$.

D. $2\pi a^2$.

CÂU 23: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S , có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$.

CÂU 24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt phẳng qua AB và trung điểm M của SC cắt hình chóp theo thiết diện có chu vi bằng $7a$. Thể tích của khối nón có đỉnh là S và đường tròn đáy ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$.

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$.

CÂU 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$.

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{8}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{7}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{15}}{24}$.

CÂU 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=4$, $AB=BC=CA=3$. Tính thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón có đỉnh là S và đáy là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

- A. 3π B. $\sqrt{13}\pi$ C. 4π D. $2\sqrt{2}\pi$

CÂU 27: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S , có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$.

CÂU 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 45° . Hình nón có đỉnh là S , có đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ có diện tích xung quanh là.

- A. $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$. B. $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$. C. $S = \frac{\pi a^2}{4}$. D. $S = \frac{\pi a^2}{2}$.

CÂU 29: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và đường cao bằng $6a$. Thể tích khối nón nội tiếp hình chóp đó (hình nón nội tiếp hình chóp là hình nón có đỉnh trùng với đỉnh hình chóp và có đường tròn nội tiếp đa giác đáy hình chóp, khối nón tương ứng gọi là khối nón nội tiếp hình chóp) bằng.

- A. $\frac{\pi a^3}{9}$. B. $\frac{\pi a^3}{6}$. C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{4}$.

CÂU 30: Tính thể tích V của khối nón ngoại tiếp hình tứ diện đều có cạnh bằng a (khối nón có đỉnh là một đỉnh của tứ diện và có đáy là hình tròn đi qua 3 đỉnh còn lại của tứ diện).

- A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$.
C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}$. D. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{9}$.

CÂU 31: Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

- A. Có 2 vị trí. B. Có 3 vị trí. C. Có 1 vị trí. D. Có vô số vị trí.

CÂU 32: Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R , gọi M là điểm trên đoạn SO , đặt $OM=x$, $0 < x < h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M , với hình nón (N) . Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

- A. $\frac{h}{2}$. B. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{h}{3}$.

CÂU 33: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và cắt một mặt cầu tâm O bán kính R tạo thành hai đường tròn có cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai đường tròn và đáy trùng với đường tròn còn lại. Tính khoảng cách giữa (P) và (Q) để diện tích xung quanh hình nón đó là lớn nhất.

- A. R . B. $R\sqrt{2}$. C. $2R\sqrt{3}$. D. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 34 : Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \angle CAB$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB . Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\alpha = 45^\circ$.

CÂU 35: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là 20 cm , bán kính đáy cốc là 4 cm , bán kính miệng cốc là 5 cm . Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B . Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. $59,98\text{ cm}$ B. $59,93\text{ cm}$ C. $58,67\text{ cm}$ D. $58,80\text{ cm}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn A

Gọi S_1 là diện tích của mặt cầu khi quay nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ khi quay quanh trục đối xứng của nó $\Rightarrow S_1 = 2\pi$.

Gọi S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ khi quay hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 2$ quanh trục đối xứng của nó $\Rightarrow S_2 = 4\pi$.

Gọi S_3 là diện tích hình xung quanh của hình nón khi quay tam giác đều DCE cạnh $EC = 2$ quanh trục đối xứng của nó $\Rightarrow S_3 = 2\pi$.

Vậy diện tích của mặt tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục đối xứng của nó là $S = S_1 + S_2 + S_3 = 8\pi$.

CÂU 2: Chọn B

Ta có $S_p = \pi Rl + \pi R^2$, trong đó $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = a$ nên $S_p = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a + \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi(1+\sqrt{2})a^2}{2}$.

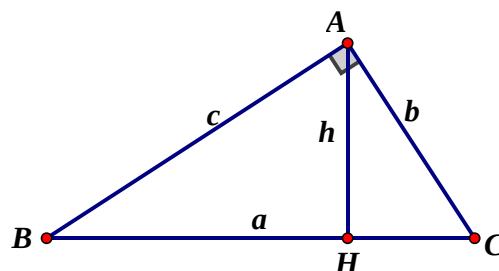
CÂU 3: Chọn B

Xét hình nón: $h = SO = 3r$, $r = OB$, $l = SA$. Xét hình trụ: $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow$ Thể tích khối trụ là:

$$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10} \text{ dm}^2$$

CÂU 4: Chọn A



Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A của tam giác, đặt $AH = h$

Ta có $S_a = \pi \cdot BA \cdot AH + \pi \cdot CA \cdot AH = \pi h(a + b)$

$$S_b = \pi \cdot BC \cdot BA + \pi \cdot BA^2 = \pi c(a + c)$$

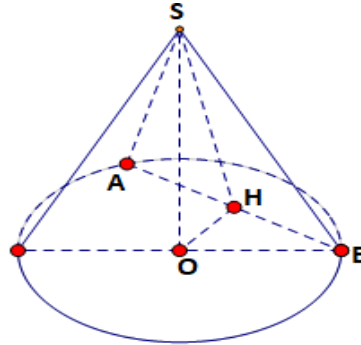
$$S_c = \pi \cdot CB \cdot CA + \pi \cdot CA^2 = \pi b(a + b)$$

Do $b < c$ nên hiển nhiên $S_c < S_b$.

Do $c < a, h < b$ nên hiển nhiên $S_a < S_c$.

Vậy $S_a < S_c < S_b$.

CÂU 5: Chọn C



Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông tại S và $OH = 3$; và $BSO = 60^\circ$.

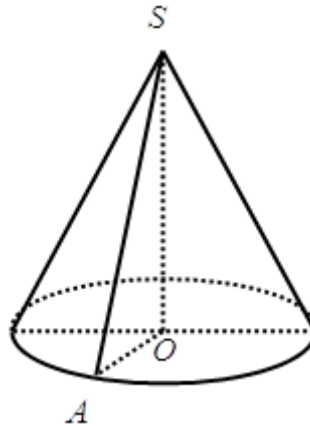
Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh $l = SB = \frac{r}{\sin 60^\circ} \Rightarrow l = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $BH = \frac{1}{2} AB = \frac{r\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác OBH vuông tại H , ta có $9 + \frac{6r^2}{9} = r^2 \Leftrightarrow r = 3\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 18\pi\sqrt{3}$.

CÂU 6: Chọn D



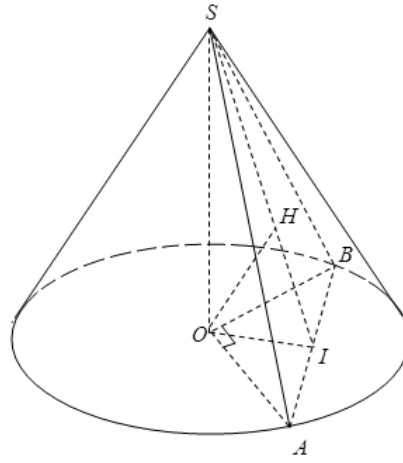
Ta có diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi \cdot OA \cdot SA$.

Diện tích đáy của hình nón là $S' = \pi OA^2$.

Khi đó: $\frac{S}{S'} = \frac{SA}{OA} = 2 \Rightarrow \frac{OA}{SA} = \frac{1}{2}$.

Mà tam giác SAO vuông tại O nên $\cos SAO = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow SAO = 60^\circ$.

CÂU 7: Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB .

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{h^2} - \frac{1}{h^2} = \frac{3}{h^2} \Rightarrow OI = \frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác OAB vuông cân tại O nên:

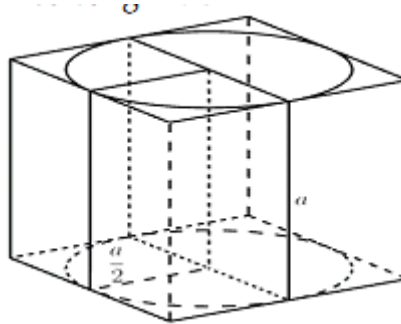
$$AB = 2OI = \frac{2h\sqrt{3}}{3}, R = OA = OB = \frac{h\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{h\sqrt{15}}{3}.$$

Diện tích xung quanh của hình nón:

$$S_{xq} = \pi R \cdot SB = \pi \cdot \frac{h\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{h\sqrt{15}}{3} = \frac{\pi h^2 \sqrt{10}}{3}.$$

CÂU 8 : Chọn C



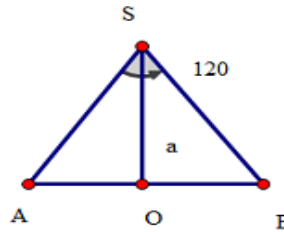
Khối nón có chiều cao là a và có bán kính đáy là $r = \frac{a}{2}$.

Do đó diện tích xung quanh của khối nón được tính theo công thức:

$$S_{xq} = \pi r l \text{ với } l = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}.$$

CÂU 9: Chọn A



Gọi thiết diện qua trục là SAB , S là đỉnh, AB là đường kính đáy, O là tâm đáy.

Theo giả thiết $SO = a$, $ASO = 60^\circ$. Trong tam giác SAO vuông tại O , $ASO = 60^\circ$.

Ta có $OA = SO \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$, $SA = \frac{SO}{\cos 60^\circ} = 2a$.

Hình vẽ mô phỏng thiết diện qua trục của hình nón.

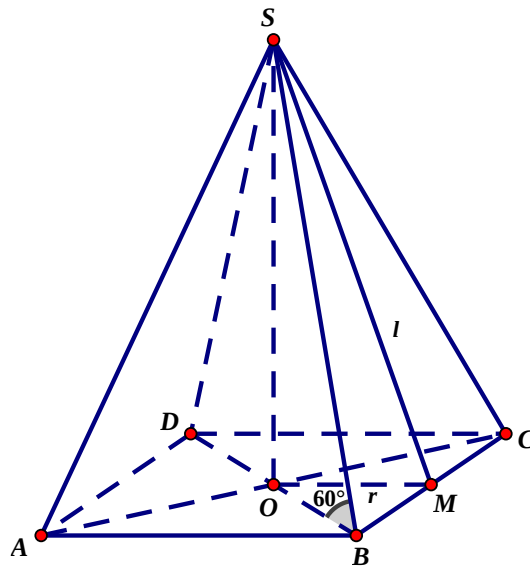
Gọi S_{tp} , S_d , S_{xq} theo thứ tự là diện tích toàn phần, diện

tích đáy, diện tích xung quanh của hình nón ta có:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_d + S_{xq} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l) = \pi \cdot OA(OA + SA) \\ &= \pi \cdot a\sqrt{3}(a\sqrt{3} + 2a) \\ &= \pi a^2(3 + 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Vậy diện tích toàn phần của hình tròn là $S_{tp} = \pi a^2(3 + 2\sqrt{3})$.

CÂU 10: Chọn D



Gọi O là tâm của đáy $ABCD$, M là trung điểm của BC .

Hình nón có đỉnh là S , đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ là hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác SOM quanh SO . Ta có:

$$SO = OB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

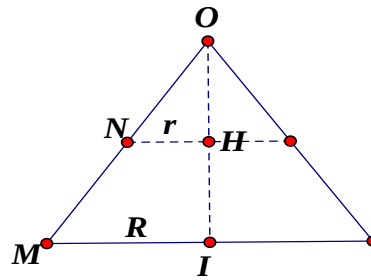
$$OM = \frac{a}{2} = r.$$

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow l = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi rl = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \pi = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}.$$

CÂU 11: Chọn B



Gọi R là bán kính đáy của khối nón trục OI . $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OI$.

Giả sử mặt phẳng trung trực của OI cắt trục OI tại H , cắt đường sinh OM tại N . Khi đó mặt phẳng này chia khối nón thành 2 phần, phần trên là khối nón mới có bán kính $r = \frac{R}{2}$, có chiều

cao là $\frac{OI}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \left(\frac{OI}{2} \right) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot OI}{24}$.

Phần dưới là khối nón cụt có thể tích $V_2 = V - V_1 = \frac{\pi R^2 \cdot OI}{3} - \frac{\pi R^2 \cdot OI}{24} = \frac{7\pi R^2 \cdot OI}{24}$. Vậy tỉ số thể tích

$$\text{là: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi R^2 \cdot OI}{24}}{\frac{7\pi R^2 \cdot OI}{24}} = \frac{1}{7}.$$

CÂU 12: Chọn A

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, suy ra $MNPQ$ là hình thoi tâm O .

Ta có $QO = ON = \frac{1}{2} AB = 3$ và $OM = OP = \frac{1}{2} AD = 2$.

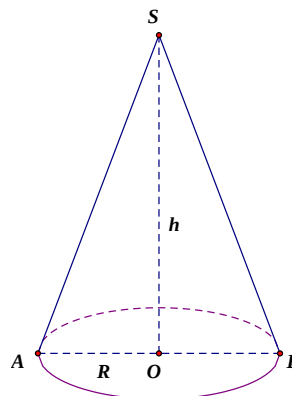
Vật tròn xoay là hai hình nón bằng nhau có: đỉnh lần lượt là Q, N và chung đáy.

* Bán kính đáy $OM = 2$.

* Chiều cao hình nón $OQ = ON = 3$.

Vậy thể tích khối tròn xoay $V = 2 \left(\frac{1}{3} \pi OM^2 \cdot ON \right) = 8\pi$ (đvtt).

CÂU 13: Chọn A



Ta có: Góc giữa đường sinh tạo với đáy là $SAO = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h}{R} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}R$

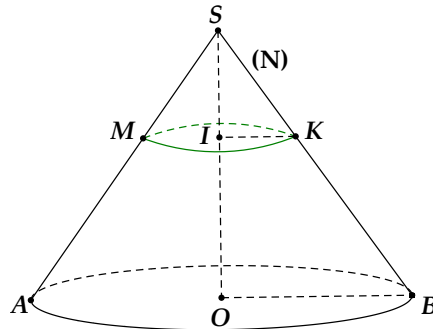
$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} SO \cdot AB = R \cdot h \\ S_{ABC} = p \cdot r = \frac{SA + SB + AB}{2} = l + R = \sqrt{h^2 + R^2} + R \end{cases}$$

$$\Rightarrow R.h = \sqrt{h^2 + R^2} + R \quad 2$$

Thế 1 vào 2 ta được: $\sqrt{3}R^2 = 3R \Leftrightarrow \begin{cases} R=0 & L \\ R=\sqrt{3} & N \end{cases}$. Suy ra: $h=3$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 3\pi$.

CÂU 14: Chọn A



Đường sinh của hình nón lớn là: $l = SB = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$.

Gọi l_2 , r_2 , h_2 lần lượt là đường sinh, bán kính đáy và chiều cao của hình nón (N).

$$l_2 = SK = 4 \text{ cm}$$

Ta có: $\triangle SOB$ và $\triangle SIK$ đồng dạng nên: $\frac{SI}{SO} = \frac{IK}{OB} = \frac{SK}{SB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} = \frac{l_2}{l} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = \frac{2}{5}h = \frac{16}{5} \\ r_2 = \frac{2}{5}r = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{768}{125} \pi \text{ cm}^3$.

CÂU 15: Chọn C.

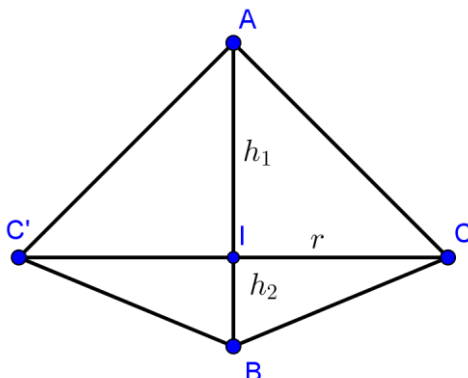
Gọi R, h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình nón

Đường sinh $l = 5$.

Ta có :

$$2\pi R = 4\pi \Rightarrow R = 2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{21} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{4\pi\sqrt{21}}{3}$$

CÂU 16: Chọn D



Gọi C' là điểm đối xứng của C qua AB . Khi đó khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh AB gồm hai hình nón đỉnh A, B có chung đáy CC' . Khi đó ta có:

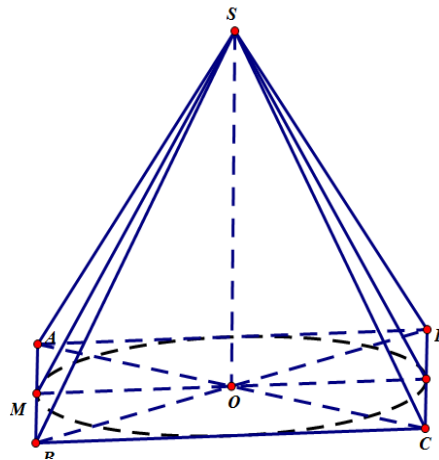
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot CI^2 \cdot AB.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}d(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{2}d(A, BC) \cdot BC$$

$$\Rightarrow CI = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{AB}, \quad d(A, BC) = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{11} \Rightarrow CI = \frac{5\sqrt{11}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{11}}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{550\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

CÂU 17: Chọn D



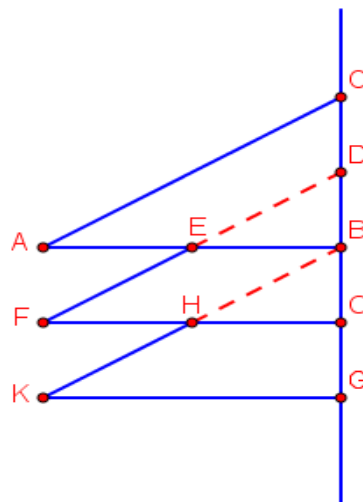
Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có : } OA = \frac{1}{2}AC = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a.$$

Hình nón đỉnh S có chiều cao $h = SO = a$, bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, có thể tích là :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{6}.$$

CÂU 18: Chọn B



Nếu ba hình tam giác không chồng lên nhau thì

thể tích của khối tròn xoay là $V_1 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{8}$

Thể tích phần bị chồng lên là $V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{96}$

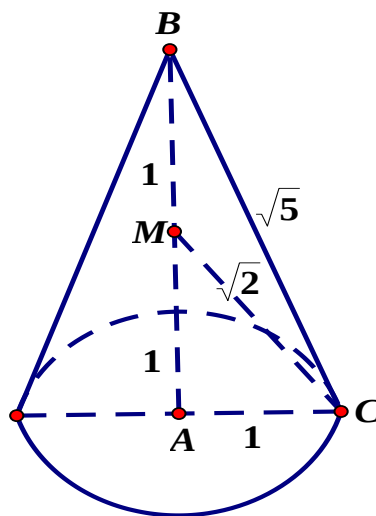
$\Rightarrow$ Thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$

Hoặc làm như sau:

Đặt $V_1; V_2; V_3; V_4$ lần lượt là thể tích: khối nón sinh bởi tam giác OAB quay quanh OB , khối tròn xoay sinh bởi hình $BCFE; GCHK$, khối nón sinh bởi tam giác DEB khi quay quanh BC . Khi đó: Thể tích khối cần tìm là:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3V_1 - 2V_4 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}.$$

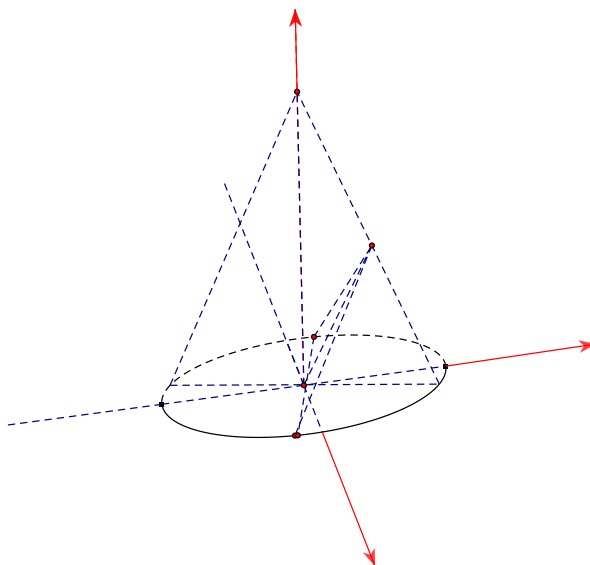
CÂU 19: Chọn A



Gọi (H_1) là hình nón tròn xoay tạo thành khi cho tam giác ABC quay quanh cạnh AB , (H_2) là hình nón tròn xoay tạo thành khi cho tam giác MAB quay quanh cạnh AB .

Khi đó $V = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot MA = \frac{1}{3}\pi$; $S = \pi AC \cdot BC - \pi AC \cdot MC = \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

CÂU 20: Chọn D



Không mất tính tổng quát ta giả sử $R=1$.

Khi cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R , đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60° thì ta được thiết diện là một đường parabol có đỉnh là gốc $O(0;0)$ và đỉnh còn lại là $A(1;1)$, do đó thiết diện sẽ có diện tích là $S = \frac{4}{3}$. Xét mặt phẳng đi

qua cạnh đáy của thiết diện vuông góc với hình tròn đáy của hình nón cắt hình nón làm đôi.

Gọi đa diện chứa mặt thiết diện đó là (H) . Gọi (K) là đa diện chứa đỉnh O của hình nón được sinh bởi khi cắt thiết diện Parabol với đa diện (H) .

Khi đó khoảng cách từ O đến mặt thiết diện là $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

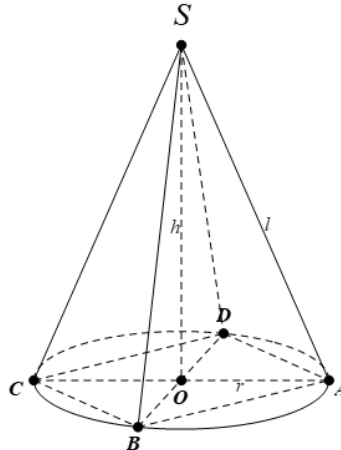
Suy ra thể tích của đa diện (K) là $V_K = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Mặt khác thể tích của nửa khối nón là $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích của đa diện nhỏ tạo bởi thiết diện và khối nón là $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}$.

Vậy tỉ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α) là $\frac{\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}} = \frac{3\pi-4}{3}$.

CÂU 21: Chọn D

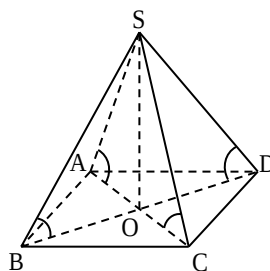


Ta có: Diện tích xung quanh $S_{xp} = 2\pi a^2 \Rightarrow \pi r l = 2\pi a^2 \Rightarrow l = 2a \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$.

Đáy $ABCD$ nội tiếp đáy của khối nón (N) có bán kính đáy bằng $a \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$.

Vậy: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} h = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

CÂU 22: Chọn A.

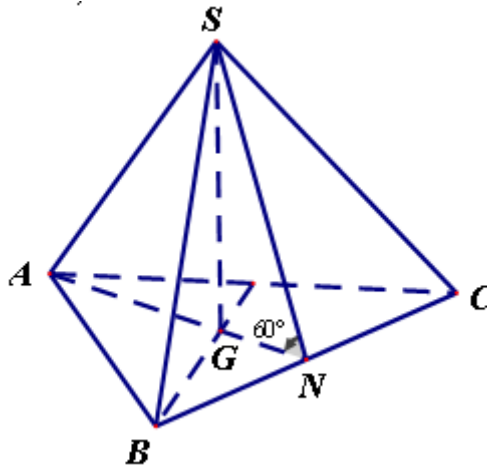


Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ và trong $\triangle SOA$ vuông tại O

$$\text{có } \angle SAO = 45^\circ, OA = \frac{AC}{2} = \frac{(2a)\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}. \text{ Suy ra } SA = \frac{OA}{\cos 45^\circ} = 2a.$$

Vậy diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ là $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$.

CÂU 23: Chọn D.



Hình nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có:

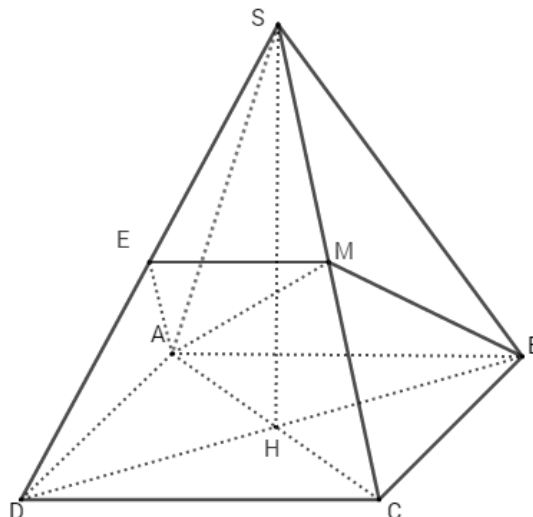
$$\text{Bán kính đường tròn đáy } r = AG = \frac{2}{3} AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Đường sinh } l = SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{(GN \tan 60^\circ)^2 + AG^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}} a.$$

$$\text{Diện tích xung quanh: } S_{xq} = \pi rl = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}.$$

CÂU 24: Chọn D



Gọi E là trung điểm $SD \Rightarrow ME \parallel AB$ suy ra (ABM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $ABME$.

Gọi độ dài cạnh bên của hình chóp là x . Do chóp $S.ABCD$ là chóp đều nên $\Delta SAD = \Delta SBC \Rightarrow AE = BM$.

Áp dụng hệ thức trung tuyến ta có: $BM^2 = \frac{SB^2 + BC^2}{2} - \frac{SC^2}{4} = \frac{x^2 + 8a^2}{4}$.

Suy ra $AE = BM = \sqrt{\frac{x^2 + 8a^2}{4}}$

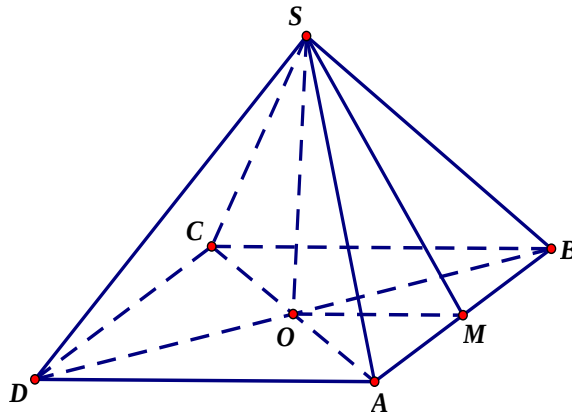
Mặt khác dễ thấy $EM = a, AB = 2a$ mà chu vi thiết diện bằng $7a$ nên ta có:
 $a + 2a + 2\sqrt{\frac{x^2 + 8a^2}{4}} = 7a \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra chiều cao của hình chóp: $SH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{4} = 6a^2 \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.

Khôì nón có đỉnh là S và đường tròn đáy ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ chiều cao là $SH = a\sqrt{6}$ và bán kính đường tròn đáy là $\frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$ nên thể tích khôì nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi(a\sqrt{2})^2 a\sqrt{6} = \frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{3}.$$

CÂU 25: Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm AB . Hình nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính đáy là $R = OM = \frac{a}{2}$ và có chiều cao là $h = SO$.

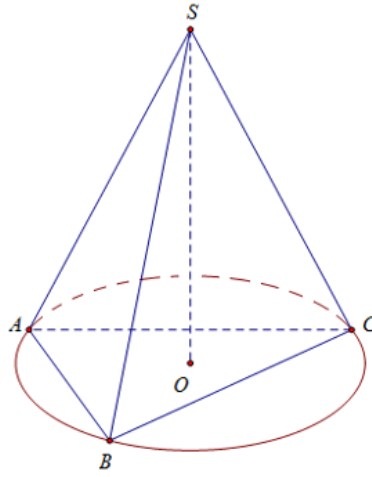
Thể tích khôì nón $V = \frac{1}{3}Bh$ trong đó $B = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

Diện tích tam giác SAB là $2a^2$ nên $\frac{1}{2}SM \cdot AB = 2a^2 \Leftrightarrow SM = 4a$.

Trong tam giác vuông SOM ta có $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{16a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$ hay $h = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy thể tích của khôì nón $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{8}$.

CÂU 26: Chọn B

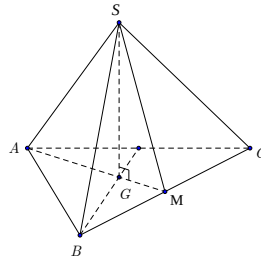


Đường cao hình chóp là đường cao hình nón: $h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC : $R = OA = \sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối nón cần tìm: $V = \frac{1}{3}h\pi R^2 = \sqrt{13}\pi$.

CÂU 27: Chọn B



$$GM = \frac{1}{3} \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$AG = \frac{2}{3} \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

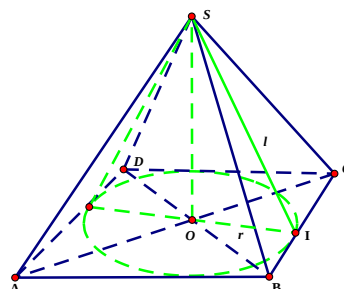
Ta có: $\angle SMG = 60^\circ$. Xét tam giác vuông SGM : $\tan \angle SMG = \frac{SG}{GM}$.

$$\text{Suy ra: } SG = GM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAG : SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$$S_{xq} = \pi AG \cdot SA = \pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \pi \frac{a^2\sqrt{7}}{6}.$$

CÂU 28: Chọn B



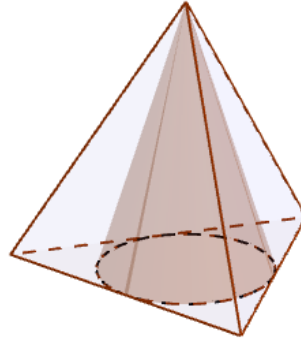
Gọi $O = AC \cap BD$ và I là trung điểm BC . Khi đó $OC = a \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SO = OC \tan 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Trong $\triangle SOH$ vuông tại O thì $SH^2 = SO^2 + OH^2 \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$.

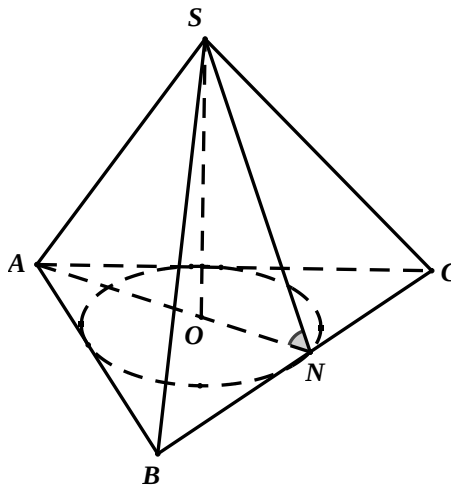
CÂU 29: Chọn B



Bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đều cạnh a là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích khối nón nội tiếp là $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot 6a = \frac{a^3 \pi}{6}$.

Cách khác :



Gọi O là tâm của đáy ABC và N là trung điểm của BC .

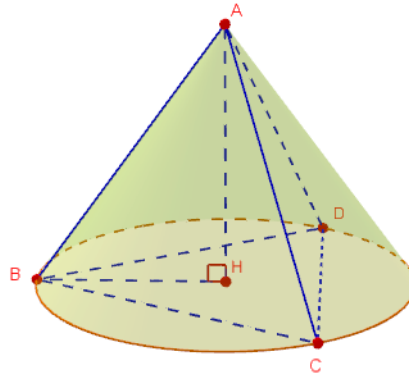
Do $S.ABC$ là hình chóp đều suy ra $SO \perp (ABC)$.

Hình nón **nội tiếp** hình chóp đều $S.ABC$ là hình nón có **đỉnh** là S , **đáy** là đường tròn **nội tiếp** tam giác ABC . Khi đó hình nón có bán kính đáy $r = ON$, đường cao $h = SO = 6a$, đường sinh $l = SN$.

Ta có $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ON = \frac{1}{3} AN = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích khối nón nội tiếp là $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot 6a = \frac{a^3 \pi}{6}$.

CÂU 30: Chọn B



Gọi $ABCD$ là tứ diện đều có cạnh bằng a . Xét khối chóp có đỉnh A , đáy là hình tròn tâm H ngoại tiếp tam giác BCD .

Khi đó, thể tích khối nón cần tìm là.

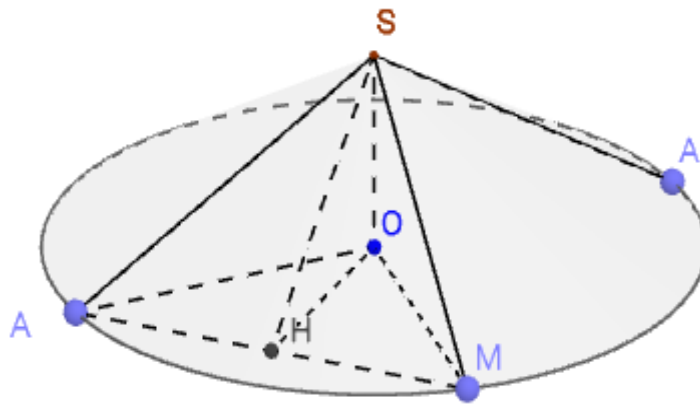
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi BH^2 \cdot AH.$$

$$\text{Ta có: } BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và.}$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } V = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{27} \text{ (đvtt).}$$

CÂU 31: Chọn A.



Gọi r là bán kính đáy của hình nón. Vì góc ở đỉnh $\angle ASA' = 120^\circ \Rightarrow \angle ASO = 60^\circ$.

Suy ra $SO = OA \cdot \cot \angle ASO = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Gọi H là trung điểm của AM và đặt $x = OH$.

$$\text{Ta có: } SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}, \quad AM = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2}.$$

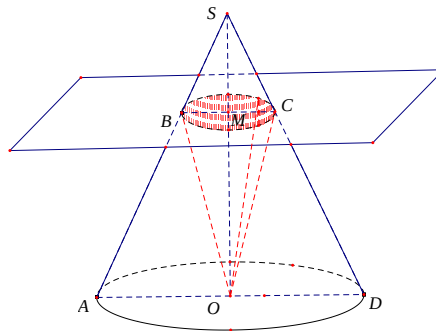
Diện tích tam giác $\triangle SAM$ bằng

$$S = \frac{1}{2} SH \cdot AM = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \leq \frac{2}{3} r^2.$$

$$S_{\max} = \frac{2}{3} r^2 \text{ đạt được khi } \frac{r^2}{3} + x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}}. \text{ Tức là } OH = SO.$$

Theo tính chất đối xứng của của đường tròn ta có hai vị trí của M thỏa yêu cầu.

CÂU 32: Chọn D



Ta có BM là bán kính đường tròn (C) .

Do tam giác $\triangle SBM \sim \triangle SAO$ nên $\frac{BM}{AO} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow BM = \frac{AO \cdot SM}{SO} \Leftrightarrow BM = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$$V = \frac{1}{3} \pi BM^2 \cdot OM = \frac{1}{3} \pi \left[\frac{R(h-x)}{h} \right]^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$, $(0 < x < h)$ ta có

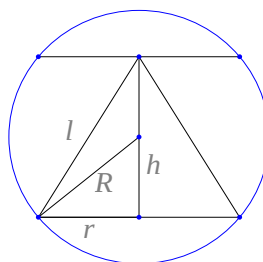
Ta có $f'(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x) \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow \frac{4\pi R^2 h}{81} \searrow$		

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x = \frac{h}{3}$.

CÂU 33: Chọn D



Ta có $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}}$.

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}} = \pi \sqrt{-\frac{3}{16} h^4 + \frac{R^2}{2} h^2 + R^4}.$$

Xét $f(h) = -\frac{3}{16} h^4 + \frac{R^2}{2} h^2 + R^4$ ($0 < h < 2R$).

Ta có $f'(h) = -\frac{3}{4} h^3 + R^2 h$, $f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

h	0	$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$			

Khi đó $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Do đó S_{xq} đạt giá trị lớn nhất khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 34 : Chọn C

$$AC = AB. \cos \alpha = 2R. \cos \alpha$$

$$CH = AC. \sin \alpha = 2R. \cos \alpha. \sin \alpha; AH = AC. \cos \alpha = 2R. \cos^2 \alpha$$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB là.

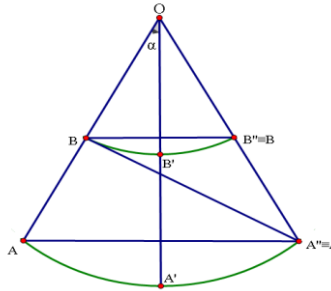
$$V = \frac{1}{3} AH. \pi CH^2 = \frac{8}{3} R^3. \cos^4 \alpha. \sin^2 \alpha.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 \alpha \ (0 < t < 1) \Rightarrow V = \frac{8}{3} R^3 t^2 (1-t) = \frac{8}{6} R^3 . t . t (2-2t) \leq \frac{8}{6} R^3 \left(\frac{t+t+2-2t}{3} \right)^3.$$

$$\text{Vậy } V \text{ lớn nhất khi } t = \frac{2}{3} \text{ khi } \alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

CÂU 35: Chọn D

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta “trái” hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA'' . Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO.OA''.\cos 2\alpha} \quad (1).$$

$$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}. \quad \frac{a}{b} = \frac{4\pi a}{4\pi b} = \frac{l(BB'')}{l(AA'')} = \frac{OA}{OB} = \frac{OB + AB}{OB} = 1 + \frac{AB}{2\pi b} = 1 + \frac{AB.\alpha}{2\pi b}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi(a-b)}{AB} = \frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \quad (a). \quad \frac{AB}{OB} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} \quad (b).$$

$$OA'' = OB + BA = \frac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2} \quad (c).$$

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được $l \approx 58,79609cm \approx 58,80$

CHỦ ĐỀ 2: KHỐI TRỤ

VÍ DỤ 1: Một tấm đề can hình chữ nhật được cuộn tròn lại theo chiều dài tạo thành một khối trụ có đường kính 50 (cm). Người ta trải ra 250 vòng để cắt chữ và in tranh cổ động, phần còn lại là một khối trụ có đường kính 45 (cm). Hỏi phần đã trải ra dài bao nhiêu mét ?

- A. 373 (m). B. 187 (m). C. 384 (m). D. 192 (m).

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Bề dày của tấm đề can là: $a = \frac{50 - 45}{2 \times 250} = 0,01(\text{cm})$.

Gọi d là chiều dài đã trải ra và h là chiều rộng của tấm đề can. Khi đó ta có:

$$dha = \pi \left(\frac{50}{2} \right)^2 h - \pi \left(\frac{45}{2} \right)^2 h \Rightarrow d = \frac{\pi(50^2 - 45^2)}{4a} \approx 37306 \text{ (cm)} \approx 373 \text{ (m)}.$$

Cách 2: Chiều dài của phần trải ra là tổng chu vi của 250 đường tròn có bán kính là một cấp số cộng có số hạng đầu bằng \$25\$, công sai là $-a = -0,01$.

Do đó chiều dài là $l = 2\pi(2.25 - 249.0,01) \frac{250}{2} \approx 37314 \text{ (cm)} \approx 373 \text{ (m)}$.

VÍ DỤ 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $BC = 3a$. Gọi M , N là các điểm trên các cạnh AD , BC sao cho $MA = 2MD$, $NB = 2NC$. Khi quay quanh AB , các đường gấp khúc $AMNB$, $ADCB$ sinh ra các hình trụ có diện tích toàn phần lần lượt là S_1 , S_2 . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

- A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{12}{21}$. B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$. C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$. D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn A.

Hình trụ có diện tích toàn phần S_1 , đường sinh $MN = 2a$ và bán kính đường tròn đáy là $AM = 2a$

Diện tích toàn phần $S_1 = 2\pi \cdot AM \cdot MN + 2\pi AM^2 = 16\pi a^2$

Hình trụ có diện tích toàn phần S_2 , đường sinh $DC = 2a$ và bán kính đường tròn đáy là $AD = 3a$

Diện tích toàn phần $S_2 = 2\pi \cdot AD \cdot DC + 2\pi AD^2 = 30\pi a^2$. Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.

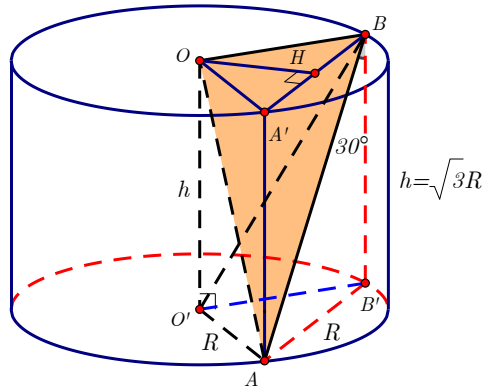
VÍ DỤ 3: Cho hình trụ có hai đường tròn đáy $(O; R)$ và $(O'; R)$, chiều cao $h = \sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha = 30^\circ$. Thể tích tứ diện $ABOO'$ là:

- A. $\frac{3R^3}{2}$. B. $\frac{3R^3}{4}$. C. $\frac{R^3}{4}$. D. $\frac{R^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hình vẽ như sau:



Ta có: $OO' \parallel BB'$ nên $(AB, OO') = (AB, BB') = ABB' = 30^\circ$.

Đặt $V = V_{OA'B, O'AB'}$.

Ta có: $V_{OA'B, O'AB'} = V_{B, O'AB'} + V_{B, OA'AO} = \frac{1}{3}V + V_{B, OA'AO} \Rightarrow V_{B, OA'AO} = \frac{2}{3}V$.

Mà $\frac{d(A', (OBA))}{d(O', (OBA))} = \frac{IA'}{IO'} = 1$ nên $V_{A', OAB} = V_{O', OAB} = \frac{1}{3}V$.

Ta có $OB' = R$, $AB' = R$ nên tam giác $O'AB'$ đều nên có diện tích bằng $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy ta có $V_{O', OAB} = \frac{1}{3}V = \frac{1}{3}\sqrt{3}R \left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{R^3}{4}$.

VÍ DỤ 4: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 45° , diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

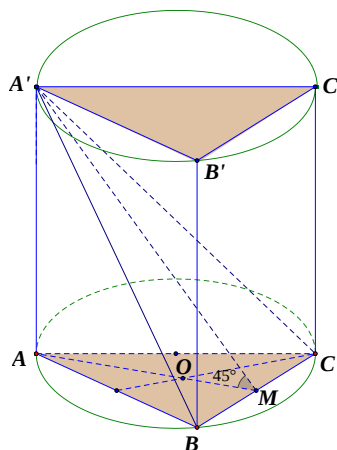
B. $2\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

D. $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC . Khi đó ta có $BC \perp AM$, $BC \perp A'M$

Suy ra: $((A'BC), (ABC)) = A'MA = 45^\circ \Rightarrow A'A = AM$. Gọi O là trọng tâm tam giác ABC .

Đặt $BC = x$, $x > 0$. Ta có $AM = A'A = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \frac{x\sqrt{6}}{2}$.

$$\text{Nên } S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2} \cdot A'M \cdot BC = \frac{x^2 \sqrt{6}}{4} = a^2 \sqrt{6} \Rightarrow x = 2a.$$

$$\text{Khi đó: } AO = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ và } A'A = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra diện tích xung quang khối trụ là: } S_{xq} = 2\pi \cdot OA \cdot A'A = 2\pi \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = 4\pi a^2.$$

VÍ DỤ 5: Người ta muốn dùng vật liệu bằng kim loại để gò thành một thùng hình trụ tròn xoay có hai đáy với thể tích V cho trước (hai đáy cũng dùng chính vật liệu đó). Hãy xác định chiều cao h và bán kính R của hình trụ theo V để tốn ít vật liệu nhất.

A. $R = 2h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$ **B.** $R = 2h = 2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}.$ **C.** $h = 2R = 2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}.$ **D.** $h = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

Lời giải

Chọn D

Để vật liệu tốn ít nhất thì diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh.$$

$$\text{Do } V = \pi R^2 h \text{ nên } h = \frac{V}{\pi R^2}. \text{ Suy ra}$$

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R}} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } 2\pi R^2 = \frac{V}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \text{ Khi đó } h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

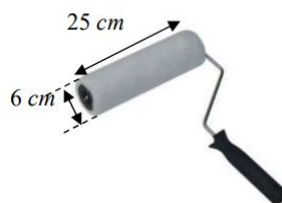
CÂU 1: Cho hình trụ có tỉ số diện tích xung quanh và diện tích toàn phần bằng $\frac{1}{3}$. Biết thể tích khối trụ bằng 4π . Bán kính đáy của hình trụ là

A. 3. **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $\sqrt{2}.$ **D.** 2.

CÂU 2: Một hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên một mặt cầu bán kính R và có đường cao bằng bán kính mặt cầu. Diện tích toàn phần hình trụ đó bằng:

A. $\frac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{3}.$ **B.** $\frac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{2}.$ **C.** $\frac{(3+2\sqrt{2})\pi R^2}{2}.$ **D.** $\frac{(3+2\sqrt{2})\pi R^2}{3}.$

CÂU 3: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 6 cm, chiều dài lăn là 25 cm (như hình dưới đây). Sau khi lăn tròn 10 vòng thì trục lăn tạo nên bức tường phẳng một diện tích là:



- A. $1500\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. B. $150\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. C. $3000\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. D. $300\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

CÂU 4 : Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a$, $BC=3a$. Gọi E , F lần lượt là các điểm trên các cạnh AB , BC sao cho $EA=2ED$, $FB=2FC$. Khi quay quanh AB các đường gấp khúc $AEFB$, $ADCB$ sinh ra hình trụ có diện tích toàn phần lần lượt là S_1 , S_2 . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

- A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$. B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{15}$. C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{12}{21}$. D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$.

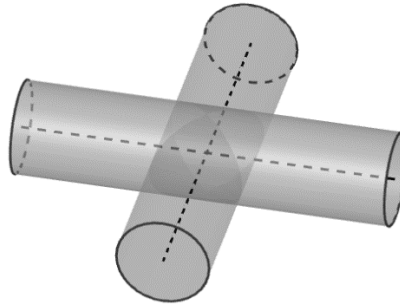
CÂU 5: Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB > AD$ và có diện tích bằng 2, chu vi bằng 6. Cho hình chữ nhật đó lần lượt quay quanh AB , AD ta được hai khối tròn xoay có thể tích là V_1 , V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. 3. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{3}$.

CÂU 6: Cho hình trụ có các đáy là 2 hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Thể tích khối tứ diện $OO'AB$ theo a là.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

CÂU 7: Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng 4 được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.



- A. 256π . B. 512. C. $\frac{256}{3}\pi$. D. $\frac{1024}{3}$.

CÂU 8: Một khối trụ có bán kính đáy 10cm, thiết diện qua trục là một hình vuông. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng đi qua một đường kính đáy và tạo với đáy góc 45° để tạo ra một hình nêm (khối có thể tích nhỏ hơn trong hai khối tạo ra). Thể tích của hình nêm bằng.

- A. $\frac{2000}{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{2000}{9} \text{ cm}^3$. C. $\frac{1000}{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{1000}{9} \text{ cm}^3$.

CÂU 9: Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng α vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng α bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

- A. $2\sqrt{3}\pi$. B. $\frac{52\pi}{3}$. C. 52π . D. 13π .

CÂU 10: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O , O' và có bán kính $r=5$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO'=6$. Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của đoạn OO' và tạo với đường thẳng OO' một góc 45° . Tính diện tích S của thiết diện tạo với mặt phẳng (α) và hình trụ.

- A. $S = 24\sqrt{2}$. B. $S = 36\sqrt{2}$. C. $S = 36$. D. $S = 48\sqrt{2}$.

CÂU 11: Cho khối trụ có thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2. Mặt phẳng (P) qua trung điểm I của OO' và tạo với mặt phẳng chứa đáy góc 30° . Diện tích của thiết diện do (P) cắt khối trụ gần số nào sau đây nhất?

- A. 3,6. B. 3,8. C. 3,5. D. 3,7.

CÂU 12: Cho hình trụ (H) có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $\sqrt{10}$. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy, các cạnh AD và BC không là đường sinh của hình trụ. Độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ bằng?

- A. 10. B. 20. C. $\sqrt{10}$. D. 5.

CÂU 13: Một khối trụ có bán kính đáy 10 cm, thiết diện qua trục là một hình vuông. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng đi qua một đường kính đáy và tạo với đáy góc 45° để tạo ra một hình nêm (khối có thể tích nhỏ hơn trong hai khối tạo ra). Thể tích của hình nêm bằng.

- A. $\frac{2000}{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{2000}{9} \text{ cm}^3$. C. $\frac{1000}{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{1000}{9} \text{ cm}^3$.

CÂU 14: Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng α vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng α bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

- A. $2\sqrt{3}\pi$. B. $\frac{52\pi}{3}$. C. 52π . D. 13π .

CÂU 15: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' và có bán kính $r = 5$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = 6$. Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của đoạn OO' và tạo với đường thẳng OO' một góc 45° . Tính diện tích S của thiết diện tạo với mặt phẳng (α) và hình trụ.

- A. $S = 24\sqrt{2}$. B. $S = 36\sqrt{2}$. C. $S = 36$. D. $S = 48\sqrt{2}$.

CÂU 16: Cho hình trụ (T) có đáy là các đường tròn tâm O và O' , bán kính bằng 1, chiều cao hình trụ bằng 2. Các điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho góc $(OA, O'B) = 60^\circ$. Tính diện tích toàn phần của tứ diện $OAO'B$.

- A. $S = \frac{4 + \sqrt{19}}{2}$ B. $S = \frac{4 + \sqrt{19}}{4}$ C. $S = \frac{3 + \sqrt{19}}{2}$ D. $S = \frac{1 + 2\sqrt{19}}{2}$

CÂU 17: một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\angle DAC = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{16} \pi a^3$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{16} \pi a^3$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{32} \pi a^3$. D. $\frac{3\sqrt{2}}{48} \pi a^3$.

CÂU 18: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. C. $\frac{2R}{3}$. D. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

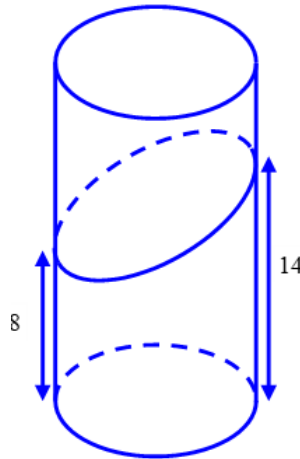
CÂU 19 : Cho hình trụ có đường cao bằng $8a$. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục hình trụ $3a$, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ bằng

- A. $80\pi a^2, 200\pi a^3$. B. $60\pi a^2, 200\pi a^3$. C. $80\pi a^2, 180\pi a^3$. D. $60\pi a^2, 180\pi a^3$.

CÂU 20: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AD = 6$ và góc CAD bằng 60° . Thể tích của khối trụ là

- A. 126π . B. 162π . C. 24π . D. 112π .

CÂU 21: Cắt một khối trụ cao 18cm bởi một mặt phẳng, ta được khối hình dưới đây. Biết rằng thiết diện là một elip, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8cm và 14cm. Tính tỉ số thể tích của hai khối được chia ra (khối nhỏ chia khối lớn).



- A. $\frac{2}{11}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{7}{11}$.

CÂU 22: Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O') , chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° , (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung. Tính độ dài dây cung đó theo R .

- A. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2R}{3}$.

CÂU 23: Cho hình trụ có chiều cao $h = 2$, bán kính đáy $r = 3$. Một mặt phẳng P không vuông góc với đáy của hình trụ, lần lượt cắt hai đáy theo đoạn giao tuyến AB và CD sao cho $ABCD$ là hình vuông. Tính diện tích S của hình vuông $ABCD$.

- A. $S = 12\pi$. B. $S = 12$. C. $S = 20$. D. $S = 20\pi$.

CÂU 24: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π , thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120° . Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

CÂU 25: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O' và có bán kính $r = 5$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = 6$. Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của đoạn OO' và tạo với đường thẳng OO' một góc 45° . Tính diện tích S của thiết diện tạo với mặt phẳng (α) và hình trụ.

- A. $S = 24\sqrt{2}$. B. $S = 36\sqrt{2}$. C. $S = 36$. D. $S = 48\sqrt{2}$.

CÂU 26: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2} \text{ cm}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6 \text{ cm}$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2 . Tính bán kính đáy của hình trụ.

- A. 5 cm B. $3\sqrt{2} \text{ cm}$ C. 4 cm D. $5\sqrt{2} \text{ cm}$

CÂU 27: Cho tứ diện $ABCD$ cạnh a . Diện tích xung quanh hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao tứ diện $ABCD$ là:

- A. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$

CÂU 28: Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

- A. $V = 27\sqrt{3}a^3$. B. $V = 81\sqrt{3}a^3$. C. $V = 24\sqrt{3}a^3$. D. $V = 36\sqrt{3}a^3$.

CÂU 29: Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện đi qua trục là hình vuông. Tính thể tích V của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

- A. $V = 2R^3$. B. $V = 5R^3$. C. $V = 3R^3$. D. $V = 4R^3$.

CÂU 30: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. C. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. D. $V = 3\pi a^2 h$.

CÂU 31: Cho tam giác ABC cân tại A , $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có M, N lần lượt thuộc cạnh AB, AC và P, Q thuộc cạnh BC . Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn MN để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.

- A. $MN = a$. B. $MN = 2a$. C. $MN = 5a$. D. $MN = 4a$.

CÂU 32: Cho hình trụ có tính chất: Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ.

- A. $16\pi \text{ cm}^3$. B. $8\pi \text{ cm}^3$. C. $32\pi \text{ cm}^3$. D. $64\pi \text{ cm}^3$.

CÂU 33: Một công ty sản xuất gỗ muốn thiết kế các thùng đựng hàng bên trong dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp có thể tích là $62,5\text{dm}^3$. Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất, S bằng

- A. $106,25\text{dm}^2$. B. 75dm^2 . C. $50\sqrt{5}\text{dm}^2$. D. 125dm^2 .

CÂU 34: Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người, tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- A. $(1.424.300; 1.424.400)$. B. $(1.424.000; 1.424.100)$.
C. $(1.424.200; 1.424.300)$. D. $(1.424.100; 1.424.200)$.

CÂU 35: Khi cắt mặt cầu $S(O, R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R = 1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

- A. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $r = \frac{\sqrt{6}}{2}, h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $r = \frac{\sqrt{6}}{3}, h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}, h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

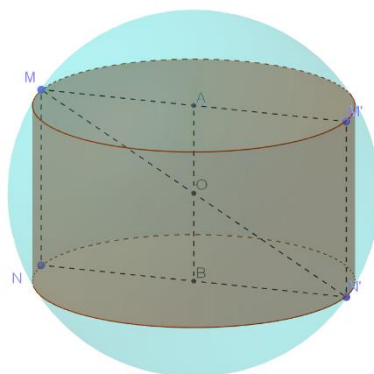
Gọi bán kính của hình trụ là R .

$$V = 4\pi \Leftrightarrow h \cdot \pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow h = \frac{4}{R^2} \quad (1).$$

$$S_{xq} = \frac{1}{3} S_{tp} \Leftrightarrow 2\pi Rh = \frac{1}{3} 2\pi R(R+h) \Leftrightarrow 3h = R+h \Leftrightarrow h = \frac{R}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{4}{R^2} = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2$

CÂU 2:



Đường cao hình trụ $h = R$ nên ta có bán kính của đáy hình trụ $r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \frac{R\sqrt{3}}{2} R = \pi R^2 \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = \pi R^2 \sqrt{3} + 2\pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{(3+2\sqrt{3})\pi R^2}{2}.$$

CÂU 3: Chọn A

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = \pi \cdot 6 \cdot 25 = 150\pi$.

Khi lăn sơn quay một vòng sẽ quét được một diện tích bằng diện tích xung quanh của hình trụ. Do đó trục lăn quay 10 vòng sẽ quét được diện tích là $S = 10 \cdot S_{xq} = 1500\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

CÂU 4 : Chọn B

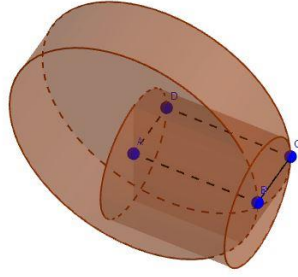
Ta có $EA = 2ED = 2a$, $FB = 2FC = 2a$, $EF = AB = 2a$.

Khi quay quanh AB đường gấp khúc $AEFB$ sinh ra hình trụ có bán kính đáy $R_1 = EA = 2a$, chiều cao $h = 2a \Rightarrow$ Diện tích toàn phần của khối trụ này là: $S_1 = 2\pi \cdot 2a \cdot 2a + 2\pi (2a)^2 = 16\pi a^2$.

Khi quay quanh AB đường gấp khúc $ADCB$ sinh ra hình trụ có bán kính đáy $R_2 = AD = 3a$, chiều cao $h = 2a \Rightarrow$ diện tích toàn phần của khối trụ này là: $S_2 = 2\pi \cdot 2a \cdot 3a + 2\pi (3a)^2 = 30\pi a^2$.

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{15}.$$

CÂU 5: Chọn B



Gọi $AB = x$ điều kiện $x > 1,5$.

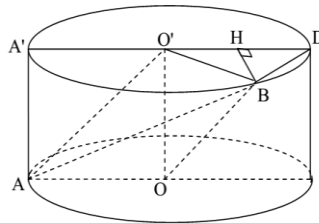
Suy ra $AD = 3 - x$.

Ta có: $x(3 - x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(n) \\ x = 1(l) \end{cases}$.

Ta được: $V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$, $V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

CÂU 6:

Chọn B



Kẻ đường sinh AA' . Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng $A'D$.

Do $BH \perp A'D, BH \perp AA' \Rightarrow BH \perp (AOO'A')$.

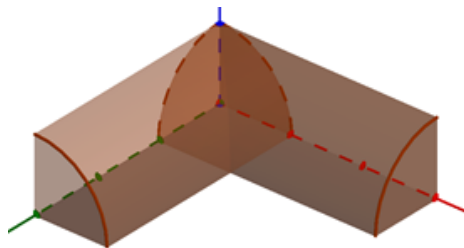
$$A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a.$$

$$\Delta O'BD \text{ đều nên } BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

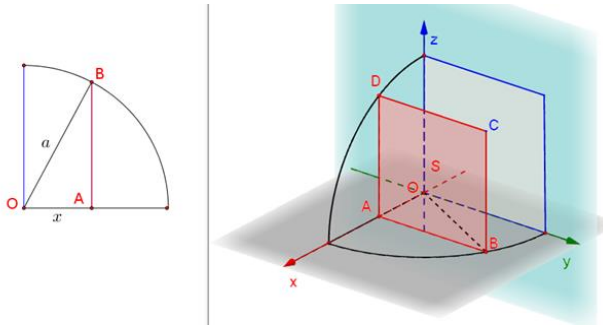
$$S_{\Delta AOO'} = \frac{a^2}{2}. \text{ Suy ra thể tích khối tứ diện } OO'AB \text{ là: } V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$$

CÂU 7: Chọn D

Cách 1. Ta xét $\frac{1}{8}$ phần giao của hai trụ như hình.



Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 4 , thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = 4^2 - x^2$.

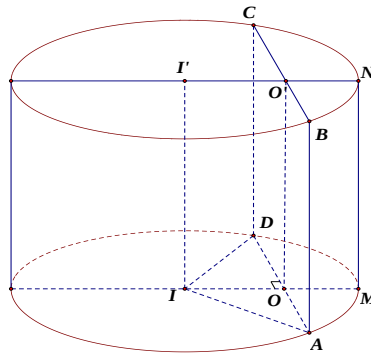
Thể tích khối (H) là $\int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 (16 - x^2) dx = \frac{128}{3}$. Vậy thể tích phần giao là $\frac{1024}{3}$.

Cách 2. Dùng công thức tổng quát giao hai trụ $V = \frac{16}{3} R^3 = \frac{1024}{3}$.

CÂU 8: Chọn A

Ta có $V_{nem} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \tan 45^\circ = \frac{2000}{3} \text{ cm}^3$.

CÂU 9: Chọn C



Dựng các dữ kiện bài toán theo hình vẽ trên.

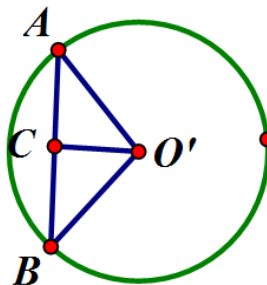
Mặt phẳng α vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $16 \Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng 4 .

Khoảng cách từ tâm I đáy hình trụ đến mặt phẳng α bằng $3 \Rightarrow IO = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Vậy thể tích khối trụ trên là: $V = \pi \cdot \sqrt{13}^2 \cdot 4 = 52\pi \text{ đvtt}$.

CÂU 10: Chọn D



Gọi I là trung điểm của đoạn OO' .

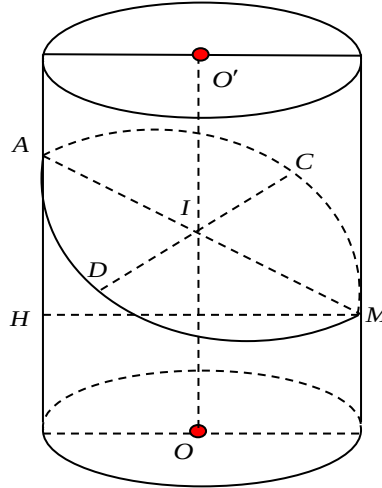
Do $IO' = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ nên mặt phẳng cắt hình trụ theo một hình chữ nhật.

Ta có $OC = O'I' \cdot \tan 45^\circ = 3$; $O'A = r = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$ Nên chiều rộng của nó là $AB = 8$.

Chiều dài của hình chữ nhật là: $2IC = 2\sqrt{O'C^2 + O'I^2} = 2\sqrt{3^2 + 3^2} = 6\sqrt{2}$.

Vậy diện tích là: $6\sqrt{2} \cdot 8 = 48\sqrt{2}$.

CÂU 11: Chọn A



Do thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2 nên chiều cao của hình trụ là $h = 2$ và bán kính đáy là $R = 1$.

Giả sử giao tuyến của mặt phẳng (P) và đáy chứa tâm O là đường thẳng d . Gọi E là hình chiếu của O trên d . Khi đó góc giữa (P) và mặt phẳng chứa đáy là góc $OEI = 30^\circ$.

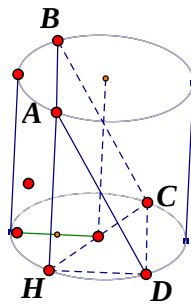
Trong tam giác vuông IOE có $\tan OEI = \frac{OI}{OE} \Rightarrow OE = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} > 1$. Do đó điểm E nằm ngoài

đường tròn đáy nên thiết diện là Elip. Trong tam giác vuông AHM có.

$$\cos AMH = \frac{HM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ Hay } 2a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Mà } CD = 2b = 2 \Rightarrow b = 1.$$

Thiết diện là hình elip nên diện tích bằng $\pi ab = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3,62$.

CÂU 12: Chọn D



Gọi kích thước của hình vuông là a .

Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Ta có.

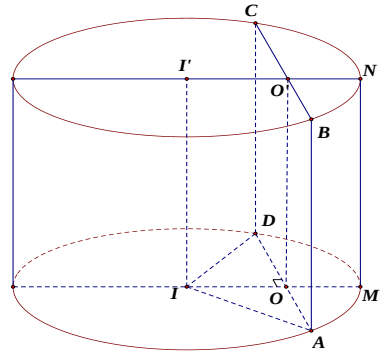
$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD \text{ nên } HC \text{ là đường kính của đường tròn đáy.}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} DH^2 + DC^2 = HC^2 \\ DH^2 + AH^2 = AD^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DH^2 + a^2 = 40 \\ DH^2 + 10 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5.$$

CÂU 13: Chọn A

$$\text{Ta có } V_{\text{nem}} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha = \frac{2}{3} \cdot 10^3 \tan 45^\circ = \frac{2000}{3} \text{ cm}^3.$$

CÂU 14: Chọn C



Dựng các dữ kiện bài toán theo hình vẽ trên.

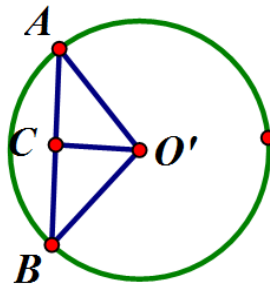
Mặt phẳng α vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $16 \Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng 4 .

Khoảng cách từ tâm I đáy hình trụ đến mặt phẳng α bằng $3 \Rightarrow IO = 3$.

$$\text{Ta có } IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối trụ trên là: } V = \pi \cdot \sqrt{13}^2 \cdot 4 = 52\pi \text{ đvtt}.$$

CÂU 15: Chọn D



Gọi I là trung điểm của đoạn OO' .

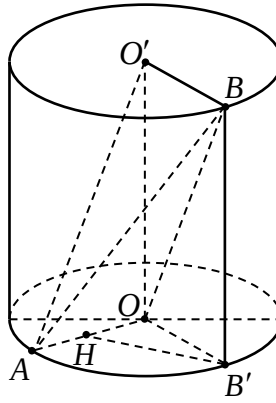
Do $IO' = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ nên mặt phẳng cắt hình trụ theo một hình chữ nhật.

Ta có $OC = O'I \cdot \tan 45^\circ = 3$; $O'A = r = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$ Nên chiều rộng của nó là $AB = 8$.

$$\text{Chiều dài của hình chữ nhật là: } 2IC = 2\sqrt{O'C^2 + O'I^2} = 2\sqrt{3^2 + 3^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích là: } 6\sqrt{2} \cdot 8 = 48\sqrt{2}.$$

CÂU 16: Chọn A



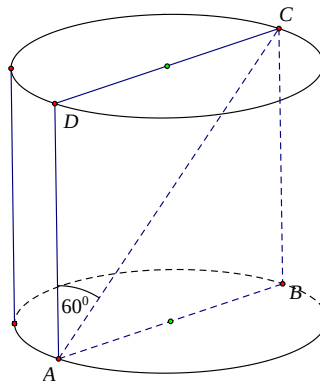
Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) , khi đó $(OA, O'B) = (OA, OB') = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB'$ là tam giác đều cạnh 1.

Gọi H là hình chiếu của B' trên OA thì $HB' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $BH = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện $OA'O'B$ thì

$$S = S_{\triangle AOO'} + S_{\triangle AO'B} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOO'} = 2(S_{\triangle AOO'} + S_{\triangle AOB}) = 2\left(\frac{1}{2}OA.OO' + \frac{1}{2}OA.BH\right) \\ = 2\left(\frac{1}{2}.1.2 + \frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{19}}{2}\right) = \frac{4 + \sqrt{19}}{2}.$$

CÂU 17: Chọn B



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ADC vuông tại D và $BD = AC = a\sqrt{2}$. Xét tam giác vuông ADC có

$$\sin DAC = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow DC = AC \sin DAC \Leftrightarrow DC = a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow DC = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \text{bán kính mặt đáy}$$

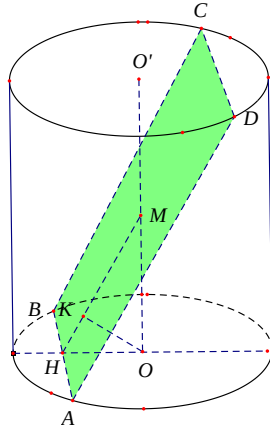
$$\text{của hình trụ là } r = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\cos DAC = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = AC \cos DAC \Leftrightarrow AD = a\sqrt{2} \cos 60^\circ \Leftrightarrow AD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{chiều cao của hình}$$

$$\text{trụ là } h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối trụ là } V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

CÂU 18: Chọn A



Gọi M là trung điểm của OO' . Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên $AB \Rightarrow AB \perp (MHO)$.

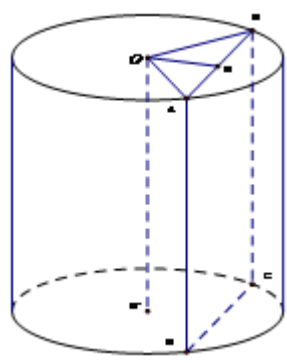
Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK \perp MH$, ($K \in MH$) khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $OMK = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông MHO ta có $HO = OM \tan 30^\circ = R \tan 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông AHO ta có $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

CÂU 19 :



Thiết diện $ABCD$ là hình vuông có cạnh là $8a$ ($h = 8a$).

Khoảng cách từ trục đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $d = 3a$

Suy ra bán kính đường tròn đáy $r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = 5$

Vậy $S_{xq} = 2\pi rh = 80\pi a^2$, $V_{tr} = \pi r^2 h = 200\pi a^3$.

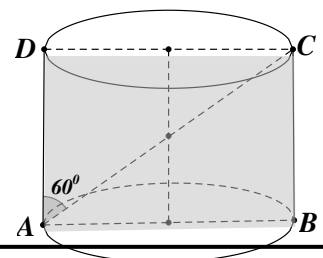
CÂU 20: Chọn B.

Ta có xét tam giác ACD có:

$\tan DAC = \frac{DC}{AD} \Rightarrow DC = AD \cdot \tan DAC = 6 \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$

Vì DC là đường kính của khối trụ nên suy ra bán kính khối trụ là

$R = \frac{1}{2}DC = 3\sqrt{3}$



$\Rightarrow$ diện tích đáy khối trụ là $S = \pi R^2 = \pi(3\sqrt{3})^2 = 27\pi$

Suy ra thể tích khối trụ là $V = h.S = 6.27\pi = 162\pi$.

CÂU 21: Chọn D

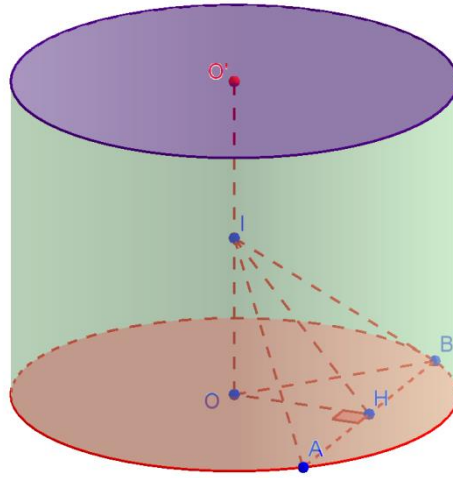
Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nhỏ và khối lớn.

Ta có thể tích khối trụ là $V = \pi.R^2.18$ (với R là bán kính khối trụ).

Thể tích $V_2 = \frac{\pi.R^2(8+14)}{2} = 11\pi R^2$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{18\pi R^2 - 11\pi R^2}{11\pi R^2} = \frac{7}{11}$.

CÂU 22: Chọn B



Dựng $OH \perp AB \Rightarrow AB \perp (OIH) \Rightarrow (OIH) \perp (IAB)$

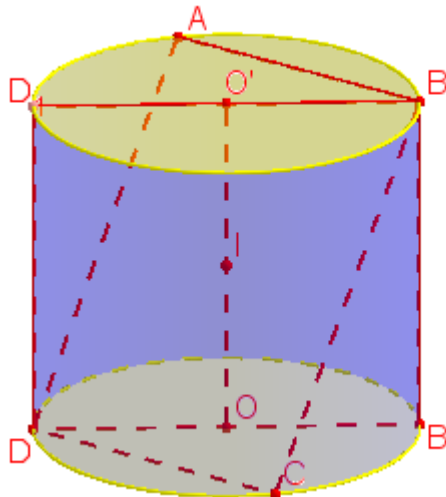
$\Rightarrow IH$ là hình chiếu của OI lên (IAB)

Theo bài ta được $OIH = 30^\circ$

Xét tam giác vuông OIH vuông tại $O \Rightarrow OH = OI \tan 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác OHA vuông tại $H \Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \frac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

CÂU 23: Chọn C



Kẻ đường sinh BB' của hình trụ. Đặt độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là $x, x > 0$.

Do $\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CD \perp B'C \Rightarrow \triangle B'CD$ vuông tại C . Khi đó, $B'D$ là đường kính của đường

Tròn O' . Xét $\triangle B'CD$ vuông tại C

$$\Rightarrow B'D^2 = CD^2 + CB'^2 \Rightarrow 4r^2 = x^2 + CB'^2 \quad (1)$$

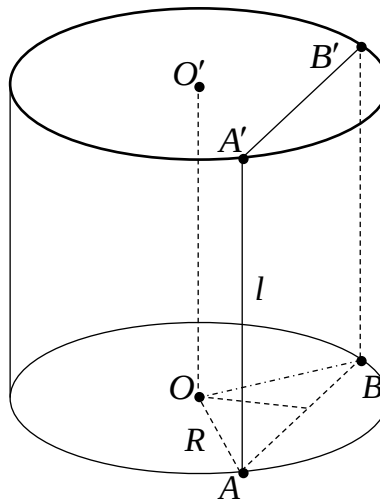
Xét tam giác $\triangle BB'C$ vuông tại B

$$\Rightarrow BC^2 = BB'^2 + CB'^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + CB'^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x^2 = \frac{4r^2 + h^2}{2} = 20.$$

Suy ra diện tích hình vuông $ABCD$ là $S = 20$.

CÂU 24: Chọn C



Gọi R, h, l lần lượt là bán kính, chiều cao, đường sinh của hình trụ.

Ta có $S_{xq} = 4\pi \Leftrightarrow 2\pi.R.l = 4\pi \Leftrightarrow R.l = 2$.

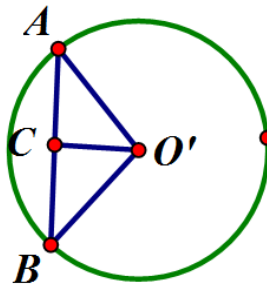
Giả sử AB là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120° .

Ta có $ABB'A'$ là hình chữ nhật có $AA' = h = l$.

Xét tam giác OAB cân tại O , $OA = OB = R$, $AOB = 120^\circ \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

$$S_{ABB'A'} = AB.AA' = R\sqrt{3}.l = R.l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

CÂU 25: Chọn D



Gọi I là trung điểm của đoạn OO' .

Do $IO' = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ nên mặt phẳng cắt hình trụ theo một hình chữ nhật.

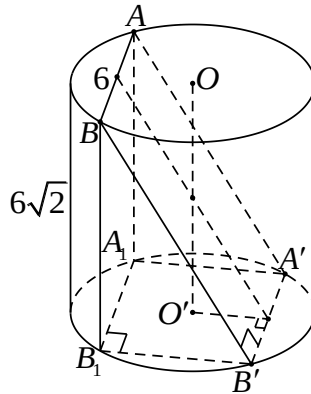
Ta có $OC = OI' \cdot \tan 45^\circ = 3$; $O'A = r = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$ Nên chiều rộng của nó là $AB = 8$.

Chiều dài của hình chữ nhật là: $2IC = 2\sqrt{O'C^2 + O'I^2} = 2\sqrt{3^2 + 3^2} = 6\sqrt{2}$.

Vậy diện tích là: $6\sqrt{2} \cdot 8 = 48\sqrt{2}$.

CÂU 26: Chọn C

Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).



Vì $AB = A'B'$ nên $(ABB'A')$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' \Leftrightarrow 60 = 6 \cdot AA' \Rightarrow AA' = 10 (cm)$.

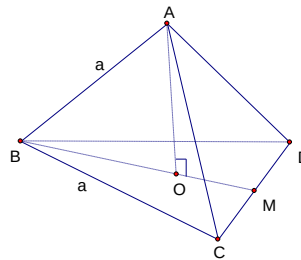
Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6 (cm)$,

$$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7} (cm)$$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4 (cm)$.

CÂU 27: Chọn A

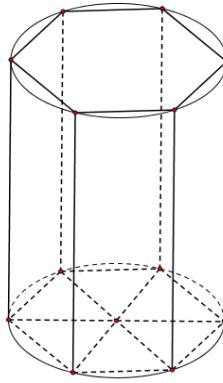


$$\text{Ta có } R = OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$l = OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình trụ là } S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}.$$

CÂU 28: Chọn B



Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi r \cdot 2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a$

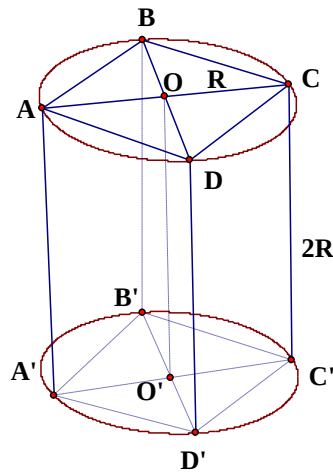
Lăng trụ lục giác đều có đường cao $h = l = 6a$

Lục giác đều nội tiếp đường tròn có cạnh bằng bán kính của đường tròn

Suy ra diện tích lục giác đều $S = 6 \cdot \frac{(3a)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích $V = S \cdot h = 81\sqrt{3}a^3$.

CÂU 29: Chọn D



Do thiết diện quăngtục là hình vuông nên đường sinh của hình trụ là: $l = 2R = h$.

Do lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ, nên đáy của lăng trụ là hình vuông có đường chéo:

$$AC = 2R = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{2} \Rightarrow V_{LT} = Bh = (R\sqrt{2})^2 2R = 4R^3.$$

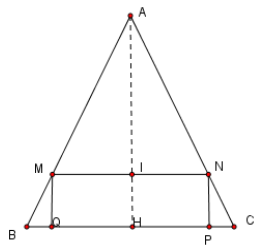
CÂU 30: Chọn C

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao khối trụ bằng chiều cao khối lăng trụ bằng h .

$$\text{Thể tích khối trụ là: } V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi \left(\frac{\sqrt{3}a}{3} \right)^2 h = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

CÂU 31: Chọn D



Ta có: $BH = 3a$; $AH = 4a$.

Đặt $HQ = x \Rightarrow BQ = 3a - x$ ($0 < x < 3a$).

Ta có: $\frac{MQ}{AH} = \frac{BQ}{BH} \Rightarrow MQ = \frac{4(3-x)}{3}$.

Khi đó: $V_T = \pi \cdot x^2 \cdot \frac{4(3-x)}{3} = 4\pi \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)$ ($0 < x < 3a$).

Xét hàm số $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$ ($0 < x < 3a$).

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2a \Rightarrow MN = 4a$.

CÂU 32: Chọn B

Giả sử hình chữ nhật có chiều dài a ($0 < a < 6$), chiều rộng b ($0 < b < 6$).

Ta có chiều cao hình trụ bằng a , bán kính hình trụ bằng $\frac{b}{2}$.

Theo giả thiết ta có $a + b = 6 \Rightarrow a = 6 - b$. Ta có $V = B.h = \pi \frac{b^2}{4} (6 - b)$.

Đặt $f(b) = \frac{\pi}{4} (6b^2 - b^3) \Rightarrow f'(b) = \frac{\pi}{4} (12b - 3b^2) \Rightarrow f'(b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 4 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $f(b)$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = 4 \Rightarrow a = 2$. Vậy $V = 8\pi \text{ cm}^3$.

CÂU 33: Chọn B

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ.

Theo bài ta có chiều cao của lăng trụ là $\frac{62,5}{a^2}$. Suy ra

$S = 4 \cdot \frac{62,5}{a^2} \cdot a + a^2 = \frac{250}{a} + a^2 = \frac{125}{a} + \frac{125}{a} + a^2 \geq 3\sqrt{\frac{125}{a} \cdot \frac{125}{a} \cdot a^2} = 75$. Dấu bằng xảy ra khi

$a = \sqrt[3]{125} = 5$. Vậy S là nhỏ nhất bằng 75.

CÂU 34: Chọn C

Gọi S_1 là dân số năm 2015, ta có $S_1 = 1.153.600$, $N = 5$, $A = 1.038.229$

Ta có: $S_1 = Ae^{N.r} \Rightarrow e^{N.r} = \frac{S_1}{A} \Rightarrow r = \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{N}$

Gọi S_2 là dân số đầu năm 2025, ta có $S_2 = Ae^{15.r} = 1.038.229 \cdot e^{15 \cdot \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{5}} \approx 1.424.227,71$

CÂU 35: Chọn C

Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu. Ta có: $h^2 + r^2 = R^2$ ($0 < h \leq R = 1$) $\Rightarrow r^2 = 1 - h^2$

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi (1 - h^2) h = f(h) \Rightarrow f'(h) = \pi (1 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy: $\text{Max}_{(0;1]} V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

CHỦ ĐỀ 3 : KHỐI CẦU

VÍ DỤ 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Kẻ $EK \perp SD$ tại K . Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K là:

A. $R = \frac{1}{2}a$.

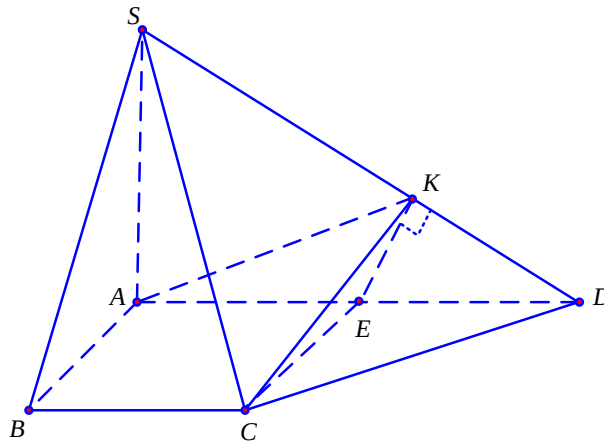
B. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

C. $R = a$.

D. $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Lời giải

Chọn C



* Vì E là trung điểm của AD , $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và $AB = BC = a$, $AD = 2a$ nên $AB = BC = CE = AE = ED = a$ và $CE \parallel AB$. Khi đó $CE \perp AD$, $CE \perp SA$ nên $CE \perp SE$ hay $\angle SEC = 90^\circ$ và $CE \perp SD$. Mặt khác $EK \perp SD$ do đó $SD \perp (CEK)$ suy ra $CK \perp SD$ hay $\angle SCK = 90^\circ$.

*Ta có $CB \perp AB$, $CB \perp SA$ nên $CB \perp SB$ hay $\angle SBC = 90^\circ$. Ta cũng có $CA \perp SA$ nên $\angle SAC = 90^\circ$

Vậy các góc $\angle SEC$, $\angle SCK$, $\angle SBC$, $\angle SAC$ cùng nhìn cạnh SC dưới một góc không đổi 90° nên các điểm S, A, B, C, E, K nằm trên mặt cầu tâm I là trung điểm của SC bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$; $SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = 2a$ suy ra $R = a$.

VÍ DỤ 2: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB cân tại O , $OA = OB = 2a$, $\angle AOB = 120^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại O lấy hai điểm C, D nằm về hai phía của mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC vuông tại C và tam giác ABD đều. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

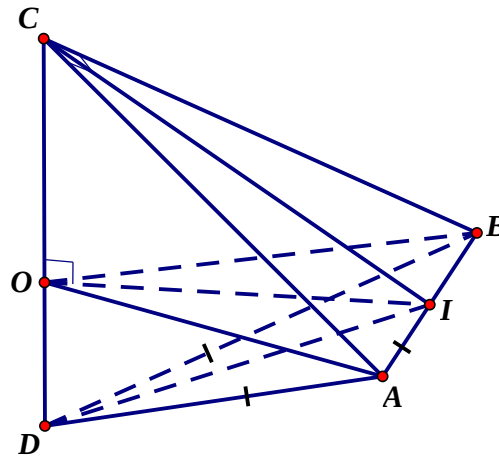
B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{5a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB , ta có $AI = OA \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow AB = 2AI = 2a\sqrt{3}, \quad OI = OA \cdot \cos 60^\circ = a, \quad CI = \frac{AB}{2} = a\sqrt{3}, \quad DI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3a.$$

$$\text{Cạnh } OC = \sqrt{CI^2 - OI^2} = a\sqrt{2}, \quad OD = \sqrt{DI^2 - OI^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow CD = CO + OD = 3a\sqrt{2}.$$

Do (CID) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện $ABCD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác CID là đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ được tính theo công thức

$$R = \frac{CD \cdot CI \cdot DI}{4S_{\triangle CID}} = \frac{CD \cdot CI \cdot DI}{2CD \cdot OI} = \frac{3a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

VÍ DỤ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB , SC , SD lần lượt tại các điểm M , N , P . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}.$

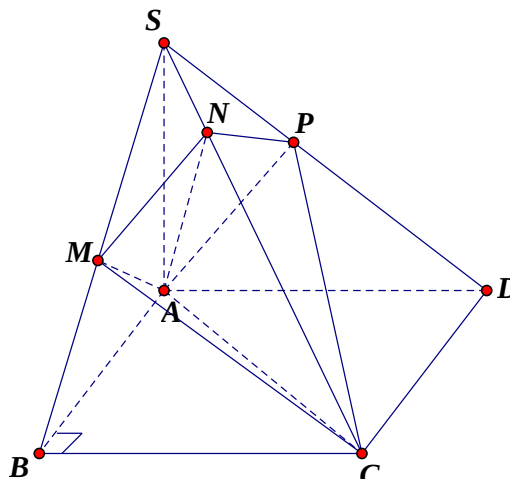
B. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}.$

C. $V = \frac{108\pi}{3}.$

D. $V = \frac{125\pi}{6}.$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $CB \perp (SAD)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp CB$ (1) $(\alpha) \perp SC$, $AM \subset (\alpha) \Rightarrow AM \perp SC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \angle AMC = 90^\circ$. Chứng minh tương tự ta có $\angle APC = 90^\circ$

Có $AN \perp SC \Rightarrow \angle ANC = 90^\circ$ Ta có: $\angle AMC = \angle APC = \angle ANC = 90^\circ$

$\Rightarrow$ khối cầu đường kính AC là khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

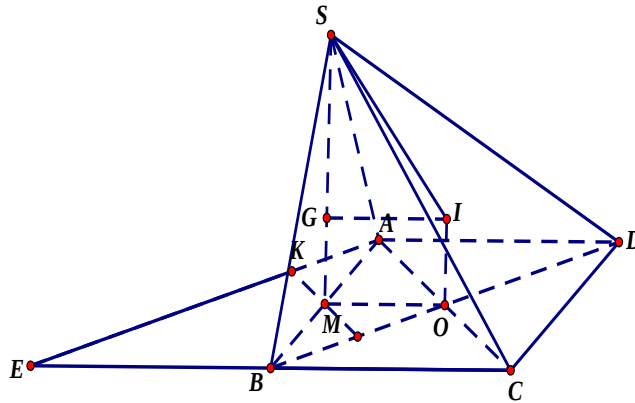
Bán kính cầu này là $r = \frac{AC}{2} = 2$. Thể tích cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$

VÍ DỤ 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích $84\pi (\text{cm}^2)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD .

- A. $\frac{2\sqrt{21}}{7} (\text{cm})$. B. $\frac{3\sqrt{21}}{7} (\text{cm})$. C. $\frac{\sqrt{21}}{7} (\text{cm})$. D. $\frac{6\sqrt{21}}{7} (\text{cm})$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AB và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB , O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OM \perp (SAB)$. Dựng trục của hình vuông $ABCD$ và trục tam giác SAB , khi đó chúng đồng phẳng và cắt nhau tại I tức là OI , GI là các trục hình vuông $ABCD$ và trục tam giác SAB .

Bán kính mặt cầu là $R = SI$. Ta có $4\pi R^2 = 84\pi (\text{cm}^2) \Leftrightarrow R = \sqrt{21} (\text{cm})$. Đặt $AB = x (\text{cm})$

Trong tam giác vuông SGI ta có $SI^2 = SG^2 + GI^2$ (1), ta có $GI = \frac{x}{2}$, $SG = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ thay vào (1) tính được $x = 6$.

Dựng hình bình hành $ABDE$. Khoảng cách d giữa BD và SA là $d = d(BD, (SAE))$
 $d = d(B, (SAE)) = 2d(M, (SAE))$. Kẻ $MK \perp AE$ ta có $(SAE) \perp (SMK)$.

$d(M, (SAE)) = d(M, SK) = \frac{SM \cdot MK}{\sqrt{SM^2 + MK^2}}$ (2). Ta có $SM = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $MK = \frac{x\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Thay các giá trị vào (2) tính được $d(M, (SAE)) = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa SA và BD là $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.

VÍ DỤ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $BAC = 120^\circ$, tìm bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

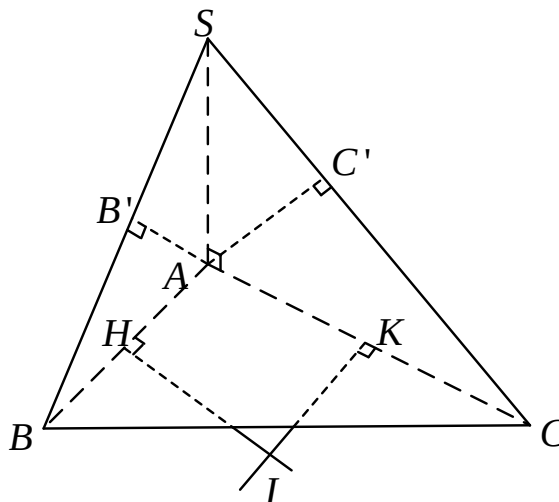
B. $R = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Xét tam giác ABC có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AC . Kẻ IH, IK lần lượt là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB' và $\triangle ACC'$.

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ và bán kính mặt cầu là $R = IA$

Mặt khác: I cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\Rightarrow BC = 2R.\sin 120^\circ \Rightarrow R = \frac{BC}{2.\sin 120^\circ} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mỗi cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{3a}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

CÂU 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $SC = 2a$ và $\angle SCA = 30^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

- A. $R = a\sqrt{3}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $R = a$. D. $R = \frac{a}{2}$.

CÂU 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$. B. $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. C. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$. D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

CÂU 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 2a$. Mặt bên (SAB) vuông góc với đáy, $\angle ASB = 60^\circ$, $SB = a$. Gọi (S) là mặt cầu tâm B và tiếp xúc với (SAC) . Tính bán kính r của mặt cầu (S) .

- A. $r = 2a$. B. $r = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. C. $r = 2a\sqrt{3}$. D. $r = a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

CÂU 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh 1, tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

- A. $R = \frac{\sqrt{93}}{12}$. B. $R = \frac{\sqrt{37}}{6}$. C. $R = \frac{\sqrt{29}}{8}$. D. $R = \frac{5\sqrt{3}}{12}$.

CÂU 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

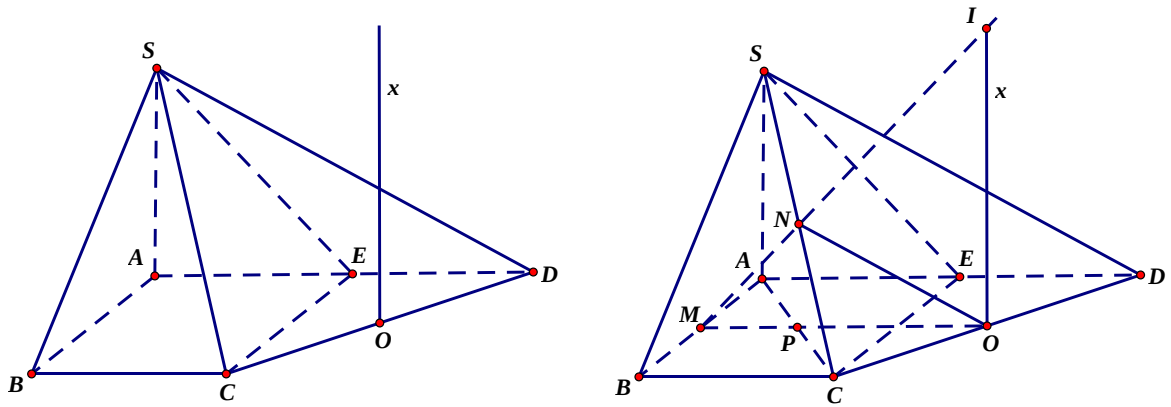
- A. $R = \frac{\sqrt{7}}{4}$. B. $R = \frac{\sqrt{21}}{6}$. C. $R = \frac{\sqrt{11}}{4}$. D. $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

CÂU 7: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{35}}{7}$. C. $R = \frac{a\sqrt{39}}{7}$. D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{7}$.

CÂU 8: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ B. $R = a\sqrt{7}$ C. $R = \frac{a\sqrt{11}}{2}$ D. $R = a\sqrt{11}$



CÂU 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{102}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{31}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

CÂU 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{102}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{31}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

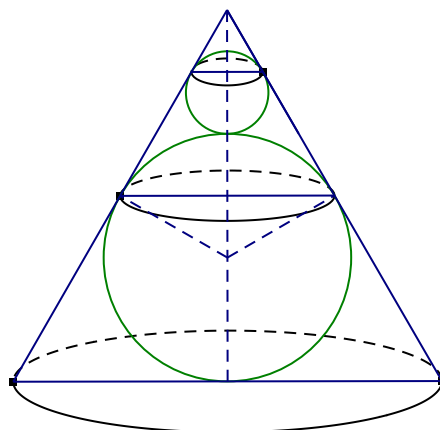
CÂU 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{3}a, AD = a$, $\triangle SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = 5\pi a^2$. B. $S = 10\pi a^2$. C. $S = 4\pi a^2$. D. $S = 2\pi a^2$.

CÂU 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B . Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. B. $12\pi a^2$. C. $8\pi a^2$. D. $2\pi a^2$.

CÂU 13: Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo ra một hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho hai mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của hình nón (hình vẽ).



Biết rằng chiều cao của hình nón bằng 9 cm . Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ thủy tinh, tổng thể tích của hai khối cầu bằng

- A. $\frac{112\pi}{3}\text{cm}^3$. B. $\frac{40\pi}{3}\text{cm}^3$. C. $\frac{38\pi}{3}\text{cm}^3$. D. $\frac{100\pi}{3}\text{cm}^3$.

CÂU 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. B. $V = \frac{1}{3}\pi a^3$. C. $V = \frac{2}{3}\pi a^3$. D. $V = \pi a^3$.

CÂU 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, góc giữa đường thẳng SC và đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- A. $V = \sqrt{6}\pi a^3$. B. $V = \frac{10\pi a^3}{3}$.
C. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{5\sqrt{10}\pi a^3}{3}$.

CÂU 16: Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = 3, AC = 4, BC = 5$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích của khối cầu (S) bằng

- A. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{2}$. B. ABD . C. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$. D. $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

CÂU 17 : Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều, đường cao SH với H nằm trong ΔABC và $2SH = BC$, (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Biết có một điểm O nằm trên đường cao SH sao cho $d(O; AB) = d(O; AC) = d(O; (SBC)) = 1$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $\frac{256\pi}{81}$. B. $\frac{125\pi}{162}$. C. $\frac{500\pi}{81}$. D. $\frac{343\pi}{48}$.

CÂU 18 : Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. B. $V = \frac{5\pi}{3}$. C. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. D. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$.

CÂU 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của khối trụ ngoại tiếp, khối cầu nội tiếp, khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị $P = \frac{V_1 + V_2}{V_3}$.

- A. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $P = \frac{4\sqrt{3}}{9}$. C. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $P = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp hình trụ cho trước, khoảng cách từ tâm hình trụ đến $(ABB'A')$ là 3, góc giữa DB' và $(ABB'A')$ bằng 30° . Biết bán kính hình trụ bằng 5, tỉ số thể tích khối hộp và khối cầu ngoại tiếp hình hộp là?

- A. $\frac{\sqrt{12}}{3\pi}$. B. $\frac{10}{3\pi}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{3\pi}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{3\pi}$.

CÂU 21: Khối cầu (S) có tâm, đường kính $AB = 2R$. Cắt (S) bởi một mặt phẳng vuông góc với đường kính AB ta được thiết diện là hình tròn (C) rồi bỏ đi phần lớn hơn. Tính thể tích phần còn lại theo R , biết hình nón đỉnh I và đáy là hình tròn (C) có góc ở đỉnh bằng 120° .

A. $\frac{5\pi R^3}{24}$

B. $\frac{5\pi R^3}{8}$

C. $\frac{5\pi R^3}{32}$

D. $\frac{5\pi R^3}{12}$

CÂU 22: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác cân với $BAC = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết thể tích của tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{a^3}{16}$.

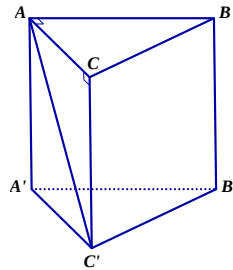
A. $R = \frac{\sqrt{91}a}{8}$

B. $R = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

C. $R = \frac{13a}{2}$

D. $R = 6a$

CÂU 23: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng



A. $24\pi a^2$

B. $6\pi a^2$

C. $4\pi a^2$

D. $3\pi a^2$

CÂU 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của BC , $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BHD$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$

CÂU 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC . Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKB$ là:

A. $\frac{\pi a^3}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

C. $\sqrt{2}\pi a^3$

D. $\frac{\pi a^3}{6}$

CÂU 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

A. $S = 4\pi a^2$

B. $S = 8\pi a^2$

C. $S = 12\pi a^2$

D. $S = 16\pi a^2$

CÂU 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết rằng $AB = a$, và $ASB = 60^\circ$. Tính diện tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$

B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$

C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$

D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$

CÂU 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho biết $ASB = 120^\circ$.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. B. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. C. $V = \frac{5\pi}{3}$. D. $V = \frac{13\sqrt{78}\pi}{27}$.

CÂU 29: Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại đỉnh A , $AB = 1(\text{cm})$, $AC = \sqrt{3}(\text{cm})$. Tam giác SAB , SAC lần lượt vuông tại B và C . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{5\pi}{4}(\text{cm}^2)$. B. $20\pi(\text{cm}^2)$. C. $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}(\text{cm}^2)$. D. $5\pi(\text{cm}^2)$.

CÂU 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = 3$, $BC = 4$. Hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, đường thẳng SC hợp với mặt phẳng đáy một góc 45° . Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $V = \frac{5\pi\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{25\pi\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $AHB = 120^\circ$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAB$, biết $SH = 4\sqrt{3}$.

A. $R = \sqrt{5}$. B. $R = 3\sqrt{5}$. C. $R = \sqrt{15}$. D. $R = 2\sqrt{3}$.

CÂU 32: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh $2a$, tâm O , mặt bên (SAB) là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

A. $R = \frac{a\sqrt{21}}{3}$ B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

CÂU 33: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng $AB'C'$ tạo với mặt đáy góc 60° và điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{85a}{108}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{31a}{36}$.

CÂU 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy là 45° . Gọi N là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SA = 4SN$, h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là

A. $8R = 5h$. B. $\sqrt{5}R = 4h$. C. $2R = 5h$. D. $R = \frac{4}{5\sqrt{5}}h$.

CÂU 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB , SC , SD lần lượt tại các điểm M , N , P . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{125\pi}{6}.$

B. $V = \frac{32\pi}{3}.$

C. $V = \frac{108\pi}{3}.$

D. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}.$

CÂU 36 : Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng 30° . Gọi H là trung điểm của AB . Tính theo a bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC..$

A. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$

C. $R = \frac{a\sqrt{30}}{6}.$

D. $R = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$

CÂU 37 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB = 4$, $BC = CD = DA = 2$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = 2\sqrt{3}.$

B. $R = 2.$

C. $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

D. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

CÂU 38: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là.

A. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{2}.$

B. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{8}.$

C. $R = a \cdot \sqrt{118}.$

D. $R = a \cdot \frac{\sqrt{118}}{4}.$

CÂU 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB , SC , SD lần lượt tại B' , C' , D' . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B.B'C'D'$.

A. $14\pi a^2.$

B. $3\pi a^2.$

C. $7\pi a^2.$

D. $5\pi a^2.$

CÂU 40: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Thể tích của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ là

A. $\frac{343\pi a^3}{432}.$

B. $\frac{49\pi a^3}{108}.$

C. $\frac{343\pi a^3}{5184}.$

D. $\frac{343\pi a^3}{1296}.$

CÂU 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{113\pi a^3 \sqrt{113}}{84}.$

B. $V = \frac{113\pi a^3 \sqrt{113}}{48}.$

C. $V = \frac{113\pi a^3}{64}.$

D. $V = \frac{113\pi a^3 \sqrt{113}}{384}.$

CÂU 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AD , $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi a^2}{3}.$

B. $\frac{4\pi a^3}{3}.$

C. $\frac{16\pi a^2}{3}.$

D. $\frac{16\pi a^2}{9}.$

CÂU 43 : Cho tứ diện đều $ABCD$ có một đường cao AA_1 . Gọi I là trung điểm AA_1 . Mặt phẳng (BCI) chia tứ diện $ABCD$ thành hai tứ diện. Tính tỉ số hai bán kính của hai mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

- A. $\sqrt{\frac{43}{51}}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\sqrt{\frac{48}{153}}$

CÂU 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Tính theo a bán kính R của mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1 .

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

CÂU 45 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$ tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{31}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{102}}{6}$. D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

CÂU 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = 2a$. Mặt bên $(SAB), (SCA)$ lần lượt là các tam giác vuông tại B, C . Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

- A. $R = a\sqrt{2}$. B. $R = a$. C. $R = \frac{3a}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

CÂU 47: Cho lăng trụ đứng có chiều cao bằng h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A, B, C, D di động. Gọi I là giao của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA \cdot IC = IB \cdot ID = h^2$. Tính giá trị nhỏ nhất bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

- A. $2h$. B. $\frac{h\sqrt{5}}{2}$. C. h . D. $\frac{h\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AC = b, AB = c, BAC = \alpha$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC'B'$ theo b, c, α .

- A. $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$. B. $R = 2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.
C. $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin 2\alpha}$. D. $R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.

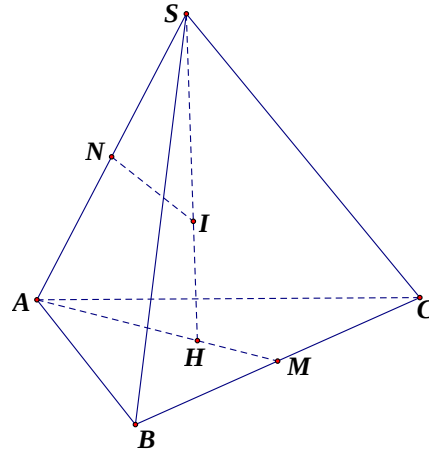
CÂU 49: Bề mặt một quả bóng được ghép từ 12 miếng da hình ngũ giác đều và 20 miếng da hình lục giác đều cạnh 4,5cm. Biết rằng giá thành của những miếng da này là 150 đồng/cm². Tính giá thành của miếng da dùng để làm quả bóng (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị)?



- A. 121500 đồng B. 220545 đồng C. 252533 đồng D. 199218 đồng

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn A

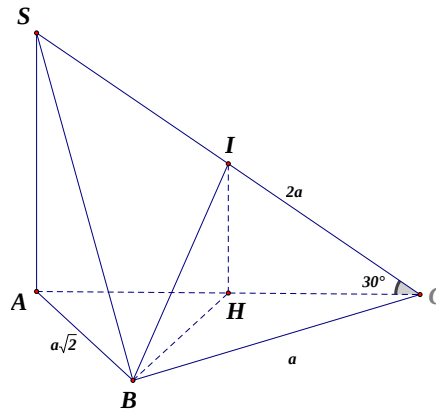


Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC , khi đó $SH \perp (ABC)$ và là trục đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

Gọi N là trung điểm SA , mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại I . Khi đó $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = SI = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{\frac{1}{2} SA^2}{\sqrt{SA^2 - AH^2}} = \frac{1}{2} \frac{(a\sqrt{2})^2}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

CÂU 2: Chọn C



Ta có:

- $AC = SC \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.
- $AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông ở B .

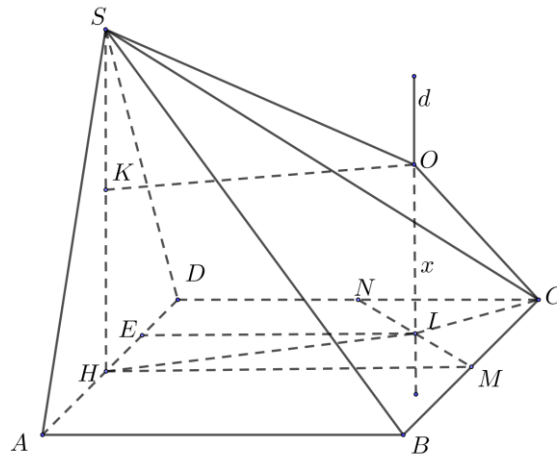
Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AC, SC . Khi đó ta có:

- H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- $IH \perp (ABC)$.

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$. Suy ra $R = \frac{1}{2} SC = a$.

Vậy $R = a$.

CÂU 3: Chọn B



Gọi:

- H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
- I là trung điểm của $MN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN .
- d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.
- E là hình chiếu của I lên AD .
- O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.
- K là hình chiếu của O lên SH .

Đặt $OI = x$.

$$\text{Ta có: } CI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{2}}{4}; \quad OC = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2};$$

$$KO = HI = \sqrt{IE^2 + EH^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4};$$

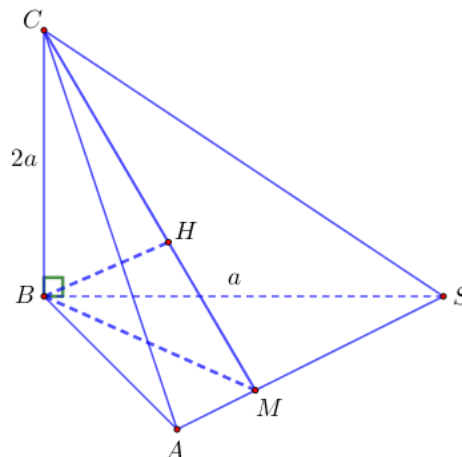
$$SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \frac{22a^2}{16}}.$$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$ nên $SO = OC$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \frac{22a^2}{16}} \Leftrightarrow \sqrt{3}ax = \frac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}a}{12}.$$

$$\text{Vậy: } R = OC = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{25a^2}{48}} = \frac{\sqrt{93}}{12}a.$$

CÂU 4: Chọn B



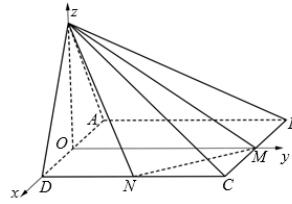
Ta có $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAB) \cap (ABC) = AB$, $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Vẽ $BM \perp SA$ tại $M \Rightarrow SA \perp (BMC) \Rightarrow (SAC) \perp (BMC)$, vẽ $BH \perp MC$ tại H
 $\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow r = BH$.

$$\text{Ta có } BM = \sin 60^\circ \cdot SB \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{BC \cdot BM}{\sqrt{BC^2 + BM^2}} = \frac{2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

Vậy bán kính của mặt cầu (S) bằng $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

CÂU 5: Chọn A



Gọi O là trung điểm AD . Khi đó, SO vuông góc với $(ABCD)$.

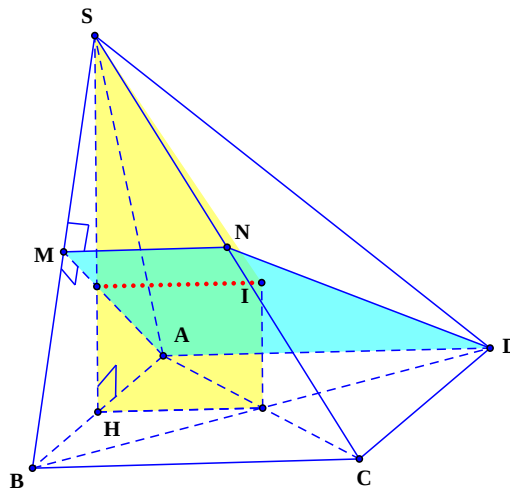
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

$$O(0;0;0), D\left(\frac{1}{2};0;0\right), M(0;1;0), C\left(\frac{1}{2};1;0\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Gọi (S) là phương trình mặt cầu đi qua S, M, N, C . Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} - \sqrt{3}c + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ \frac{5}{4} - a - 2b + d = 0 \\ \frac{1}{2} - a - b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5\sqrt{3}}{12} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ nên } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{93}}{12}.$$

CÂU 6: Chọn B

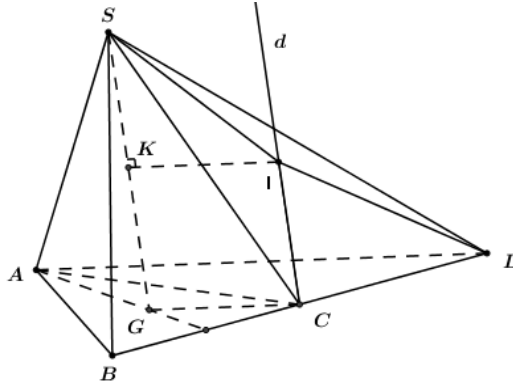


Gọi O là tâm của đáy, Δ là trục của đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và d là trục của mặt bên SAB .

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Ta có I là giao điểm của Δ và d .

$$\text{Ta có } R = IS = \sqrt{IG^2 + SG^2} = \sqrt{\left(\frac{AD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

CÂU 7: Chọn A



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì $SG \perp (ABC)$.

Do $CB = CA = CD$ nên C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

Qua C kẻ đường thẳng d song song SG thì d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

Gọi $I \in d$ là tâm mặt cầu cần tìm, đặt $IC = x \Rightarrow SK = |SG - x|$.

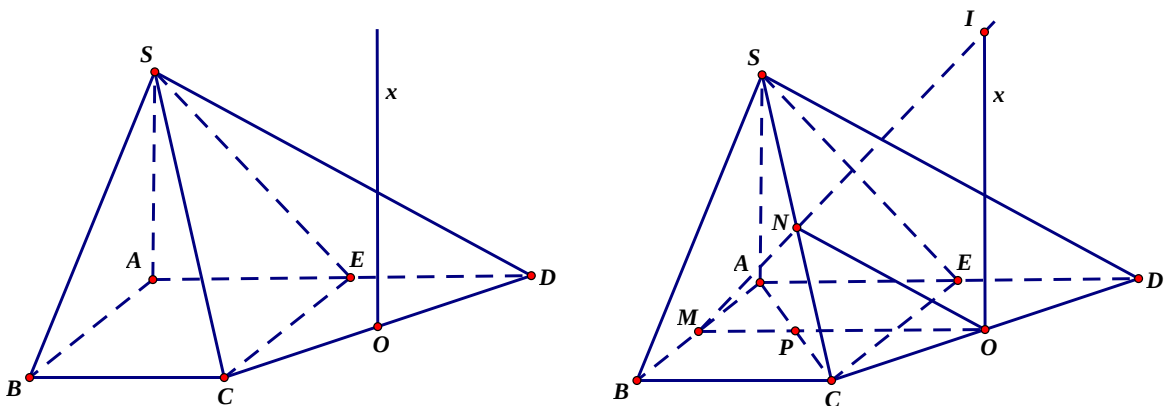
Kẻ $IK \perp SG$.

$$\Rightarrow IK = CG = AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = a.$$

$$\text{Ta có } IS = ID \Leftrightarrow IK^2 + SK^2 = IC^2 + CD^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} + (a - x)^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{6}.$$

$$\text{Vậy tâm cầu } I \text{ được xác định, bán kính mặt cầu là } R = \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{37}}{6}.$$

CÂU 8:



Lời giải

Chọn C

Gọi O là trung điểm của CD .

Kẻ tia $Ox \parallel SA$ thì $Ox \perp (ABCD)$.

Ta có: O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông CDE và $Ox \perp (ABCD)$, nên Ox là trục của đường tròn (CDE) .

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC .

Ta có: $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên suy ra $SM = MC$.

Do đó tam giác SMC cân tại M , suy ra $MN \perp SC$.

Đễ thấy $(MNO) \perp (SAD)$ và $CE \perp (SAD)$ nên suy ra $CE \perp (MNO)$ và do đó $CE \perp MN$.

Vậy nên $MN \perp (SEC)$, do đó MN là trục của đường tròn (SEC) .

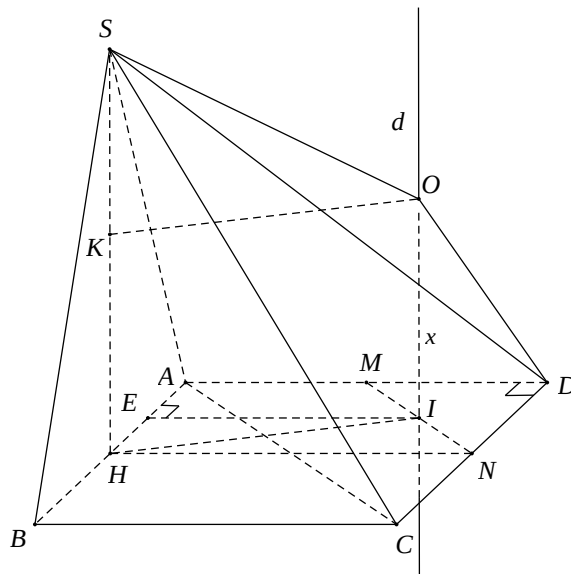
Gọi I là giao điểm của MN và SO thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$ là $R = \sqrt{IC} = \sqrt{IO^2 + OC^2}$.

Trong đó $OC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $IO = 3NP = 3 \cdot \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2}$ (P là giao điểm của MO và AC).

Vậy thì $R = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. Chọn C.

CÂU 9: Chọn A



Gọi I là trung điểm của MN . Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.

E là hình chiếu của I lên AB .

O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. K là hình chiếu của O lên SH .

Đặt $OI = x$. Ta có $DI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. Suy ra $OD = \sqrt{ID^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16} + x^2}$.

$$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI$$

$$AM + HN = 3a \quad . HI = \sqrt{EI^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{37}}{4} ..$$

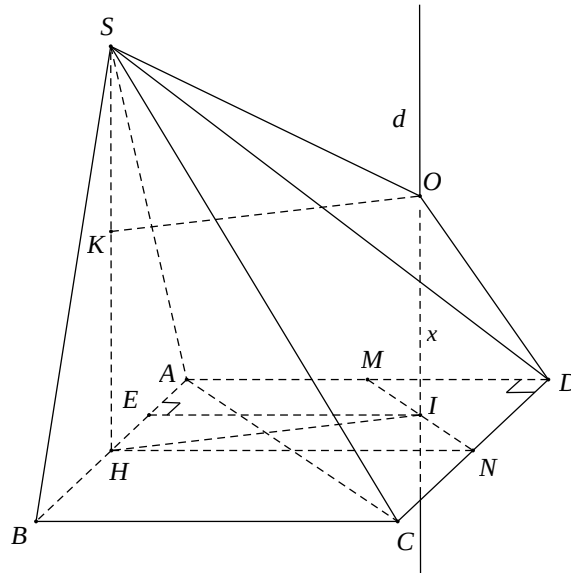
$$EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Suy ra $SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2}$. Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên:

$$SO = DO \Rightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = x^2 + 5a \Rightarrow x = \frac{a11}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}.$$

CÂU 10: Chọn A



Gọi I là trung điểm của MN . Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.

E là hình chiếu của I lên AB .

O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. K là hình chiếu của O lên SH .

Đặt $OI = x$.

$$\text{Ta có } DI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{5}}{4}. \text{ Suy ra } OD = \sqrt{ID^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16} + x^2}.$$

$$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI$$

$$EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}.$$

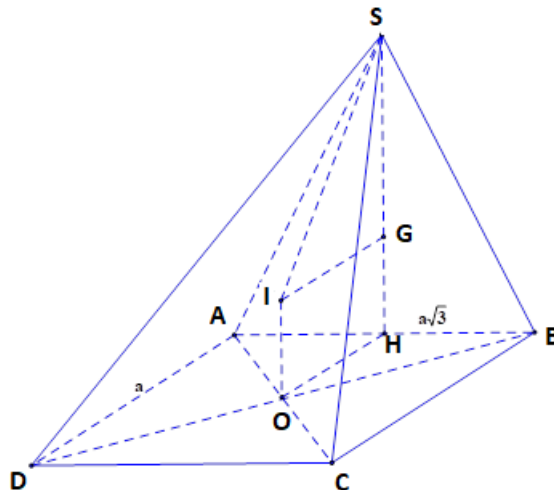
$$HI = \sqrt{EI^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{37}}{4}. \text{ Suy ra } SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2}.$$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên:

$$SO = DO \Rightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = x^2 + 5a \Rightarrow x = \frac{a11}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}.$$

CÂU 11: Chọn A



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (vì $\triangle SAB$ đều).

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của $AC, BD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SBC .

Qua O dựng đường thẳng $d \parallel SH \Rightarrow d$ là trục của đường tròn (O) , qua G dựng đường thẳng

$\Delta \parallel OH \Rightarrow \Delta$ là trục của đường tròn (H) . $d \cap \Delta = I \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

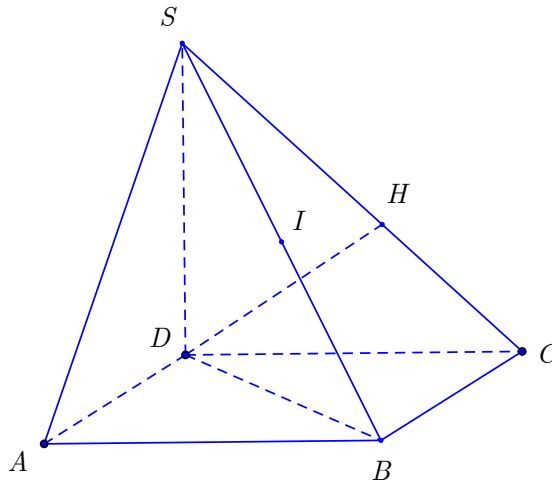
Xét tam giác đều SAB có cạnh là $a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2} \Rightarrow SG = a$.

Mặt khác $IG = OH = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông $SIG : IS^2 = SG^2 + IG^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow IS = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$.

CÂU 12: Chọn B



Gọi D là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Do $SA \perp AB \Rightarrow DA \perp AB$, và $SC \perp CB \Rightarrow DC \perp CB$. Vậy suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Trong (SCD) kẻ $DH \perp SC$ tại H .

Ta có $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(D, (SBC)) = DH$.

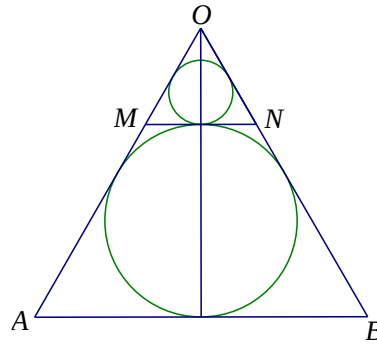
Ta có $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}$. Suy ra $SB = 2a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm SB suy ra I là tâm mặt cầu và $R = \frac{SB}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy diện tích mặt cầu bằng $S = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$.

CÂU 13: Chọn A

Gọi AB là đường kính mặt nón, O là đỉnh, M, N lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến chung của hai mặt cầu và OA, OB (hình vẽ).

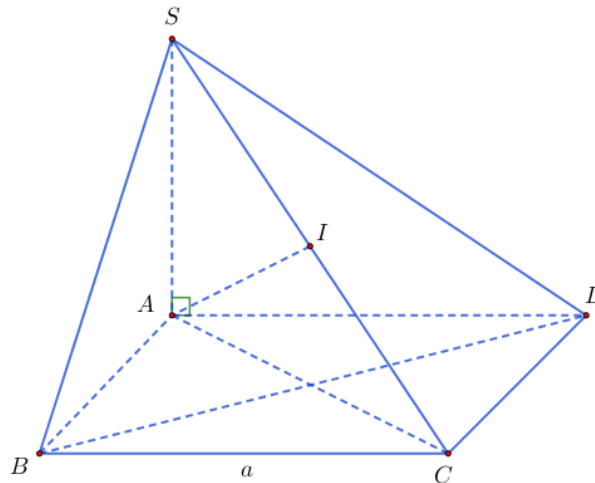


Ta có tam giác OAB đều nên bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = \frac{1}{3}h = 3$.

Tương tự, tam giác OMN đều, có chiều cao $h = 9 - 2r = 3$ nên có bán kính đường tròn nội tiếp $r' = \frac{1}{3}.3 = 1$.

Thể tích hai khối cầu bằng $V = \frac{4}{3}\pi.r^3 + \frac{4}{3}\pi.r'^3 = \frac{112\pi}{3}$.

CÂU 14: Chọn A



Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc SCA bằng 45° nên tam giác SAC vuông cân tại A nên $SC = 2a$.

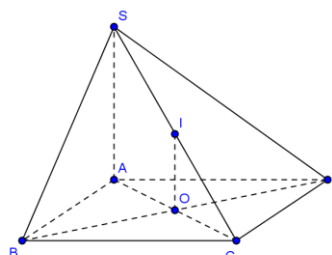
Ta có $CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại D .

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm SC , bán kính $R = \frac{SC}{2} = a$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

CÂU 15: Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$ và I là trung điểm SC .

Khi đó OI là trục của hình chữ nhật $ABCD$ nên $IA = IB = IC = ID$.

Mặt khác do I là trung điểm SC nên $IS = IC$.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

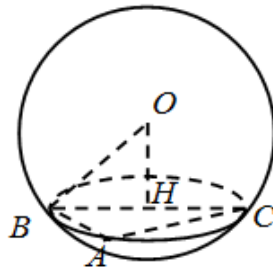
Do $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$. Vậy

$$\angle SCA = \angle (SC, (ABCD)) = 45^\circ.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{2}}$.

Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{5\sqrt{10}\pi a^3}{3}$.

CÂU 16: Chọn D



Ta có $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là trung điểm của BC .

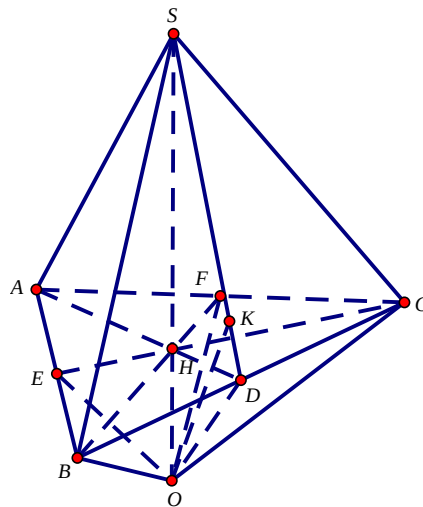
Vì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1 nên $OH = 1$.

$\triangle OHB$ vuông tại H có: $OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R = OB = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Do đó thể tích khối cầu (S) là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{29}}{2} \right)^3 = \frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

CÂU 17 : Chọn D



Giả sử E, F là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB, AC . Khi đó ta có

$HE \perp AB, HF \perp AC$. Do $OE = OF = 1$ nên $HE = HF$. Do đó AH là phân giác của góc BAC .

Khi đó $AH \cap BC = D$ là trung điểm của BC .

Do $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAD)$. Kẻ $OK \perp SD$ thì $OK \perp (SBC)$. Do đó $OK = 1$ và $SDA = 60^\circ$.

Đặt $AB = BC = CA = 2a (a > 0)$ thì $SH = a, HD = a \cdot \cot 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Do đó $AD = a\sqrt{3} = 3HD$ nên H là tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và E, F là trung điểm AB, AC .

Mặt khác trong tam giác SOK có : $SO = \frac{OK}{\sin 30^\circ} = 2$. Do $\triangle DEF$ đều có $OH \perp (DFE)$ nên

$$OE = OF = OD = 1 \Rightarrow K \equiv D.$$

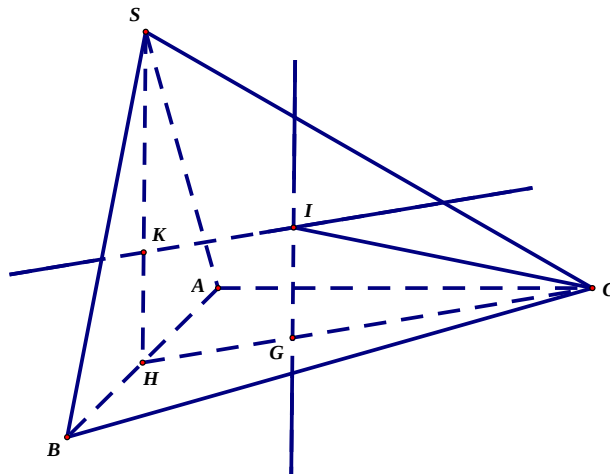
Khi đó $\triangle DSO$ vuông tại D và có $DH \perp SO$. Từ đó

$$DH^2 = HS \cdot HO \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} = a(2-a) \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow AB = 3, SH = \frac{3}{2}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thì $R = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{7}{4}$.

$$V_{m/c} = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{48} \pi.$$

CÂU 18 : Chọn C



Gọi G, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, SAB .

Dựng d, d' lần lượt là hai đường thẳng qua G, K và vuông góc với $(ABC), (SAB)$

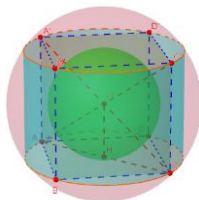
Dễ thấy d, d' đồng phẳng. Gọi $I = d \cap d'$. Tứ giác $GIKH$ là hình vuông.

$$\Rightarrow GH = \frac{\sqrt{3}}{6}; GC = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = IC = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{15\sqrt{15}}{6^3} = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}.$$

CÂU 19:

Chọn B



- Khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có bán kính bằng đáy bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và chiều cao bằng a nên

$$\text{có thể tích } V_1 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}.$$

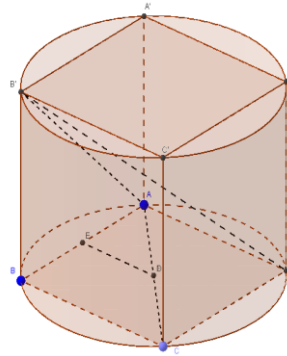
- Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\frac{a}{2}$ nên có thể tích $V_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}.$

- Khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

$$\text{nên có thể tích } V_3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } V_1 + V_2 = \frac{2\pi a^3}{3}. \text{ Vậy } P = \frac{V_1 + V_2}{V_3} = \frac{2\pi a^3}{3} : \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

CÂU 20: Chọn C



Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp trong hình trụ nên là hình hộp chữ nhật. Gọi O là tâm $ABCD$, E là trung điểm AB .

Ta có: $OE = 3$, $OA = 5 \Rightarrow AD = 6$.

Xét $\triangle AEO$ vuông tại E , có: $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

Vì $AD \perp (ABB'A')$ nên AB' là hình chiếu vuông góc của DB' lên $(ABB'A') \Rightarrow \angle DB'A = 60^\circ$.

Xét tam giác $AB'D$ vuông tại A có: $AB' = AD \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$, $B'D = \sqrt{AD^2 + AB'^2} = 12$.

Xét tam giác ABB' vuông tại B có: $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2\sqrt{11}$.

Thể tích khối hộp là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB' \cdot S_{ABCD} = 2\sqrt{11} \cdot 8 \cdot 6 = 96\sqrt{11}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $R = \frac{B'D}{2} = 6$.

Thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 288\pi$.

Vậy tỉ số thể tích khối hộp và khối cầu ngoại tiếp hình hộp là $\frac{\sqrt{11}}{3\pi}$.

CÂU 21: Chọn A

Gọi mặt phẳng vuông góc với đường kính của khối cầu là mặt phẳng (P)

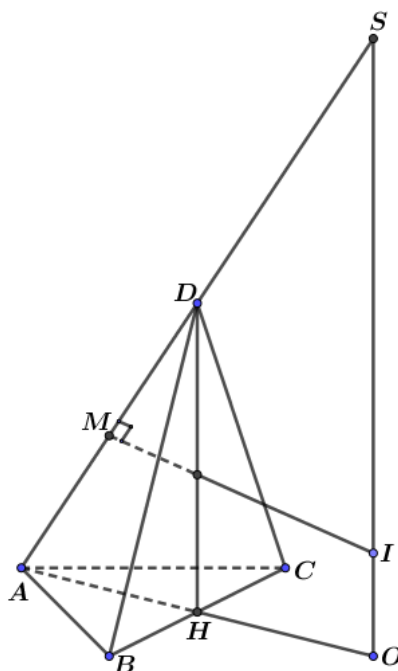
Ta có mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo một đường tròn (C) . Khi đó đường kính của đường tròn

(C) bằng $R\sqrt{3}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $\frac{R}{2}$.

Mặt phẳng (P) cách tâm I một khoảng $\frac{R}{2}$ chia khối cầu thành hai phần, phần lớn là phần chứa tâm I còn phần nhỏ là phần không chứa tâm I gọi là chỏm cầu. Khi đó thể tích của chỏm cầu là

$$V = \left(2R + \frac{R}{2}\right) \left(R - \frac{R}{2}\right)^2 \frac{\pi}{3} = \frac{5R}{2} \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi R^3}{24}.$$

CÂU 22: Chọn A



Gọi H là trung điểm BC .

Có $AB = a$, $BAH = 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$; $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{a^3}{16} = \frac{1}{3} DH \cdot \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow DH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{ay} \ DA = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì bán kính đường tròn đó là $R = AO = \frac{BC}{2 \sin A} = a$.

Vậy H là trung điểm AO .

Kẻ trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , đường thẳng này cắt AD tại S với D là trung điểm SA .

Vậy $SO = 2DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = 2DA = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ và $SM = \frac{3}{4}SA = \frac{3a\sqrt{7}}{8}$.

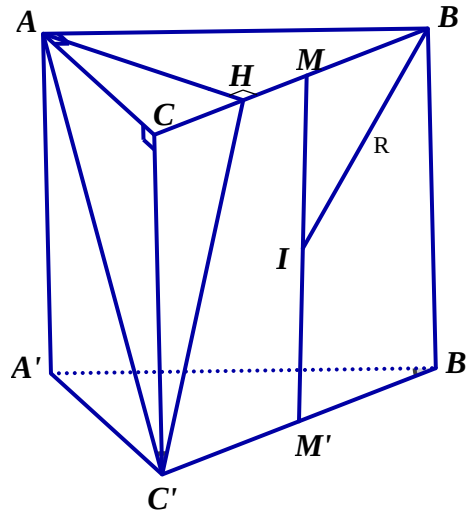
Từ trung điểm M của đoạn AD kẻ đường vuông góc với AD , cắt SO tại I .

Để dàng có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Hai tam giác vuông SAO và SIM đồng dạng nên $\frac{MI}{OA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow MI = a \cdot \frac{3\sqrt{7}a}{8 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$.

$$\text{Bán kính mặt cầu bằng } R_{ABCD} = ID = \sqrt{MI^2 + MD^2} = \frac{a\sqrt{91}}{8}.$$

CÂU 23: Chọn B



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

Dễ thấy trung điểm I của MM' là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Kẻ AH vuông góc BC ($H \in BC$) $\Rightarrow \angle AC'H = (\angle AC', (BCC'B')) = 30^\circ$.

Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

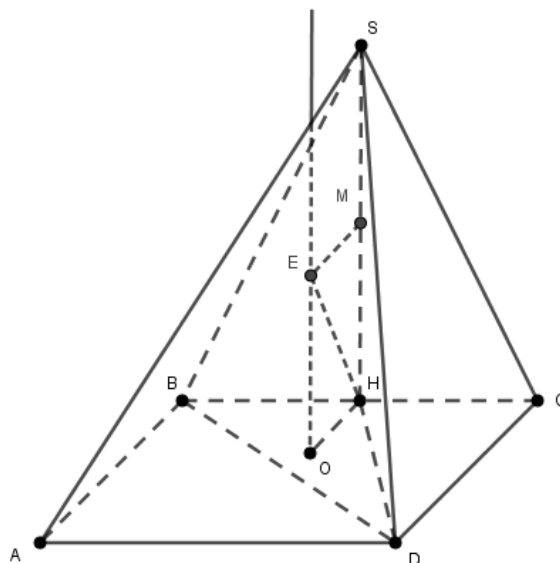
Trong tam giác vuông AHC' , có: $AC' = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông ACC' , có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Bán kính } R^2 = IB^2 = MI^2 + MB^2 = \left(\frac{CC'}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{2}\right)^2 = \frac{6}{4}a^2$$

$$\text{Diện tích mặt cầu: } S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{6a^2}{4} = 6\pi a^2.$$

CÂU 24: Chọn C



Gọi R và r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ và tam giác BHD .

$$\text{Ta có } HB = \frac{a\sqrt{2}}{2}, HD = \sqrt{HC^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ và } BD = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lí Cô sin, ta có

$$\cos BHD = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 3a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin BHD = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } BHD \text{ là } S_{\triangle BHD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Do đó } r = \frac{HB \cdot HD \cdot BD}{4S} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{a^2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

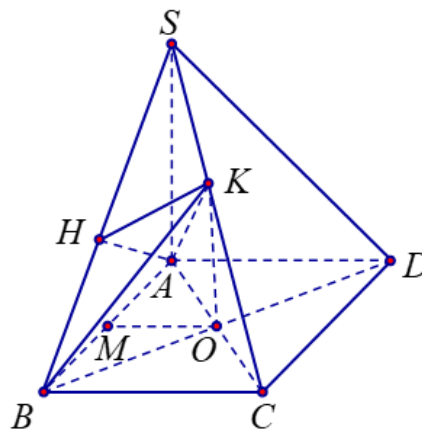
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD và M là trung điểm SH . Mặt phẳng trung trực của SH cắt trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD tại E . Khi đó E là tâm mặt cầu cần tìm.

$$\text{Ta có } R = \sqrt{r^2 + ME^2} = \sqrt{r^2 + \frac{SH^2}{4}} = \sqrt{r^2 + \frac{SH^2}{4}} = \sqrt{\frac{9a^2}{2} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}.$$

CÂU 25: Chọn B

Cách 1: Nhận xét : $AKC = AHC = ABC = 90^\circ$, nên 4 điểm A, H, K, B thuộc mặt cầu đường kính AC . Bán kính $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2: Dựng hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB .

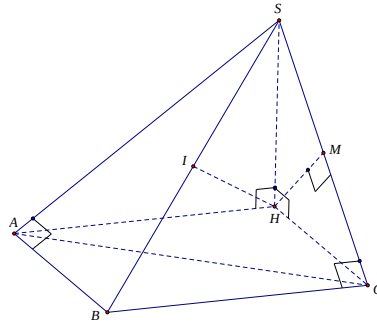


Tam giác AHB vuông tại H và $MO \perp (HAB)$ suy ra MO là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB .

Tam giác AKC vuông tại K suy ra $OA = OK$. Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$AHKB \text{ và bán kính } R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}.$$

CÂU 26: Chọn C



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng ABC . Khi đó 5 điểm A, B, C, H, S cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SB .

Do A, B, C, H cùng thuộc một mặt phẳng nên $ABHC$ là tứ giác nội tiếp. Theo giả thiết ABC là tam giác vuông cân tại B nên $ABHC$ là hình vuông $\Rightarrow d(A, (SBC)) = d(H, (SBC))$.

Trong mặt phẳng (SHC) kẻ $HM \perp SC, (M \in SC)$ khi đó $d(H, (SBC)) = HM = a\sqrt{2}$.

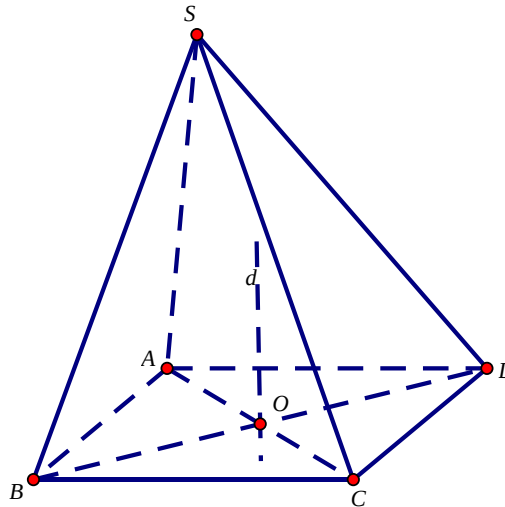
Xét tam giác vuông SHC ta có $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{SH^2} \Leftrightarrow SH^2 = \frac{HM^2 \cdot HC^2}{HM^2 - HC^2} = 6a^2 \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.

Xét tam giác vuông SHB ta có $SB^2 = SH^2 + HB^2 = 6a^2 + 6a^2 = 12a^2 \Rightarrow SB = 2a\sqrt{3}$.

Do I là trung điểm của SB nên $IH = \frac{1}{2}SB = a\sqrt{3}$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S = 4\pi(a\sqrt{3})^2 = 12\pi a^2$.

CÂU 27: Chọn B



Gọi R_1, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và mặt bên (SAB) . Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

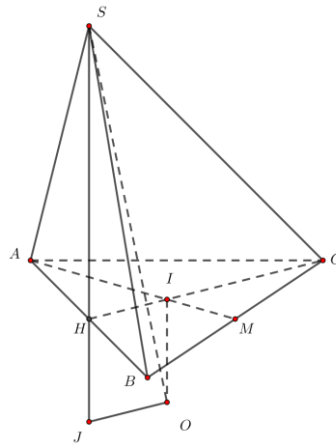
Khi đó $R_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$ và $R_2 = \frac{AB}{2\sin \angle ASB} = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Vì hình chóp đã cho có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên bán kính mặt cầu hình chóp $S.ABCD$ được tính theo công thức:

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{12}.$$

Diện tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là: $S = 4\pi R^2 = \frac{13\pi a^2}{3}$.

CÂU 28: Chọn A



Gọi H là trung điểm AB , do $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác ABC đều và tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp (ABC)$ và $CH \perp (SAB)$.

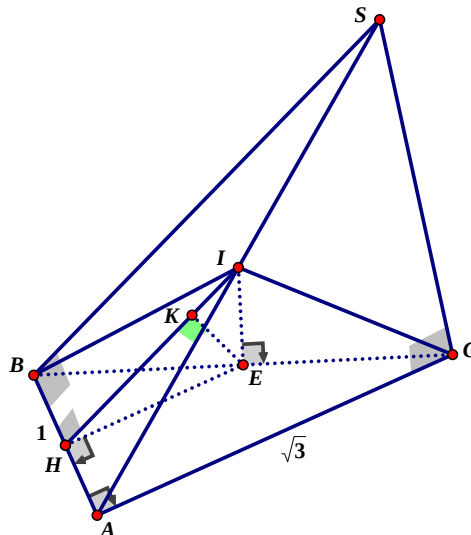
Gọi I và J là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác SAB .

Dựng đường thẳng $Ix \parallel SH$ và $Jy \parallel CH$ thì $Ix \perp (ABC)$ và $Jy \perp (SAB)$ nên Ix là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Jy là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB . Khi đó $Ix \cap Jy = O$ thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$$\text{Ta có } OJ = IH = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot R_{(SAB)} = SJ = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } R = SO = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \text{ nên } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{15}}{6} \right)^3 = \frac{5\pi\sqrt{15}}{54}.$$

CÂU 29: Chọn D.



Gọi I là trung điểm của $SA \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi E, H lần lượt là trung điểm của BC, AB

Ta có : $AB \perp AC \Rightarrow EI \perp AB, AB \perp SB \Rightarrow IH \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (IHE) \Rightarrow (SAB) \perp (IHE)$

Kẻ $EK \perp IH \Rightarrow EK \perp (SAB)$

$$\Rightarrow EK = d(E, (SAB)) = \frac{d(C, (SAB))}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

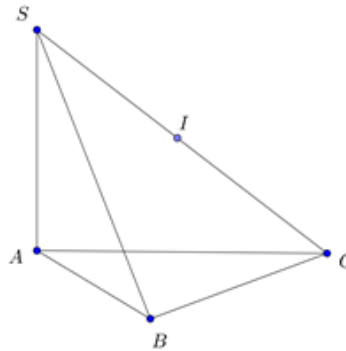
Do $\triangle IBC$ cân tại $I \Rightarrow IE \perp BC$

Mà $IE \perp AB \Rightarrow IE \perp (ABC) \Rightarrow IE \perp EH$

$$\text{Xét } \triangle IHE \text{ vuông tại } E \Rightarrow \frac{1}{EK^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{IE^2} \Rightarrow \frac{1}{IE^2} = \frac{1}{EK^2} - \frac{1}{EH^2} = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4$$

$$\Rightarrow IE^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow IC^2 = IE^2 + EC^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 5\pi$$

CÂU 30: Chọn D



Hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABC)$.

$$\text{Ta cũng có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$$

Suy ra SAC và SBC là hai tam giác vuông tại A và B .

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } SC \text{ thì } \begin{cases} IA = IC = IS \\ IB = IC = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I \text{ là tâm mặt cầu } (S)$$

ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

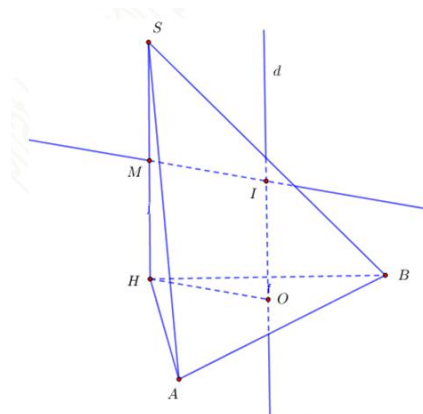
Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SC, (ABC)) = \angle SCA = 45^\circ$.

Ta lần lượt tính được: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$; $SA = AC = 5$; $SC = AC\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

$$\text{Suy ra bán kính mặt cầu } (S) \text{ là } R = \frac{SC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu } (S) \text{ là } V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}.$$

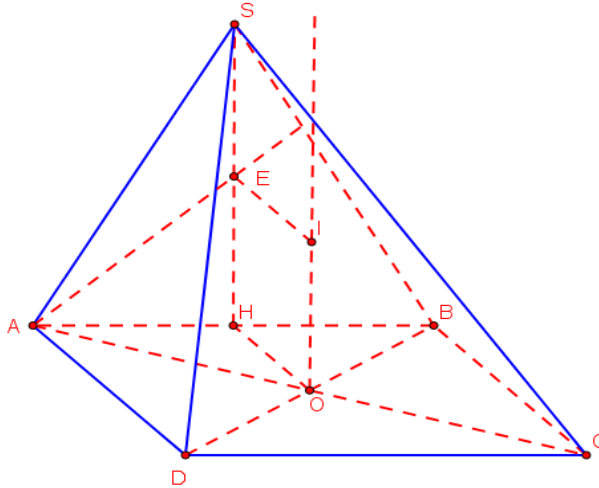
CÂU 31: Chọn C



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB . Áp dụng định lí sin trong tam giác AHB ta có $\frac{AB}{\sin AHB} = 2r \Rightarrow r = \frac{AB}{2 \sin AHB} = \sqrt{3}$.

Qua O dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (AHB) . Gọi M là trung điểm của SH . Trong mặt phẳng SHO dựng đường trung trực của đoạn SH cắt d tại I . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.HAB$ và có bán kính là $HI = \sqrt{OI^2 + HO^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$.

CÂU 32: Chọn A



Qua O, kẻ $(\Delta_1) \perp (ABCD)$ thì (Δ_1) là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên kẻ $SH \perp AB$ thì $SH \perp (ABCD)$

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB và kẻ $(\Delta_2) \perp (SAB)$ tại E thì (Δ_2) là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

(Δ_1) cắt (Δ_2) tại I : tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tứ giác $OHEI$ có 3 góc vuông O, H, E nên là hình chữ nhật ^(Δ_2)

$$SH = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong ΔAIO : $R = AI = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

CÂU 33: Chọn D

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có

$$60^0 = \angle AB'C', \angle A'B'C' = \angle AM, \angle A'M = \angle AMA'.$$

Trong $\triangle AA'M$, có $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$AA' = A'M \cdot \tan AMA' = \frac{3a}{2}.$$

Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$, suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

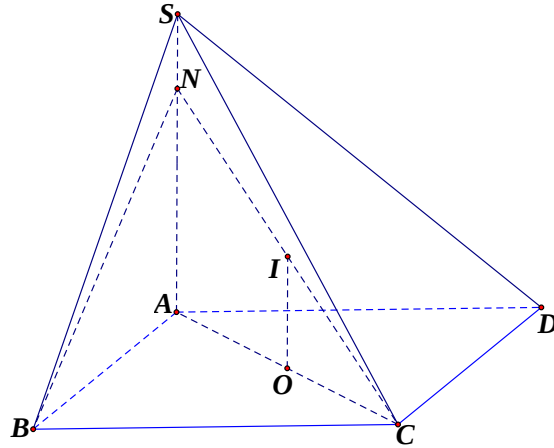
Vì lăng trụ đứng nên $GG' \perp A'B'C'$.

Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $GC'G'$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$, bán kính $R = GI$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \triangle GPI \sim \triangle GG'C' &\Rightarrow \frac{GP}{GI} = \frac{GG'}{GC'} \\ \Rightarrow R = GI &= \frac{GP \cdot GC'}{GG'} = \frac{GC'^2}{2GG'} = \frac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \frac{31a}{36}. \end{aligned}$$

CÂU 34: Chọn A



Ta có $SA \perp (ABCD)$ tại A .

Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\angle SCA$. Theo giả thuyết $\angle SCA = 45^\circ$

$$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}. \text{ Vậy } h = a\sqrt{5}.$$

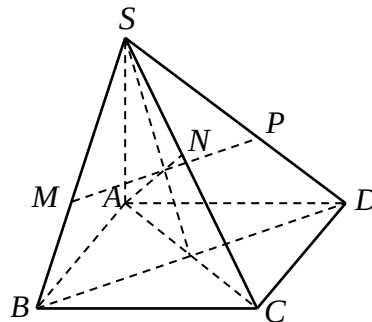
Gọi O là trung điểm AC và I là trung điểm NC

$\Rightarrow IN = IC = IA = IB$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$

$$\Rightarrow R = IC = \frac{1}{2}NC = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\sqrt{5}\right)^2 + (a\sqrt{5})^2} = \frac{5\sqrt{5}a}{8}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{R}{h} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 8R = 5h.$$

CÂU 35: Chọn B



Theo giả thiết mặt phẳng (α) vuông góc với SC nên ta có $AN \perp SC$, $AP \perp SC$, $AM \perp SC$.

Mặt khác $BC \perp SAB$ nên $BC \perp AM \Rightarrow AM \perp SBC \Rightarrow AM \perp MC$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $AP \perp PC$.

Từ đó ba điểm M, N, P cùng nhìn AC dưới góc vuông nên bốn điểm C, M, N, P nằm trên mặt cầu đường kính $AC = 4$. Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là $V = \frac{32\pi}{3}$.

CÂU 36 : Chọn C

Ta có Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow CH \perp AB$ và $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $CH \perp (ABC)$, nên $(A'C; (ABC)) = (A'C; A'H) = CA'H = 30^\circ$.

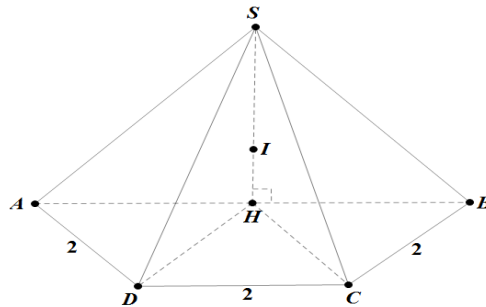
$$\Rightarrow A'H = CH \cdot \cot 30^\circ = \frac{3a}{2}, AA' = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = a\sqrt{2}.$$

Dựng trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại trọng tâm G .

Dựng đường trung trực của AA' trong mặt phẳng $(AA'G)$ cắt trục đường tròn tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ có bán kính là IA .

$$\text{Ta có } AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AI = \sqrt{AM^2 + AG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{6}.$$

CÂU 37 : Chọn D

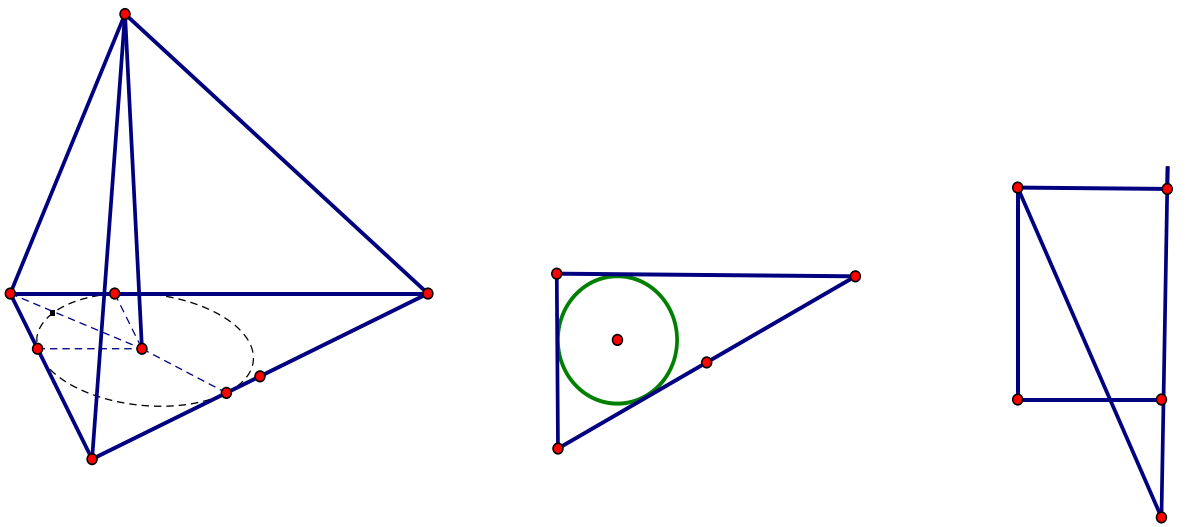


Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Dễ thấy $HA = HB = HC = HD = 2 \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD \Rightarrow SH$ là trục của tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

Mặt khác tam giác SAB là tam giác đều nên trọng tâm I của tam giác ABC cách đều A và B .

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$. Bán kính $R = IA = \frac{2}{3}SH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 38: Chọn D



Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

$$\text{Tính được } r = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC + BC} = a.$$

$$\text{Tính được } AH = a\sqrt{2} \text{ và } MH = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Tam giác SAH vuông tại H suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của BC và Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Suy ra $O \in \Delta$.

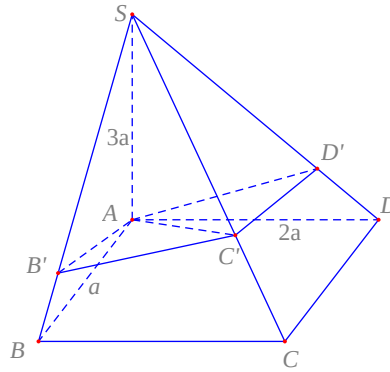
Ta có:

$$OC^2 = OS^2 \Leftrightarrow OM^2 + MC^2 = SK^2 + OK^2.$$

$$\Leftrightarrow OM^2 + \frac{25a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} + (OM + a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow OM = \frac{3\sqrt{2}}{4}a.$$

$$\text{Suy ra } R = OC = \frac{\sqrt{118}}{4}a.$$

CÂU 39: Chọn D



Ta có $AC' \perp C'C$ (1).

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AB'. \text{ Mà } AB' \perp SC \Rightarrow AB' \perp B'C \text{ (2).}$$

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp AD'. \text{ Mà } AD' \perp SC \Rightarrow AD' \perp D'C \text{ (3).}$$

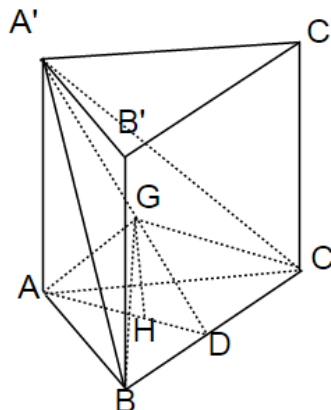
$$AB \perp BC \text{ (4).}$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra B, B', C', D' cùng nằm một mặt cầu đường kính AC (cùng nhìn AC dưới một góc vuông).

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } B.B'C'D' \text{ là } R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu là } S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{5a^2}{4} = 5\pi a^2.$$

CÂU 40: Chọn D



Gọi D là trung điểm của BC ta có:

$$BC \perp AD \Rightarrow BC \perp A'D \Rightarrow \angle ADA' = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có } AA' = AD \cdot \tan \angle ADA' = \frac{3a}{2}; S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}.$$

Trong (AGH) : gọi I là giao điểm của GH và trung trực của AG . Gọi E là trung điểm của AG .

$$GH = \frac{AA'}{3} = \frac{3}{2}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; GA^2 = GH^2 + AH^2 = \frac{7a^2}{12} \Rightarrow R = GI = \frac{GE \cdot GA}{GH} = \frac{GA^2}{2GH} = \frac{7a}{12}.$$

$$\text{Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } GABC \text{ có thể tích là: } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{7a}{12} \right)^3 = \frac{343\pi a^3}{1296}.$$

CÂU 41: Chọn D

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

O là tâm hình vuông.

J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD .

I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 2a^2, V_{S.ABCD} = \frac{4a^3}{3} \Rightarrow SH = 2a.$$

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

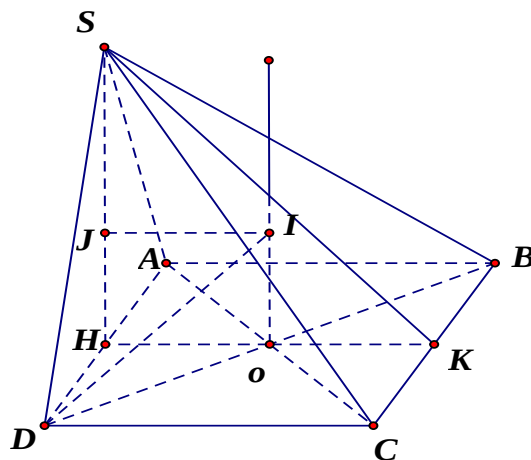
$$SA > AD \Rightarrow \angle ASD < 90^\circ \Rightarrow J \text{ thuộc đoạn } SH.$$

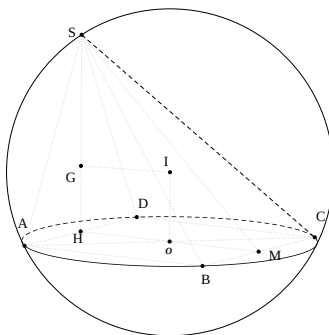
$$\text{Ta có: } \sin \angle SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Mà } \frac{SD}{\sin \angle SAH} = 2SJ \Rightarrow SJ = \frac{9a}{8} \text{ (định lí sin).}$$

$$OI = JH = SH - SJ = \frac{7a}{8} \Rightarrow OD = \frac{BD}{2} = a \Rightarrow R = ID = \frac{a\sqrt{113}}{8}.$$

$$\text{Vậy } V_{KC} = \frac{113\pi a^3 \sqrt{113}}{384}.$$





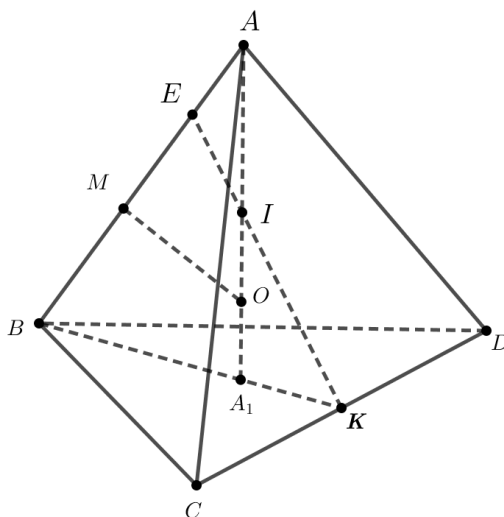
Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Dựng đường thẳng Δ qua O và vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Gọi G là trọng tâm tam giác SAD . Dựng trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD cắt Δ tại I .

$$R = IS = \sqrt{IG^2 + SG^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

$$\text{Vây } S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3} \right)^2 = \frac{16\pi a^2}{3}.$$

CÂU 43 : Chọn A



Gọi K là trung điểm của CD và $E = IK \cap AB$. Qua A_1 kẻ đường thẳng song song với IK cắt AB tại J .

$$\frac{BJ}{BE} = \frac{BA_1}{BK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{AE}{EJ} = \frac{AI}{IA_1} = 1 \text{ nên suy ra } AE = \frac{1}{4}AB = \frac{a}{4} \text{ và } BE = \frac{3a}{4}.$$

Gọi M là trung điểm của BE , trong mặt phẳng (ABK) dựng đường trung trực của BE cắt AA_1 tại O . Ta dễ dàng chứng minh được O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp $EBCD$.

Ta có: $BA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Đặt $BE = x$.

Tam giác ABA_1 đồng dạng với tam giác AOM nên suy ra

$$\frac{AM}{AA_1} = \frac{OM}{BH} \Rightarrow OM = \frac{AM \cdot BH}{AA_1} = \left(a - \frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $EBCD$ ta suy ra:

$$R = OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{x}{2}\right)^2}.$$

$$\text{Với } x = \frac{3a}{4} \text{ ta có: } R = \sqrt{\frac{9a^2}{64} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{3a}{8}\right)^2} = a\sqrt{\frac{43}{128}}.$$

Tương tự với $x = \frac{a}{4}$ ta có bán kính R' của mặt cầu ngoại tiếp $EACD$ là

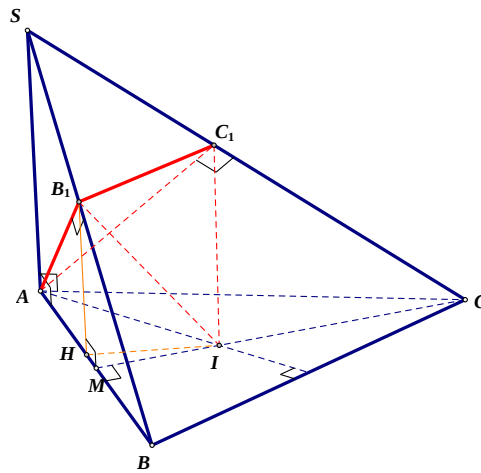
$$R' = \sqrt{\frac{a^2}{64} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{4}\right)^2} = a\sqrt{\frac{51}{128}}.$$

$$\text{Do đó } \frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{43}{51}}.$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Áp dụng công thức Crelle: Với mỗi khối tứ diện $ABCD$ đều tồn tại ít nhất một tam giác mà số đo các cạnh của nó bằng tích số đo các cặp đối của tứ diện đó. Hơn nữa nếu gọi V là thể tích, R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì ta có công thức: $S = 6V.R$.

CÂU 44: Chọn D



Đặt $SA = x$, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , H là hình chiếu của B_1 trên cạnh AB , M là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } SA^2 = SB_1 \cdot SB \Rightarrow \frac{SB_1}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{a^2 + x^2}, \text{ tương tự ta cũng có } \frac{SC_1}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{x^2}{a^2 + x^2}.$$

$$\text{Suy ra } B_1C_1 \parallel BC, B_1H \parallel SA \text{ nên } \frac{BB_1}{SB} = \frac{HB_1}{SA} = \frac{BH}{AB} = \frac{a^2}{x^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow HB_1 = \frac{xa^2}{x^2 + a^2}, HB = \frac{ax^2}{x^2 + a^2}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $IA = IB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Giả sử $x > a$ ($x \leq a$ ta làm tương tự).

$$\text{Khi đó } HB = \frac{a \cdot x^2}{x^2 + a^2} > BM = \frac{a}{2}, \text{ suy ra } HM = \frac{a \cdot x^2}{x^2 + a^2} - \frac{a}{2} = \frac{a(x^2 - a^2)}{2(x^2 + a^2)}$$

$$IB_1^2 = HI^2 + B_1H^2 = HM^2 + IM^2 + B_1H^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow IB_1 = IA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $IA = IB = IC = IB_1 = IC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ là bán kính mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1 .

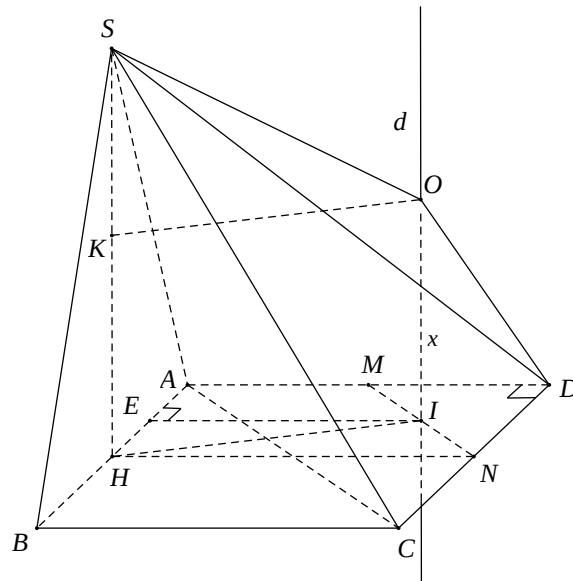
CÂU 45 : Chọn C

Gọi I là trung điểm của MN . Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.

E là hình chiếu của I lên AB .

O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. K là hình chiếu của O lên SH .



Đặt $OI = x$.

$$\text{Ta có } DI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{5}}{4}. \text{ Suy ra } OD = \sqrt{ID^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16} + x^2}.$$

$$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI; EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}.$$

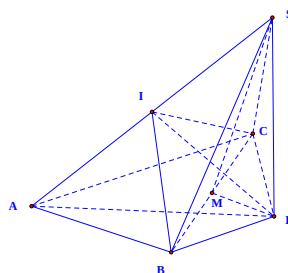
$$HI = \sqrt{EI^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{37}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2}.$$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên:

$$SO = DO \Rightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = x^2 + 5a \Rightarrow x = \frac{11a}{4\sqrt{3}} \Rightarrow R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}.$$

CÂU 46: Chọn C



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thì SH là đường cao của hình chóp.

Mặt khác thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$ nên ta có $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SH = \frac{2}{3}a^3 \Leftrightarrow SH = 2a$.

Để thấy năm điểm A, B, H, C, S cùng thuộc mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Mặt khác A, B, H, C cùng thuộc một mặt phẳng nên tứ giác $ABHC$ nội tiếp đường tròn.

Mà $BAC = 90^\circ \Rightarrow BHC = 90^\circ \Rightarrow HM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{HM^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$SM^2 = \frac{SB^2 + SC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow \frac{SB^2 + SC^2}{2} = SM^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{13a^2}{2}. (1)$$

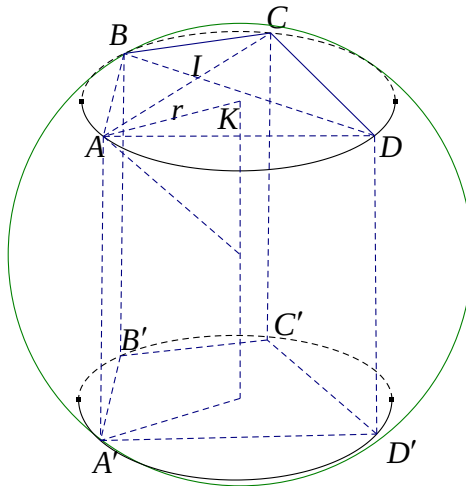
$$R^2 = CI^2 = \frac{CA^2 + SC^2}{2} - \frac{SA^2}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{4a^2 + SC^2}{2} - R^2. (2)$$

$$R^2 = BI^2 = \frac{BA^2 + SB^2}{2} - \frac{SA^2}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{a^2 + SB^2}{2} - R^2. (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $4R^2 = \frac{a^2 + SB^2}{2} + \frac{4a^2 + SC^2}{2} = \frac{5a^2}{2} + \frac{SB^2 + SC^2}{2} = \frac{5a^2}{2} + \frac{13a^2}{2} = 9a^2$.

$$\Rightarrow R = \frac{3a}{2}.$$

CÂU 47: Chọn B

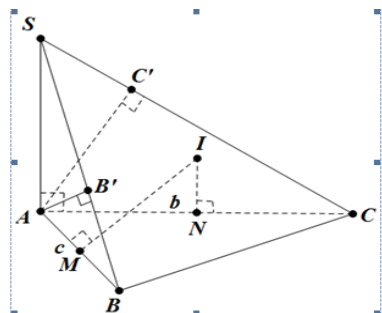


Do lăng trụ nội tiếp mặt cầu nên gọi $(K; r)$ là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$. Khi đó $IA \cdot IC = IB \cdot ID = r^2 - IK^2$ (theo phương tích của đường tròn). Suy ra $r^2 - IK^2 = h^2 \Rightarrow r^2 = h^2 + IK^2$.

Gọi (O, R) là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ta có

$R^2 = OA^2 = OK^2 + h^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{5}{4}h^2 + IK^2 \geq \frac{5}{4}h^2 \Rightarrow R \geq \frac{h\sqrt{5}}{2}$. Vậy $R_{\min} = \frac{h\sqrt{5}}{2}$ khi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

CÂU 48: Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

Tam giác ABB' vuông tại B' nên M chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB' , suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB' chính là đường trung trực Δ của AB (xét trong mp (ABC)).

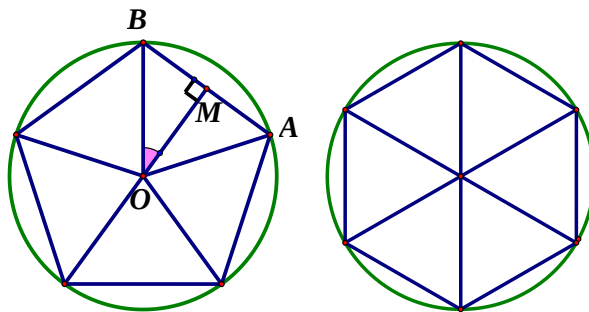
Tam giác ACC' vuông tại C' nên N chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC' , suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC' chính là đường trung trực Δ_1 của AC (xét trong mp (ABC)).

Gọi $I = \Delta \cap \Delta_1$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều các điểm A, B, C, B', C' nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$ thì R chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Ta có } R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{c \cdot b \cdot BC}{4 \cdot \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

CÂU 49: Chọn B



* Ở miếng da hình ngũ giác, xét tam giác OAB có $AOB = 72^\circ$, $AB = 4,5 \text{ cm}$, trung tuyến AM , $BOM = 36^\circ$. Do đó $\tan 36^\circ = \frac{BM}{OM} \Rightarrow OM = \frac{BM}{\tan 36^\circ} = \frac{AB}{2 \tan 36^\circ} (\text{cm})$.

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2 \tan 36^\circ} \cdot AB = \frac{81}{16 \tan 36^\circ} (\text{cm}^2).$$

$$\text{Diện tích miếng da hình ngũ giác là } 5S_{ABO} = \frac{405}{16 \tan 36^\circ} (\text{cm}^2).$$

* Ở miếng da hình lục giác cạnh $4,5 \text{ cm}$ có diện tích cả miếng da là

$$6 \cdot \frac{(4,5)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{8} (\text{cm}^2).$$

Vậy giá thành của miếng da dùng làm quả bóng là

$$\left(20 \cdot \frac{243\sqrt{3}}{8} + 12 \cdot \frac{405}{16 \tan 36^\circ} \right) \cdot 150 \approx 220545 (\text{đồng}).$$

CHỦ ĐỀ 1: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$ và $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C$ là.

A. $(1;1;-2)$.

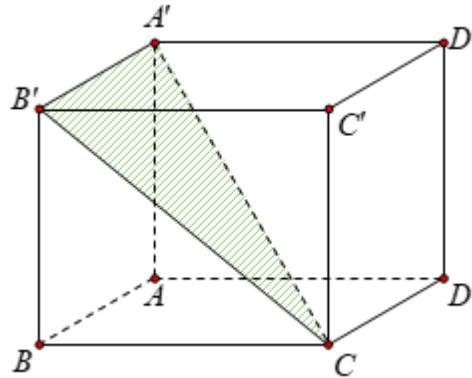
B. $(1;2;-1)$.

C. $(2;1;-2)$.

D. $(2;1;-1)$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi $A'(a_1; a_2; a_3)$, $B'(b_1; b_2; b_3)$, $C(c_1; c_2; c_3)$.

Do tính chất hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(0;0;-3).$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - 3 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow B'(3;0;-3).$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 - 3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3;3;0).$$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác $A'B'C$ là: $G(2;1;-2)$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(1;1;1)$, $C(3;0;0)$.

Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $I(0;-4;1)$.

B. $I(4;0;5)$.

C. $I(3;-1;4)$.

D. $I(2;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;0;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (3;-1;-2) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1;-1;-1)$ là một vtpt của (ABC) .

Phương trình (ABC) là: $x + y + z - 3 = 0$.

Gọi là $I(a;b;c)$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

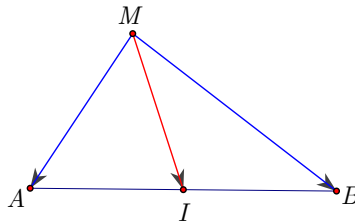
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} IA = IB = IC \\ I \in (ABC) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = (a-3)^2 + b^2 + c^2 \\ a+b+c-3=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=-1 \\ 6a-2b-4c=4 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$. B. $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $M(2; 2; -4)$. D. $M(-2; -2; 4)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I , O lần lượt là trung điểm của AB và IC , khi đó với điểm M bất kỳ ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}$; tương tự $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$.

Suy ra $d = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC}| = 4|\overrightarrow{MO}|$ nên d nhỏ nhất khi và chỉ khi $|\overrightarrow{MO}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MO \perp (P)$ nên M là hình chiếu vuông góc của O lên (P) .

Có $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3) \Rightarrow I(-1; -3; 1)$, kết hợp với $C(1; 3; -1)$ ta có $O(0; 0; 0)$.

Đường thẳng qua $O(0; 0; 0)$ vuông góc với (P) có phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

Giao điểm của d và (P) chính là hình chiếu vuông góc M của $O(0; 0; 0)$ lên mặt phẳng (P) .

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ ta được } t = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = -1. \text{ Vậy } M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

- A. $D(8; 7; -1)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. D. $D(-12; -1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overline{AD} = 2\overline{BC}$ (1).

$$\overline{BC} = (-5; -2; 1), \overline{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1) \cdot (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

VÍ DỤ 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -6; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 7 = 0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz ; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P) . Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là.

A. $B(0; 0; 1)$.

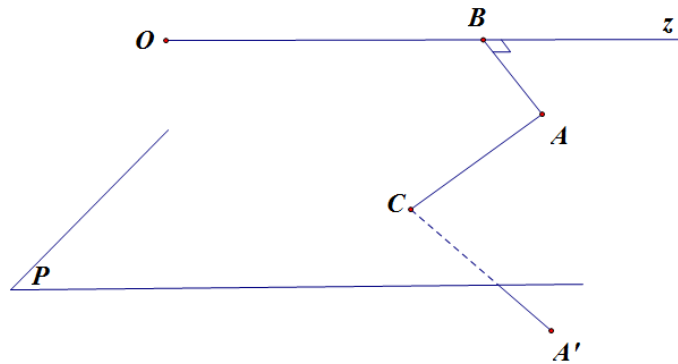
B. $B(0; 0; -2)$.

C. $B(0; 0; -1)$.

D. $B(0; 0; 2)$.

Chọn A

Lời giải



Trước hết ta nhận thấy $Oz \parallel (P)$ và $(x_O + y_O + 7)(x_A + y_A + 7) > 0$ nên A và Oz nằm về một phía của mặt phẳng (P) .

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) . Gọi p là chu vi tam giác ABC .

Ta có $p = AB + BC + CA = AB + BC + A'C \geq AB + A'B$.

Do $Oz \parallel (P)$ nên $AA' \perp Oz$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên Oz , ta có $Oz \perp A'K$.

$$\text{Lúc đó } \begin{cases} AB \geq AK \\ A'B \geq A'K \end{cases} \Rightarrow p_{\min} \text{ khi } K \equiv B.$$

Vậy $B(0; 0; 1)$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

CÂU 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0; 1; 2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 0; 0)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $I(0; -4; 1)$.

B. $I(4; 0; 5)$.

C. $I(3; -1; 4)$.

D. $I(2; -2; 3)$.

CÂU 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(1; 1; 3)$.

$H(x_0; y_0; z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng:

A. $\frac{38}{9}$.

B. $\frac{34}{11}$.

C. $\frac{30}{11}$.

D. $\frac{11}{34}$.

- CÂU 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- A. $T = 8$ B. $T = 2$ C. $T = 6$ D. $T = 14$
- CÂU 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$. B. $OM = \sqrt{26}$. C. $OM = \sqrt{14}$. D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.
- CÂU 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$ thì tọa độ trọng tâm của tam giác đó là
- A. $(1;0;-2)$. B. $(2;-3;0)$. C. $(3;-2;0)$. D. $(3;-2;1)$.
- CÂU 6:** Cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:
- A. $(1;0;-2)$. B. $(2;-3;0)$. C. $(3;-2;0)$. D. $(3;-2;1)$.
- CÂU 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6)$, $B(-3;1;8)$, $C(-1;0;7)$, $D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2
- A. $I(0;-1;-3)$. B. $I(1;0;3)$ C. $I(0;1;3)$. D. $I(-1;0;-3)$.
- CÂU 8:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a + b + c$.
- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = 2$.
- CÂU 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 5 = 0$, $(Q): 2x - y + z - 5 = 0$ lần lượt tại các điểm A, B . Độ dài đoạn AB là
- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{3}$.
- CÂU 10:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-6)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A. $\sqrt{38}$. B. $2\sqrt{10}$. C. 8 . D. 12 .
- CÂU 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN .
- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{6}$. D. 4 .

CÂU 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;3;1), C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài đoạn AM là.

- A. $\sqrt{29}$. B. $2\sqrt{7}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\sqrt{30}$.

CÂU 13: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-m}{2}$ và mặt $c(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn EF lớn nhất

- A. $m=1$. B. $m=0$. C. $m=-\frac{1}{3}$. D. $m=\frac{1}{3}$.

CÂU 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}, d': \begin{cases} x=2t' \\ y=1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt

d, d' lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$. B. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.
C. $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-3}$. D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$.

CÂU 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$. D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

CÂU 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$. D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

CÂU 17: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0), B(1;0;-1)$ và $C(0;-1;2), D(0;m;k)$. Hệ thức giữa m và k để bốn điểm $ABCD$ đồng phẳng là:

- A. $m+k=1$. B. $m+2k=3$. C. $2m-3k=0$. D. $2m+k=0$.

CÂU 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM} = 2$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

CÂU 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ khi đó góc giữa 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

- A. 0 . B. $-\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

CÂU 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = 2; 1; -2$, $\vec{b} = 0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$. Tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau là

- A. $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$. D. $\frac{\pm \sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$.

CÂU 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = 2; 1; -2$, $\vec{b} = 0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$. Tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau là

- A. $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$. D. $\frac{\pm \sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$.

CÂU 22: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

- A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$. B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$. C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(1; 2; 3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{343}{6}$. B. $\frac{343}{18}$. C. $\frac{343}{12}$. D. $\frac{343}{36}$.

CÂU 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

- A. $2\sqrt{87}$. B. $\frac{\sqrt{349}}{2}$. C. $\sqrt{349}$. D. $\sqrt{87}$.

CÂU 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O . Biết rằng $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

- A. $\frac{245}{108}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{64}{27}$. D. $\frac{75}{32}$.

CÂU 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0; 1; 1)$; $B(1; 1; 0)$; $C(1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$. Thể tích khối chóp $M.ABC$ là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

CÂU 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

- A. $\vec{p} = (9; -12; 0)$. B. $\vec{p} = (45; -60; 0)$. C. $\vec{p} = (0; 9; -12)$. D. $\vec{p} = (0; 45; -60)$.
 $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

CÂU 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A. $M(3;3;-3)$. B. $M(-3;-3;3)$. C. $M(3;-3;3)$. D. $M(-3;3;3)$.

CÂU 29: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;0;0)$, $B(x_0; y_0; z_0)$, $x_0, y_0 > 0$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $AOB = 45^\circ$. Tìm tọa độ điểm C trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện $OABC$ bằng 8.

- A. $C(0;0;-2)$. B. $C(2;0;0)$.
C. $C(0;0;-2), C(0;0;2)$. D. $C(0;0;2)$.

CÂU 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Điểm D thuộc Oy và thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ điểm D là:

- A. $D(0;-7;0)$. B. $D(0;8;0)$.
C. $D(0;-7;0)$ hoặc $D(0;8;0)$. D. $D(0;7;0)$ hoặc $D(0;-8;0)$.

CÂU 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;-1;0)$, $B(3;3;2)$, $C(5;1;-2)$. Tìm tọa độ của tất cả các điểm S sao cho $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều có thể tích bằng 6.

- A. $S(4;0;-1)$ hoặc $S(2;2;1)$. B. $S(2;2;-1)$ hoặc $S(4;0;1)$.
C. $S(2;2;-1)$. D. $S(4;0;-1)$.

CÂU 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2)$, $B(3;-1;-4)$, $C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1 có thể là:

- A. $D(0;-3;-1)$. B. $D(0;2;-1)$. C. $D(0;3;-1)$. D. $D(0;1;-1)$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;0;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (3;-1;-2) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1;-1;-1)$ là một vtpt của (ABC) .

Phương trình (ABC) là: $x + y + z - 3 = 0$.

Gọi là $I(a;b;c)$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} IA = IB = IC \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = (a-3)^2 + b^2 + c^2 \\ a + b + c - 3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ 6a - 2b - 4c = 4 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

CÂU 2: Chọn B

Đường thẳng BC có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC} = (1;-1;3)$

$$\text{Nên phương trình đường thẳng } BC: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi $H(t; 2-t; 3t) \in BC$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH} = (t-2; 2-t; 3t)$.

Mà H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC nên

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t-2-2+t+9t=0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{11}.$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{4}{11}; \frac{18}{11}; \frac{12}{11}\right) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = \frac{34}{11}.$$

CÂU 3: Chọn A

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 2; -4)$. (OAB) có phương trình: $x + y + z = 0$

$$I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0.$$

$$\overrightarrow{AI} = (a; b-2; c+2), \overrightarrow{BI} = (a-2; b-2; c+4), \overrightarrow{OI} = (a; b; c).$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (c+4)^2 \\ (b-2)^2 + (c+2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=4 \\ -b+c=-2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a-c=4 \\ -b+c=-2 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=4 \\ -b+c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I(2; 0; -2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$$

CÂU 4: Chọn C

Ta có $\overrightarrow{DA} = (6; 0; 0)$, $\overrightarrow{DB} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{DC} = (0; 0; 3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D . Giả sử $M(x+1; y+2; z+3)$.

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6-x, MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2-y.$$

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3-z, \sqrt{3}MD = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2} \geq x+y+z.$$

$$\text{Do đó } P \geq (6-x) + (2-y) + (3-z) + (x+y+z) = 11.$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 11, \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z = 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

$$\text{Khi đó } M(1; 2; 3) \text{ suy ra } OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

CÂU 5: Chọn A

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'}) + 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0} \quad (2)$$

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$ nghĩa là

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} \text{ thì } (2) \Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Leftrightarrow G' \equiv G.$$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G = (1; 0; -2)$.

CÂU 6: Chọn A

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$. Với mọi điểm T trong không gian có:

$$(1): \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TA'}) + (\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TB'}) + (\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TC'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} \quad (2)$$

Hệ thức (2) chứng tỏ. Nếu $T \equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} = \vec{0}$ hay $T \equiv G'$ hay (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G = \left(\frac{3+0+0}{3}; \frac{1-1+0}{3}; \frac{0+0-6}{3} \right) = (1; 0; -2)$

Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

* Cách diễn đạt thứ hai:

Ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'}) + 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0} \quad (2)$$

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$ nghĩa là

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} \text{ thì } (2) \Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Leftrightarrow G' \equiv G$$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G = \left(\frac{3+0+0}{3}; \frac{1-1+0}{3}; \frac{0+0-6}{3} \right) = (1; 0; -2)$. Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

CÂU 7: Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\overrightarrow{DC} = (-2; -2; 4), \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang và } S_{ABCD} = 3S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{S,ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$$

Lại có H là trung điểm của $CD \Rightarrow H(0; 1; 5)$

$$\text{Gọi } S(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-a; 1-b; 5-c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = k[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = k(3; 3; 3) = (3k; 3k; 3k)$$

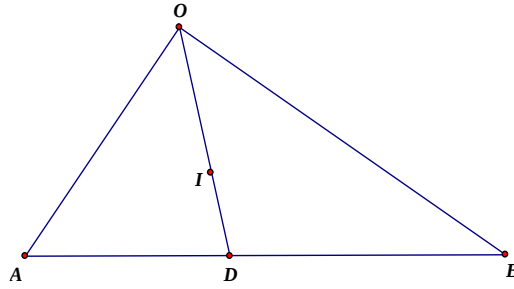
$$\text{Suy ra } 3\sqrt{3} = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 9k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

+) Với $k = 1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (3; 3; 3) \Rightarrow S(-3; -2; 2)$

+) Với $k = -1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-3; -3; -3) \Rightarrow S(3; 4; 8)$

Suy ra $I(0; 1; 3)$

CÂU 8: Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

Lại có: $OA = 3$, $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc $AOB \Rightarrow D$ thuộc đoạn AB .

Theo tính chất của phân giác trong ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow D = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

Tam giác OAB có diện tích $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 6$, nửa chu vi $p = \frac{OA + OB + AB}{2} = 6$

$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = 1$ là bán kính đường tròn nội tiếp; chiều cao $OH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{12}{5}$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB \Rightarrow I$ thuộc đoạn OD .

$$\text{Ta có: } \frac{DI}{DO} = \frac{r}{OH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{5}{12} \overrightarrow{DO} \Rightarrow I = (0; 1; 1) \text{ hay } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = a + b + c = 2$.

CÂU 9: Chọn C

Gọi $A(x; y; z)$ là tiếp điểm của mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = k \overrightarrow{n_P} \\ A \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2} \\ x + y + 2z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; 1; -3).$$

Gọi $B(x'; y'; z')$ là tiếp điểm của mặt phẳng $(Q): 2x - y + z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{IB} = k \overrightarrow{n_Q} \\ B \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x'-1}{2} = \frac{y'-2}{-1} = \frac{z'+1}{1} \\ 2x' - y' + z' - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3; 1; 0).$$

Độ dài đoạn $AB = 3\sqrt{2}$.

CÂU 10: Chọn A

Vì A thuộc $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ nên $A(1+2t; 1-t; -1+t)$.

Vì B thuộc $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ nên $B(-2+3t'; -1+t'; 2+2t')$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (2t-1; 2-t; 5+t)$, $\overrightarrow{MB} = (-4+3t'; t'; 8+2t')$.

Ta có, A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi

$$[\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ -4+3t' & t' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2-t & 5+t \\ t' & 8+2t' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 5+t & 2t-1 \\ 8+2t' & -4+3t' \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5tt' - 4t - 7t' + 8 = 0 & (1) \\ -3tt' - 8t - t' + 16 = 0 & (2) \\ -tt' + 20t + 17t' - 14 = 0 & (3) \end{cases}$$

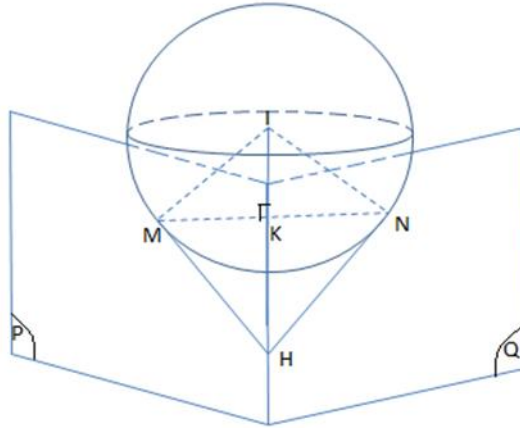
Từ (1) và (2):

$$\begin{cases} 5tt' - 4t - 7t' + 8 = 0 \\ t' = -2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t' = -2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, t' = 2 \\ t = 2, t' = 0 \end{cases}$$

Thay vào (3) ta được $t = 1, t' = 2$ thỏa mãn.

Với $t = 1, t' = 2$ ta được $A(3; 0; 0), B(4; 1; 6)$ suy ra $AB = \sqrt{38}$.

CÂU 11: Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1), R = \sqrt{2}$

Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (2; -1; 4)$ làm vector chỉ phương

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

$$H \in d \Leftrightarrow H(2t+2; -t; 4t)$$

Lại có:

$$\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t+1; -t-2; 4t-1) \cdot (2; -1; 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2t+1) - t - 2 + 4(4t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra tọa độ điểm $H(2; 0; 0)$.

$$\text{Vậy } IH = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\text{Suy ra: } HM = \sqrt{6-2} = 2$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng HI .

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{MI^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } MK = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

CÂU 12: Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-3; 3; 3) = 3(-1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BC}} = (-1; 1; 1)$.

Phương trình đường thẳng $BC: \begin{cases} x = -t_0 \\ y = 3 + t_0 \\ z = 1 + t_0 \end{cases}$.

Vì $M \in BC \Rightarrow M(-t_0; 3 + t_0; 1 + t_0)$, $\overrightarrow{MC} = (-3 + t_0; 3 - t_0; 3 - t_0)$ và $\overrightarrow{MB} = (t_0; t_0; t_0)$.

Từ $MC = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{(-3 + t_0)^2 + (3 - t_0)^2 + (3 - t_0)^2} = 2\sqrt{3t_0^2}$.

$\Leftrightarrow 3(3 - t_0)^2 = 4.3t_0^2 \Leftrightarrow (3 - t_0)^2 = (2t_0)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t_0 = 2t_0 \\ 3 - t_0 = -2t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_0 = -3 \end{cases}$.

$t_0 = 1 \Rightarrow M(-1; 4; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3; 4; 2) \Rightarrow AM = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{29}$.

$t_0 = -3 \Rightarrow M(-6; 6; 6) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (-6; 3; 5) \Rightarrow BM = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{70} > \sqrt{27} = BC \Rightarrow M \in BC$.

CÂU 13: Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d , khi đó H là trung điểm đoạn EF .

Ta có $EF = 2EH = 2\sqrt{R^2 - (d(I, (P)))^2}$. Suy ra EF lớn nhất khi $d(I, (P))$ nhỏ nhất

Đường thẳng d qua $A(1; -1; m)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 2)$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (0; 2; 2 - m)$, $[\overrightarrow{AI}, \vec{u}] = (2 + m; 2 - m; -2)$.

Suy ra $d(I, (P)) = \frac{|\overrightarrow{AI}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2m^2 + 12}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} \geq \sqrt{2}$.

Do đó $d(I, (P))$ nhỏ nhất khi $m = 0$. Khi đó $EF = 2EH = 2\sqrt{R^2 - (d(I, (P)))^2} = 2\sqrt{7}$.

CÂU 14: Chọn D

$\Delta \cap d = A(1 + t; 2 - t; t)$, $\Delta \cap d = B(2t'; 1 + t'; 2 + t')$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - t - 1 - t' - t + 1 + t' - t + 2 = 0 \\ 4t' - 2t - 2 + t' + t - 1 + t' - t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - 3t = -2 \\ 6t' - 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$.

Suy ra $A(2; 1; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

AB ngắn nhất suy ra AB là đoạn vuông góc chung của d , d' .

Vậy Δ đi qua $A(2; 1; 1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 3) \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$.

CÂU 15: Chọn D

Giả sử $M(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x; y; z + 1) \\ \overrightarrow{BM} = (x + 1; y - 1; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x - 1; y; z - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \\ BM^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 \end{cases}$
 $\Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3[x^2 + y^2 + (z + 1)^2] + 2[(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2] - [(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2]$

$$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 6 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y - 1)^2 + (2z + 2)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1, \text{ khi đó } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

CÂU 16: Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Giả sử } M(x; y; z) &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x; y; z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] \\ &\quad - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 6 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y - 1)^2 + (2z + 2)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}. \\ \text{Dấu "=" xảy ra} &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1, \text{ khi đó } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right). \end{aligned}$$

CÂU 17. Chọn B

$$\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1) \quad \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2) \quad \overrightarrow{AD} = (-1; m+2; k)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 1; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = m + 2k - 3$$

$$\text{Vậy bốn điểm } ABCD \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 2k = 3$$

Chú ý: Có thể lập phương trình (ABC) sau đó thay D để có kết quả.

CÂU 18: Chọn A

$$\text{Ta có: } M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z); \overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}; \overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$$

$$\text{Ta có: } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0)$$

$$\text{và } \overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2) \Rightarrow BM = \sqrt{118} = 2AB$$

CÂU 19 : Chọn A.

$$\text{Ta có: } |\vec{a} + \vec{b}| = 3 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 9 - 1^2 - 2^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2.$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

CÂU 20: Chọn D.

$$\text{Ta có: } \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} = 2; 2 - 3m\sqrt{2}; -4 + 3m\sqrt{2} \quad \text{và}$$

$$\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} = 2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 - 3m\sqrt{2} \cdot m + \sqrt{2} + -4 + 3m\sqrt{2} \cdot -2m - \sqrt{2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2} - 6m - 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}.$$

CÂU 21: Chọn D.

Ta có: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} = 2; 2 - 3m\sqrt{2}; -4 + 3m\sqrt{2}$ và

$$\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} = 2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}.$$

Khi đó: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 - 3m\sqrt{2} \cdot m + \sqrt{2} + -4 + 3m\sqrt{2} \cdot -2m - \sqrt{2} = 0.$

$$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2} - 6m - 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}.$$

CÂU 22: Chọn A

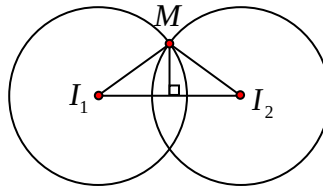
Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = (x; y+1; z-2), \overrightarrow{BM} = (x-2; y+3; z), \overrightarrow{CM} = (x+2; y-1; z-1), \overrightarrow{DM} = (x; y+1; z-3).$$

$$\text{Từ giả thiết: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1; -2; 1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1; 0; 2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}.$

$$\text{Để thấy: } r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

CÂU 23: Chọn D

$$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).$$

$$\overrightarrow{SA} = (a-1; -2; -3); \overrightarrow{SB} = (-1; b-2; -3); \overrightarrow{SC} = (-1; -2; c-3).$$

Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=14 \\ 2b+3c=14 \\ a+3c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=\frac{7}{2} \\ c=\frac{7}{3} \end{cases}.$$

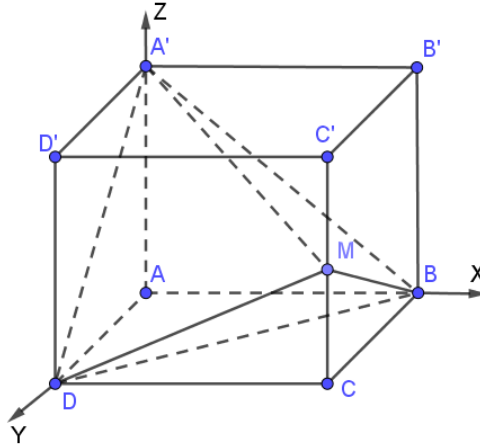
$$\text{Do } SA, SB, SC \text{ đôi một vuông góc, nên: } V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{343}{36}.$$

CÂU 24: Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 8)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 6) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3)$.

$$\text{Vậy: } S_{ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}.$$

CÂU 25: Chọn C



Ta có: $A(0; 0; 0)$, $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ suy ra $C(m; m; 0)$, $B'(m; 0; n)$, $C'(m; m; n)$, $D'(0; m; n)$, $M\left(m; m; \frac{n}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{BD} = (-m; m; 0), \overrightarrow{BA'} = (-m; 0; n), \overrightarrow{BM} = \left(0; m; \frac{n}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} V_{BDA'M} &= \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM} \right| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot n| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot (4 - m)| = \frac{1}{8} |m \cdot m \cdot (8 - 2m)| \leq \frac{1}{8} \left(\frac{m + m + 8 - 2m}{3} \right)^3 \\ &= \frac{64}{27}. \end{aligned}$$

CÂU 26: Chọn A

Gọi điểm $M(x; y; z)$.

Vì điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = MC$ nên

$$\begin{cases} M \in (P) \\ MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 \\ x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1; 1)$$

Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (1; 0; 0); \overrightarrow{MB} = (0; 0; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] = (0; -1; 0)$$

$$\overrightarrow{MC} = (0; 1; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] \cdot \overrightarrow{MC} = -1$$

$$V_{M.ABC} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] \cdot \overrightarrow{MC} \right| = \frac{1}{6}.$$

CÂU 27: Chọn A

$$\text{Ta có: } [\vec{m}; \vec{n}] = (3; -4; 0)$$

Do $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}; \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k[\vec{m}; \vec{n}]$, $k > 0$

Mặt khác: $|\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow k \cdot \left| \left[\vec{m}, \vec{n} \right] \right| = 15 \Leftrightarrow k \cdot 5 = 15 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

CÂU 28: Chọn D

Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0}$ (1)

Ta có $\vec{IA}(-3-a; -b; -c)$, $\vec{IB}(-a; -b; 3-c)$, $\vec{IC}(-a; 3-b; -c)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3-a=0 \\ b-3=0 \\ 3-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow I(-3; 3; 3).$$

Nhận thấy $I(-3; 3; 3) \in (P)$

$$\left| \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} \right| = \left| \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} \right| = \left| \vec{MI} \right| = MI \geq 0.$$

$\left| \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} \right|$ nhỏ nhất bằng 0 khi $M(-3; 3; 3)$.

CÂU 29: Chọn C

$$\bullet \vec{AB} = (x_0 - 4; y_0; 0) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_0 - 4)^2 + y_0^2} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (x_0 - 4)^2 + y_0^2 = 40 \quad (*)$$

$$\bullet \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{|\vec{OA} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{|4x_0|}{4\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow 2|x_0| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \Leftrightarrow 4x_0^2 = 2(x_0^2 + y_0^2) \Leftrightarrow x_0^2 = y_0^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 = -y_0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Từ } x_0 = y_0 \Rightarrow (x_0 - 4)^2 + x_0^2 = 40 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ x_0 = -2 < 0 \end{cases}$$

Vì $C \in Oz$ nên $C(0; 0; c)$.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \left| [\vec{OA}, \vec{OB}] \cdot \vec{OC} \right| = 8.$$

$$[\vec{OA}, \vec{OB}] = (-y_0; 0; 4y_0) = (-6; 0; 24) \dots$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} |24z_0| = 8 \Leftrightarrow |z_0| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 2 \\ z_0 = -2 \end{cases} \dots$$

Vậy $C(0; 0; 2)$, $C(0; 0; -2)$..

CÂU 30 : Chọn C

$$\vec{AB} = (1; -1; 2); \vec{AC} = (0; -2; 4) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (0; -4; -2). \text{ Gọi } D(0; t; 0).$$

$$\Rightarrow \vec{AD}(-2; t-1; 1); V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right| = 5 \Leftrightarrow |-4t+2| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \Rightarrow D(0; -7; 0) \\ t = 8 \Rightarrow D(0; 8; 0) \end{cases}$$

CÂU 31: Chọn B

Ta có: $\vec{AB} = (2; 4; 2)$, $\vec{AC} = (4; 2; -2)$, $\vec{BC} = (2; -2; -4)$, suy ra $AB = AC = BC = 2\sqrt{6}$, suy ra tam

giác ABC đều. Gọi $S(a; b; c)$ ta có $SA = SB = SC \Leftrightarrow \begin{cases} SA^2 = SB^2 \\ SA^2 = SC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c-5=0 \\ 2a+b-c-7=0 \end{cases}$. Đặt

$a = u$.

$\Rightarrow S(u; 4-u; u-3)$. Ta có $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (-12; 12; -12)$, $\vec{AS}(u-1; 5-u; u-3)$..

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AS} \right| = 6 \Leftrightarrow |u-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ u = 2 \end{cases}.$$

Vậy $S(4;0;1)$ hoặc $S(2;2;-1)$.

CÂU 32: Chọn C

Do $D \in (Oyz) \longrightarrow D(0;b;c)$ với $c < 0$.

$$\text{Theo giả thiết: } d[D, (Oxy)] = 1 \Leftrightarrow |c| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 (\text{loại}) \\ c = -1 \end{cases} \longrightarrow D(0;b;-1).$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; b; 1)$.

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2) \longrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 6b - 6.$$

$$\text{Cũng theo giả thiết, ta có: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = |b-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Đối chiếu các đáp án chỉ có D thỏa mãn.

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Ví dụ 1 : Trong không gian Oxyz, gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ và đi qua điểm $M(0;3;9)$. Biết điểm I có hoành độ là số nguyên và cách đều hai mặt phẳng $x-2y+2z+2=0$, $3x-2=0$. Phương trình của (S) là

- A. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = \sqrt{88}$. B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-9)^2 = 5$.
C. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$. D. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 73$.

Lời giải

Chọn C

Vì tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ nên $I = (2t; 3t; 1+4t)$.

Ta có hệ:

$$\frac{|(2t) - 2(3t) + 2(1+4t) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3(2t) - 2|}{\sqrt{3^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2t + 2| = |3t - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow I(6; 9; 13) \\ t = -\frac{1}{5} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Vì điểm I có hoành độ là số nguyên, do đó $I(6; 9; 13)$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{(-6)^2 + (3-9)^2 + (9-13)^2} = \sqrt{88}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu cần lập là: $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $M(2; -1; 0)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mp (Oxy) tại điểm M . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu thỏa mãn?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } d: \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = -2+t \end{cases} \text{ nên } I \in d \Rightarrow I(3+t; t; -2+t), \overrightarrow{IM} = (1+t; t+1; -2+t)$$

Mặt phẳng (Oxy) có vpt $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{IM}; \vec{k}] = (1+t; -t-1; 0) = \vec{0} \Leftrightarrow t+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \text{ nên } I(2; -1; -3)$$

$$R = d(I, (Oxy)) = \frac{|3|}{1} = 3. \text{ Vậy } (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9.$$

VÍ DỤ 3 : Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ và đi qua điểm $M(0;3;9)$. Biết điểm I có hoành độ là số nguyên và cách đều hai mặt phẳng $x-2y+2z+2=0$, $3x-2=0$. Phương trình của (S) là

- A. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = \sqrt{88}$. B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-9)^2 = 5$.
C. $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$. D. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 73$.

Lời giải

Chọn C

Vì tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ nên $I = (2t; 3t; 1+4t)$.

Ta có hệ:

$$\frac{|(2t) - 2(3t) + 2(1+4t) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3(2t) - 2|}{\sqrt{3^2}}$$

$$\Leftrightarrow |2t+2| = |3t-1| \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow I(6;9;13) \\ t=-\frac{1}{5} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Vì điểm I có hoành độ là số nguyên, do đó $I(6;9;13)$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{(-6)^2 + (3-9)^2 + (9-13)^2} = \sqrt{88}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu cần lập là: $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-13)^2 = 88$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

- A. $(x+3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$ B. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 5$
C. $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 5$ D. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-4)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IM} = (-2; -2; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] = (9; -9; 0) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] \right| = 9\sqrt{2}.$$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là

$$d(I, \Delta) = \frac{\left| [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = 3.$$

$$\text{Diện tích tam giác } IAB \text{ bằng } 12 \text{ nên } AB = \frac{2S_{IAB}}{d(I, \Delta)} = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8.$$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + [d(I, \Delta)]^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Phương trình mặt cầu (S) cần lập là $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và hai điểm $M(4; -4; 2)$, $N(6; 0; 6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E.

A. $x - 2y + 2z + 8 = 0$. B. $2x + y - 2z - 9 = 0$. C. $2x + 2y + z + 1 = 0$. D. $2x - 2y + z + 9 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi K là trung điểm của MN $\Rightarrow K(5; -2; 4)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S).

Do đó $\overrightarrow{IK} = (4; -4; 2)$, $\overrightarrow{MN} = (2; 4; 4)$, $MN = 6$ và $IK \perp MN$.

Ta có $EM + EN \leq \sqrt{2(EM^2 + EN^2)} = \sqrt{2\left(EK^2 + \frac{MN^2}{2}\right)} = \sqrt{2EK^2 + 36}$.

Bởi vậy $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $EM = EN$ và EK lớn nhất.

Vì $IK \perp MN$ nên $EM = EN$ thì E thuộc đường thẳng IK: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm E của đường thẳng IK với mặt cầu (S) ứng với t là nghiệm phương trình:

$$(1+2t-1)^2 + (2-2t-2)^2 + (2+t-2)^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Như vậy $E_1(3; 0; 3)$ hoặc $E_2(-1; 4; 1)$.

Ta có $E_1K = 3$, $E_2K = 9$. Suy ra $E = (-1; 4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (-2; 2; -1)$,

nên phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E có phương trình:

$$-2(x+1) + 2(y-4) - 1(z-1) = 0 \text{ hay } 2x - 2y + z + 9 = 0.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I(-2;-2;-8)$; $R=3$.
 B. $I(-1;-1;-4)$; $R=\sqrt{6}$.
 C. $I(-1;-1;-4)$; $R=3$.
 D. $I(-1;-1;-4)$; $R=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

CÂU 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;-2)$, $B(4;0;0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O , A , B có tâm là

- A. $I(0;0;-1)$.
 B. $I(2;0;0)$.
 C. $I(2;0;-1)$.
 D. $I\left(\frac{4}{3};0;-\frac{2}{3}\right)$.

Vậy $I(2;0;-1)$.

CÂU 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $l=2\sqrt{13}$.
 B. $l=2\sqrt{41}$.
 C. $l=2\sqrt{26}$.
 D. $l=2\sqrt{11}$.

CÂU 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha): x=1$, $(\beta): y=-1$, $(\gamma): z=1$. Bán kính mặt cầu (S) bằng.

- A. 3.
 B. $\sqrt{33}$.
 C. $3\sqrt{2}$.
 D. 1.

CÂU 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-1;-6)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn chứa đường thẳng Δ ; (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc mặt phẳng (P) sao cho mặt cầu (S) có bán kính lớn nhất. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R=5$.
 B. $R=3\sqrt{2}$.
 C. $R=2\sqrt{5}$.
 D. $R=2\sqrt{3}$.

CÂU 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $A(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.
 B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.
 C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0$.

CÂU 7: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$ và $C(0;0;6)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

- A. $\frac{7}{2}$.
 B. $\sqrt{11}$.
 C. 11.
 D. $\frac{7}{3}$.

CÂU 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho m, n là hai số thực dương thỏa mãn $m+2n=1$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(P): mx + ny + mnz - mn = 0$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Khi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất thì $2m+n$ có giá trị bằng

- A. $\frac{3}{5}$.
 B. $\frac{4}{5}$.
 C. $\frac{2}{5}$.
 D. 1.

CÂU 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 81$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

CÂU 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1, t \in \mathbb{R}; \\ z=t \end{cases}$

$$d_2: \begin{cases} x=2 \\ y=u, u \in \mathbb{R}; \\ z=1+u \end{cases} \quad \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}. \text{ Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả } d_1, d_2$$

và có tâm thuộc đường thẳng Δ ?

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. B. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.
C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. D. $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

CÂU 11: Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H , sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

- A. $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$. B. $(x+8)^2 + (y+8)^2 + (z-1)^2 = 196$.
C. $(x+16)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 196$. D. $(x-16)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 196$.

CÂU 12: Cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 10 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$,

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1 , tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P) , có phương trình:

- A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ hoặc $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.
B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ hoặc $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.
C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

CÂU 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$ và điểm $I(1;1;0)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (P) là:

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{6}$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{\sqrt{6}}$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$.

CÂU 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(\frac{-8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

CÂU 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C(1;1;4)$, $D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C, D .

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

CÂU 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng

$(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $5\sqrt{2}$.

C. $7\sqrt{2}$.

D. $12\sqrt{2}$.

CÂU 17: Trong không gian $Oxyz$ cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

A. $r = \sqrt{3}$

B. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$

C. $r = \sqrt{2}$

D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

CÂU 18: Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=2 \\ y=t' \\ z=1+t' \end{cases}$ và $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Δ và tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' . Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$.

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

D. $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

CÂU 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$ và 2 mặt phẳng (P) và (Q)

lần lượt có phương trình $x + 2y + 2z + 3 = 0$; $x + 2y + 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d , tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$.

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

C. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

CÂU 20: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $I(1; -2; 5)$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

A. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-5)^2 = 40$.

B. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-5)^2 = 49$

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-5)^2 = 69$.

D. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-5)^2 = 64$.

CÂU 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$. Biết rằng mặt cầu (S) có bán kính bằng $2\sqrt{2}$ và cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tọa độ của điểm I .

A. $I(1; -2; 2), I(-1; 2; -2)$.

B. $I(1; -2; 2), I(0; -3; 0)$.

C. $I(1; -2; 2), I(5; 2; 10)$.

D. $I(5; 2; 10), I(0; -3; 0)$.

CÂU 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ có

bán kính $R = \sqrt{19}$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5+t \\ y = -2-4t \\ z = -1-4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$. Trong các số

$\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $\{-6; -12; -14; 75\}$.

B. $\{6; 10; 20; 7\}$.

C. $\{-10; 4; 2; 47\}$.

D. $\{3; 5; 6; 29\}$.

CÂU 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$; $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$ cắt nhau theo một đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng (P) . Cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Có bao nhiêu mặt cầu tâm thuộc (P) và tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA ?

A. 4 mặt cầu.

B. 2 mặt cầu.

C. 3 mặt cầu.

D. 1 mặt cầu.

CÂU 24: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 2 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng (d) , có bán kính nhỏ nhất, tiếp xúc với (P) và đi qua điểm $A(1; -1; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

B. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

C. $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

D. $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

CÂU 25 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) , đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R = 3$.

B. $R = 9$.

C. $R = 1$.

D. $R = 5$.

CÂU 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ x = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$. Biết rằng khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính mặt cầu đó.

- A. $5\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $7\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{5}$.

CÂU 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu S có bán kính nhỏ nhất là

- A. $R = 2\sqrt{2} - 1$. B. $R = \sqrt{10}$. C. $R = 2\sqrt{2}$. D. $R = \sqrt{10} - 1$.

CÂU 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $A = 2x_M - y_M + 2z_M$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ bằng.

- A. 21 B. 3 C. 5 D. 10

CÂU 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $A = 2x_M - y_M + 2z_M$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ bằng.

- A. 21 B. 3 C. 5 D. 10

CÂU 30: Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

- A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{6}{11}$

CÂU 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;7)$, $B\left(\frac{-5}{7}; \frac{-10}{7}; \frac{13}{7}\right)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I đi qua hai điểm A , B sao cho OI nhỏ nhất. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (S) , giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2a - b + 2c$ là

- A. 18. B. 7. C. 156. D. 6.

CÂU 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ và $M(x_0; y_0; z_0) \in (S)$ sao cho $A = x_0 + 2y_0 + 2z_0$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 1.

CÂU 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Mặt cầu (S) luôn qua A , B , C và đồng thời cắt ba tia Ox , Oy , Oz tại ba điểm phân biệt M , N , P . Gọi H là trực tâm của tam giác MNP . Tìm giá trị nhỏ nhất của HI với $I(4;2;2)$.

- A. $\sqrt{10}$. B. $\sqrt{7}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{5}$.

CÂU 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$ và điểm $M(0;1;0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON = \sqrt{6}$. Tính y_0 .

A. -2. B. 2. C. -1. D. 3.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn C

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Khi đó $AM^2 + BM^2 = 30$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 16z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 8z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 9$$
 là phương trình của mặt cầu (S) , có tâm $I(-1; -1; -4)$ và bán kính $R = 3$.

CÂU 2: Chọn C

Gọi J là trung điểm $AB \Rightarrow J(2; 0; -1)$

Tam giác ABO vuông tại O nên J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .

Gọi I là tâm mặt cầu (S) , (S) qua các điểm A, B, O .

Ta có đường thẳng IJ qua J và có một VTCP là $\vec{j} = (0; 1; 0)$ nên có PTTS

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = b \\ z = -1 \end{cases} . I \in (IJ) \Rightarrow I(2; b; -1), IA = \sqrt{b^2 + 5} \Rightarrow IA \geq \sqrt{5} . \text{Dấu bằng xảy ra khi } b = 0$$

Vậy $I(2; 0; -1)$.

CÂU 3: Chọn C.

Gọi tâm mặt cầu là $I(x; y; 0)$.

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}.$$

CÂU 4: Chọn A

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu.

Ta có: $\begin{cases} |a-1| = |b+1| (*) \\ |a-1| = |c-1| (**) \\ (a-1)^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2 + (c-5)^2 (***) \end{cases}$

Từ $(*) (**) \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ b + c + 2 = 0 \end{cases}$.

Xét $b = -c$:

$$\text{- Từ (**)} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ a + c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{- Với } a = c \text{ thay vào (***)} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \Rightarrow R = |a - 1| = 3. \\ c = 4 \end{cases}$$

Tương tự các trường hợp khác. Chọn A.

CÂU 5: Chọn B

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ .

Ta có: $IH = d(I, \Delta) \geq d(I, (P))$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa I và vuông góc Δ .

Ta tìm được $(\alpha): x + 2y - 2z - 12 = 0$.

Tọa độ H là giao điểm của (α) và (Δ) nên là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \\ x + 2y - 2z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}.$$

Vậy: $H(2; 2; -3)$. Bán kính $R = IH = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

CÂU 6: Chọn A

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 0^2 - 2.a.2 - 2.b.0 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 4^2 + 0^2 - 2.a.0 - 2.b.4 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 6^2 - 2.a.0 - 2.b.0 - 2.c.6 + d = 0 \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 - 2.a.2 - 2.b.4 - 2.c.6 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3)$ và $R = \sqrt{14} \Rightarrow R' = 2\sqrt{14}$.

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1; 2; 3)$ và $R' = 2\sqrt{14}: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

CÂU 7: Chọn A

Phương trình mặt cầu có dạng: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Do A, B, C và O thuộc mặt cầu (S) nên:

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \\ 36 - 12c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = -\frac{3}{2}, c = 3, d = 0.$$

Do đó, mặt cầu có bán kính bằng: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{7}{2}$.

CÂU 8: Chọn B

Phương trình mặt phẳng $(P): mx + ny + mnz - mn = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{n} + \frac{y}{m} + \frac{z}{1} = 1$.

Do A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz nên $A(n;0;0); B(0;m;0); C(0;0;1)$ khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $I\left(\frac{n}{2}; \frac{m}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

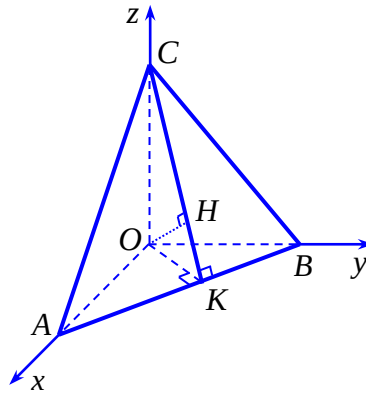
Theo đề bài ta có $m+2n=1 \Leftrightarrow m=1-2n \Rightarrow I\left(\frac{n}{2}; \frac{1-2n}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

$$R=OI=\frac{1}{2}\sqrt{5n^2-4n+2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(n-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{6}{5}}\geq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ nhỏ nhất khi $n=\frac{2}{5} \Rightarrow m=\frac{1}{5} \Rightarrow 2m+n=\frac{4}{5}$.

CÂU 9: Chọn C



Ta có H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB \quad (1)$$

Mà $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp OH$ (*)

Tương tự $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R=OH=3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

CÂU 10: Chọn A

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1}=(0;0;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2;0;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2}=(0;1;1)$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I \in \Delta$ nên ta tham số hóa $I(1+t;t;1+t)$, từ đó

$$\vec{IM_1}=(-t;1-t;-1-t), \quad \vec{IM_2}=(1-t;-t;-t).$$

Theo giả thiết ta có $d(I; d_1) = d(I; d_2)$, tương đương với

$$\frac{\left| \overrightarrow{IM_1}; \overrightarrow{u_{d_1}} \right|}{\left| \overrightarrow{u_{d_1}} \right|} = \frac{\left| \overrightarrow{IM_2}; \overrightarrow{u_{d_2}} \right|}{\left| \overrightarrow{u_{d_2}} \right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-t)^2 + t^2}}{1} = \frac{\sqrt{2(1-t)^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $I(1; 0; 1)$ và bán kính mặt cầu là $R = d(I; d_1) = 1$. Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

CÂU 11: Chọn A

• Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) . Suy ra $d: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

• Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H = d \cap (P)$.

Vì $H \in d$ nên $H(2+6t; 5+3t; 1-2t)$.

• Mặt khác, $H \in (P)$ nên ta có: $6(2+6t) + 3(5+3t) - 2(1-2t) + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó, $H(-4; 2; 3)$.

• Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π , suy ra $4\pi R^2 = 784\pi \Rightarrow R = 14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH \perp (P) \Rightarrow I \in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t; 5+3t; 1-2t)$, với $t \neq -1$.

• Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I, (P)) = 14 \\ AI < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|6(2+6t) + 3(5+3t) - 2(1-2t) + 24|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 14 \\ \sqrt{(6t)^2 + (3t)^2 + (-2t)^2} < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \\ -2 < t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó: $I(8; 8; -1)$.

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$.

CÂU 12: Chọn A

• $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2; 0; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a_2} = (1; 1; 4)$.

• Giả sử $I(2+t; t; 1-t) \in \Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S) .

• Ta có: $\vec{AI} = (t; t; 4-t) \Rightarrow [\vec{AI}, \vec{a_2}] = (5t-4; 4-5t; 0) \Rightarrow d(I; \Delta_2) = \frac{|\vec{AI}, \vec{a_2}|}{|\vec{a_2}|} = \frac{|5t-4|}{3}$

$$d(I, (P)) = \frac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|t+10|}{3}.$$

• (S) tiếp xúc với Δ_2 và $(P) \Leftrightarrow d(I, \Delta_2) = d(I, (P)) \Leftrightarrow |5t-4| = |t+10| \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ t = -1 \end{cases}$.

- Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow I\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $R = \frac{9}{2} \Rightarrow (S): \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.
- Với $t = -1 \Rightarrow I(1; -1; 2)$, $R = 3 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

CÂU 13: Chọn B

Mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng nên bán kính mặt cầu là: $r = d(I, (P)) = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$.

CÂU 14: Chọn B

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

Ta áp dụng tính chất sau: “Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a\vec{IO} + b\vec{IM} + c\vec{IN} = \vec{0}$, với $a = MN$, $b = ON$, $c = OM$ ”.

Ta có $OM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, $ON = \sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4$.

$MN = \sqrt{\left(\frac{-8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 1\right)^2} = 5$.

$$5\vec{IO} + 4\vec{IM} + 3\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5.0 + 4.2 + 3.\left(\frac{-8}{3}\right)}{3+4+5} = 0 \\ y_I = \frac{5.0 + 4.2 + 3.\left(\frac{4}{3}\right)}{3+4+5} = 1 \\ z_I = \frac{5.0 + 4.2 + 3.\left(\frac{8}{3}\right)}{3+4+5} = 1 \end{cases}$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R = d(I, (Oxz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

CÂU 15: Chọn A

Cách 1:

Gọi $(\alpha): x + ay + bz + c = 0$ là mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

$\vec{CD} = (4; 2; -4)$. $CD // (\alpha) \Rightarrow \vec{CD} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{CD} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n} = (1; a; b)$ là vectơ pháp tuyến của (α))

$$\Rightarrow 4 + 2a - 4b = 0 \Rightarrow a = 2b - 2 \quad (1)$$

(α) tiếp xúc (S_1) nên

$$d(A; (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1 + 2a - 3b + c|}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow |1 + 2a - 3b + c| = 3\sqrt{1 + a^2 + b^2} \quad (2)$$

(α) tiếp xúc (S_2) nên

$$d(B;(\alpha)) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{3}{2} + \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + c \right|}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |3+3a-b+2c| = 3\sqrt{1+a^2+b^2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) ta có } |1+2a-3b+c| = |3+3a-b+2c| \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a-3b+c = 3+3a-b+2c \\ 1+2a-3b+c = -3-3a+b-2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c+2=0 \\ 5a-4b+3c+4=0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2b-2+2b+c+2=0 \\ 10b-10-4b+3c+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-4b & (4) \\ c=2-2b & (5) \end{cases}$$

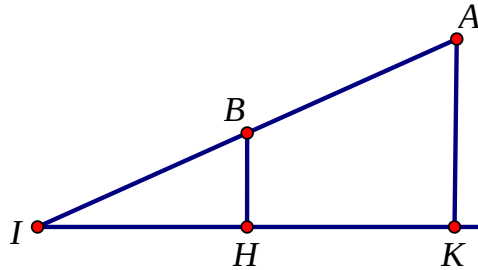
$$\text{Từ (1), (2), (4)} \Rightarrow |1+4b-4-3b-4b| = 3\sqrt{1+(2b-2)^2+b^2} \Leftrightarrow |-3b-3| = 3\sqrt{5b^2-8b+5}$$

$$\Leftrightarrow b^2+2b+1 = 5b^2-8b+5 \Leftrightarrow 4b^2-10b+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \Rightarrow a=2; c=-8 \\ b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-1; c=-2 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2), (5)} \Rightarrow |1+4b-4-3b+2-2b| = 3\sqrt{1+(2b-2)^2+b^2} \Leftrightarrow |-b-1| = 3\sqrt{5b^2-8b+5}$$

$$\Leftrightarrow b^2+2b+1 = 9(5b^2-8b+5) \Leftrightarrow 44b^2-74b+44=0. \text{ Phương trình vô nghiệm.}$$

Mặt khác $CD \parallel (\alpha)$ nên $C, D \notin (\alpha)$ nên $(\alpha): x+2y+2z-8=0$.



Cách 2:

Ta có $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ mà $R_1 + R_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ nên hai mặt cầu cắt nhau theo một đường tròn giao tuyến.

Gọi $I = AB \cap (\alpha)$ với (α) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Hạ BH, AK vuông góc với mặt phẳng (α) .

Khi đó ta có I nằm ngoài AB và B là trung điểm AI vì $R_2 = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}R_1 \Leftrightarrow BH = \frac{1}{2}AK$.

Suy ra $I(2;1;2)$.

Gọi $(\alpha): a(x-2)+b(y-1)+c(z-2)=0$.

Vì $(\alpha) \parallel CD$ mà $\overrightarrow{CD} = (4;2;-4)$ nên ta có $2a+b-2c=0 \Leftrightarrow b=2c-2a$

Khi

đó

$$d(A;(\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-a+b-5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3 \Leftrightarrow (c+a)^2 = a^2 + (2c-2a)^2 + c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2c \Rightarrow b=-2c \\ a=\frac{1}{2}c \Rightarrow b=c \end{cases}.$$

Ta có hai trường hợp :

$$1) b=-2c; a=2c \Rightarrow (\alpha): 2c(x-2)-2c(y-1)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z-4=0$$

Mặt khác $CD \parallel (\alpha)$ nên $C, D \notin (\alpha) \Rightarrow$ loại trường hợp trên.

$$2) b=c; a=\frac{1}{2}c \Rightarrow (\alpha): \frac{1}{2}c(x-2)+c(y-1)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-8=0$$

Kiểm tra thấy $C, D \notin (\alpha)$ nên nhận trường hợp này.

Vậy $(\alpha): x+2y+2z-8=0$.

CÂU 16: Chọn D

Gọi $I(a;b;c), r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

$$r=d(I,(P))=\frac{|2ma+(m^2+1)b+(m^2-1)c-10|}{(m^2+1)\sqrt{2}}=\frac{|(b-c)m^2+2ma+b-c-10|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$$

$$|(b+c)m^2+2ma+b-c-10|=r(m^2+1)\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c-r\sqrt{2})m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 & (1) \\ (b+c+r\sqrt{2})m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } (b+c-r\sqrt{2})m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 \quad (1)$$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trở thành tìm điều kiện a, b, c sao cho (1) không phụ thuộc vào m . Do đó (1) luôn đúng với mọi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c-r\sqrt{2}=0 \\ a=0 \\ b-c-r\sqrt{2}-10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=r\sqrt{2}+5=0 \\ a=0 \\ c=-5 \end{cases} \quad \text{Suy ra } I(0;5+r\sqrt{2};-5) \Rightarrow (S): x^2+(y-5-r\sqrt{2})^2+(z+5)^2=r^2.$$

$$\text{Lại có } A \in (S) \text{ nên suy ra: } 4+(-11-5-r\sqrt{2})^2=r^2 \Leftrightarrow r^2-12\sqrt{2}r+40=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r=2\sqrt{2} \\ r=10\sqrt{2} \end{cases}$$

TH2: $(b+c+r\sqrt{2})m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại: Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là: $12\sqrt{2}$ suy ra

CÂU 17 : Chọn D

Gọi $I(m;0;0)$ là tâm mặt cầu có bán kính R , d_1, d_2 là các khoảng cách từ I đến (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } d_1=\frac{|m+1|}{\sqrt{6}} \text{ và } d_2=\frac{|2m-1|}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Theo đề ta có } \sqrt{d_1^2+4}=\sqrt{d_2^2+r^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2+2m+1}{6}+4}=\sqrt{\frac{4m^2-4m+1}{6}+r^2}$$

$$\Leftrightarrow m^2-2m+2r^2-8=0 \quad (1).$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm $m \Leftrightarrow 1-(2r^2-8)=0$

$$\Leftrightarrow r^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow r=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 18: Chọn A

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\Delta: \begin{cases} x=1+m \\ y=m \\ z=1+m \end{cases}$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ta có

$$I(m+1; m; m+1).$$

Đường thẳng d đi qua $A(1;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (0;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (m; m-1, m+1)$.

Đường thẳng d đi qua $B(2;0;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (0;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = (m-1; m, m)$.

Do (S) tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' nên ta có: $d(I; d) = d(I; d') = R$

$$\frac{\left| \left[\overrightarrow{IA}; \vec{u}_1 \right] \right|}{\left| \vec{u}_1 \right|} = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IB}; \vec{u}_2 \right] \right|}{\left| \vec{u}_2 \right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(m-1)^2 + m^2}}{1} = \frac{\sqrt{(m-1)^2 + (m-1)^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 0$$

$\Rightarrow I(1;0;1)$ và $R=1$. Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

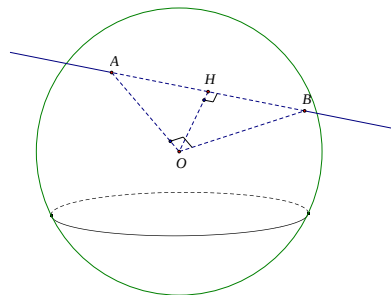
CÂU 19: Chọn B

Ta có $I \in d \Rightarrow I(t; -1; -t)$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) và (Q) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} d(I; (P)) &= d(I; (Q)) \\ \Leftrightarrow \frac{|t-2-2t+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} &= \frac{|t-2-2t+7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \\ \Leftrightarrow |1-t| &= |5-t| \\ \Leftrightarrow t &= 3 \end{aligned}$$

Vậy tọa độ tâm mặt cầu là $I(3; -1; -3)$ với bán kính $R = d(I; (Q)) = \frac{|3-2-2 \times 3+7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3}$.

CÂU 20: Chọn A.



Đường thẳng d đi qua $M(2;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;6;2)$.

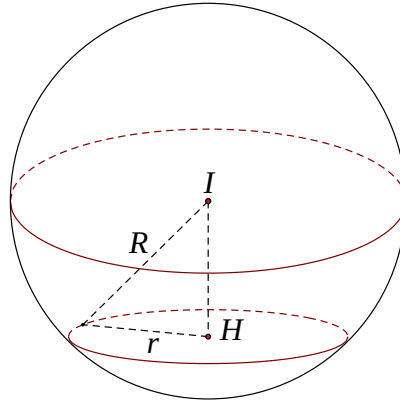
Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = d(I, d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|}$, với

$$\overrightarrow{IM} = (1; 2; -4), \vec{u} = (3; 6; 2) \quad IH = d(I, d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \sqrt{20}.$$

Theo đề bài ta có tam giác IAB vuông cân tại I nên $IA = IH\sqrt{2} = \sqrt{40}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-5)^2 = 40$.

CÂU 21: Chọn C



Mặt phẳng $(Oxz): y = 0$. $I \in \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2} \Rightarrow I(t; -3+t; 2t)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxz) . R, r lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đường tròn giao tuyến. Theo bài ta có $IH = d(I, (Oxz)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$.

$$\Leftrightarrow \frac{|-3+t|}{1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

Với $t = 1 \Rightarrow I(1; -2; 2)$, với $t = 5 \Rightarrow I(5; 2; 10)$.

CÂU 22: Chọn A.

Ta có $I \in d \Rightarrow I(5+t; -2-4t; -1-4t)$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I; (P)) = R = \sqrt{19} \Leftrightarrow |19+19t| = 19 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$

Mặt khác (S) có tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$; bán kính $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}} - d = \sqrt{19}$

Xét khi $t = 0 \Rightarrow I(5; -2; -1) \Rightarrow \{a; b; c; d\} = \{-10; 4; 2; 47\}$

Do $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d \neq 19$ nên ta loại trường hợp này.

Xét khi $t = 2 \Rightarrow \{a; b; c; d\} = \{-6; -12; -14; 75\}$

Do $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d = 19$ nên thỏa.

CÂU 23: Chọn A

Mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C) có phương trình là: $6x + 3y + 2z = 0$.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Do đó $(P) \parallel (ABC)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng AB, BC, CA sẽ giao với mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA . Trên mặt phẳng (ABC) có 4 đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA đó là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ba đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C . Do đó có 4 mặt cầu có tâm nằm trên (P) và tiếp xúc với

cả ba đường thẳng AB , BC , CA . Tâm của 4 mặt cầu là hình chiếu của tâm 4 đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng AB , BC , CA lên mặt phẳng (P) .

CÂU 24: Chọn B

Gọi I , R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) . Ta có: $I \in (d)$.

$\Rightarrow I(1+3t; -1+t; t) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (3t; t; t-1)$. (S) tiếp xúc với (P) và A nên ta có:

$$R = AI = d_{(I, (P))} = \frac{|5t+3|}{3} \Rightarrow 37t^2 - 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{24}{37} \end{cases}$$

Do mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất nên ta chọn $t = 0$, suy ra $I(1; -1; 0)$, $R = 1$.

Vậy $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

CÂU 25 : Chọn A

Gọi $I(a; b; c)$

Ta có $IA = IO = R \Leftrightarrow$ hình chiếu của I lên OA là trung điểm $H\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{-1}{2}\right)$ của OA .

$$S_{\Delta OIA} = \frac{1}{2} IH \cdot OA = \frac{1}{2} \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + \left(c + \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - a + c + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow 17 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2c + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2c - 16 = 0.$$

$$\text{Theo bài ra ta có } \begin{cases} OI = IA \\ S_{\Delta OIA} = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ I \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + (c+1)^2} \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2c - 16 = 0 \\ a + b - c - 3 = 0 \end{cases}$$

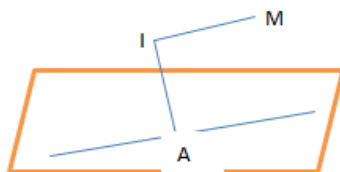
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c - 1 = 0 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 - a + c - 8 = 0 & (2) \\ a + b - c - 3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có $\begin{cases} a - c = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + c \\ b = 2 \end{cases}$ thế vào (2) ta có

$$(c+1)^2 + 4 + c^2 - (c+1) + c - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-1; 2; -2) \\ I(2; 2; 1) \end{cases} \Rightarrow OI = R = 3.$$

CÂU 26:

Chọn A



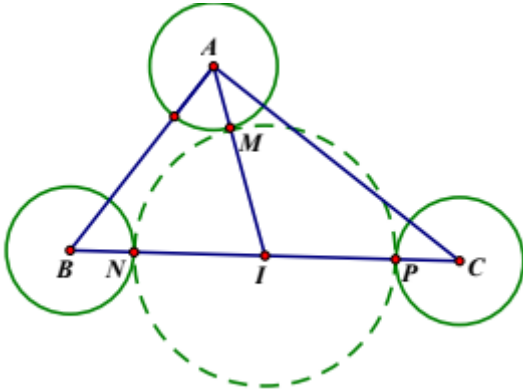
$$\text{Từ đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ x = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases} \Rightarrow x + y - z + 3 = 0$$

Ta có Δ luôn qua điểm $A(1; -5; -1)$ cố định và Δ nằm trong mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$.
Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng Δ với mọi a . Nên mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng (P) tại A .

$$\text{Đường thẳng } IA \text{ qua } A \text{ và vuông góc } (P) \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \Rightarrow I(1+t; -5+t; -1-t)$$

$$\text{Mà } IA = IM \Leftrightarrow t^2 + t^2 + t^2 = t^2 + (t-6)^2 + (t+2)^2 \Leftrightarrow t = 5 \text{ vậy } I(6; 0; -6) \Rightarrow R = IM = 5\sqrt{3}$$

CÂU 27: Chọn D



Ta có $AB = \sqrt{8}$, $AC = \sqrt{32}$, $BC = \sqrt{40}$ nên tam giác ABC vuông tại A . Gọi I là trung điểm của BC , khi đó $IM = IN = IP = \sqrt{10} - 1$. Do đó mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài là mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{10} - 1$.

CÂU 28:

$$\text{Ta có } A = 2x_M - y_M + 2z_M = 2(x_M - 1) - (y_M - 2) + 2(z_M - 3) + 6$$

$$\leq \sqrt{(2^2 + 1^2 + 2^2)((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2)} + 6 = 3.4 + 6 = 18.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{x_M - 1}{2} = \frac{y_M - 2}{-1} = \frac{z_M - 3}{2} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + 2t \\ y_M = 2 - t \\ z_M = 3 + 2t \end{cases} \text{ , thay vào phương trình (S)}$$

$$\text{ta được: } 4t^2 + t^2 + 4t^2 = 16 \Rightarrow t = \frac{4}{3}. \text{ Do đó } M\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right) \text{ và } B = x_M + y_M + z_M = 10.$$

CÂU 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $A = 2x_M - y_M + 2z_M$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị biểu thức $B = x_M + y_M + z_M$ bằng.

A. 21

B. 3

C. 5

D. 10

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } A = 2x_M - y_M + 2z_M = 2(x_M - 1) - (y_M - 2) + 2(z_M - 3) + 6$$

$$\leq \sqrt{(2^2 + 1^2 + 2^2)((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2)} + 6 = 3.4 + 6 = 18.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{x_M - 1}{2} = \frac{y_M - 2}{-1} = \frac{z_M - 3}{2} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + 2t \\ y_M = 2 - t \\ z_M = 3 + 2t \end{cases}, \text{ thay vào phương trình (S)}$$

$$\text{ta được: } 4t^2 + t^2 + 4t^2 = 16 \Rightarrow t = \frac{4}{3}. \text{ Do đó } M\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{17}{3}\right) \text{ và } B = x_M + y_M + z_M = 10.$$

CÂU 30: Chọn D

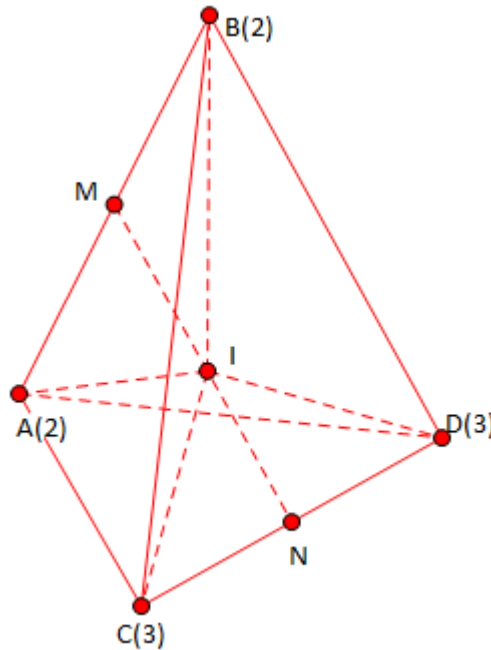
Cách 1:

Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB = 4$, $AC = BD = AD = BC = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA = IB, IC = ID$ nên I nằm trên đoạn MN .

$$\text{Đặt } IN = x, \text{ ta có } IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r, \quad IA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 2 + r$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}, \text{ suy ra } r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$$

Cách 2



Gọi A, B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C, D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x .

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2, IC = ID = x + 3$.

Gọi $(P), (Q)$ lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD .

$$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1).$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD , suy ra $MN = (P) \cap (Q) \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

Tam giác IAM có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$.

Tam giác CIN có $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}$.

Tam giác ABN có $NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}$.

Suy ra $\sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}$.

CÂU 31: Chọn A

Tâm I mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nằm trên mặt phẳng trung trực của AB . Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

OI nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P) .

Đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

Tọa độ điểm I khi đó ứng với t là nghiệm phương trình $t + 2.2t + 3.3t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 2; 3)$.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = 4$.

Từ $T = 2a - b + 2c \Rightarrow 2a - b + 2c - T = 0$, suy ra M thuộc mặt phẳng $(Q): 2x - y + 2z - T = 0$.

Vì M thuộc mặt cầu nên:

$$d(I; (Q)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2.1 - 2 + 2.3 - T|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \leq 4 \Leftrightarrow |6 - T| \leq 12 \Leftrightarrow -6 \leq T \leq 18. \text{ Vậy } \max T = 18.$$

CÂU 32: Chọn B

Tacó: $A = x_0 + 2y_0 + 2z_0 \Leftrightarrow x_0 + 2y_0 + 2z_0 - A = 0$ nên $M \in (P): x + 2y + 2z - A = 0$,

do đó điểm M là điểm chung của mặt cầu (S) với mặt phẳng (P) .

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Tồn tại điểm M khi và chỉ khi $d(I, (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|6 - A|}{3} \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq A \leq 15$

Do đó, với M thuộc mặt cầu (S) thì $A = x_0 + 2y_0 + 2z_0 \geq -3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tiếp điểm của $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$ với (S) hay M là hình

$$\text{chiếu của } I \text{ lên } (P). \text{ Suy ra } M(x_0; y_0; z_0) \text{ thỏa: } \begin{cases} x_0 + 2y_0 + 2z_0 + 3 = 0 \\ x_0 = 2 + t \\ y_0 = 1 + 2t \\ z_0 = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy $\Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = -1$.

CÂU 33: Chọn A

Gọi $M(m; 0; 0)$, $N(0; n; 0)$, $P(0; 0; p)$.

Gọi E là tâm mặt cầu (S) , R là bán kính mặt cầu (S) .

Gọi K là trung điểm AM , ta có: $EK \perp AM$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} &= (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}) \cdot (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}) = (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}) \cdot (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{KM}) = OK^2 - KM^2 \\ &= OE^2 - KE^2 - KM^2 = OE^2 - R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Chứng minh tương tự ta có: } \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OB} &= OE^2 - R^2, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = OE^2 - R^2 \\ \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow m.1 = n.2 = p.3 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: phương trình mặt phẳng } (MNP): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \quad \text{hay} \quad \frac{x}{m} + \frac{2y}{m} + \frac{3z}{m} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 3z - m = 0 \Rightarrow \text{vector pháp tuyến của } (MNP) \text{ là } \vec{n} = (1; 2; 3).$$

Vì tứ diện $OMNP$ có 3 cạnh từ O đôi một vuông góc nên $OH \perp (MNP)$

$$\Rightarrow \text{phương trình đường thẳng } (OH): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ (cố định).}$$

Vậy HI nhỏ nhất khi H là hình chiếu của I lên OH

Khi đó:

$$\text{Phương trình mặt phẳng qua } I \text{ và vuông góc } OH \text{ là: } x + 2y + 3z - 14 = 0,$$

$$\Rightarrow H(1; 2; 3) \Rightarrow IH = \sqrt{10}$$

CÂU 34: Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Bán kính đường tròn (C) $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6 - d^2}$ với $d = d(I, (P))$

Chu vi (C) nhỏ nhất khi và chỉ khi r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d$ lớn nhất

Ta có $d \leq IM \Rightarrow d_{\max} = IM \Leftrightarrow (P)$ đi qua M và vuông góc IM

(P) đi qua $M(0; 1; 0)$, và nhận $\overrightarrow{IM} = (1; -1; -1)$ làm VTPT

$$\Rightarrow (P): x - (y - 1) - z = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 1 = 0$$

Ta có tọa độ N thỏa hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y - 2z = -6 \\ x - y - z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = y + z - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

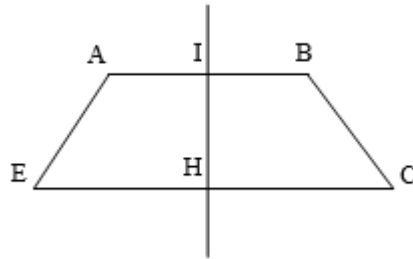
CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (LOẠI 1)

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;1), B(2;-1;2), C(5;-3;1)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho tứ giác $ABCE$ theo thứ tự đó lập thành một hình thang cân với đáy AB, CE .

- A. $E(3;-1;0)$. B. $E(-1;3;-2)$. C. $E(7;5;-2)$. D. $E(1;1;-1)$.

Chọn B

Lời giải



- Gọi mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Khi đó mặt phẳng (P) đi qua trung điểm $I\left(1;0;\frac{3}{2}\right)$ của đoạn AB và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (2;-2;1)$ nên phương trình của mặt phẳng (P) : $4x - 4y + 2z - 7 = 0$.
- Phương trình đường thẳng EC :
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$
- Gọi H là giao điểm của đường thẳng EC và mặt phẳng (P) khi đó $H\left(2;0;-\frac{1}{2}\right)$
- suy ra $E(-1;3;-2)$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và điểm $M(1;-2;5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

- A. $5x + 2y - z + 14 = 0$. B. $x - 4y - 3z + 6 = 0$. C. $x - 4y - 3z - 6 = 0$. D. $5x + 2y - z + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_1 = (1;1;-1)$.

Vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_2 = (1;-2;3)$.

$$\vec{n} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (1;-4;-3)$$

Vì (α) vuông góc với (P) và (Q) nên (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Mặt phẳng (α) có phương trình là $1(x-1) - 4(y+2) - 3(z-5) = 0$ hay $x - 4y - 3z + 6 = 0$.

VÍ DỤ 3: Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(0;8;2)$, $B(9;-7;23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x+by+cz+d=0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b+c+d$ khi đó là

- A. $b+c+d=2$. B. $b+c+d=4$. C. $b+c+d=3$. D. $b+c+d=1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $A \in (P)$ nên ta $8b+2c+d=0 \Leftrightarrow d=-8b-2c \Rightarrow (P): x+by+cz-(8b+2c)=0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I;(P))=R \Leftrightarrow \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}$.

Ta có: $d(B;(P)) = \frac{|9-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = \frac{|(5-11b+5c)+4(1-b+4c)|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

$\Rightarrow d(B;(P)) \leq \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} + 4 \frac{|1-b+4c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B;(P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{|1-b+4c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}$

$\stackrel{\text{Cosí-Svács}}{\Leftrightarrow} d(B;(P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1+1+16)(1+b^2+c^2)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B;(P)) \leq 18\sqrt{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 1=-b=\frac{c}{4} \\ \frac{|5-11b+5c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=4 \\ d=0 \end{cases}$.

Vậy $P_{\max}=18\sqrt{2}$ khi $b+c+d=3$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A , O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

- A. $\vec{n}=(1;-1;-1)$. B. $\vec{n}=(1;-1;-3)$. C. $\vec{n}=(1;-1;5)$. D. $\vec{n}=(1;-1;-5)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường thẳng qua hai điểm A , O có dạng $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Gọi (P) là mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A , O nên $(P): m(x-y)+nz=0$, $m^2+n^2>0$. Khi đó véc-tơ pháp tuyến của (P) có dạng $\vec{n}=(m;-m;n)$.

Ta có $d(B;(P))=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|m+2n|}{\sqrt{m^2+m^2+n^2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2m^2-4mn-n^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{n}=1 \\ \frac{m}{n}=\frac{1}{5} \end{cases}$.

Vậy một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó là $\vec{n}=\left(\frac{1}{5}n;-\frac{1}{5}n;n\right)=\frac{n}{5}(1;-1;5)$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;0)$, $B(1;1;-1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất có phương trình là

A. $x - 2y + 3z - 2 = 0$. **B.** $x - 2y - 3z - 2 = 0$. **C.** $x + 2y - 3z - 6 = 0$. **D.** $2x - y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Để (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất thì (P) phải qua tâm $I(1;-2;1)$ của (S) .

Ta có $\overrightarrow{AI} = (1;-1;1)$, $\overrightarrow{BI} = (0;-3;2) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI}] = (1;-2;-3)$.

$$1(x-1) - 2(y+2) - 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3z - 2 = 0$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta_1): 2x - y - z - 1 = 0$, $(\beta_2): 3x - y + z - 1 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta_3): x - 2y - z + 1 = 0$.

A. $7x + y + 9z - 1 = 0$.

B. $7x - y - 9z - 1 = 0$.

C. $7x - y + 9z - 1 = 0$.

D. $7x + y - 9z - 1 = 0$.

CÂU 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(1;2;1)$ và $C(2;-1;2)$. Biết mặt phẳng qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ có một vector pháp tuyến là $(10;a;b)$. Tổng $a+b$ là:

A. -2

B. 2

C. 1

D. -1

CÂU 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $OA = OB = OC$ (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O) là

A. 8 .

B. 3 .

C. 4 .

D. 1 .

CÂU 4: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với $(Q): 2x - y - 2z + 4 = 0$ và cách điểm $A(-1;2;-3)$ một khoảng bằng 2 .

A. $(P): 2x - y + 2z = 0$.

B. $(P): 2x - y - 2z - 4 = 0$.

C. $(P): 2x - y - 2z + 8 = 0$.

D. $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$.

CÂU 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x - y - 6 = 0$.

B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$.

C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$.

D. $3x + z + 2 = 0$.

CÂU 6: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$, $N(-1;1;3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ vector pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) .

A. $\vec{n} = (1; -1; 1).$

B. $\vec{n} = (1; 1; -1).$

C. $\vec{n} = (2; -1; 1).$

D. $\vec{n} = (2; 1; -1).$

CÂU 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm H , cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $(P): 3x + y + 2z - 11 = 0.$

B. $(P): 3x + 2y + z - 10 = 0.$

C. $(P): x + 3y + 2z - 13 = 0.$

D. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0.$

CÂU 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC .

A. $x + y + 2z - 11 = 0.$

B. $8x + y + z - 66 = 0.$

C. $2x + y + z - 18 = 0.$

D. $x + 2y + 2z - 12 = 0.$

CÂU 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -3; 2)$, $B(-2; -1; 5)$ và $C(3; 2; -1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A , trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tìm phương trình mặt phẳng (P) .

A. $5x + 3y + 4z - 22 = 0.$

B. $5x + 3y + 4z - 4 = 0.$

C. $5x + 3y - 6z + 16 = 0.$

D. $5x + 3y - 6z - 8 = 0.$

CÂU 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; -1)$. Phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P) là

A. $(Q): 2x + 2y + 3z - 7 = 0.$

B. $(Q): 2x - 2y + 3z - 7 = 0.$

C. $(Q): 2x + 2y + 3z - 9 = 0.$

D. $(Q): x + 2y + 3z - 7 = 0.$

CÂU 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(2; 3; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - z = 0$ phương trình là

A. $4x + 3y - 2z - 3 = 0.$

B. $4x - 3y - 2z + 3 = 0.$

C. $x - 2y - 3z - 11 = 0.$

D. $x + 2y - 3z + 7 = 0.$

CÂU 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 5)$ và $B(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy có phương trình là

A. $4x + y - z + 1 = 0.$

B. $2x + z - 5 = 0.$

C. $4x - z + 1 = 0.$

D. $y + 4z - 1 = 0.$

CÂU 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 27 = 0$ qua hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = -2.$

B. $S = 2.$

C. $S = -4.$

D. $S = -12.$

CÂU 14: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 1)$; $N(-1; 0; -1)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua M, N cắt trục Ox , trục Oy lần lượt tại A, B ($A \neq B$) sao cho $AM = \sqrt{3}BN$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

CÂU 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; -2; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C(0; 0; -3)$. Phương trình mặt phẳng (P) nào dưới đây đi qua A , gốc tọa độ O và cách đều hai điểm B và C ?

A. $(P): 2x - y + 3z = 0.$

B. $(P): 6x - 3y + 5z = 0.$

C. $(P): 2x - y - 3z = 0$.

D. $(P): -6x + 3y + 4z = 0$.

CÂU 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60° . Khi đó giá trị $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$.

B. $(3;5)$.

C. $(5;8)$.

D. $(8;11)$.

CÂU 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại 2 điểm M , N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$.

A. $(P): 3x + y + 2z - 6 = 0$.

B. $(P): 2x + 3y - z - 4 = 0$.

C. $(P): 2x + y + z - 4 = 0$.

D. $(P): x + 2y - z - 2 = 0$.

CÂU 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Ox và cắt mặt cầu theo một đường tròn có chu vi bằng 6π .

A. $(P): 3y - z = 0$.

B. $(P): y - 2z = 0$.

C. $(P): y - 2z + 1 = 0$.

D. $(P): 2y - z = 0$.

CÂU 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua hai điểm $M(1;8;0)$, $C(0;0;3)$ cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại A , B sao cho OG nhỏ nhất, với $G(a;b;c)$ là trọng tâm tam giác ABC . Hãy tính $T = a + b + c$ có giá trị bằng:

A. $T = 7$.

B. $T = 3$.

C. $T = 12$.

D. $T = 6$.

CÂU 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C khác O . Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54.

B. 6.

C. 9.

D. 18.

CÂU 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $OA + OB + OC$ có giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(12;0;0)$.

B. $(6;0;0)$.

C. $(0;6;0)$.

D. $(0;0;12)$.

CÂU 22 : Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 4 = 0$ và cách điểm $A(-1; 2; -3)$ một khoảng bằng 2.

CÂU 23 : Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $2x + 2y - z - 4 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 17 = 0$.

B. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

D. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn C

Ta có: $\vec{a} = (2; -1; -1)$, $\vec{b} = (3; -1; 1)$ và $\vec{c} = (1; -2; -1)$.

Gọi A điểm thuộc (β_1) và (β_2) nên $A(0; -1; 0)$.

Khi đó: $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (-2; -5; 1)$ và $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{c} = (7; -1; 9)$.

Do đó: $(\alpha): 7x - y + 9z - 1 = 0$.

CÂU 2: Chọn B

Gọi tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ là $I(x; y; z)$.

Ta có phương trình $(OBC): x - z = 0$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): 5x + 3y + 4z - 15 = 0$.

Tâm I cách đều hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) suy ra:

$$\frac{|x - z|}{\sqrt{2}} = \frac{|5x + 3y + 4z - 15|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 10x + 3y - z - 15 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Nhận xét: hai điểm A và O nằm về cùng phía với (α) nên loại (α) .

Hai điểm A và O nằm về khác phía (β) nên nhận (β) .

CÂU 3: Chọn C

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $M \in (\alpha) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1$.

Do $OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$.

Xét các trường hợp

$$+ a = b = c \Rightarrow \frac{8}{a} = 1 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow (\alpha): x + y + z - 8 = 0.$$

$$+ a = b = -c \Rightarrow \frac{-2}{a} = 1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow (\alpha): x + y - z + 2 = 0.$$

$$+ a = -b = -c \Rightarrow \frac{-6}{a} = 1 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow (\alpha): x - y - z + 6 = 0.$$

$$+ a = -b = c \Rightarrow \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow (\alpha): x - y + z - 4 = 0.$$

Vậy có 4 mặt phẳng (α) thỏa ycbt.

CÂU 4: Chọn D

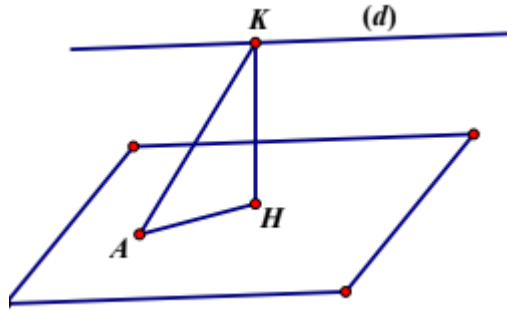
Mặt phẳng (P) song song với (Q) nên phương trình $(P): 2x - y - 2z + m = 0$ ($m \neq 4$).

$$\text{Theo bài ra: } d(A, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2 + 6 + m|}{3} = 2 \Leftrightarrow |m + 2| = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 6 \\ m + 2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4(l) \\ m = -8(t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình $(P): 2x - y - 2z - 8 = 0$.

CÂU 5: Chọn D



Gọi $K(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d . Tọa độ của K là nghiệm của hệ

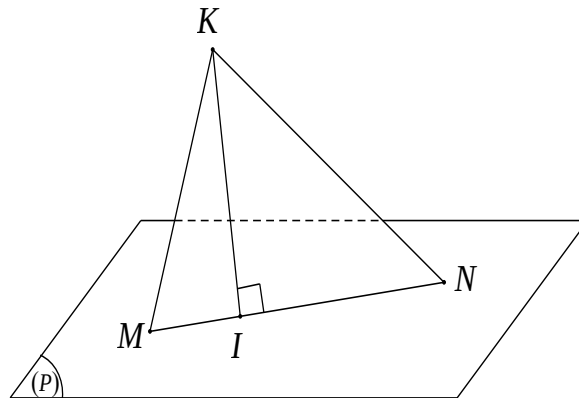
$$\begin{cases} -x+1=y-1 \\ y-1=-z+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow K(1; 1; 1).$$

Ta có $d((d), (P)) = d(K, (P)) = KH \leq KA = \sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overline{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overline{KA}$.

Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$.

CÂU 6: Chọn B

Ta có: $\overline{MN} = (-1; 2; 1)$.



Đường thẳng (d) qua hai điểm M, N có phương trình tham số $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của K lên đường thẳng $(d) \Rightarrow I(-t; -1 + 2t; 2 + t)$.

Khi đó ta có $\overline{KI} = (-t; -1 + 2t; t)$.

$$\text{Do } KI \perp MN \Rightarrow \overline{KI} \cdot \overline{MN} = 0 \Leftrightarrow t - 2 + 4t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{KI} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}(1; 1; -1).$$

Ta có $d(K; (P)) \leq KI \Rightarrow d(K; (P))_{\max} = KI \Leftrightarrow KI \perp (P) \Rightarrow \vec{n} = (1; 1; -1)$.

CÂU 7: Chọn D

Do tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên nếu H là trực tâm của tam giác ABC dễ dàng chứng minh được $OH \perp (ABC)$ hay $OH \perp (P)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(1; 2; 3)$ và có VTPT $\overline{OH}(1; 2; 3)$ nên phương trình (P) là $(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

CÂU 8: Chọn D

Cách 1 :

Với đáp án A: $A(11;0;0); B(0;11;0); C(0;0;\frac{11}{2}) \Rightarrow G(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}; \frac{11}{6}) \Rightarrow OG^2 = \frac{121}{4}$

Với đáp án B: $A(\frac{33}{4};0;0); B(0;66;0); C(0;0;66) \Rightarrow G(\frac{11}{4}; 22; 22) \Rightarrow OG^2 = \frac{15609}{16}$

Với đáp án C: $A(9;0;0); B(0;18;0); C(0;0;18) \Rightarrow G(3; \frac{18}{3}; \frac{18}{3}) \Rightarrow OG^2 = 81$

Với đáp án D: $A(-12;0;0); B(0;6;0); C(0;0;6) \Rightarrow G(-4; 2; 2) \Rightarrow OG^2 = 24$

Cách 2 :

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Theo đề bài ta có: $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2$.

Ta có $(a^2 + b^2 + c^2)(4+1+1) \geq (a.2 + b.1 + c.1)^2 \Rightarrow 6.(a^2 + b^2 + c^2) \geq (2a + b + c)^2$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(4+1+1)} &\geq (a.2 + b.1 + c.1) \\ &\geq (2a + b + c) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &\geq (4+1+1)^2 = 36 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6^3$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{4} = b^2 = c^2 \Rightarrow a = 2b = 2c$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a = 12, b = c = 6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là: $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$ hay $x + 2y + 2z - 12 = 0$.

CÂU 9 :Chọn C

Ta có:
$$\begin{cases} (P) \cap (ABC) = AH \\ (P) \perp (ABC) \\ BC \perp AH; BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (P).$$

Suy ra mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{BC} = (5; 3; -6)$ làm VTPT

Vậy: $(P): 5x + 3y - 6z + 16 = 0$.

CÂU 10: Chọn A

$\overrightarrow{AB} = (2; 4; -4)$; VTPT của (P) là $\vec{n}(2; 1; -2)$

VTPT của (Q) là $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}] = (2; 2; 3)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) : $2x + 2y + 3z - 7 = 0$

CÂU 11: Chọn B

$\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

Vậy (P) có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (-4; 3; 2)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): -4x + 3(y-1) + 2z = 0$, hay $(P): 4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

CÂU 12: Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -4)$ và trục Oy có VTCP là $\vec{j} = (0; 1; 0)$

Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy nên có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{j}] = (4; 0; -1)$

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $B(0; 0; 1)$ và VTPT $\vec{n} = (4; 0; -1)$ nên có phương trình $4x - z + 1 = 0$.

CÂU 13: Chọn D

$$A(3; 2; 1) \in (P): ax + by + cz - 27 = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c - 27 = 0(1)$$

$$B(-3; 5; 2) \in (P): ax + by + cz - 27 = 0 \Rightarrow -3a + 5b + 2c - 27 = 0(2)$$

$$(P): ax + by + cz - 27 = 0 \text{ vuông góc với mặt phẳng } (Q): 3x + y + z + 4 = 0.$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 3a + b + c = 0(3)$$

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} 3a + 2b + c - 27 = 0(1) \\ -3a + 5b + 2c - 27 = 0(2) \\ 3a + b + c = 0(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 27 \\ c = -45 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -12.$$

CÂU 14: Chọn B

Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ là vector pháp tuyến của mp (P) thỏa yêu cầu bài toán.

• mp (P) qua $N(-1; 0; -1)$ nên phương trình mặt phẳng có dạng:

$$A(x+1) + By + C(z+1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + A + C = 0.$$

• mp (P) qua $M(1; 2; 1)$ suy ra $A + 2B + C + A + C = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0 \Leftrightarrow A + C = -B$ (1).

• mp (P) cắt trục Ox tại $A(a; 0; 0)$ suy ra $Aa + A + C = 0 \Leftrightarrow Aa - B = 0$.

$$\Rightarrow a = \frac{B}{A} \text{ (Do nếu } A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ nên } A \neq 0). \text{ Suy ra } A\left(\frac{B}{A}; 0; 0\right)$$

• mp (P) cắt trục Oy tại $B(0; b; 0)$ suy ra $Bb + A + C = 0 \Leftrightarrow Bb - B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ b = 1 \end{cases}$.

TH1: $B = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow A = -C$. Chọn $C = 1 \Rightarrow A = -1$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x - z = 0$.

$\Rightarrow A \equiv B \equiv O(0; 0; 0)$ không thỏa yêu cầu.

TH2: $b = 1 \Rightarrow B(0; 1; 0)$

$$AM = \sqrt{\left(1 - \frac{B}{A}\right)^2 + 5}; BN = \sqrt{3}$$

$$AM = \sqrt{3}BN \Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{B}{A}\right)^2 + 5} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{B}{A}\right)^2 + 5 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{B}{A} = 2 \\ 1 - \frac{B}{A} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{B}{A} = -1 \\ \frac{B}{A} = 3 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{B}{A} = -1 \Rightarrow B = -A \Rightarrow C = 0. \text{ Chọn } A = 1 \Rightarrow B = -1.$$

$$\text{Phương trình mp}(P): x - y + 1 = 0$$

$$\bullet \frac{B}{A} = 3 \Rightarrow B = 3A \Rightarrow C = -4A. \text{ Chọn } A = 1 \Rightarrow B = 3 \Rightarrow C = -4.$$

$$\text{Phương trình mp}(P): x + 3y - 4z - 3 = 0$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu.

CÂU 15: Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AO} = (1; 2; 0), \overrightarrow{BC} = (0; 4; -3).$$

TH1: B và C nằm cùng phía với (P) , khi đó $\overrightarrow{BC}$ có giá song song với (P) . Phương trình mặt phẳng (P) qua O có vpt $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AO}] = (-6; 3; 4)$ nên $(P): -6x + 3y + 4z = 0$.

TH2: B và C nằm khác phía với (P) , khi đó trung điểm $I\left(0; -2; \frac{-3}{2}\right)$ của BC thuộc (P) .

$$\overrightarrow{IO} = \left(0; 2; \frac{3}{2}\right). \text{ Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ qua } O \text{ có vpt } \vec{n} = [\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{AO}] = \left(3; -\frac{3}{2}; 2\right) \text{ nên } (P): 6x - 3y + 4z = 0.$$

CÂU 16: Chọn A

$$\text{Ta có: } A, B \in (P) \text{ nên } \begin{cases} b + d = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}. \text{ Suy ra } (P) \text{ có dạng } ax + ay + cz - a = 0 \text{ có vector pháp tuyến là } \vec{n} = (a; a; c).$$

$$\text{Mặt phẳng } (yOz) \text{ có vector pháp tuyến là } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$\text{Ta có: } \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2} \cdot 1} \Leftrightarrow 2a^2 + c^2 = 4a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - c^2 = 0.$$

$$\text{Chọn } a = 1, \text{ ta có: } c^2 = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2} \text{ do } c < 0.$$

$$\text{Ta có: } a + b + c = a + a + c = 1 + 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \in (0; 3).$$

CÂU 17: Chọn D

Gọi $M(m; 0; 0)$, $N(0; n; 0)$, $P(0; 0; p)$ lần lượt là giao điểm của (P) và trục Ox , Oy , Oz .
 M , N lần lượt thuộc tia Ox , Oy nên $m > 0$, $n > 0$.

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

$$\text{Ta có: } OM = 2ON \Leftrightarrow m = 2n$$

$$A \in (P) \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1, B \in (P) \Rightarrow \frac{0}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} = 1$$

$$\text{Suy ra: } m = 2, n = 1, p = -2 \Rightarrow (P): x + 2y - z - 2 = 0.$$

CÂU 18: Chọn B.

Do mặt phẳng (P) chứa Ox nên loại đáp án **D**.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên $2\pi r = 6\pi \Leftrightarrow r = 3 = R$. Do đó nó là đường tròn lớn của mặt cầu (S) . Vậy mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1; -2; -1)$ của mặt cầu.

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là vector pháp tuyến của (P) , suy ra $(P): by + cz = 0$.

Do (P) đi qua tâm $I(1; -2; -1)$ nên $-2b - c = 0 \Rightarrow c = -2b$.

Khi đó $(P): by + cz = 0 \Leftrightarrow by - 2bz = 0 \Leftrightarrow y - 2z = 0$.

CÂU 19: Chọn D

Giả sử điểm $A(m; 0; 0)$, $B(0; n; 0)$ với $m > 0$, $n > 0$.

Do đó phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

Theo giả thiết $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow m = 3a$, $n = 3b$, $c = 1$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 8; 0)$ nên $\frac{1}{m} + \frac{8}{n} - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{n}{n-8}$, với $n > 8$.

Vì OG nhỏ nhất nên $P = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{\left(\frac{n}{n-8}\right)^2}{9} + \frac{n^2}{9} + 1$ đạt GTNN.

Đặt $f(n) = \frac{\left(\frac{n}{n-8}\right)^2}{9} + \frac{n^2}{9} + 1 \Rightarrow f'(n) = \frac{1}{9} \left(\frac{-2n}{n-8} \cdot \frac{8}{(n-8)^2} + 2n \right)$.

Ta có $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 10$ (thỏa mãn).

Xét dấu đạo hàm ta được $n = 10$ thì $P_{\min}$ và $m = 5$, $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{10}{3}$.

Vậy $T = a + b + c = 6$.

CÂU 20: Chọn C

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì: $M \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c}}$

Hay $1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{54}{abc}$. Suy ra: $abc \geq 54 \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc \geq 9$ Vậy: $V_{OABC} \geq 9$.

CÂU 21: Chọn B

Giả sử $A(a; 0; 0) \in Ox$, $B(0; b; 0) \in Oy$, $C(0; 0; c) \in Oz$ và $(a, b, c > 0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có: $M(1; 4; 9) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$.

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right)(a + b + c) = \left[\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right] \left[\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right] \geq (1 + 2 + 3)^2$

$\Rightarrow a + b + c \geq (1 + 2 + 3)^2$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ a + b + c = (1 + 2 + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \\ c = 18 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1 \text{ (Thỏa)}$$

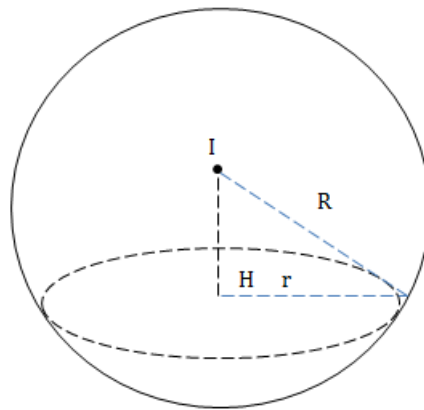
CÂU 22 : Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 4 = 0$ nên có phương trình dạng $2x - y - 2z + D = 0$ (với $D \neq 4$).

$$\text{Mặt khác, theo giả thiết } d(A; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-1) - 2 - 2 \cdot (-3) + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 2.$$

$$\Leftrightarrow |D + 2| = 6 \Leftrightarrow D = 4 \text{ (loại)} \text{ hoặc } D = -8 \text{ (chọn)}.$$

$$\text{Vậy } (P): 2x - y - 2z - 8 = 0.$$

CÂU 23 : Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q) .

$$\text{Đặt } IH = x \text{ ta có } r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón tạo được là } V = \frac{1}{3} \cdot IH \cdot S_{((C))} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \pi (\sqrt{12 - x^2})^2 = \frac{1}{3} \pi (12x - x^3).$$

Gọi $f(x) = 12x - x^3$ với $x \in (0; 2\sqrt{3})$. Thể tích nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất

$$\text{Ta có } f'(x) = 12 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên :

x	0	2	$2\sqrt{3}$	
f'		+	0	-
f	0	↗ 16	↘ 0	

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{1}{3}\pi 16 = \frac{16\pi}{3} \text{ khi } x = IH = 2.$$

$$\text{Mặt phẳng } (Q) // (P) \text{ nên } (Q): 2x + 2y - z + a = 0$$

$$\text{Và } d(I; (Q)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2(-2) - 3 + a|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |a - 5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy mặt phẳng } (Q) \text{ có phương trình } 2x + 2y - z - 1 = 0 \text{ hoặc } 2x + 2y - z + 11 = 0.$$

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (LOẠI 2)

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; -1)$ Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

- A. $x + 2y - z = 0$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1$. C. $x - y - z = 0$. D. $x + y + z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu của M trên $(P) \Rightarrow \Delta MHO$ vuông tại $H \Rightarrow MH \leq MO$
 $\Rightarrow MH_{\max} = MO$. Khi đó (P) đi qua M và vuông góc với $MO \Rightarrow \vec{MO} = (1; 2; -1)$ là vectơ pháp tuyến của $(P) \Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là $1(x-0) + 2(y-0) - 1(z-0) = 0$ hay $x + 2y - z = 0$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{-5}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d và đi qua tâm của mặt cầu (S) .

- A. $(P): 3x - 2y + z + 6 = 0$. B. $(P): 3x - 2y + z - 6 = 0$.
 C. $(P): x + y - 5z - 4 = 0$. D. $(P): x + y - 5z + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: mặt cầu (S) có $\begin{cases} I(3; -2; 1) \\ R = 3 \end{cases}$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u}(1; 1; -5)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với d nên có nhận $\vec{u}(1; 1; -5)$ làm véc tơ pháp tuyến, và đi qua tâm $I(3; -2; 1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x - 3 + y + 2 - 5(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5z + 4 = 0$.

VÍ DỤ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và cho điểm $M(1; -2; 5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. $5x + 2y - z + 14 = 0$. B. $x - 4y - 3z + 6 = 0$. C. $x - 4y - 3z - 6 = 0$. D. $5x + 2y - z + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn B

(P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; 1; -1)$, (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_q = (1; -2; 3)$.

(α) vuông góc với (P) và (Q) nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (1; -4; -3)$.

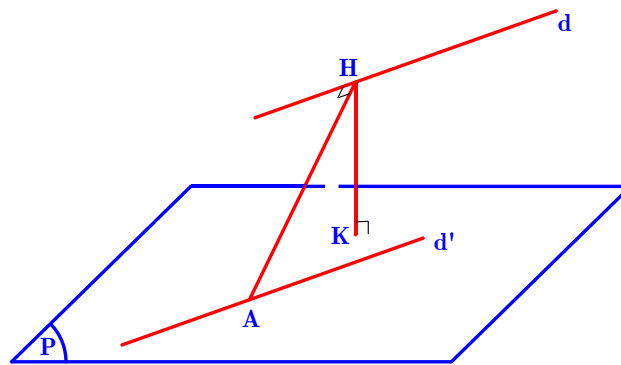
(α) đi qua điểm $M(1; -2; 5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) sẽ có phương trình là $x - 1 - 4(y + 2) - 3(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 3z + 6 = 0$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp (P) là

- A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Lời giải

Chọn A



(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

Gọi H là hình chiếu của A trên d , K là hình chiếu của H trên (P) .

Ta có $d(d, (P)) = HK \leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là $AH \Rightarrow d(d, (P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P) .

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q) .

$$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] = (98; 14; -70) \Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0 \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{97\sqrt{3}}{15}..$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; -3; 2)$ và chứa trục Oz . Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Tính $M = \frac{b+c}{a}$.

- A. $M = -\frac{1}{3}$. B. $M = 3$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = -3$.

CÂU 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

- A. $7x - 2y - 4z = 0$. B. $7x - 2y - 4z + 3 = 0$.
C. $2x + y + 3z + 3 = 0$. D. $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

CÂU 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

A. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$.

B. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$.

C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$.

D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$.

CÂU 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $H(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình của (P) là

A. $2x + y + z - 6 = 0$. B. $x + 2y + z - 6 = 0$. C. $x + 2y + 2z - 6 = 0$. D. $2x + y + z + 6 = 0$.

CÂU 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4;3;4)$ song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

A. $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

B. $2x + 2y + z - 18 = 0$.

C. $2x - y - 2z - 10 = 0$.

D. $2x + y + 2z - 19 = 0$.

CÂU 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t_2 \\ z = 0 \end{cases}$, $d_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t_3 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC .

A. $2x + 2y + z - 11 = 0$.

B. $x + y + z - 6 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 9 = 0$.

D. $3x + 2y + z - 14 = 0$.

CÂU 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d .

A. $(P): x + 2y + 5z - 4 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 5z - 5 = 0$.

C. $(P): x + 2y - z - 4 = 0$.

D. $(P): 2x - y - 3 = 0$.

CÂU 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. 1.

CÂU 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;m;0), N(-1;0;n)$ với m, n là các số thực dương thỏa mãn $mn = 2$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Xác định bán kính mặt cầu đó.

A. $R = \frac{1}{2}$.

B. $R = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $R = 1$.

CÂU 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+3=0$ đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c$.

- A. $T = -\frac{3}{4}$. B. $T = \frac{33}{5}$. C. $T = \frac{27}{4}$. D. $T = \frac{31}{5}$.

CÂU 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz-2=0$ chứa đường thẳng AB và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $M = 2a+b-c$.

- A. $M = 2$. B. $M = 3$. C. $M = 1$. D. $M = 4$.

CÂU 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là

- A. $x-4y-5z+17=0$. B. $3x-2y+z-7=0$.
C. $x-4y+5z-13=0$. D. $3x+2y+z-11=0$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-5=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với (α) một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+d=0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $a, b, c, d < 5$). Khi đó tích $a.b.c.d$ bằng bao nhiêu?

- A. 120. B. 60. C. -60. D. -120.

CÂU 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng BC' và tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc lớn nhất là

- A. $x+y+z-1=0$. B. $-x-y+z-1=0$. C. $x-y+z-1=0$. D. $x+y-z-1=0$.

GIẢI CHI TIẾT

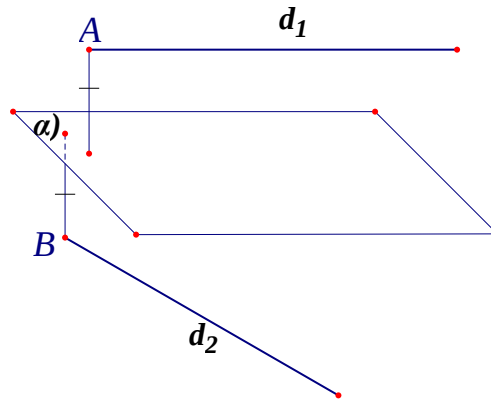
CÂU 1: Chọn C

$$(P) \text{ đi qua } A \text{ chứa } Oz \text{ nên } \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{OA} = (1; -3; 2) \\ \vec{n} \perp \vec{k} = (0; 0; 1) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (P) \text{ có một vectơ pháp tuyến là } \vec{n} = [\overrightarrow{OA}; \vec{k}] = (-3; -1; 0).$$

$$\text{Khi đó chọn } a = -3, b = -1, c = 0. \text{ Vậy } M = \frac{b+c}{a} = \frac{1}{3}.$$

CÂU 2: Chọn D



Ta có d_1 đi qua $A(2; 2; 3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}} = (2; 1; 3)$, d_2 đi qua $B(1; 2; 1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}} = (2; -1; 4)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -2); [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = (7; -2; -4);$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] \overrightarrow{AB} = -1 \neq 0 \text{ nên } d_1, d_2 \text{ chéo nhau.}$$

$$\text{Do } (\alpha) \text{ cách đều } d_1, d_2 \text{ nên } (\alpha) \text{ song song với } d_1, d_2 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = (7; -2; -4)$$

$$\Rightarrow (\alpha) \text{ có dạng } 7x - 2y - 4z + d = 0$$

$$\text{Theo giả thiết thì } d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|d-2|}{\sqrt{69}} = \frac{|d-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha): 14x - 4y - 8z + 3 = 0.$$

CÂU 3: Chọn B

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2; 0; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (-1; 1; 1)$.

và d_2 đi qua điểm $B(0; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2; -1; -1)$. Vì (P) song song với hai đường thẳng

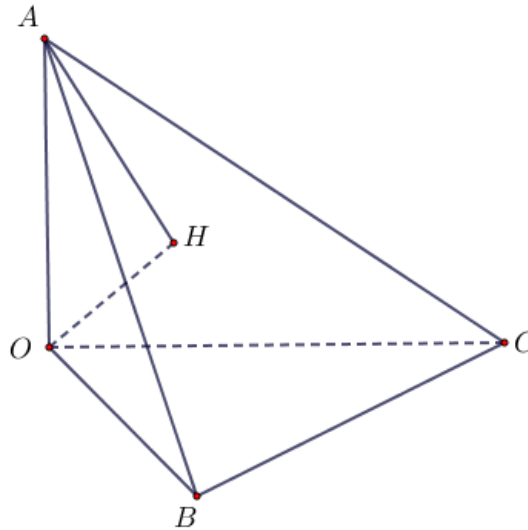
$$d_1 \text{ và } d_2 \text{ nên VTPT của } (P) \text{ là } \vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (0; 1; -1)$$

Khi đó (P) có dạng $y - z + D = 0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ của AB . Do đó

$$(P): 2y - 2z + 1 = 0.$$

CÂU 4: Chọn A



Ta có $AH \perp BC$, $OA \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$. Chứng minh tương tự ta cũng có $OH \perp AC \Rightarrow OH \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ là vector pháp tuyến của (ABC) .

Vậy $(ABC): 2x + y + z - 6 = 0$.

CÂU 5: Chọn D

Gọi vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): a(x-4) + b(y-3) + c(z-4) = 0$.

Do $(P) \parallel \Delta$ nên $-3a + 2b + 2c = 0 \Rightarrow 3a = 2(b+c)$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên $\frac{|-3a - b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \Leftrightarrow 9(a^2 + b^2 + c^2) = (3a + b + c)^2 (*)$.

Thay $3a = 2(b+c)$ vào $(*)$ ta được:

$$4(b+c)^2 + 9(b^2 + c^2) = 9(b+c)^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0 \Leftrightarrow (2b-c)(b-2c) = 0$$

TH1: $2b-c=0$, chọn $b=1$; $c=2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow (P): 2x + y + 2z - 19 = 0$ (thỏa).

TH2: $b-2c=0$, chọn $c=1$; $b=2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow (P): 2x + 2y + z - 18 = 0$ (loại do $\Delta \subset (P)$).

CÂU 6: Chọn A

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(1; b; 0)$, $C(1; 0; c)$.

$\overrightarrow{AB} = (1-a; b; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -b; c)$, $\overrightarrow{CH} = (2; 2; 1-c)$, $\overrightarrow{AH} = (3-a; 2; 1)$.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bc + 2c(a-1) + (1-c)b(a-1) = 0 \\ a = b+1 \\ c = 2b \end{cases} \Rightarrow 9b^2 - 2b^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Nếu $b = 0$ suy ra $A \equiv B$ (loại).

Nếu $b = \frac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\frac{11}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(1; \frac{9}{2}; 0\right)$, $C(1; 0; 9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC)

là $2x + 2y + z - 11 = 0$.

CÂU 7:

Cách 1 (Tự luận)

Đường thẳng d qua $M(2;1;0)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$

Ta có: $AB \perp d$ và $AB \perp Oz$ nên AB có VTCP là: $\vec{u}_{AB} = [\vec{u}_d, \vec{k}] = (2; -1; 0)$

(P) chứa d và AB nên (P) đi qua $M(2;1;0)$, có VTPT là: $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{AB}] = (1; 2; 5)$

$$\Rightarrow (P): x + 2y + 5z - 4 = 0 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Cách 2: Dùng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đường thẳng d qua 2 điểm $M(2;1;0)$ và $N(3;3;-1)$

Giả sử mp(P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$AB \perp d \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (1)$$

$$(P) \text{ chứa } d \text{ nên } d \text{ cũng đi qua } M, N \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (2), \quad \frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{-1}{c} = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow a = 4, b = 2, c = \frac{4}{5} \Rightarrow (P): x + 2y + 5z - 4 = 0.$$

CÂU 8: Chọn D

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\text{Khi đó: } d(O; (ABC)) = \frac{\left| \frac{0}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } d(O; (ABC)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Vậy Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ tại $a = b = c = 1$.

CÂU 9 : Chọn D

Gọi $I(a; b; c)$ và R là tâm và bán kính của mặt cầu cố định (nếu có).

$$\text{Ta có: } \vec{MN} = (-2; -m; n) = \left(-2; -m; \frac{2}{m}\right), \vec{MI} = (a-1; b-m; c),$$

$$[\vec{MN}, \vec{MI}] = \left(-mc - 2 + \frac{2b}{m}; -2c + \frac{2a-2}{m}; -ma - m - 2b\right)$$

$$\text{Ta có: } R = d(I, MN) = \frac{\sqrt{\left(-mc - 2 + \frac{2b}{m}\right)^2 + \left(-2c + \frac{2a-2}{m}\right)^2 + (-ma - m - 2b)^2}}{\sqrt{4 + m^2 + \frac{4}{m^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{(-m^2c - 2m + 2b)^2 + (-2mc + 2a - 2)^2 + (-m^2a - 2mb - m^2)^2}}{\sqrt{m^4 + 4m^2 + 4}}$$

Khi $a = b = c = 0$ thì $R = 1$ không phụ thuộc vào m, n .

CÂU 10 : Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Đường thẳng AB đi qua điểm B , có một VTCP là $\overrightarrow{BA}=(1;2;3) \Rightarrow AB: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=1+3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

$\overrightarrow{IB}=(1;-1;1) \Rightarrow IB=\sqrt{3} < R \Rightarrow (P)$ luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và AB , ta có:

$$d(I,(P))=IH \leq IK$$

Do đó $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay mặt phẳng (P) vuông góc với IK

Tìm $K: K \in AB \Rightarrow K(t;2t;1+3t) \Rightarrow \overrightarrow{IK}=(t+1;2t-1;3t+1)$

Ta có $IK \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{7} \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \left(\frac{6}{7}; -\frac{9}{7}; \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{7}(6; -9; 4)$

Mặt phẳng (P) đi qua $B(0;0;1)$, có một VTPT là $\vec{n}=(6;-9;4)$

$\Rightarrow (P): 6x-9y+4z-4=0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}x+\frac{27}{4}y-3z+3=0$. Vậy $T=-\frac{3}{4}$.

CÂU 11: Chọn C

* Ta có: $(P) \perp \vec{n}=(a;b;c)$ trong đó $a;b;c$ không đồng thời bằng 0. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

Do mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB nên ta có: $\begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2-2c \end{cases} \quad (1)$

* Bán kính đường tròn giao tuyến là: $r=\sqrt{R^2-d^2}$ trong đó

$d=d(I,(P))=\frac{|c+4|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{c^2+8c+16}}{\sqrt{5c^2-8c+8}}$. Để bán kính đường tròn nhỏ nhất điều kiện là d

lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{c^2+8c+16}{5c^2-8c+8}=\frac{1}{5}+\frac{24}{5} \cdot \frac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ lớn nhất $\Leftrightarrow m=\frac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ lớn nhất.

* Coi hàm số $m=\frac{2c+3}{5c^2-8c+8}$ là một phương trình ẩn c ta được

$$5mc^2-2(4m+1)c+(8m-3)=0,$$

phương trình có nghiệm $c \Leftrightarrow \Delta'=-24m^2+23m+1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{24} \leq m \leq 1 \Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow c=1$.

$$\Rightarrow a=0 \Rightarrow M=2a+b-c=1.$$

CÂU 12: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R=5$. Do $IA=\sqrt{17} < R$ nên AB luôn cắt (S) . Do đó

(α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-(d(I,(\alpha)))^2}$. Để bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))$ lớn nhất.

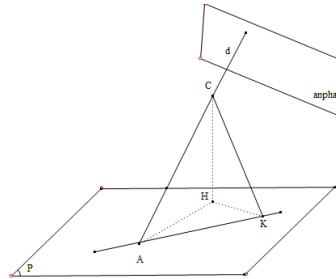
Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với $mp(ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -3; -2)$ suy ra (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 4; -5)$

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (-9; -6; -3) = -3(3; 2; 1)$

Phương trình (α): $3(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 11 = 0$.

CÂU 13. Chọn D



Hình minh họa

Trên đường thẳng Δ lấy điểm $A(1; 1; 0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α). Ta có $\vec{u}_d = (1; -2; 2)$.

Trên đường thẳng d lấy điểm C bất kì khác điểm A .

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ .

Lúc này, ta có $((P); (\alpha)) = (CH; d) = HCA$

Xét tam giác HCA ta có $\sin HCA = \frac{AH}{AC}$, mà tam giác AHK vuông tại K nên ta có

$\frac{AH}{AC} \geq \frac{AK}{AC}$ (không đổi). Nên để góc HCA nhỏ nhất khi H trùng với K hay $CK \perp (P)$

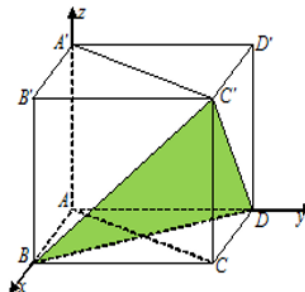
Ta có (ACK) đi qua d và Δ . Vì $[\vec{u}_d; \vec{u}_\Delta] = (-8; 0; 4)$ nên chọn $\vec{n}_{(ACK)} = (-2; 0; 1)$

Mặt khác ta có (P) đi qua Δ , vuông góc mặt phẳng (ACK) và $[\vec{n}_{(ACK)}; \vec{u}_\Delta] = (-2; 5; -4)$

Nên $\vec{n}_{(P)} = (-2; 5; -4)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$-2(x-1) + 5(y-1) - 4z = 0 \Leftrightarrow -2x + 5y - 4z - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 4z + 3 = 0$.

CÂU 14:



Góc giữa hai mặt phẳng lớn nhất bằng 90° .

Nên góc lớn nhất giữa (P) và $(ACC'A')$ bằng 90° hay $(P) \perp (ACC'A')$.

Mà $(BDC') \perp (ACC'A') \Rightarrow (P) \equiv (BDC')$.

Ta có $C'(1; 1; 1)$

VTPT của (P) : $\vec{n}_p = [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}] = (1; 1; -1) \Rightarrow (P): x + y - z - 1 = 0$

CHỦ ĐỀ 5 : PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

VÍ DỤ 1: Trong không gian (Oxy) cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Biết rằng $\vec{u} = (m;n;-1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB . Tính giá trị biểu thức $T = m^2 + n^2$.

A. $T = 1$

B. $T = 5$

C. $T = 2$

D. $T = 10$

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AC . Trung tuyến BM có phương trình $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ suy ra

$$M(3-m; 3+2m; 2-m) \Rightarrow C(4-2m; 3+4m; 1-2m).$$

Vì C nằm trên đường phân giác trong góc C nên

$$\frac{4-2m-2}{2} = \frac{3+4m-4}{-1} = \frac{1-2m-2}{-1} \Rightarrow m=0 \Rightarrow C(4;3;1).$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua phân giác trong góc C , khi đó $A'(2+4a; 5-2a; 1-2a)$ và $A' \in BC$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng chứa phân giác trong góc C là $\vec{u} = (2; -1; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4a \cdot 2 + (2-2a) \cdot (-1) + (-2a-2) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow A'(2;5;1) \in BM$.

Suy ra $A' \equiv B \Rightarrow B(2;5;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0; -2; 2) = 2(0; -1; 1)$ là một véc tơ của đường thẳng AB .

Vậy $T = m^2 + n^2 = 2$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1; -2; 1)$ và hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là $x-3z+1=0, 2y-z+1=0$. Đường thẳng đi qua I và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-5}$.

C. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{5}$.

Lời giải

Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d .

Ta có $\vec{u} \perp \vec{n}_{(P)} = (1; 0; -3)$ và $\vec{u} \perp \vec{n}_{(Q)} = (0; 2; -1)$. Chọn $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (6; 1; 2)$.

Phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

VÍ DỤ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $M(2; 2; -3)$ và $N(-4; 2; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , nhận vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P): 2x+y+z=0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|, |b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a|+|b|+|c|$ bằng:

A. 15.

B. 13.

C. 16.

D. 14.

Lời giải

Chọn A

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2; 2; -3)$ và song song với mặt phẳng (P) .

Suy ra $(Q): 2x + y + z - 3 = 0$. Do $\Delta // (P)$ nên $\Delta \subset (Q)$.

$d(N, \Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \Delta$ đi qua N' , với N' là hình chiếu của N lên (Q) .

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc (P) , $d: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Ta có $N' \in d \Rightarrow N'(-4 + 2t; 2 + t; 1 + t)$; $N' \in (Q) \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow N'(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3})$.

$\vec{u} = (a; b; c)$ cùng phương $\overrightarrow{MN'} = (-\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3})$.

Do $|a|, |b|$ nguyên tố cùng nhau nên chọn $\vec{u} = (-5; 2; 8)$. Vậy $|a| + |b| + |c| = 15$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; 2; -5)$, $B(-1; 0; 2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max} = 3$

B. $T_{\max} = 2\sqrt{6} - 3$

C. $T_{\max} = \sqrt{57}$

D. $T_{\max} = 3\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 7)$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = -2t' \\ z = 2 + 7t' \end{cases}$.

Xét vị trí tương đối của Δ và AB ta thấy Δ cắt AB tại điểm $C(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$.

$\overrightarrow{AC} = (-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{14}{3})$; $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ nên B nằm giữa A và C .

$T = |MA - MB| \leq AB$ Dấu bằng xảy ra khi M trùng C . Vậy $T_{\max} = AB = \sqrt{57}$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gọi d đi qua điểm $A(1; -1; 2)$, song song với $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

Lời giải

Chọn A

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = (1; -2; 2)$

d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (a; b; c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; -1; -1)$

Vì $d // (P)$ nên $\vec{a}_d \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \vec{a}_d \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5a - 4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b}, \text{ ta có: } \cos(\Delta, d) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}, \text{ ta suy ra được: } \max f(t) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó: } \max[\cos(\Delta, d)] = \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5}$$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -5, c = 7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 2z + 2 = 0$ và $(Q): x - 3y + 2z + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là

A. $\frac{x}{12} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-9}$. B. $\frac{x}{9} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-2}$. C. $\frac{x}{12} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-9}$. D. $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{-2}$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình tham số của đường thẳng qua $A(1; 2; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 3 = 0$.

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 \end{cases}$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x + y - 3 = 0, (Q): 2x + y + z - 3 = 0$

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

CÂU 4: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(3; 1; -5)$, hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 4 = 0$ và $(Q): 2x + y + z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A đồng thời Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-3}$. B. $\Delta: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{3}$.
C. $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-3}$. D. $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$.

CÂU 5: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d là

- A. $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$.
 B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.
 C. $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$.
 D. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{3}$.

CÂU 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt đường thẳng Δ và vuông góc với đường thẳng Δ . Phương trình của đường thẳng d là

- A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x=3-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$.

CÂU 7: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_3 = (2;1;-1)$.
 B. $\vec{u}_2 = (1;-1;0)$.
 C. $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$.
 D. $\vec{u}_1 = (1;2;1)$.

CÂU 8: Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $(d_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $(d_3): \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$.
 B. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.
 C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$.
 D. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$.

CÂU 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với Δ .

- A. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$.
 B. $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.
 C. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.
 D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.

CÂU 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng.

$d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

- A. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$.
 B. $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$.
 C. $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4}$.
 D. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

CÂU 11: Trong không gian Oxy , cho điểm $M(-1;1;2)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M , cắt d và vuông góc với d' ?

- A. $\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = 1 + 7t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

CÂU 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-1)$, cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

CÂU 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α) .

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

CÂU 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$, đồng thời đi qua điểm $M(1;2;0)$ và cắt đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$. Một véc tơ chỉ phương của Δ là

- A. $\vec{u} = (1;0;-1)$. B. $\vec{u} = (1;1;-2)$. C. $\vec{u} = (1;-1;-2)$. D. $\vec{u} = (1;-2;1)$.

CÂU 15: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là:

- A. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.
C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$.

CÂU 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$

và $d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P): 7x + y - 4z = 0$ và cắt hai

đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$.

B. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

C. $\frac{x+2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

D. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$.

CÂU 17: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ và $d': \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và cắt cả hai đường thẳng d và d' .

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0

CÂU 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d là

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-3}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

CÂU 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d .

CÂU 20: Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

D. $\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$.

CÂU 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và đi qua gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ $M(1, 0, 1)$ tới đường thẳng (d) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=3t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$.

CÂU 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt tia Oz tại điểm B sao cho $OB=2OA$.

A. $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-6}{-4}$.

B. $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{4}$.

D. $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{4}$.

CÂU 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}. \text{ Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với}$$

(P) ; cắt d, d' và tạo với d góc 30° . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\frac{1}{2}$.

CÂU 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 2z - 5 = 0$ và $(Q): 4x + 5y - z + 1 = 0$. Các điểm A, B phân biệt cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ nào sau đây?

A. $\vec{w} = (3; -2; 2)$. B. $\vec{v} = (-8; 11; -23)$. C. $\vec{k} = (4; 5; -1)$. D. $\vec{u} = (8; -11; -23)$.

CÂU 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y - 2z - 1 = 0$. Giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào trong các điểm sau.

A. $C(1; 2; 1)$. B. $D(2; 1; 0)$. C. $B(0; 1; 0)$. D. $A(2; 1; 1)$.

CÂU 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$, $N(3; 4; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) , các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ . Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$

CÂU 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Viết phương trình

đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oyz) .

A. $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. B. $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$. C. $d': \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$. D. $d': \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

CÂU 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Hình chiếu song song của

d lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 0 \\ z = 5 - 4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

CÂU 29: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$. D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

CÂU 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$ và $B(-3;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ sao cho tổng khoảng cách từ A và B đến đường thẳng d lớn nhất.

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. D. $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

CÂU 31: Cho hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm $M \in \Delta$ mà $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

- A. $(1;-2;0)$. B. $(0;-1;2)$. C. $(2;-3;-2)$. D. $(-1;0;4)$.

CÂU 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$ và điểm M thay đổi trên đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + MB$ là

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. 3.

CÂU 33: Cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 2z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một điểm thuộc mặt cầu (S) là

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong tất cả các đường thẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) , gọi Δ là đường thẳng sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

- A. $\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{-7}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+12}{6} = \frac{z+13}{7}$.
C. $\Delta: \frac{x+3}{-2} = \frac{y}{-6} = \frac{z-1}{-3}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{7}$.

CÂU 35: Cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -1-2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-1}$. Gọi d là đường thẳng vuông góc

chung của d_1 và d_2 , $M(a,b,c)$ thuộc d , $N(4;4;1)$. Khi độ dài MN ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng?

- A. 5. B. 9. C. 4. D. 6.

CÂU 36: Cho 2 mặt cầu $(S_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$, $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vectơ chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 2$ B. $S = 1$ C. $S = 0$ D. $S = 4$

CÂU 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;1;0)$, $B(4;4;-3)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt

phẳng (α) . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) . Tìm giá trị lớn nhất của $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$.

A. $T_{\max} = 2\sqrt{21}$.

B. $T_{\max} = 6\sqrt{14}$.

C. $T_{\max} = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{203}}{3} + 3\sqrt{21}$.

D. $T_{\max} = \sqrt{203}$.

CÂU 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$. C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

CÂU 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=6-t \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{5}{2}-t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\frac{5}{2}+t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$.

CÂU 40: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$. B. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$. C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$. D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

CÂU 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-4z=0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính $a+2b$.

A. $a+2b=-3$. B. $a+2b=0$. C. $a+2b=4$. D. $a+2b=7$.

CÂU 42: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2. Nếu M có hoành độ âm thì tung độ của M bằng

A. -3. B. -21. C. -5. D. -1.

CÂU 43: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng

$(P): x + y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y - z + 4 = 0$. Đường thẳng Δ qua điểm M , cắt hai mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt tại B và $C(a; b; c)$ sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$.

B. $T = 3$.

C. $T = 7$.

D. $T = 5$.

CÂU 44: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

A. 5

B. 3

C. 4

D. 10

CÂU 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0; 1; 0)$, $B(2; 2; 2)$, $C(-2; 3; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d để thể tích V của tứ diện $MABC$ bằng 3.

A. $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$; $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

B. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$; $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$.

C. $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$; $M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$.

D. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$; $M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1. Chọn C

(P) có VTPT $\vec{n} = (2; 3; 2)$, (Q) có VTPT $\vec{n}' = (1; -3; 2)$.

Do đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng (P) , (Q) nên đường thẳng có VTCP $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{n}'] = (12; -2; -9)$.

Vậy phương trình đường thẳng là $\frac{x}{12} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-9}$.

CÂU 2. Chọn D

Mặt phẳng $(P): x - 2y + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_{(P)} = (1; -2; 0)$.

Đường thẳng qua $A(1; 2; -2)$ và vuông góc với (P) có VTCP $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; -2; 0)$. Vậy đường

thẳng này có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

CÂU 3. Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (1; -3; 1)$

Suy ra phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

CÂU 4: Chọn C

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_1 = (1; -1; 1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_2 = (2; 1; 1)$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

$\Rightarrow (P)$ và (Q) cắt nhau.

Mặt khác: $A \notin (P)$, $A \notin (Q)$.

Ta có: $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-2; 1; 3)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(3; 1; -5)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (2; -1; -3)$ làm vectơ chỉ phương.

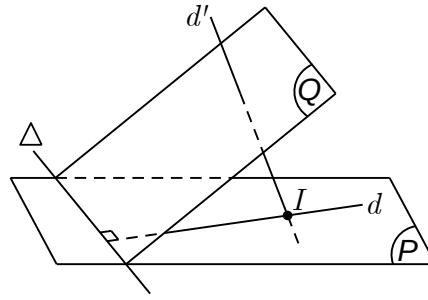
Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-3}$.

CÂU 5: Chọn B

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 5; -3)$ và đi qua $A(1; 1; -2)$ nên có phương trình:

$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.

CÂU 6: Chọn C



Đặt $\vec{n}_P = (0; 0; 1)$ và $\vec{n}_Q = (1; 1; 1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q) .

Do $\Delta = (P) \cap (Q)$ nên Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; 1; 0)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) và $d \perp \Delta$ nên d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{u}_\Delta] = (-1; -1; 0)$.

Gọi $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ và $A = d' \cap d \Rightarrow A = d' \cap (P)$

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} z-1=0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow A(3; 0; 1).$$

Do đó phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

CÂU 7. Chọn C

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc C là $CD: \begin{cases} x=2+2t \\ y=4-t \\ z=2-t \end{cases}$.

Gọi $C = (2+2t; 4-t; 2-t)$, suy ra tọa độ trung điểm M của AC là $M = \left(2+t; \frac{7-t}{2}; \frac{5-t}{2}\right)$. Vì $M \in BM$ nên:

$$\frac{(2+t)-3}{-1} = \frac{\left(\frac{7-t}{2}\right)-3}{2} = \frac{\left(\frac{5-t}{2}\right)-2}{-1} \Leftrightarrow \frac{t-1}{-1} = \frac{1-t}{4} = \frac{1-t}{-2} \Rightarrow t=1.$$

Do đó $C = (4; 3; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc CD là

$$2.(x-2) - 1.(y-3) - 1.(z-3) = 0 \text{ hay } 2x - y - z + 2 = 0.$$

Tọa độ giao điểm H của (P) và CD là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=4-t \\ z=2-t \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t \\ y=4-t \\ z=2-t \\ 2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=2 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 4; 2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác CD , suy ra H là trung điểm AA' , bởi vậy:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2.2 - 2 = 2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2.4 - 3 = 5 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 2.2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 5; 1).$$

Do $A' \in BC$ nên đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'} = (-2; 2; 0) = 2(-1; 1; 0)$, nên

$$\text{phương trình đường thẳng } BC \text{ là } \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Vì $B = BM \cap BC$ nên tọa độ B là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \\ \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 1) \equiv A'.$$

Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -2) = 2(0; 1; -1)$; hay $\vec{u}_4 = (0; 1; -1)$ là một véc-tơ chỉ của phương đường thẳng AB .

CÂU 8: Chọn B

$$\text{Ta có } d_1: \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = -1 + u \\ z = 2 - 2u \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -1 + 3v \\ y = -2v \\ z = -4 - v \end{cases}.$$

Gọi d_4 là đường thẳng cần tìm.

$$\text{Gọi } A = d_4 \cap d_1 \Rightarrow A(3 + 2u; -1 + u; 2 - 2u), B = d_4 \cap d_2 \Rightarrow B(-1 + 3v; -2v; -4 - v).$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4 + 3v - 2u; 1 - 2v - u; -6 - v + 2u).$$

$$d_4 \text{ song song } d_3 \text{ nên } \overrightarrow{AB} = k\vec{u}_3 \text{ với } \vec{u}_3 = (4; -1; 6).$$

$$\overrightarrow{AB} = k\vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 3v - 2u = 4k \\ 1 - 2v - u = -k \\ -6 - v + 2u = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \\ k = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Đường thẳng } d_4 \text{ đi qua } A(3; -1; 2) \text{ và có vtcp là } \vec{u}_3 = (4; -1; 6) \text{ nên } d_4: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}.$$

CÂU 9: Chọn C

* Gọi $N = d \cap \Delta \Rightarrow N \in \Delta$ nên $N(1 + 2t; -1 + t; -t)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{MN} = (2t - 1; t - 2; -t)$. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 1; -1)$.

* Vì $d \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - 2 + t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. Chọn vectơ chỉ phương của d là $\vec{a}_d = (1; -4; -2)$.

$$\text{* Vậy phương trình của } d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}.$$

CÂU 10: Chọn D

$$\text{Giả sử } d \cap d_2 = M \Rightarrow M(2 + t; -1 - t; 1 + t).$$

$$\overrightarrow{AM} = (1 + t; -t; t - 2).$$

$$d_1 \text{ có VTCP } \vec{u}_1 = (1; 4; -2).$$

$$d \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 1 + t - 4t - 2(t - 2) = 0 \Leftrightarrow -5t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; -1; -1).$$

Đường thẳng d đi qua $A(1; -1; 3)$ có VTCP $\overrightarrow{AM} = (2; -1; -1)$ có phương trình là:

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

CÂU 11: Chọn B

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ , A là giao của Δ và d .

Khi đó: $A(2+3t; -3+2t; 1+t)$, $\overrightarrow{MA} = (3+3t; -4+2t; -1+t)$.

Do Δ vuông góc với d' nên: $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 7t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (6; -2; 0)$, hay vectơ chỉ phương của Δ là $(3; -1; 0)$.

$$\text{Vậy phương trình } \Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}.$$

CÂU 12: Chọn D

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; 1; -1)$.

Gọi M là giao điểm của d và Δ , ta có: $M(3+t; 3+3t; 2t)$ suy ra $\overrightarrow{AM} = (t+2; 3t+1; 2t+1)$

Do Δ song song với mặt phẳng (α) nên $\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow t+2+3t+1-2t-1=0 \Leftrightarrow t=-1$

Khi đó $\overrightarrow{AM} = (1; -2; -1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ

CÂU 13. Chọn C

Gọi $M = \Delta \cap d \Rightarrow M \in d \Rightarrow M(3+t; 3+3t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2+t; 1+3t; 1+2t)$.

(α) có VTPT là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

$AM \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2+t+1+3t-1-2t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; -2; -1)$.

$$\text{Vậy } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}.$$

CÂU 14. Chọn B

Gọi $N = d \cap (\alpha)$ khi đó ta có $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Do $N \in d$ nên $N(2+2t; 2+t; 3+t)$. Mà $N \in (\alpha)$ nên $2+2t+2+t+3+t-3=0$

$\Rightarrow t=-1 \Rightarrow N(0; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-1; -1; 2)$.

Vậy một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 1; -2)$.

CÂU 15: Chọn C

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 2+t \end{cases}.$$

Xét phương trình $2(1+t) - (-t) - 2(2+t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $M(2; -1; 3)$.

Gọi $\vec{a}_d = (1; -1; 1)$ và $\vec{n} = (2; -1; -2)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Khi đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{a} = [\vec{a}_d, \vec{n}] = (3; 4; 1)$.

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

CÂU 16: Chọn B

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Gọi $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2$

$A \in d_1 \Rightarrow A(2a; 1-a; -2+a); B \in d_2 \Rightarrow B(-1+2b; 1+b; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2a+2b-1; a+b; -a+5)$

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (7; 1; -4)$

$d \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{n}_p$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB} = k\vec{n}_p$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b - 1 = 7k \\ a + b = k \\ -a + 5 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b - 7k = 1 \\ a + b - k = 0 \\ -a + 4k = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ k = -1 \end{cases}$$

d đi qua điểm $A(2; 0; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a}_d = \vec{n}_p = (7; 1; -4)$

Vậy phương trình của d là $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

CÂU 17: Chọn D

Với $A(2t+1; -t+1; -t+1) \in d$ và $B(3t'; -2t'; t'+1) \in d'$, ta có A, B, M thẳng hàng khi.

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = k(-1+2t') \\ 2-t = k(1-2t') \\ -2-t = k(-2+t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+k-2kt' = 0 \\ -t-k+2kt' = -2 \\ -t+2k-kt' = 2 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm.}$$

Vậy không có đường thẳng nào thỏa yêu cầu đề.

CÂU 18: Chọn B

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u} = (1; 1; 2)$

Gọi $\Delta \cap d = M(1+t; t; -1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t; t; -3+2t)$.

Ta có $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t+t+2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; 1; -1)$

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$, một VTCP là $\overrightarrow{AM} = (1; 1; -1)$ có phương trình là $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

CÂU 19 :

Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 2)$.

Gọi $B = \Delta \cap d$. Ta có $B \in d$ nên $B(1+t; t; -1+2t)$ và $\overrightarrow{AB} = (t; t; 2t-3)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Mặt khác $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$.

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

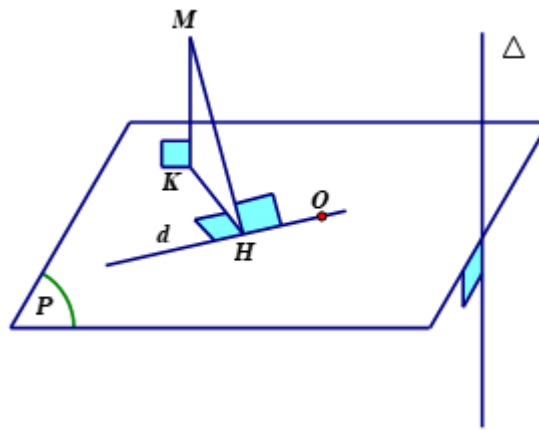
CÂU 20: Chọn A

Gọi $A = d \cap \Delta \Rightarrow A = d \cap (P)$

$$\text{Tọa độ } A \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1; 1).$$

Do $\Delta \subset (P)$ và $\Delta \perp d$ nên nhận $\vec{u} = [\vec{n}_p; \vec{u}_d] = (5; -1; -3)$ là một véc tơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; 1; 1)$ nên Δ có dạng $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.



Giả sử (P) là mặt phẳng qua gốc tọa độ O và vuông góc với Δ . Xét hình chiếu vuông góc của M trên (P) là điểm K ta có $MK \leq MH$ nên $MH_{\min}$ khi và chỉ khi $H \equiv K$ và khi đó đường thẳng (d) đi qua hai điểm O, K sẽ là hình chiếu vuông góc của (MO) trên mặt phẳng (P) . Do vậy:

$$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_p}, \left[\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{OM} \right] \right] \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{OM} \right] \right].$$

B thuộc tia $Oz \Rightarrow B(0;0;b)$, với $b > 0$.

$$OA=3, \quad OB=|b|.$$

$$OB = 2OA \Leftrightarrow |b| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -6 \end{cases} (l).$$

$$\Rightarrow B(0;0;6), \overrightarrow{BA} = (1; -2; -4).$$

Đường thẳng Δ đi qua $B(0;0;6)$ và có VTCP $\overrightarrow{BA} = (1; -2; -4)$ có phương trình là:

$$\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-6}{-4}.$$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_p}$ là VTPT của mặt phẳng (P) .

Gọi $M(1+t; t; 2+2t)$ là giao điểm của Δ và d ; $M(3-t'; 1+t'; 1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = (2 - t' - t; 1 + t' - t; -1 - 2t' - 2t)$

$$MM'/(P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \overrightarrow{MM'} \perp n_p \end{cases} \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = (4-t; -1-t; 3-2t)$$

$$\text{Ta có } \cos 30^\circ = \cos(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{u_d}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-1 \end{cases}$$

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1: \begin{cases} x=5 \\ y=4+t \\ z=10+t \end{cases}$; $\Delta_2: \begin{cases} x=t' \\ y=-1 \\ z=t' \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2}.$$

CÂU 24: Chọn D

$$* \text{ Ta có: } (P) \perp \vec{n}_{(P)} = (3; -2; 2), (Q) \perp \vec{n}_{(Q)} = (4; 5; -1).$$

$$* \text{ Do } \begin{cases} AB \subset (P) \\ AB \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp \vec{n}_{(P)} \\ AB \perp \vec{n}_{(Q)} \end{cases} \text{ nên đường thẳng } AB \text{ có vectơ chỉ phương là:}$$

$$\vec{u} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}] = (8; -11; -23)$$

$$* \text{ Do } \overrightarrow{AB} \text{ cũng là một vectơ chỉ phương của } AB \text{ nên } \overrightarrow{AB} // \vec{u} = (8; -11; -23).$$

CÂU 25: Chọn D

$$\text{Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng } \Delta \text{ là } \vec{u}(1; 1; 2).$$

$$\text{Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng } (\beta): x + y - 2z - 1 = 0 \text{ là } \vec{n}(1; 1; -2).$$

$$\text{Vì } (\alpha) \text{ là mặt phẳng chứa đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \text{ và vuông góc với mặt phẳng } (\beta): x + y - 2z - 1 = 0 \text{ nên } (\alpha) \text{ có một vectơ pháp tuyến là } \vec{n}_\beta = [\vec{u}, \vec{n}] = (-4; 4; 0) = 4(1; -1; 0) = 4\vec{a}.$$

$$\text{Gọi } d = (\alpha) \cap (\beta), \text{ suy ra } d \text{ có vectơ chỉ phương là } \vec{u}_d = [\vec{a}, \vec{n}] = (2; 2; 2) = 2(1; 1; 1).$$

$$\text{Giao điểm của đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \text{ và mặt phẳng } (\beta): x + y - 2z - 1 = 0 \text{ là } I(3; 2; 2).$$

$$\text{Suy ra phương trình đường thẳng } d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(2; 1; 1) \text{ thuộc đường thẳng } d.$$

CÂU 26: Chọn B

$$\text{Đường thẳng } d \text{ cần tìm là giao của } (P) \text{ với } (Q) \text{ là mặt phẳng trung trực của } MN.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } MN \Rightarrow I(2; 3; 4)$$

$$\overrightarrow{MN}(2; 2; 2)$$

$$\text{PTTQ của } (Q) \text{ là } x - 2 + y - 3 + z - 4 = 0 \text{ hay } (Q): x + y + z - 9 = 0 \text{ Phương trình đường thẳng } d$$

$$\text{cần tìm là giao của } (P) \text{ và } (Q) \text{ PTTS của } d \text{ là } \begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

CÂU 27: Chọn A

$$\text{Mặt phẳng } (Oyz) \text{ có phương trình } x = 0$$

$$\text{Gọi } A \text{ là giao điểm của } d \text{ và mặt phẳng } (Oyz) \text{ suy ra } A(0; -7; -5).$$

$$\text{Chọn } M(2; -3; 1) \in d$$

Gọi H là hình chiếu của M lên (Oyz) suy ra $H(0; -3; 1)$

Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oyz) là đường thẳng d' đi qua H nhận

$$\overrightarrow{AH} = (0; -4; -6) = -2(0; 2; 3) \text{ có phương trình: } d': \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

CÂU 28: Chọn B

Giao điểm của d và mặt phẳng (Oxz) là: $M_0(5; 0; 5)$.

Trên $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ chọn M bất kỳ không trùng với $M_0(5; 0; 5)$; ví dụ: $M(1; -2; 3)$. Gọi A là hình

chiếu song song của M lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

+/- Lập phương trình d' đi qua M và song song hoặc trùng với $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

+/- Điểm A chính là giao điểm của d' và (Oxz)

+/- Ta tìm được $A(3; 0; 1)$

Hình chiếu song song của $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ lên mặt phẳng (Oxz) theo phương

$\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$ là đường thẳng đi qua $M_0(5; 0; 5)$ và $A(3; 0; 1)$.

Vậy phương trình là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

CÂU 29. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Giả sử } M(x; y; z) &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x; y; z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] \\ &\quad - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 6 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}. \\ \text{Dấu "=" xảy ra} &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1, \text{ khi đó } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right). \end{aligned}$$

CÂU 30: Chọn A

Ta có $d(A; d) + d(B; d) \leq OA + OB$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp d \\ OB \perp d \end{cases} \Rightarrow d \text{ có VTCP là } \vec{u} = [\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] = (7; 7; 7) = 7(1; 1; 1).$

Vậy $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

CÂU 31: Chọn D

Gọi $M(1-t; -2+t; 2t) \in \Delta$

$$MA^2 + MB^2 = (t)^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2 + (-2+t)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2 = 12t^2 - 48t + 76$$

Ta có: $12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28$

Vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất bằng 28 khi $t = 2$ hay $M(-1; 0; 4)$.

CÂU 32 Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$

Do $M \in d \Rightarrow M(t; 1-t; 1+t)$.

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (1-t; t; -1-t) \Rightarrow MA = \sqrt{3t^2 + 2}$ và $\overrightarrow{MB} = (-1-t; -1+t; -t) \Rightarrow MB = \sqrt{3t^2 + 2}$.

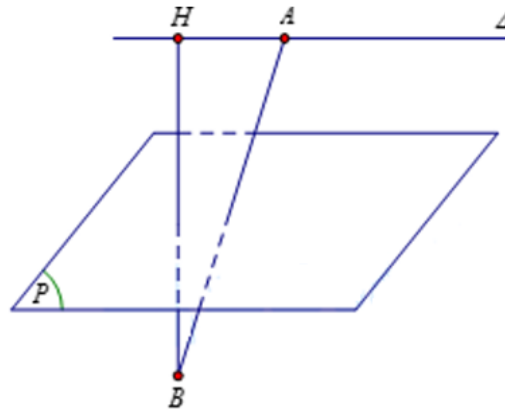
Do vậy $T = MA + MB = 2\sqrt{3t^2 + 2} \geq 2\sqrt{2}$. Suy ra $T_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi $t = 0 \Rightarrow M(0; 1; 1)$.

CÂU 33: Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của I trên (P) và A là giao điểm của IH với (S) . Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một

điểm thuộc mặt cầu (S) là đoạn AH . $AH = d(I, (P)) - R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 34: Chọn B



Ta có: $(-3-2.0+2.1-5).(1-2.(-1)+2.3-5) = -24 < 0$.

$\Rightarrow A, B$ là hai điểm nằm khác phía so với mặt phẳng (P) .

Gọi H là hình chiếu của B lên Δ .

Ta có: $BH \leq BA$ nên khoảng cách từ B đến Δ lớn nhất khi và chỉ khi H trùng A .

Khi đó: $AB \perp \Delta$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (4; -1; 2)$.

$\Rightarrow \vec{n}_1 = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (-2; 6; 7)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-3; 0; 1)$ và nhận $\vec{n}_1 = (-2; 6; 7)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+12}{6} = \frac{z+13}{7}$.

CÂU 35: Chọn B

Gọi $P(2+t; 2+t; -1-2t) \in d_1$ và $Q(2+4t'; 2-3t'; 2-t')$.

Ta có: $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (4; -3; -1)$ và $\overrightarrow{PQ} = (4t' - t; -3t' - t; -t' + 2t + 3)$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \vec{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \vec{b} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t' - t - 3t' - t - 2(-t' + 2t + 3) = 0 \\ 4(4t' - t) - 3(-3t' - t) - 1(-t' + 2t + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t' - 6t = 6 \\ 26t' - 3t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Suy ra $P(1; 1; 1)$ và $Q(2; 2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1; 1; 1)$.

$$\text{Nên } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Gọi $M(1+t; 1+t; 1+t)$ nên $\overrightarrow{NM} = (t-3; t-3; t)$.

$$\text{Do đó: } NM = \sqrt{(t-3)^2 + (t-3)^2 + t^2} = \sqrt{3t^2 - 12t + 18} = \sqrt{3(t-2)^2 + 6} \geq \sqrt{6}.$$

Đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $t = 2$.

Suy ra $M(3; 3; 3) \Rightarrow a + b + c = 9$.

CÂU 36: Chọn A

(S_1) có tâm $I_1(3; 2; 2)$, bán kính $R_1 = 2$.

(S_2) có tâm $I_2(1; 0; 1)$, bán kính $R_2 = 1$.

Ta có: $I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2$, do đó (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $A\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Vì d tiếp xúc với hai mặt cầu, đồng thời cắt đoạn thẳng nối hai tâm I_1I_2 nên d phải tiếp xúc với hai mặt cầu tại $A \Rightarrow d \perp I_1I_2$.

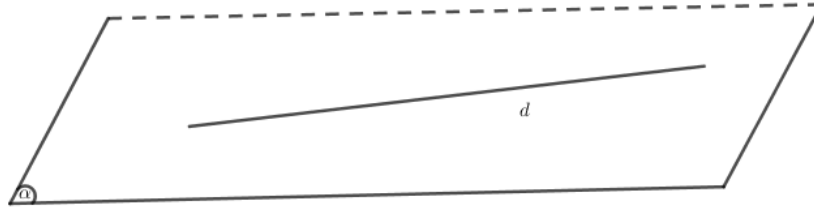
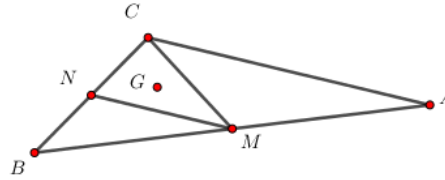
Mặt khác $d = d(O; d) \leq OA \Rightarrow d_{\max} = OA$ khi $d \perp OA$.

Khi đó, d có một vectơ chỉ phương là $[\overrightarrow{I_1I_2}, \overrightarrow{OA}] = (6; -3; -6) \Rightarrow \vec{u} = (-2; 1; 2)$.

Suy ra $a = -2$, $b = 2$.

Vậy $S = 2$.

CÂU 37: Chọn B



Ta có $AB = 3\sqrt{6}$; $AC = 2\sqrt{6}$; $BC = \sqrt{6}$.

Ta có $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3 = d_1 + d_2 + d_2 + d_3 + 2d_3$.

Gọi M là trung điểm AB , và N là trung điểm của BC ta có $2d(M;(\alpha)) = d_1 + d_2$ và $2d(N;(\alpha)) = d_2 + d_3$.

Gọi G là trọng tâm tam giác MNC . Khi đó ta có $T = 2d(M;(\alpha)) + 2d(N;(\alpha)) + 2d_3 = 6d(G;(\alpha))$.

Do đó $T = 6d(G;(\alpha)) \leq 6d(G;(d))$.

Ta có $M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}\right)$; $N\left(3; \frac{7}{2}; \frac{-5}{2}\right)$ suy ra $G(2; 3; -2)$.

Gọi $H(1+t; 1-2t; 1-t)$ là hình chiếu của G lên đường thẳng (d) , ta có $\overrightarrow{GH} = (t-1; -2t-2; 3-t)$.

$\overrightarrow{GH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (t-1) - 2(-2t-2) - (3-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy $T_{\max} = 6GH = 6\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 6\sqrt{14}$.

CÂU 38: Chọn A

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t; 2+t; -2-t)$

d có vector chỉ phương $\vec{a}_d = \overrightarrow{AM} = (2t+2; t+2; -1-t)$

Δ_2 có vector chỉ phương $\vec{a}_2 = (-1; 2; 2)$

$$\cos(d; \Delta_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}$, ta suy ra được min $f(t) = f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Do đó min $[\cos(\Delta, d)] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; 2; -1)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

CÂU 39: Chọn B

$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a; a; -2-a)$

$B \in d_2 \Rightarrow B(1+b; -2+3b; 2-2b)$

Δ có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4)$

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_p \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow b = a-1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-a-1; 2a-5; 6-a)$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-a-1)^2 + (2a-5)^2 + (6-a)^2} \\ &= \sqrt{6a^2 - 30a + 62} \\ &= \sqrt{6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}; \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{2}; 0; \frac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (-1; 0; 1)$

Vậy phương trình của Δ là
$$\begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}.$$

CÂU 40: Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I, (\alpha)) < R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B .

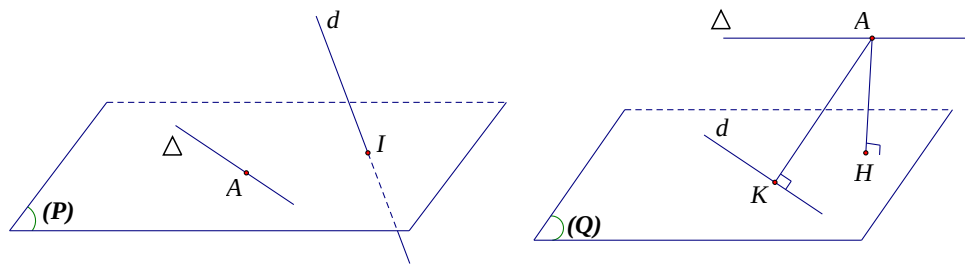
Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I, (\Delta))$ nhỏ nhất nên Δ qua H , với H

là hình chiếu vuông góc của I lên (α) . Phương trình BH :
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

$H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2+2t) - 2(3-2t) + 5+t+15=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow H(-2; 7; 3)$.

Do vậy $\overrightarrow{AH} = (1; 4; 6)$ là vec tơ chỉ phương của Δ . Phương trình của $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

CÂU 41: Chọn A



Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 3)$ và có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; -1; 1)$.

Nhận xét rằng, $A \notin d$ và $d \cap (P) = I(-7; 3; -1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Δ . Khi đó $d(\Delta, d) = d(\Delta, (Q)) = d(A, (Q))$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (Q) và d . Ta có $AH \leq AK$.

Do đó, $d(\Delta, d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(A, (Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv K$. Suy ra AH chính là đoạn vuông góc chung của d và Δ .

Mặt phẳng (R) chứa A và d có vec tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(R)}} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_1}] = (-2; 4; 8)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (R) nên có véc tơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_{(Q)} = [\vec{n}_{(R)}, \vec{u}_1] = (12; 18; -6).$$

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) và song song với mặt phẳng (Q) nên có véc tơ chỉ

$$\text{phương là } \vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (66; -42; 6) = 6(11; -7; 1).$$

Suy ra, $a = 11; b = -7$. Vậy $a + 2b = -3$.

CÂU 42: Chọn A

$$\text{Phương trình tham số của } d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

$$M \in d \Rightarrow M = (t; -1 + 2t; -2 + 3t).$$

$$d(M, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|t + 2(-1 + 2t) - 2(-2 + 3t) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|-t + 5|}{3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5 = 6 \\ t - 5 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 11 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Vì M có hoành độ âm nên chọn $t = -1$. Khi đó tung độ của M bằng -3 .

CÂU 43: Chọn C

Gọi mặt phẳng đi qua M nhận $\vec{AM} (1; 2; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến nên:

$$(R): 1(x-1) + 2(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 8 = 0.$$

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (R) và (P) .

Véc tơ pháp tuyến của mp (P) là: $\vec{n} (1; 1; -2)$

$$\text{Ta có } \vec{u} = [\vec{AM}, \vec{n}] = (-5; 3; -1)$$

Gọi M là điểm thuộc giao tuyến của (R) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y + z - 8 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \text{ nên } M (0; 3; 2)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d : \begin{cases} x = 0 - 5t \\ y = 3 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Ta có $B \in d$ nên $B(-5t; 3 + 3t; 2 - t)$

$$\text{Mặt khác } M \text{ là trung điểm của đoạn } BC \text{ nên } \begin{cases} x_C = 2.1 + 5t \\ y_C = 2.2 - 3 - 3t \\ z_C = 2.3 - 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 + 5t \\ y_C = 1 - 3t \\ z_C = 4 + t \end{cases}$$

Mặt khác $C \in (Q)$ nên $2 + 5t - 2(1 - 3t) - (4 + t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 10t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Nên $C(2; 1; 4)$ nên $T = a + b + c = 7$.

CÂU 44 : Chọn D

Ta có $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \cdot d(M; AB) \cdot AB$ nên ΔMAB có diện tích nhỏ nhất khi $d(M; AB)$ nhỏ nhất.

Gọi Δ là đường vuông góc chung của d, AB . Khi đó $M = \Delta \cap d$. Gọi $N = \Delta \cap AB$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 0)$, phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 \end{cases}$

Do $N \in AB \Rightarrow N(s; -1 + 2s; 2)$, $M \in d \Rightarrow M(-1 + t; t; 1 + t)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (t - s - 1; t - 2s + 1; t - 1)$. Mà $MN \perp d, MN \perp \Delta$ nên

$$\begin{cases} t - s - 1 + 2t - 4s + 2 = 0 \\ t - s - 1 + t - 2s + 1 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 5s = -1 \\ 3t - 3s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ s = 1 \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ hay $T = a + 2b + 3c = 10$.

CÂU 45: Chọn A

Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1)$

Do $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6)$ nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{9}{2}$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) thì $\vec{n} = (1; 2; -2) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Gọi $M(1 + 2t; -2 - t; 3 + 2t) \in d \Rightarrow d(M, (ABC)) = \frac{|4t + 11|}{3}$.

Do thể tích V của tứ diện $MABC$ bằng 3 nên $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{|4t + 11|}{3} = 3 \Leftrightarrow |4t + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t = -\frac{17}{4} \end{cases}$.

Với $t = -\frac{5}{4}$ thì $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Với $t = -\frac{17}{4}$ thì $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6)$

Gọi $M(1 + 2t; -2 - t; 3 + 2t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1 + 2t; -3 - t; 3 + 2t)$.

Vì $V_{MABC} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AM}|$ nên $|12t + 33| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t = -\frac{17}{4} \end{cases}$

Với $t = -\frac{5}{4}$ thì $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Với $t = -\frac{17}{4}$ thì $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$.