

2020

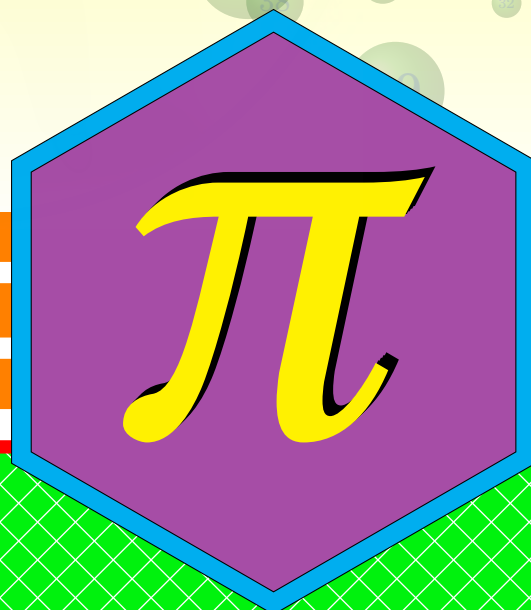
Các chuyên đề luyện thi THPT QG

THÔNG ĐÌNH THÔNG - HOÀI THÔNG

BỘ CHUYÊN ĐỀ ÔN THI THPT QG MÔN TOÁN



KHỐI 10 - 11 - 12



LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

CHƯƠNG I	CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ	3
1	TÍNH ĐƠN ĐIỀU	3
A	Lý thuyết	3
1	Định nghĩa	3
2	Điều kiện cần để hàm số đơn điệu	3
3	Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu	3
B	Phương pháp vận dụng	4
1	Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$	4
2	Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định	4
3	Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ qua Bảng biến thiên	4
4	Một số ví dụ	5
	Phiếu bài tập rèn luyện số 1	7
5	Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước	13
Dạng 1.	Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = f(x; m) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng k	14
	Phiếu bài tập rèn luyện số 2	18
6	Bài toán tính đơn điệu của hàm số thông qua đồ thị hàm f' - đơn điệu hàm hợp $f[u(x)]$	21
	Phiếu bài tập số 3	28
7	Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức	35

PHẦN I

CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

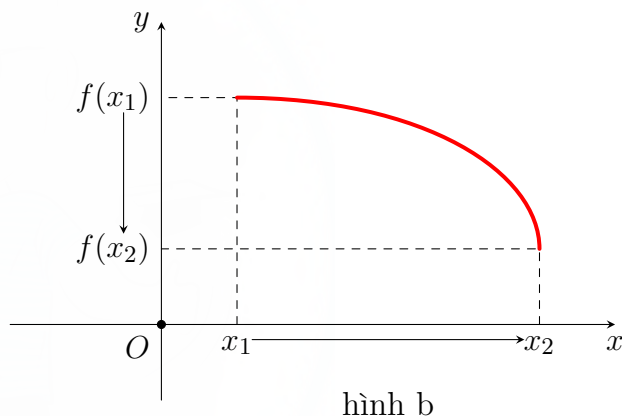
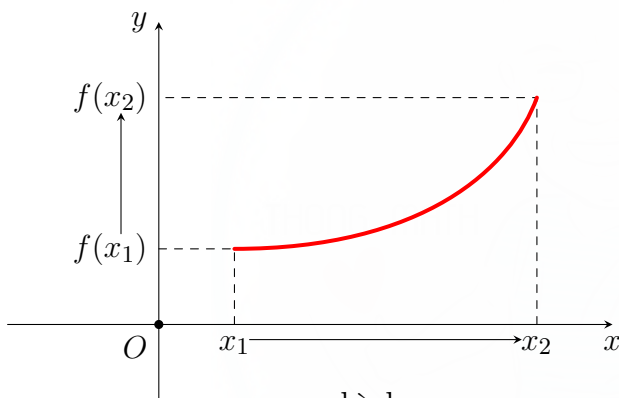
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU

A LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (hình a).
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (hình b).



2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

! Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

✎ Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

✎ Nếu $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $f(a) < f(b)$.

✎ Nếu $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $f(a) > f(b)$.

B PHƯƠNG PHÁP VẬN DỤNG

1. Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$

Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.

Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước 3. Sử dụng máy tính hoặc quy tắc xét dấu tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên.

Bước 5. Kết luận.

3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ qua Bảng biến thiên

Xét hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$, ta dựa vào bảng biến thiên để xét tính đơn điệu:

✎ $f'(x)$ mang dấu $+$ (dương) thì $f(x)$ **đồng biến** trên $(a; b)$.

Khi đó: Chiều mũi tên hướng lên trên

✎ $f'(x)$ mang dấu $-$ (âm) thì $f(x)$ **nghịch biến** trên $(a; b)$.

Khi đó: Chiều mũi tên hướng xuống dưới

Minh họa bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	<pre> graph LR A["$-\infty$"] --> B["$f(x_1)$"] B --> C["$f(x_2)$"] C --> D["$f(x_3)$"] D --> E["$-\infty$"] </pre>				

Dựa vào bảng biến thiên:

Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; x_3)$.

Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên các khoảng $(x_1; x_2)$ và $(x_3; +\infty)$.

4. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của hàm số sau $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2x - 3; \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

BBT

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$. $\square$

! Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ (nghĩa là liên tục tại $x = -1; x = 3$) nên ta có thể kết luận như sau: Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1]$ và $[3; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $[-1; 3]$.

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số sau: $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}. \text{ BBT:}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$						$+\infty$

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ nên nghịch biến trên $(-\infty; -1)$. $\square$

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số sau: $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải.

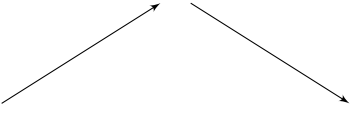
Tập xác định: $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. $\square$

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của hàm số sau: $y = \sqrt{2018x - x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = [0; 2018]$; $y' = \frac{2018 - 2x}{2\sqrt{2018x - x^2}}$; $y' = 0 \Rightarrow x = 1009$. Bảng biến thiên:

x	0	1009	2018
y'	+	0	-
y			

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1009)$ và nghịch biến trên khoảng $(1009; 2018)$. □

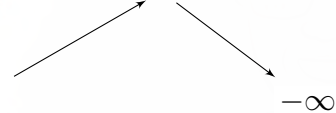
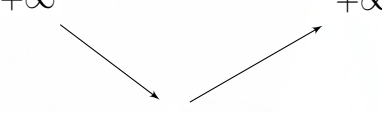
Ví dụ 5. Xét tính đơn điệu của hàm số sau: $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$. □

Phiếu bài tập rèn luyện số 1

🦋 **Câu 1.** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^2 + 2x - 1$.

(B) $y = x^4 - 2x^2$.

(C) $y = x^3 + 2x - 2019$.

(D) $\frac{2x-1}{x+3}$.

🦋 **Câu 2.** Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $\mathbb{R}$.

(B) $(-\infty; -2)$.

(C) $(0; +\infty)$.

(D) $(-2; 0)$.

🦋 **Câu 3.** Hàm số $-x^3 - 3x^2 + 9x + 20$ đồng biến trên các khoảng nào

(A) $(-3; 1)$.

(B) $(-\infty; 1)$.

(C) $(-3; +\infty)$.

(D) $(1; 2)$.

🦋 **Câu 4.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

(B) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

(C) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(D) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.

🦋 **Câu 5.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $y = x^3 - x + 2$.

(B) $y = x^3 + x - 1$.

(C) $y = x^3 - 3x + 5$.

(D) $y = x^4 + 4$.

🦋 **Câu 6.** Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng

(A) $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

(B) $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

(C) $(-2; 0)$ và $(0; 2)$.

(D) $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

🦋 **Câu 7.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

🦋 **Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

(B) Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

🦋 **Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đã cho chỉ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(B) Hàm số đã cho chỉ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

(C) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(D) Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

🦋 **Câu 10.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x)$ trong đó $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2018$ nghịch biến trên khoảng nào?

- (A) $(0; 3)$. (B) $(-\infty; 3)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(3; +\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 (B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 (D) Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 13. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. (B) Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. (D) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(0; 2)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-\infty; -2)$. (D) $(-2; 0)$.

Câu 15. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 4); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [2; 3]$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 (B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.
 (C) $f(\sqrt{5}) = f(\sqrt{7})$.
 (D) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1		-3		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(0; 2)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bản biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

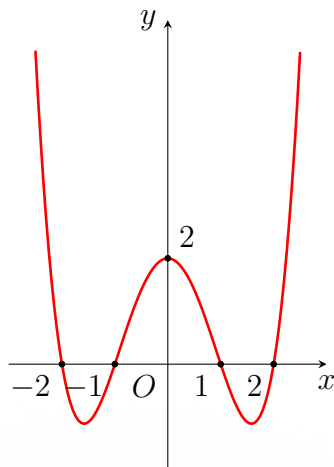
(A) $(0; 2)$.

(B) $(-2; 0)$.

(C) $(0; +\infty)$.

(D) $(-\infty; -2)$.

🔥 **Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 1)$.

(B) $(-1; 0)$.

(C) $(-2; -1)$.

(D) $(-1; 1)$.

🔥 **Câu 19.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; +\infty)$.

(B) $(-\infty; -2)$.

(C) $(-3; 1)$.

(D) $(-2; 0)$.

🔥 **Câu 20.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	-2	$+\infty$	-2	$-\infty$

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.

(B) Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2; 2)$.

(C) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2; +\infty)$ và $(-\infty; -2)$.

(D) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

🔥 **Câu 21.** Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên được cho ở hình dưới. Hỏi hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	2	0	$+\infty$

- Ⓐ $(-\infty; -2)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(0; 2)$. Ⓓ $(-2; 0)$.

🦋 **Câu 22.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(0; 2)$. Ⓑ $(-1; 3)$. Ⓒ $(-\infty; 3)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

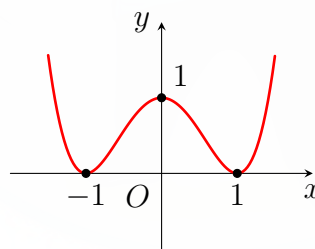
🦋 **Câu 23.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		0	6		$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai về sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$?

- Ⓐ Nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Ⓑ Đồng biến trên khoảng $(0; 6)$.
 Ⓒ Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. Ⓓ Đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

🦋 **Câu 24.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

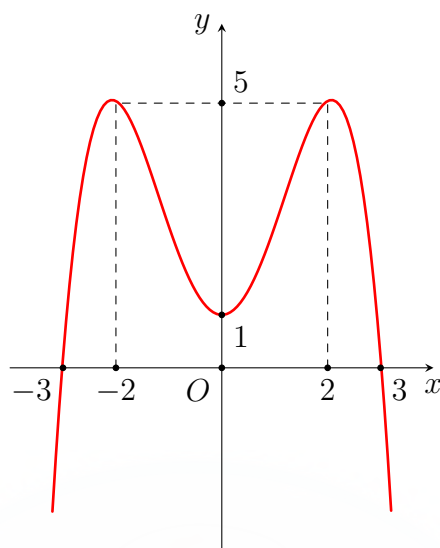
- Ⓐ $(-1; 0)$. Ⓑ $(-\infty; -1)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $(-1; 1)$.

🦋 **Câu 25.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		2		$+\infty$	
					-2	
						$+\infty$

- Ⓐ $(-1; 1)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(-2; 2)$. Ⓓ $(2; +\infty)$.

🦋 **Câu 26.** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào được liệt kê dưới đây?



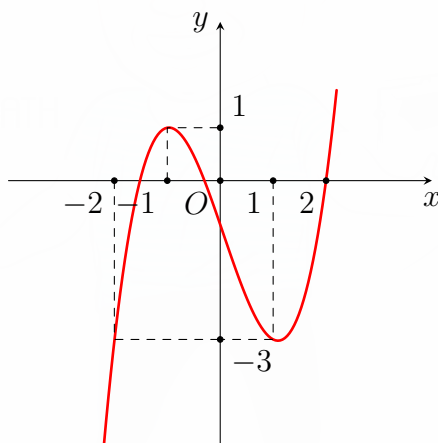
(A) $(2; +\infty)$.

(B) $(-2; +\infty)$.

(C) $(-\infty; 2)$.

(D) $(-\infty; -2)$.

🦋 **Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

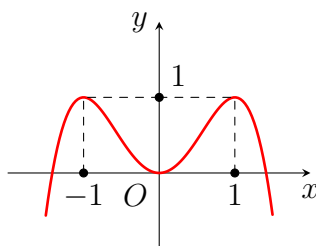
(A) $(-1; 1)$.

(B) $(-2; -1)$.

(C) $(0; 2)$.

(D) $(-2; 1)$.

🦋 **Câu 28.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?



(A) Nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

(B) Đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(C) Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

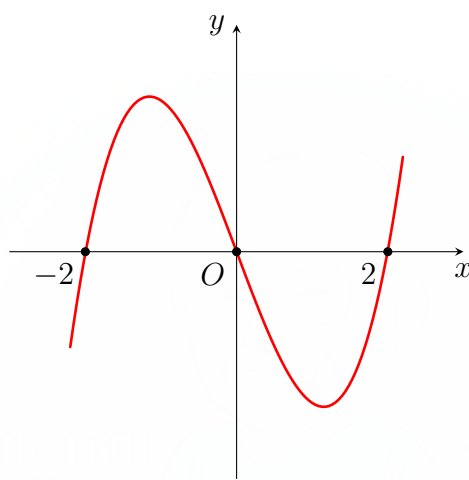
🦋 **Câu 29.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$
		-2			-2		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(0; +\infty)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(-\infty; 0)$. Ⓓ $(-\infty; -2)$.

🔥 **Câu 30.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- Ⓐ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 Ⓑ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
 Ⓒ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 Ⓓ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. C	5. B	6. B	8. C	9. D	10. D	11. D
12. B	13. D	14. A	15. D	16. A	17. B	18. A	19. D	20. D	21. D
22. A	23. B	24. A	25. B	26. D	27. B	28. C	29. D	30. D	

5. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước

Cho hàm số $y = f(x, m)$ có tập xác định D , khoảng $(a; b) \subset D$:

✎ Hàm số nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$.

✎ Hàm số đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$.

! Riêng hàm số $\frac{ax+b}{cx+d}$ thì: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}, y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

✎ Hàm số nghịch biến trên TXĐ $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$.

✎ Hàm số đồng biến trên TXĐ $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$.

✎ Hàm số nghịch biến trên $(u; v) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (u; v) \Rightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ \frac{-d}{c} \notin (u; v) \end{cases}$.

✎ Hàm số đồng biến trên $(u; v) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (u; v) \Rightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ \frac{-d}{c} \notin (u; v) \end{cases}$.

* Nhắc lại kiến thức liên quan

Cho tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

$$\textcircled{\heartsuit} g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{\heartsuit} g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{\heartsuit} g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{\heartsuit} g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

! Riêng hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi
$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$	$f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Nếu gặp bài toán tìm m để hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng (a, b)

BƯỚC 1. Đưa bất phương trình $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a; b)$ về dạng $g(x) \geq h(m)$ (hoặc $g(x) \leq h(m)$), $\forall x \in (a; b)$.

! BƯỚC 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn (a, b) .

BƯỚC 3. Từ bảng biến thiên và các điều kiện thích hợp ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số m .

$$\bullet g(x) \geq h(m) \Leftrightarrow h(m) \leq \min_{x \in (a; b)} g(x); \quad g(x) \leq h(m) \geq \max_{x \in (a; b)} g(x)$$

Dạng 1. Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = f(x; m) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng k

BƯỚC 1. Tính $y' = f'(x; m) = 2x^2 + bx + c$.

BƯỚC 2. Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

BƯỚC 3. Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng k

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = k^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = k^2 (***)$$

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-1}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $y' = \frac{-m+1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1 \Leftrightarrow -m+1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

! Ở ví dụ trên ta không cho điều kiện $y' \geq 0, \forall x \neq 1$ (bỏ dấu "=") vì tại $y' = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hàm số có dạng $y = \frac{x-1}{x-1} = 1$ hay $y = 1$, khi đó phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ tại vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$ (không xảy ra tại hữu hạn điểm). Do đó điều kiện bài toán này là $y' > 0, \forall x \neq 1$.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - (m-3)x^2 + (m+5)x - 1$ Tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = (m+1)x^2 - 2(m-3)x + m+5$.

- Với $m = -1$, $y' = 8x + 4$. y' đổi dấu trên khi qua $x = -\frac{1}{2}$ nên loại $m = -1$.
- Với $m \neq -1$. YCBT $\Leftrightarrow y' = (m+1)x^2 - 2(m-3)x + m+5 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (*).

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ 12m+4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

□

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

(A) $m \leq -3$.

(B) $m \leq -2$.

(C) $m \leq -1$.

(D) $m \leq 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - m$. Để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\text{Đặt } g(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} g(x).$$

$$\text{Mà } \min_{(0; +\infty)} g(x) = g(1) = -3 \Rightarrow m \leq -3.$$

Chọn đáp án (A)

□

Ví dụ 4. Hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ khi:

(A) $m > 2$.

(B) $m \geq 3$.

(C) $m < 2$.

(D) $m < -3$.

Lời giải.

$$y' = \frac{2-m}{(x-m)^2}, \text{ điều kiện cần tìm là } \begin{cases} 2-m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Chọn đáp án (B)

□

Ví dụ 5. Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ khi giá trị của m thỏa:

(A) $m \leq 2$.

(B) $m \geq 2$.

(C) $m \leq \frac{11}{9}$.

(D) $m \geq \frac{11}{9}$.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 4mx - (m+1), y' = 3x^2 - 4mx - (m+1) \leq 0 \forall x \in (0; 2).$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{3x^2 - 1}{4x + 1} = g(x) \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; 2)} g(x).$$

$$\text{Lại có: } g'(x) = \frac{2(6x^2 + 3x + 2)}{(4x + 1)^2} > 0 \forall x \in (0; 2). \text{ Do đó } \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; 2)} g(x) = g(2) = \frac{11}{9}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

(A) $m = -1, m = 9$. (B) $m = -1$. (C) $m = 9$. (D) $m = -1, m = -9$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - mx + 2m$.

Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$.

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 7. Hàm số $y = \frac{2m \cos x - m}{4 \cos x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì điều kiện của tham số m là gì

- (A) $m < -2$ hay $m > 0$. (B) $m < -2$ hay $m \geq 4$.
(C) $-2 < m \leq 4$. (D) $-2 < m < 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x \xrightarrow{x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)} t \in (-1; 0)$. Do $t = \cos X$ đồng biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

(Kiểm tra $t' = -\sin x > 0, \forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$).

Nên yêu cầu bài toán sẽ giữ nguyên **đồng biến** $\rightarrow$ **đồng biến** hay bài toán phát biểu lại thành:

“Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2mt + 4m}{4t + m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ ”.

Khi đó, yêu cầu bài toán tương đương: $y' = \frac{2m^2 + 4m}{(4t + m)^2} > 0$, đúng $\forall t \in (-1; 0)(*)$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{m}{4} \notin (-1; 0) \\ 2m^2 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \\ m < -2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 8. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- (A) $m < 0$. (B) $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.
(C) $0 < m \leq 1$. (D) $m > -1$.

Lời giải.

Cách 1: Với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin x \in (0; 1)$.

$$y' = \frac{\cos x(\sin x - m) - \cos x(\sin x + m)}{(\sin x - m)^2} = \frac{-2m \cos x}{(\sin x - m)^2}.$$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0; 1) \\ y' < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0; 1) \\ -2m \cos x < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \text{ (do } \cos x < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)) \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0. \end{aligned}$$

Cách 2: (Đổi sang biến mới)

Đặt $t = \sin x \xrightarrow{x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)} t \in (0; 1)$. Do $t = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ (có thể kiểm tra $t' = \cos x < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$).

Nên bài toán sẽ chuyển đổi từ **ngịch biến** $\rightarrow$ **đồng biến** hay bài toán phát biểu lại là: “Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{t+m}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.”

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương: $y' = \frac{-2m}{(t-m)^2} > 0, \forall x \in (0; 1)(*)$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0; 1) \\ -2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Phiếu bài tập rèn luyện số 2

Hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

🦋 **Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (5m - 6)x + 2$ đồng biến trên tập xác định của nó.

- (A) $1 \leq m \leq 6$. (B) $\begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 3 \end{cases}$. (C) $2 < m < 3$. (D) $2 \leq m \leq 3$.

🦋 **Câu 2.** Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

- (A) $m \in [-1; 1]$. (B) $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
(C) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. (D) $m \in (-1; 1)$.

🦋 **Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-1; 5]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- (A) 7. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

🦋 **Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m + 3)x + m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- (A) $m = -4$. (B) $m = 0$. (C) $m = -2$. (D) $m = 1$.

🦋 **Câu 5.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 2)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là

- (A) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. (B) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$. (C) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (D) $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right]$.

📖 **Lời giải.**

Chọn đáp án (D) □

🦋 **Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

- (A) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (B) $\{0\}$. (C) $(-\infty; 0)$. (D) $\emptyset$.

🦋 **Câu 7.** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

🦋 **Câu 8.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x - 6m^3$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

- (A) $(-\infty; 1]$. (B) $(-\infty; 2]$. (C) $(-\infty; 0]$. (D) $[2; +\infty)$.

📖 **Lời giải.**

Chọn đáp án (A) □

🦋 **Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị nguyên dương nhỏ hơn 5 của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (2m - 3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- (A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

🦋 **Câu 10.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - (2m - 3)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- (A) $[0; +\infty)$. (B) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (C) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. (D) $(-\infty; 0]$.

🦋 **Câu 11.** Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m + 1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

- (A) $m \geq 2$. (B) $m \leq \frac{11}{9}$. (C) $m \geq \frac{11}{9}$. (D) $m \leq 2$.

📖 **Lời giải.**

Chọn đáp án (C) □

🦋 **Câu 12.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(m+2)}{2}x^2 + 2mx + 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ là

- (A) $(-\infty; 1]$. (B) $[1; +\infty)$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(1; +\infty)(1; +\infty)$.

🦋 **Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

- (A) 10. (B) 20. (C) 11. (D) 21.

🦋 **Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3(m+2)x^2 - 3(m^2 + 4m)x + 1$ đồng biến trong khoảng $(0; 1)$?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

🦋 **Câu 15.** Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ có độ dài khoảng nghịch biến bằng $2\sqrt{5}$

- (A) $m = -2, m = 4$. (B) $m = 1, m = 3$. (C) $m = 0, m = -1$. (D) $m = 2, m = -4$.

Hàm trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$

🦋 **Câu 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

- (A) $m \in (-\infty; -5)$. (B) $m \in [-5; 2)$. (C) $m \in (2; +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; 2]$.

🦋 **Câu 17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - mx^2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- (A) 4. (B) 8. (C) 9. (D) 7.

🦋 **Câu 18.** Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} + \frac{x^2}{2} - mx + 2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m| \leq 2020$.

- (A) 4041. (B) 2027. (C) 2026. (D) 2015.

Hàm phân thức: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

🦋 **Câu 19.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m^2}{x + 4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- (A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

🦋 **Câu 20.** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{-2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

- (A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

🦋 **Câu 21.** Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x + 2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2)$. (C) $(-\infty; 2]$. (D) $[2; +\infty)$.

🦋 **Câu 22.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

- (A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

🦋 **Câu 23.** Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y = f(x) = \frac{x + 2m - 3}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S ?

- (A) $T = -10$. (B) $T = -9$. (C) $T = -6$. (D) $T = -5$.

🦋 **Câu 24.** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x - m}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0; 3]$.

- (A) $m > 3$. (B) $0 < m < 2$. (C) $2 < m \leq 3$. (D) $m \leq 0$.

🦋 **Câu 25.** Tìm m để hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- (A) $m < -\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2} < m \leq 1$. (C) $-\frac{1}{2} \leq m < 1$. (D) $m \leq 1$.

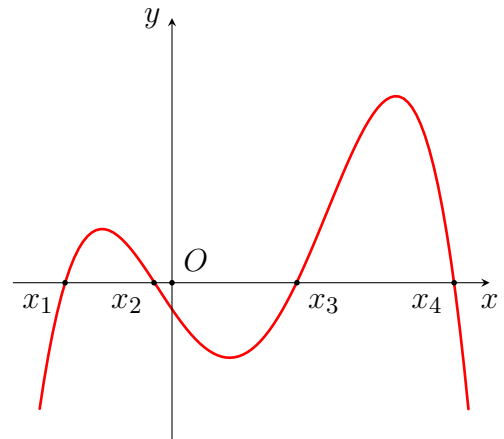
BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. D	4. D	5. D	6. D	7. B	8. A	9. D	10. D
11. C	12. B	13. C	14. D	15. D	16. D	17. B	18. B	19. C	20. C
21. B	22. D	23. A	24. D	25. B					

6. Bài toán tính đơn điệu của hàm số thông qua đồ thị hàm f' - đơn điệu hàm hợp $f[u(x)]$

BÀI TOÁN 1. Xác định tính đơn điệu của hàm số dựa vào đồ thị $f'(x)$.

- Đồ thị hàm số $f'(x)$ **nằm phía trên** Ox nên $f'(x) \geq 0$.
Do đó: Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên $\mathcal{D}$.
- Đồ thị hàm số $f'(x)$ **nằm phía dưới** Ox nên $f'(x) \leq 0$.
Do đó: Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên $\mathcal{D}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy

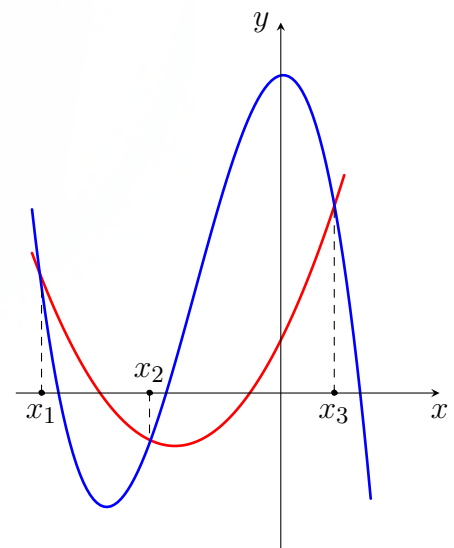
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ **nằm phía trên trục hoành** trong các khoảng $(x_1; x_2)$ và $(x_3; x_4) \Rightarrow y' > 0$ trên các khoảng $(x_1; x_2)$ và $(x_3; x_4)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên các khoảng $(x_1; x_2)$ và $(x_3; x_4)$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ **nằm phía dưới trục hoành** trong các khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_2; x_3)$ và $(x_4; +\infty) \Rightarrow y' < 0$ trên các khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_2; x_3)$ và $(x_4; +\infty)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên các khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_2; x_3)$ và $(x_4; +\infty)$. $\square$

BÀI TOÁN 2. Xác định tính đơn điệu của hàm số $y = f(x) = h(x) - g(x)$ dựa vào đồ thị $h'(x)$, $(g'(x))$.

Lời giải.

- Nếu đồ thị $h'(x)$ **nằm phía trên** đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x) > 0$.
Do đó: Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên $\mathcal{H}$.
- Nếu đồ thị $h'(x)$ **nằm phía dưới** đồ thị $g'(x)$ thì $f'(x) < 0$.
Do đó: Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên $\mathcal{H}$.



BÀI TOÁN 3. Xác định tính đơn điệu của hàm hợp $y = f(u)$ dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị $y = f'(x)$.

Lời giải.

Xét hàm $g(x) = f(u(x))$.

Bước 1. $g'(x) = [f(u(x))] = u'(x) \cdot f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{cases}$

Tìm $x_1, x_2, \dots, x_i$ là nghiệm $f'(x) = 0$ hoặc không xác định.

Bước 2. Giải phương trình $f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x_1 \\ u(x) = x_2. \\ \dots \end{cases}$

Xét dấu $f'(u(x))$ dựa vào dấu $f'(x)$ hoặc dựa vào bảng biến thiên dấu $f'(x)$.
Vai trò của $u(x)$ giống như x vì dấu của $f'(u(x))$ cũng là dấu của $f'(x)$.

Bước 3. Lập bảng xét dấu $g'(x)$.

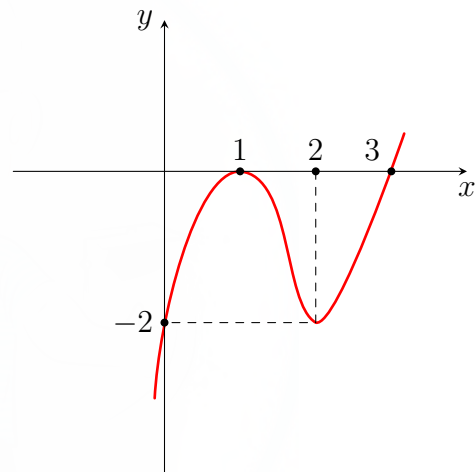
Bước 4. Kết luận tính đơn điệu hàm $g(x) = f(u(x))$.

□

Ví dụ 1.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

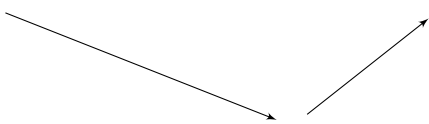
- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 1)$.
(C) $(3; +\infty)$. (D) $(1; 3)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ và $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 3$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	0	+	
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C)

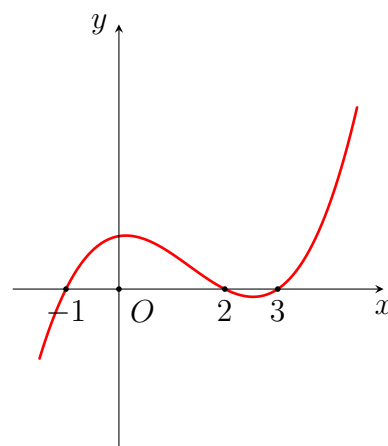
□

Ví dụ 2.



Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(1-x)$ đồng biến trên khoảng

- (A) $(2; 3)$. (B) $(-\infty; -1)$.
(C) $(-2; 0)$. (D) $(-1; +\infty)$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = -f'(1-x); y' = 0 \Leftrightarrow f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -1 \\ 1-x = 2 \\ 1-x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dấu y'

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

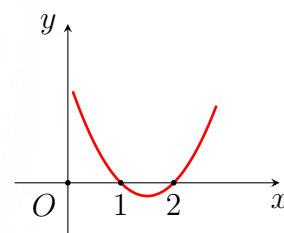
Chọn đáp án (A)

□

Ví dụ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1-x^2)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-\infty; -1)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(-1; 2)$.



Lời giải.

Đặt $g(x) = f(1-x^2)$.

Ta có

$$g'(x) = -2x \cdot f'(1-x^2), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-x^2 = 1 \\ 1-x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } f'(x) \text{ ta có } f'(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 1 \\ 1-x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 0 \\ x^2 > -1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm.)}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
$f'(1-x^2)$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta có hàm số $g(x) = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Đặt hàm số $y = g(x) = f(1 - x) + 1$. Mệnh đề nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là **đúng**?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Trên tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ta có $g'(x) = -f'(1 - x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 - x = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

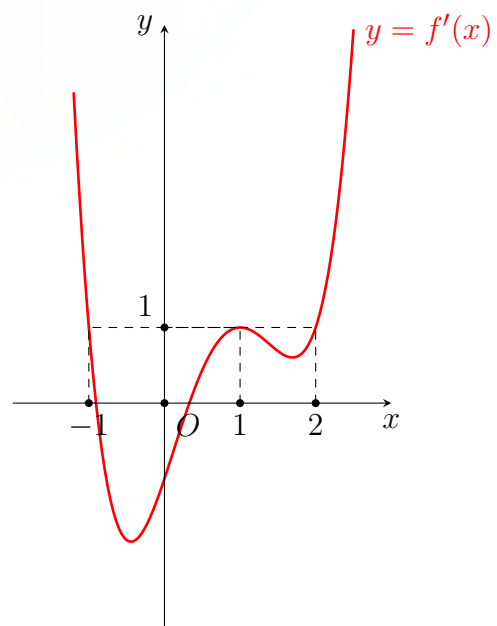
Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Ví dụ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $y = g(x) = f(x) - x$ Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là **đúng**?

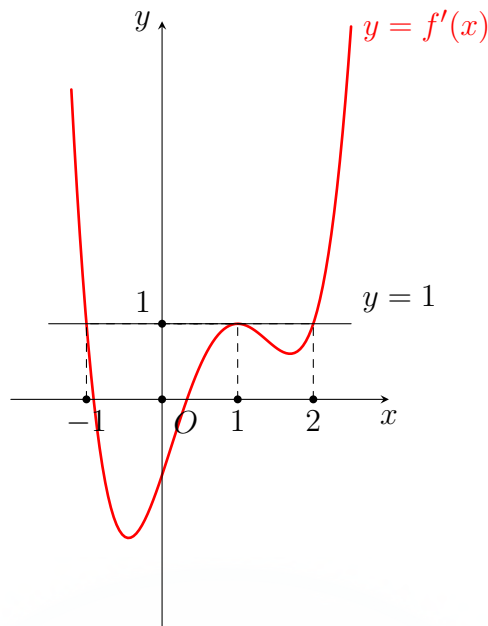
- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.



Lời giải.

Có $g'(x) = f'(x) - 1$.

Vẽ đường thẳng $d: y = 1$ song song với trục Ox .



Ta có BBT của $y = g'(x) = f'(x) - 1$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

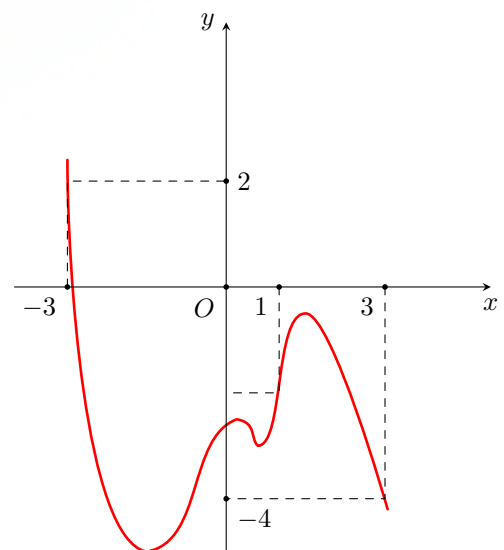
Chọn đáp án **(D)**

□

Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $y = g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là **đúng**?

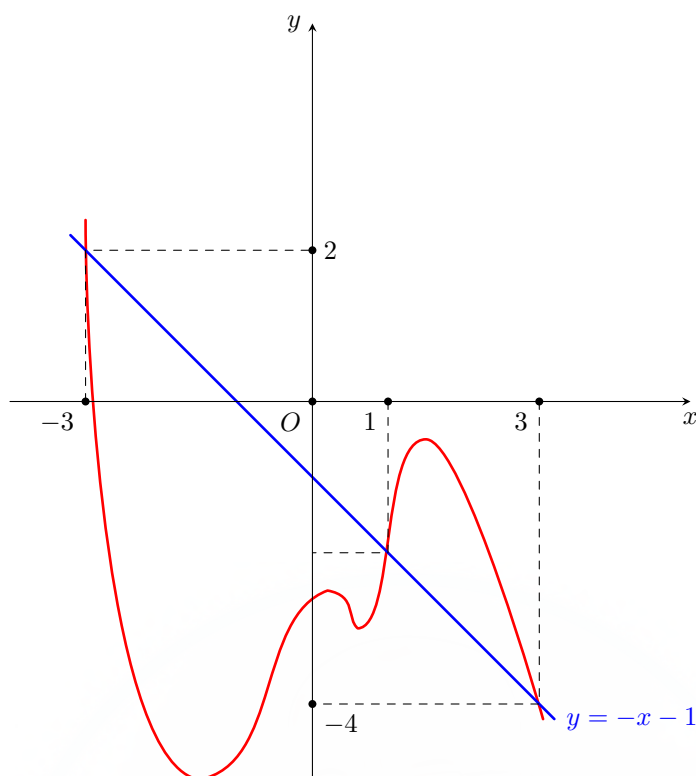
- (A)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- (B)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- (C)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- (D)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.



Lời giải.

$$y' = g'(x) = f'(x) + x + 1 = f'(x) - (-x - 1).$$

Vẽ đường thẳng $d: y = -x - 1$ lên cùng mặt phẳng tọa độ.



Dựa vào đồ thị ta có trên khoảng $(1; 3)$ đồ thị (C) nằm phía trên đường thẳng d . Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

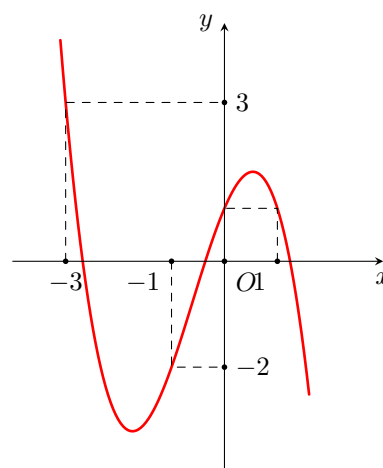
Chọn đáp án **A**



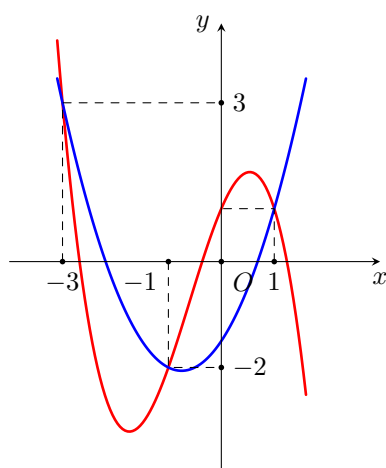
Ví dụ 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây về hàm số $y = g(x)$ là sai?

- A** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- B** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$.
- C** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.



Lời giải.



$$g'(x) = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right).$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ tại các điểm có hoành độ $x = -3$; $x = -1$; $x = 1$.

Nhìn vào đồ thị ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ nên đáp án A sai.

Chọn đáp án **A**

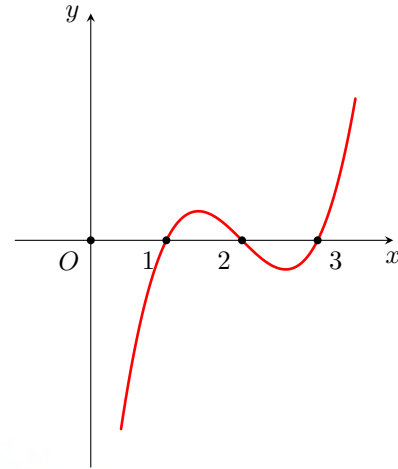
□

Phiếu bài tập số 3

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

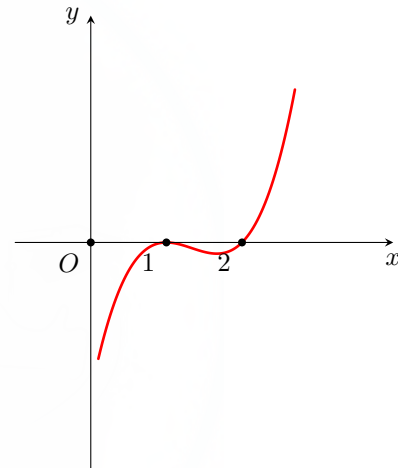
- (A) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 (B) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 (D) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.



Câu 2.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(0; 1)$.
 (C) $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$. (D) $(1; 2)$.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

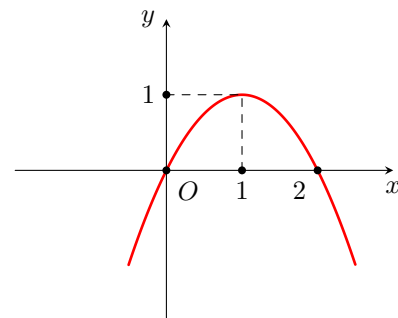
Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- (A) $(-4; 2)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(2; 4)$.

Câu 4.

Cho hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $f(x) = g(-x + 3)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

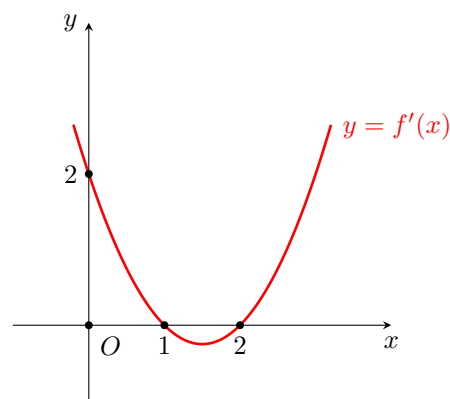
- (A) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2; 3)$.
 (B) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
 (C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(3; 4)$.
 (D) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$.



Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ hàm số $y = f(1 - 2x)$ đồng biến trên khoảng

- Ⓐ $(2; +\infty)$. Ⓑ $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
 Ⓒ $(1; 2)$. Ⓓ $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.



🔥 Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

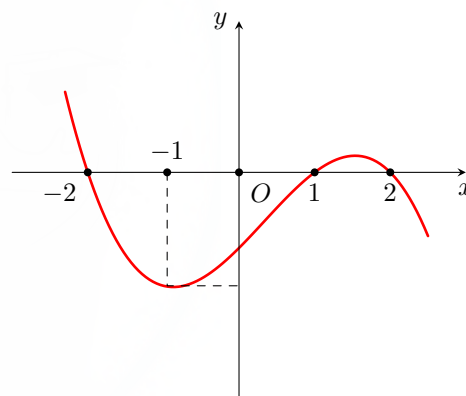
Hàm số $y = f(4 - 3x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- Ⓐ $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$. Ⓑ $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$.

🔥 Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(2) = f(-2) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau:

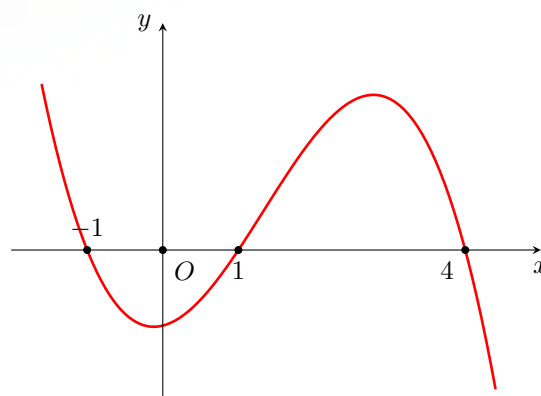
- Ⓐ $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. Ⓑ $(-2; -1)$.
 Ⓒ $(-1; 1)$. Ⓓ $(1; 2)$.



🔥 Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(3 - x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- Ⓐ $(2; 4)$. Ⓑ $(-1; 2)$.
 Ⓒ $(2; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.



🔥 Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng

(A) $(0; 1)$.

(B) $(1; +\infty)$.

(C) $(-1; 0)$.

(D) $(-\infty; 0)$.

🔥 Câu 10.

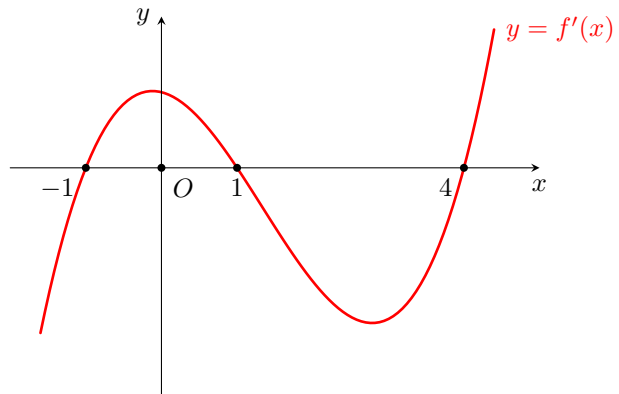
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-1; 0)$.

(B) $(-\infty; 1)$.

(C) $(1; 4)$.

(D) $(4; +\infty)$.



🔥 Câu 11.

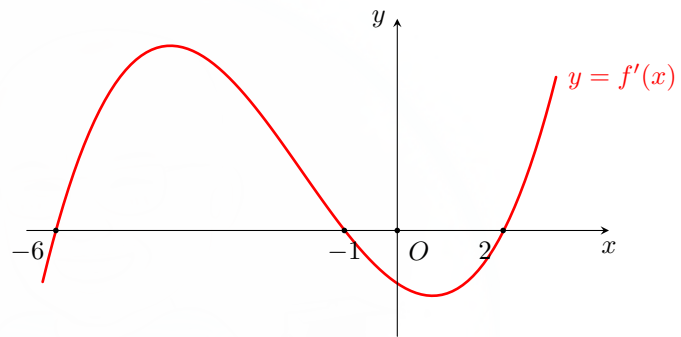
Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng:

(A) $(2; 3)$.

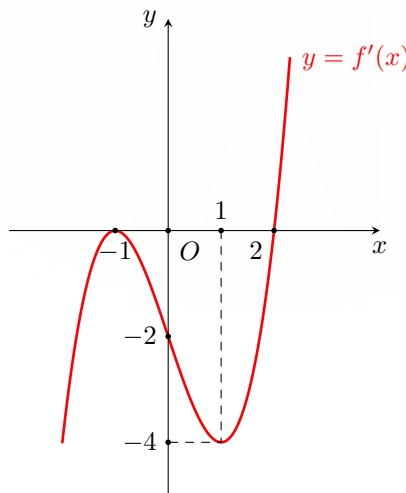
(B) $(-2; -1)$.

(C) $(0; 1)$.

(D) $(-1; 0)$.



🔥 Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 7)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

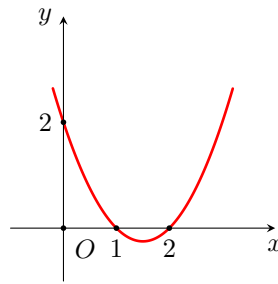
(A) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$.

(B) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-\sqrt{6}; 0)$.

(C) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0; \sqrt{6})$.

(D) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(\sqrt{6}; 3)$.

🔥 Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



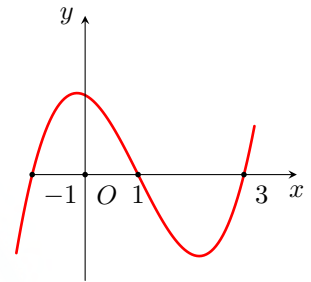
Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- Ⓐ $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ⓑ $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. Ⓒ $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

🔥 Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng

- Ⓐ $(0; 1)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(-2; -1)$.



📖 Lời giải.

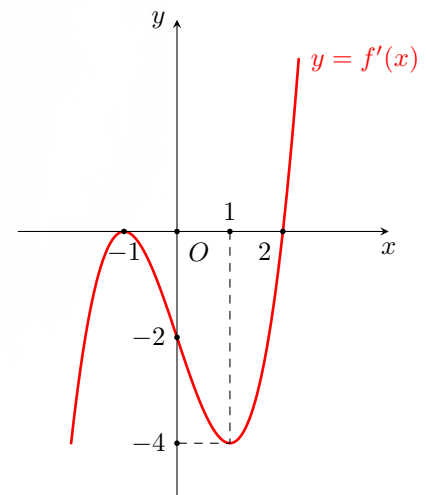
Chọn đáp án Ⓐ

□

🔥 Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(1; 3)$. Ⓑ $(-3; -1)$.
Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(4; +\infty)$.



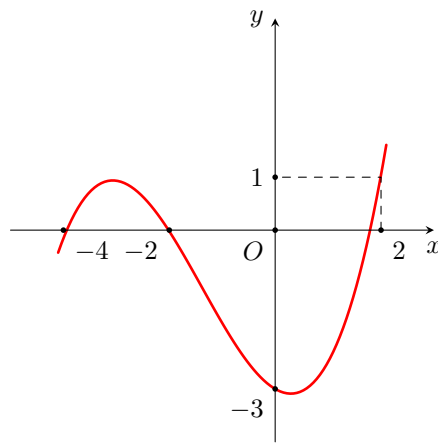
🔥 Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(2; +\infty)$. Ⓑ $(0; 2)$. Ⓒ $(-\infty; -2)$. Ⓓ $(-2; 0)$.

🔥 Câu 17. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



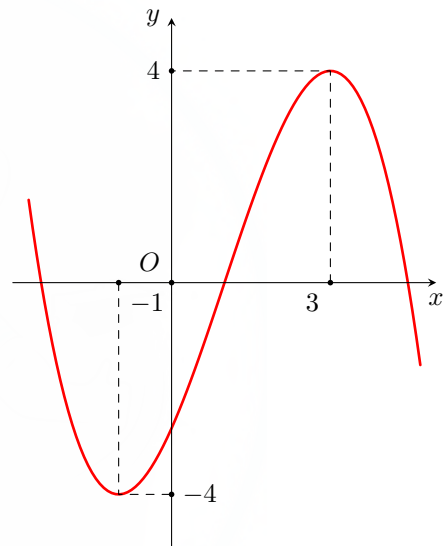
Hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A) $(0; 2)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(-2; 0)$.

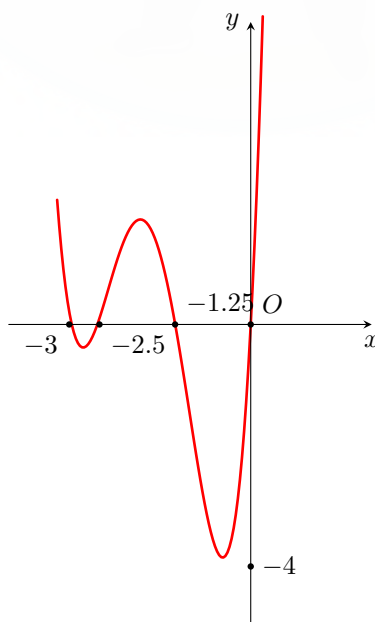
Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng

- (A) $(-1; 2)$. (B) $(1; 3)$.
(C) $(0; 1)$. (D) $(-\infty; 0)$.



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - (x + 1)^2$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây:

Ⓐ $(-3; 0)$.

Ⓑ $(-3; -1)$.

Ⓒ $(-1; 0)$.

Ⓓ $(-3; -2)$.

🔥 Câu 20.

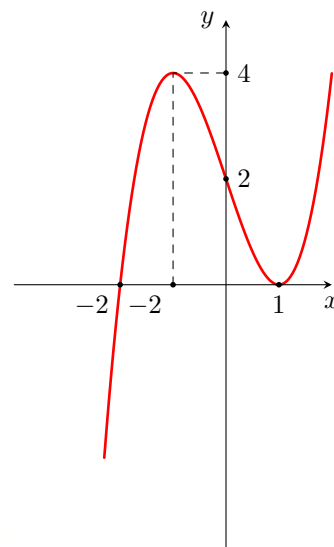
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

Ⓐ 1.

Ⓑ 3.

Ⓒ 2.

Ⓓ 0.



🔥 Câu 21.

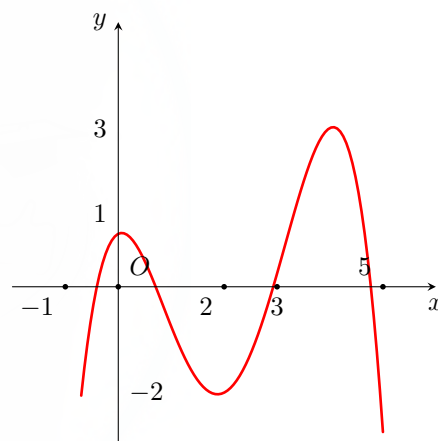
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = -2f(2 - x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng

Ⓐ $(-1; 0)$.

Ⓑ $(0; 2)$.

Ⓒ $(-2; -1)$.

Ⓓ $(-3; -2)$.



🔥 Câu 22.

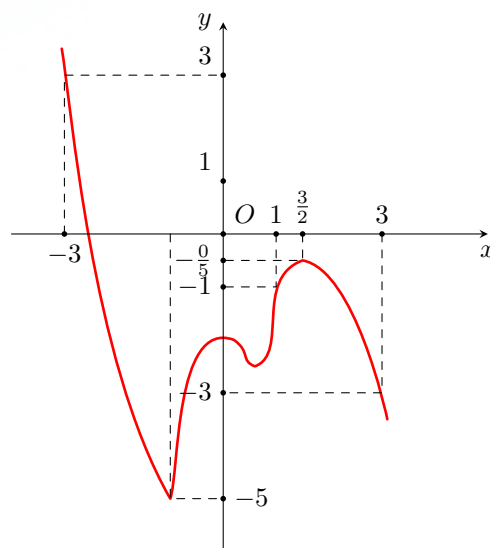
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1 - x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng

Ⓐ $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

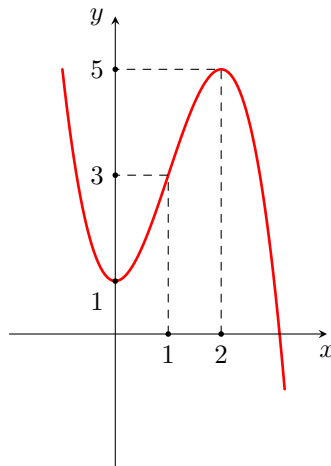
Ⓑ $(-2; 0)$.

Ⓒ $(-3; 1)$.

Ⓓ $(1; 3)$.



🔥 Câu 23. Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



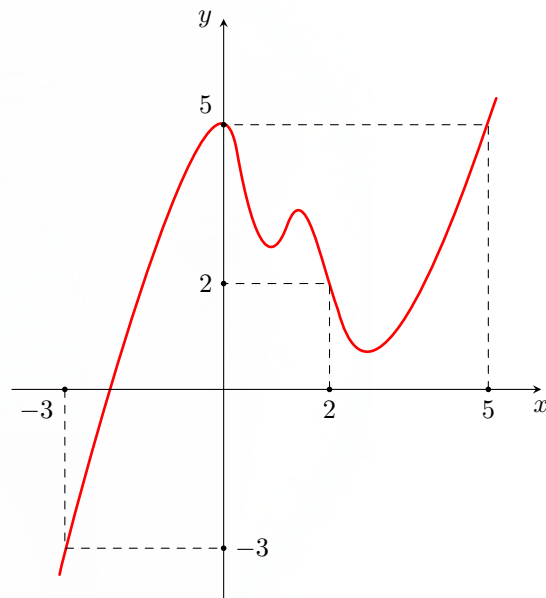
Hàm số $y = f(5 - 2x) + 4x^2 - 10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- Ⓐ $(3; 4)$. Ⓑ $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Ⓓ $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 24.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(-2x + 1) + (x + 1)(-2x + 4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. Ⓑ $(-\infty; -2)$.
Ⓒ $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ⓓ $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.



Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2018$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1 - x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

- Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(0; 3)$. Ⓒ $(-\infty; 3)$. Ⓓ $(4; +\infty)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. B	4. B	5. B	6. C	7. D	8. B	9. A	10. A
11. D	12. B	13. D	14. A	15. C	16. A	17. D	18. C	19. D	20. A
21. A	22. B	23. B	24. A	25. D					

7. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức

Đưa phương trình, hoặc bất phương trình về dạng $f(x) = m$ hoặc $f(x) \geq g(m)$, lập bảng biến thiên của $f(x)$, dựa vào BBT suy ra kết luận.

!

- Nếu $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $[a; b]$ thì $f(x) \geq f(a)$ hoặc $f(x) \leq f(b)$.
- Nếu $f(x)$ nghịch biến và liên tục trên $[a; b]$ thì $f(x) \leq f(a)$ hoặc $f(x) \geq f(b)$.
- Nếu $f(x)$ liên tục và nghịch biến (hoặc đồng biến) trên K thì với mọi $a, b \in K$:
 $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^5 + 2x^3 + 5x + \sqrt{x^3 + x + 2} - 10 = 0$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x^3 + 5x + \sqrt{x^3 + x + 2} - 10$ liên tục trên $[-1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 5 + \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + x + 2}} > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

Do đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$. □

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} < 18$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x + 6\sqrt{x+2}$ liên tục trên $[-2; +\infty)$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 1 + \frac{3}{\sqrt{x+2}} = 2(x+2) + \frac{3}{2\sqrt{x+2}} + \frac{3}{2\sqrt{x+2}} - 3 \\ &\geq 3\sqrt[3]{2(x+2) \cdot \frac{3}{2\sqrt{x+2}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{x+2}}} - 3 = 3\sqrt[3]{8} - 3 > 0, \forall x \in (-2; +\infty) \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện ta được $-2 \leq x < 2$. □

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2 + 1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 1$.

Ta có $2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4}$ (1)

Dễ thấy hai vế của (1) là hai hàm ngược tính đơn điệu, nên (1) có nghiệm duy nhất $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 2$. □

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|x| + \sqrt{x^2 + 1} = m$ có nghiệm?

(A) $m \geq 0$.

(B) $0 \leq m < 1$.

(C) $m \geq 1$.

(D) $m = 1 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = |x| \geq 0$, khi đó phương trình có dạng $t + \sqrt{t^2 + 1} = m$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Suy ra $f(t) \geq f(0) = 1$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.

Do đó phương trình (*) có nghiệm thì $m \geq 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Ví dụ 5. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m + \sqrt{m + 1 + \sqrt{1 + \sin x}} = \sin x$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 4a - \frac{1}{b} - \sqrt{2}$ bằng

(A) -4.

(B) -5.

(C) -3.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1 + \sin x} \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{1 + \sin x}$. Ta có $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ và $\sin x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình có dạng: $m + \sqrt{m + 1 + t} = t^2 - 1 \Leftrightarrow m + 1 + t + \sqrt{m + 1 + t} = t^2 + t$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t, t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số $f(t) = t^2 + t$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì thế (*) $\Leftrightarrow t = \sqrt{m + 1 + t} \Leftrightarrow m = t^2 - t - 1$ (**).

Xét hàm số $g(t) = t^2 - t - 1, t \in [0; \sqrt{2}]$.

$g'(t) = 2t - 1$. □