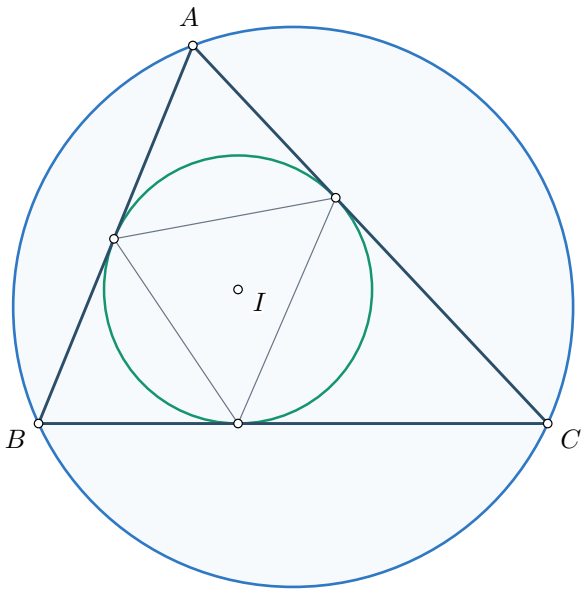
TUYỂN TẬP ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN

Hình học

chọn đội tuyển VMO

Năm học 2026–2027



Nguyễn Đăng Khoa

THCS – THPT Newton

Hà Nội, tháng 11 năm 2026

31	57	100+
tỉnh thành	bài toán	hình vẽ

Đề bài · Lời giải · Hình vẽ · Bình luận

Mục lục

Lời mở đầu **4**

1 TP. Hà Nội **5**
1.1 Sở Giáo dục và Đào tạo 5
1.2 Chuyên Sư phạm 7
1.3 Chuyên Khoa học Tự nhiên 9

2 TP. Hồ Chí Minh **20**
2.1 Sở Giáo dục và Đào tạo 20
2.2 Phổ thông Năng khiếu 23
2.3 Trần Đại Nghĩa 28

3 An Giang **29**

4 TP. Bắc Ninh **34**

5 Cà Mau **40**

6 TP. Cần Thơ **44**

7 TP. Đà Nẵng **45**

8 Đắk Lắk **48**

9 TP. Đồng Nai **51**

10 Đồng Tháp **53**

11 Gia Lai **56**

12 Hà Tĩnh **59**

13 TP. Hải Phòng **64**

14 TP. Huế **65**

15 Hưng Yên **67**

16 Khánh Hòa **68**

17 Lạng Sơn **71**

18 Lào Cai **74**

19 Lâm Đồng **77**

20 Nghệ An **78**
20.1 Chuyên Đại học Vinh 78
20.2 Chuyên Phan Bội Châu 80

21 Ninh Bình **84**

22 Phú Thọ **88**

23 Quảng Ngãi 91
24 TP. Quảng Ninh 95
25 Quảng Trị 98
26 Sơn La 101
27 Tây Ninh 104
28 Thái Nguyên 106
29 Thanh Hóa 108
30 Tuyên Quang 112
31 Vĩnh Long 113

Lời mở đầu

Tài liệu tập hợp một số bài toán hình học trong các đề chọn đội tuyển năm học 2026–2027. Các bài được sắp xếp theo địa phương và đơn vị ra đề, kèm lời giải, hình minh họa và những bình luận liên quan.

Nhiều bài toán được trình bày theo hơn một cách giải. Việc đối chiếu các cách tiếp cận giúp nhận ra những mối liên hệ giữa góc định hướng, phương tích, tỉ số kép, cực và đối cực, các phép biến hình cũng như các công cụ vectơ. Người đọc nên thử giải độc lập trước khi tham khảo lời giải.

Ở một số bài, các điều kiện được bổ sung để cấu hình xác định (loại các trường hợp suy biến) được đặt trong ngoặc vuông $[\cdot]$.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn tới trợ lí AI đã hỗ trợ trong quá trình biên soạn tài liệu: soạn thảo LaTeX, vẽ hình minh họa và gợi ý ý tưởng cho một số lời giải.

Kí hiệu và quy ước

- AB chỉ đoạn thẳng hoặc độ dài; khi nói giao, song song hoặc vuông góc, AB được hiểu là đường thẳng qua A, B.
- (AB, CD) là góc định hướng giữa hai đường thẳng, xét theo môđun π. Kí hiệu $\angle ABC$ hoặc $\widehat{ABC}$ được dùng cho góc thông thường.
- $\overline{AB}$ là độ dài đại số sau khi chọn một chiều dương trên đường thẳng chứa A, B.
- $(O; R)$ là đường tròn tâm O, bán kính R; (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi ba điểm không thẳng hàng.
- $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ chỉ hai tam giác đồng dạng với thứ tự đỉnh tương ứng như đã viết.
- $\mathcal{P}_\omega(X)$ là phương tích của điểm X đối với đường tròn ω; với đường tròn kí hiệu theo tâm hoặc theo các điểm nằm trên nó, ta viết $\mathcal{P}_{(O)}(X)$, $\mathcal{P}_{(ABC)}(X)$.

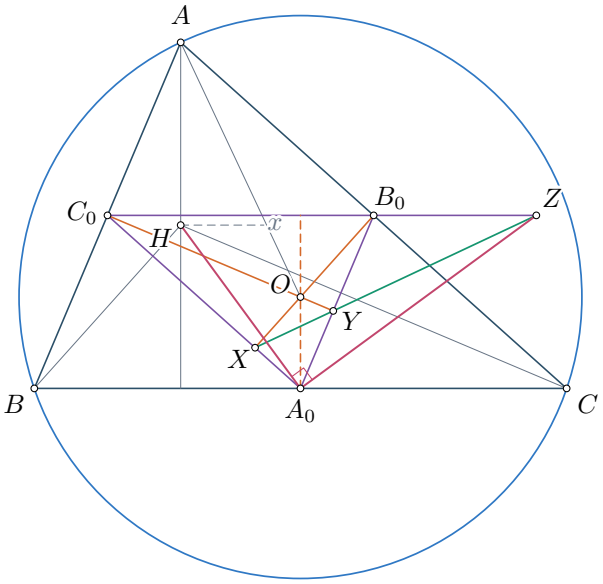
1 TP. Hà Nội

1.1 Sở Giáo dục và Đào tạo

Bài toán 1.1 (Bài 4; 6,0 điểm). Cho tam giác ABC [nhọn] ($AB < AC < BC$) nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại trực tâm H.

(a) Gọi A_0, B_0, C_0 tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi X là giao điểm của hai đường thẳng B_0O và C_0A_0, Y là giao điểm của hai đường thẳng C_0O và A_0B_0. Hai đường thẳng XY và B_0C_0 cắt nhau tại điểm Z. Chứng minh đường thẳng A_0H vuông góc với đường thẳng A_0Z.

(b) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BB_1, CC_1. Chứng minh đường thẳng MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác A_1HK.



Hình cho câu a).

Lời giải. **a)** Dễ thấy O là trực tâm tam giác $A_0B_0C_0$ nên $A_0(O, Z; B_0, C_0) = -1$. Kẻ $Hx \parallel BC$ thì $H(x, A_0; B, C) = -1$. Mà $Hx \perp A_0O$, $HB \perp A_0C_0$, $HC \perp A_0B_0$ nên hai chùm trên có các tia tương ứng vuông góc, suy ra $HA_0 \perp A_0Z$.

b) Gọi L là giao điểm của AO và B_1C_1. Theo tính chất quen thuộc, $AO \perp B_1C_1$, nên L là hình chiếu của A trên B_1C_1.

Khẳng định 1.1. MN là đường trung trực của đoạn thẳng A_1L.

Vì $AB \neq AC$ nên $B_1C_1 \nparallel BC$; đặt $T = B_1C_1 \cap BC$ và gọi W là trung điểm của AT. Do $\angle AA_1T = \angle ALT = 90^\circ$, hai điểm A_1, L cùng thuộc đường tròn đường kính AT, nên W thuộc đường trung trực của A_1L.

Xét tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng AB, AC, BC, B_1C_1. Ba đường chéo của nó là AT, BB_1, CC_1, nên theo định lí đường thẳng Gauss, ba trung điểm W, M, N thẳng hàng. Hơn

nữa, đường thẳng Gauss vuông góc với đường thẳng Steiner, tức đường thẳng đi qua trực tâm của bốn tam giác ABC, AB_1C_1, TBC_1, TCB_1.

Gọi H' là trực tâm của tam giác AB_1C_1. Vì B, C, B_1, C_1 đồng viên nên tam giác AB_1C_1 là ảnh của tam giác ABC qua phép đồng dạng nghịch tâm A (đối xứng qua phân giác góc A, rồi vị tự tỉ số $\frac{AB_1}{AB}$), biến $B \mapsto B_1$, $C \mapsto C_1$. Phép đồng dạng này biến chân đường cao A_1 thành chân đường cao L và biến H thành H'; do đó $H' \in AL$ và

$$\frac{AH'}{AL} = \frac{AH}{AA_1}.$$

Theo Thales đảo, $HH' \parallel A_1L$. Như vậy A_1L song song với đường thẳng Steiner, nên $A_1L \perp MN$. Kết hợp với $W \in MN$ và $WA_1 = WL$, ta được MN là đường trung trực của A_1L.

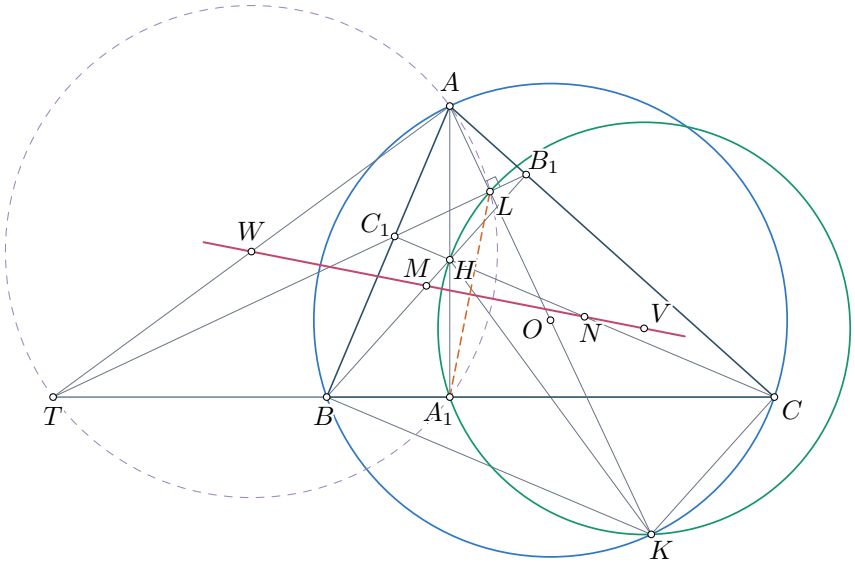
Khẳng định 1.2. Bốn điểm A_1, H, K, L đồng viên.

Vì $\angle HA_1C = \angle HB_1C = 90^\circ$ nên H, A_1, C, B_1 đồng viên; vì $\angle B_1LK = \angle B_1CK = 90^\circ$ (do AK là đường kính) nên B_1, L, K, C đồng viên. Theo phương tích của A,

$$\overline{AH} \cdot \overline{AA_1} = \overline{AB_1} \cdot \overline{AC} = \overline{AL} \cdot \overline{AK}.$$

Do $K \notin AA_1$ (vì $AB \neq AC$), suy ra A_1, H, K, L đồng viên.

Vậy tâm V của đường tròn (A_1HK) cũng là tâm của (A_1HKL), nên V nằm trên đường trung trực của A_1L, tức là trên MN.

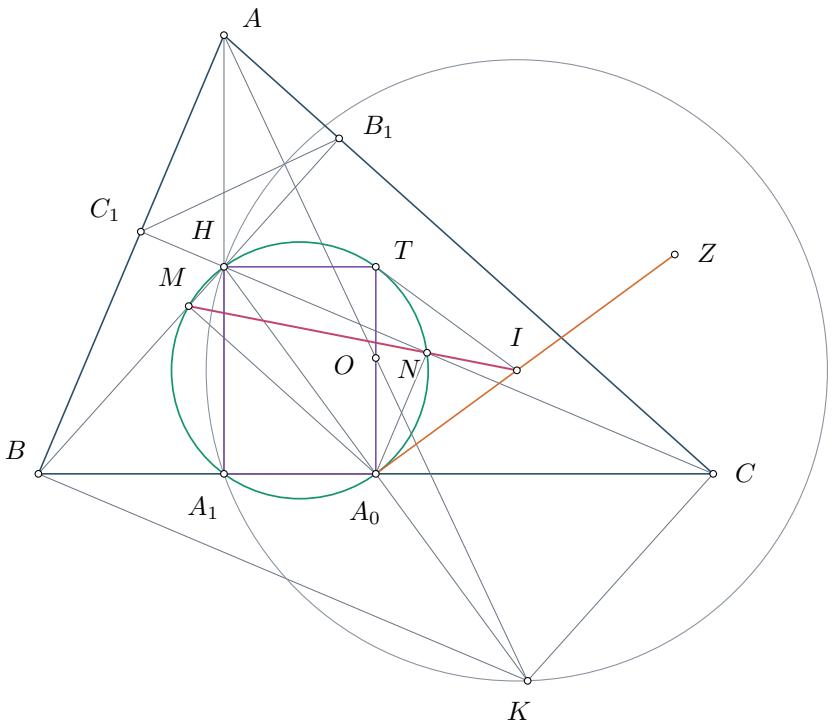


Hình cho câu b): W, M, N, V cùng nằm trên trung trực của A_1L.

Cách khác cho câu a). Gọi D là trung điểm B_0C_0 và G là trọng tâm tam giác ABC (cũng là trọng tâm tam giác $A_0B_0C_0$). Vì O, G, H thẳng hàng với $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2} = \frac{GD}{GA_0}$ nên $OD \parallel HA_0$. Tứ giác B_0C_0XY nội tiếp đường tròn tâm D, có $B_0C_0 \cap XY = Z$, $B_0X \cap C_0Y = O$, $B_0Y \cap C_0X = A_0$; theo định lí Brocard, $A_0Z \perp OD$, do đó $A_0H \perp A_0Z$.

Cách khác cho câu b). Vì $A_0M \parallel CA$ nên $A_0M \perp HM$; tương tự $A_0N \perp HN$, tức A_0, M, N thuộc đường tròn đường kính A_0H, và theo câu a) A_0Z tiếp xúc với đường tròn này tại A_0. Do $A_0B_0C_0B$ là hình bình hành, M, X đối xứng qua trung điểm của C_0A_0, nên $C_0X = A_0M$; tương tự $B_0Y = A_0N$. Gọi $I = MN \cap A_0Z$ và IT là tiếp tuyến thứ hai của (A_0MN). Tứ giác A_0MTN điều hòa nên $\frac{TM}{TN} = \frac{A_0M}{A_0N} = \frac{C_0X}{B_0Y} = \frac{OC_0}{OB_0}$, suy ra $\triangle TMN \backsim \triangle OC_0B_0$ và $\angle NA_0O = \angle OC_0B_0 =$

$\angle TMN = \angle NA_0T$; do đó A_0, O, T thẳng hàng và A_0A_1HT là hình chữ nhật. Vì $IA_0 = IT$, I thuộc trung trực của A_1H; vì $IA_0 \perp HK$ (A_0 là trung điểm HK), I thuộc trung trực của HK. Vậy $I \in MN$ là tâm đường tròn (A_1HK).



Hình cho cách khác của câu b).

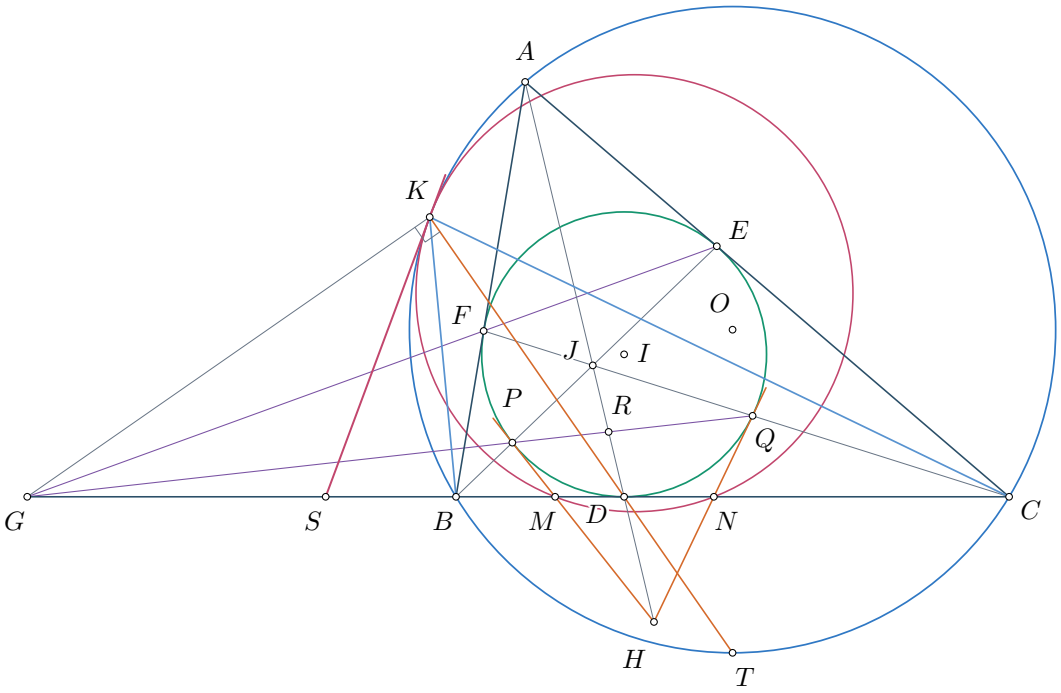
□

Nhận xét. Khẳng định thứ nhất ở câu b) là một bài toán trong đề thi học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hà Nội năm 2022. Với tam giác nhọn, lời giải chỉ dùng điều kiện $AB \neq AC$; giả thiết $AC < BC$ không được sử dụng. Chú ý rằng nếu tam giác vuông tại A thì $O \equiv A_0$ và $X \equiv Y \equiv A_0$, khi đó Z không xác định.

Hai câu a), b) có liên hệ với nhau. Vì $BH \parallel KC$ (cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel KB$ nên $BHCK$ là hình bình hành, A_0 là trung điểm của HK. Do đó $VA_0 \perp HK$, và theo câu a) ta được $V \in A_0Z$. Như vậy ba đường thẳng MN, A_0Z và đường thẳng qua trung điểm A_1H song song với BC đồng quy tại tâm V của đường tròn (A_1HK).

1.2 Chuyên Sư phạm

Bài toán 1.2 (Câu 5). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F, và đường tròn ngoại tiếp là (O). Các đường thẳng BE, CF cắt lại (I) lần lượt tại P, Q. Tiếp tuyến của (I) tại P, Q cắt đường thẳng BC lần lượt tại M, N.
Gọi T là trung điểm cung BC của (O) không chứa A. Đường thẳng TD cắt lại (O) tại K. Chứng minh rằng đường tròn (KMN) tiếp xúc với (O).



Lời giải. Trước hết, xét $AB \neq AC$ và $PM \nparallel QN$. Đặt $G = EF \cap BC$. Áp dụng Pascal cho lục giác suy biến $FFQPEE$, ta được $G \in PQ$.

Vì $TB = TC$ nên KD là phân giác trong của $\angle BKC$. Theo Menelaus trong tam giác ABC và tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau,

$$\frac{GB}{GC} = \frac{BF}{CE} = \frac{DB}{DC} = \frac{KB}{KC}.$$

Do đó $(G, D; B, C) = -1$ và theo kết quả về đường tròn Apollonius nếu S là trung điểm GD, ta có $SG = SD = SK$.

Theo Ceva, AD, BE, CF đồng quy tại J. Đặt $H = PM \cap QN$. Dạng suy biến của Pascal cho tứ giác $EPFQ$ cho thấy A, H, J thẳng hàng, nên $H \in AD$.

Đặt $R = AD \cap PQ$. Vì A, H lần lượt là các cực của EF, PQ đối với (I) nên AD là đường đối cực của $G = EF \cap PQ$. Bởi vậy $(G, R; P, Q) = -1$. Chiếu hàng điểm này từ H lên BC, trong đó R, P, Q lần lượt chiếu thành D, M, N, ta được

$$(G, D; M, N) = (G, R; P, Q) = -1.$$

Từ hai hàng điểm điều hòa trên và S là trung điểm GD, suy ra

$$\mathcal{P}_{(O)}(S) = \overline{SB} \cdot \overline{SC} = SG^2 = SK^2,$$
$$\mathcal{P}_{(KMN)}(S) = \overline{SM} \cdot \overline{SN} = SG^2 = SK^2.$$

Vậy SK là tiếp tuyến chung của (O) và (KMN) tại K.

Nếu $AB \neq AC$ và $PM \parallel QN$ thì Pascal cho $AD \parallel PM \parallel QN$. Lúc này, dùng phép chiếu song song theo phương PM thay cho phép chiếu tâm H, ta vẫn có $(G, D; M, N) = -1$ và kết luận như trên.

Cuối cùng, nếu $AB = AC$ thì $K = A$. Do đối xứng qua AD, cả hai đường tròn (O) và (AMN) đều có tâm trên AD, nên chúng tiếp xúc tại A. □

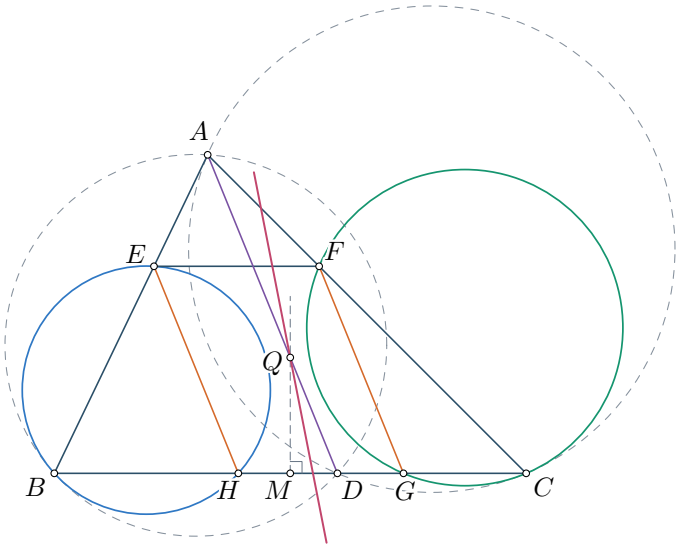
1.3 Chuyên Khoa học Tự nhiên

Bài toán 1.3 (Ngày 1, Câu 3). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $AD \not\perp BC$. Lấy hai điểm E, F lần lượt thuộc AB, AC sao cho $EF \parallel BC$. Qua E, F, lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AD, cắt BC tại H, G. Gọi Q là giao điểm của AD và đường trung trực của BC; điểm P nằm trên tia AQ sao cho

$$AP \cdot AQ = AD^2.$$

(a) Chứng minh rằng Q nằm trên trục đẳng phương của (BHE) và (CGF).

(b) Chứng minh rằng P nằm trên trục đẳng phương của (BHF) và (CGE).



Hình cho câu a): đường màu đỏ là trục đẳng phương của (BHE) và (CGF); hai đường tròn nét đứt là (ABD), (ACD).

Kiến thức bổ trợ. Phương tích $\mathcal{P}_\omega(X) = XO^2 - r^2$ của một đường tròn $\omega(O; r)$ chứa $x^2 + y^2$ khi viết theo tọa độ $X = (x, y)$. Khi lấy *hiệu* phương tích đối với hai đường tròn, phần $x^2 + y^2$ bị triệt tiêu, chỉ còn lại một biểu thức dạng $ax + by + c$. Bài này chỉ cần hai sự kiện sau.

Tính chất 1 (hiệu phương tích là hàm bậc nhất). Với hai đường tròn ω_1, ω_2, hàm $f(X) = \mathcal{P}_{\omega_1}(X) - \mathcal{P}_{\omega_2}(X)$ là hàm bậc nhất, và $f(X) = 0$ khi và chỉ khi X thuộc trục đẳng phương. Ví dụ đơn giản nhất là $XB^2 - XC^2$ (hiệu phương tích đối với hai "đường tròn điểm" B, C), triệt tiêu trên trung trực của BC. Ta dùng hai hệ quả:

- *Trên một đường thẳng, f thay đổi đều.* Biết f tại hai điểm là biết f trên cả đường thẳng; đặc biệt, hai hàm bậc nhất bằng nhau tại hai điểm thì bằng nhau trên cả đường thẳng đi qua hai điểm đó.
- *Hai đường tròn cùng đi qua U, V.* Khi đó trục đẳng phương là UV, nên $f(X)$ tỉ lệ với khoảng cách (có dấu) từ X đến UV; nói riêng, f không đổi trên mỗi đường thẳng song song với UV.

Tính chất 2 (tỉ số phương tích qua phép vị tự). Nếu $B \in \omega$ và ω' là ảnh của ω qua phép vị tự tâm B, tỉ số t thì

$$\mathcal{P}_{\omega'}(X) = t\,\mathcal{P}_{\omega}(X) + (1-t)\,XB^2.$$

Nói cách khác, phương tích đối với đường tròn "co lại" về B là trung bình có trọng số của phương tích đối với đường tròn ban đầu và XB^2. Chứng minh: tâm của ω' là $O' = tO + (1-t)B$, nên $O'X^2 = t\,OX^2 + (1-t)BX^2 - t(1-t)OB^2$; thay $OB = r$ và trừ cho bán kính $(tr)^2$ là xong.

Lời giải. Đặt

$$k = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DC}}$$

(các đẳng thức có được từ $EF \parallel BC$, $EH \parallel FG \parallel AD$ và định lí Thales).

a) *Cách 1. Hình học.* Gọi R là giao điểm của trung trực EF với AD, và $I \neq R$ là giao điểm thứ hai của (REF) với AD. Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của QB với (BHE) và của QC với (CGF).

Phép vị tự tâm A biến $E \mapsto B$, $F \mapsto C$ biến trung trực của EF thành trung trực của BC và giữ nguyên AD, nên biến $R \mapsto Q$; do đó $\triangle REF \backsim \triangle QBC$. Từ $K \in (BHE)$, $RE = RF$, R, E, F, I đồng viên, A, R, I, D thẳng hàng và $EH \parallel AD$, ta có

$$\begin{aligned}(EH, EK) &= (BH, BK) = (BC, BQ) = (EF, ER)\\ &= (FR, FE) = (IR, IE) = (ID, IE) = (EH, EI).\end{aligned}$$

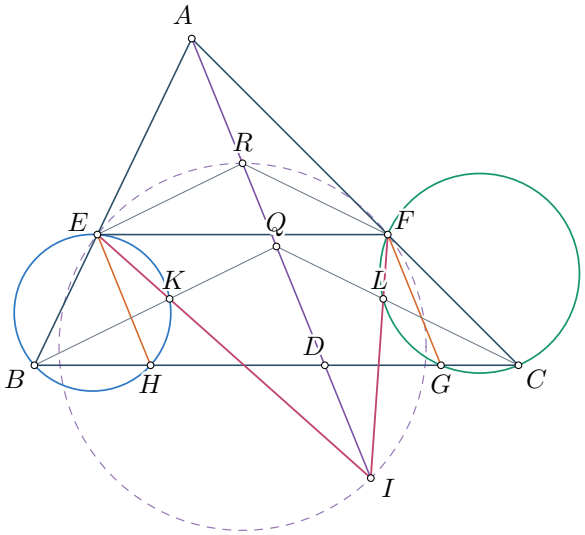
Suy ra E, K, I thẳng hàng. Tương tự, F, L, I thẳng hàng. Khi đó

$$(BK, BD) = (BK, BH) = (EK, EH) = (IK, ID),$$

nên B, K, D, I đồng viên; tương tự C, L, D, I đồng viên. Vì Q là giao điểm của BK, CL và DI, theo phương tích,

$$\mathcal{P}_{(BHE)}(Q) = \overline{QK}\cdot\overline{QB} = \overline{QD}\cdot\overline{QI} = \overline{QL}\cdot\overline{QC} = \mathcal{P}_{(CGF)}(Q).$$

Vậy Q nằm trên trục đẳng phương của (BHE) và (CGF).



Hình cho cách 1: E, K, I và F, L, I thẳng hàng.

Cách 2. Hiệu số phương tích. Xét $f = \mathcal{P}_{(BHE)} - \mathcal{P}_{(CGF)}$ và $g(X) = XB^2 - XC^2$; cả hai đều là hàm bậc nhất (Tính chất 1). Tại A và D, ta có

$$f(A) = \overline{AE}\cdot\overline{AB} - \overline{AF}\cdot\overline{AC} = k\,(AB^2 - AC^2) = k\,g(A),$$
$$f(D) = \overline{DH}\cdot\overline{DB} - \overline{DG}\cdot\overline{DC} = k\,(DB^2 - DC^2) = k\,g(D).$$

Hai hàm bậc nhất f và $k\,g$ trùng nhau tại hai điểm A, D nên trùng nhau trên cả đường thẳng AD. Mà $g(Q) = 0$ do $QB = QC$, suy ra $f(Q) = 0$.

Có thể viết gọn lập luận này bằng Tính chất 2: phép vị tự tâm B, tỉ số $1-k$ biến (ABD) thành (BHE); phép vị tự tâm C, tỉ số $1-k$ biến (ACD) thành (CGF), nên

$$f(X) = (1-k)\big[\mathcal{P}_{(ABD)}(X) - \mathcal{P}_{(ACD)}(X)\big] + k\,(XB^2 - XC^2),$$

và vế phải triệt tiêu tại Q vì AD là trục đẳng phương của (ABD), (ACD). Vậy Q nằm trên trục đẳng phương của (BHE) và (CGF).

b) *Cách 1. Hàng điểm điều hòa.* Đặt $\omega_1 = (BHE)$, $\omega_2 = (CGF)$, $\omega_3 = (BHF)$, $\omega_4 = (CGE)$ và kí hiệu $\mathcal{P}_i$ là phương tích đối với ω_i. Gọi M, N là trung điểm của BC, EF (khi đó $N \in AM$, $\overline{AN} = k\,\overline{AM}$) và D' là điểm đối xứng của D qua A. Nếu $D \equiv M$ thì $P \equiv Q \equiv D$ và $\mathcal{P}_3(D) = k\,DB^2 = k\,DC^2 = \mathcal{P}_4(D)$; sau đây xét $D \neq M$.

Ta dùng một bổ đề nhỏ về phương tích.

Bổ đề 1.3. Cho U, V thuộc một đường thẳng song song với EF, và $\omega_E = (UVE)$, $\omega_F = (UVF)$. Nếu $X, Y \in EF$ đối xứng nhau qua N thì

$$\mathcal{P}_{\omega_E}(X) + \mathcal{P}_{\omega_F}(Y) = 2\,\overline{XE}\cdot\overline{XF} = \mathcal{P}_{\omega_F}(X) + \mathcal{P}_{\omega_E}(Y).$$

Chứng minh. Gọi E', F' là giao điểm thứ hai của EF với ω_E, ω_F. Tâm của hai đường tròn cùng nằm trên trung trực của UV, đường thẳng này vuông góc với EF; do đó hai dây EE', FF' có chung trung điểm K (giao điểm của trung trực ấy với EF). Lấy một gốc trên đường thẳng EF và đồng nhất mỗi điểm với tọa độ của nó; khi đó $E' = 2K - E$, $F' = 2K - F$, $Y = 2N - X$, $F = 2N - E$, nên

$$\overline{YF} = X - E = -\overline{XE}, \qquad \overline{XE'} - \overline{YF'} = (2K - E - X) - (2K - F - 2N + X) = 2(F - X) = 2\,\overline{XF}.$$

Vậy $\mathcal{P}_{\omega_E}(X)+\mathcal{P}_{\omega_F}(Y)=\overline{XE}\cdot\overline{XE'}+\overline{YF}\cdot\overline{YF'}=\overline{XE}\big(\overline{XE'}-\overline{YF'}\big)=2\,\overline{XE}\cdot\overline{XF}$. Đẳng thức thứ hai có được bằng cách đổi vai trò của (X,E) và (Y,F), chú ý $\overline{YE}\cdot\overline{YF}=\overline{XF}\cdot\overline{XE}$. □

Bước 1. Hai trục đẳng phương cắt nhau tại $S\in BC$, và S,N,D' thẳng hàng. Với $X\in BC$, ta có $\mathcal{P}_1(X)=\mathcal{P}_3(X)=\overline{XB}\cdot\overline{XH}$ và $\mathcal{P}_2(X)=\mathcal{P}_4(X)=\overline{XC}\cdot\overline{XG}$. Lấy gốc tại D và đặt $b=\overline{DB}$, $c=\overline{DC}$, $x=\overline{DX}$; vì $\overline{DH}=kb$, $\overline{DG}=kc$, phương trình $\overline{XB}\cdot\overline{XH}=\overline{XC}\cdot\overline{XG}$ trở thành $(1+k)(c-b)\,x=k(c^2-b^2)$, có nghiệm duy nhất

$$\overline{DS}=\frac{k(b+c)}{1+k}=\frac{2k}{1+k}\,\overline{DM}.$$

Điểm S có cùng phương tích đối với cả bốn đường tròn, nên cả hai trục đẳng phương (của ω_1,ω_2 và của ω_3,ω_4) đều đi qua S; theo câu a), trục thứ nhất là SQ. Mặt khác, trong tam giác ADM,

$$\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}}\cdot\frac{\overline{NA}}{\overline{NM}}\cdot\frac{\overline{SM}}{\overline{SD}}=2\cdot\left(-\frac{k}{1-k}\right)\cdot\left(-\frac{1-k}{2k}\right)=1,$$

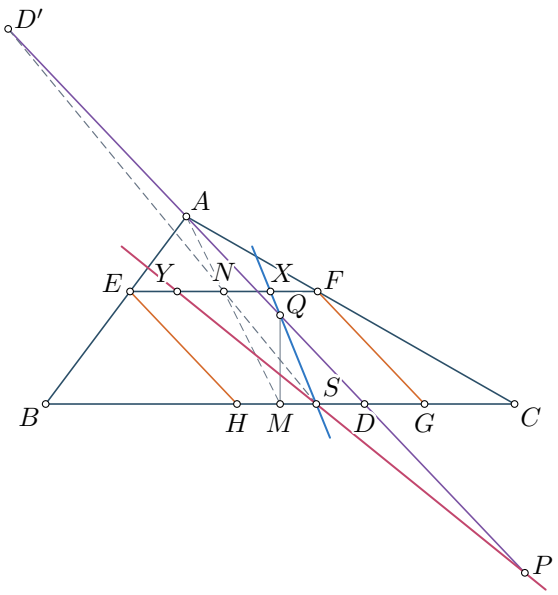
nên theo định lí Menelaus đảo, S,N,D' thẳng hàng.

Bước 2. Trục đẳng phương thứ hai. Vì $Q\notin BC$, đường thẳng SQ cắt EF tại một điểm X; gọi Y là điểm đối xứng của X qua N. Vì $X\in SQ$ nên $\mathcal{P}_1(X)=\mathcal{P}_2(X)$. Áp dụng bổ đề cho cặp ω_1,ω_3 (cùng đi qua B,H) và cặp ω_4,ω_2 (cùng đi qua C,G):

$$\mathcal{P}_1(X)+\mathcal{P}_3(Y)=2\,\overline{XE}\cdot\overline{XF}=\mathcal{P}_2(X)+\mathcal{P}_4(Y).$$

Suy ra $\mathcal{P}_3(Y)=\mathcal{P}_4(Y)$, tức trục đẳng phương của ω_3,ω_4 là đường thẳng SY.

Bước 3. Kết luận. Gọi $P'=SY\cap AD$. Phép chiếu xuyên tâm S từ đường thẳng EF lên đường thẳng AD biến $X\mapsto Q$, $Y\mapsto P'$, $N\mapsto D'$ (Bước 1) và điểm vô cực của EF thành D (vì $SD\equiv BC\parallel EF$). Vì N là trung điểm XY nên $(X,Y;N,\infty)=-1$, do đó $(Q,P';D',D)=-1$. Vì A là trung điểm của DD', theo hệ thức Newton, $\overline{AP'}\cdot\overline{AQ}=AD^2=\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$ (vì P thuộc tia AQ). Vậy $P'\equiv P$, tức P nằm trên trục đẳng phương của (BHF) và (CGE).



Hình cho cách 1: hai trục đẳng phương SQ (xanh) và SP (đỏ) cắt EF tại X,Y đối xứng qua N; S,N,D' thẳng hàng.

Cách 2. Hiệu số phương tích. Xét hàm bậc nhất $g = \mathcal{P}_{(BHF)} - \mathcal{P}_{(CGE)}$ (Tính chất 1). Ta tính g tại D và A.

Tại D: $g(D) = \overline{DB}\cdot\overline{DH} - \overline{DC}\cdot\overline{DG} = k\,(DB^2 - DC^2)$.

Tại A: gọi U, V lần lượt là giao điểm thứ hai của AC với (BHF) và của AB với (CGE). Phương tích của C đối với (BHF) cho $\overline{CF}\cdot\overline{CU} = \overline{CB}\cdot\overline{CH}$; vì $\overline{CF} = (1-k)\,\overline{CA}$, ta được

$$\mathcal{P}_{(BHF)}(A) = \overline{AF}\cdot\overline{AU} = k\,AC^2 - \frac{k}{1-k}\,\overline{CB}\cdot\overline{CH},$$

và tương tự $\mathcal{P}_{(CGE)}(A) = k\,AB^2 - \dfrac{k}{1-k}\,\overline{BC}\cdot\overline{BG}$. Vì $\overline{DH} = -k\,\overline{BD}$, $\overline{DG} = -k\,\overline{CD}$ nên $\overline{CH} + \overline{BG} = (1-k)(\overline{BD} + \overline{CD})$, và $\overline{BC}(\overline{BD} + \overline{CD}) = DB^2 - DC^2$. Do đó

$$g(A) = k\,(AC^2 - AB^2) + \frac{k}{1-k}\,\overline{BC}\big(\overline{CH} + \overline{BG}\big) = k\,\big(DB^2 - DC^2 - AB^2 + AC^2\big).$$

Vì g bậc nhất trên AD, với $X \in AD$,

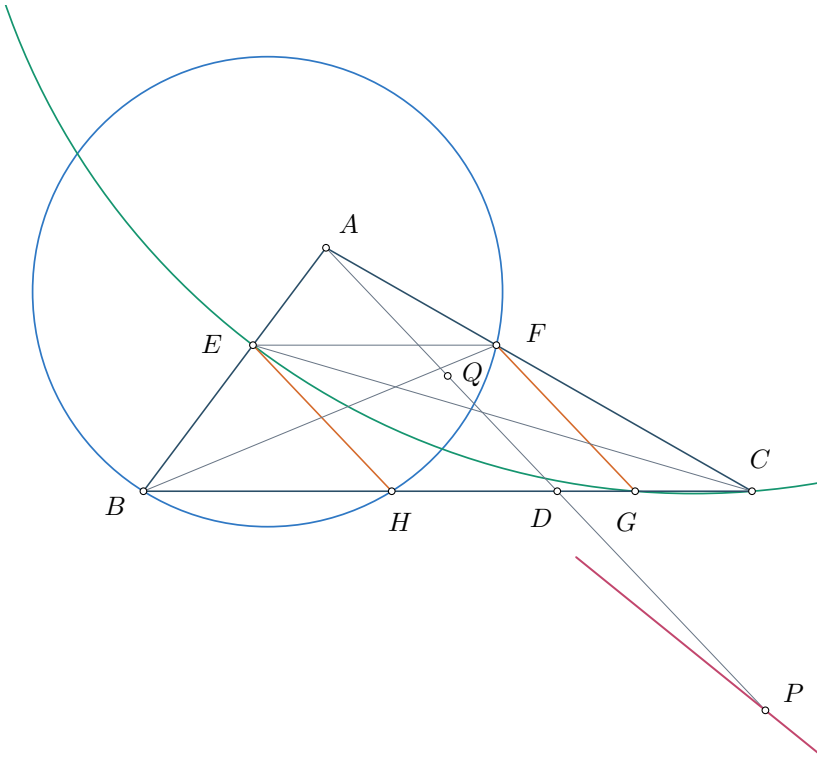
$$g(X) = \frac{\overline{XD}}{\overline{AD}}\,g(A) + \frac{\overline{AX}}{\overline{AD}}\,g(D) = k\Big[(DB^2 - DC^2) - \frac{\overline{XD}}{\overline{AD}}\,(AB^2 - AC^2)\Big].$$

Vậy trục đẳng phương của (BHF), (CGE) cắt AD tại điểm X với $\dfrac{\overline{XD}}{\overline{AD}} = \dfrac{DB^2 - DC^2}{AB^2 - AC^2}$ (chú ý $AB \neq AC$).

Ta kiểm tra P thỏa mãn hệ thức này. Áp dụng cùng công thức nội suy cho hàm bậc nhất $XB^2 - XC^2$, vốn triệt tiêu tại Q: $\overline{QD}\,(AB^2 - AC^2) + \overline{AQ}\,(DB^2 - DC^2) = 0$. Kết hợp với $\overline{AP}\cdot\overline{AQ} = AD^2$, ta được

$$\frac{DB^2 - DC^2}{AB^2 - AC^2} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}} = 1 - \frac{\overline{AD}}{\overline{AQ}} = 1 - \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{AD}}.$$

Vậy P nằm trên trục đẳng phương của (BHF) và (CGE).



Hình cho cách 2: đường màu đỏ là trục đẳng phương của (BHF) và (CGE), đi qua P.

□

Nhận xét. Các trục đẳng phương ở hai câu cắt AD tại những điểm không phụ thuộc vào vị trí của EF: lời giải cho thấy hiệu phương tích trên AD đều có dạng $k\cdot$(biểu thức không chứa k). Điều kiện $AD \not\perp BC$ chỉ để Q tồn tại; tính nhọn của tam giác không được sử dụng.

Bài toán 1.4 (Ngày 2, Câu 2). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn (J) bất kì đi qua I và tiếp xúc với (O) tại T. Các đường thẳng AI, BI, CI lần lượt cắt (J) tại D, E, F khác I.

(a) (ATD) cắt lại AC, AB lần lượt tại N, P. Chứng minh rằng PN đi qua trực tâm tam giác DEF.

(b) Gọi A_1, A_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A qua DE, DF; B_1, B_2 lần lượt là các điểm đối xứng của B qua EF, ED; C_1, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng của C qua FD, FE. Chứng minh rằng $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nằm trên một tiếp tuyến của (J).

Lời giải. Chú ý (J) chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Gọi M là giao điểm thứ hai của AI với (O) (trung điểm cung BC), khi đó $MB = MI$.

Bước 1: B, P, T, E đồng viên và C, N, T, F đồng viên. Ta có

$$(EB, ET) = (EI, ET) = (DI, DT) = (DA, DT) = (PA, PT) = (PB, PT),$$

nên B, P, T, E đồng viên. Tương tự, C, N, T, F đồng viên.

Bước 2: điểm G đối xứng với P qua DE nằm trên (J). Theo Bước 1,

$$\begin{aligned}(PE, PD) &= (PE, PT) + (PT, PD) = (BE, BT) + (AT, AD)\\ &= (BI, BT) + (BT, BM) = (BI, BM) = (IM, IB),\end{aligned}$$

trong đó $(AT, AM) = (BT, BM)$ vì $A, B, T, M \in (O)$, và đẳng thức cuối do tam giác MBI cân tại M. Vậy $(PE, PD) = (ID, IE)$. Lấy đối xứng qua DE ta được $(GE, GD) = (IE, ID)$, tức $G \in (J)$.

Bước 3: G cũng là điểm đối xứng của N qua DF. Vì AD là phân giác góc PAN và A, P, D, N đồng viên nên $DP = DN$. Mặt khác, dùng các đường phân giác BI, CI,

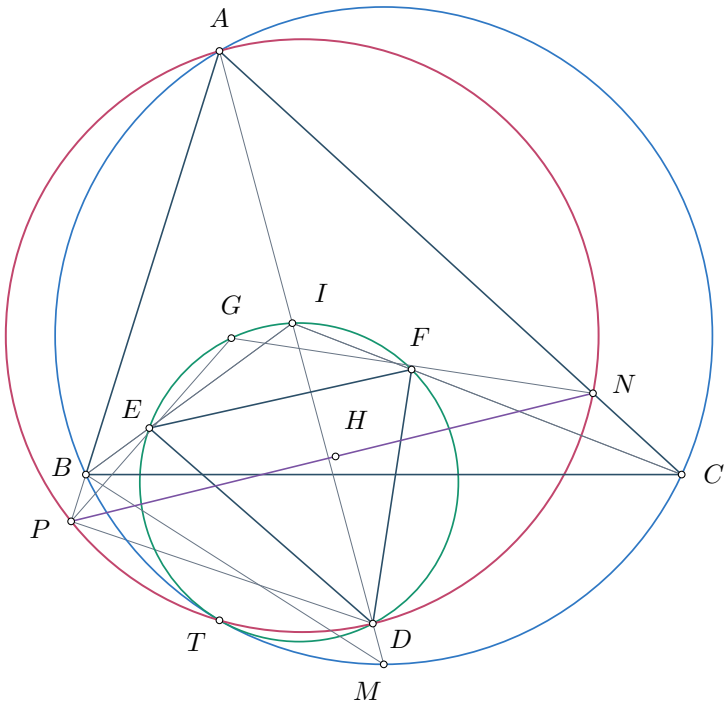
$$\begin{aligned}2(DE, DF) &= 2(IB, IC) = 2(IB, BC) + 2(BC, CI)\\ &= (BA, BC) + (CB, CA) = (AB, AC) = (DP, DN).\end{aligned}$$

Gọi G' là điểm đối xứng của N qua DF. Khi đó $DG' = DN = DP = DG$ và

$$\begin{aligned}(DG', DF) &= (DF, DN) = (DF, DE) + (DE, DP) + (DP, DN)\\ &= (DE, DP) + (DE, DF) = (DG, DF),\end{aligned}$$

nên D, G, G' thẳng hàng. Lập luận như Bước 2 (đổi vai trò B, C) cho $G' \in (J)$. Đường thẳng DG chỉ cắt (J) tại D và G, nên $G' \equiv G$.

Câu a). Theo Bước 2, 3, P và N là các điểm đối xứng của điểm $G \in (DEF)$ qua DE và DF. Do đó PN là đường thẳng Steiner của G đối với tam giác DEF, nên đi qua trực tâm của tam giác này.



Hình cho câu a): M là trung điểm cung BC; P, N là đối xứng của $G \in (J)$ qua DE, DF; PN đi qua trực tâm H của tam giác DEF.

Bước 4: ảnh của AB qua phép đối xứng trục DE là tiếp tuyến của (J) tại G. Gọi K là giao điểm thứ hai của TB với (J) và D' là giao điểm thứ hai của TD với (O). Phép vị tự tâm T biến (J) thành (O) biến $K \mapsto B$, $D \mapsto D'$, nên $KD \parallel BD'$. Mặt khác

$$(PD, AB) = (PD, PA) = (TD, TA) = (TD', TA) = (BD', BA),$$

nên $PD \parallel BD'$. Vậy P, K, D thẳng hàng.

Gọi ℓ_A là ảnh của đường thẳng AB qua phép đối xứng trục DE; ℓ_A đi qua G. Phép đối xứng đổi dấu góc định hướng, nên

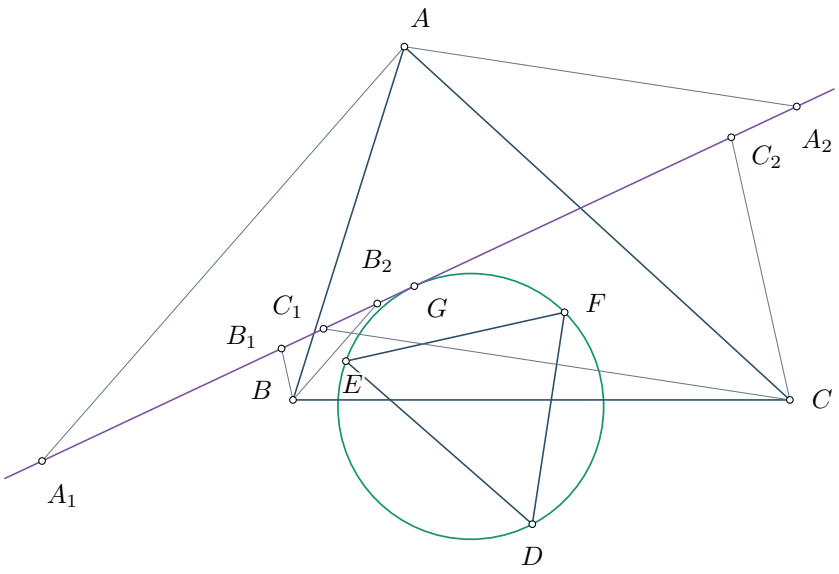
$$\begin{aligned}(\ell_A, GE) &= (PE, AB) = (PE, PB) = (TE, TB)\\ &= (TE, TK) = (DE, DK) = (DE, DP) = (DG, DE),\end{aligned}$$

trong đó dùng Bước 1 và P, K, D thẳng hàng. Theo định lí góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, ℓ_A tiếp xúc với (J) tại G. Tương tự (đổi vai trò B, C), ảnh của AC qua phép đối xứng trục DF cũng là tiếp tuyến của (J) tại G. Gọi tiếp tuyến này là t.

Câu b). Vì $A, B \in AB$ nên A_1 (đối xứng của A qua DE) và B_2 (đối xứng của B qua ED) nằm trên t. Vì $A, C \in AC$ nên A_2 và C_1 nằm trên t.

Còn lại B_1, C_2. Theo Bước 1, đường tròn (BTE) cắt lại BA tại P; gọi Q là giao điểm thứ hai của (BTE) với BC. Áp dụng Bước 2, 3, 4 cho đỉnh B (thay A, D, P, N bởi B, E, P, Q): điểm đối xứng của P qua ED, chính là G, trùng với điểm đối xứng của Q qua EF; và ảnh của BC qua phép đối xứng trục EF là tiếp tuyến của (J) tại G, tức là t. Vì $B, C \in BC$ nên B_1 và C_2 (đối xứng của B, C qua EF) nằm trên t.

Vậy sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nằm trên tiếp tuyến t của (J) tại G. □



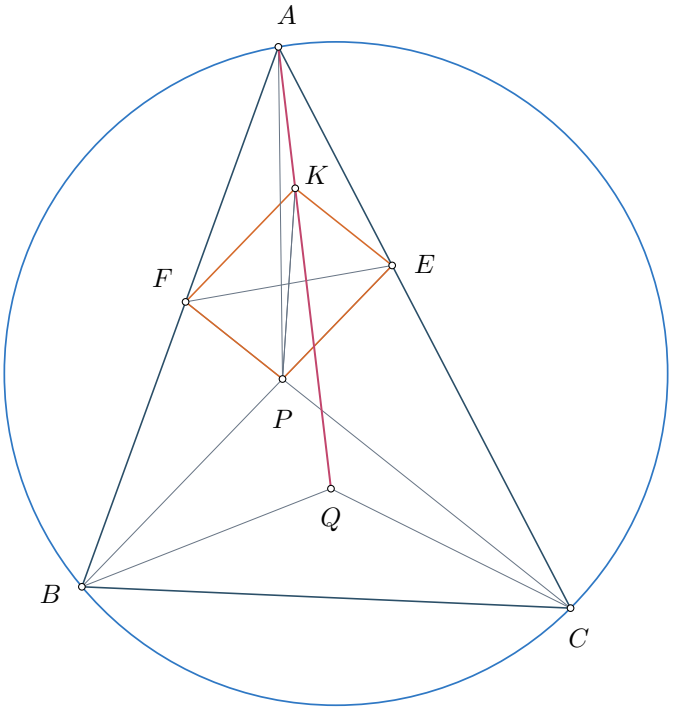
Hình cho câu b): sáu điểm nằm trên tiếp tuyến của (J) tại G.

Nhận xét. Điểm then chốt là ba đỉnh A, B, C cho cùng một điểm G trên (J): G là điểm đối xứng của P qua DE, của N qua DF và của Q qua EF, trong đó P, N, Q là giao điểm của các đường tròn $(ATD), (BTE), (CTF)$ với các cạnh.

Bài toán 1.5 (Ngày 3, Câu 3). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm P, Q nằm trong tam giác ABC thỏa mãn

$$\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC = \angle QCB.$$

Đường thẳng BP cắt AC tại E, đường thẳng CP cắt AB tại F. Dựng hình bình hành $PEKF$. Đường thẳng KP cắt BC tại L. Chứng minh rằng các đường tròn (AKP), (LKQ) và (O) cùng đi qua một điểm.



Hình cho bước 1: A, K, Q thẳng hàng.

***Lời giải** (Dương Minh).* Từ giả thiết, $\angle QBC = \angle PBA$ và $\angle QCB = \angle PCA$, nên P, Q là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC; nói riêng AP, AQ đẳng giác trong góc BAC.

Bước 1: A, K, Q thẳng hàng. Vì $EK \parallel PF \equiv CF$ nên $\angle AEK = \angle ACF = \angle ABP$. Hai tam giác ABE và ACF có chung góc A và $\angle ABE = \angle ACF$, nên $\angle AEB = \angle AFC$, tức $\sin\angle AEB = \sin\angle BFP$. Theo định lí sin trong các tam giác BFP và ABE,

$$\frac{PB}{PF} = \frac{\sin\angle BFP}{\sin\angle FBP} = \frac{\sin\angle AEB}{\sin\angle ABE} = \frac{AB}{AE}.$$

Vì $EK = PF$ nên $\dfrac{EK}{EA} = \dfrac{PB}{BA}$; kết hợp $\angle AEK = \angle ABP$, ta được $\triangle AEK \backsim \triangle ABP$. Do đó $\angle EAK = \angle BAP$, tức AK là đường đẳng giác của AP trong góc BAC. Vậy AK đi qua Q.

Bước 2: phép vị tự quay. Hai đường tròn (AKP) và (LKQ) cắt nhau tại K; gọi R là giao điểm thứ hai. Vì A, K, Q thẳng hàng và P, K, L thẳng hàng, R là tâm của phép vị tự quay $\mathcal{S}$ biến $Q \mapsto A$, $L \mapsto P$. Ta chứng minh $R \in (O)$.

Đặt $M = \mathcal{S}(B)$, $N = \mathcal{S}(C)$. Vì B, L, C thẳng hàng nên M, P, N thẳng hàng. Phép vị tự quay bảo toàn góc định hướng, nên từ tam giác QBL biến thành tam giác AMP:

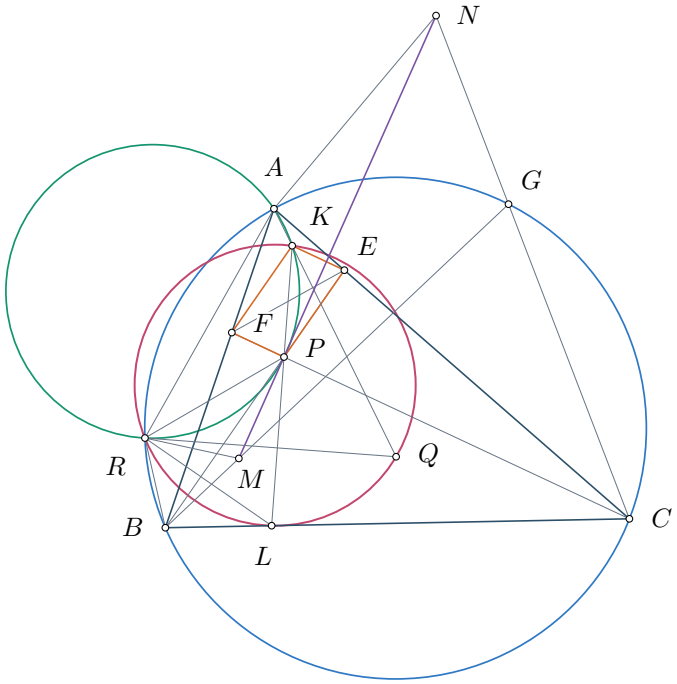
$$(MA, MP) = (BQ, BL) = (BQ, BC) = (BA, BP),$$

trong đó đẳng thức cuối có được vì BP, BQ đẳng giác trong góc ABC. Suy ra A, P, M, B đồng viên. Tương tự A, P, N, C đồng viên.

Gọi $G = BM \cap CN$. Vì M, P, N thẳng hàng,

$$(GB, GC) = (MB, NC) = (MB, MP) + (NP, NC) = (AB, AP) + (AP, AC) = (AB, AC),$$

nên $G \in (O)$. Mặt khác, R là tâm phép vị tự quay biến $B \mapsto M$, $C \mapsto N$, nên quen thuộc R nằm trên đường tròn (GBC), chính là (O). Vậy ba đường tròn (AKP), (LKQ), (O) cùng đi qua R.



Hình cho bước 2: $\mathcal{S}$ biến Q, L, B, C thành A, P, M, N; R và G nằm trên (O).

□

Nhận xét. Đường tròn (KLQ), tức là đường tròn $(RKLQ)$, còn đi qua *điểm Miquel* W của tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng BF, FE, EC, CB, nghĩa là giao điểm thứ hai của (O) và (AEF).

Chứng minh. Vì $\angle FBE = \angle FCE$ nên B, C, E, F đồng viên. Gọi U là giao điểm thứ hai của AP với (O), J là trung điểm của EF và $X = EF \cap BC$.

Bước 1: W, L, U thẳng hàng.

- Vì $PEKF$ là hình bình hành nên PK đi qua J. Do $BCEF$ nội tiếp nên $\triangle PEF \backsim \triangle PCB$ (ngược hướng), do đó trung tuyến PJ của tam giác PEF là đường đối trung của tam giác PBC. Suy ra L nằm trên đoạn BC và $\dfrac{LB}{LC} = \dfrac{PB^2}{PC^2}$.
- W là tâm phép vị tự quay biến $B \mapsto C$, $F \mapsto E$ (vì $BF \cap CE = A$ và $W \in (ABC) \cap (AFE)$), nên $\triangle WBF \backsim \triangle WCE$. Mặt khác $\triangle PBF \backsim \triangle PCE$ (vì $\angle PBF = \angle PCE$ và hai góc ở P đối đỉnh). Do đó $\dfrac{WB}{WC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{PB}{PC}$.
- Theo định lí sin trong các tam giác ABP, ACP với $\angle ABP = \angle ACP$, ta có

$$\frac{UB}{UC} = \frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle CAP} = \frac{PB}{PC}.$$

- X có cùng phương tích $\overline{XB} \cdot \overline{XC} = \overline{XF} \cdot \overline{XE}$ đối với (O) và (AEF), nên $X \in AW$. Vì X nằm ngoài đoạn BC nên W thuộc cung BAC, còn U thuộc cung BC không chứa A. Do đó WU cắt đoạn BC tại một điểm L' với

$$\frac{L'B}{L'C} = \frac{S_{WBU}}{S_{WCU}} = \frac{WB \cdot BU}{WC \cdot CU} = \frac{PB^2}{PC^2} = \frac{LB}{LC}$$

(vì $\angle WBU + \angle WCU = 180°$). Vậy $L' \equiv L$.

Bước 2: $W \in (RQL)$. Phép vị tự quay $\mathcal{S}$ tâm R biến $Q \mapsto A$, $L \mapsto P$ cho $\triangle RQL \backsim \triangle RAP$ (cùng hướng). Kết hợp với Bước 1 và $A, U, W, R \in (O)$:

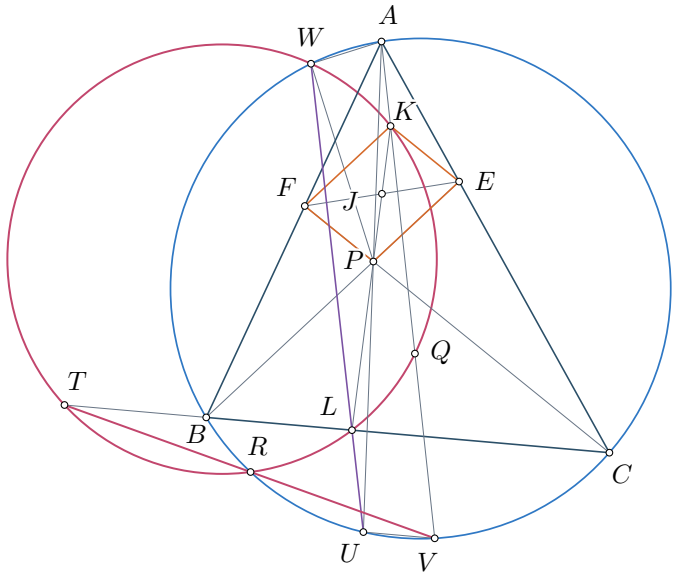
$$(WL, WR) = (WU, WR) = (AU, AR) = (AP, AR) = (QL, QR).$$

Vậy W nằm trên đường tròn (RQL), chính là (KLQ).

Hơn nữa, nếu (KLQ) cắt lại BC tại T thì RT và AQ cắt nhau trên (O). Thật vậy, gọi V là giao điểm thứ hai của TR với (O). Do W, L, U thẳng hàng và $L, T \in BC$,

$$(UV, UW) = (RV, RW) = (RT, RW) = (LT, LW) = (BC, UW),$$

nên $UV \parallel BC$ (đây chính là định lí Reim cho hai đường tròn (O), (KLQ) cắt nhau tại R, W). Suy ra AU, AV đẳng giác trong góc BAC; mà $AU \equiv AP$ đẳng giác với AQ, nên A, Q, V thẳng hàng.



Hình cho nhận xét: (KLQ) đi qua điểm Miquel W; W, L, U thẳng hàng; R, T, V thẳng hàng.

Nhận xét. Theo hai nhận xét trên, (KLQ) và (O) luôn có hai điểm chung là R và điểm Miquel W; hai đường tròn tiếp xúc nhau đúng khi $R \equiv W$. Đặc biệt hoá theo hướng này, ta được bài toán sau.

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm P, Q nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC = \angle QCB$. Đường thẳng BP cắt AC tại E, đường thẳng CP cắt AB tại F. Dựng hình bình hành $PEKF$. Đường thẳng KP cắt BC tại L. Chứng minh rằng đường tròn (LKQ) tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi $AK \perp KP$.

Chứng minh. Giữ các kí hiệu W, U, X như trên và gọi O_1 là tâm đường tròn qua B, C, E, F.

Bước 1: $\angle AWP = 90^\circ$. Áp dụng định lí Brocard cho tứ giác nội tiếp $BCEF$ với $A = BF \cap CE$, $X = BC \cap EF$, $P = BE \cap CF$, ta có $O_1P \perp AX$. Mặt khác, quen thuộc điểm Miquel W là hình chiếu của O_1 lên AX. Do đó O_1, P, W thẳng hàng và $PW \perp AW$.

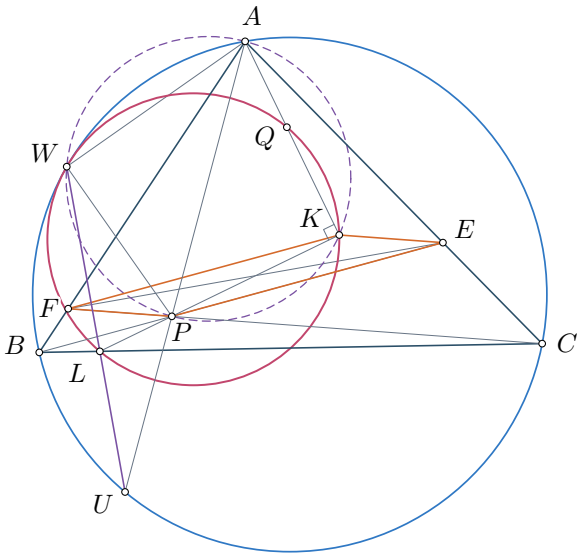
Bước 2: $R \equiv W$ *khi và chỉ khi* $AK \perp KP$. Theo lời giải, (AKP) cắt (O) tại A và R. Vì $W \in (O)$ và $W \neq A$ nên $R \equiv W$ khi và chỉ khi $W \in (AKP)$. Theo Bước 1, đường tròn qua A, P, W là đường tròn đường kính AP, nên điều này tương đương với $\angle AKP = 90^\circ$.

Bước 3: kết luận. Nếu $R \not\equiv W$ thì (KLQ) và (O) có hai điểm chung phân biệt, nên không tiếp xúc. Ngược lại, nếu $R \equiv W$ thì W là tâm phép vị tự quay $\mathcal{S}$ biến $Q \mapsto A$, $L \mapsto P$, nên $\triangle WQL \backsim \triangle WAP$ (cùng hướng). Gọi t, t' lần lượt là tiếp tuyến tại W của (KLQ) và (O). Vì W, L, U thẳng hàng,

$$(t, WL) = (QW, QL) = (AW, AP) = (AW, AU) = (t', WU) = (t', WL),$$

nên $t \equiv t'$, tức (KLQ) tiếp xúc với (O) tại W.

Điều kiện $AK \perp KP$ xảy ra được, chẳng hạn khi $\angle A \approx 78°$, $\angle B \approx 55{,}5°$, $\angle C \approx 46{,}5°$ và $\angle PBA \approx 41{,}3°$.



Hình cho bài toán mới: $AK \perp KP$, (KLQ) tiếp xúc với (O) tại W.

Nhận xét. Xem thêm các khai thác khác của bài toán này (tổng quát hoá, đường tròn Euler mở rộng, đường tròn qua năm điểm, các tiêu chuẩn tiếp xúc) tại đây.

2 TP. Hồ Chí Minh

2.1 Sở Giáo dục và Đào tạo

Bài toán 2.1 (Câu 4). Cho tam giác ABC nhọn, $AB \neq AC$, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt (O) lần thứ hai tại T. Đường thẳng TD cắt (O) lần thứ hai tại J.

(a) Gọi N là trung điểm của BC và X là giao điểm thứ hai của AN với (O). Chứng minh EF, BC, JX đồng quy.

(b) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của JE, JF với (O). Đường thẳng AI cắt (O) lần thứ hai tại M. Chứng minh đường thẳng qua A và vuông góc với PQ đi qua trung điểm của MN.

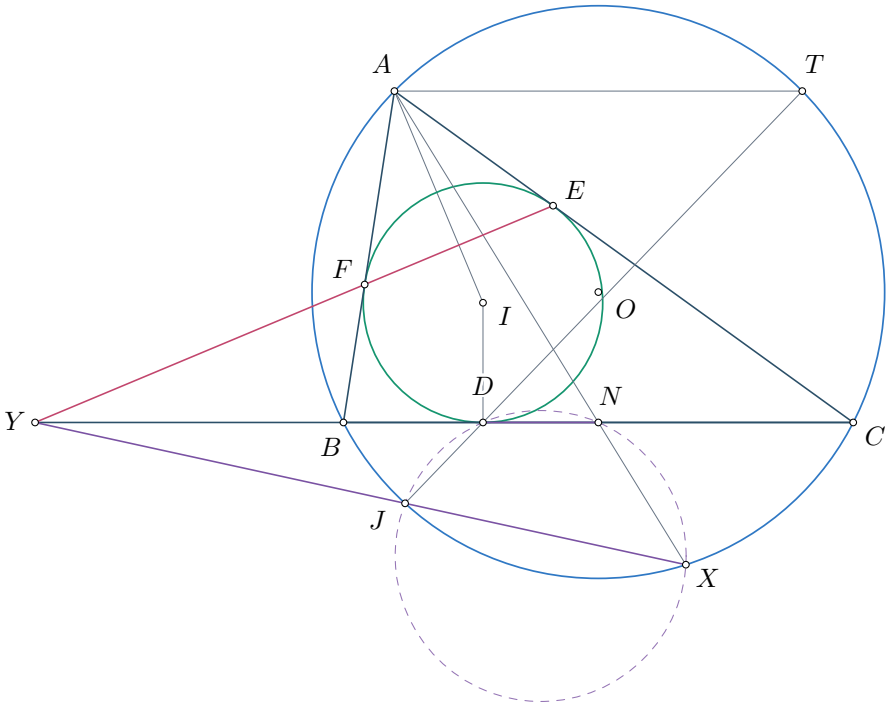
Lời giải. **a)** Vì $AT \parallel BC$, ta có

$$(DJ, JX) = (TJ, JX) = (TA, AX) = (DN, NX).$$

Suy ra D, N, X, J đồng viên. Gọi $Y = JX \cap BC$. Áp dụng phương tích đối với $(DNXJ)$ và (O), được

$$\overline{YD} \cdot \overline{YN} = \overline{YJ} \cdot \overline{YX} = \overline{YB} \cdot \overline{YC}.$$

Do N là trung điểm của BC, suy ra $(YD, BC) = -1$. Theo tính chất điều hòa của cấu hình tiếp xúc, giao điểm của EF và BC cũng liên hợp điều hòa với D đối với B, C. Vậy Y, E, F thẳng hàng.



b) Đặt $K = DI \cap EF$ và gọi L là trung điểm của MN. Theo tính chất quen thuộc của cấu hình tiếp xúc, A, K, N thẳng hàng. Pascal cho lục giác $BCAXJP$, kết hợp câu a), suy ra B, P, K thẳng hàng. Tiếp tục áp dụng Pascal cho lục giác $ABPJQC$, ta được C, Q, K thẳng hàng. Mặt khác, M là trung điểm cung BC không chứa A, nên $MN \perp BC$.

Cách 1. Đường tròn (BKC)**.** Gọi O' là tâm đường tròn (BKC). Từ $(PQ, KB) = (CQ, CB) = (CK, CB)$, suy ra PQ song song với tiếp tuyến tại K của (BKC), do đó $O'K \perp PQ$.

Gọi $Z \neq K$ là giao điểm thứ hai của EF với (BKC) và V là trung điểm của KN. Theo phương tích,

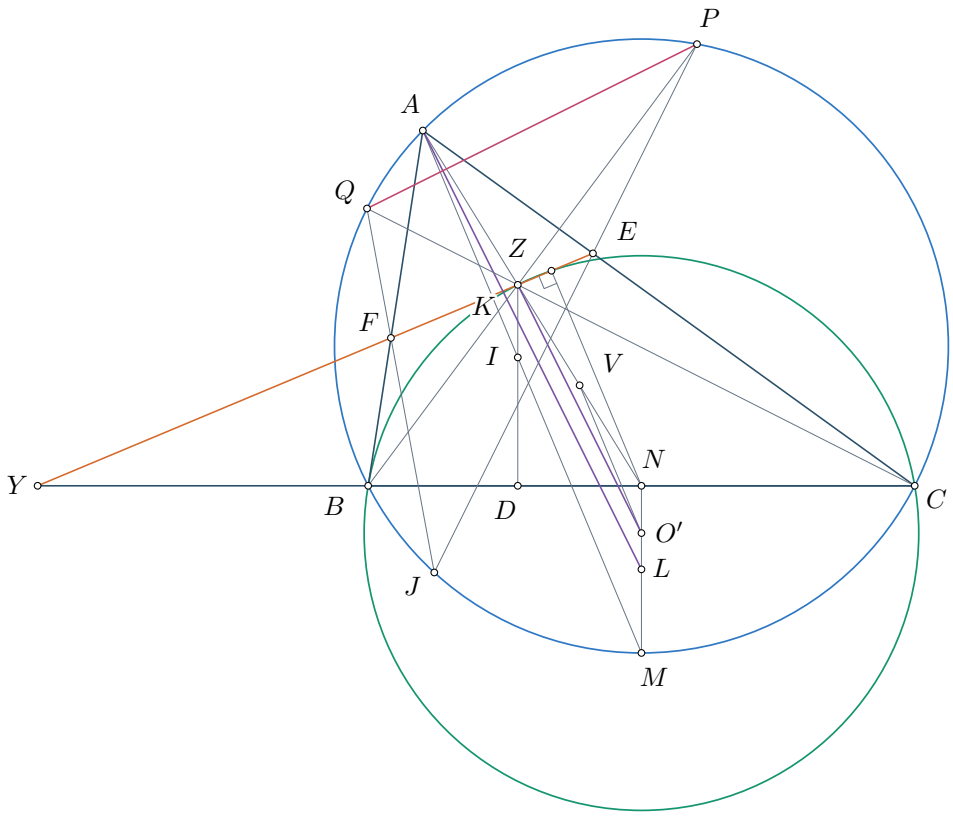
$$\overline{YK} \cdot \overline{YZ} = \overline{YB} \cdot \overline{YC} = \overline{YD} \cdot \overline{YN}.$$

Vì thế K, Z, N, D đồng viên. Lại có $KD \perp DN$, nên $KZ \perp ZN$. Suy ra $VK = VZ$, tức $O'V$ là đường trung trực của KZ. Do $AI \perp EF$, ta được $O'V \parallel AM$.

Vì A, K, V, N thẳng hàng và N, O', L, M thẳng hàng, định lí Thales cho

$$\frac{\overline{NO'}}{\overline{NL}} = \frac{2\overline{NO'}}{\overline{NM}} = \frac{2\overline{NV}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{NA}}.$$

Theo Thales đảo, $KO' \parallel AL$. Vậy $AL \perp PQ$.



Cách 2. Đối cực và phương tích. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt DE, DF lần lượt tại R, S. Từ $CD = CE$ và $BD = BF$, ta có

$$\angle AER = \angle ERA = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}, \qquad \angle AFS = \angle FSA = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}.$$

Suy ra $AR = AE = AF = AS$. Vậy đường tròn $\omega = (A; AE)$ đi qua E, F, R, S.

Xét phép đối cực đối với đường tròn nội tiếp $(I; r)$. Vì $K \in EF$, đối cực của K đi qua A; lại có $IK \perp BC$, nên đối cực ấy chính là RS. Mặt khác, DE, DF lần lượt là đối cực của C, B. Do đó CK, BK lần lượt là đối cực của R, S.

Đặt $B' = BK \cap IS$, $C' = CK \cap IR$ và gọi U là trung điểm của IK. Theo tính chất đối cực, $IB' \perp BK$, $IC' \perp CK$ và

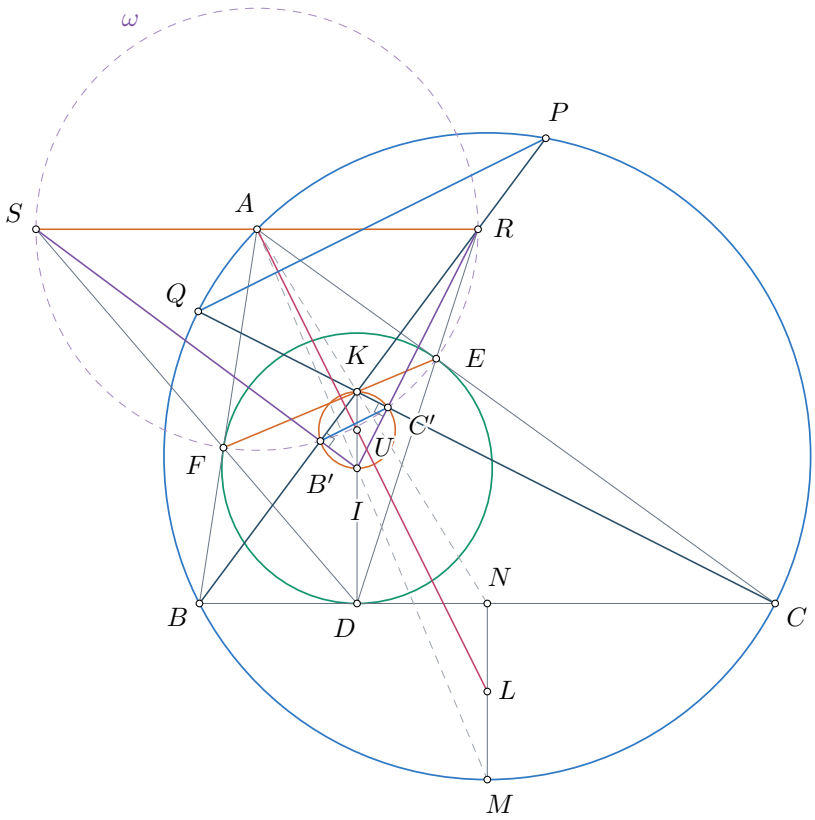
$$IS \cdot IB' = IR \cdot IC' = r^2 = AI^2 - AE^2 = \mathcal{P}_\omega(I).$$

Do $R, S \in \omega$, suy ra $B', C' \in \omega$. Hai điểm B', C' cũng thuộc đường tròn đường kính IK, tâm U. Đường nối tâm vuông góc với dây chung, nên $AU \perp B'C'$.

Mặt khác, I, D, B, B' và I, D, C, C' đồng viên, do đó

$$\overline{KB} \cdot \overline{KB'} = \overline{KI} \cdot \overline{KD} = \overline{KC} \cdot \overline{KC'}.$$

Suy ra B, C, B', C' đồng viên. Áp dụng Reim với (O), được $B'C' \parallel PQ$, nên $AU \perp PQ$. Cuối cùng, A, I, M thẳng hàng, A, K, N thẳng hàng và $IK \parallel MN$. Theo Thales, hai trung điểm U, L của IK, MN thẳng hàng với A. Vậy $AL \perp PQ$.



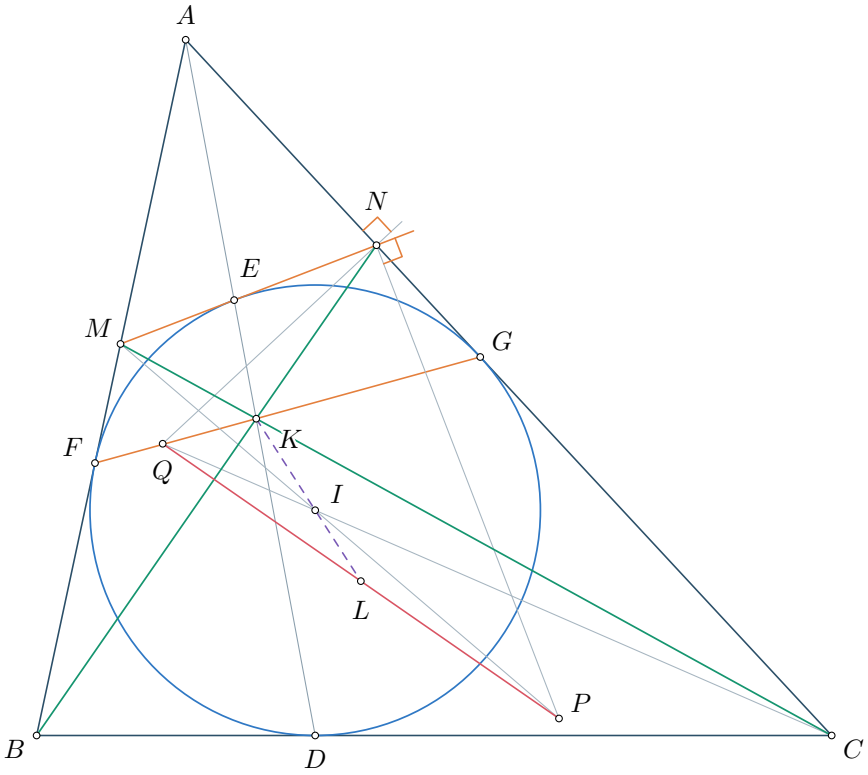
□

2.2 Phổ thông Năng khiếu

Bài toán 2.2 (Ngày 1). Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D. Đường thẳng AD cắt (I) tại điểm E khác D. Tiếp tuyến của (I) tại E cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N. Đường thẳng vuông góc với MN tại N cắt MI tại P. Đường thẳng vuông góc với AC tại N cắt CI tại Q.

(a) Chứng minh rằng $BN \perp PQ$.

(b) Gọi K là giao điểm của BN và CM, còn L là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh rằng ba điểm K, I, L thẳng hàng.



Lời giải. **a)** Lấy F, G lần lượt là tiếp điểm của (I) với AB, AC.

Bằng định lí sin trong tam giác hoặc dùng định lí Menelaus chúng ta chứng minh được DE chia đoạn MC theo tỉ lệ ME/CD. Tương tự, FG chia đoạn MC theo tỉ lệ MF/CG nên MC, DE, FG đồng quy.

Tương tự, NB, DE, FG đồng quy và đây là tính chất quen thuộc của tứ giác ngoại tiếp. Ta có

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP} = \frac{NC}{GC} \cdot \overrightarrow{IG} + \frac{MN}{ME} \cdot \overrightarrow{EI}.$$

Vì $\dfrac{ME}{CG} = \dfrac{MK}{CK}$ nên ta có thể đặt

$$\alpha = \frac{CM}{MK \cdot CG} = \frac{CM}{CK \cdot ME}.$$

Quy ước (I) có bán kính bằng 1. Sử dụng phép quay vectơ, góc quay 90°, ta thu được

$$\mathcal{Q}_{90^\circ}(\overrightarrow{QP}) = \frac{1}{CG} \cdot \overrightarrow{CN} + \frac{1}{ME} \cdot \overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \left(\frac{MK}{CM} \cdot \overrightarrow{CN} + \frac{CK}{CM} \cdot \overrightarrow{MN} \right) = \alpha \cdot \overrightarrow{KN}.$$

Vậy nên $PQ \perp KN$ hay $PQ \perp BN$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} CM \cdot \overrightarrow{KI} = CK \cdot \overrightarrow{MI} + MK \cdot \overrightarrow{CI} &= CK \cdot \frac{MI}{IP} \cdot \overrightarrow{IP} + MK \cdot \frac{CI}{IQ} \cdot \overrightarrow{IQ} \\ &= CK \cdot \frac{ME}{EN} \cdot \overrightarrow{IP} + MK \cdot \frac{CG}{GN} \cdot \overrightarrow{IQ} \\ &= \beta \cdot (\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}) \\ &= \beta \cdot 2\overrightarrow{IL}. \end{aligned}$$

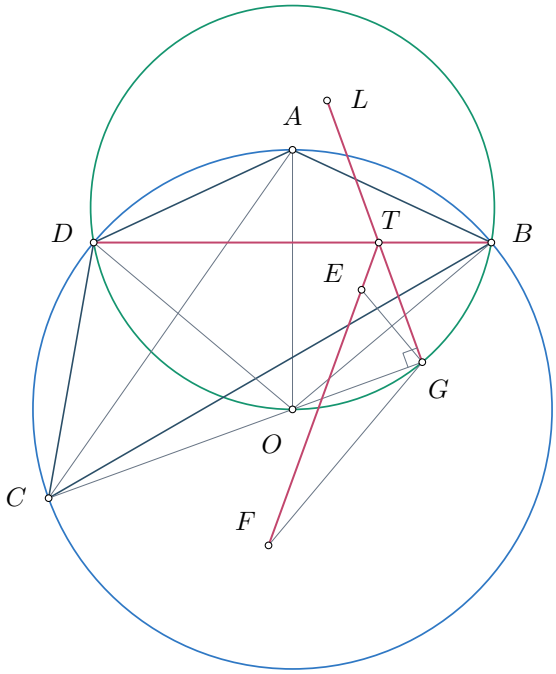
Bởi vậy K, I, L thẳng hàng. □

Nhận xét. Bài toán này có thể chứng minh bằng tỉ số kép, cực và đối cực. Tuy nhiên, ở đây tác giả chứng minh bằng công cụ vectơ và thậm chí không vẽ thêm gì, để các em thấy tầm quan trọng và sự thú vị của vectơ.

Bài toán 2.3 (Ngày 2). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} > 90^\circ$. Gọi G là giao điểm khác O của CO với đường tròn (OBD) và L là điểm trên đường thẳng CA sao cho $\widehat{OGL} = 90^\circ$. Lấy E, F lần lượt là các điểm đối xứng của G qua OB, OD.

(a) Chứng minh rằng EF, LG, BD đồng quy.

(b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của L trên CB, CD; M, N lần lượt là giao điểm của HG, KG với CA. Chứng minh rằng điểm L có cùng phương tích đối với hai đường tròn (GMN) và (OBD).



Hình cho câu a): EF, LG, BD đồng quy tại T.

Lời giải. **a)** Theo kết quả về đường thẳng Steiner, ta chỉ cần chứng minh

$$(GL, BD) = (BD, EF).$$

Thật vậy, chú ý O là tâm (EGF) nên

$$(EF, EG) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) = (OD, OG),$$

suy ra

$$\begin{aligned}(EF, BD) &= (EF, EG) + (EG, OB) + (OB, BD)\\ &= (OD, OG) + \pi/2 + (DB, DO)\\ &= (OD, OG) + (GO, GL) + (DB, DO)\\ &= (DB, GL).\end{aligned}$$

b) Vì $\angle OGL = 90^\circ$ và C, O, G thẳng hàng nên $\angle CGL = 90^\circ$; cùng với $\angle CHL = \angle CKL = 90^\circ$, năm điểm C, G, H, K, L cùng nằm trên đường tròn đường kính CL. Vì $AB = AD$, CA là phân giác của góc BCD, nên $(CB, CA) = (CA, CD)$.

Khẳng định 2.1. Các tứ giác $MBGC$ và $NDGC$ nội tiếp.

Vì $AB = AD$ nên $OA \perp BD$, và OA là trục đối xứng của B, D. Do $G \in (OBD)$,

$$(GL, GB) = (GL, GO) + (GO, GB) = 90^\circ + (DO, DB) = 90^\circ + (DO, OA) + 90^\circ = (OD, OA).$$

Mà $(OD, OA) = (OA, OB) = 2(CA, CB)$ (góc nội tiếp và góc ở tâm). Do đó, từ đường tròn đường kính CL,

$$(GM, GB) = (GH, GL) + (GL, GB) = (CB, CA) + 2(CA, CB) = (CA, CB) = (CM, CB),$$

tức M, B, G, C đồng viên. Tương tự, N, D, G, C đồng viên.

Kẻ đường kính OP của (OBD). Vì $\angle OGL = 90^\circ$ nên GL đi qua P. Từ khẳng định trên và (OBD),

$$(MA, MB) = (MC, MB) = (GC, GB) = (GO, GB) = (PO, PB) = (PA, PB),$$

nên M, P, A, B đồng viên (chú ý O, A, P thẳng hàng). Suy ra

$$(MP, MA) = (BP, BA) = (CB, CA) = (CH, CL) = (GH, GL) = (GM, GP),$$

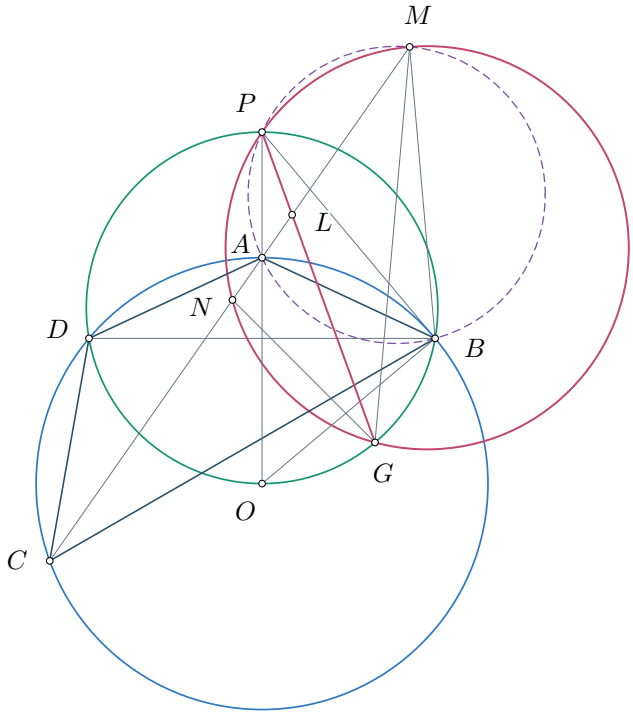
trong đó $(BP, BA) = (CB, CA)$ vì $PB \perp OB$, tức PB là tiếp tuyến của (O) tại B. Mặt khác, từ đường tròn đường kính CL và $(CB, CA) = (CA, CD)$,

$$\begin{aligned}(GM, GP) &= (GH, GL) = (CH, CL) = (CB, CA)\\ &= (CA, CD) = (CL, CK) = (GL, GK) = (GP, GN).\end{aligned}$$

Vì A, M, N cùng nằm trên đường thẳng CA, ta được

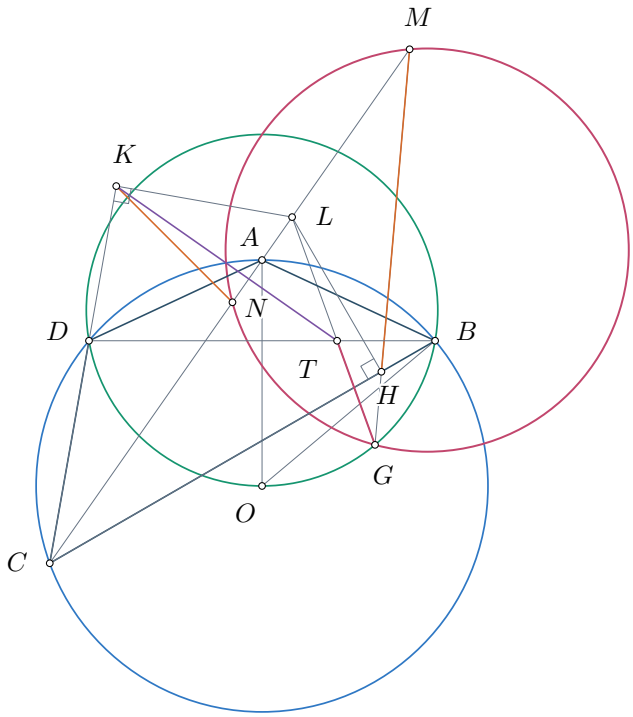
$$(MP, MN) = (MP, MA) = (GM, GP) = (GP, GN),$$

nên G, M, N, P đồng viên. Vậy GP là trục đẳng phương của (OBD) và (GMN); vì L nằm trên đường thẳng GP, điểm L có cùng phương tích đối với hai đường tròn này.



Hình cho câu b): GL đi qua P; M, P, A, B và G, M, N, P đồng viên.

Nhận xét về điểm T. Vì $MBGC$ nội tiếp, điểm $H = GM \cap BC$ có $\overline{HG} \cdot \overline{HM} = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$, tức H có cùng phương tích đối với (GMN) và (O); tương tự với K. Vậy HK là trục đẳng phương của (GMN) và (O). Mặt khác BD là trục đẳng phương của (O) và (OBD), còn $GP \equiv GL$ là trục đẳng phương của (OBD) và (GMN); ba trục này đồng quy tại tâm đẳng phương, chính là điểm $T = BD \cap GL$ ở câu a). Do đó T, H, K thẳng hàng.



Ba trục đẳng phương HK, BD, GL đồng quy tại T.

□

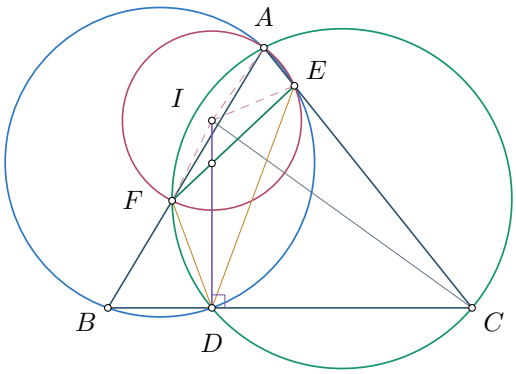
2.3 Trần Đại Nghĩa

Bài toán 2.4 (Ngày 1). Cho tam giác ABC và điểm D di động trên cạnh BC, với $D \neq B, C$ [giả sử $\angle BAC \neq 90^\circ$ và D được chọn sao cho ba điểm A, E, F phân biệt, không thẳng hàng]. Đường tròn (ABD) cắt đường thẳng AC lần thứ hai tại E; đường tròn (ACD) cắt đường thẳng AB lần thứ hai tại F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

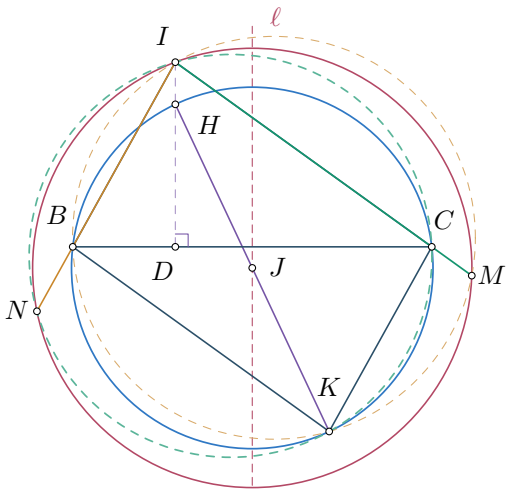
(a) Chứng minh rằng $ID \perp BC$.

(b) Giả sử $ID \cap EF = \{H\}$. Lấy điểm K sao cho HK là một đường kính của đường tròn (HBC). Các đường tròn (IBK) và (ICK) lần lượt cắt các đường thẳng IC, IB lần thứ hai tại M, N.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh rằng khi D di động, điểm J luôn thuộc một đường thẳng cố định.



Cấu hình câu a)



Cấu hình câu b)

Lời giải. (a) *Hướng 1.* Do A, B, D, E và A, C, D, F lần lượt đồng viên nên $(DC, DE) = (AB, AC)$ và $(DB, DF) = (AC, AB)$. Suy ra

$$(DE, DF) = (DE, DC) + (DB, DF) = 2(AC, AB).$$

Mặt khác, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nên

$$(IE, IF) = 2(AE, AF) = 2(AC, AB).$$

Vì thế $(IE, IF) = (DE, DF)$, suy ra I, E, D, F đồng viên.

Do $IE = IF$ nên DI là một đường phân giác của góc tạo bởi DE và DF. Hai đẳng thức đầu tiên cũng cho $(DC, DE) = (DF, DB)$, nên BC là đường phân giác còn lại. Vậy $ID \perp BC$.

Hướng 2. Ta có

$$CI^2 - BI^2 = \mathcal{P}_{(AEF)}(C) - \mathcal{P}_{(AEF)}(B) = \overline{CE}\cdot\overline{CA} - \overline{BF}\cdot\overline{BA} = \overline{CD}\cdot\overline{CB} - \overline{BD}\cdot\overline{BC} = CD^2 - BD^2$$

suy ra $ID \perp BC$.

(b) Ta có $\triangle DCE \backsim \triangle DFB$, suy ra $DE \cdot DF = DB \cdot DC$.

Lại có DI là phân giác của góc tạo bởi DE, DF và I, E, D, F đồng viên, nên $\triangle DHE \backsim \triangle DFI$. Do đó $DH \cdot DI = DE \cdot DF$.

Suy ra $DH \cdot DI = DB \cdot DC$. Kết hợp với $ID \perp BC$, hệ thức trên cho thấy H là trực tâm của tam giác IBC. Do đó $IBKC$ là hình bình hành.

Vì $N \in IB$, $M \in IC$ nên $IN \parallel CK$ và $IM \parallel BK$. Các tứ giác $ICKN$, $IBKM$ đều nội tiếp, vì thế chúng là các hình thang cân.

Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (IMN) nên J thuộc đường trung trực của IM, IN và do đó J thuộc đường trung trực của BK và CK nên J cũng là tâm (BCK). Vậy nên J luôn thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC (cố định).

□

Nhận xét. Mô hình ở câu a) quen thuộc. Hai tính chất cơ bản khác dành cho bạn đọc:

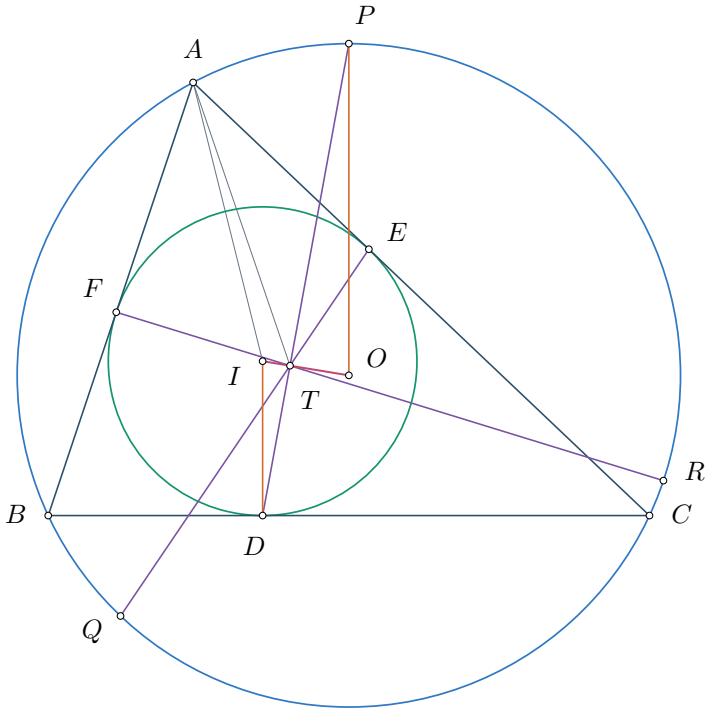
- (AEF) trực giao với đường tròn đường kính BC.
- (AEF) đi qua điểm cố định khác A khi D thay đổi.

3 An Giang

Bài toán 3.1 (Vòng 2, Câu 2). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi P, Q, R là các điểm chính giữa các cung lớn BC, CA, AB của (O).

(a) Chứng minh rằng PD, QE, RF đồng quy tại một điểm T.

(b) [Giả sử $AB \neq AC$.] Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng PJ và AT cắt nhau tại một điểm thuộc (O).



Hình cho câu a): T là tâm vị tự trong của (I) và (O).

Lời giải. Gọi r, R lần lượt là bán kính của $(I), (O)$.

a) Hai đoạn ID và OP cùng vuông góc với BC; $\overrightarrow{ID}$ hướng về phía BC, còn $\overrightarrow{OP}$ hướng ra xa BC (vì P là điểm chính giữa cung lớn BC). Do đó $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{R}{r}\overrightarrow{ID}$, tức phép vị tự tâm T, tỉ số $-\dfrac{R}{r}$ (với T là tâm vị tự trong của (I) và (O), nằm trên đoạn OI và $\dfrac{TI}{TO} = \dfrac{r}{R}$) biến D thành P. Vậy PD đi qua T. Tương tự, QE và RF cũng đi qua T.

b) Xét phép biến hình Φ là hợp của phép nghịch đảo cực A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác AI. Quen thuộc, Φ đổi chỗ $B \leftrightarrow C$, $(O) \leftrightarrow BC$ và $I \leftrightarrow J$ (vì $AI \cdot AJ = AB \cdot AC$). Vì AP là phân giác ngoài của góc A, Φ biến P thành giao điểm P' của phân giác ngoài AP với BC.

Gọi $K = \Phi(D) \in (O)$.

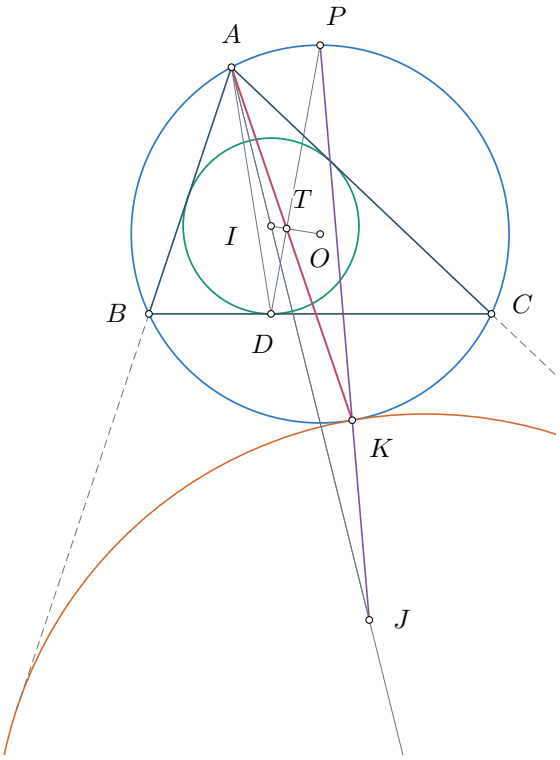
K nằm trên PJ. Ta có $\angle IDP' = 90^\circ$ và $\angle IAP' = 90^\circ$ (hai phân giác trong và ngoài vuông góc), nên A, I, D, P' cùng nằm trên đường tròn đường kính IP'. Đường tròn này đi qua cực A, nên Φ biến nó thành một đường thẳng đi qua $\Phi(I) = J$, $\Phi(D) = K$, $\Phi(P') = P$. Vậy P, J, K thẳng hàng.

K nằm trên AT. Đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc với BC tại D, nên $\omega = \Phi\big((I)\big)$ là đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng AB, AC (tâm nằm trên tia AI) và tiếp xúc với (O) tại K. Vì (I) nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa A, ảnh ω nằm ngoài (O), tức ω tiếp xúc ngoài với (O).

Xét ba đường tròn $(I), (O), \omega$:

- (I) và ω cùng tiếp xúc với hai cạnh của góc BAC nên A là tâm vị tự ngoài của chúng;
- T là tâm vị tự trong của (I) và (O) (câu a);
- ω và (O) tiếp xúc ngoài tại K nên K là tâm vị tự trong của chúng.

Theo định lí Monge – D'Alembert, A, T, K thẳng hàng. Vậy PJ và AT cắt nhau tại $K \in (O)$.



Hình cho câu b): $\omega = \Phi\big((I)\big)$ tiếp xúc ngoài với (O) tại K.

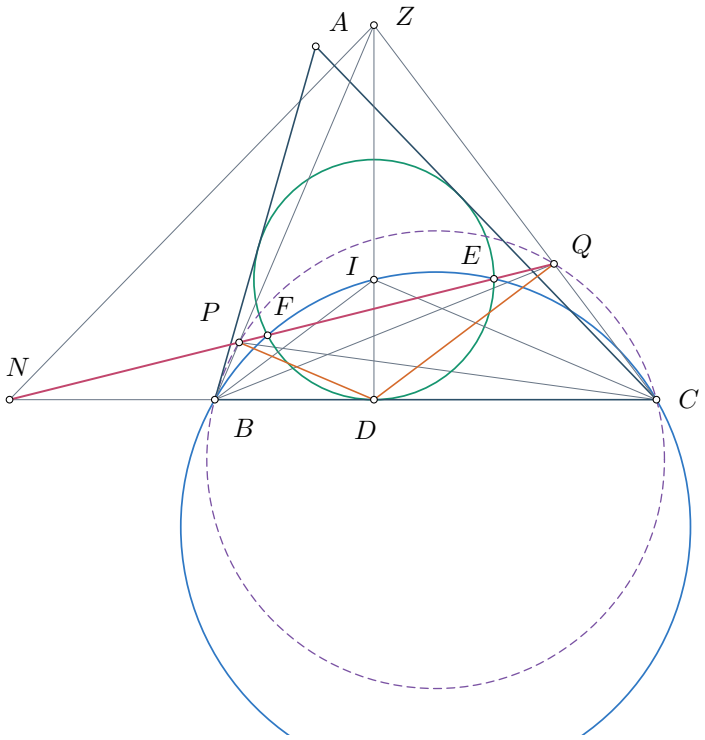
□

Nhận xét. Điểm T là tâm vị tự trong của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp, còn ω chính là đường tròn mixtilinear bàng tiếp góc A. Câu b) cho ta hai tính chất của tiếp điểm K của ω với (O): K nằm trên PJ, và AK là đường đẳng giác của AD trong góc BAC.

Bài toán 3.2 (Vòng 2, Câu 5). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc BC tại D. Gọi E, F là giao của (I) và (IBC); và P, Q lần lượt là giao điểm của EF với đường thẳng qua B vuông góc IC, đường thẳng qua C vuông góc IB.

(a) Chứng minh rằng B, P, Q, C đồng viên.

(b) Gọi K là giao điểm của BQ và CP; G là giao điểm thứ hai của DK và (DPQ); T là điểm đối xứng của D qua G. Chứng minh rằng T, P, K, Q đồng viên.



Hình cho câu a): PQ là trục đẳng phương của (I) và (IBC).

Lời giải. Gọi Z là trực tâm tam giác IBC. Khi đó đường thẳng qua B vuông góc IC là BZ, đường thẳng qua C vuông góc IB là CZ; hơn nữa $ZI \perp BC$ nên Z, I, D thẳng hàng và $ZD \perp BC$.

a) Gọi P', Q' lần lượt là hình chiếu của D trên ZB, ZC. Ta chứng minh $P'Q' \equiv EF$, từ đó $P \equiv P'$, $Q \equiv Q'$.

Bốn điểm Z, P', D, Q' nằm trên đường tròn ω đường kính ZD, và vì $ZD \perp BC$ nên ω tiếp xúc với BC tại D. Trong các tam giác vuông ZDB, ZDC có

$$\overline{ZP'} \cdot \overline{ZB} = ZD^2 = \overline{ZQ'} \cdot \overline{ZC}, \tag{1}$$

nên B, P', Q', C đồng viên. Vì tam giác ABC không cân, $ZB \neq ZC$ nên $P'Q' \nparallel BC$; đặt $N = P'Q' \cap BC$. Khi đó

$$ND^2 = \overline{NP'} \cdot \overline{NQ'} = \overline{NB} \cdot \overline{NC},$$

tức N có cùng phương tích đối với (I) và (IBC).

Mặt khác, gọi I' là tâm (IBC) và O' là tâm (ZBC). Quen thuộc, (ZBC) là ảnh của (IBC) qua phép đối xứng trục BC, nên O' đối xứng với I' qua BC; gọi L là trung điểm BC thì $I'O' = 2I'L$ và $I'O' \perp BC$. Mặt khác, theo tính chất quen thuộc của trực tâm (trong tam giác IBC), $IZ = 2I'L$ và $IZ \perp BC$, cùng hướng với $I'O'$. Do đó $II'O'Z$ là hình bình hành, suy ra $O'Z \parallel I'I$. Vì $P'Q'$ là đường đối song với BC trong tam giác ZBC, $P'Q' \perp ZO'$, do đó $P'Q' \perp II'$. Vậy $P'Q'$ là đường thẳng qua N vuông góc với II', chính là trục đẳng phương EF của (I) và (IBC). Suy ra $P \equiv P'$, $Q \equiv Q'$, và theo (1), B, P, Q, C đồng viên.

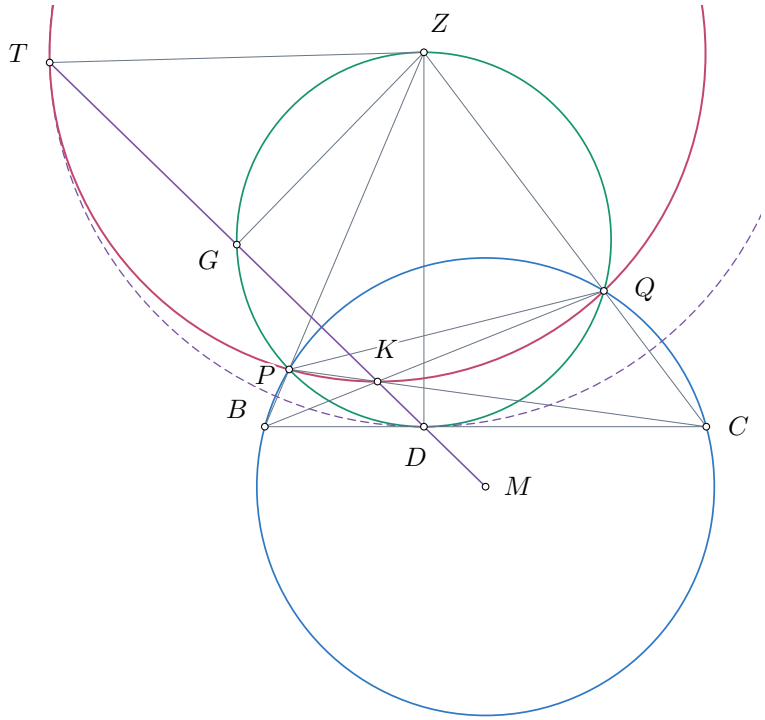
b) Gọi $(M; \rho)$ là đường tròn qua B, P, Q, C. Theo câu a), $(DPQ) = \omega$ là đường tròn đường kính ZD.

Bước 1: G là ảnh của K qua phép nghịch đảo $\mathcal{I}$ tâm M, phương tích ρ^2. Xét tứ giác nội tiếp $BPQC$ với $Z = BP \cap CQ$, $N = PQ \cap BC$, $K = BQ \cap CP$. Theo định lí Brocard, NZ là đường đối cực của K đối với (M); do đó hình chiếu G' của M trên NZ là ảnh của K qua $\mathcal{I}$, và M, K, G' thẳng hàng. Mặt khác G' là điểm Miquel của tứ giác toàn phần tạo bởi ZB, ZC, PQ, BC, nên

$G' \in (ZPQ) = \omega$. Vì ZD là đường kính của ω, $DG' \perp ZG' = NZ$; kết hợp $MG' \perp NZ$, ta được M, D, K, G' thẳng hàng. Vậy G' là giao điểm thứ hai của DK với ω, tức $G' \equiv G$.

Bước 2: T là ảnh của D qua $\mathcal{I}$. Vì $ZG \perp DG$ và G là trung điểm DT nên $ZT = ZD$, tức T nằm trên đường tròn $\Gamma = (Z; ZD)$. Theo (1), $ZD^2 = \overline{ZP} \cdot \overline{ZB}$ là phương tích của Z đối với (M), nên Γ trực giao với (M) và bất biến qua $\mathcal{I}$. Ảnh của D qua $\mathcal{I}$ nằm trên Γ và trên đường thẳng $MD \equiv DK$; giao điểm thứ hai của đường thẳng này với Γ là T. Vậy $\mathcal{I}(D) = T$.

Bước 3: kết luận. Phép nghịch đảo $\mathcal{I}$ giữ nguyên P, Q (nằm trên (M)) và biến $K \mapsto G$, $T \mapsto D$. Vì P, Q, G, D cùng nằm trên ω, nên P, Q, K, T đồng viên.



Hình cho câu b): phép nghịch đảo qua (M) biến $(TPKQ)$ thành $\omega = (ZPQD)$.

□

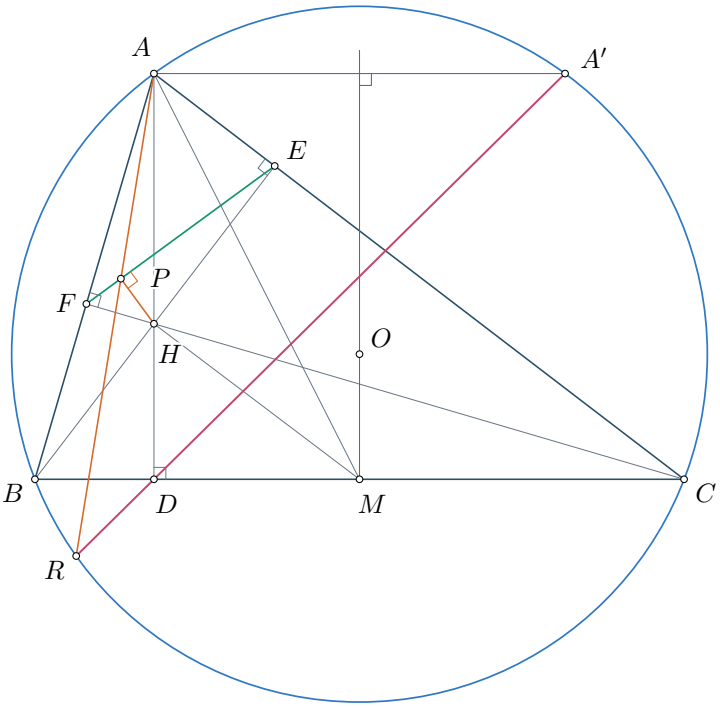
Nhận xét. Lời giải câu b) còn cho thêm: T nằm trên đường tròn (MBC) (ảnh của đường thẳng BC qua $\mathcal{I}$), và M, D, K, G thẳng hàng.

4 TP. Bắc Ninh

Bài toán 4.1 (Câu 2; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm cạnh BC và P là hình chiếu vuông góc của H lên EF. Gọi Q là giao điểm của EF và BC.

(a) Gọi R là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP và đường tròn (O). Chứng minh rằng đường thẳng DR đi qua điểm đối xứng của A qua đường thẳng OM.

(b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMR. Chứng minh rằng $XH \perp QG$.



Hình cho câu a).

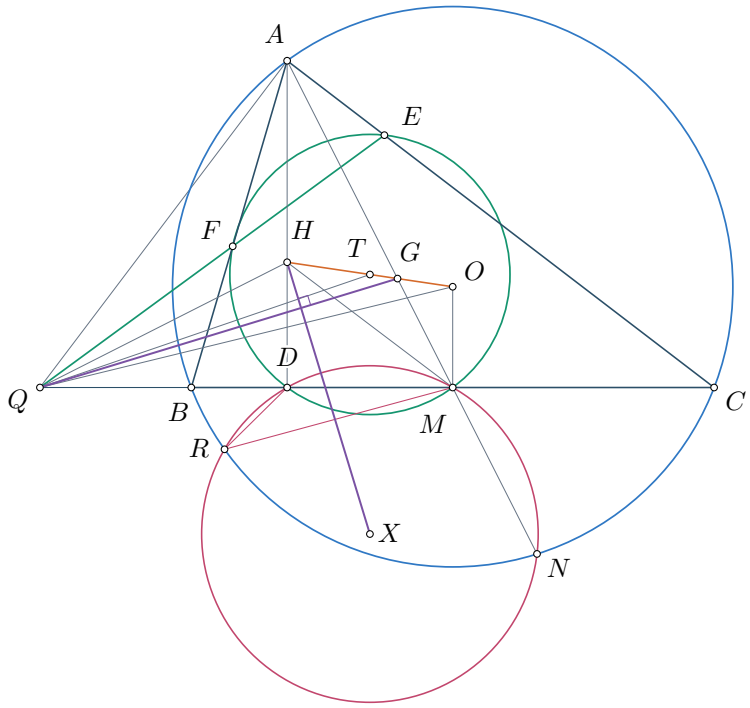
Lời giải.

a) Kẻ dây cung $AA' \parallel BC$. Vì $OM \perp BC$ nên A' là điểm đối xứng của A qua OM.

Ta có $\triangle HEF \backsim \triangle HCB$, với hai đường cao tương ứng là HP, HD, nên $\dfrac{EP}{PF} = \dfrac{CD}{DB}$. Mặt khác, $\triangle AEF \backsim \triangle A'CB$; theo tỉ số trên, P, D là hai điểm tương ứng trong phép đồng dạng này. Do đó

$$(A'C, A'D) = (AE, AP) = (AC, AR) = (A'C, A'R),$$

trong đó đẳng thức cuối được suy ra từ A, A', C, R cùng thuộc (O). Vậy A', D, R thẳng hàng, suy ra điều phải chứng minh.



b) *Cách 1.* Gọi N là giao điểm thứ hai của AM với (O). Từ câu a) và $AA' \parallel DM$, ta có

$$(DR, DM) = (A'R, A'A) = (NR, NA) = (NR, NM),$$

suy ra D, M, R, N đồng viên. Như vậy $N \in (X)$.

Đặt $r = OA$ và gọi T là trung điểm OH. Đường tròn chín điểm của tam giác ABC có tâm T, bán kính $\frac{r}{2}$ và đi qua D, E, F, M. Kết hợp với B, C, E, F đồng viên, ta được

$$QT^2 - \frac{r^2}{4} = \overline{QD} \cdot \overline{QM} = \overline{QE} \cdot \overline{QF} = \overline{QB} \cdot \overline{QC} = QO^2 - r^2. \tag{1}$$

Vì G là trọng tâm nên $\overline{GA} = -2\overline{GM}$. Áp dụng phương tích đối với (X) và (O), ta có

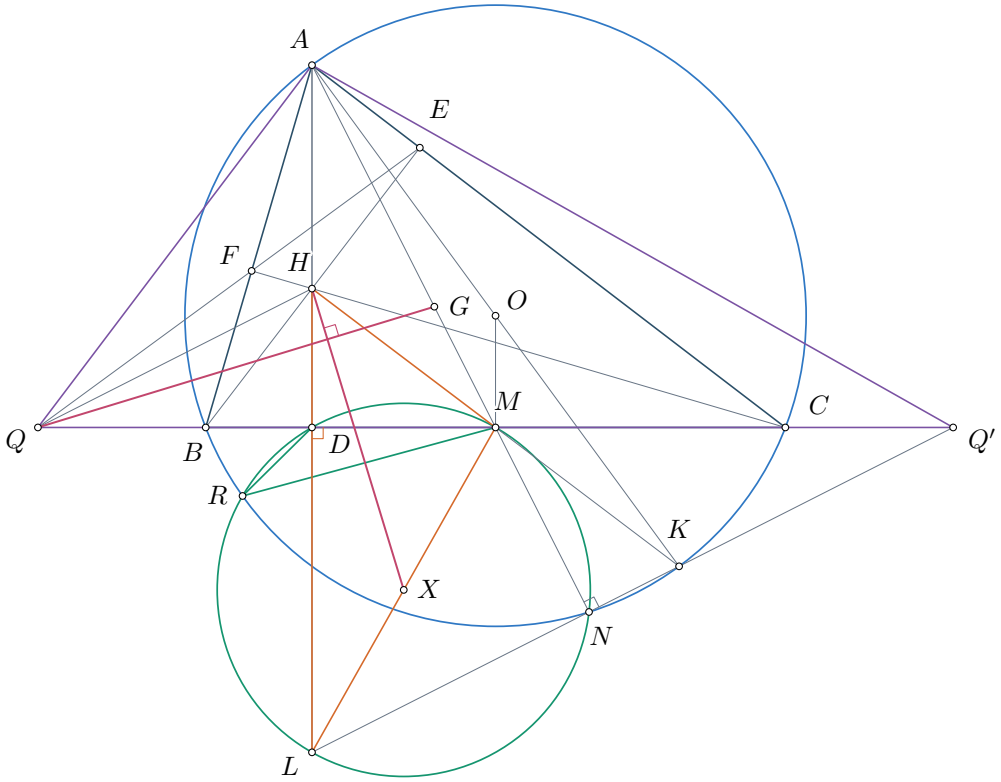
$$\begin{aligned} QX^2 - GX^2 &= \overline{QD} \cdot \overline{QM} - \overline{GM} \cdot \overline{GN} \\ &= \overline{QB} \cdot \overline{QC} + \frac{1}{2}\overline{GA} \cdot \overline{GN} \\ &= QO^2 - r^2 + \frac{1}{2}(GO^2 - r^2) \\ &= QO^2 + \frac{1}{2}GO^2 - \frac{3}{2}r^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Theo công thức đường trung tuyến với T là trung điểm OH, kết hợp (1), $GH = 2GO$ và $OH = 3GO$, ta được

$$\begin{aligned} QH^2 - GH^2 &= 2QT^2 - QO^2 + \frac{1}{2}OH^2 - GH^2 \\ &= 2\left(QO^2 - \frac{3}{4}r^2\right) - QO^2 + \frac{1}{2}(3GO)^2 - (2GO)^2 \\ &= QO^2 - \frac{3}{2}r^2 + \left(\frac{9}{2} - 4\right)GO^2 \\ &= QO^2 + \frac{1}{2}GO^2 - \frac{3}{2}r^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3), suy ra $QX^2 - GX^2 = QH^2 - GH^2$. Vậy $XH \perp QG$.

Cách 2.



Hình cho câu b): hai tam giác HLM và $QQ'A$ có các cạnh tương ứng vuông góc.

Nhận thấy H là trực tâm của tam giác AQM, do đó $MH \perp AQ$.

Gọi K là điểm đối diện với A trên (O), L là điểm đối diện với M trên (X), và Q' là điểm đối xứng của Q qua M. Vì $BHCK$ là hình bình hành nên M là trung điểm HK. Phép đối xứng tâm M biến HQ thành KQ', vì thế $KQ' \parallel HQ \perp AM$.

Mặt khác, AK, ML là các đường kính và A, M, N thẳng hàng, nên $NK \perp AM$ và $NL \perp AM$. Bởi vậy Q', K, N, L thẳng hàng.

Cũng do ML là đường kính, $DL \perp DM$, nên A, H, D, L thẳng hàng. Như vậy $AL \perp MQ'$ và $Q'L \perp AM$, tức là L là trực tâm của tam giác AMQ'. Do đó $ML \perp AQ'$.

Xét hai tam giác HLM và $QQ'A$. Ta có

$$HL \perp QQ', \qquad LM \perp Q'A, \qquad MH \perp AQ.$$

Vậy $\triangle HLM \backsim \triangle QQ'A$ theo một phép đồng dạng thuận có góc quay 90° hoặc -90°. Bởi vậy các trung tuyến tương ứng của hai tam giác cũng vuông góc.

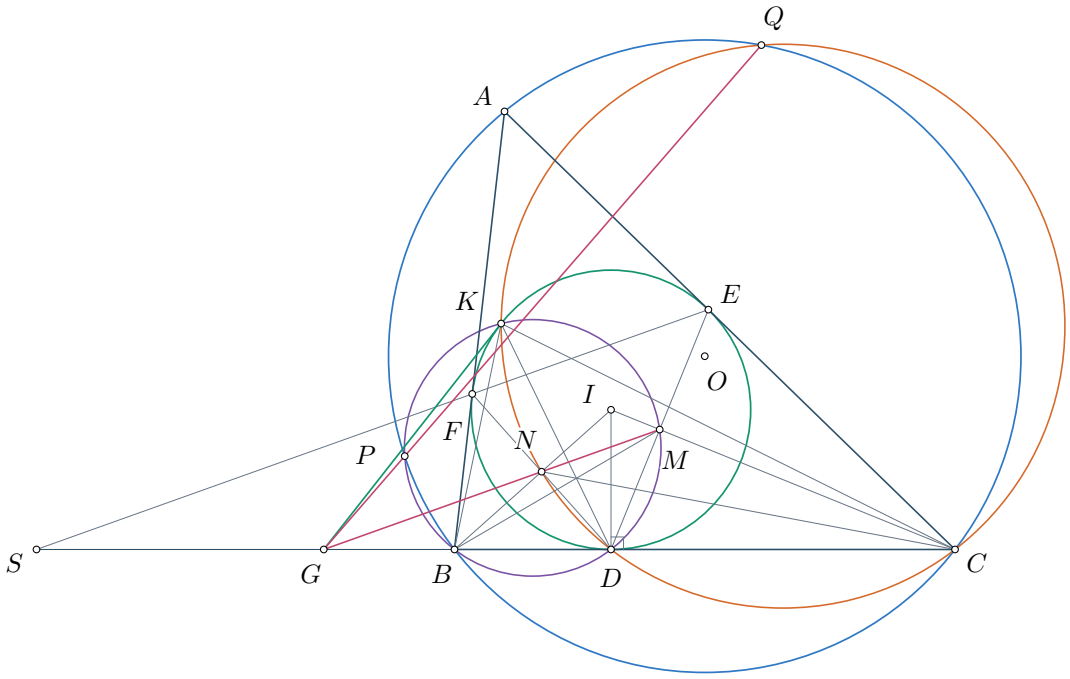
Trong tam giác HLM, X là trung điểm LM nên HX là trung tuyến. Trong tam giác AQQ', M là trung điểm QQ'; lại có $G \in AM$ và $AG = 2GM$, nên G cũng là trọng tâm của tam giác này. Do đó QG nằm trên trung tuyến xuất phát từ Q.

Hai trung tuyến ấy tương ứng trong phép đồng dạng trên, suy ra $HX \perp QG$. □

Bài toán 4.2 (Câu 6; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF.

(a) Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BDM) và (CDN). Chứng minh rằng $K \in (I)$.

(b) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của $(BDM), (CDN)$ với (O), khác B, C. Chứng minh rằng P, Q, M, N đồng viên hoặc thẳng hàng.



Lời giải.

Đặt $S = EF \cap BC$ và G là trung điểm của DS.

a) Dễ có $(B, C; D, S) = -1$, do đó $\overline{GB} \cdot \overline{GC} = \overline{GD}^2$. Gọi K là tiếp điểm thứ hai của tiếp tuyến kẻ từ G đến (I); khi ấy $GK^2 = GD^2 = GB \cdot GC$. Từ đó suy ra KD là phân giác $\angle BKC$.

Ta chỉ ra $K \in (BDM)$. Thật vậy, theo góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung, $\angle KEM = \angle KED = \angle KDB$; và theo tính chất đường đối trung $\angle MKE = \angle DKC = \angle BKD$. Suy ra $\triangle KEM \backsim \triangle KDB$, nên $\angle KMD = \angle KBD$, hay B, D, M, K đồng viên. Tương tự, C, D, N, K đồng viên. Vậy K là giao điểm thứ hai của (BDM) và (CDN), suy ra $K \in (I)$.

b) Ta có $\angle BPD = \angle BKD = \angle CKD = \angle CQD$ và $\angle BPC = \angle BQC$, nên $\angle CPD = \angle BQD$.

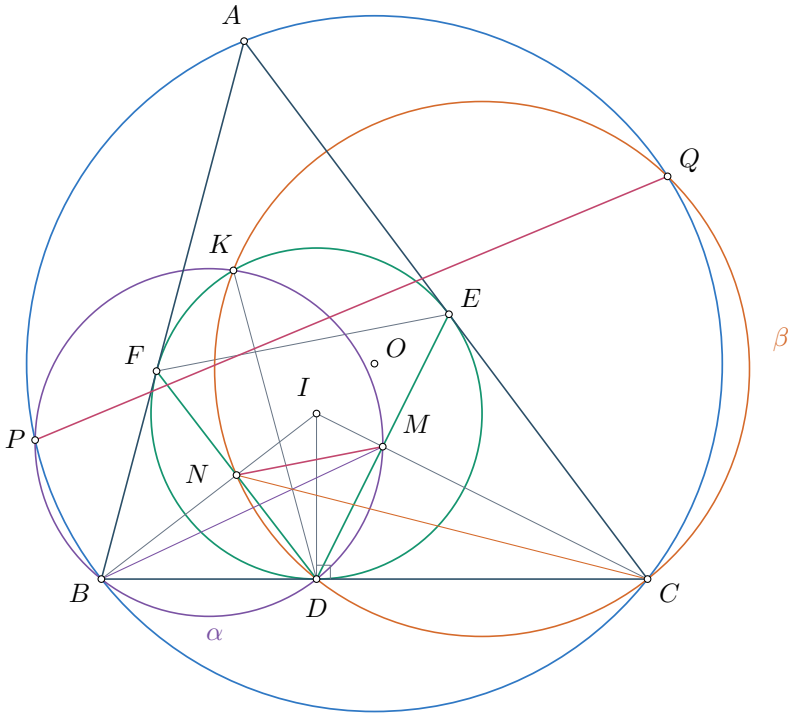
Vì $GK^2 = GD^2 = GB \cdot GC$ nên GK cũng là tiếp tuyến của (BKC). Theo định lí sin và tính chất tiếp tuyến, ta được

$$\begin{aligned}\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} &= \left(\frac{DB}{DC} \cdot \frac{\sin \angle CPD}{\sin \angle BPD}\right)\left(\frac{DB}{DC} \cdot \frac{\sin \angle CQD}{\sin \angle BQD}\right) \\ &= \frac{DB^2}{DC^2} = \frac{KB^2}{KC^2} = \frac{GB}{GC}.\end{aligned}$$

Theo bổ đề cát tuyến, G, P, Q thẳng hàng. Phép vị tự tâm D, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến S, E, F thành G, M, N, nên G, M, N thẳng hàng. Dùng độ dài đại số và phương tích, ta có

$$\overline{GP} \cdot \overline{GQ} = \overline{GB} \cdot \overline{GC} = GD^2 = \overline{GM} \cdot \overline{GN}.$$

Vậy P, Q, M, N đồng viên (hoặc thẳng hàng nếu $PQ \equiv MN$).

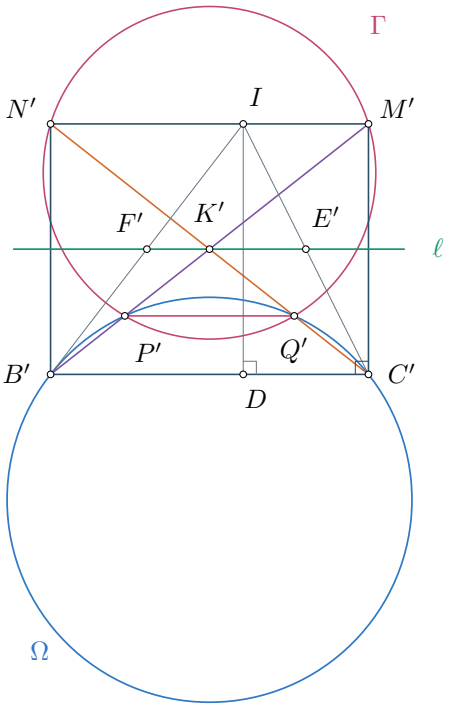


Cách 2. (Sử dụng phép nghịch đảo) Đặt $r = ID$ và xét phép nghịch đảo tâm D, phương tích r^2. Các điểm có dấu phẩy là ảnh nghịch đảo của các điểm tương ứng. Điểm I được giữ cố định, còn (I) biến thành đường thẳng $\ell \parallel BC$, cách BC một khoảng $\frac{r}{2}$, nằm về phía chứa I.

a) Vì D, E, C, I đồng viên nên E', C', I thẳng hàng. Do $E' \in \ell$, E' là trung điểm của IC'. Tương tự, F' là trung điểm của IB'.

Từ $DM = \frac{1}{2}DE$ và $DN = \frac{1}{2}DF$, suy ra $DM' = 2DE'$ và $DN' = 2DF'$. Vì thế E', F' lần lượt là trung điểm của DM', DN'. Theo tính chất hai đường chéo có chung trung điểm, $DC'M'I$ và $DB'N'I$ là các hình bình hành. Kết hợp với $DI \perp BC$, ta thấy $B'C'M'N'$ là hình chữ nhật.

Hai đường tròn $(BDM), (CDN)$ biến thành hai đường thẳng $B'M', C'N'$, tức là hai đường chéo của hình chữ nhật trên. Vì vậy K' là tâm của hình chữ nhật, nên $K' \in \ell$. Lấy ảnh nghịch đảo trở lại, ta được $K \in (I)$.



b) Gọi Ω là ảnh của (O). Khi đó B', C', P', Q' cùng thuộc Ω; B', P', K', M' thẳng hàng và C', Q', K', N' thẳng hàng.

Định hướng hai đường thẳng $B'M', C'N'$ lần lượt theo các tia $K'M', K'N'$. Vì K' là tâm hình chữ nhật, ta có $\overline{K'M'} = -\overline{K'B'}$ và $\overline{K'N'} = -\overline{K'C'}$. Theo phương tích tại K' đối với Ω,

$$\overline{K'B'} \cdot \overline{K'P'} = \overline{K'C'} \cdot \overline{K'Q'}.$$

Do đó

$$\overline{K'M'} \cdot \overline{K'P'} = \overline{K'N'} \cdot \overline{K'Q'},$$

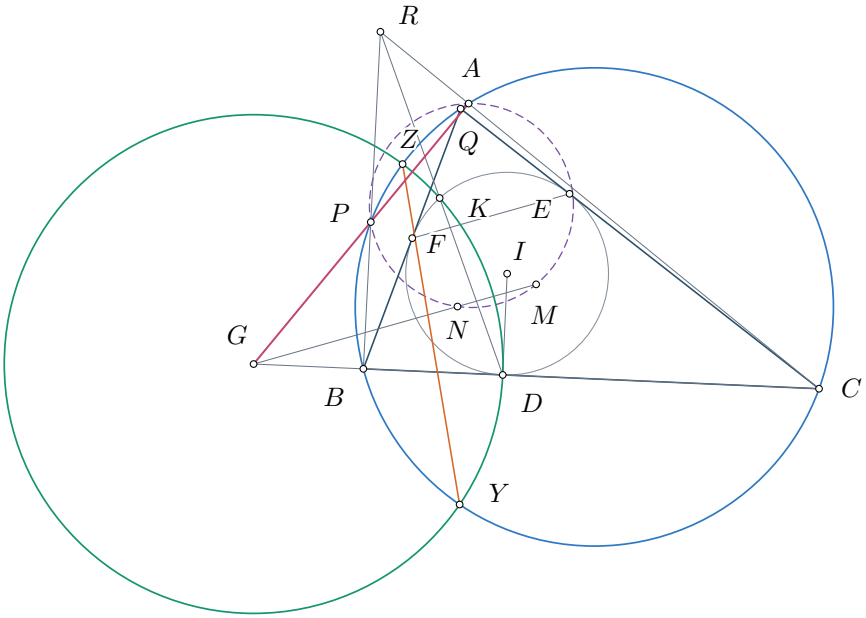
suy ra M', N', P', Q' cùng thuộc một đường tròn Γ.

Nếu $D \notin \Gamma$, ảnh của Γ là đường tròn đi qua M, N, P, Q. Nếu $D \in \Gamma$, ảnh của Γ là đường thẳng MN, nên P, Q, M, N thẳng hàng. Vậy trong mọi cấu hình mà các giao điểm được xác định, P, Q, M, N đồng viên hoặc thẳng hàng.

Cách khác cho câu b). Ta chứng minh P, Q, G thẳng hàng. Ba đường tròn $(O), (BDM), (CDN)$ có các trục đẳng phương BP, CQ, DK đồng quy hoặc đôi một song song.

- Nếu chúng đồng quy tại R: gọi ℓ là trục đẳng phương của (I) và (O). Ta có $\overline{RB} \cdot \overline{RP} = \overline{RK} \cdot \overline{RD}$ nên $R \in \ell$; và $\overline{GB} \cdot \overline{GC} = GD^2$ nên $G \in \ell$. Gọi Γ là đường tròn tâm G bán kính GD, cắt (O) tại Y, Z. Ba trục đẳng phương YZ, KD, ℓ của $(I), (O), \Gamma$ đồng quy tại R, nên R nằm trên YZ là đường đối cực của G đối với (O). Theo La Hire, G nằm trên đường đối cực của R; vậy G là giao điểm của BC với đường đối cực của R. Mà BC, PQ và đường đối cực của R đồng quy (tứ giác $BPQC$ nội tiếp), nên $G \in PQ$.
- Nếu chúng đôi một song song: $BPKD$, $DKCQ$, $BPQC$ là các hình thang cân có chung trục đối xứng là trung trực của DK, trên đó có G; suy ra G, P, Q thẳng hàng.

Cuối cùng G, N, M thẳng hàng, $BNMC$ nội tiếp (vì $IN \cdot IB = ID^2 = IM \cdot IC$), nên $\overline{GP} \cdot \overline{GQ} = \overline{GB} \cdot \overline{GC} = \overline{GM} \cdot \overline{GN}$.



Hình cho cách khác của câu b): BP, CQ, DK đồng quy tại R nằm trên YZ.

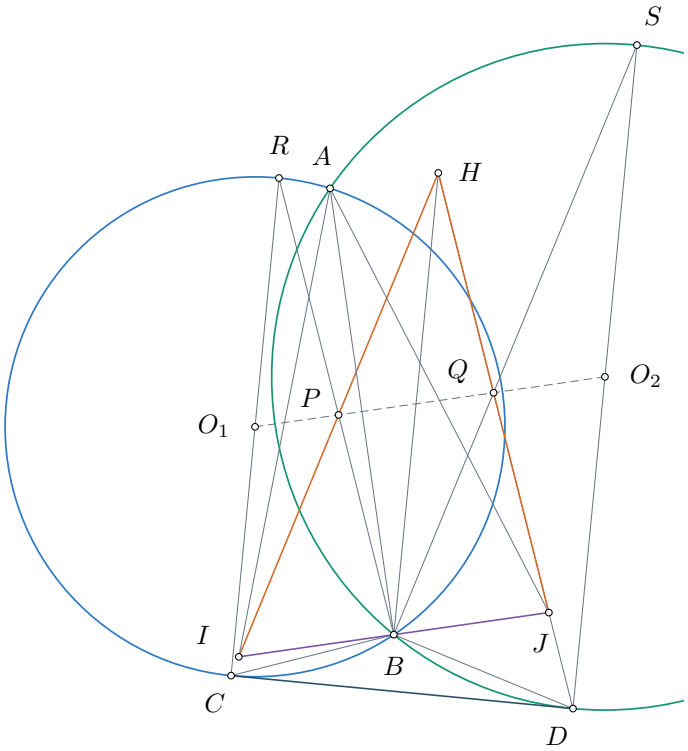
□

Nhận xét. Đề gốc ở câu b) chỉ yêu cầu chứng minh P, Q, M, N đồng viên; tuy nhiên trường hợp P, Q, M, N thẳng hàng thực sự có thể xảy ra, nên trong tài liệu này kết luận được phát biểu là "đồng viên hoặc thẳng hàng".

Ý tưởng nghịch đảo và bài toán tổng quát được tác giả trình bày tại đây.

5 Cà Mau

Bài toán 5.1 (Ngày 1, Câu 4). Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ có bán kính khác nhau và cắt nhau tại hai điểm A, B. Kẻ tiếp tuyến chung CD của hai đường tròn (gần B hơn) với $C \in (O_1)$, $D \in (O_2)$. Dựng điểm H sao cho tam giác HCD nhận B làm trực tâm. Kẻ đường kính CR của (O_1) và đường kính DS của (O_2). Biết rằng BR cắt HC ở P và BS cắt HD ở Q. Dựng các điểm I, J sao cho các đoạn thẳng HI, HJ lần lượt nhận P, Q là trung điểm. Chứng minh rằng hai tam giác AIC và AJD có cùng bán kính đường tròn ngoại tiếp.



Lời giải. Vì CR, DS là đường kính nên $BR \perp BC$, $BS \perp BD$; vì B là trực tâm tam giác HCD nên $BC \perp HD$, $BD \perp HC$. Do đó $BP \parallel HQ$ và $BQ \parallel HP$, tức $HPBQ$ là hình bình hành; gọi N là trung điểm chung của HB và PQ.

Vì $CR \perp CD$ và $HB \perp CD$ nên $CR \parallel HB$. Trong hình thang $RCHB$ (hai đáy RC, HB), hai đường chéo cắt nhau tại P, nên theo bổ đề hình thang O_1, P, N thẳng hàng. Tương tự O_2, Q, N thẳng hàng. Kết hợp với P, N, Q thẳng hàng, ta được O_1, P, N, Q, O_2 cùng nằm trên đường thẳng O_1O_2, do đó $PQ \perp AB$.

Vì $P \in HC$ là trung điểm HI nên $I \in HC$; tương tự $J \in HD$. PN là đường trung bình của tam giác HIB nên $PN \parallel BI$, $BI = 2PN$; tương tự $NQ \parallel BJ$, $BJ = 2NQ$. Vì $PN = NQ$ nên B là trung điểm của IJ và $IJ \parallel PQ \perp AB$. Vậy AB là trung trực của IJ, nên $AI = AJ$.

Mặt khác, theo góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle BCD + \angle BDC = 180^\circ - \angle CBD = \angle CHD$, nên A, H, D, C đồng viên. Do đó $\sin\angle ACI = \sin\angle ACH = \sin\angle ADH = \sin\angle ADJ$, và theo định lí sin,

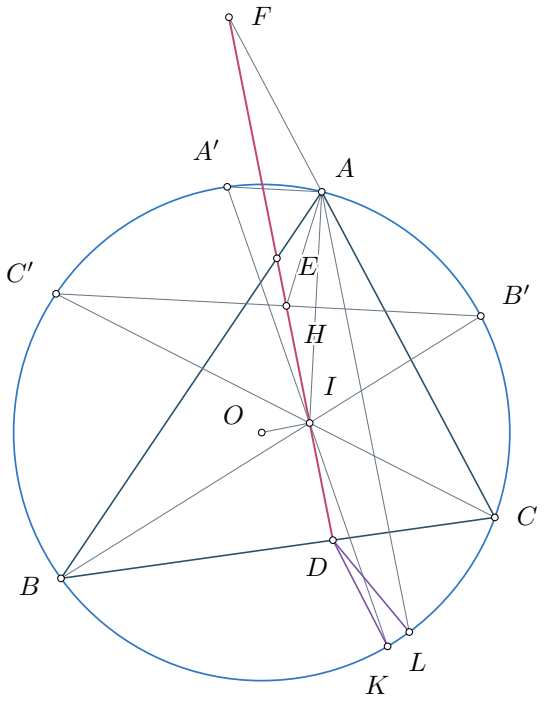
$$2R_{(AIC)} = \frac{AI}{\sin\angle ACI} = \frac{AJ}{\sin\angle ADJ} = 2R_{(AJD)}.$$

□

Bài toán 5.2 (Ngày 2, Câu 6). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và có tâm đường tròn nội tiếp I. Kẻ phân giác BB', CC' của tam giác ABC, trong đó $B', C' \in (O)$. Gọi d là đường thẳng qua I, vuông góc OI. Giả sử d cắt các đoạn thẳng $AB, BC, B'C'$ lần lượt ở E, D, H và cắt tia đối của tia AC ở F. Trên (O) lấy điểm L sao cho AL song song với d. Gọi A' là trung điểm của cung lớn BC của (O) và $A'I$ cắt lại (O) tại K.

(a) Chứng minh rằng $AH = HI = ID = DL = DK$.

(b) Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Lấy điểm G trên (O) sao cho HG vuông góc IJ và lấy các điểm R, S trên (O) sao cho $GI = GR = GS$. Giả sử rằng A, G nằm khác phía nhau so với đường thẳng RS. Chứng minh rằng AG, RS cắt nhau tại một điểm trên (J).



Hình cho câu a): đường màu đỏ là d.

Lời giải. **a)**

- Vì B', C' là điểm chính giữa các cung AC, AB nên $B'A = B'I$, $C'A = C'I$; do đó $B'C'$ là trung trực của AI, suy ra $HA = HI$.
- I là trung điểm của dây cung của (O) nằm trên d (vì $d \perp OI$). Áp dụng định lí con bướm cho hai dây BB', CC' đi qua I, ta có $IH = ID$.
- Vì $AL \parallel d \perp OI$, đường thẳng OI là trục đối xứng chung của AL và HD; do đó $HDLA$ là hình thang cân và $DL = AH$.
- Phép đối xứng qua OI biến $D \mapsto H$, $L \mapsto A$ nên $\angle DIL = \angle HIA = \angle HAI = \angle IAL$ (vì $HA = HI$ và $HI \parallel AL$). Tam giác DIL cân tại D nên $\angle IDL = 180^\circ - 2\angle IAL = 2(90^\circ - \angle IAL) = 2\angle A'AL = 2\angle A'KL = 2\angle IKL$, ở đây dùng $AA' \perp AI$. Vậy D là tâm đường tròn (KIL), nên $DK = DL = DI$.

Kết hợp lại, $AH = HI = ID = DL = DK$.

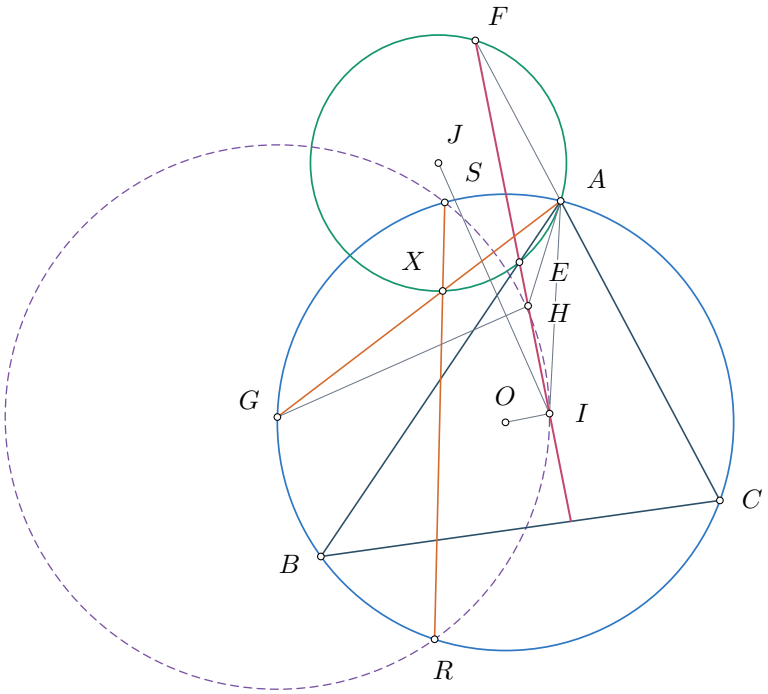
b) Ta có $\angle AFH = \angle IAC - \angle AIH = \angle IAB - \angle HAI = \angle HAE$, nên HA tiếp xúc với (J). Do đó $HJ^2 = HA^2 + AJ^2$, và vì $HA = HI$, $HJ^2 - HI^2 = AJ^2$.

Gọi $T = GH \cap IJ$. Vì $HG \perp IJ$,

$$GJ^2 - GI^2 = TJ^2 - TI^2 = HJ^2 - HI^2 = AJ^2,$$

tức $\mathcal{P}_{(J)}(G) = GJ^2 - AJ^2 = GI^2$.

Gọi $X = RS \cap AG$. Vì RS là trục đẳng phương của (O) và đường tròn $(G; GI)$, $\overline{XA} \cdot \overline{XG} = XG^2 - GI^2$, suy ra $GI^2 = XG^2 - \overline{XA} \cdot \overline{XG} = \overline{GX} \cdot \overline{GA}$. Vậy $\overline{GX} \cdot \overline{GA} = \mathcal{P}_{(J)}(G)$, và vì $A \in (J)$ nên $X \in (J)$.



Hình cho câu b): AG và RS cắt nhau tại $X \in (J)$.

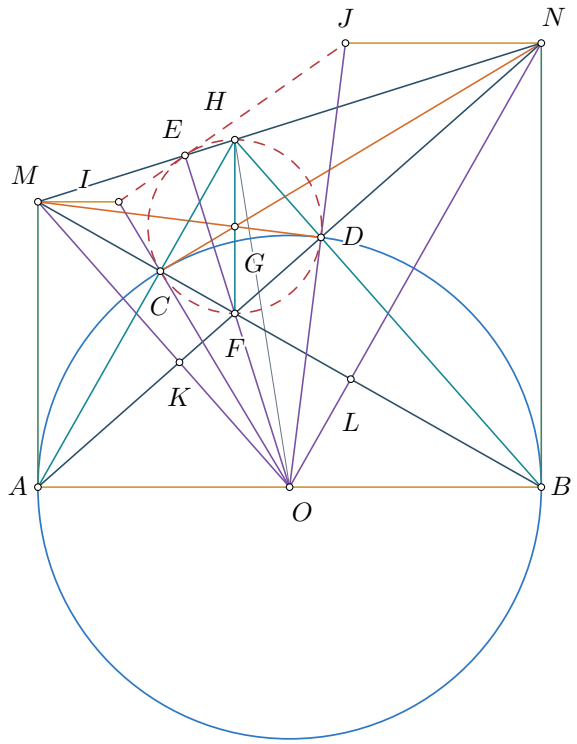
Cách khác cho câu a). Gọi Q là trung điểm cung nhỏ BC, $N = AA' \cap ID$, $P = KQ \cap ID$. Áp dụng định lí con bướm cho tứ giác $AA'QK$ nội tiếp (O) được $IN = IP$; áp dụng cho $B'C'BC$ được $ID = IH$. Kết hợp với $B'C'$ là trung trực của IA và tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông, ta thu được kết luận. □

6 TP. Cần Thơ

Bài toán 6.1 (Bài 6). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. C là điểm trên nửa đường tròn sao cho $CA < CB$. Tiếp tuyến Ax của (O) cắt BC tại M. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại N. Gọi F là giao điểm của AN và BM, D là giao điểm thứ hai của AN và (O). Đường thẳng d đi qua M, song song với AB, cắt OC tại I. Đường thẳng d' đi qua N, song song với AB, cắt OD tại J. Gọi E là giao điểm của MN và OF.

(a) Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của (O) và ba điểm I, J, E thẳng hàng.

(b) Chứng minh rằng C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.



Lời giải. **a)** Do tứ giác $ACDB$ là tứ giác điều hòa nên MD cũng là tiếp tuyến của (O).

Lấy K, L lần lượt là trung điểm AD, BC. Ta thực hiện biến đổi

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = -\frac{\overline{KM}}{\overline{KO}} \cdot \frac{\overline{LO}}{\overline{LN}} = -\frac{AM^2}{AO^2} \cdot \frac{BO^2}{BN^2} = -\frac{AM^2}{AB^2} \cdot \frac{BA^2}{BN^2} = -\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{DN}} = -\frac{\overline{MI}}{\overline{BO}} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{NJ}} = \frac{\overline{MI}}{\overline{NJ}}.$$

Suy ra ba điểm I, E, J thẳng hàng.

b) Dễ thấy F là trực tâm tam giác OMN nên $OF \perp MN$ tại E. Lấy H là giao điểm của AC và BD. Áp dụng định lí Pascal cho bộ điểm

$$\begin{pmatrix} ADB \\ BCD \end{pmatrix}$$

ta có ba điểm M, N, H thẳng hàng. Bởi vậy mà H, E, C, F, D nằm trên đường tròn đường kính HF có tâm G là trung điểm HF. □

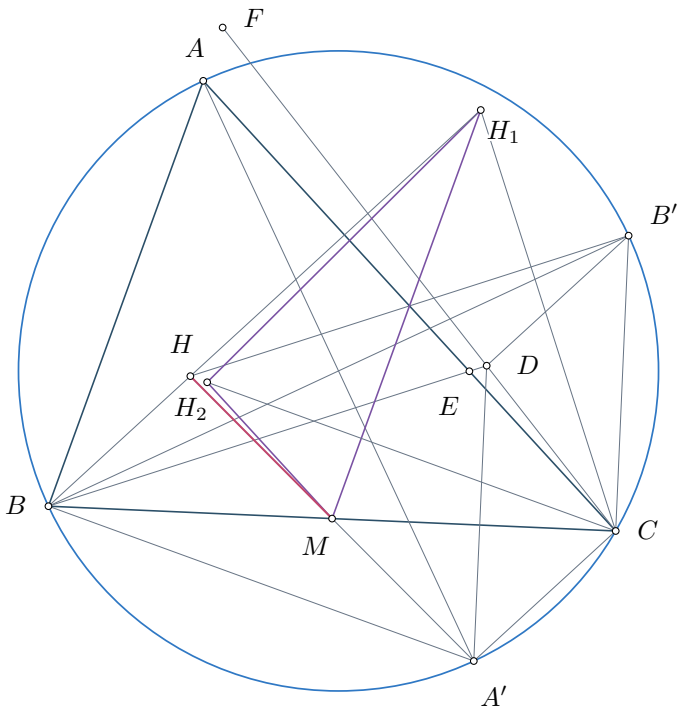
Nhận xét. Ta còn chứng minh được (G) là đường tròn nội tiếp tam giác OIJ; OH đi qua trung điểm IJ.

7 TP. Đà Nẵng

Bài toán 7.1 (Ngày 1, Câu 4; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Dựng hai đường kính AA' và BB' của đường tròn (O) và điểm D sao cho $A'CB'D$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là giao điểm của BD và AC, F là giao điểm của CD và AB. Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của hai tam giác BEC và BFC.

(a) Chứng minh hai tam giác ABC và MH_1H_2 có cùng trực tâm.

(b) Đường thẳng BC cắt hai đường thẳng $A'D, H_1H_2$ lần lượt tại K, T. Gọi S, G, I lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (MH_2, KH_1), (KH_2, MH_1) và (SG, H_1H_2). Gọi X là hình chiếu vuông góc của G lên ST. Chứng minh bốn điểm S, X, I và trung điểm của đoạn thẳng H_1H_2 cùng nằm trên một đường tròn.



Hình cho câu a): H là trực tâm chung của ABC và MH_1H_2.

Lời giải. **a)** Gọi H là trực tâm tam giác ABC; N, P là trung điểm của AC, AB. Quen thuộc, $AHCB'$ và $BHCA'$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AH}$, tức $AHA'D$ là hình bình hành; do đó O là trung điểm của HD. Vì O cũng là trung điểm BB' nên $BHB'D$ là hình bình hành, suy ra $BD \parallel HB'$.

Vì H_1 là trực tâm tam giác BEC nên $CH_1 \perp BE \equiv BD$, suy ra $HB' \perp CH_1$; mà N là trung điểm của HB' nên $HN \perp CH_1$. Mặt khác $BH_1 \perp CE$, tức B, H, H_1 cùng nằm trên đường cao kẻ từ B,

nên $HH_1 \perp CN$. Vậy H là trực tâm tam giác CNH_1, suy ra $H_1N \perp CH$. Vì $MN \parallel AB \perp CH$ nên M, N, H_1 thẳng hàng. Tương tự M, P, H_2 thẳng hàng.

Cuối cùng, $HH_1 \perp AC \parallel MH_2$ và $HH_2 \perp AB \parallel MH_1$, nên H là trực tâm tam giác MH_1H_2.

b) Gọi J là trung điểm H_1H_2 và L là điểm đối xứng của H qua J; khi đó HH_1LH_2 là hình bình hành. Vì $HH_2 \perp MH_1$ và $HH_1 \perp MH_2$ nên $LH_1 \perp MH_1$, $LH_2 \perp MH_2$, tức

$$\angle LH_1M = \angle LH_2M = 90^\circ. \tag{1}$$

Hai tam giác $A'BH$ và H_1MH_2 có các cạnh tương ứng vuông góc ($A'H \perp H_1H_2$ vì $HM \perp H_1H_2$; $BH \perp MH_2$; $A'B \perp H_1M$), nên chúng đồng dạng và hai trung tuyến tương ứng vuông góc: $BM \perp MJ$ (vì M là trung điểm HA'). Mà $OM \perp BC$ nên J, O, M thẳng hàng. Vì J, O, M lần lượt là trung điểm của HL, HD, HA' nên L, D, A' thẳng hàng và $LA' \parallel JM \perp BC$. Do đó

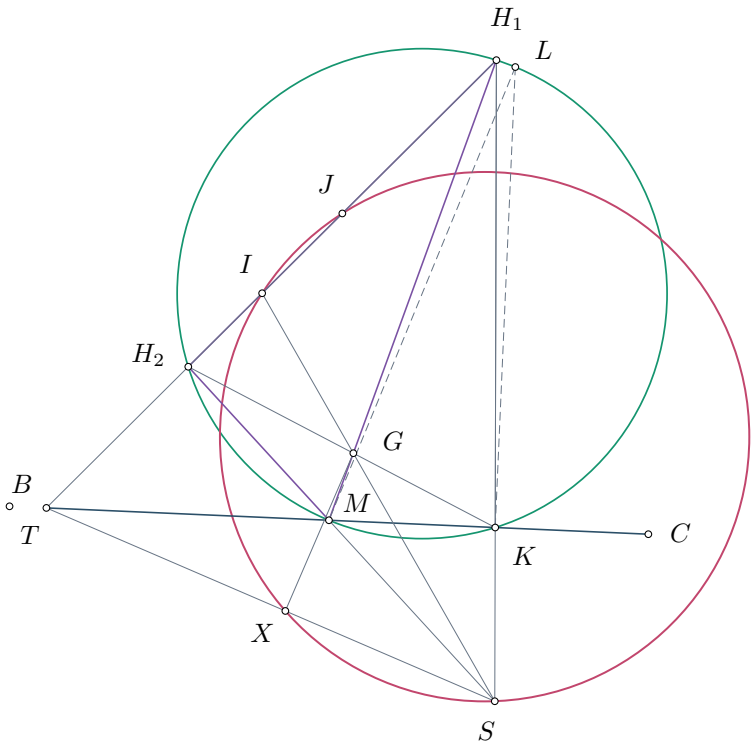
$$\angle LKM = 90^\circ. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), bốn điểm H_1, H_2, M, K cùng nằm trên đường tròn (O_1) đường kính LM.

Theo định lí Brocard cho tứ giác nội tiếp H_1H_2MK, O_1 là trực tâm tam giác GTS. Gọi $Y = SI \cap TO_1$ và $Z = TG \cap SO_1$. Vì $\angle IJO_1 = \angle IYO_1 = 90^\circ$ nên I, J, O_1, Y đồng viên, suy ra $\overline{TI} \cdot \overline{TJ} = \overline{TY} \cdot \overline{TO_1}$. Tương tự, các tứ giác YO_1ZG và $GZSX$ nội tiếp nên

$$\overline{TY} \cdot \overline{TO_1} = \overline{TG} \cdot \overline{TZ} = \overline{TX} \cdot \overline{TS}.$$

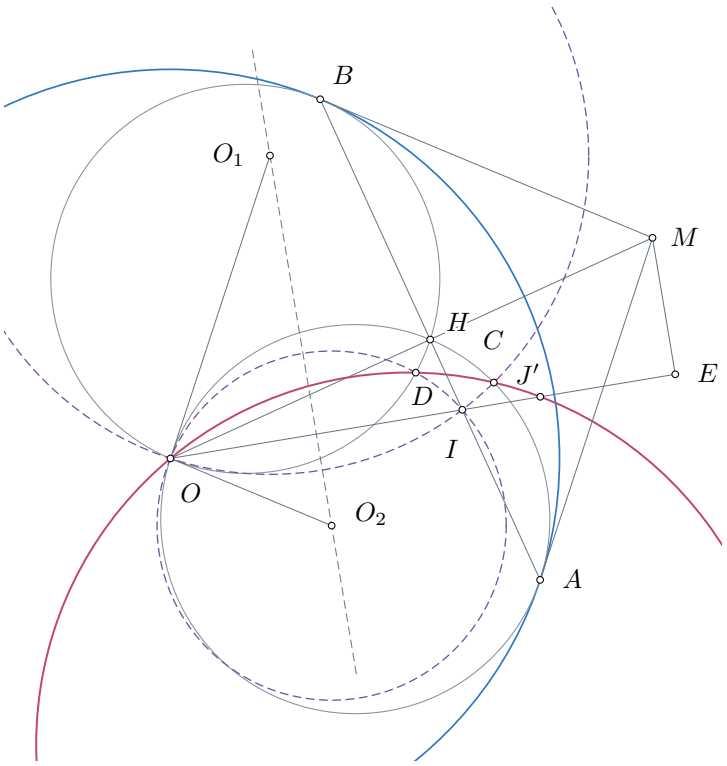
Vậy $\overline{TI} \cdot \overline{TJ} = \overline{TX} \cdot \overline{TS}$, tức S, X, I, J cùng nằm trên một đường tròn.



Hình cho câu b): H_1, H_2, M, K thuộc đường tròn đường kính LM.

□

Bài toán 7.2 (Ngày 2, Câu 5; 6,0 điểm). Cho đường tròn (O) cố định và điểm I cố định nằm trong đường tròn đó (I khác O). Một đường thẳng d thay đổi đi qua I nhưng không qua O và cắt (O) tại A, B sao cho I không trùng với trung điểm H của đoạn thẳng AB. Các tiếp tuyến tại O của đường tròn (OAH) và đường tròn (OBH) cắt đường trung trực của đoạn thẳng OI lần lượt tại O_1 và O_2. Đường tròn $(O_1; O_1O)$ cắt đường tròn (OAH) tại C (khác O) và đường tròn $(O_2; O_2O)$ cắt đường tròn (OBH) tại D (khác O). Chứng minh đường tròn (OCD) đi qua một điểm cố định khác O khi d thay đổi nhưng luôn đi qua I.



Đường tròn màu đỏ là (OCD), đi qua điểm cố định J'.

Lời giải. Gọi R là bán kính của (O), M là giao điểm của các tiếp tuyến tại A, B của (O), E là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng OI. Vì AB là đường đối cực của M và đi qua I, nên M nằm trên đường đối cực của I, tức E là ảnh của I qua phép nghịch đảo tâm O phương tích R^2: $OE = \dfrac{R^2}{OI}$. Vậy E cố định.

Vì O_1 thuộc trung trực của OI nên đường tròn $(O_1; O_1O)$ đi qua I, tức nó là (OIC); và vì O_1O tiếp xúc với (OAH) tại O nên (OIC) trực giao với (OAH). Tương tự (OID) trực giao với (OBH).

Xét phép nghịch đảo f tâm O, phương tích R^2:

$$A \mapsto A, \quad B \mapsto B, \quad H \mapsto M, \quad I \mapsto E, \quad C \mapsto C', \quad D \mapsto D'.$$

Khi đó $(OIC) \mapsto$ đường thẳng EC', $(OAH) \mapsto$ đường thẳng AM; do phép nghịch đảo bảo toàn góc, $EC' \perp AM$ tại C'. Tương tự $ED' \perp BM$ tại D'. Vì $f\big((OCD)\big)$ là đường thẳng $C'D'$, ta chỉ cần chứng minh $C'D'$ đi qua một điểm cố định.

Gọi F là hình chiếu của E trên AB và $J = C'D' \cap OE$. Năm điểm O, A, M, E, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OM, nên C', D', F nằm trên đường thẳng Simson của E đối với tam giác MAB. Ta có

$$\angle EFJ = \angle EFD' = \angle EBD' = \angle EBM = \angle EOM,$$

do các tứ giác $EFBD'$, $OBEM$ nội tiếp. Vì $OM \parallel EF$ (cùng vuông góc với AB) nên $\angle EOM = \angle OEF = \angle JEF$. Do đó tam giác JEF cân tại J, $JE = JF$. Tam giác EFI vuông tại F, nên J là trung điểm của IE.

Vậy $C'D'$ luôn đi qua điểm cố định J, và (OCD) luôn đi qua điểm cố định $J' = f(J) \neq O$. □

8 Đắk Lắk

Bài toán 8.1 (Câu 3). Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B, C và lần lượt cắt các đoạn thẳng AB, AC tại F, E (F khác A và B; E khác A và C). Gọi I là giao điểm của BE và CF; đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P.

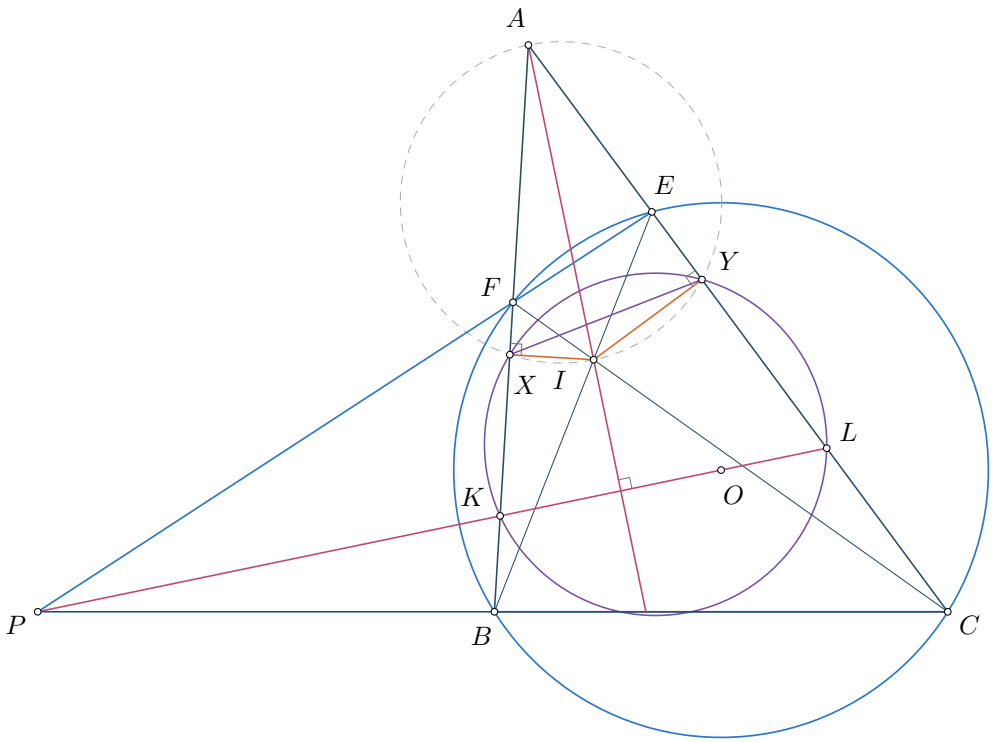
(a) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AB, AC; đường thẳng PO cắt AB, AC lần lượt tại K, L. Chứng minh X, Y, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

(b) Gọi D là giao điểm của AI và BC. Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại Q, R. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Lời giải. **a)** Theo định lí Brocard cho tứ giác nội tiếp $BCEF$, ta có $AI \perp PO$. Mặt khác, A, X, I, Y cùng thuộc đường tròn đường kính AI, nên

$$(KX, XY) = (AX, XY) = (AI, IY) = (KL, LY).$$

Suy ra X, Y, K, L cùng nằm trên một đường tròn.



Hình 1. $AI \perp PO$ và bốn điểm X, Y, K, L đồng viên.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Ta sẽ chứng minh (PQR) luôn đi qua M.

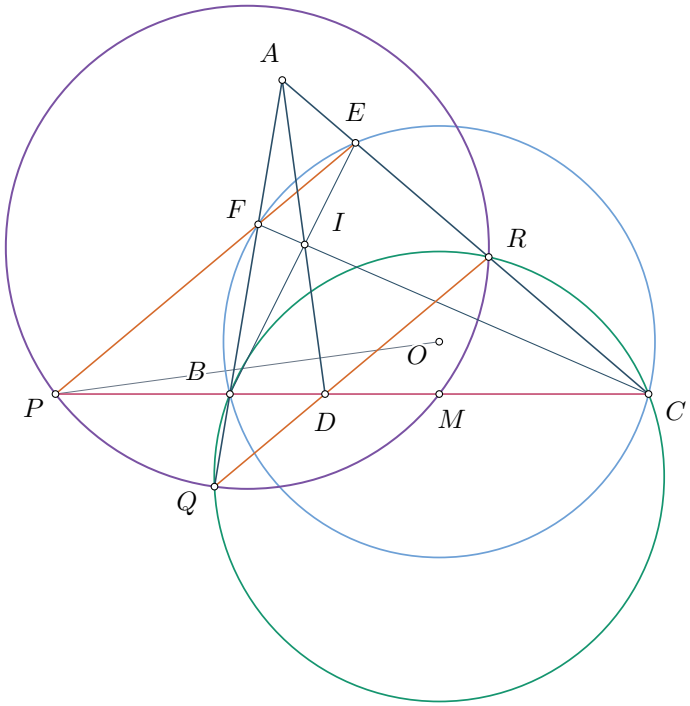
Vì $QR \parallel EF$ và B, C, E, F đồng viên nên

$$(BQ, QR) = (BF, FE) = (BC, CE) = (BC, CR).$$

Suy ra Q, R, B, C cùng thuộc một đường tròn. Mặt khác, tính chất tứ giác toàn phần $BCEF$ cho $(P, D; B, C) = -1$. Vì M là trung điểm của BC, ta có

$$\overline{DQ} \cdot \overline{DR} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DM} \cdot \overline{DP}.$$

Theo phương tích của D đối với (PQR), suy ra $M \in (PQR)$. Vậy M là điểm cố định cần tìm.



Hình 2. Đường tròn (PQR) luôn đi qua trung điểm M của BC.

□

Bài toán 8.2 (Câu 6). Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng vuông góc với BC tại trung điểm M của BC cắt AB, AC lần lượt tại Y, X.

(a) Gọi I, r' lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đường kính XY. Chứng minh $OI^2 = R^2 + r'^2$.

(b) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt OM tại P. Đường thẳng qua I song song với AO cắt đường thẳng qua P song song với BC tại Z. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh H, M, Z thẳng hàng.

Lời giải. Gọi A' là điểm đối tâm của A trên (O).

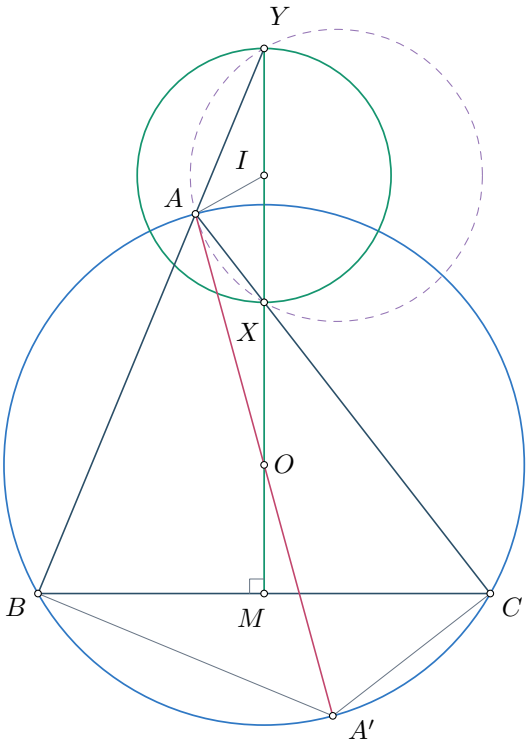
a) Vì $AB \perp BA'$ và $BC \perp YX$, ta có

$$(OA, AX) = (AA', AC) = (BA', BC) = (AB, YX) = (AY, YX).$$

Do đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (AXY) tại A. Áp dụng phương tích của O đối với (AXY) và đường tròn đường kính XY, được

$$R^2 = OA^2 = OX \cdot OY = OI^2 - r'^2.$$

Vậy $OI^2 = R^2 + r'^2$.



Hình a). Đường tròn (AXY) được vẽ bằng nét đứt.

b) Vì $BH \parallel CA'$ và $CH \parallel BA'$, tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, nên M là trung điểm của HA'. Mặt khác, hai tam giác AXY và HBC đồng dạng với các cạnh tương ứng vuông góc. Do đó hai trung tuyến AI, HM cũng vuông góc. Gọi $N = AI \cap HM$. Khi đó $AN \perp NA'$, nên $N \in (O)$.

Gọi Z_0 là giao điểm của HM với đường thẳng qua P song song BC. Ta sẽ chứng minh $IZ_0 \parallel OA$, từ đó $Z_0 = Z$.

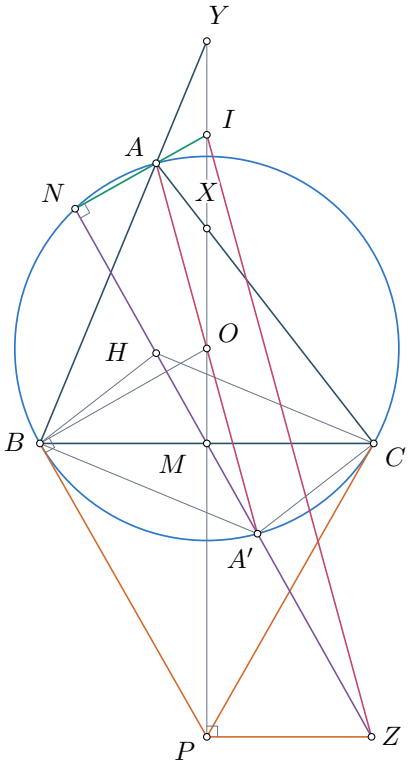
Cách 1. Đồng dạng và phương tích. Tam giác OBP vuông tại B, có đường cao BM; đồng thời phương tích của M đối với (O) cho

$$MO \cdot MP = MB^2 = MN \cdot MA'.$$

Vì $\triangle MNI \backsim \triangle MPZ_0$, suy ra

$$\frac{MZ_0}{MA'} = \frac{MI \cdot MP}{MN \cdot MA'} = \frac{MI}{MO}.$$

Theo định lí Thales đảo trong tam giác MOA', ta có $IZ_0 \parallel OA' \parallel OA$. Vậy H, M, Z thẳng hàng.



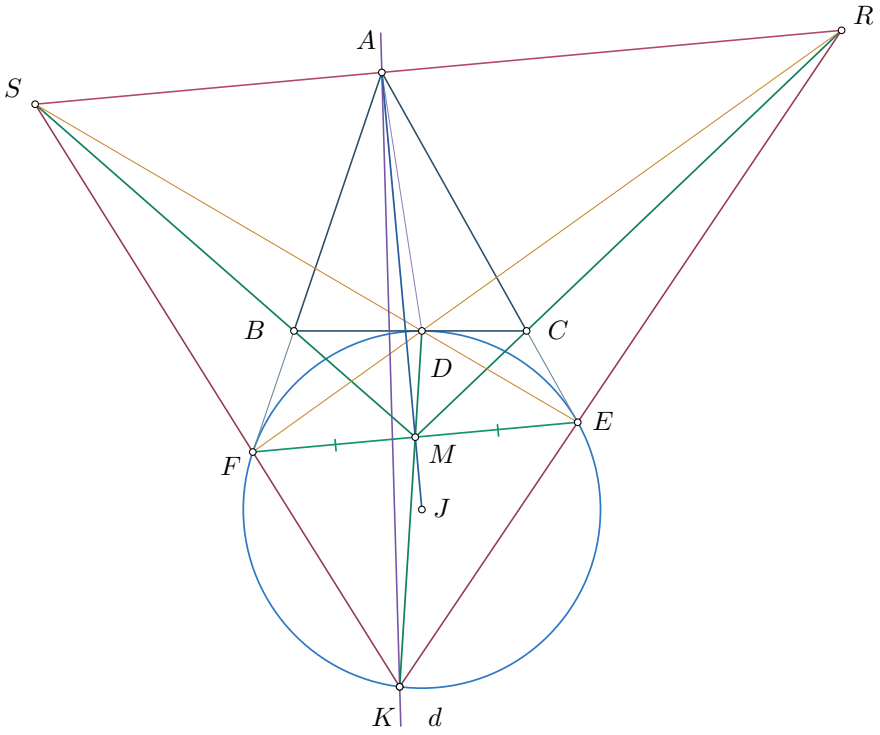
Cách 2. Rút gọn theo hướng điều hòa. Vì PB, PC là hai tiếp tuyến của (O) và $M \in BC$, đường đối cực của M đi qua P và vuông góc với OM, tức là đường thẳng PZ_0. Do đó $(N, A'; M, Z_0) = -1$. Chiếu từ I lên AA', với I, N, A thẳng hàng, I, M, O thẳng hàng và O là trung điểm của AA', suy ra $IZ_0 \parallel AA' \parallel OA$. Vậy $Z_0 = Z$, hay H, M, Z thẳng hàng. □

9 TP. Đồng Nai

Bài toán 9.1 (Bài 6). Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F.
Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF; đường thẳng MB cắt đường thẳng DE tại S và đường thẳng MC cắt đường thẳng DF tại R.

(a) Chứng minh ba điểm A, R, S thẳng hàng.

(b) Gọi d là đường thẳng đối xứng với đường thẳng AD qua đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Chứng minh các đường thẳng RE, SF và d đồng quy.



Lời giải. **a)** Kí hiệu đường tròn bàng tiếp góc A là (J). DM cắt lại (J) tại điểm thứ hai là K. KE cắt FD tại R'. Áp dụng định lí Pascal cho bộ điểm

$$\begin{pmatrix} DKE \\ EFD \end{pmatrix}$$

ta có ba điểm M, C, R' thẳng hàng nên $R' \equiv R$. Tương tự ta có KF, DE, BM đồng quy tại S. Cuối cùng áp dụng Pascal cho bộ điểm

$$\begin{pmatrix} EKF \\ FDE \end{pmatrix}$$

có được S, A, R thẳng hàng.

b) Ta có

$$\overline{MD} \cdot \overline{MK} = \overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MA} \cdot \overline{MJ}$$

nên bốn điểm A, D, J, K đồng viên. Kết hợp $JD = JK$ nên d chính là đường thẳng AK. □

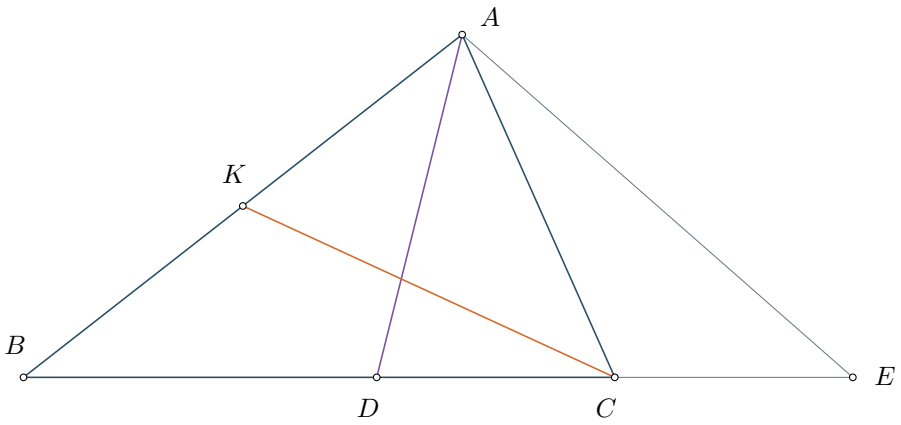
> **Nhận xét.** Với cách chứng minh ở câu a) chúng ta thấy chỉ cần điều kiện điểm M nằm trên EF thì A, R, S thẳng hàng. Với M là trung điểm EF thì chứng minh được AR là phân giác ngoài góc BAC. Thật vậy,
>
> $$-1 = D(AB, EF) = D(AB, SF) = S(AB, DF) = S(AM, EF)$$
>
> nên $SA \parallel EF$.

10 Đồng Tháp

Bài toán 10.1 (Ngày 1, Câu 2; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AC < BC$) có đường phân giác AD ($D \in BC$). Gọi K là trung điểm của AB, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $\angle ACK = \angle AEC$. Giả sử $CD = CE$.

(a) Chứng minh rằng $DA = DB$.

(b) Gọi J là điểm thuộc đoạn BC sao cho $CA = CJ$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi L là giao điểm của DK và AJ, $M \neq C$ là giao điểm thứ hai của đường thẳng CL với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, G là giao điểm của IM và AB. Chứng minh rằng các điểm B, L, D, M, G cùng thuộc một đường tròn.



Hình cho câu a).

Lời giải. **a)** Gọi A' là điểm đối xứng của A qua C. Vì C là trung điểm chung của AA' và DE nên $ADA'E$ là hình bình hành, do đó $\angle AEC = \angle A'DC$. Vì CK là đường trung bình của tam giác ABA' nên $CK \parallel A'B$, suy ra $\angle ACK = \angle CA'B$. Từ giả thiết, $\angle CA'B = \angle CDA'$; hai tam giác $CA'D$ và CBA' có chung góc C nên đồng dạng, suy ra $CA^2 = CA'^2 = CD \cdot CB$.

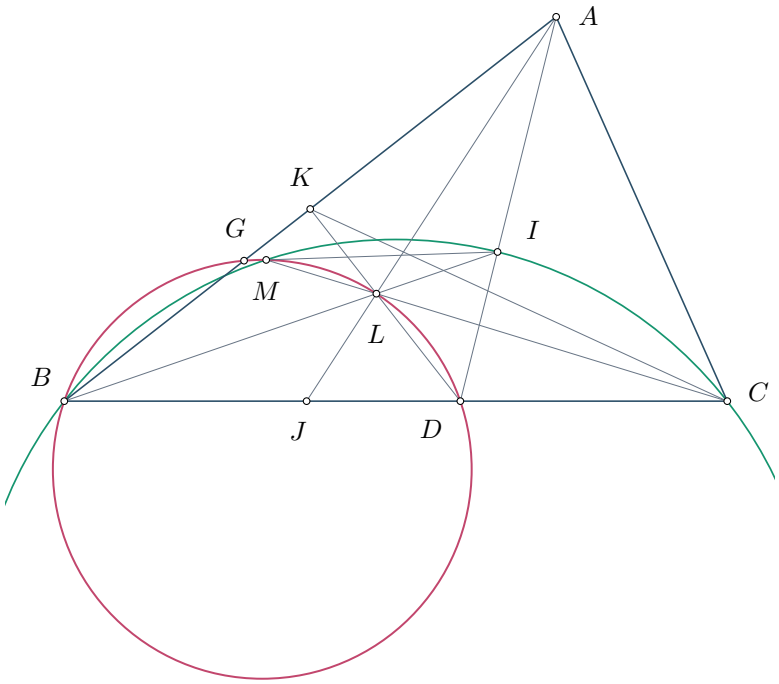
Do đó $\triangle CAD \backsim \triangle CBA$, nên $\angle CAD = \angle CBA$. Suy ra $\angle BAD = \angle CAD = \angle ABD$, tức $DA = DB$.

b) Vì $CA = CJ$ nên $\angle JAD = \angle CAJ - \angle CAD = \angle CJA - \angle ABD = \angle JAB$, tức AL là phân giác của góc DAB. Tam giác ABD cân tại D nên DK là phân giác góc ADB. Vậy L là tâm nội tiếp tam giác ABD, và vì $\angle ABD = \angle ABC$ nên B, L, I thẳng hàng.

Ta có

$$\angle CDL = 180^\circ - \angle KDB = 90^\circ + \angle ABD = 90^\circ + \angle BAD = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle BAC = \angle BIC = \angle BMC,$$

nên B, L, D, M đồng viên. Mặt khác $\angle GML = \angle IMC = \angle IBC = \angle ABI = \angle GBL$, nên B, L, M, G đồng viên. Vậy năm điểm B, L, D, M, G cùng thuộc một đường tròn.



Hình cho câu b).

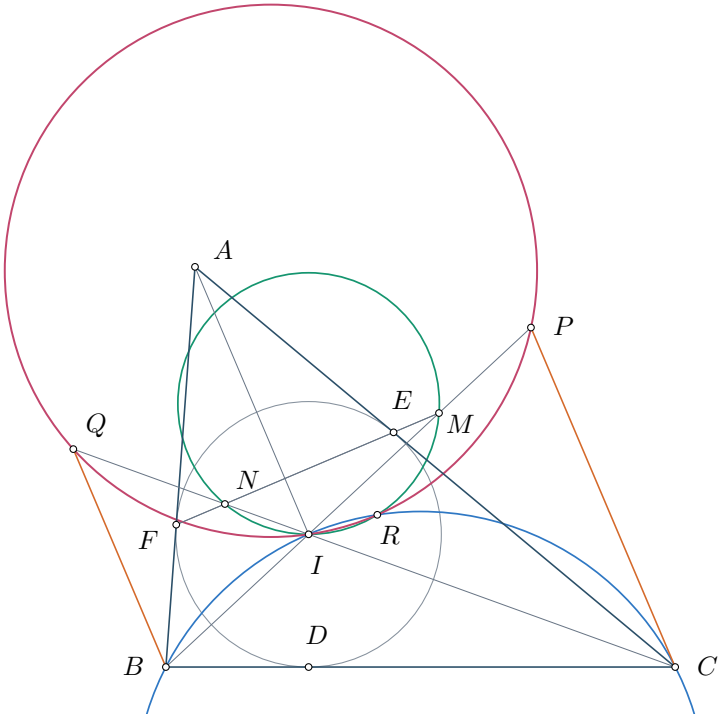
Cách khác cho câu a). Kẻ đường đối trung CT của tam giác ABC ($T \in AB$). Khi đó $\angle BCT = \angle ACK = \angle AEC$ nên $CT \parallel AE$, và theo định lí Thales cùng tính chất đường đối trung, $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{TA}{TB} = \dfrac{CA^2}{CB^2}$, suy ra $CA^2 = CB \cdot CE = CB \cdot CD$.

Cách khác cho câu b). Vì tính đối xứng qua DK có $LA = LB$, $LI = LJ$. Do $BMIC$ nội tiếp, $\overline{LA} \cdot \overline{LJ} = \overline{LB} \cdot \overline{LI} = \overline{LM} \cdot \overline{LC}$, nên $ACJM$ nội tiếp; vì $CA = CJ$ nên $CA^2 = CL \cdot CM$. Kết hợp $CA^2 = CB \cdot CD$ được $CL \cdot CM = CB \cdot CD$, tức $BDLM$ nội tiếp. □

Bài toán 10.2 (Ngày 2, Câu 2; 7,0 điểm). Cho tam giác ABC [không cân, $\angle BAC \neq 90°$] có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. BI, CI, DI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M, N, K. Các điểm P, Q nằm trên BM, CN sao cho CP và BQ cùng song song với AI.

(a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IBC, IMN, IPQ có một điểm chung khác I.

(b) Gọi S là giao điểm của EF và BC, T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E và F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh rằng đường thẳng qua S vuông góc với TK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.



Hình cho câu a): ba đường tròn $(IBC), (IMN), (IPQ)$ cùng đi qua R.

Lời giải. **a)** *Bước 1:* $\angle BMC = \angle BNC = 90°$. Ta có $\angle EMI = \angle AFE - \angle ABI = 90° - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = \angle ECI$, nên C, E, M, I đồng viên. Mà C, E, I, D thuộc đường tròn đường kính CI, nên $\angle IMC = 90°$, tức $\angle BMC = 90°$. Tương tự $\angle BNC = 90°$.

Bước 2: $\dfrac{BM}{BP} = \dfrac{CN}{CQ}$. Gọi J, L là trung điểm của BC, MN và $X, Y \in BC$ sao cho $XN \parallel YM \parallel AI$. Theo bước 1, $JM = JN$ nên $JL \perp MN$; mà $MN \perp AI$ nên $JL \parallel AI$. Trong hình thang $XYMN$ có $XN \parallel JL \parallel YM$ và L là trung điểm MN, nên J là trung điểm XY, do đó $BY = CX$. Suy ra

$$\frac{BM}{BP} = \frac{BY}{BC} = \frac{CX}{CB} = \frac{CN}{CQ}.$$

Bước 3. Gọi R là giao điểm khác I của (IBC) và (IMN). Vì $I = BM \cap CN$, R là tâm phép vị tự quay biến $B \mapsto C$, $M \mapsto N$; theo bước 2, phép vị tự quay này biến $P \mapsto Q$, nên (IPQ) cũng đi qua R.

b) Theo câu a), M, N lần lượt là chân đường cao kẻ từ C, B của tam giác IBC, còn D là chân đường cao kẻ từ I. Do đó (DMN) là đường tròn Euler (ω) của tam giác IBC, đi qua trung điểm J của BC. Gọi O_9 là tâm của nó; ta cần chứng minh KT là đường đối cực của S đối với (ω), khi đó $SO_9 \perp KT$.

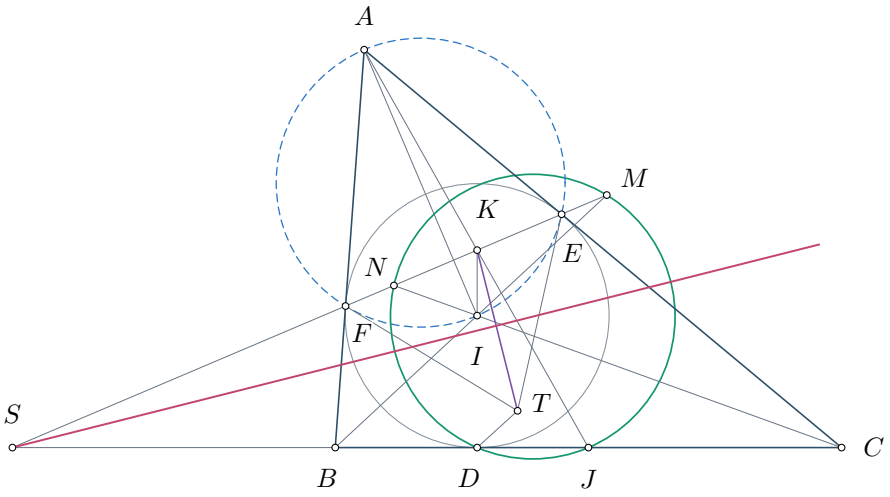
Nhận xét: A, K, J thẳng hàng. Qua K kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại B', C'. Từ các tứ giác nội tiếp $B'KIF$, $C'KIE$, $\angle IB'C' = \angle IFE = \angle IEF = \angle IC'B'$, nên $IB' = IC'$; do $IK \perp B'C'$, K là trung điểm $B'C'$. Theo bổ đề hình thang, A, K, J thẳng hàng.

K liên hợp với S. Theo Ceva, AD, BE, CF đồng quy nên $(S, D; B, C) = -1$. Chiếu từ I lên EF (với $ID \mapsto K$, $IB \mapsto M$, $IC \mapsto N$) được $(S, K; M, N) = -1$; vì MN là một dây của (ω), K nằm trên đường đối cực của S.

T nằm trên đường đối cực của S. Gọi $V = EF \cap AI$ và $W = KT \cap BC$. Đường tròn (AEF) có đường kính AI và T là cực của EF, nên $(V, T; I, A) = -1$. Chiếu từ K đường thẳng AI lên

BC: $V \mapsto S$ (vì $V \in EF$), $T \mapsto W$, $I \mapsto D$ (vì $K \in DI$), $A \mapsto J$ (theo nhận xét). Do đó $(S, W; D, J) = -1$; vì DJ là một dây của (ω), W nằm trên đường đối cực của S.

Vậy đường đối cực của S đối với (ω) là $KW \equiv KT$, nên $SO_9 \perp KT$, tức đường thẳng qua S vuông góc với TK đi qua tâm (DMN).



Hình cho câu b): đường màu đỏ qua S vuông góc với TK, đi qua tâm của (DMN).

Cách khác cho câu a). Ta dùng tỉ số phương tích. Giả sử $(IBC), (IPQ)$ cắt nhau tại I, G; do $AI \parallel CP$ nên $\angle CPM = \angle AIM = 90^\circ - \frac{C}{2}$, từ đó

$$\frac{\mathcal{P}_{(IPQ)}(M)}{\mathcal{P}_{(IBC)}(M)} = \frac{\overline{MP} \cdot \overline{MI}}{\overline{MB} \cdot \overline{MI}} = -\frac{CM \cot \angle CPM}{CM \cot \angle CBM} = -\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2},$$

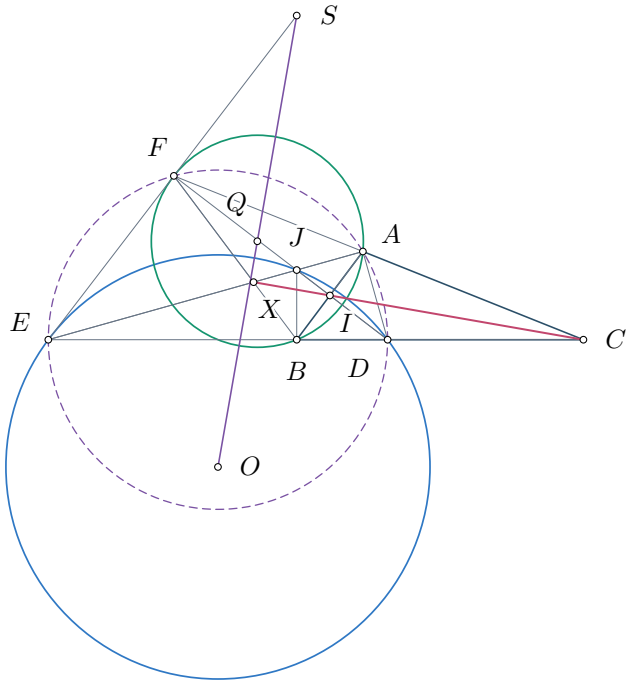
và tỉ số tương tự tại N cũng bằng $-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$. Vậy M, N nằm trên cùng một đường tròn của chùm sinh bởi $(IBC), (IPQ)$ đi qua I, tức (IMN) đi qua G. □

11 Gia Lai

Bài toán 11.1 (Câu 2). Cho tam giác ABC không cân có D, E tương ứng là chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc BAC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AC tại F khác A. Giả sử AB và DF cắt nhau tại I. Gọi J là giao điểm của AE và DF; S là giao điểm của AD và EF; Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF.

(a) Chứng minh rằng các điểm A, B, D, J cùng thuộc một đường tròn và CI vuông góc SQ.

(b) Giả sử AE và BF cắt nhau tại X. Chứng minh rằng ba điểm C, I, X thẳng hàng.



Đường tròn xanh dương là (JED), xanh lá là (ABF); đường màu đỏ là trục đẳng phương CIX.

Lời giải. **a)** Vì AD, AE là hai phân giác trong và ngoài của góc A nên $AD \perp AE$, do đó DE là đường kính của (ADE) và $\angle DFE = 90°$, tức $EF \perp DJ$. Trong tam giác JED, $DA \perp JE$ và $EF \perp JD$ là hai đường cao, nên S là trực tâm và A, F là chân hai đường cao.

Khẳng định 11.1. B là chân đường cao kẻ từ J của tam giác JED.

Gọi B' là chân đường cao kẻ từ J. Theo tính chất quen thuộc của tam giác trực tâm AFB' của tam giác JED, hai đường thẳng AF và AB' đối xứng nhau qua đường cao DA. Mặt khác DA là phân giác của góc BAC, nên đường thẳng đối xứng với $AF \equiv AC$ qua DA là AB. Do đó $AB' \equiv AB$, và $B' = AB \cap DE = B$.

Từ đó $\angle JBD = \angle JAD = 90°$, nên A, B, D, J cùng thuộc đường tròn đường kính DJ.

Gọi O là tâm (JED). Vì A, B, F là chân ba đường cao của tam giác JED, (ABF) là đường tròn Euler của tam giác này; do đó Q là tâm Euler và O, Q, S thẳng hàng trên đường thẳng Euler. Ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(O)}(C) &= \overline{CD} \cdot \overline{CE} = \overline{CF} \cdot \overline{CA} = \mathcal{P}_{(Q)}(C) && \text{(vì } AFDE \text{ nội tiếp)}, \\ \mathcal{P}_{(O)}(I) &= \overline{ID} \cdot \overline{IJ} = \overline{IB} \cdot \overline{IA} = \mathcal{P}_{(Q)}(I) && \text{(vì } ABDJ \text{ nội tiếp)}. \end{aligned}$$

Vậy CI là trục đẳng phương của (O) và (Q), nên $CI \perp OQ \equiv SQ$.

b) Vì B, F là chân các đường cao kẻ từ J, E nên J, E, B, F cùng thuộc đường tròn đường kính JE. Do đó

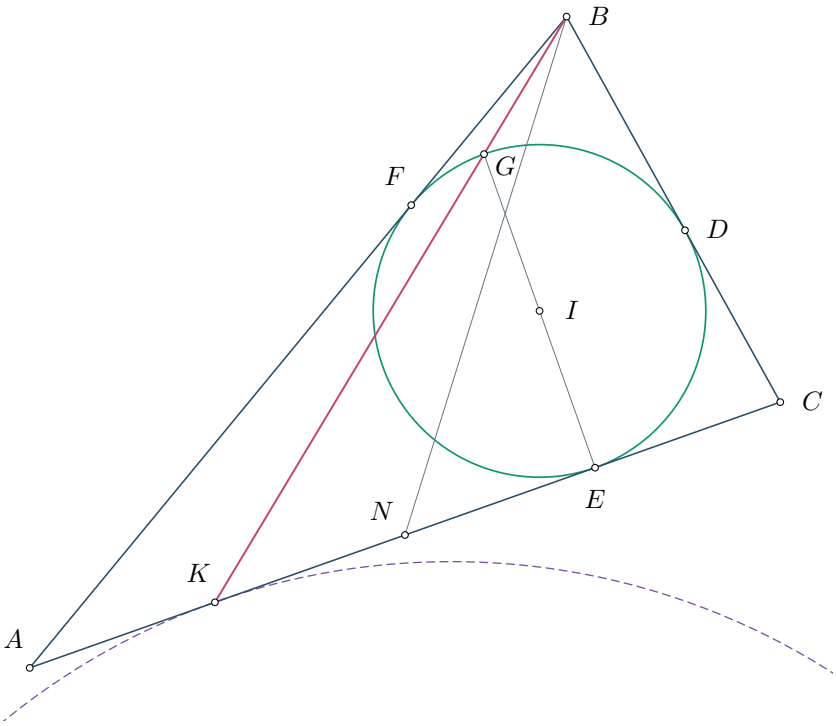
$$\mathcal{P}_{(O)}(X) = \overline{XE} \cdot \overline{XJ} = \overline{XB} \cdot \overline{XF} = \mathcal{P}_{(Q)}(X),$$

tức X cũng nằm trên trục đẳng phương CI. Vậy C, I, X thẳng hàng. □

Bài toán 11.2 (Ngày 2, Câu 5). Cho tam giác ABC nhọn và không cân. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng IE cắt đường tròn (I) tại điểm G khác E. BG cắt AC tại K. Gọi N là trung điểm của AC.

(a) Chứng minh rằng $NE = NK$.

(b) Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC theo thứ tự cắt các đường thẳng BE, BN, BG tại S, P, T khác B. Gọi M là trung điểm ST. Chứng minh rằng các điểm M, N, O, P cùng thuộc một đường tròn.



Hình cho câu a): K là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B với AC.

Lời giải. **a)** Vì $IE \perp AC$, tiếp tuyến của (I) tại G song song với AC và nằm về phía B. Phép vị tự tâm B biến (I) thành đường tròn bàng tiếp góc B biến tiếp tuyến này thành tiếp tuyến song song với AC gần B hơn của đường tròn bàng tiếp, chính là AC. Do đó G biến thành tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B với AC, và điểm này nằm trên BG, tức là K. Quen thuộc, $AE = CK = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$, nên N là trung điểm của EK, tức $NE = NK$.

b) Gọi U là giao điểm thứ hai của đường thẳng qua B song song với AC với (O).

Vì $BU \parallel AC$ và N là trung điểm chung của EK và AC, ta có hai chùm điều hòa

$$B(U, N; K, E) = -1, \qquad B(U, N; C, A) = -1.$$

Chiếu lên (O) (với $BN \mapsto P$, $BK \equiv BG \mapsto T$, $BE \mapsto S$):

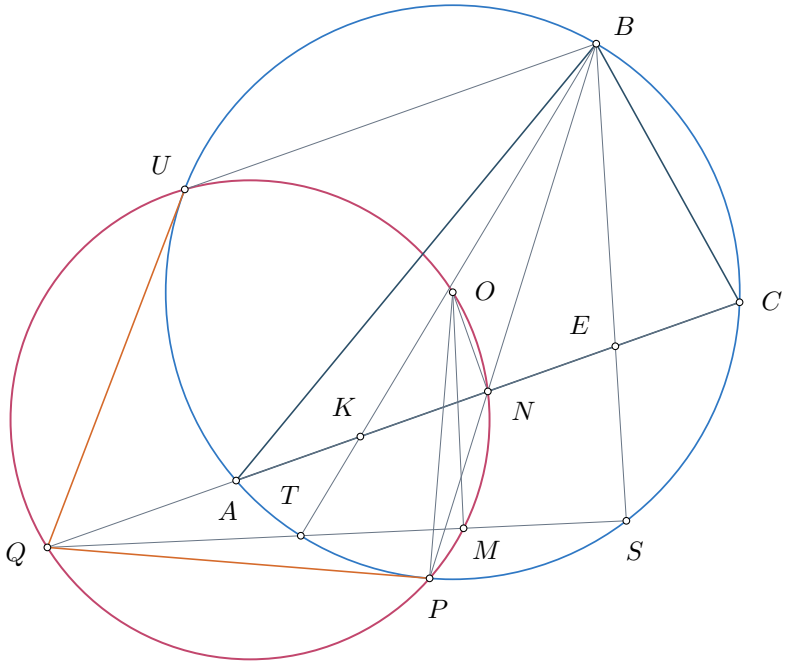
$$(U, P; T, S) = -1, \qquad (U, P; C, A) = -1,$$

tức $SPTU$ và $APCU$ là các tứ giác điều hòa. Do đó các tiếp tuyến của (O) tại U và P cắt nhau tại một điểm Q nằm trên cả ST và AC.

Vì M, N là trung điểm các dây ST, AC đi qua Q và QP là tiếp tuyến, ta có

$$\angle OMQ = \angle ONQ = \angle OPQ = 90^\circ.$$

Vậy M, N, O, P cùng thuộc đường tròn đường kính OQ.



Hình cho câu b): M, N, O, P nằm trên đường tròn đường kính OQ.

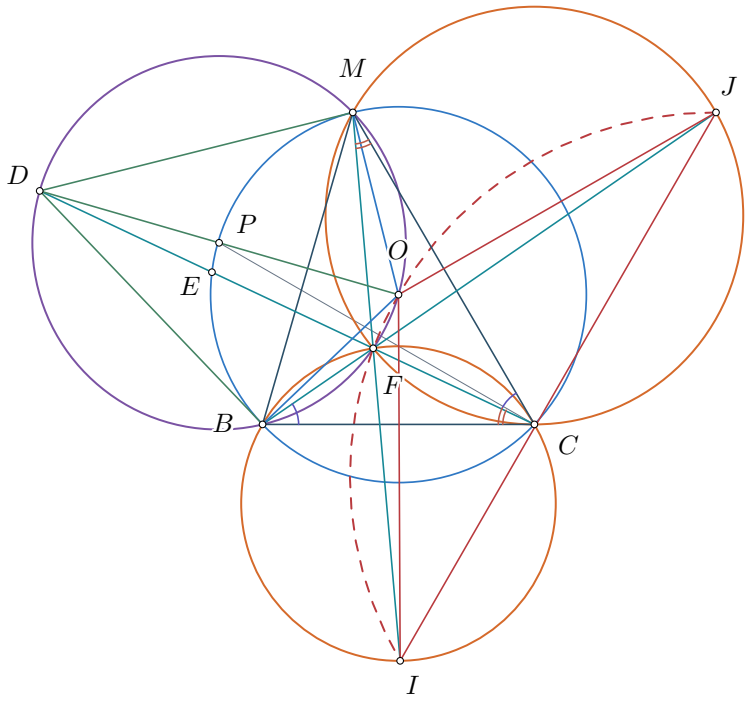
□

12 Hà Tĩnh

Bài toán 12.1 (Ngày 1). Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung không đi qua tâm. Điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho tam giác MBC nhọn. Tiếp tuyến tại M và B của (O) cắt nhau ở D. Đường thẳng CD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Lấy điểm F thuộc đoạn CE sao cho $\widehat{CMF} = \widehat{BCD}$. Gọi I là giao điểm thứ hai của MF và đường tròn (BCF), J là giao điểm thứ hai của BF và đường tròn (MCF).

(a) Chứng minh I, J, O, F cùng thuộc một đường tròn.

(b) Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD. Chứng minh $IJ \perp CP$.



Lời giải. **a)** Ta có

$$\angle MFD = \angle FMC + \angle FCM = \angle FCB + \angle FCM = \angle MCB = \angle MOD$$

nên tứ giác $MOFD$ nội tiếp.

Khi đó FD là phân giác của $\angle MFB$ hay nó là phân giác ngoài của hai góc MFJ và BFI, bởi vậy mà $CI = CB$ và $CM = CJ$. Từ đó suy ra $\triangle CIM = \triangle CBJ$ (c-g-c), kéo theo $MI = JB$.

Từ đây lại có được $\triangle IMO = \triangle JBO$ (c-g-c), suy ra $\angle OIM = \angle OJB$ nên tứ giác $OFIJ$ nội tiếp.

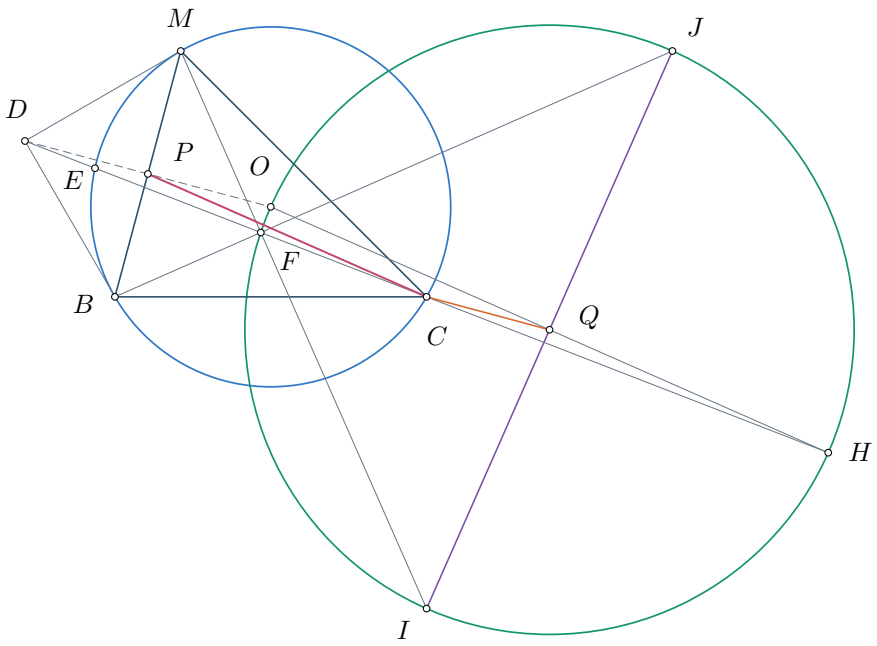
b) Ta dùng định lí 4 điểm, thực hiện biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} IP^2 - JP^2 = \mathcal{P}_{(P)}(I) - \mathcal{P}_{(P)}(J) &= \overline{IF}\cdot\overline{IM} - \overline{JF}\cdot\overline{JB} \\ &= \overline{IF}\cdot\overline{IM} - IM^2 + BJ^2 - \overline{JF}\cdot\overline{JB} \\ &= -\overline{MF}\cdot\overline{MI} + \overline{BF}\cdot\overline{BJ} \\ &= -MC^2 + BC^2 \\ &= CI^2 - CJ^2. \end{aligned}$$

Suy ra $CP \perp IJ$.

Cách khác cho câu b). Vì $\angle DMO = \angle DBO = 90^\circ$ nên tâm P của (MBD) là trung điểm của DO. Từ câu a), $\triangle MOI = \triangle BOJ$ nên $OI = OJ$, tức O là điểm chính giữa cung IJ của $(IJOF)$. Gọi H là giao điểm thứ hai của CD với $(IJOF)$; vì $\angle MFD = \angle BFD$ nên $\angle IFH = \angle JFH$, tức H là điểm chính giữa cung IJ không chứa F. Do đó $OH \perp IJ$ và tâm Q của $(IJOF)$ là trung điểm OH.

Ta có $\overline{BF}\cdot\overline{BJ} = BC^2$, tức B có cùng phương tích đối với $(IJOF)$ và đường tròn điểm C; tương tự với M. Vậy MB là trục đẳng phương của hai đường tròn này, nên $CQ \perp MB$; mà $OD \perp MB$ nên $CQ \parallel OD$. Trong tam giác DOH, Q là trung điểm OH và $CQ \parallel OD$ nên C là trung điểm DH; suy ra $CP \parallel OH \perp IJ$.



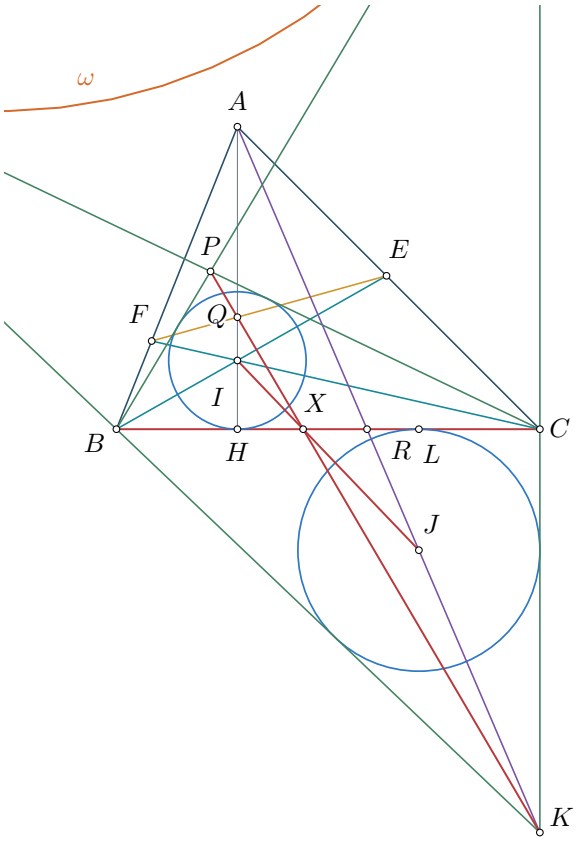
Hình cho cách khác của câu b): C là trung điểm DH.

□

Bài toán 12.2 (Ngày 2). Cho tam giác ABC nhọn có H là chân đường cao kẻ từ A. Lấy điểm P sao cho hai đường phân giác trong của góc PBC và PCB cắt nhau tại điểm I thuộc đoạn thẳng AH. Gọi E là giao điểm của BI và AC, F là giao điểm của CI và AB, Q là giao điểm của EF và AH. Lấy lần lượt hai đường thẳng đối xứng với BC qua AB và AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại K.

(a) Chứng minh đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PBC và đường tròn nội tiếp tam giác KBC tiếp xúc với cạnh BC tại cùng một điểm.

(b) Chứng minh P, Q, K thẳng hàng.



Lời giải. **a)** Nhận thấy BA, CA là phân giác (trong hoặc ngoài) $\angle CBK$, $\angle BCK$ nên A có thể là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác KBC. Do $\angle BAC < 90^\circ$ nên A là tâm đường tròn bàng tiếp. Nếu lấy điểm L đối xứng với H qua trung điểm BC. Khi đó L là tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác KBC với BC.

Lại có H là tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác PBC với BC nên đồng thời L cũng là tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PBC với BC.

b) Kí hiệu (J) là đường tròn nội tiếp tam giác KBC.

Khẳng định 12.1. Lấy R là giao điểm của KJ với BC. Khi đó QK, IJ, HR đồng quy.

Chúng ta có hai hàng điểm điều hòa quen thuộc

$$(AJ, RK) = (AI, HQ) = -1$$

nên IJ, HR, KQ đồng quy.

Khẳng định 12.2. PK, IJ, HR đồng quy.

Lấy X là giao điểm của IJ với HR thì X là tâm vị tự trong của hai đường tròn (I) và (J).

Chú ý

$$PB - PC = HB - HC = LC - LB = KC - KB$$

nên theo định lí Pitot, tồn tại một đường tròn ω tiếp xúc với bốn cạnh của tứ giác $PBKC$ (tiếp điểm nằm ngoài các đoạn thẳng).

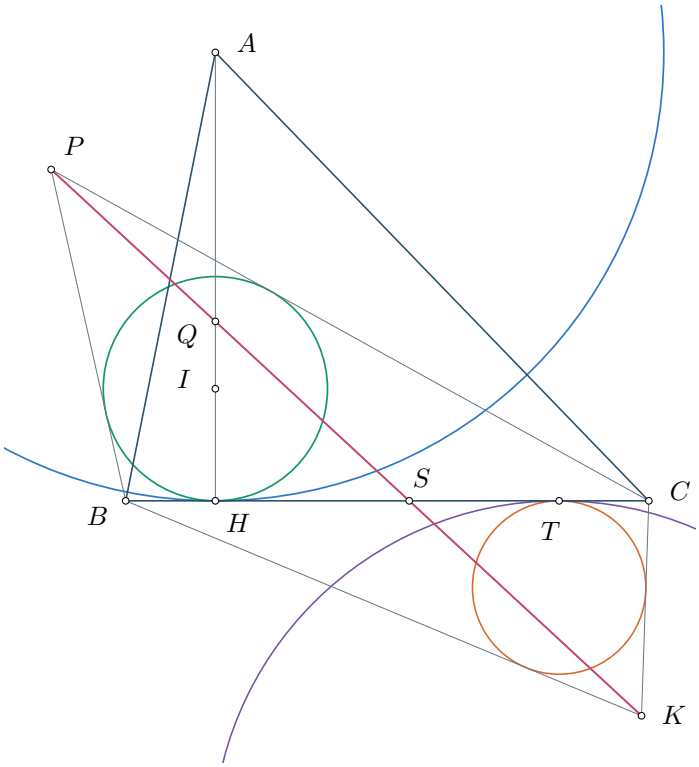
Khi này K, P lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong (hoặc đảo lại) của các cặp đường tròn (J) với ω; (I) với ω nên theo định lí Monge–D'Alembert ta có ba điểm P, X, K thẳng hàng.

Từ những nhận xét trên, ta có điều phải chứng minh.

Cách khác cho câu b). Kí hiệu (A) là đường tròn tâm A bán kính AH (đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác KBC), (I) là đường tròn tâm I bán kính IH (đường tròn nội tiếp tam giác PBC); (C_K), (C_P) lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác KBC và đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PBC, cùng tiếp xúc BC tại T (câu a).

- $(A), (I)$ tiếp xúc tại H; từ hàng điểm điều hòa $(A, I; Q, H) = -1$ (tứ giác toàn phần $BCEF$), Q là tâm vị tự trong của $(A), (I)$.
- K là tâm vị tự ngoài của $(A), (C_K)$; P là tâm vị tự ngoài của $(I), (C_P)$.
- Gọi $S, S' \in BC$ lần lượt là tâm vị tự trong của $(A), (C_P)$ và của $(I), (C_K)$. Từ các hệ thức $r_I \cdot r_P = BH \cdot CH$, $r_K \cdot r_A = CT \cdot BT$ và $BH = CT$, $CH = BT$ ta được $\dfrac{r_A}{r_P} = \dfrac{r_I}{r_K}$, nên $\dfrac{HS}{ST} = \dfrac{HS'}{S'T}$, tức $S \equiv S'$.

Áp dụng định lí Monge cho bộ ba $(A), (I), (C_K)$ được Q, S, K thẳng hàng; cho bộ ba $(A), (I), (C_P)$ được Q, S, P thẳng hàng. Vậy P, Q, K thẳng hàng.



Hình cho cách khác của câu b): Q, S cùng nằm trên PK.

□

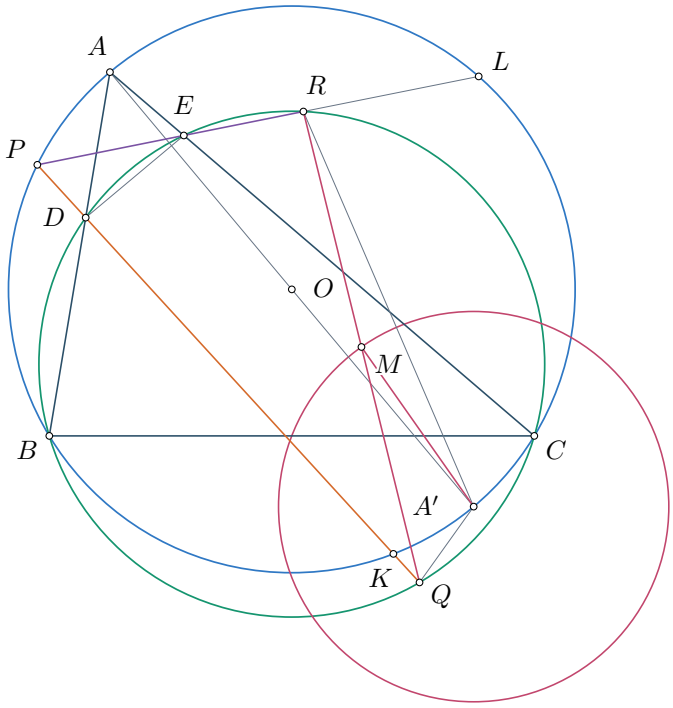
Nhận xét. Đây là bài toán G6, IMO Shortlist 2022.

13 TP. Hải Phòng

Bài toán 13.1 (Câu 3). Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ cố định, nội tiếp đường tròn (O). Một điểm D di chuyển trên cạnh AB, khác A và B. Đường tròn (BCD) cắt cạnh AC tại điểm E khác C.
Gọi P là giao điểm khác A của hai đường tròn (O) và (ADE).

(a) Chứng minh rằng đường thẳng PD luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Giả sử đường thẳng PD, PE cắt đường tròn (BCD) lần lượt tại các điểm Q, R khác D, E. Gọi M là trung điểm của đoạn QR. Chứng minh rằng điểm M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.



Lời giải. **a)** Lấy K, L, P' lần lượt đối xứng với C, B, P qua AO. Theo tính chất đối xứng

$$(PK, PA) = (P'A, P'C) = (PA, PC) = (BA, BC) = (ED, EC) = (PD, PA).$$

Do đó PD đi qua điểm K cố định. Tương tự, PE đi qua điểm L cố định.

b) Kẻ đường kính AA' của (O). Ta có

$$(QK, QC) = (QD, QC) = (ED, EC) = (PD, PA) = (A'K, A'A) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'K}, \overrightarrow{A'C})$$

nên A' là tâm (KQC). Tức là $A'K = A'Q$. Tương tự, $A'L = A'R$. Đồng thời

$$(KA', KQ) = (KA', KP) = (LA', LP) = (LA', LR).$$

Do đó hai tam giác cân $A'QK$ và $A'RL$ đồng dạng cùng hướng. Phép quay tâm A' biến Q thành K, R thành L nên trung điểm QR thành trung điểm KL. Do đó M chạy trên đường tròn $(A'; A'M')$ cố định với M' là trung điểm KL.

Nhận xét. Khi D, E lần lượt là chân các đường cao từ C, B thì Q, R lần lượt trở thành B, C, nên M là trung điểm của BC. Bởi vậy đường tròn cố định còn đi qua trung điểm của KL và trung điểm của BC. □

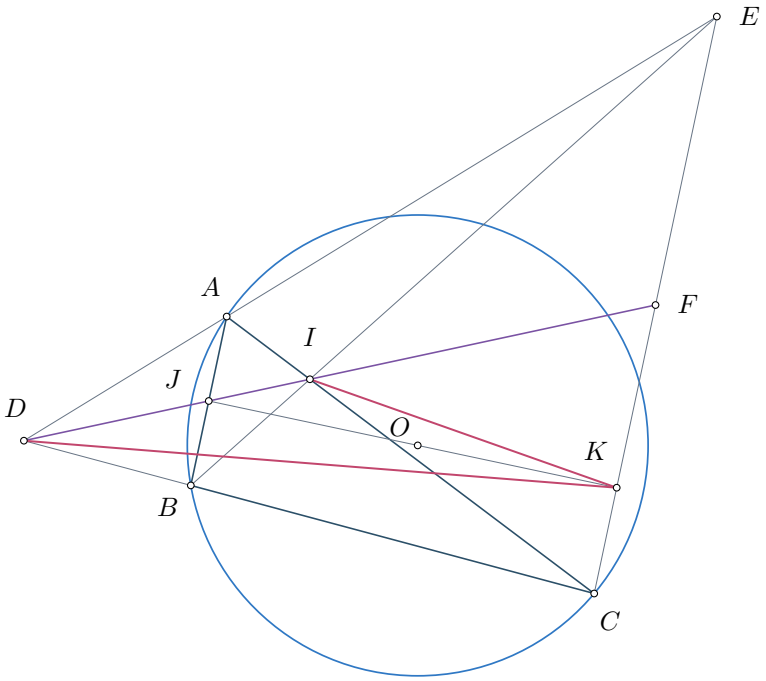
14 TP. Huế

Bài toán 14.1 (Câu 4). Cho tam giác ABC có góc A nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là điểm trên tia đối của tia BC, đường thẳng qua C và song song với AB cắt đường thẳng AD tại E. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AC và BE.

(a) Chứng minh đường thẳng ID đi qua trung điểm CE.

(b) K là điểm trên đường thẳng CE sao cho $AK = BK$. [Giả sử $K \neq O$.] Chứng minh OK là phân giác của góc IKD.

(c) Gọi M là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $DM = DC$ $(M \neq C)$, N là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE sao cho $DN = DE$ $(N \neq E)$ và P là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN. Chứng minh $\angle MDC = 2\angle MPI$.



Hình cho câu a), b).

Lời giải. Gọi J, F lần lượt là trung điểm của AB, CE và ℓ là đường thẳng qua D song song với AB.

a) Tứ giác $ABCE$ là hình thang $(AB \parallel CE)$, hai cạnh bên AE, BC cắt nhau tại D, hai đường chéo cắt nhau tại I. Theo bổ đề hình thang, D, I, J, F thẳng hàng; nói riêng ID đi qua trung điểm F của CE. Hơn nữa, chiếu hàng điểm D, I, J, F từ B lên đường thẳng CE, ta được lần lượt C, E, điểm vô cực theo phương CE (vì $BJ \equiv BA \parallel CE$) và F. Vì F là trung điểm CE, hàng điểm ảnh điều hòa, do đó $(D, I; J, F) = -1$.

b) Vì $KA = KB$ và $OA = OB$ nên K, O, J cùng nằm trên trung trực của AB, tức $KO \equiv KJ \perp AB$; mà $KF \equiv CE \parallel AB$ nên $KJ \perp KF$. Từ $(D, I; J, F) = -1$ suy ra chùm $K(D, I; J, F)$ điều hòa, với hai tia KJ, KF vuông góc. Do đó KJ, tức KO, là phân giác của góc IKD.

c) Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của ℓ với AC, BE. Chiếu chùm điều hòa $D(\ell, J; B, A)$ lên hai đường thẳng AC và BE (chú ý $DJ \equiv DI$, $DB \equiv DC$, $DA \equiv DE$), ta được

$$(X, I; C, A) = -1, \qquad (Y, I; B, E) = -1. \tag{1}$$

Gọi $P' = AM \cap \ell$. Vì $\ell \parallel AB$ và A, B, C, M đồng viên,

$$(P'D, P'M) = (AB, AM) = (CB, CM) = (CD, CM),$$

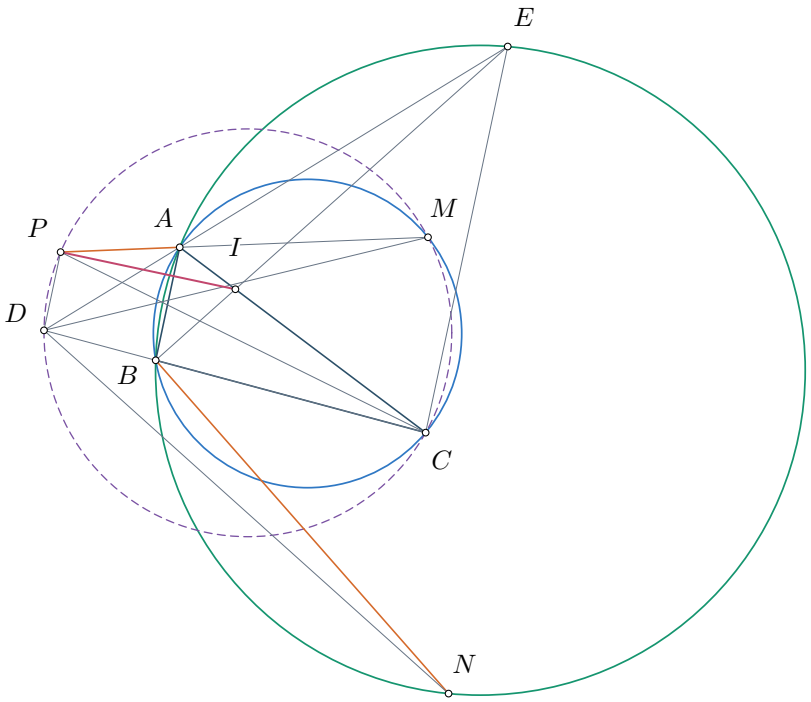
nên D, P', M, C đồng viên. Vì $DM = DC$, D là điểm chính giữa một cung MC của đường tròn này, nên $P'D$ là một đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng $P'M \equiv P'A$ và $P'C$. Mặt khác, theo (1), chùm $P'(D, I; C, A) = (X, I; C, A) = -1$. Trong một chùm điều hòa, nếu một tia là phân giác của góc tạo bởi cặp tia liên hợp thì tia còn lại vuông góc với nó; do đó $P'I \perp P'D$, tức $P'I \perp AB$.

Tương tự, gọi $P'' = BN \cap \ell$. Vì A, B, E, N đồng viên, $(P''D, P''N) = (BA, BN) = (EA, EN) = (ED, EN)$, nên D, P'', N, E đồng viên; vì $DN = DE$, $P''D$ là phân giác của góc tạo bởi $P''B$ và $P''E$; kết hợp $P''(D, I; E, B) = (Y, I; E, B) = -1$ được $P''I \perp AB$.

Vậy P' và P'' cùng là giao điểm của ℓ với đường thẳng qua I vuông góc với AB, nên $P' \equiv P'' \equiv P$. Khi đó D, P, M, C đồng viên và PI là một đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng PM, PC (vì $PI \perp PD$ và PD là đường phân giác còn lại). Do đó, với góc định hướng,

$$(DM, DC) = (PM, PC) = 2(PM, PD) = 2(PM, PI).$$

Khi M và C nằm khác phía đối với PI (như hình vẽ), PI là phân giác trong của góc MPC và ta được đúng đẳng thức góc thường $\angle MDC = \angle MPC = 2\angle MPI$.



Hình cho câu c): P nằm trên đường thẳng qua D song song với AB, và $PI \perp AB$.

□

Nhận xét. Với góc thường, kết luận của câu c) không đúng trong mọi cấu hình: chẳng hạn $A = (0, 4)$, $B = (-1, 0)$, $C = (2, 0)$, $D = (-\frac{5}{4}, 0)$ cho $\angle MDC = 90^\circ$ nhưng $\angle MPI = 135^\circ$. Phát biểu đúng tổng quát là $(DM, DC) = 2(PM, PI)$ theo góc định hướng, tức $\angle MDC = 2\angle MPI$ hoặc $\angle MDC = 2\angle MPI - 180^\circ$.

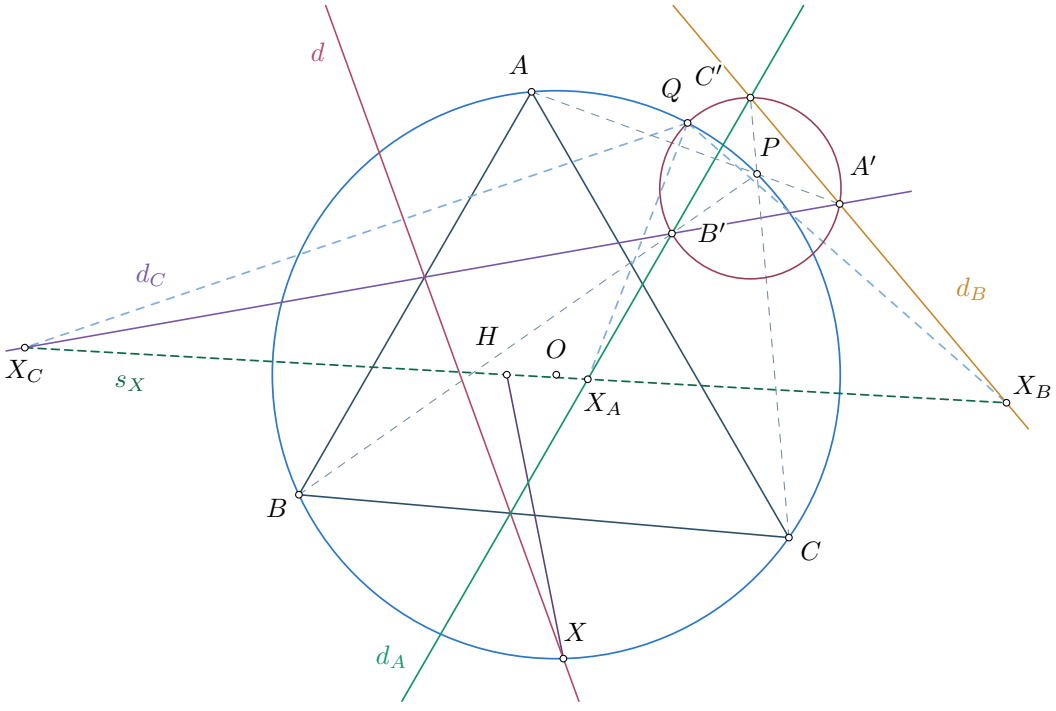
Lời giải câu c) cũng cho thấy điểm P không phụ thuộc vào cách định nghĩa qua M hay N: nó luôn là giao điểm của đường thẳng qua D song song với AB và đường thẳng qua I vuông góc với AB.

15 Hưng Yên

Bài toán 15.1 (Câu 3). Cho tam giác ABC [không vuông] nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm X cố định nằm trên cung BC không chứa A của (O). Một đường thẳng d chuyển động qua X. Các đường thẳng d_A, d_B, d_C lần lượt đối xứng với d qua các đường thẳng BC, CA, AB.
[Chỉ xét các vị trí của d sao cho các điểm dưới đây xác định, tam giác $A'B'C'$ không suy biến và $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$.] Gọi A' là giao điểm của d_B và d_C; B' là giao điểm của d_A và d_C; C' là giao điểm của d_A và d_B.

(a) Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm nằm trên (O).

(b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. Gọi H là trực tâm và X_A, X_B, X_C lần lượt là các điểm đối xứng của X qua BC, CA, AB. Theo định lí Steiner, X_A, X_B, X_C, H thẳng hàng; gọi đường thẳng này là s_X.

Ta dùng thêm nhận xét quen thuộc: nếu $X \in (O)$ và s_X là đường thẳng Steiner của X thì $(AC, AX) = (s_X, AB) + \dfrac{\pi}{2}$.

(a) Gọi ℓ là đường thẳng qua H và song song với d, đồng thời gọi P là điểm anti-Steiner của ℓ. Khi đó $P \in (O)$ và ℓ chính là đường thẳng Steiner của P.

Vì $X_B \in d_B$, $X_C \in d_C$ nên

$$(A'X_B, A'X_C) = (d_B, d_C) = 2(CA, AB) = (AX_B, AX_C).$$

Suy ra A, A', X_B, X_C đồng viên.

Do đó $(AA', AX_B) = (A'X_C, X_BX_C)$. Từ các tính chất đối xứng và $X_BX_C = s_X$, ta được

$$\begin{aligned}(AA', AC) = (A'X_C, X_BX_C) + (AX_B, AC) &= (d_C, s_X) + (AX_B, AC)\\ &= (d_C, AB) + (AB, s_X) + (AC, AX)\\ &= (AB, d) + \pi/2.\end{aligned}$$

Mặt khác, vì $s_P = \ell \parallel d$ nên

$$(AP, AC) = (AB, s_P) + \frac{\pi}{2} = (AB, d) + \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $(AA', AC) = (AP, AC)$, suy ra A, A', P thẳng hàng.

Tương tự, B, B', P và C, C', P thẳng hàng. Do đó AA', BB', CC' đồng quy tại $P \in (O)$.

(b) Gọi Q là điểm anti-Steiner của đường thẳng cố định HX. Khi đó Q là điểm cố định và $Q \in (O)$.

Các đường thẳng QX_B, QX_C lần lượt là ảnh của HX qua CA, AB, nên

$$(QX_B, QX_C) = 2(CA, AB) = (AX_B, AX_C).$$

Suy ra Q, A, X_B, X_C đồng viên.

Kết hợp với A, A', X_B, X_C đồng viên, ta có Q, A', X_B, X_C đồng viên. Tương tự, Q, B', X_C, X_A và Q, C', X_A, X_B đồng viên.

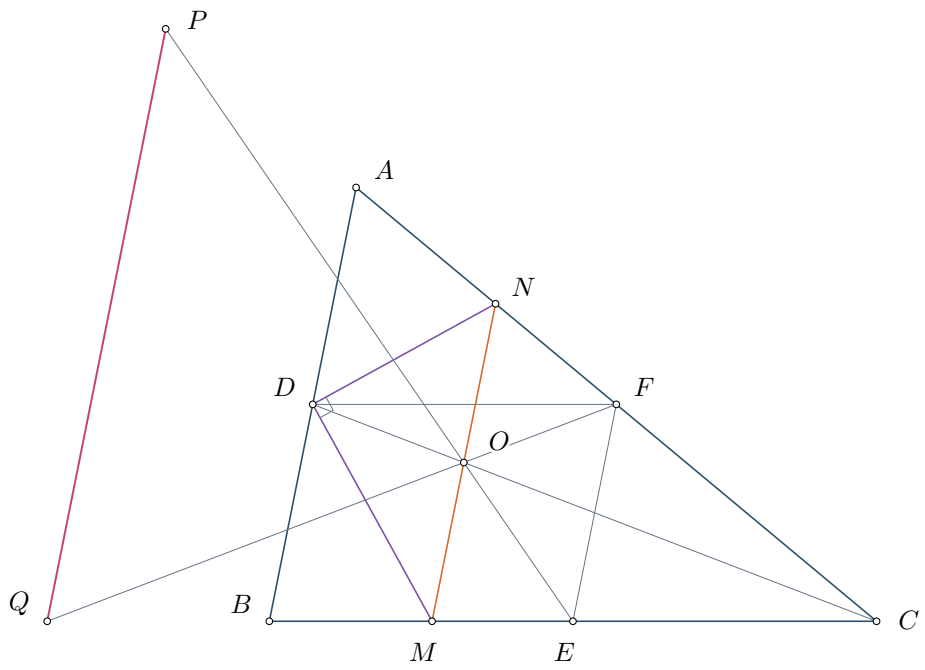
Theo kết quả về điểm Miquel của tứ giác toàn phần thì ta có Q, A', B', C' đồng viên. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua điểm cố định Q.

□

16 Khánh Hòa

Bài toán 16.1 (Vòng 1, Câu 4; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC và D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Tia phân giác của góc ADC cắt AC tại N, tia phân giác của góc BDC cắt BC tại M. Gọi O là giao điểm của MN và CD, hai đường thẳng OE và AC cắt nhau tại P, hai đường thẳng OF và BC cắt nhau tại Q. Chứng minh:

$$\frac{1}{EF} + \frac{1}{DC} = \frac{2}{MN} \qquad \text{và} \qquad CD = PQ.$$



Lời giải. Theo tính chất đường phân giác và $DA = DB$, $\dfrac{NA}{NC} = \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{MB}{MC}$, nên $MN \parallel AB$. Đặt $k = \dfrac{CN}{CA} = \dfrac{CM}{CB}$; phép vị tự tâm C tỉ số k biến A, B, D thành N, M, O. Do đó O là trung điểm MN, $MN = k \cdot AB = 2k \cdot EF$ và $OD = (1-k)\,CD$.

Hai phân giác của hai góc kề bù ADC, BDC vuông góc nên $\angle MDN = 90°$, suy ra $OD = \frac{1}{2}MN = k \cdot EF$. Vậy $(1-k)\,CD = k \cdot EF$, tức $\dfrac{1}{k} = \dfrac{CD + EF}{CD}$, và

$$\frac{2}{MN} = \frac{1}{k \cdot EF} = \frac{CD + EF}{CD \cdot EF} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{DC}.$$

Gọi U là giao điểm của đường thẳng qua O song song với BC với AC. Vì $DF \parallel BC$, phép vị tự tâm C tỉ số k biến D, F thành O, U, nên $CU = k \cdot CF$, $OU = k \cdot DF = k \cdot CE$. Từ $OU \parallel CE$ ta có $\dfrac{PU}{PC} = \dfrac{OU}{CE} = k$, suy ra $CU = (1-k)\,PC$ và

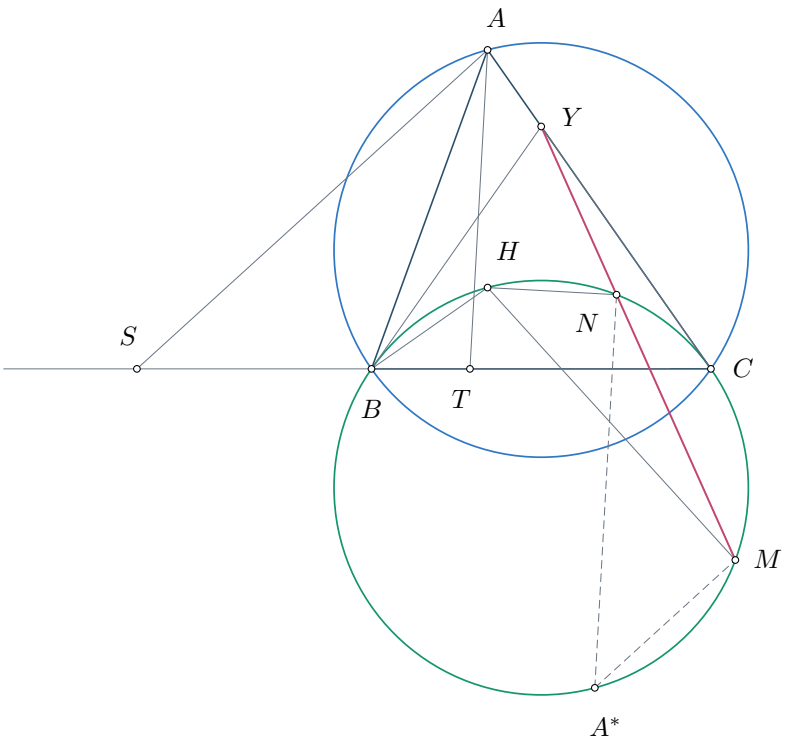
$$CP = \frac{k}{1-k}\,CF = \frac{k}{2(1-k)}\,CA.$$

Tương tự $CQ = \dfrac{k}{2(1-k)}\,CB$. Do đó $PQ \parallel AB$ và $PQ = \dfrac{k}{2(1-k)}\,AB = \dfrac{k}{1-k}\,EF = CD$. □

Bài toán 16.2 (Vòng 2, Câu 3; 6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân có trực tâm H và nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm R thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn (O) sao cho AR không song song với BC. Trên đường thẳng BC lấy hai điểm S, T phân biệt sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác ARS và ART cùng tiếp xúc với BC. Các đường thẳng qua H vuông góc với AS và AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC tại điểm thứ hai theo thứ tự là M và N. Chứng minh:

(a) Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RST di chuyển trên một đường thẳng cố định.



Hình cho câu a): MN đi qua cực Y của BC đối với (HBC).

Lời giải. Gọi $X = AR \cap BC$; vì A, R cùng phía với BC nên X nằm ngoài đoạn BC. Do XS, XT là các tiếp tuyến kẻ từ X tới (ARS), (ART),

$$XS^2 = XT^2 = \overline{XA} \cdot \overline{XR} = \overline{XB} \cdot \overline{XC}.$$

Vì $S \neq T$ nên X là trung điểm ST, và theo hệ thức Newton, $(S, T; B, C) = -1$.

a) Gọi A^* là điểm đối xứng của A qua trung điểm D của BC. Khi đó $A^*B \parallel AC$, $A^*C \parallel AB$ và $\angle BA^*C = \angle BAC = 180^\circ - \angle BHC$, nên $A^* \in (HBC)$. Hơn nữa, $A^*B \parallel AC \perp BH$ nên $\angle HBA^* = 90^\circ$, tức HA^* là đường kính của (HBC).

Do đó $\angle HMA^* = 90^\circ$, tức $A^*M \perp HM$; mà $HM \perp AS$ nên $A^*M \parallel AS$. Tương tự $A^*N \parallel AT$. Hai chùm $A^*(M, N, C, B)$ và $A(S, T, B, C)$ có các đường tương ứng song song, nên

$$A^*(M, N; C, B) = A(S, T; B, C) = (S, T; B, C) = -1.$$

Vì A^*, M, N, B, C cùng thuộc (HBC), $MCNB$ là tứ giác điều hòa, nên MN đi qua cực Y của BC đối với (HBC), là một điểm cố định.

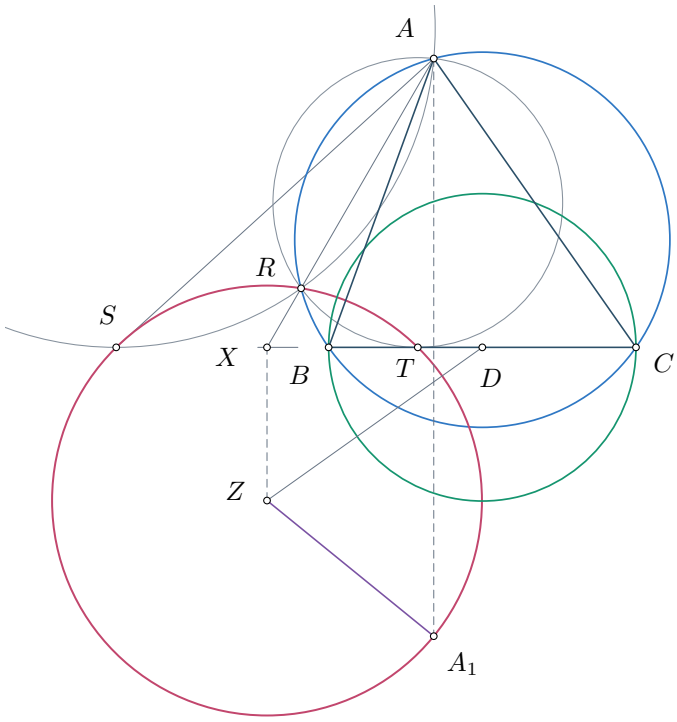
b) Gọi Z và ρ là tâm và bán kính của (RST), A_1 là điểm đối xứng của A qua BC.

(RST) đi qua A_1. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua X. Vì $\overline{XR} \cdot \overline{XA'} = -\overline{XR} \cdot \overline{XA} = -XS^2 = \overline{XS} \cdot \overline{XT}$, điểm A' thuộc (RST). Phép đối xứng qua BC biến $A \mapsto A_1$, còn phép đối xứng tâm X biến $A \mapsto A'$; hợp của chúng là phép đối xứng qua đường thẳng Δ đi qua X vuông góc với BC, nên A_1, A' đối xứng nhau qua Δ. Vì Δ là trung trực của ST nên $Z \in \Delta$, và (RST) đối xứng qua Δ; do đó $A_1 \in (RST)$.

Kết luận. Gọi D là trung điểm BC. Vì $(S, T; B, C) = -1$ nên $\overline{DS} \cdot \overline{DT} = DB^2$, tức phương tích của D đối với (RST) bằng DB^2:

$$ZD^2 - \rho^2 = DB^2 \quad \Longrightarrow \quad ZD^2 - ZA_1^2 = DB^2.$$

Vì D, A_1 cố định và DB không đổi, Z nằm trên một đường thẳng cố định vuông góc với DA_1.



Hình cho câu b): (RST) đi qua điểm cố định A_1 và trực giao với đường tròn đường kính BC.

□

17 Lạng Sơn

Bài toán 17.1 (Vòng 1, Câu 4; 5,0 điểm). Cho (O) cố định và dây cung BC của (O) cố định, BC không phải đường kính. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC của (O). Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của AC, AB; gọi Q, P lần lượt là hình chiếu của M, N lên đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Gọi $BP \cap AC = Y$, $CQ \cap AB = Z$.

(a) Chứng minh rằng tứ giác $BZYC$ nội tiếp.

(b) Gọi $X = BP \cap CQ$. Chứng minh rằng AX đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

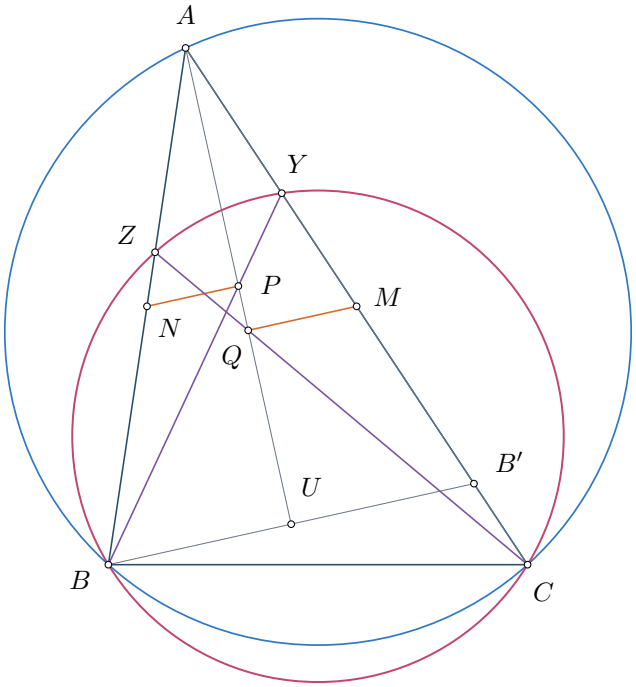
Lời giải. Gọi ℓ là phân giác của góc BAC, B' là điểm đối xứng của B qua ℓ (khi đó B' thuộc tia AC và $AB' = AB$) và U là trung điểm của BB'; U nằm trên ℓ.

Bổ đề: $AY = \dfrac{AB}{3}$ *và* $AZ = \dfrac{AC}{3}$. Vì NP và BU cùng vuông góc với ℓ và N là trung điểm AB nên P là trung điểm AU. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AUB' với cát tuyến B, P, Y:

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB'}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{BU}} \cdot \frac{\overline{PU}}{\overline{PA}} = 1 \implies \frac{\overline{YA}}{\overline{YB'}} \cdot 2 \cdot (-1) = 1 \implies \frac{\overline{YA}}{\overline{YB'}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy Y nằm trên đoạn AB' và $AY = \dfrac{1}{3}AB' = \dfrac{1}{3}AB$. Tương tự, $AZ = \dfrac{1}{3}AC$.

a) Theo bổ đề, $AZ \cdot AB = \dfrac{AB \cdot AC}{3} = AY \cdot AC$, với Z thuộc tia AB và Y thuộc tia AC. Theo phương tích đảo, B, Z, Y, C đồng viên.



Hình cho bổ đề và câu a): P là trung điểm AU, $AY = AB/3$, $AZ = AC/3$.

b) Góc $\angle BAC$ không đổi vì A chạy trên cung lớn BC cố định. Tam giác ABY có $\angle BAY = \angle BAC$ không đổi và $\dfrac{AY}{AB} = \dfrac{1}{3}$, nên nó luôn đồng dạng với một tam giác cố định; do đó $\beta = \angle ABY$ không đổi. Theo tính chất góc ngoài,

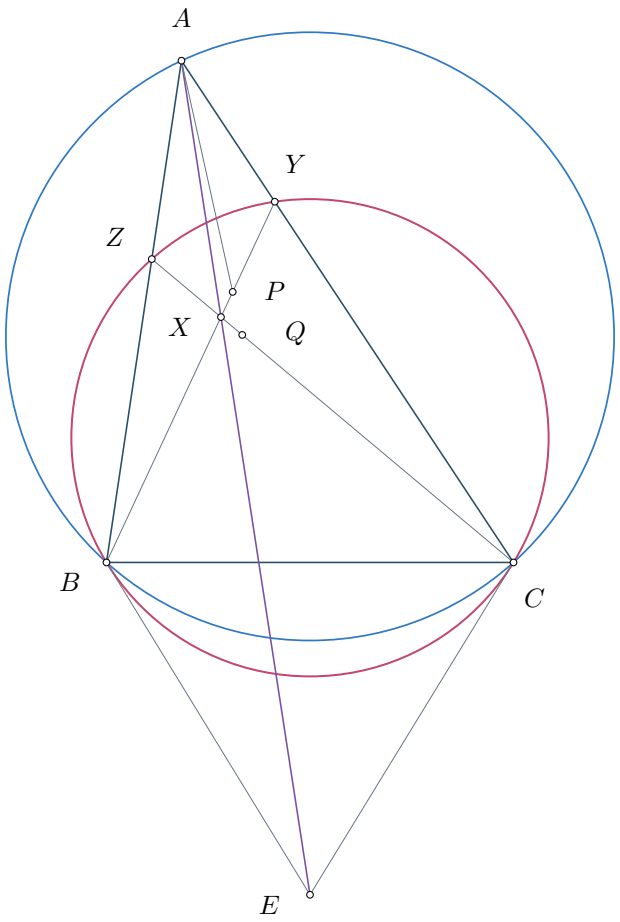
$$\angle BYC = \angle BAY + \angle ABY = \angle BAC + \beta$$

không đổi. Vậy đường tròn $\omega = (BZYC)$ là đường tròn cố định đi qua B, C (chứa cung nhìn BC dưới góc $\angle BAC + \beta$, cùng phía với A đối với BC). Gọi E là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của ω [giả sử $\angle BAC + \beta \neq 90°$]; E là điểm cố định.

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm B, B, Y, C, C, Z trên ω: các giao điểm

$$BB \cap CC = E, \qquad BY \cap CZ = X, \qquad YC \cap ZB = A$$

thẳng hàng (ở đây BB, CC là các tiếp tuyến tại B, C). Vậy AX luôn đi qua điểm cố định E. □



Hình cho câu b): $\omega = (BZYC)$ cố định; AX đi qua giao điểm E của hai tiếp tuyến tại B, C của ω.

Nhận xét. 1. Bổ đề $AY = AB/3$, $AZ = AC/3$ cho cả câu a) lẫn sự không đổi của góc $\angle ABY$ mà không cần tính toán lượng giác. Có thể tính trực tiếp: với $\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$ thì

$$\tan \angle ABY = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

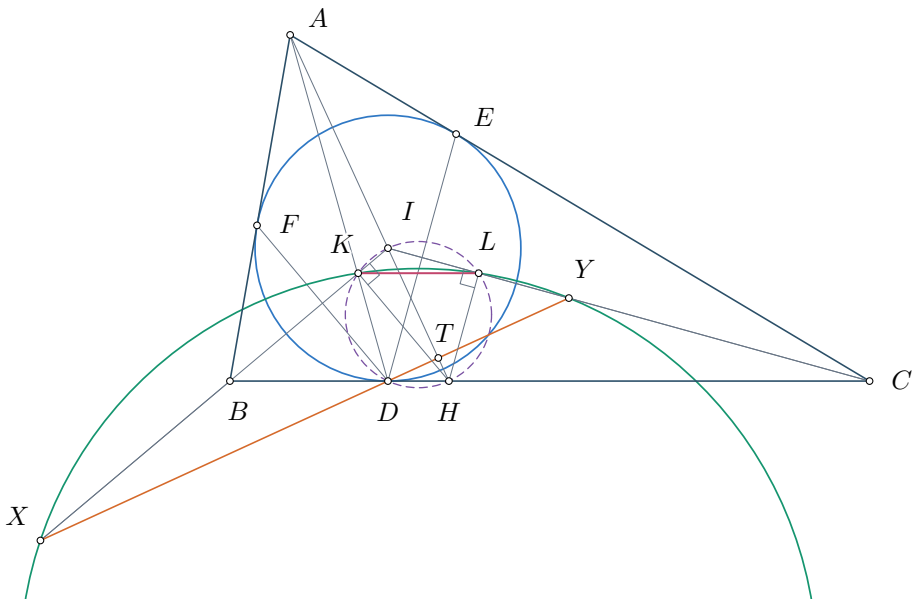
2. Điều kiện $\angle BAC + \beta \neq 90^\circ$ là cần thiết: nếu $\angle BYC = 90^\circ$ thì BC là đường kính của ω, hai tiếp tuyến tại B, C song song (cùng vuông góc với BC), và lập luận Pascal cho $AX \perp BC$; khi đó AX không đi qua điểm cố định nào. Trường hợp này xảy ra khi $\angle BAC \approx 70{,}5^\circ$.

18 Lào Cai

Bài toán 18.1 (Ngày 1, Câu 2; 7,0 điểm). Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H là giao điểm của AI và BC; K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên IB và IC. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt IB, IC lần lượt tại X và Y. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của DE, DF và EF.

(a) Chứng minh rằng $KL \parallel BC$ và bốn điểm K, L, X, Y cùng thuộc một đường tròn.

(b) Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn (MKL) và (DIP). Chứng minh rằng giao điểm của (MKL) và (DIP) thuộc đường tròn đường kính O_1O_2.



Hình cho câu a).

Lời giải. **a)** Vì $\angle IKH = \angle ILH = 90^\circ$ nên I, K, H, L thuộc đường tròn đường kính IH. Do đó

$$\angle IKL = \angle IHL = 90^\circ - \angle HIL = 90^\circ - \left(\angle IAC + \angle ICA\right) = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle IBC,$$

suy ra $KL \parallel BC$.

Gọi T là giao điểm của XY và AH. Vì $\angle XKH = \angle XTH = 90^\circ$ nên X, K, T, H đồng viên; tương tự Y, L, T, H đồng viên. Theo phương tích của I,

$$\overline{IK} \cdot \overline{IX} = \overline{IT} \cdot \overline{IH} = \overline{IL} \cdot \overline{IY},$$

nên K, L, X, Y cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì $IC \perp DE$ tại M và $IB \perp DF$ tại N nên $IM \cdot IC = IN \cdot IB = ID^2$, suy ra M, N, B, C đồng viên. Kết hợp với $KL \parallel BC$, ta có $\angle IKL = \angle IBC = \angle IMN$, nên M, N, K, L đồng viên. Hơn nữa, trong tam giác vuông IDH có $DT \perp IH$ nên $IT \cdot IH = ID^2$, do đó theo câu a), $IK \cdot IX = IL \cdot IY = ID^2$.

Xét phép nghịch đảo f tâm I, phương tích r^2 (r là bán kính của (I)). Phép nghịch đảo này giữ nguyên D và

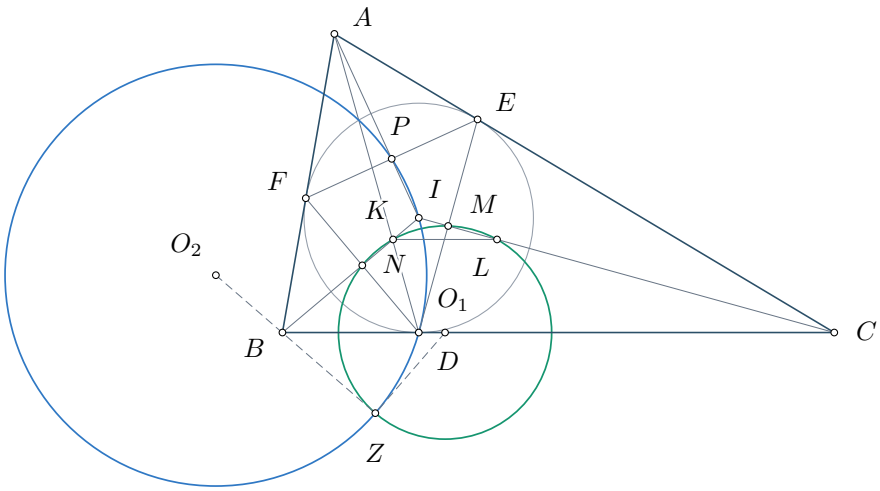
$$M \mapsto C, \quad N \mapsto B, \quad P \mapsto A, \quad K \mapsto X, \quad L \mapsto Y.$$

Do đó f biến đường tròn $(MNKL)$ thành đường tròn $(S) \equiv (BCXY)$ (tâm S), và biến đường tròn (DIP) thành đường thẳng AD. Vì phép nghịch đảo bảo toàn góc giữa hai đường, ta chỉ cần chứng minh AD trực giao với (S), tức AD đi qua S.

Gọi V là giao điểm của EF và BC (tồn tại vì $AB \neq AC$).

- Đối với (I): đường đối cực của D là BC, của A là EF; cả hai đi qua V nên đường đối cực của V là AD, suy ra $IV \perp AD$.
- Đối với (S): ta có $(V, D; B, C) = -1$ nên đường đối cực của D đi qua V. Mặt khác $XBYC$ nội tiếp (S), $D = XY \cap BC$ và $I = XB \cap YC$, nên theo định lí Brocard đường đối cực của D đi qua I. Vậy đường đối cực của D là IV, suy ra $SD \perp IV$.

Hai đường thẳng AD và SD cùng vuông góc với IV nên A, D, S thẳng hàng. Vậy (MKL) và (DIP) trực giao. Nếu Z là một giao điểm của chúng thì $O_1Z \perp O_2Z$, tức Z thuộc đường tròn đường kính O_1O_2.



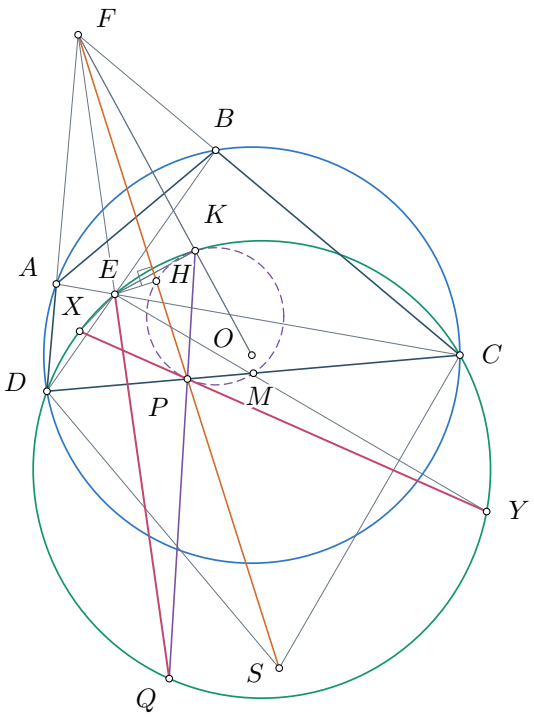
Hình cho câu b): (MKL) và (DIP) trực giao tại Z.

□

Bài toán 18.2 (Ngày 2, Câu 6; 7,0 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ không phải hình thang, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của CD; F là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (FCD) cắt nhau tại S. Gọi P là giao điểm của SF và CD; E là giao điểm của AC và BD; H là hình chiếu của E trên SF; K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABE) và (CDE).

(a) Chứng minh rằng các điểm K, P, M, H cùng nằm trên một đường tròn, kí hiệu là (ω).

(b) Tiếp tuyến tại P của đường tròn (ω) cắt đường tròn (CDE) tại X, Y. Gọi Q là giao điểm thứ hai của KP với đường tròn (CDE). Chứng minh rằng EQ là tia phân giác của $\angle XEY$.



Đường tròn nét đứt là $(\omega) = (KPMH)$.

Lời giải. Gọi G là giao điểm của AB và CD.

a) Ta có $\overline{GA} \cdot \overline{GB} = \overline{GC} \cdot \overline{GD}$ nên G thuộc trục đẳng phương KE của (ABE) và (CDE), tức K, E, G thẳng hàng.

Ta có $\angle BKC = \angle BKE + \angle EKC = \angle BAC + \angle BDC = 2\angle BAC = \angle BOC$ nên $K \in (BOC)$. Hơn nữa $\angle BKE = \angle BAC = \angle BDC = \angle EKC$, tức KE là phân giác trong của $\angle BKC$; vì $OB = OC$ nên KO là phân giác ngoài của góc này. Do đó $OK \perp KE$, tức K là hình chiếu của O trên EG. Theo định lí Brocard, O là trực tâm của tam giác EFG, nên $OF \perp EG$; suy ra O, K, F thẳng hàng và $\angle FKE = 90^\circ$.

Từ $\angle FKE = \angle FHE = 90^\circ$ ta được F, E, H, K đồng viên; từ $\angle GKO = \angle GMO = 90^\circ$ ta được G, K, O, M đồng viên. Vì $EF \perp OG$ và $EK \perp OK$ nên

$$(HP, HK) = (HF, HK) = (EF, EK) = (OG, OK) = (MG, MK) = (MP, MK).$$

Vậy K, P, M, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Vì SC, SD là tiếp tuyến của (FCD) nên FS là đường đối trung của tam giác FCD, do đó $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{FC^2}{FD^2}$. Ta có $\triangle FAC \backsim \triangle FBD$ nên $\dfrac{FC}{FD} = \dfrac{AC}{BD}$. Mặt khác K là tâm phép vị tự quay biến $A \mapsto B$, $C \mapsto D$, nên $\triangle KAC \backsim \triangle KBD$ và $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{AC}{BD}$. Suy ra $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{KC^2}{KD^2}$, tức KP là đường đối trung của tam giác KCD.

Gọi t là tiếp tuyến tại K của $(KCD) = (CDE)$. Vì KM, KP đẳng giác trong góc CKD,

$$(t, KP) = (t, KC) + (KC, KP) = (DK, DC) + (KM, KD) = (KM, DC) = (MK, MP),$$

nên t cũng tiếp xúc với $(\omega) = (KPM)$. Vậy (ω) và (CDE) tiếp xúc tại K. Phép vị tự tâm K biến (ω) thành (CDE) biến $P \mapsto Q$, nên biến tiếp tuyến tại P của (ω) thành tiếp tuyến tại Q của (CDE). Do đó tiếp tuyến tại Q song song với XY, tức Q là điểm chính giữa một cung XY của (CDE). Vậy EQ là một đường phân giác của góc tạo bởi EX, EY; đó là phân giác trong của $\angle XEY$ khi Q nằm trên cung XY không chứa E (như hình vẽ). □

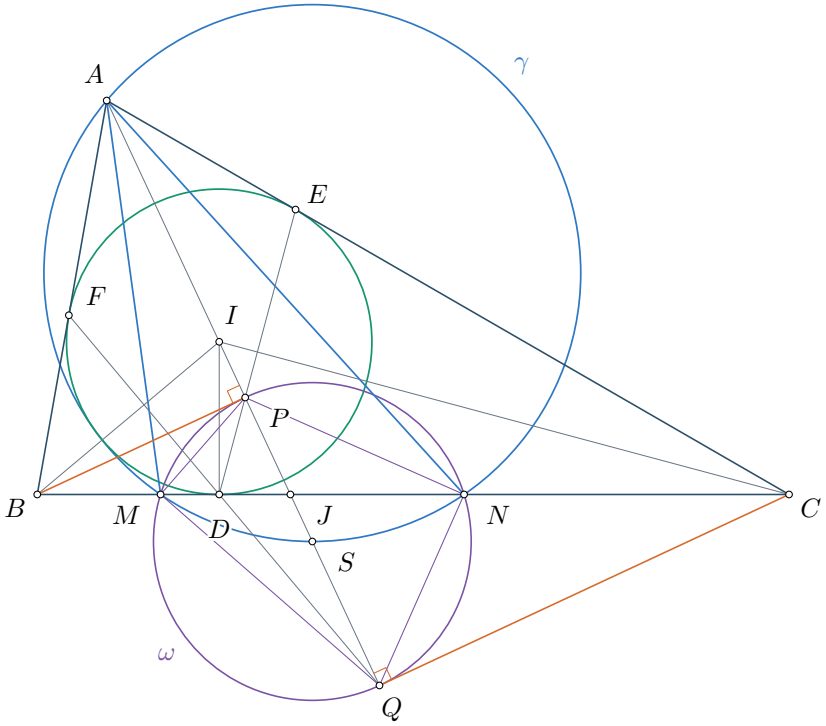
Nhận xét. Kết luận "tia phân giác" (trong) không đúng trong mọi cấu hình. Chẳng hạn trên đường tròn đơn vị lấy $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-\frac{9}{41},\frac{40}{41})$, $D=(0,-1)$; khi đó Q thuộc cung XY chứa E và EQ là phân giác ngoài của góc XEY. Phát biểu đúng tổng quát: EQ là đường phân giác trong hoặc ngoài của góc XEY.

19 Lâm Đồng

Bài toán 19.1 (Câu 4; 4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$) ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC,CA,AB. Đường thẳng AI cắt DE,DF lần lượt tại P,Q. Đường tròn đường kính PQ cắt BC tại M,N.

(a) Chứng minh rằng $BP\parallel CQ$.

(b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tiếp xúc với đường tròn (I).



Lời giải. **a)** Vì $AB<AC$ nên các điểm A,I,P,Q nằm trên AI theo thứ tự ấy. Ta có $\angle BIP=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB=\angle PDC$, suy ra B,I,P,D đồng viên. Do đó $\angle BPI=\angle BDI=90^\circ$, hay $BP\perp AI$. Tương tự, $CQ\perp AI$. Vậy $BP\parallel CQ$.

b) Đặt $J=AI\cap BC$, S là trung điểm PQ, ω là đường tròn đường kính PQ và $\gamma=(AMN)$.

Từ $BP\parallel CQ$, định lí đường phân giác và $\triangle ABP\backsim\triangle ACQ$, ta có

$$\frac{\overline{JP}}{\overline{JQ}}=\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}=-\frac{AB}{AC}=-\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}},$$

suy ra $(A,J;P,Q)=-1$. Theo các hệ thức Newton và Maclaurin, lần lượt ta được

$$\overline{SA}\cdot\overline{SJ}=SP^2,\qquad \overline{JA}\cdot\overline{JS}=\overline{JP}\cdot\overline{JQ}.$$

Vì $J = MN \cap PQ$ và M, N, P, Q đồng viên, hệ thức thứ hai cho $\overline{JA} \cdot \overline{JS} = \overline{JM} \cdot \overline{JN}$, suy ra $S \in \gamma$.

Mặt khác, $\triangle IPD \backsim \triangle IDQ$ nên $\overline{IP} \cdot \overline{IQ} = ID^2$. Vì S là trung điểm PQ, ta được

$$\mathcal{P}_{(I)}(S) = SI^2 - ID^2 = SI^2 - \overline{IP} \cdot \overline{IQ} = SP^2.$$

Xét phép nghịch đảo tâm S, phương tích SP^2. Theo hệ thức Newton, A biến thành J; còn M, N được giữ cố định. Do $S \in \gamma$, ảnh của γ là đường thẳng BC.

Hơn nữa, $\mathcal{P}_{(I)}(S) = SP^2$ nên phép nghịch đảo hoán đổi hai giao điểm của mỗi cát tuyến qua S với (I), do đó giữ nguyên (I). Vì BC tiếp xúc với (I), suy ra γ tiếp xúc với (I). □

> **Nhận xét.** Đây là bài toán số 6 trong đề thi ELMO 2016.

20 Nghệ An

20.1 Chuyên Đại học Vinh

Bài toán 20.1 (Câu 3). Cho tam giác nhọn ABC $[CA \neq CB]$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của AB; đường kính CD của (O) cắt AB tại E. Tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau ở T. Đường thẳng CT cắt (O) tại điểm thứ hai là S. Gọi I là tâm đường tròn (CME).

(a) Chứng minh rằng các đường thẳng CD, TI, SM đồng quy.

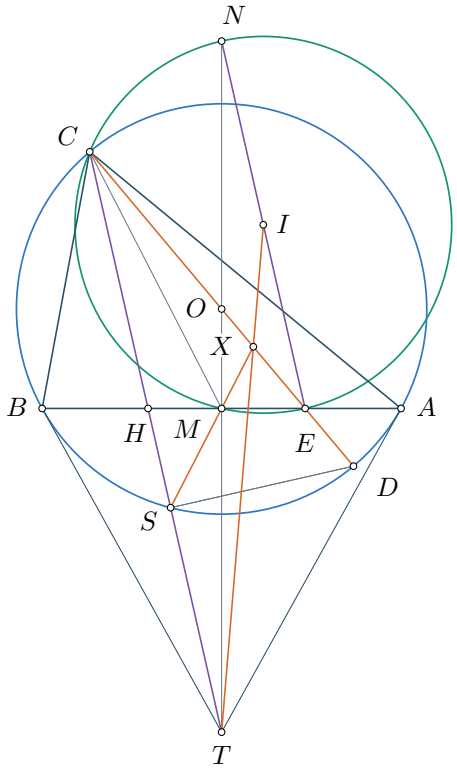
(b) Đường tròn (CME) cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Đường thẳng MK cắt CE tại F. Chứng minh rằng ba đường tròn $(EFM), (DFS), (ABF)$ cùng đi qua một điểm khác F.

Lời giải. **a)** Kẻ đường kính EN của (I). Vì $MN \perp ME$ và $OM \perp AB$, suy ra T, M, O, N thẳng hàng. Ta có $\overline{OM} \cdot \overline{OT} = \overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$, nên $\triangle OCM \backsim \triangle OTC$. Kết hợp C, M, E, N đồng viên, ta được

$$(TO, TC) = (MC, CO) = (MC, CE) = (MN, NE).$$

Vì $TO \equiv MN$, suy ra $TC \parallel EN$.

Gọi $H = CT \cap AB$ và $X = MS \cap CD$. Theo tính chất hàng điểm điều hòa tạo bởi hai tiếp tuyến và một cát tuyến, ta có $(H, T; S, C) = -1$. Chiếu từ M lên CD, suy ra $(E, O; X, C) = -1$. Vì T, O, N thẳng hàng, chùm tia $T(E, N; X, C)$ cũng điều hòa. Kết hợp $TC \parallel EN$, suy ra TX đi qua trung điểm I của EN. Vậy CD, TI, SM đồng quy tại X.



b) Ta có $\overline{TM}\cdot\overline{TO}=\overline{TA}^2=\overline{TS}\cdot\overline{TC}$, nên O,M,S,C đồng viên. Vì $ME\perp MO$, $CS\perp DS$ và C,O,E,D thẳng hàng, ta có

$$\begin{aligned}(ME,MS)&=(ME,MO)+(MO,MS)\\&=(CS,DS)+(CO,CS)\\&=(CO,DS)=(DE,DS).\end{aligned}$$

Do đó M,E,D,S cùng thuộc một đường tròn, kí hiệu là δ.

Gọi $Y=SD\cap AB$. Theo phương tích của Y đối với (O) và δ,

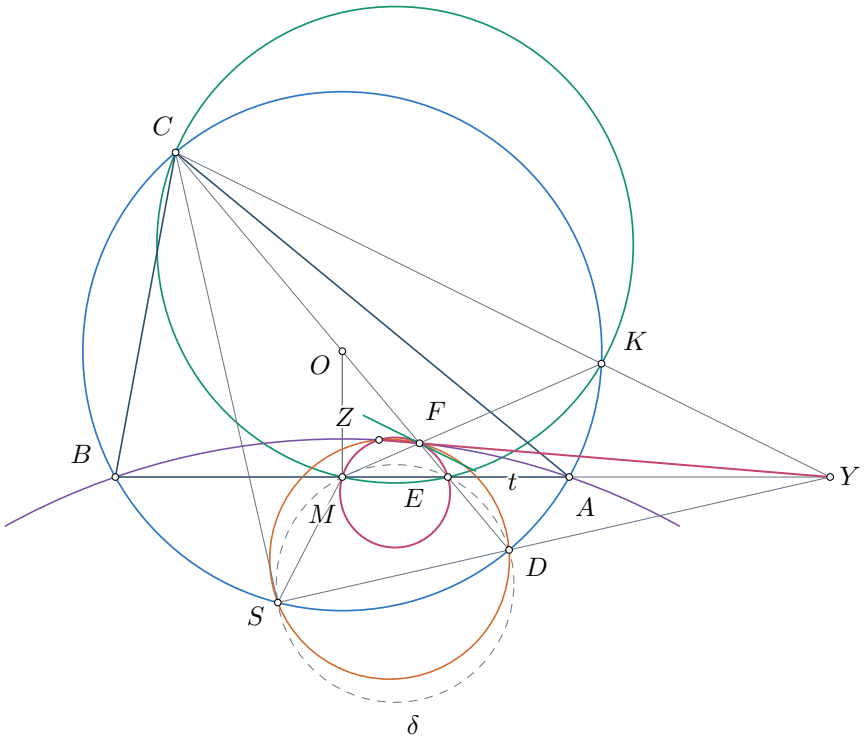
$$\overline{YA}\cdot\overline{YB}=\overline{YS}\cdot\overline{YD}=\overline{YM}\cdot\overline{YE}.$$

Vì vậy Y có cùng phương tích đối với ba đường tròn $(EFM),(DFS),(ABF)$. Ba đường tròn này cùng đi qua F, nên có chung trục đẳng phương YF.

Mặt khác, Y cũng có cùng phương tích đối với (O) và (I), suy ra $Y\in CK$. Gọi t là tiếp tuyến tại F của (EFM). Theo định lí góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, kết hợp C,M,E,K đồng viên, ta có

$$(t,FE)=(FM,ME)=(KM,ME)=(KC,CE).$$

Vì $FE\equiv CE$, suy ra $t\parallel CK$. Do $Y\in CK$ và $F\notin CK$, đường thẳng YF không phải là tiếp tuyến của (EFM) tại F. Bởi vậy, YF cắt (EFM) tại điểm thứ hai $Z\neq F$. Vì YF là trục đẳng phương chung, Z cũng thuộc (DFS) và (ABF). Vậy ba đường tròn đã cho cùng đi qua $Z\neq F$.



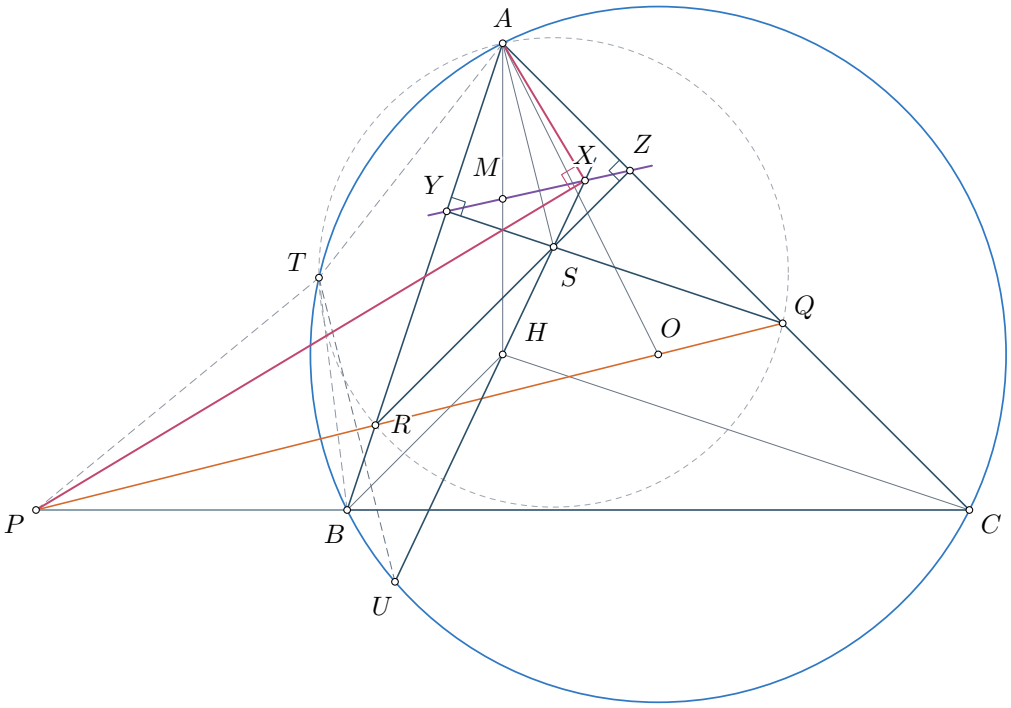
□

20.2 Chuyên Phan Bội Châu

Bài toán 20.2 (Câu 3). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H. Điểm P di động trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC. Đường thẳng OP lần lượt cắt AC, AB tại Q, R. Gọi Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q, R lên AB, AC.

(a) Chứng minh rằng YZ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

(b) Gọi S là giao điểm của QY và RZ, X là giao điểm của SH và YZ. Chứng minh rằng $XA \perp XP$.



Lời giải. Gọi M là trung điểm của AH.

a) Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$. Ta có $AY/AQ = AZ/AR = \cos\alpha$, nên hai tam giác AQR, AYZ đồng dạng ngược, với sự tương ứng $A \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow Y$, $R \leftrightarrow Z$.

Mặt khác, $AH = 2AO\cos\alpha$ và $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{OAC}$. Do đó $AM/AO = \cos\alpha$ và $\widehat{YAM} = \widehat{QAO}$. Vì thế M là điểm tương ứng của O trong phép đồng dạng trên. Từ $O \in QR$ suy ra $M \in YZ$. Vậy điểm cố định cần tìm là **trung điểm của** AH.

b) Nếu $OP \perp AB$ hoặc $OP \perp AC$ thì X lần lượt là trung điểm AB hoặc AC, và kết luận suy ra ngay. Xét các trường hợp còn lại.

Trong tứ giác toàn phần tạo bởi AB, AC, BC, PQ, ba đường tròn đường kính AP, BQ, CR có trục đẳng phương chung HS. Gọi T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần này, U là điểm đối xứng của T qua PQ. Theo tính chất đường thẳng Steiner, $U \in HS$; lại có $U \in (O)$ vì $O \in PQ$. Từ A, B, T, U và B, P, R, T đồng viên, cùng với phép đối xứng qua PQ, ta được $(UA, UP) = (PR, PT) + (UT, UP) = \pi/2$. Do đó U thuộc cả ba đường tròn đường kính AP, BQ, CR.

Gọi $V \neq U$ là giao điểm chung còn lại của ba đường tròn trên. Vì U đối xứng với T qua QR và $T \in (AQR)$ nên

$$(VY, VZ) = (QY, QU) + (RU, RZ) = (AB, AC) + (QT, RT) = 0.$$

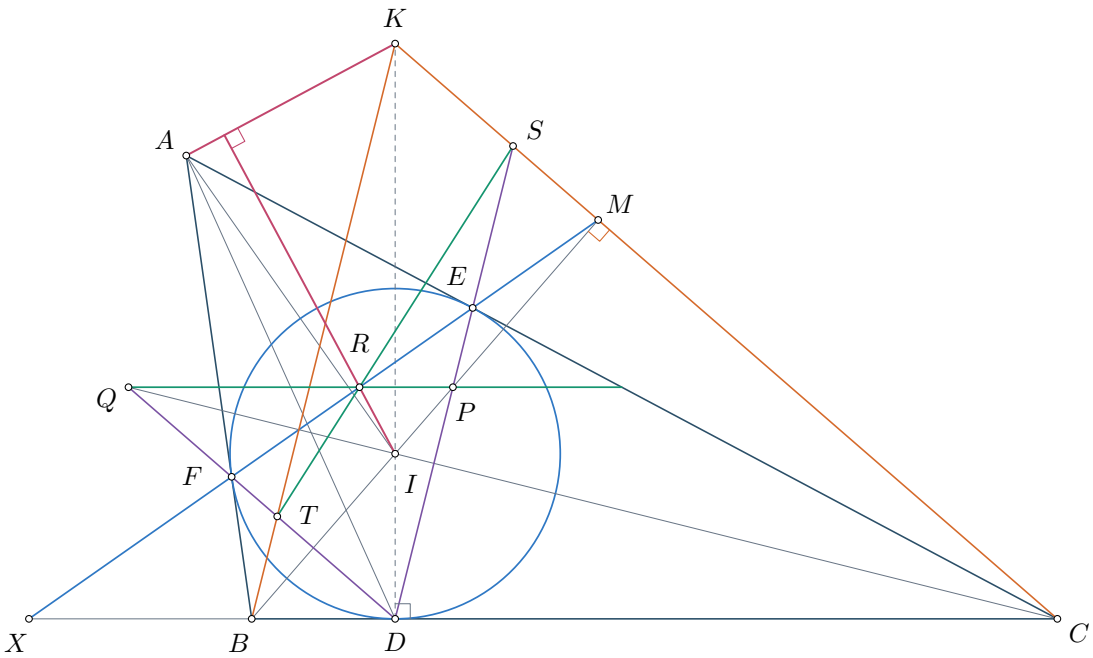
Suy ra $V \in YZ$. Mà $V \in HS$ nên $V = X$. Vậy X thuộc đường tròn đường kính AP, tức là $XA \perp XP$. □

> **Nhận xét 20.1.** Điểm X còn thuộc đường tròn Euler γ của tam giác ABC. Thật vậy, ta có $\mathcal{P}_\gamma(H) = \frac{1}{2}\overline{HU}\,\overline{HX}$. Mặt khác, trung điểm của HU thuộc γ vì $U \in (O)$. Bởi vậy $X \in \gamma$.

Bài toán 20.3 (Câu 5). Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi K là trực tâm của tam giác BIC.

(a) Hai đường thẳng CK, BK lần lượt cắt DE, DF tại S, T; đường thẳng ST cắt EF tại R. Chứng minh rằng $IR \perp AK$.

(b) Chứng minh rằng AK, BC và đường thẳng Euler của tam giác KBC đồng quy hoặc đôi một song song.



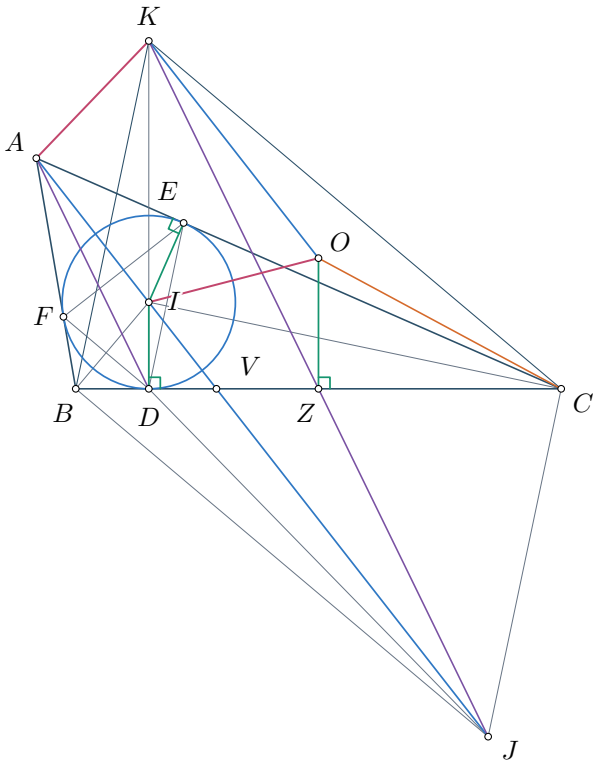
Lời giải. **a)** Đặt $P = BI \cap DE$, $Q = CI \cap DF$, $M = BI \cap EF$ và $X = EF \cap BC$. Ta sử dụng hai tính chất quen thuộc: P, Q nằm trên đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC, và $CM \perp BI$. Do đó $PQ \parallel BC$ và C, M, K, S thẳng hàng.

Dễ có $(D, X; B, C) = -1$, chiếu từ tâm M lên BC, các điểm D, E, P, S lần lượt được biến thành D, X, B, C. Bởi vậy $(D, E; P, S) = -1$. Tương tự, $(D, F; Q, T) = -1$. Từ đó suy ra EF, PQ, ST đồng quy hay P, Q, R thẳng hàng.

Xét cực và đối cực đối với (I). Vì DE là đường đối cực của C và $P \in DE$, đường đối cực của P đi qua C. Đường này vuông góc với IP, nên chính là CK. Suy ra đường đối cực của K đi qua P. Lại có $IK \perp BC$ và $PQ \parallel BC$, do đó PQ là đường đối cực của K.

Cuối cùng, $R \in EF \cap PQ$, mà EF, PQ lần lượt là đường đối cực của A, K. Bởi vậy đường đối cực của R là AK, suy ra $IR \perp AK$.

b)



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC và Z là trung điểm của BC. Vì I là trực tâm của tam giác KBC, đường thẳng OI chính là đường thẳng Euler của tam giác này. Ta có $KO \parallel AI$ (cùng vuông góc với EF) và $OZ \parallel ID$ (cùng vuông góc với BC).

Cách 1. Dùng chùm điều hòa. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC và $V = AI \cap BC$. Vì $KB \parallel CJ$ và $KC \parallel BJ$, tứ giác $KBJC$ là hình bình hành. Do đó K, Z, J thẳng hàng và $ZK = ZJ$.

Theo tính chất quen thuộc, $(A, V; I, J) = -1$. Chiếu từ tâm D lên KJ, các điểm V, I, J lần lượt được biến thành Z, K, J. Vì Z là trung điểm của KJ, tính chất chùm điều hòa cho $AD \parallel KJ$, hay $AD \parallel KZ$.

Như vậy, hai tam giác KOZ và AID có các cạnh tương ứng song song, nên KA, OI, ZD đồng quy hoặc đôi một song song. Vì ZD trùng với BC, ta được điều phải chứng minh.

Cách 2. (phụ thuộc vào hình vẽ) Đặt $\alpha = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$. Ta có $\widehat{BKC} = 90^\circ - \alpha$, nên $\widehat{COZ} = 90^\circ - \alpha$. Do đó

$$\frac{ID}{IA} = \frac{IE}{IA} = \sin\alpha = \cos\widehat{COZ} = \frac{OZ}{OC} = \frac{OZ}{OK}.$$

Kết hợp với $\widehat{AID} = \widehat{KOZ}$, suy ra $\triangle AID \backsim \triangle KOZ$ (c.g.c.), do đó $AD \parallel KZ$. Vậy hai tam giác KOZ, AID có các cạnh tương ứng song song; từ đó kết luận như Cách 1. □

Nhận xét. Điểm đồng quy W ở câu b) còn nằm trên tiếp tuyến chung của đường tròn Euler γ của tam giác ABC và đường tròn (I). Thật vậy, kẻ $AU \perp BC$; khi đó

$$\frac{\overline{WU}}{\overline{WD}} = \frac{\overline{WA}}{\overline{WK}} = \frac{\overline{WD}}{\overline{WZ}} \quad \Longrightarrow \quad WD^2 = \overline{WU} \cdot \overline{WZ}.$$

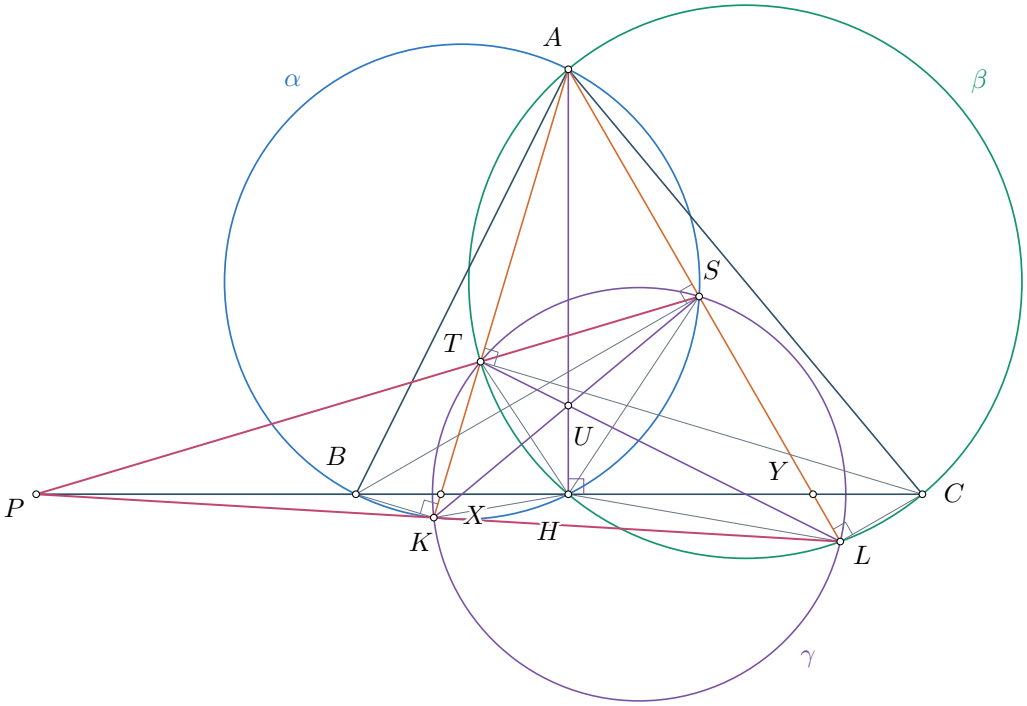
Vì U là chân đường cao từ A và Z là trung điểm BC, hai điểm U, Z cùng thuộc γ, nên $\mathcal{P}_\gamma(W) = \overline{WU} \cdot \overline{WZ} = WD^2 = \mathcal{P}_{(I)}(W)$. Kết hợp định lí Feuerbach (γ và (I) tiếp xúc nhau), W nằm trên tiếp tuyến chung tại tiếp điểm của hai đường tròn.

21 Ninh Bình

Bài toán 21.1 (Câu 2; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AH. Gọi X, Y là hai điểm phân biệt thay đổi trên cạnh BC sao cho $\widehat{CAX} = \widehat{BAY}$.
Gọi K, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng AX, AY; T, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên các đường thẳng AX, AY.

(a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, TL, SK đồng quy.

(b) Chứng minh rằng giao điểm của KL và ST thuộc một đường thẳng cố định khi X, Y thay đổi trên cạnh BC.



Lời giải. Nếu $\{X, Y\} = \{B, C\}$ thì SK, TL là hai đường cao từ B, C, còn một trong hai đường KL, ST trùng với BC, nên cả hai kết luận đều đúng. Nếu $X = H$ thì $K = T = H$; nếu $Y = H$ thì $S = L = H$. Trong cả hai trường hợp, các đường ở câu a) đồng quy tại H và $KL \cap ST = H \in BC$. Sau đây xét X, Y nằm trong cạnh BC và khác H.

a) Gọi α, β lần lượt là các đường tròn đường kính AB, AC. Khi đó $A, H, K, S \in \alpha$ và $A, H, T, L \in \beta$. Giả thiết cho $(AY, AB) = (AC, AX)$. Vì $BS \perp AY$ và $CT \perp AX$, ta có

$$\begin{aligned}(KS, KT) &= (BS, BA) = (AY, AB) + \frac{\pi}{2} \\ &= (AC, AX) + \frac{\pi}{2} = (CA, CT) = (LS, LT).\end{aligned}$$

Suy ra K, S, T, L đồng viên; gọi đường tròn này là γ. Cũng từ các quan hệ góc trên, $KS \perp AC$ và $TL \perp AB$, nên hai đường này cắt nhau tại một điểm U.

Ba trục đẳng phương của các cặp đường tròn (α,β), (α,γ), (β,γ) lần lượt là AH, KS, TL, do đó $U \in AH$.

b) Ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng cố định là BC. Trước hết, từ các tứ giác nội tiếp ở câu a), ta có

$$(HA, HS) = (KA, KS) = (LT, LA) = (HT, HA). \tag{1}$$

Vậy hai đường thẳng HT, HS đối xứng nhau qua AH.

Hai đường ST, BC không song song. Thật vậy, nếu chúng song song thì (1) cho thấy S, T đối xứng nhau qua AH. Khi ấy phép đối xứng qua AH biến $\alpha = (AHS)$ thành $\beta = (AHT)$, nên cũng biến B thành C, trái với $AB \neq AC$. Đặt $P = ST \cap BC$.

Cách 1. Dùng chùm điều hòa và tứ giác toàn phần.

Vì $HA \perp HP$ và HT, HS đối xứng nhau qua HA, nên

$$H(A, P; T, S) = -1.$$

Xét tứ giác toàn phần $KTSL$, với $A = KT \cap SL$, $U = KS \cap TL$ và $H \in AU$. Theo tính chất điều hòa của tứ giác toàn phần (dạng đảo), từ $H(A, P; T, S) = -1$ và $P \in ST$ suy ra $P \in KL$. Vậy $KL \cap ST = P \in BC$.

Cách 2. Dùng hai hàng điểm có cùng tỉ số kép.

Tương tự (1), ta có

$$(HA, HK) = (SA, SK) = (TL, TA) = (HL, HA). \tag{2}$$

Vì thế phép đối xứng qua AH biến các đường HT, HK lần lượt thành HS, HL, đồng thời giữ nguyên HA và BC (vì H, X, Y thẳng hàng). Hai chùm đường thẳng tương ứng có cùng tỉ số kép. Chiếu từ H lên AX và AY, ta được

$$(A, X; T, K) = H(A, X; T, K) = H(A, Y; S, L) = (A, Y; S, L).$$

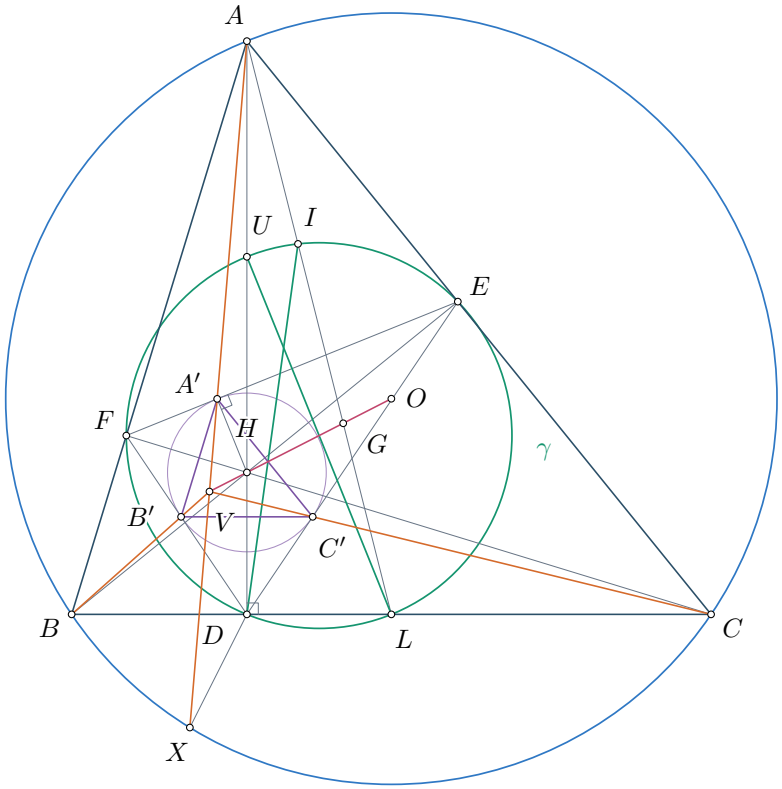
Vậy XY, TS, KL đồng quy tại P, và P luôn thuộc đường thẳng cố định BC. □

Bài toán 21.2 (Câu 7; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O), có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Các đoạn thẳng AG, BG, CG lần lượt cắt đường tròn (DEF) tại I, J, K. Các đường tròn $(AID), (BJE), (CKF)$ cắt lại (O) tại các điểm thứ hai tương ứng là X, Y, Z.

(a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OH.

(b) Giả sử $\widehat{BAC} \neq 60^\circ$. Đường thẳng AC cắt đường tròn (AHB) tại điểm thứ hai N; đường thẳng AB cắt đường tròn (AHC) tại điểm thứ hai M. Đường tròn (HMN) cắt lại các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là S, T. Chứng minh rằng $ST \perp OH$.

Điều kiện $\widehat{BAC} \neq 60^\circ$ ở câu b) được bổ sung vì khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì H, M, N thẳng hàng, đường tròn (HMN) không xác định.



Lời giải.

a) Kí hiệu $\gamma = (DEF)$. Gọi U, L lần lượt là trung điểm của AH, BC. Khi đó UL là một đường kính của γ và $UL \perp EF$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên EF, FD, DE.

Gọi X' là giao điểm thứ hai của AA' với (O). Từ B, C, E, F đồng viên, ta có $(FB, FA') = (CB, CA) = (X'B, X'A')$, suy ra B, F, A', X' đồng viên. Lại có B, D, F, H đồng viên, nên theo phương tích,

$$\overline{AA'} \cdot \overline{AX'} = \overline{AF} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AD}.$$

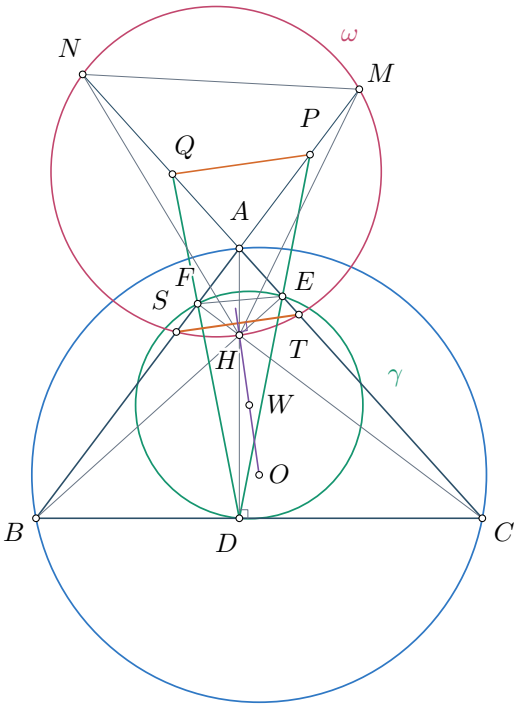
Bởi vậy A', H, D, X' đồng viên. Vì $HA' \parallel UL$ và A, I, L thẳng hàng, ta được

$$(X'A, X'D) = (HA', HD) = (UL, UD) = (IL, ID) = (IA, ID).$$

Suy ra A, I, D, X' đồng viên, nên $X' = X$. Vậy A, A', X thẳng hàng. Tương tự, B, B', Y và C, C', Z thẳng hàng.

Vì H là tâm nội tiếp tam giác DEF, nên $HA' = HB' = HC'$ và $A'B' \perp FH$, $B'C' \perp DH$, $C'A' \perp EH$. Do đó H là tâm ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$; hơn nữa $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$.

Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song, nên AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự V của hai tam giác. Phép vị tự này biến tâm ngoại tiếp O thành H, suy ra $V \in OH$. Vậy AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm trên OH.



b) Đặt $P = DE \cap AB$, $Q = DF \cap AC$ và $\omega = (HMN)$. Gọi W là tâm đường tròn chín điểm γ; khi đó W là trung điểm OH.

Vì A, B, D, E và A, C, D, F là các tứ giác nội tiếp, nên

$$\mathcal{P}_\gamma(P) = \overline{PE} \cdot \overline{PD} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \mathcal{P}_{(O)}(P),$$
$$\mathcal{P}_\gamma(Q) = \overline{QF} \cdot \overline{QD} = \overline{QA} \cdot \overline{QC} = \mathcal{P}_{(O)}(Q).$$

Do đó PQ là trục đẳng phương của γ và (O), suy ra $PQ \perp OW$, hay $PQ \perp OH$.

Mặt khác, từ A, C, D, F và A, H, B, N đồng viên, ta có

$$(FB, FQ) = (FA, FD) = (CA, CD) = (HB, HA) = (NB, NA).$$

Suy ra B, F, N, Q đồng viên. Tương tự, C, E, M, P đồng viên. Kết hợp với B, C, E, F đồng viên, áp dụng phương tích tại A, ta được

$$\overline{AN} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AC} \cdot \overline{AE} = \overline{AM} \cdot \overline{AP}.$$

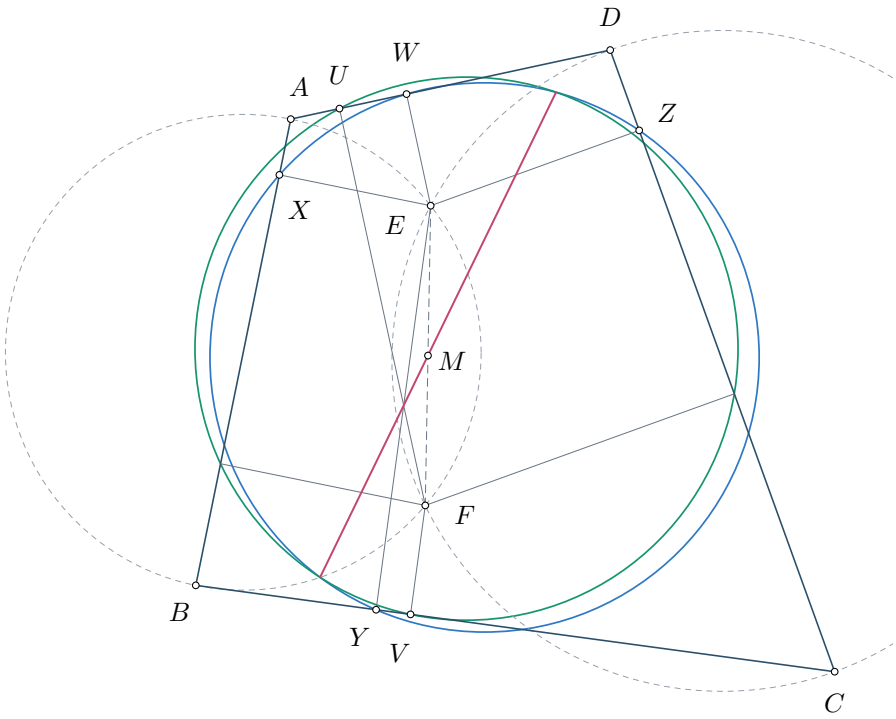
Bởi vậy P, M, N, Q đồng viên. Theo Reim, ta có $ST \parallel PQ$. Kết hợp với $PQ \perp OH$, ta được $ST \perp OH$. □

22 Phú Thọ

Bài toán 22.1 (Ngày 1, Câu 3; 6,0 điểm). Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai cạnh AD và BC không song song. Giả sử hai đường tròn có đường kính AB và CD cắt nhau tại các điểm E và F nằm bên trong tứ giác. Gọi ω_E là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc từ E đến các đoạn thẳng AB, BC, CD. Gọi ω_F là đường tròn đi qua chân các đường vuông góc từ F đến các đoạn thẳng CD, DA, AB.

(a) Chứng minh ω_E đi qua chân đường vuông góc của E lên DA.

(b) Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng EF nằm trên đường thẳng đi qua hai giao điểm của ω_E và ω_F.



Đường màu đỏ là trục đẳng phương của ω_E (xanh dương) và ω_F (xanh lá).

Lời giải. Gọi X, Y, Z, W lần lượt là chân các đường vuông góc từ E đến AB, BC, CD, DA. Vì $\angle AEB = \angle CED = 90^\circ$ nên $(AE, BE) = (CE, DE) = 90^\circ$.

a) Các bộ bốn điểm $\{B, X, E, Y\}$, $\{C, Y, E, Z\}$, $\{A, X, E, W\}$, $\{D, Z, E, W\}$ lần lượt nằm trên các đường tròn đường kính BE, CE, AE, DE. Do đó

$$(YX, YZ) = (YX, YE) + (YE, YZ) = (BA, BE) + (CE, CD),$$
$$(WX, WZ) = (WX, WE) + (WE, WZ) = (AB, AE) + (DE, DC).$$

Hiệu của hai góc này bằng $(AE, BE) + (CE, DE) = 180^\circ \equiv 0$. Vậy X, Y, Z, W đồng viên, tức $W \in \omega_E$.

b) Gọi $P = EW \cap BC$, $Q = EY \cap AD$. Vì $EW \perp AD$, $EY \perp BC$ nên $(EW, EY) = (AD, BC)$, do đó

$$(PW, PY) = (EW, BC) = (EW, EY) + 90^\circ = (AD, BC) + 90^\circ.$$

Mặt khác $(XW, XY) = (XW, XE) + (XE, XY) = (AD, AE) + (BE, BC)$, và $(AD, AE) + (BE, BC) - (AD, BC) = (BE, AE) = 90°$. Suy ra $(PW, PY) = (XW, XY)$, tức $P \in \omega_E$; tương tự $Q \in \omega_E$. Vậy ω_E là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $WYPQ$.

Tương tự, gọi U, V là chân các đường vuông góc từ F đến AD, BC; $R = FU \cap BC$, $S = FV \cap AD$; khi đó ω_F là đường tròn ngoại tiếp $UVRS$. Gọi $I = EQ \cap FU$ và $K = EP \cap FV$.

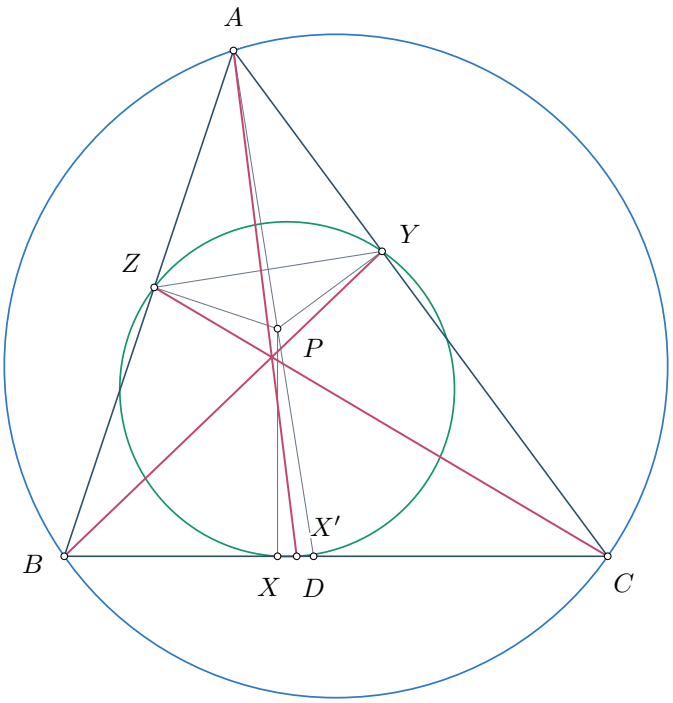
Vì $\angle QUR = \angle QYR = 90°$ nên Q, U, R, Y đồng viên, suy ra $\overline{IQ} \cdot \overline{IY} = \overline{IU} \cdot \overline{IR}$, tức I có cùng phương tích đối với ω_E và ω_F. Tương tự với K. Vậy IK là trục đẳng phương của ω_E và ω_F.

Cuối cùng, $EI \equiv EY \perp BC$ và $FK \equiv FV \perp BC$ nên $EI \parallel FK$; tương tự $EK \parallel FI$ (cùng vuông góc với AD). Do đó $IEKF$ là hình bình hành và trung điểm của EF cũng là trung điểm của IK, nên nằm trên trục đẳng phương của ω_E và ω_F. □

Bài toán 22.2 (Ngày 2, Câu 4; 7,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác trong AD ($D \in BC$). Điểm P thuộc đoạn AD ($P \neq A$, $P \neq D$, [P không trùng tâm nội tiếp]). Gọi X, Y, Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của P lên ba cạnh BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt BC tại điểm X' khác X.

(a) Chứng minh rằng AX', BY, CZ đồng quy.

(b) Gọi M, N là giao điểm của YZ với đường tròn (O) (M, Y, Z, N thẳng hàng theo thứ tự trên). Gọi S là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O), AP cắt (O) tại điểm T khác A. Chứng minh rằng SP, ST đẳng giác góc $\angle MSN$ và SP đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN.



Hình cho câu a).

Lời giải. **a)** Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC; vì P thuộc phân giác AD nên Q cũng thuộc AD. Theo tính chất quen thuộc, hai điểm liên hợp đẳng giác có chung đường tròn pedal, nên X' là hình chiếu của Q lên BC. Vì P thuộc phân giác góc A nên $PY = PZ$ và $AY = AZ$.

Do $\angle QBX' = \angle PBZ$ nên $\triangle QX'B \backsim \triangle PZB$, suy ra $\dfrac{QX'}{X'B} = \dfrac{PZ}{ZB}$; tương tự $\dfrac{QX'}{X'C} = \dfrac{PY}{YC}$. Từ $PY = PZ$ ta được $\dfrac{X'B}{X'C} = \dfrac{ZB}{YC}$, nên

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{AY} = 1.$$

Theo định lí Ceva, AX', BY, CZ đồng quy.

b) Gọi $E = MN \cap BC$; gọi M', N' là giao điểm thứ hai của $X'M$, $X'N$ với (O).

Bước 1: N, M', S và M, N', S thẳng hàng. Theo câu a), AX', BY, CZ đồng quy và $E = YZ \cap BC$ nên $(E, X'; B, C) = -1$. Chiếu từ M lên (O): $ME \mapsto N$, $MX' \mapsto M'$, nên $(N, M'; B, C) = -1$, tức $NBM'C$ là tứ giác điều hòa. Do đó NM' đi qua cực S của BC. Tương tự MN' đi qua S.

Bước 2: $AM' \perp PN$. Đường tròn đường kính AP đi qua Y, Z; gọi I là giao điểm thứ hai của AM' với đường tròn này. Ta có

$$\frac{IZ}{IY} = \frac{\sin \angle IAB}{\sin \angle IAC} = \frac{M'B}{M'C} = \frac{NB}{NC},$$

đẳng thức cuối do $NBM'C$ điều hòa. Vì $AY = AZ$ nên $\angle AZY = \angle AYZ$, kết hợp $\angle NBA = \angle NCA$ ta được $\triangle NZB \backsim \triangle NYC$, suy ra $\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{NZ}{NY}$. Vậy $\dfrac{IZ}{IY} = \dfrac{NZ}{NY}$.

Do $PY = PZ$ và AP là đường kính, IP và IA là hai đường phân giác của góc ZIY; IA cắt đoạn YZ nên là phân giác trong, còn IP là phân giác ngoài. Do đó IP cắt YZ tại điểm chia ngoài YZ theo tỉ số $\frac{IZ}{IY} = \frac{NZ}{NY}$, chính là N. Vậy P, I, N thẳng hàng và $AM' \perp PN$ (vì $\angle AIP = 90^\circ$). Tương tự $AN' \perp PM$.

Bước 3: P, T liên hợp đẳng giác trong tam giác SMN. Vì $NP \perp AM'$ và $NM \perp AP$ (do $AY = AZ$, $PY = PZ$),

$$(NP, NM) = (AM', AP) = (AM', AT) = (NM', NT) = (NS, NT).$$

Vậy NP, NT đẳng giác trong góc MNS; tương tự MP, MT đẳng giác trong góc NMS. Do đó P, T liên hợp đẳng giác trong tam giác SMN, và SP, ST đẳng giác trong góc MSN.

Bước 4: SP đi qua tâm (PMN). Vì $PT = AT \perp MN$, ta cần chứng minh PS, PT đẳng giác trong góc MPN, tức $\angle NPS = \angle MPT$ (các góc dưới đây là góc thường, theo hình vẽ).

Vì AT là phân giác góc A nên T là điểm chính giữa cung BC, do đó S, O, T thẳng hàng; gọi J là giao điểm thứ hai của ST với (O) thì TJ là đường kính, nên $AJ \perp AT$, tức $AJ \parallel MN$. Suy ra $\angle NTJ = \angle ANM$ và

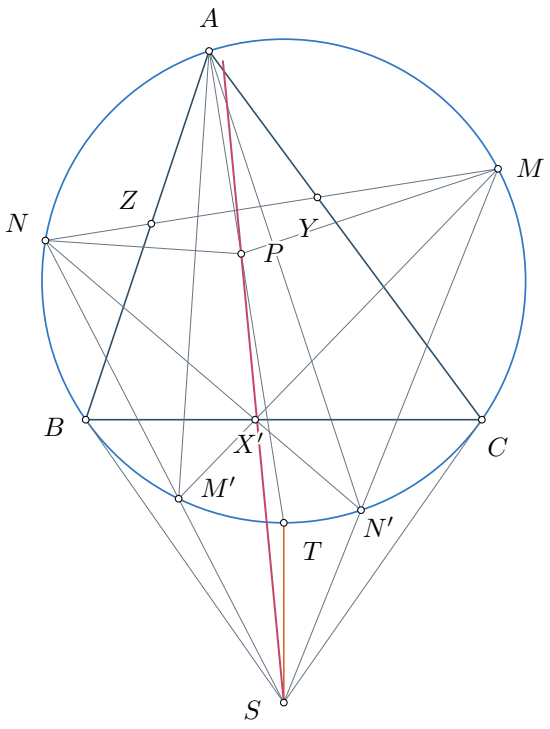
$$\angle NTS = 180^\circ - \angle ANM = 90^\circ + \angle NAT = \angle NMN' + 90^\circ - \angle TAN' = \angle NMS + \angle APM,$$

trong đó dùng $\angle NAN' = \angle NMN'$ và $AN' \perp PM$.

Mặt khác, với hai điểm liên hợp đẳng giác P, T trong tam giác SMN,

$$\begin{aligned} \angle NPS + \angle NTS &= 360^\circ - (\angle PNS + \angle TNS) - (\angle PSN + \angle TSN) \\ &= 360^\circ - \angle MNS - \angle MSN = 180^\circ + \angle NMS. \end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên, $\angle NPS = 180^\circ - \angle APM = \angle MPT$. Vậy SP đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN.



Hình cho câu b).

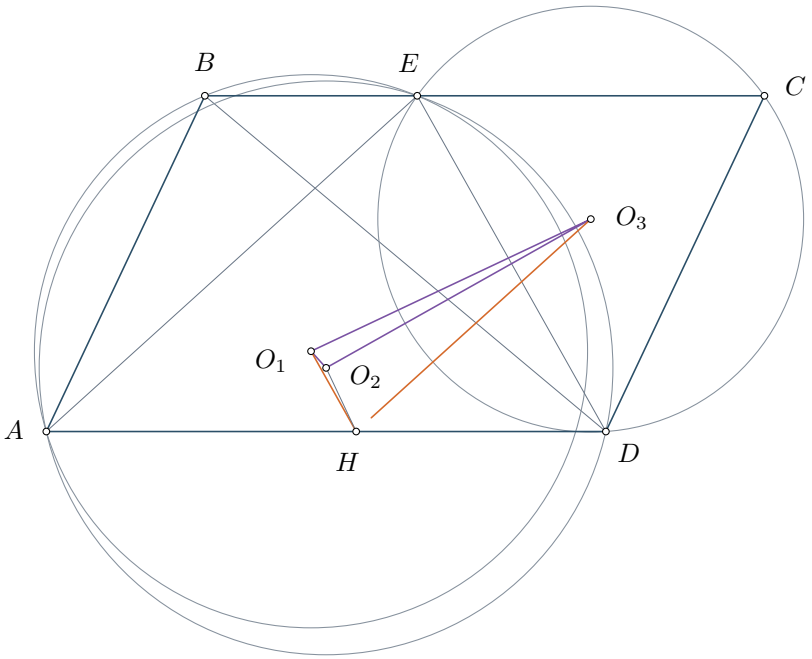
□

23 Quảng Ngãi

Bài toán 23.1 (Ngày 1, Bài 3; 7,0 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác OBC tiếp xúc với BC tại E.

(a) Giả sử tam giác ADE nhọn. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABE, ADE, CDE. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên AD.

(b) Lấy điểm S khác O sao cho SA và SD cùng tiếp xúc với (I). Gọi K là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác SAD. Chứng minh OK đi qua trung điểm của AD.



Hình cho câu a).

Lời giải. **a)** Vì AE là dây chung của $(O_1), (O_2)$ nên O_1O_2 là trung trực của AE; tương tự O_2O_3 là trung trực của DE. Do đó A, D lần lượt là điểm đối xứng của E qua O_1O_2 và O_2O_3, và $\angle O_1O_2O_3 = \angle AED$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, tam giác ADE nhọn).

Vì $\angle ABE$ tù nên $\angle AO_1E = 2(180^\circ - \angle ABE)$, suy ra $\angle O_1EA = \angle ABE - 90^\circ$. Vì $\angle DCE$ nhọn nên $\angle O_3ED = 90^\circ - \angle DCE$. Mà $\angle ABE + \angle DCE = 180^\circ$ nên $\angle O_1EA = \angle O_3ED$, suy ra $\angle O_1EO_3 = \angle AED = \angle O_1O_2O_3$. Do đó E thuộc đường tròn $(O_1O_2O_3)$.

Vậy AD là đường thẳng Steiner của điểm E đối với tam giác $O_1O_2O_3$, nên nó đi qua trực tâm của tam giác này.

b) Gọi (J) là đường tròn nội tiếp tam giác OAD, tiếp xúc với AD tại F. Phép đối xứng tâm O biến tam giác OBC thành tam giác ODA, nên biến (I) thành (J) và E thành F; do đó O là trung điểm của EF.

Gọi N, P, U, V lần lượt là tiếp điểm của (I) với SA, SD, AC, BD. Khi đó

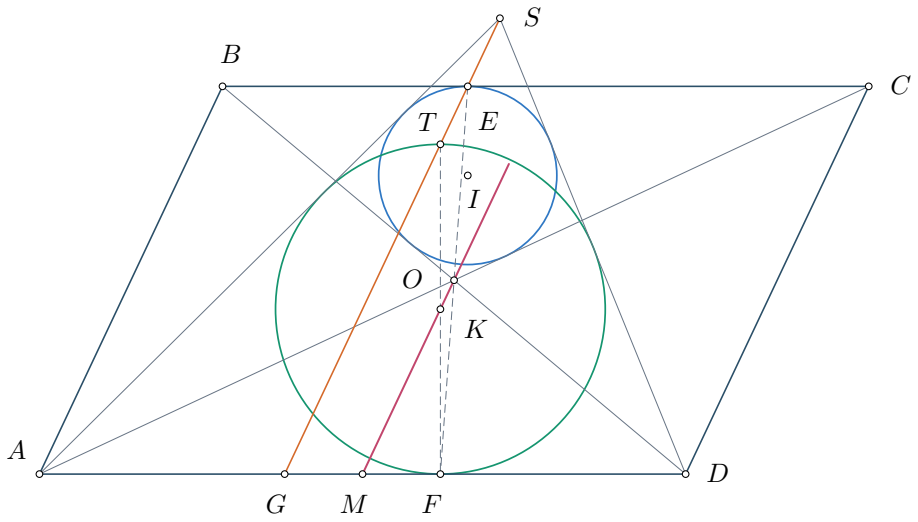
$$\begin{aligned} SA - SD &= (SN + AN) - (SP + DP) = AN - DP = AU - DV = (OA + OU) - (OD + OV) \\ &= OA - OD = OC - OB = CU - BV = CE - BE = AF - DF. \end{aligned}$$

Vì tiếp điểm F' của đường tròn nội tiếp (K) của tam giác SAD với AD thỏa mãn $AF' - DF' = SA - SD$, nên $F' \equiv F$: (K) tiếp xúc với AD tại F.

Gọi T là điểm đối xứng của F qua K, M là trung điểm của AD và G là điểm đối xứng của F qua M; khi đó G là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc S của tam giác SAD với AD.

- Phép vị tự tâm S biến đường tròn nội tiếp thành đường tròn bàng tiếp góc S của tam giác SAD biến T (tiếp tuyến tại T song song với AD) thành G, nên S, T, G thẳng hàng.
- Gọi $A' = SA \cap BC$, $D' = SD \cap BC$. Đường tròn (I) nằm khác phía với S đối với BC và tiếp xúc với SA, SD, BC, nên là đường tròn bàng tiếp góc S của tam giác $SA'D'$, tiếp xúc với $A'D'$ tại E. Vì $BC \parallel AD$, phép vị tự tâm S biến tam giác $SA'D'$ thành tam giác SAD biến E thành G, nên S, E, G thẳng hàng.

Vậy E, T, G cùng nằm trên đường thẳng SG. Phép vị tự tâm F, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến E, T, G lần lượt thành O, K, M, nên O, K, M thẳng hàng. Vậy OK đi qua trung điểm M của AD.



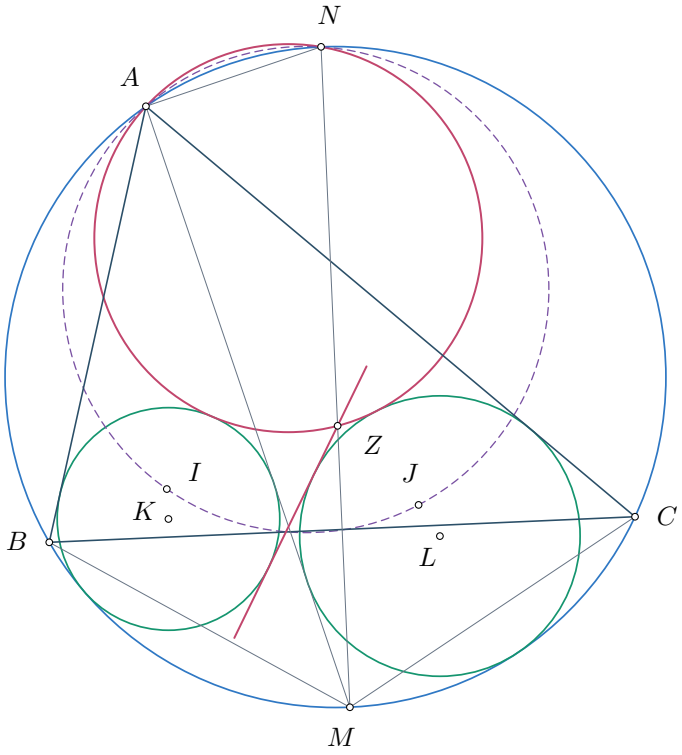
Hình cho câu b): S, T, E, G thẳng hàng; O, K, M là trung điểm của FE, FT, FG.

□

Bài toán 23.2 (Ngày 2, Bài 1; 7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $[AB \neq AC]$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cung nhỏ BC và cung BAC của đường tròn (O).

(a) Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMC. Chứng minh bốn điểm A, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.

(b) Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc với AM, AB và tiếp xúc trong với (O); (L) là đường tròn tiếp xúc với AM, AC và tiếp xúc trong với (O). Tiếp tuyến chung trong (khác AM) của (K) và (L) cắt MN tại Z. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AZN tiếp xúc với cả (K) và (L).



Đường tròn màu đỏ là (AZN); đường tròn nét đứt là (AIJ), đi qua N.

Lời giải. **a)** *Bổ đề.* Cho tam giác XYZ có tâm nội tiếp I. Một đường tròn qua X, I cắt các tia XY, XZ tại U', V'. Khi đó $XU' + XV' = XY + XZ - YZ$.

Chứng minh. Gọi U, V là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với XY, XZ. Vì XI là phân giác góc $U'XV'$ nên $IU' = IV'$; kết hợp $IU = IV$ ta có $\triangle IUU' = \triangle IVV'$, nên $UU' = VV'$ (với dấu phù hợp). Do đó $XU' + XV' = XU + XV = XY + XZ - YZ$.

Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn (AIJ) với AB, AC, AM. Áp dụng bổ đề cho các tam giác ABM (tâm nội tiếp I) và ACM (tâm nội tiếp J):

$$AD + AF = AB + AM - BM, \qquad AE + AF = AC + AM - CM.$$

Vì $BM = CM$ nên $AB - AD = AC - AE$, tức $BD = CE$. Mặt khác $NB = NC$ và $\angle NBD = \angle NBA = \angle NCA = \angle NCE$, nên $\triangle NBD = \triangle NCE$, suy ra $\angle NDB = \angle NEC$, hay $\angle NDA = \angle NEA$. Vậy N thuộc đường tròn $(ADE) \equiv (AIJ)$, tức A, N, I, J đồng viên.

b) Xét phép biến hình Φ là hợp của phép nghịch đảo cực A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác AM. Gọi P, Q lần lượt là chân phân giác trong và ngoài góc A trên BC. Khi đó Φ đổi chỗ $B \leftrightarrow C$, $(O) \leftrightarrow BC$, $M \leftrightarrow P$, $N \leftrightarrow Q$, đường thẳng $MN \leftrightarrow (APQ)$, và biến $(K), (L)$ lần lượt thành $(K'), (L')$ là đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác APC, APB.

Bước 1: tiếp tuyến chung ngoài thứ hai d của $(K'), (L')$ đi qua Q. Vì $PK' \perp PL'$ và AP, BC là hai đường phân giác của góc $K'PL'$; đồng thời AP, AQ là hai đường phân giác của góc $K'AL'$. Đường thẳng AP cắt đoạn $K'L'$ tại một điểm chia trong theo tỉ số $\frac{AK'}{AL'} = \frac{PK'}{PL'}$, nên AQ và BC (hai phân giác ngoài) cắt đường thẳng $K'L'$ tại cùng một điểm chia ngoài theo tỉ số đó, chính là Q. Vậy $Q \in K'L'$ là tâm vị tự ngoài của $(K'), (L')$, nên tiếp tuyến chung ngoài $d \neq BC$ đi qua Q.

Bước 2: áp dụng định lí Feuerbach. Gọi $R = d \cap AP$. Ba cạnh của tam giác PQR đều tiếp xúc với $(K'), (L')$, nên đây là đường tròn nội tiếp và một đường tròn bàng tiếp của tam giác PQR. Vì $QA \perp AP$ nên A là chân đường cao kẻ từ Q; gọi Z' là chân đường cao kẻ từ P của tam giác PQR, thì $Z' \in d$ và $Z' \in (APQ)$. Theo định lí Feuerbach, đường tròn Euler ω_9 của tam giác PQR đi

qua A, Z' và tiếp xúc với $(K'), (L')$; hơn nữa ω_9 tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp và tiếp xúc ngoài với đường tròn bàng tiếp, nên $(K'), (L')$ nằm khác phía đối với ω_9.

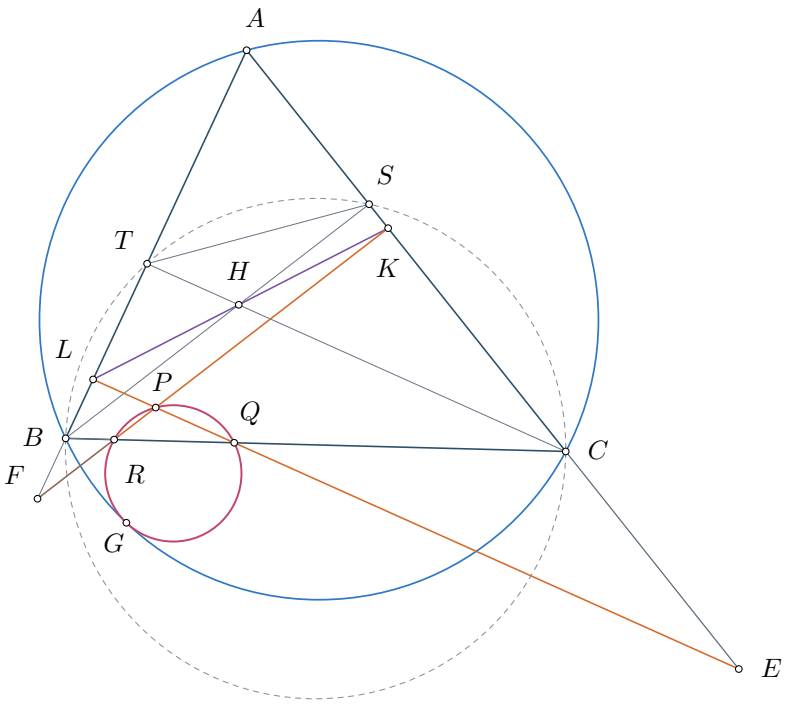
Bước 3: quay về bằng Φ. Vì ω_9 đi qua cực A, Φ biến ω_9 thành một đường thẳng ℓ tiếp xúc với $(K), (L)$ và đi qua $\Phi(Z') \in \Phi\big((APQ)\big) = MN$. Do $(K'), (L')$ nằm khác phía đối với ω_9, hai đường tròn $(K), (L)$ nằm khác phía đối với ℓ, tức ℓ là tiếp tuyến chung trong (khác AM vì ℓ không qua A). Suy ra $\Phi(Z') = \ell \cap MN = Z$. Cuối cùng, d đi qua Q, Z' và tiếp xúc với $(K'), (L')$, nên $\Phi(d)$ là đường tròn đi qua A, N, Z và tiếp xúc với (K), (L). Vậy (AZN) tiếp xúc với cả (K) và (L). □

24 TP. Quảng Ninh

Bài toán 24.1 (Ngày 1, Bài 3; 5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp (O). Một đường tròn $(\omega) \neq (O)$ đi qua B và C cắt các đoạn AB và AC tại các điểm thứ hai lần lượt là T và S. Gọi H là giao điểm của BS và CT. Một đường thẳng qua H và không đi qua các đỉnh của tam giác ABC, cắt các đoạn AB và AC lần lượt tại L và K. Đường thẳng qua K và song song với BS cắt đường thẳng AB tại F. Đường thẳng qua L và song song với CT cắt đường thẳng AC tại E.

(a) Chứng minh rằng $\dfrac{TS}{KL} = \dfrac{BC}{EF}$.

(b) Các đường thẳng KF và LE cắt BC lần lượt tại R và Q. KF cắt LE tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với (O).



Đường tròn màu đỏ là (PQR), tiếp xúc với (O) tại G.

Lời giải. **a)** Vì $BCST$ nội tiếp nên $\triangle AST \backsim \triangle ABC$, suy ra $\dfrac{TS}{BC} = \dfrac{AS}{AB}$. Do $KF \parallel SB$ và $LE \parallel CT$,

$$(FK, FL) = (BS, BT) = (CS, CT) = (EK, EL),$$

nên K, L, E, F đồng viên, suy ra $\triangle AKL \backsim \triangle AFE$ và $\dfrac{KL}{EF} = \dfrac{AK}{AF}$. Lại do $BS \parallel KF$ nên $\dfrac{AS}{AB} = \dfrac{AK}{AF}$. Vậy $\dfrac{TS}{BC} = \dfrac{KL}{EF}$, tức $\dfrac{TS}{KL} = \dfrac{BC}{EF}$.

b) *Bước 1:* $(ABC), (ALE), (AKF)$ *có chung một điểm* $G \neq A$. Do $HB \parallel KF$ nên $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BL}} = \dfrac{\overline{HK}}{\overline{HL}}$; do $HC \parallel LE$ nên $\dfrac{\overline{HK}}{\overline{HL}} = \dfrac{\overline{CK}}{\overline{CE}}$. Suy ra $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BL}} = \dfrac{\overline{CK}}{\overline{CE}}$. Gọi G là giao điểm khác A của (ABC) và (AKF); khi đó G là tâm phép vị tự quay biến $B \mapsto C$, $F \mapsto K$. Từ tỉ số trên, phép vị tự quay này biến $L \mapsto E$, nên $\triangle GBL \backsim \triangle GCE$, suy ra $G \in (ALE)$.

Bước 2: $G \in (PQR)$. Xét tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng AB, AC, LE, BC: vì $G \in (ABC) \cap (ALE)$ nên G là điểm Miquel của nó, do đó $G \in (LBQ)$ và $G \in (CEQ)$. Tương tự với bốn đường thẳng AB, AC, KF, BC, ta có $G \in (BFR)$. Cuối cùng, với bốn đường thẳng AB, BC, KF, LE, hai đường tròn $(LBQ), (BFR)$ cùng đi qua G nên G là điểm Miquel, suy ra $G \in (PQR)$.

Bước 3: (PQR) *tiếp xúc với* (O) *tại* G. Từ các đường tròn $(BFRG)$, $(KLEF)$, $(CEQG)$,

$$(GB, GR) = (FB, FR) = (FL, FK) = (EL, EK) = (EQ, EC) = (GQ, GC),$$

tức GR, GQ đẳng giác trong góc BGC. Gọi t là tiếp tuyến tại G của $(O) = (GBC)$; khi đó

$$(t, GR) = (t, GB) + (GB, GR) = (CG, CB) + (GQ, GC) = (GQ, CB) = (QG, QR),$$

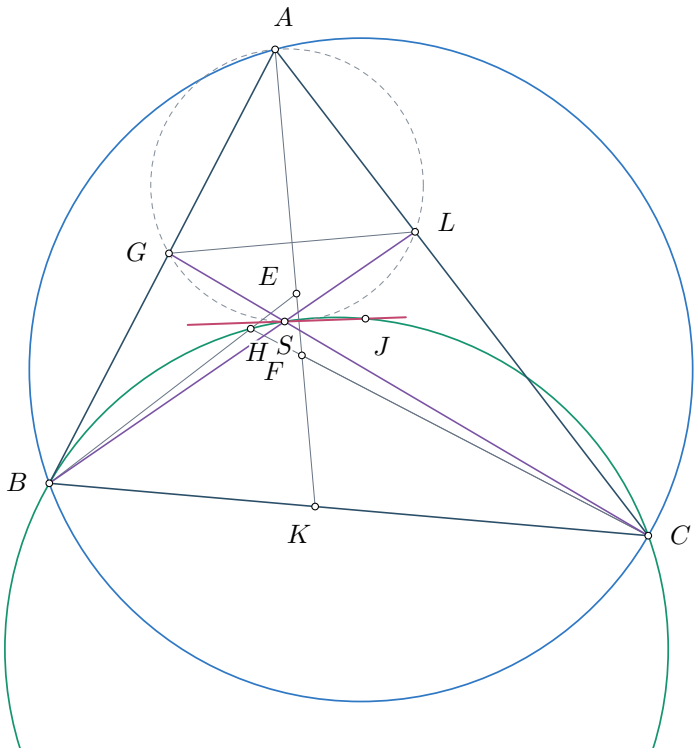
nên t cũng tiếp xúc với $(GQR) = (PQR)$. Vậy (PQR) tiếp xúc với (O) tại G. □

Nhận xét. Mấu chốt của lời giải là bổ đề quen thuộc: nếu Q, R nằm trên cạnh BC và GQ, GR đẳng giác trong góc BGC thì đường tròn (GQR) tiếp xúc với đường tròn (GBC) tại G. Bài toán này thuộc một chuỗi bài toán về hai đường tròn tiếp xúc nhau mà tác giả đã khai thác tại đây.

Bài toán 24.2 (Ngày 2, Bài 7; 6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định, A dịch chuyển trên cung lớn BC. Phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại K. Gọi H là trực tâm tam giác ABC; BH và CH cắt AK lần lượt tại E và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBE cắt AB tại điểm G khác B. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KCF cắt AC tại L khác C.

(a) Chứng minh rằng $AG = AL = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB + AC}$.

(b) Gọi Q là giao điểm của GL và BC, S là giao điểm của BL và CG. Chứng minh rằng đường thẳng QS luôn đi qua một điểm cố định khi A dịch chuyển trên cung lớn BC thỏa mãn đề bài.



Đường tròn xanh lá là đường tròn cố định (BSC); QS đi qua J.

Lời giải. **a)** Vì $BKEG$ và $CKFL$ nội tiếp nên $\angle GKA = \angle GBE = \angle ABE = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACF = \angle LCF = \angle LKA$. Kết hợp $\angle GAK = \angle LAK$ và cạnh chung AK, ta được $\triangle GAK = \triangle LAK$, nên $AG = AL$.

Gọi AD, BB' là các đường cao của tam giác ABC và R là trung điểm của EF. Theo định lí cosin, $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AB \cdot AC \cos A = 2AC \cdot AB'$. Vì H, B', C, D nằm trên đường tròn đường kính HC nên $AH \cdot AD = AC \cdot AB'$.

Phép đối xứng qua phân giác AK đổi chỗ phương của AB và AC, nên đổi chỗ phương của $CH \perp AB$ và $BH \perp AC$; do đó $\angle HEF = \angle HFE$, tức tam giác HEF cân tại H và $HR \perp EF$. Suy ra R, D thuộc đường tròn đường kính HK, nên $AR \cdot AK = AH \cdot AD = AC \cdot AB'$. Vậy

$$AK \cdot (AE + AF) = 2AK \cdot AR = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

Mặt khác $AK \cdot AE = AG \cdot AB$ và $AK \cdot AF = AL \cdot AC$ (do $KEGB$, $KFLC$ nội tiếp), nên $AK \cdot (AE + AF) = AG \cdot AB + AL \cdot AC = AL \cdot (AB + AC)$. Từ đó $AG = AL = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB + AC}$.

b) *Bước 1: $AGSL$ nội tiếp.* Theo câu a),

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AG \cdot (AB + AC) = BG \cdot BA + CL \cdot CA.$$

Gọi X là giao điểm thứ hai của (ABL) với BC. Khi đó $CB \cdot CX = CL \cdot CA$, nên $BX \cdot BC = BC^2 - CB \cdot CX = BG \cdot BA$, tức A, G, X, C đồng viên. Do đó $\angle ALS + \angle AGS = \angle ALB + \angle AGC = \angle AXB + \angle AXC = 180^\circ$, nên A, G, S, L đồng viên.

Bước 2: SQ là phân giác ngoài của góc BSC. Trong tam giác ABC có $BL \cap CG = S$ và $GL \cap BC = Q$ nên $S(A, Q; G, L) = -1$. Vì $AGSL$ nội tiếp và $AG = AL$ nên SA là phân giác của góc GSL; do đó SQ là phân giác ngoài của góc GSL, cũng là phân giác ngoài của góc BSC.

Bước 3: Kết luận. Ta có $\angle BSC = \angle GSL = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC$ không đổi, nên S chạy trên một cung cố định của đường tròn cố định (BSC) (ảnh của (O) qua phép đối xứng

trục BC). Phân giác ngoài SQ của góc BSC đi qua điểm chính giữa J của cung BC chứa S của đường tròn này, là một điểm cố định. Vậy QS luôn đi qua điểm cố định J. □

25 Quảng Trị

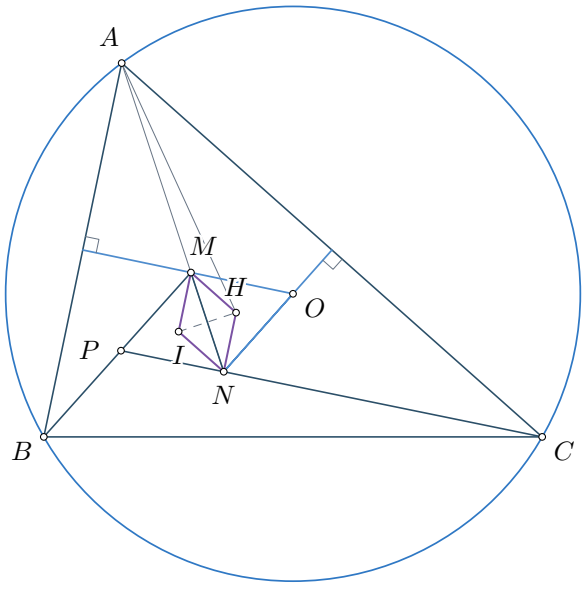
Bài toán 25.1 (Vòng 1, Câu 3). Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) có tâm O. Các đường trung trực của AB, AC cắt đường phân giác trong của góc BAC lần lượt tại M, N. Gọi $P = BM \cap CN$; H là trực tâm tam giác OMN và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PMN.

(a) Chứng minh $MHNI$ là hình thoi.

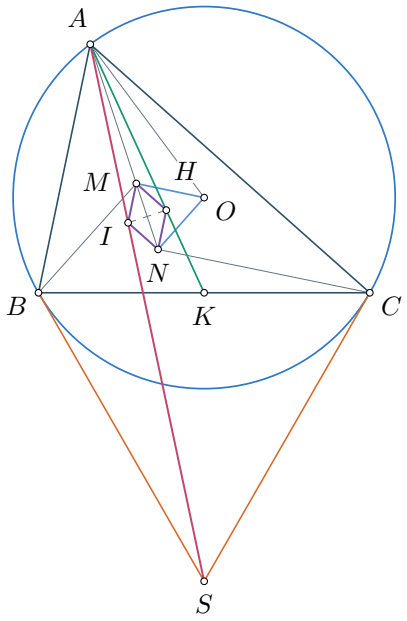
(b) Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở S. Chứng minh S, A, I thẳng hàng.

Lời giải. **a)** Đặt $\theta = \dfrac{1}{2}\angle BAC$. Vì $MA = MB$ và $NA = NC$, ta có $\angle PMN = \angle PNM = 2\theta$. Do I là tâm nội tiếp tam giác PMN, suy ra $\angle IMN = \angle INM = \theta$, nên $IM = IN$, $MI \parallel AB$ và $NI \parallel AC$.

Mặt khác, $OM \perp AB$, $ON \perp AC$ và H là trực tâm tam giác OMN, nên $NH \parallel AB$, $MH \parallel AC$. Vậy $MHNI$ là hình bình hành có $IM = IN$, tức là hình thoi.



(a)



(b)

b) Hai tam giác cân AMB, ANC đồng dạng, nên $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{AC}$. Do $NH \parallel AB$, $MH \parallel AC$ và $\angle BAN = \angle CAM$, ta có

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{S_{ABN}}{S_{ACM}} = \frac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM} = 1.$$

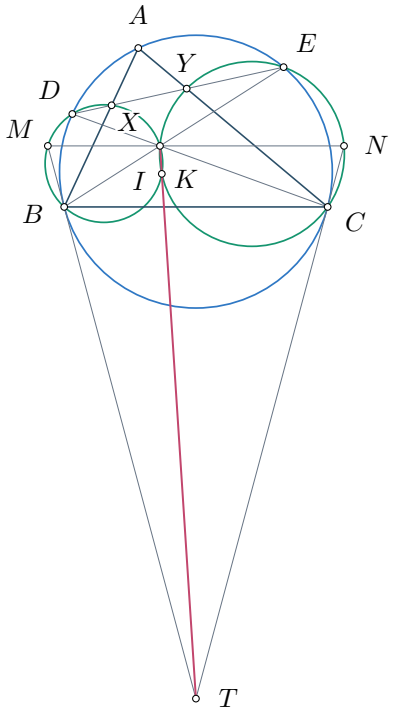
Ở đây S_{UVW} là diện tích tam giác UVW. Suy ra AH đi qua trung điểm K của BC.

Theo câu a), H, I đối xứng qua MN, tức đường phân giác của góc BAC. Vì thế AI là đường đẳng giác của trung tuyến AK, hay là đường đối trung tại A. Mà AS cũng là đường đối trung tại A do SB, SC là hai tiếp tuyến của (O). Vậy S, A, I thẳng hàng. □

Bài toán 25.2 (Vòng 2, Câu 7; 7,0 điểm). Trên đường tròn (O) cố định, cho dây cung BC cố định khác đường kính và điểm A di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và không cân. Gọi D, E lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ AB, AC của đường tròn (O). Đoạn thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Giả sử các đường tròn $(BDX), (CEY)$ cắt nhau tại hai điểm I, K phân biệt và các đường tròn $(BEX), (CDY)$ cắt nhau tại hai điểm R, S phân biệt.

(a) Chứng minh rằng $\angle BAC \neq 60^\circ$ và đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Chứng minh rằng đường thẳng RS đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và trung điểm RS di động trên một đường tròn cố định.



Hình cho câu a): IK đi qua giao điểm T của hai tiếp tuyến tại B, C.

Lời giải. **a)** Vì D, E là điểm chính giữa các cung nên CD, BE là phân giác của tam giác ABC; gọi $I' = BE \cap CD$ là tâm nội tiếp. Ta có

$$\angle BXD = \angle BED + \angle ABE = \angle I'CB + \angle I'BC = \angle BI'D,$$

nên $I' \in (BDX)$; tương tự $I' \in (CEY)$. Không mất tổng quát, $I \equiv I'$.

Giả sử $\angle BAC = 60^\circ$. Khi đó $\angle IBD = \angle EBD = \frac{\angle B + \angle C}{2} = 60^\circ$, tương tự $\angle ICE = 60^\circ$, và $\angle DIE = \angle BIC = 120^\circ$. Tiếp tuyến tại I của (BDI) tạo với ID góc 60°, tiếp tuyến tại I của (CEI) tạo với IE góc 60°, nên hai tiếp tuyến này cùng là phân giác của góc DIE; tức (BDX) và (CEY) tiếp xúc tại I, mâu thuẫn. Vậy $\angle BAC \neq 60^\circ$.

Đường thẳng qua I song song với BC cắt $(BDX), (CEY)$ lần thứ hai tại M, N; gọi $T = BM \cap CN$. Ta có $\angle TBC = \angle BMI = \angle BDI = \angle BDC = \angle BAC$, nên TB tiếp xúc với (O); tương tự TC tiếp xúc với (O). Do đó T là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O), cố định. Hơn nữa $\angle TMN = \angle TBC = \angle TCB = \angle TNM$ nên $TM = TN$, kết hợp $TB = TC$:

$$\mathcal{P}_{(BDX)}(T) = \overline{TM} \cdot \overline{TB} = \overline{TN} \cdot \overline{TC} = \mathcal{P}_{(CEY)}(T).$$

Vậy T thuộc trục đẳng phương IK, tức IK luôn đi qua điểm cố định T.

b) Gọi P, Q là giao điểm thứ hai của (CDY), (BEX) với BC. Từ các tứ giác nội tiếp, $\triangle DPC \backsim \triangle BDE$, suy ra $\dfrac{CP}{BE} = \dfrac{CD}{DE}$, tức $CP = \dfrac{BE \cdot CD}{DE}$. Tương tự $BQ = \dfrac{BE \cdot CD}{DE} = CP$. Do đó PQ và BC có chung trung điểm L, và

$$\mathcal{P}_{(CDY)}(L) = \overline{LC} \cdot \overline{LP} = \overline{LB} \cdot \overline{LQ} = \mathcal{P}_{(BEX)}(L),$$

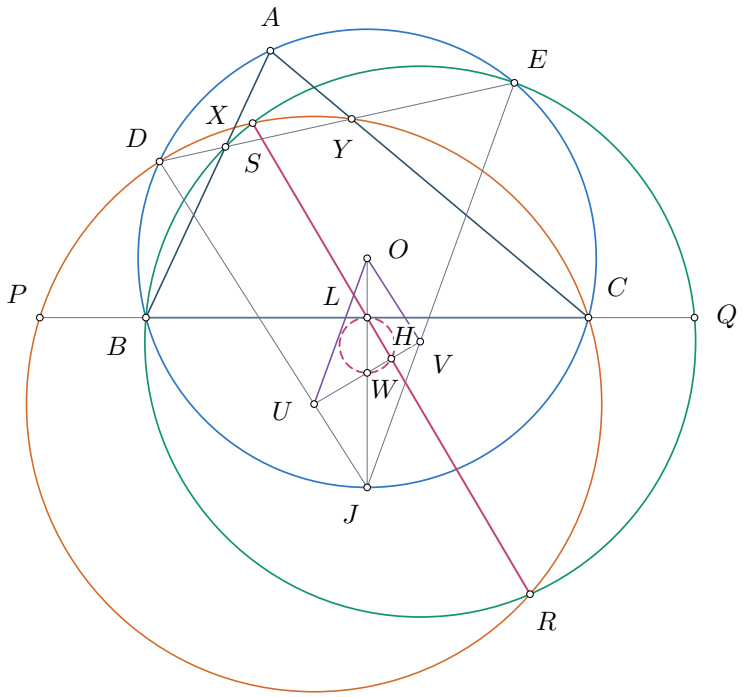
tức L thuộc trục đẳng phương RS.

Gọi J là điểm chính giữa cung nhỏ BC (cố định), U, V là tâm của (CDY), (BEX). Ta có

$$\angle UDC = 90^\circ - \angle DPC = 90^\circ - \angle CYE = 90^\circ - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = \angle JDC,$$

nên J, U, D thẳng hàng; tương tự J, V, E thẳng hàng. Vì $JB = JI$ và $DB = DI$, JD là trung trực của BI, tức $JU \perp BE$; mà $OV \perp BE$ (dây chung của (O) và (BEX)), nên $JU \parallel OV$. Tương tự $JV \parallel OU$. Vậy $JUOV$ là hình bình hành, và trung điểm W của UV là trung điểm của OJ, cố định.

Gọi H là trung điểm RS; vì $UV \perp RS$ tại H và $L \in RS$ nên $\angle WHL = 90°$. Vậy H thuộc đường tròn cố định đường kính WL.



Hình cho câu b): trung điểm H của RS thuộc đường tròn đường kính WL.

□

26 Sơn La

Bài toán 26.1 (Câu 6). Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, M là trung điểm của BC. Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) lần thứ hai tại K và cắt đường thẳng AM lần thứ hai tại Q. Đặt $P = EF \cap AD$ và giả sử tia PM cắt (J) tại N. Chứng minh rằng:

(a) Ba đường thẳng KF, EQ, BC đồng quy hoặc đôi một song song.

(b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC.

Lời giải. **a)** Đường tròn (J) có đường kính AH. Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $ME = MC$. Do đó

$$(ME, EA) = (EC, CM) = (EH, HA),$$

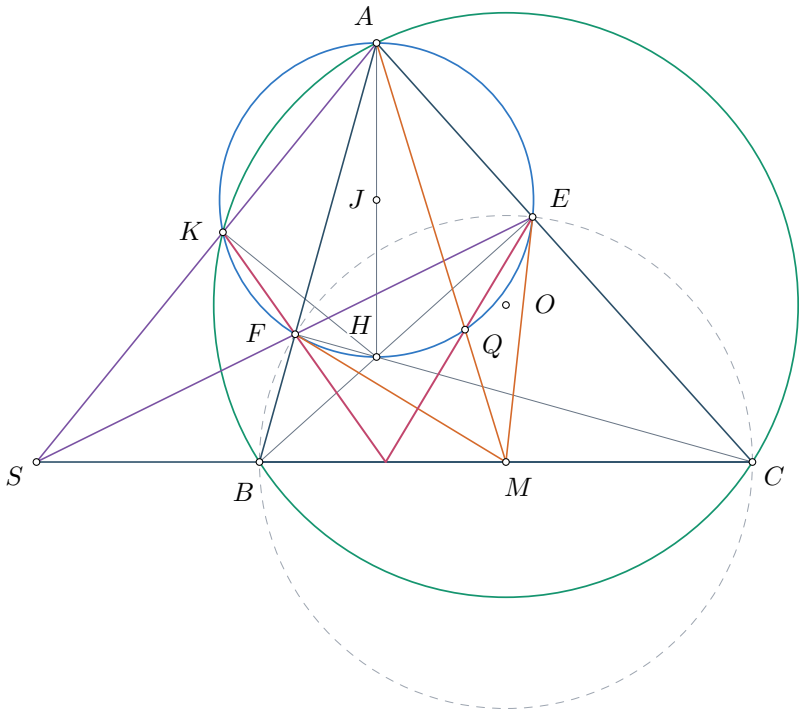
suy ra ME là tiếp tuyến của (J) tại E. Tương tự, MF là tiếp tuyến của (J) tại F.

Đặt $S = EF \cap BC$. Vì

$$\mathcal{P}_{(J)}(S) = \overline{SE} \cdot \overline{SF} = \overline{SB} \cdot \overline{SC} = \mathcal{P}_{(O)}(S),$$

nên S thuộc trục đẳng phương AK của (J) và (O).

Áp dụng định lí Pascal cho lục giác suy biến A, Q, E, F, F, K nội tiếp (J), trong đó cạnh FF được hiểu là tiếp tuyến FM. Vì $AQ \cap FM = M$ và $EF \cap KA = S$, suy ra ba đường thẳng QE, KF, MS đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $MS = BC$, ta được điều phải chứng minh.



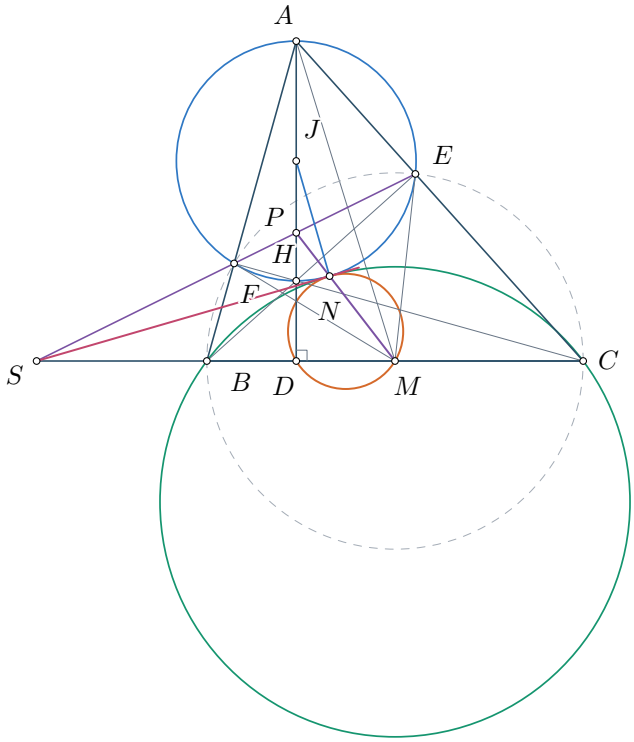
Hình 1. Áp dụng Pascal với lục giác suy biến A, Q, E, F, F, K.

b) Đối với (J), EF là đường đối cực của M. Vì $P \in EF$, đường đối cực của P đi qua M và vuông góc với JP, nên chính là BC. Do $S \in EF \cap BC$, theo định lí La Hire, PM là đường đối cực của S. Mà $N \in PM \cap (J)$, suy ra SN là tiếp tuyến của (J) tại N.

Mặt khác, $(SD, BC) = -1$ nên ta có $\overline{SB} \cdot \overline{SC} = \overline{SD} \cdot \overline{SM}$. Do đó

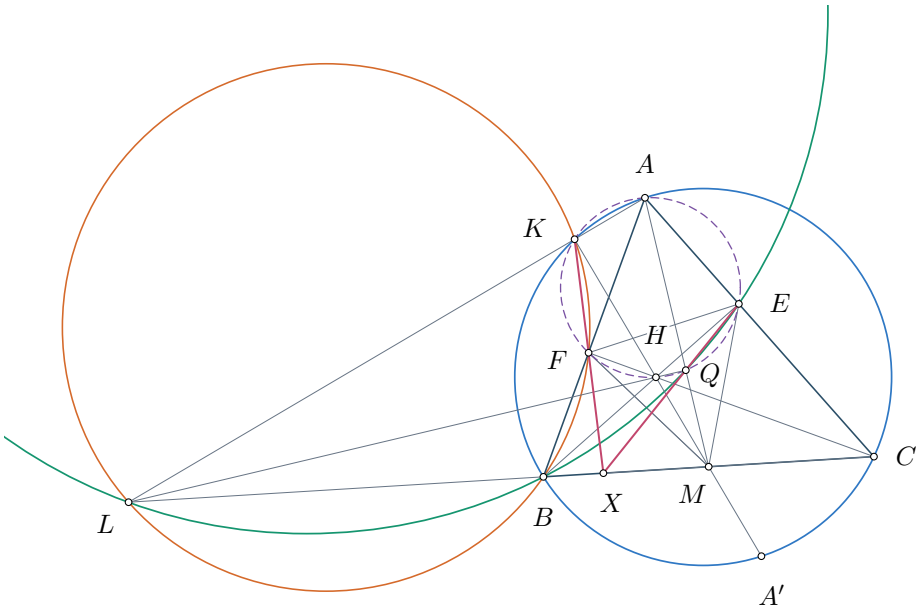
$$SN^2 = \overline{SE} \cdot \overline{SF} = \overline{SB} \cdot \overline{SC} = \overline{SD} \cdot \overline{SM}.$$

Suy ra SN là tiếp tuyến tại N của cả hai đường tròn (BNC) và (DMN). Vậy (DMN) tiếp xúc với (BNC) tại N.



Hình 2. SN là tiếp tuyến chung tại N.

Cách khác cho câu a). Gọi A' là điểm đối xứng của H qua M; $BHCA'$ là hình bình hành nên AA' là đường kính của (O), suy ra $A'K \perp AK$; mà $HK \perp AK$ nên K, H, M, A' thẳng hàng. Gọi $L = AK \cap BC$; H là trực tâm tam giác ALM nên $LH \perp AM$ và LH cắt AM tại Q. Từ đó các tứ giác $LBQE$, $KLBF$ nội tiếp (vì $\overline{HL} \cdot \overline{HQ} = \overline{HB} \cdot \overline{HE}$ và $\overline{AF} \cdot \overline{AB} = \overline{AK} \cdot \overline{AL}$). Ba đường thẳng BC, KF, EQ lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(LBQE), (KLBF)$; $(KLBF), (J)$; $(J), (LBQE)$, nên đồng quy hoặc đôi một song song.



Hình cho cách khác của câu a).

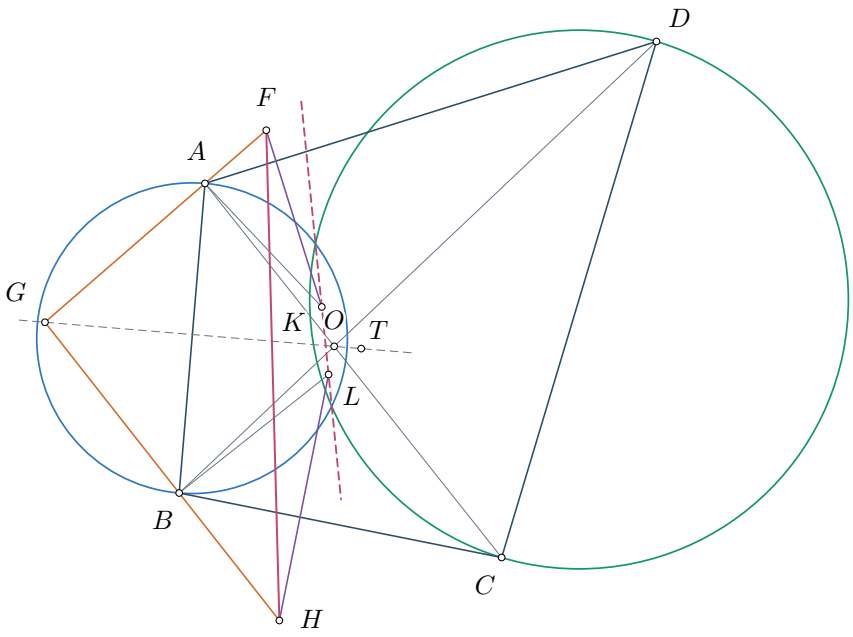
Cách khác cho câu b). AK, EF, BC đồng quy tại L (trục đẳng phương của $(O), (J), (BFEC)$). Gọi $S' = JL \cap MP$; P là trực tâm tam giác JLM nên $LDPS'$ nội tiếp và $\overline{JS'} \cdot \overline{JL} = \overline{JP} \cdot \overline{JD}$. Từ $(A, H; P, D) = -1$ và J là trung điểm AH được $JH^2 = \overline{JP} \cdot \overline{JD}$. Do đó $JS' \cdot JL = JN^2$, mà $NS' \perp JL$, nên LN tiếp xúc (J). Suy ra $LN^2 = LK \cdot LA = LB \cdot LC = LD \cdot LM$ (vì A, K, D, M đồng viên), tức LN là tiếp tuyến chung của (NBC) và (DMN). □

27 Tây Ninh

Bài toán 27.1 (Buổi 1, Câu 3; 5,0 điểm). Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và không vuông góc nhau, đồng thời hai đường chéo không vuông góc với các cạnh của tứ giác. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đi qua O và vuông góc với các đường thẳng AB, AD, BC. Trên đường thẳng d_1 lấy một điểm G di động. Đường thẳng GA cắt d_2 tại F sao cho điểm A nằm giữa G và F, đường thẳng GB cắt d_3 tại H sao cho điểm B nằm giữa G và H.

(a) Gọi K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác OAD và OBC. Gọi $(C_1), (C_2)$ lần lượt là đường tròn đường kính AB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng KL chính là trục đẳng phương Δ của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

(b) Chứng minh khi G thay đổi, đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định hoặc luôn song song với một đường thẳng cố định.



Đường nét đứt màu đỏ là trục đẳng phương $\Delta = KL$.

Lời giải. **a)** Trong tam giác OAD có trực tâm K, kẻ đường cao AA' ($A' \in OD$) và DD' ($D' \in OA$). Vì $AA' \perp BD$ nên $\angle AA'B = 90^\circ$, tức $A' \in (C_1)$; do đó $\mathcal{P}_{(C_1)}(K) = \overline{KA} \cdot \overline{KA'}$. Tương tự, vì $DD' \perp AC$ nên $D' \in (C_2)$ và $\mathcal{P}_{(C_2)}(K) = \overline{KD} \cdot \overline{KD'}$. Mặt khác $\angle AA'D = \angle AD'D = 90^\circ$ nên A, D, A', D' đồng viên, suy ra $\overline{KA} \cdot \overline{KA'} = \overline{KD} \cdot \overline{KD'}$. Vậy K nằm trên trục đẳng phương Δ của $(C_1), (C_2)$. Tương tự, xét tam giác OBC ta có $L \in \Delta$. Vậy $KL \equiv \Delta$.

b) Xét hai tam giác FAK và HBL. Ta tìm giao điểm của các cặp cạnh tương ứng.

- $FA \cap HB = G$ theo giả thiết.
- Vì K là trực tâm tam giác OAD nên $OK \perp AD$, tức $K \in d_2$; do đó $FK \equiv d_2$. Tương tự $HL \equiv d_3$. Suy ra $FK \cap HL = O$.
- $AK \perp OD$ và $BL \perp OC$, nên AK, BL là hai đường cao của tam giác OAB; do đó $AK \cap BL = T$ là trực tâm tam giác OAB.

Vì T là trực tâm tam giác OAB nên $OT \perp AB$, tức $T \in d_1$. Do $G \in d_1$ nên G, O, T thẳng hàng. Theo định lí Desargues đảo, ba đường thẳng nối các đỉnh tương ứng FH, AB, KL đồng quy hoặc đôi một song song. Vì $KL \equiv \Delta$ cố định (câu a) và AB cố định, nên FH luôn đi qua giao điểm cố định của AB và Δ, hoặc luôn song song với AB (khi $AB \parallel \Delta$). □

28 Thái Nguyên

Bài toán 28.1 (Câu 5). Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn tâm E, bán kính EM cắt cung nhỏ BC của đường tròn (O) và tia MO tại các điểm thứ hai tương ứng là D và Q.
Lấy điểm P thuộc đoạn thẳng AD ($P \neq A,\ P \neq D$) sao cho $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$.

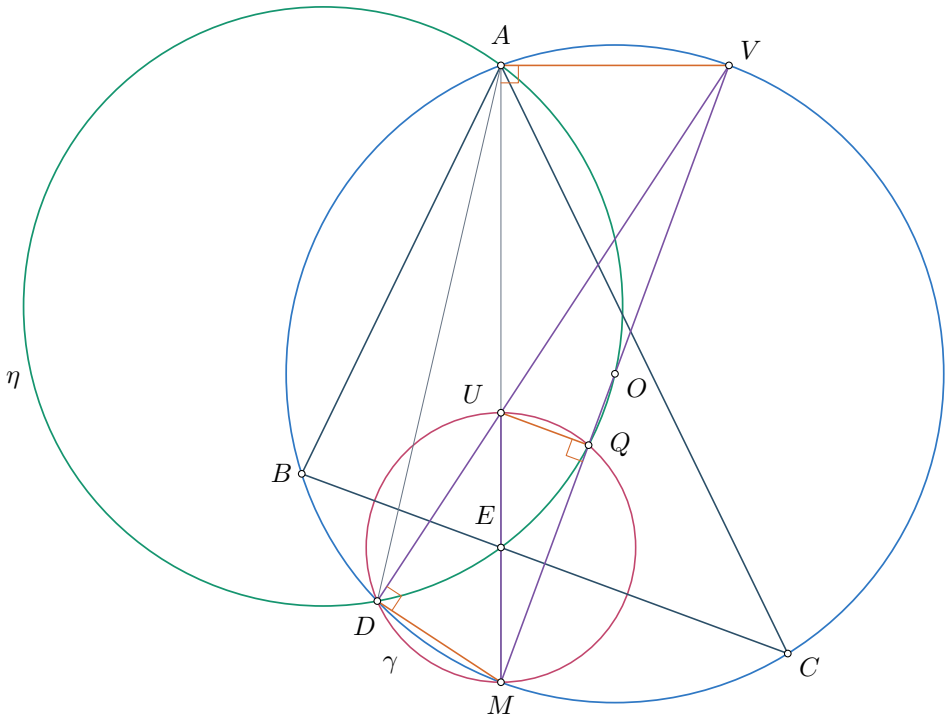
(a) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, Q, D đồng viên.

(b) Gọi giao điểm của AM với BP, CP tương ứng là K, L. Chứng minh rằng OP là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

Lời giải. Đặt $\alpha = \widehat{BAM} = \widehat{MAC}$ và gọi γ là đường tròn tâm E, bán kính EM.

a) Gọi U, V lần lượt là các điểm đối xứng của M qua E, O. Khi đó MU, MV là đường kính của γ và (O), nên $DU \perp DM$, $DV \perp DM$. Suy ra U, D, V thẳng hàng.

Mặt khác, $AV \perp AM \equiv MU$ và $QU \perp QM \equiv MV$. Vậy A, Q, D là ba chân đường cao của tam giác MUV. Vì E là trung điểm của MU, bốn điểm A, E, Q, D cùng thuộc đường tròn Euler η của tam giác MUV.

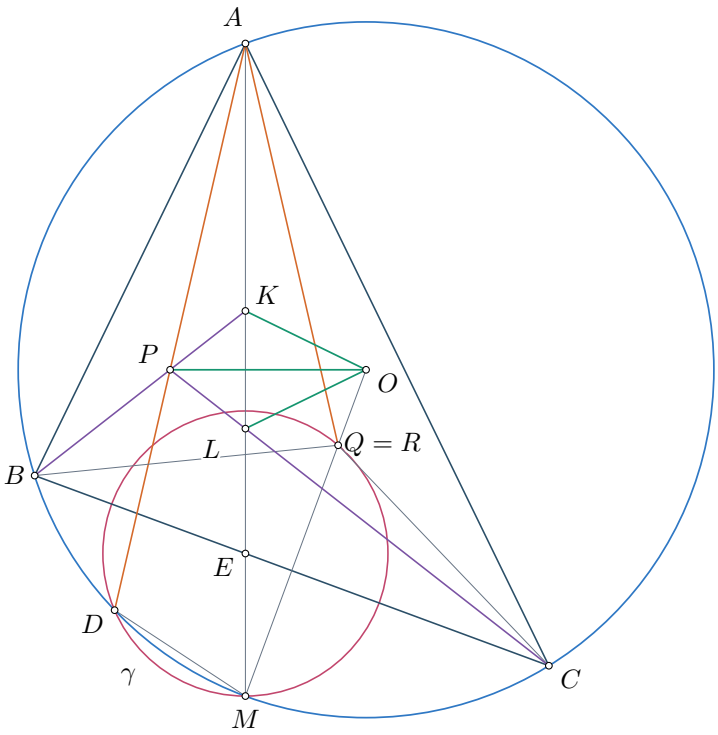


b) Vì M là điểm chính giữa cung nhỏ BC, MO là đường trung trực của BC. Kết hợp $EM = EQ$ và $E \in BC$, suy ra Q là điểm đối xứng của M qua BC. Do đó $QB = QC$ và $\widehat{QBC} = \widehat{QCB} = \widehat{MBC} = \alpha$. Từ câu a) và $ED = EQ$, suy ra hai đường thẳng AD, AQ đối xứng nhau qua AM.

Đặt $\beta = \widehat{ABP} = \widehat{ACP}$. Vì P nằm trong đoạn AD, ta có $2\beta < \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180°$. Dựng tam giác cân BRC, với R cùng phía với A đối với BC, sao cho $\widehat{RBC} = \widehat{BCR} = \beta$.

Khi đó BR, CR lần lượt đẳng giác với BP, CP trong các góc ABC, ACB. Theo tính chất các đường thẳng đẳng giác đồng quy, AR đẳng giác với $AP \equiv AD$. Vì thế A, R, Q thẳng hàng. Lại có $RB = RC$, nên $R \in OM$. Do $A \notin OM$, suy ra $R = Q$, từ đó $\beta = \alpha$.

Bởi vậy, $\widehat{ABK} = \widehat{BAK} = \alpha$ và $\widehat{ACL} = \widehat{CAL} = \alpha$, nên $KA = KB$, $LA = LC$. Kết hợp $OA = OB = OC$, suy ra $OK \perp AB$, $OL \perp AC$. Do đó $\widehat{OKL} = \widehat{KLO} = 90^\circ - \alpha$, nên $OK = OL$. Đồng thời, $\widehat{PKL} = \widehat{KLP} = 2\alpha$, nên $PK = PL$. Vậy OP là đường trung trực của KL.



Cách khác cho câu a). Gọi MO cắt BC, (O) tại I', N. Vì Q đối xứng với M qua BC, $ME \cdot MA = MB^2 = MI' \cdot MN = MI' \cdot 2MO = MO \cdot MQ$, nên A, E, Q, O đồng viên. Mặt khác OE là trung trực của DM nên $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle DOM = \angle DAM = \angle DAE$, tức A, E, D, O đồng viên. Vậy A, E, Q, D đồng viên.

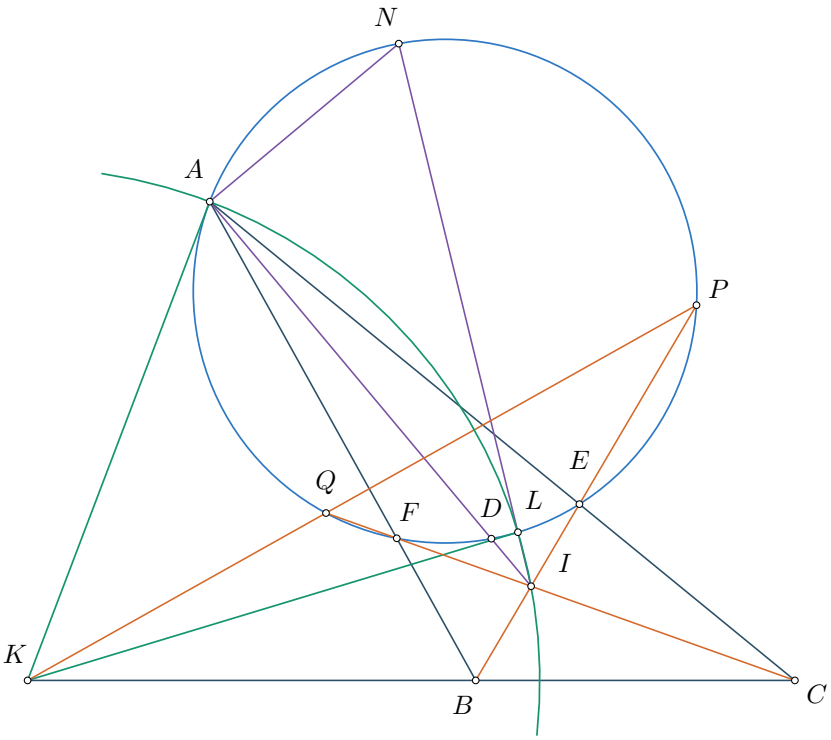
Cách khác cho câu b). Gọi Q' là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC. Vì AD, AQ đối xứng qua AM, $Q' \in AQ$; vì $\angle Q'BC = \angle PBA = \angle PCA = \angle Q'CB$, Q' thuộc trung trực của BC. Do đó $Q' \equiv Q$. Từ $\triangle AKB \backsim \triangle ALC$ suy ra $\angle PKL = \angle PLK$, nên $PK = PL$. Dùng tính đối xứng của Q, M qua BC và $MB = MC$, ta được $\frac{ML}{MK} = \frac{AK}{AL}$, tức $AK = ML$: hai đoạn KL và AM có chung trung điểm, nên $OK = OL$. □

29 Thanh Hóa

Bài toán 29.1 (Ngày 1). Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > 90^\circ$, các đường phân giác trong BE, CF ($E \in AC$, $F \in AB$) cắt nhau tại I. Kí hiệu (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Gọi N là điểm trên đường tròn (AEF) sao cho $\widehat{IAN} = 90^\circ$. Đường thẳng NI cắt lại đường tròn (AEF) tại L. Gọi K là tâm của đường tròn (AIL).

(a) Chứng minh rằng KA tiếp xúc với đường tròn (AEF).

(b) Chứng minh 3 điểm K, B, C thẳng hàng.



Lời giải. Lấy BE, CF cắt lại đường tròn (AEF) tại các điểm thứ hai là P, Q.

Định nghĩa lại điểm K là giao điểm của PQ với tiếp tuyến tại A của (AEF). Áp dụng định lí Pascal cho đường tròn (AEF) ta thu được K, B, C thẳng hàng.

Nếu lấy D là giao điểm thứ hai của IA với (AEF) thì

$$(ND, EF) = A(NI, EF) = -1.$$

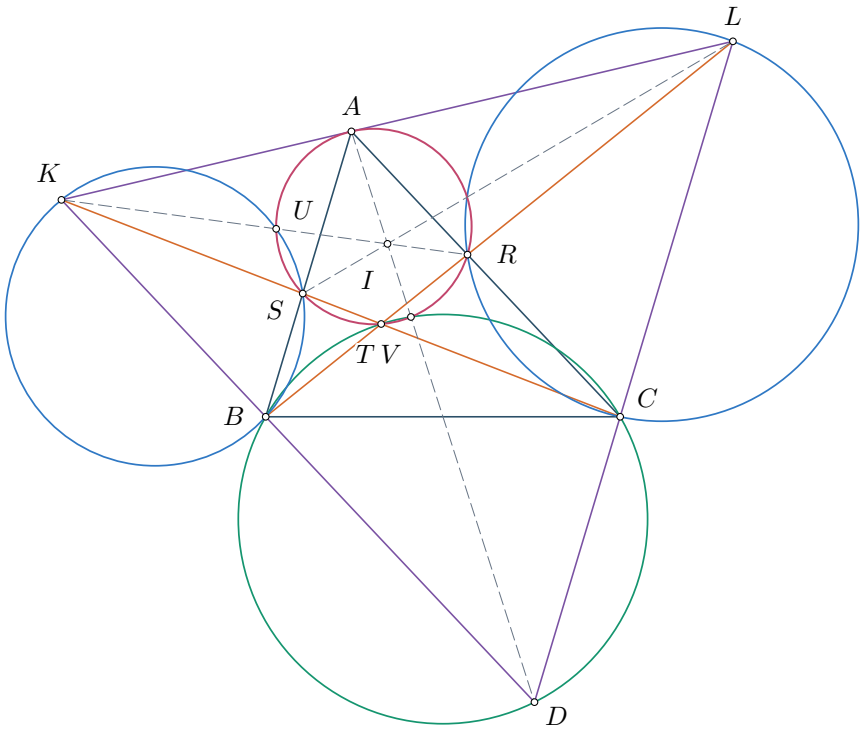
Xét phép nghịch đảo tâm I, phương tích $\mathcal{P}_{(AEF)}(I)$; nó giữ nguyên (AEF) và hoán đổi hai giao điểm của mỗi đường thẳng qua I với (AEF), cụ thể $N \leftrightarrow L$, $D \leftrightarrow A$, $E \leftrightarrow P$, $F \leftrightarrow Q$. Phép nghịch đảo bảo toàn tỉ số kép trên đường tròn, nên từ $(ND, EF) = -1$ ta thu được $(LA, PQ) = -1$. Bởi vậy KL cũng là tiếp tuyến của (AEF). Khi đó

$$\angle AKL = 180^\circ - 2\angle ANL = 2\angle AIL$$

nên K là tâm đường tròn (ALI). □

Nhận xét. Đây là bài toán Israel TST 2022.

Bài toán 29.2 (Ngày 2). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Dựng các tam giác đều ABK, ACL về phía ngoài tam giác ABC (hai điểm K, C nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AB và hai điểm L, B nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AC). Gọi T, S, R lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BL và CK, AB và CK, AC và BL. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác KSB, BTC và LRC nằm trên đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.



Lời giải. Lấy KB cắt LC tại D thì chúng ta có $ABDC$ là hình bình hành.

Nhận thấy $\triangle AKC$ và $\triangle ABL$ là ảnh của nhau qua phép quay tâm A, góc quay 60° nên S, R cũng là ảnh của nhau, kéo theo $AS = AR$, tức là tam giác ASR đều. Đồng thời góc giữa hai đường thẳng KC và LB bằng góc quay và bằng 60° nên A, S, T, R đồng viên; B, T, C, D đồng viên.

Chú ý hai tam giác đều DKL và ARS có các cặp cạnh tương ứng song song nên DA, RK, SL đồng quy tại I.

Vì $ABDC$ là hình bình hành nên $BD \parallel AC$ và $CD \parallel AB$. Phép quay tâm A biến $K \mapsto B$, $C \mapsto L$ biến đường thẳng KC thành BL, nên $(BL, CK) = (AC, AB)$.

Gọi U là giao điểm thứ hai của RK với (BKS) và V là giao điểm thứ hai của AD với $(BCD) \equiv (BCT)$. Ta chứng minh U, V thuộc đường tròn $(ASTR)$.

- Vì B, K, S, U đồng viên, $K \in BD$ và $BD \parallel AC$: $(UR, US) = (UK, US) = (BK, BS) = (BD, BA) = (AC, AB) = (AR, AS)$, nên $U \in (ASR)$.
- Vì B, C, D, T, V đồng viên, $L \in CD$ và $CD \parallel AB$: $(VA, VT) = (VD, VT) = (CD, CT) = (AB, CK) = (AB, AC) + (AC, BL) + (BL, CK) = (AC, BL) = (RA, RT)$, nên $V \in (ASTR)$.

Khi đó

$$(UK, UV) = (UR, UV) = (AR, AV) = (AC, AD) = (DB, DA) = (DK, DV),$$

nên K, U, V, D đồng viên. Do $I = RK \cap AD$, ta có

$$\mathcal{P}_{(BKS)}(I) = \overline{IU} \cdot \overline{IK} = \overline{IV} \cdot \overline{ID} = \mathcal{P}_{(BCT)}(I).$$

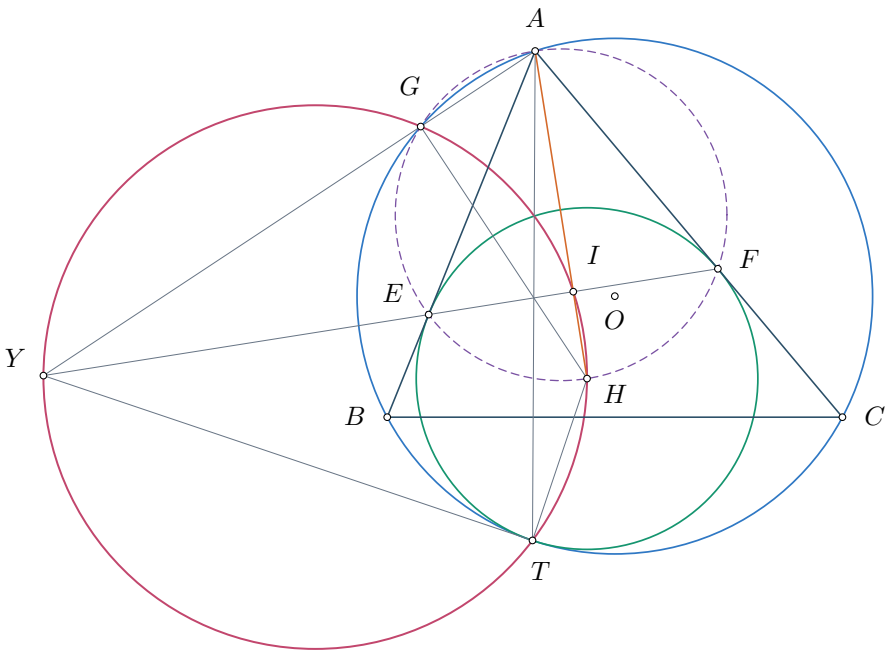
Hoàn toàn tương tự (đổi vai $B \leftrightarrow C$, $K \leftrightarrow L$, $S \leftrightarrow R$), gọi U' là giao điểm thứ hai của SL với (CLR) thì L, U', V, D đồng viên và $\mathcal{P}_{(CLR)}(I) = \overline{IU'} \cdot \overline{IL} = \overline{IV} \cdot \overline{ID}$. Vậy I có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn (KSB), (BTC), (LRC), tức I là tâm đẳng phương của chúng.

Cuối cùng, $ABDC$ là hình bình hành nên đường thẳng AD đi qua trung điểm của BC; mà $I \in AD$, nên tâm đẳng phương I nằm trên trung tuyến xuất phát từ A. □

Bài toán 29.3 (Đề chọn đội tuyển tỉnh, Câu 2; 7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) và đường thẳng AI tương ứng tại G, H (G khác A).

(a) Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T. Chứng minh rằng bốn điểm G, T, H, I cùng thuộc một đường tròn.

(b) Tiếp tuyến tại G của (O) cắt đường thẳng BC tại J, đường thẳng AJ cắt đường tròn (O) tại điểm K khác A. Gọi D là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DJK và đường tròn ngoại tiếp tam giác GHI tiếp xúc với nhau.



Hình cho câu a): đường tròn đỏ là $(GHIT)$, có đường kính YH.

Lời giải. **a)** Đường tròn (O_1) là đường tròn mixtilinear nội góc A; theo kết quả quen thuộc, nó tiếp xúc với AB, AC tại E, F. Vì $AI \perp EF$ tại trung điểm I nên AH là đường kính của (AEF); do đó $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ và $HE = HF$, tức H là tâm O_1 của (O_1). Hai đường tròn $(O_1), (O)$ tiếp xúc tại T nên T, H, O thẳng hàng.

Áp dụng định lí tâm đẳng phương cho ba đường tròn $(AEF), (O), (O_1)$: các trục đẳng phương AG, EF và tiếp tuyến chung tại T đồng quy tại một điểm Y. Ta có $\angle YGH = \angle AGH = 90°$, $\angle YIH = 90°$ (vì $EF \perp AI$) và $\angle YTH = \angle YTO = 90°$. Vậy Y, G, I, H, T cùng thuộc đường tròn đường kính YH; nói riêng G, T, H, I đồng viên.

b) Gọi A' là giao điểm thứ hai của TD với (O); theo kết quả quen thuộc về điểm tiếp xúc mixtilinear, TA, TD đẳng giác trong góc BTC, nên $AA' \parallel BC$.

Bước 1: $T \in (DJK)$. Vì $DJ \equiv BC \parallel AA'$,

$$(KJ, KT) = (KA, KT) = (A'A, A'T) = (DJ, DT),$$

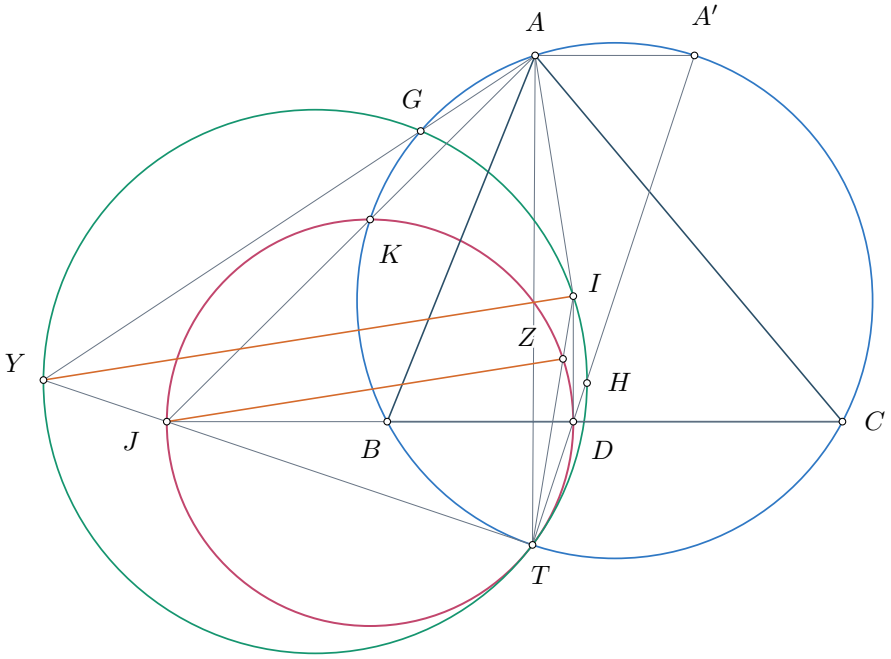
nên K, J, D, T đồng viên.

Bước 2: Y, J, T *thẳng hàng.* Gọi $U = AT \cap EF$. Trong tam giác TEF nội tiếp (O_1), các tiếp tuyến tại E, F cắt nhau tại A, nên TU là đường đối trung, còn TI là trung tuyến; do đó (TEF) và (TIU) tiếp xúc tại T, suy ra $\overline{YU} \cdot \overline{YI} = YT^2 = \overline{YE} \cdot \overline{YF}$. Vì I là trung điểm EF, theo hệ thức Newton $(E, F; Y, U) = -1$. Chiếu từ A lên (O): $E \mapsto B$, $F \mapsto C$, $Y \mapsto G$, $U \mapsto T$, nên $(B, C; G, T) = -1$, tức $BGCT$ là tứ giác điều hòa. Do đó các tiếp tuyến tại G, T của (O) và đường thẳng BC đồng quy, tức JT tiếp xúc với (O). Vì Y cũng nằm trên tiếp tuyến tại T, ba điểm Y, J, T thẳng hàng.

Bước 3: phép vị tự. Gọi Z là giao điểm thứ hai của TI với $(DJKT)$. Khi đó

$$(ZJ, ZT) = (DJ, DT) = (A'A, A'T) = (GA, GT) = (GY, GT) = (IY, IT),$$

nên $JZ \parallel YI$. Phép vị tự tâm T biến $Z \mapsto I$ thì biến $J \mapsto Y$, nên biến đường tròn $(TJZ) = (DJK)$ thành đường tròn $(TYI) = (GHI)$. Vậy hai đường tròn (DJK) và (GHI) tiếp xúc tại T.



Hình cho câu b): (DJK) và (GHI) tiếp xúc tại T.

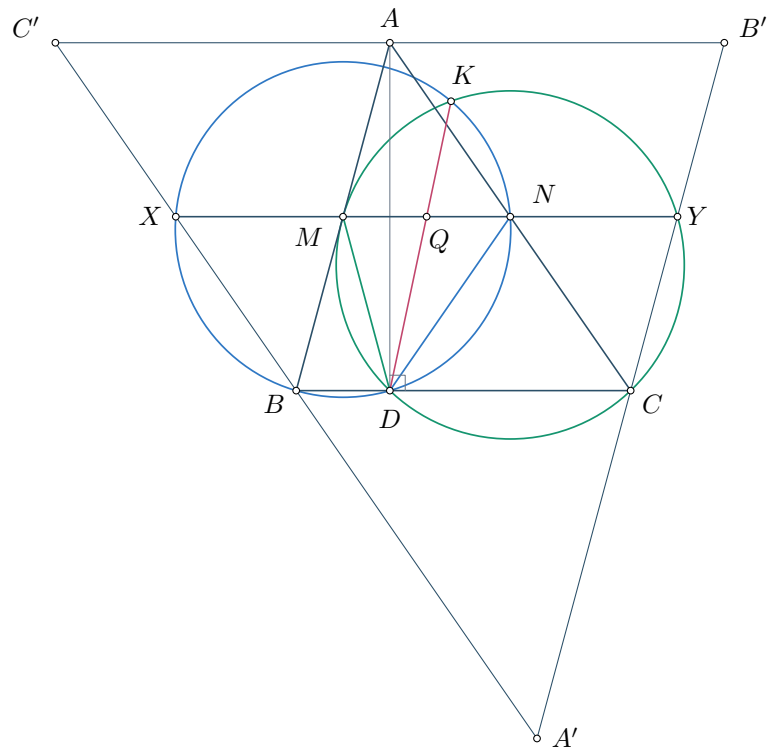
□

30 Tuyên Quang

Bài toán 30.1 (Bài 6). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và đường cao AD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Dựng các hình bình hành $ABCB'$, $ABA'C$, $ACBC'$. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM.

(a) Gọi X là giao điểm của MN và BC', Y là giao điểm của MN và CB'. Chứng minh rằng X thuộc đường tròn (BDN), Y thuộc đường tròn (CDM) và đường thẳng DK đi qua trung điểm Q của đoạn thẳng MN.

(b) Chứng minh rằng hai đường tròn (KMC') và (KNB') có một điểm chung nằm trên đường thẳng $B'C'$.



Hình 1. Cấu hình ban đầu và đường thẳng DK.

Lời giải. **a)** Từ các hình bình hành và định lí đường trung bình, X, M, N, Y thẳng hàng theo thứ tự ấy, với $XM = MN = NY$. Vì N là trung điểm cạnh huyền của tam giác vuông ADC nên $DN = CN$. Kết hợp với $NX \parallel BC$, $XB \parallel CA$, ta có

$$(NX, XB) = (DC, CA) = (ND, DC) = (ND, DB).$$

Do đó B, D, N, X cùng thuộc một đường tròn. Tương tự, từ $DM = BM$ suy ra C, D, M, Y cùng thuộc một đường tròn.

Dễ thấy Q là trung điểm MN và XY nên ta có

$$\mathcal{P}_{(BDN)}(Q) = \overline{QX} \cdot \overline{QN} = \overline{QM} \cdot \overline{QY} = \mathcal{P}_{(CDM)}(Q).$$

Do đó Q nằm trên trục đẳng phương DK của hai đường tròn (BDN) và (CDM).

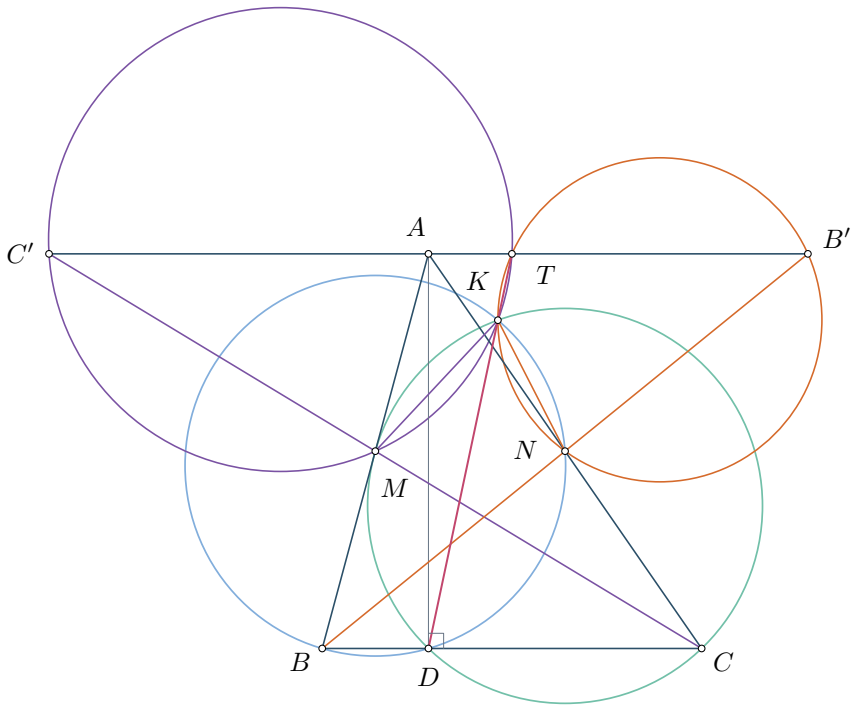
b) Đặt $T = DK \cap B'C'$. Nếu $T = K$ thì kết luận hiển nhiên. Xét trường hợp $T \neq K$. Từ các hình bình hành, ta có C, M, C' thẳng hàng, B, N, B' thẳng hàng và $B'C' \parallel BC$. Vì K, D, M, C cùng thuộc một đường tròn nên

$$(KT, TC') = (KD, DC) = (KM, MC) = (KM, MC').$$

Suy ra K, T, M, C' cùng thuộc một đường tròn. Tương tự, do K, D, N, B cùng thuộc một đường tròn,

$$(KT, TB') = (KD, DB) = (KN, NB) = (KN, NB').$$

Vậy K, T, N, B' cùng thuộc một đường tròn. Do đó T là điểm chung của (KMC') và (KNB') nằm trên $B'C'$.



Hình 2. Hai đường tròn (KMC'), (KNB') cùng đi qua T.

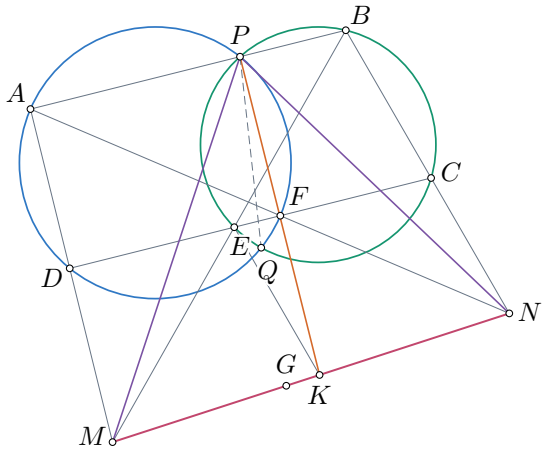
□

31 Vĩnh Long

Bài toán 31.1 (Buổi 2, Câu 4; 5,0 điểm). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P, Q. Đường thẳng qua P cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại A và B (không trùng với Q). Trên đường tròn (O_1) lấy điểm F thuộc cung PQ không chứa điểm A. Kẻ đường thẳng d qua F song song với AB, d cắt đường tròn (O_2) tại C, E và cắt lại (O_1) tại D (E, F nằm trong đoạn CD). Gọi M là giao điểm AD và BE, N là giao điểm BC và AF, K là điểm đối xứng của P qua CD.

(a) Chứng minh M, K, N thẳng hàng.

(b) Chứng minh PK là đường phân giác của góc MPN.



Lời giải. **a)** Vì A, P, B thẳng hàng và $APQD$, $PBCQ$ nội tiếp,

$$(DM, DQ) = (DA, DQ) = (PA, PQ) = (PB, PQ) = (CB, CQ) = (EB, EQ) = (EM, EQ),$$

nên $MDEQ$ nội tiếp. Tương tự $(FN, FQ) = (PA, PQ) = (CB, CQ) = (CN, CQ)$, nên $CNQF$ nội tiếp. Gọi G là giao điểm thứ hai của $(MDEQ)$ và $(CNQF)$. Khi đó $(GM, GQ) = (EB, EQ) = (CB, CQ) = (GN, GQ)$, nên M, G, N thẳng hàng.

Vì K đối xứng với P qua CD, $(KE, KF) = (PF, PE)$. Mặt khác

$$(GE, GF) = (GE, GM) + (GN, GF) = (DE, DM) + (CN, CF) = (DC, DA) + (CB, CD),$$

và $(PF, PE) = (PF, PA) + (PB, PE) = (DF, DA) + (CB, CE) = (DC, DA) + (CB, CD)$. Do đó E, G, K, F đồng viên. Cuối cùng, $(EF, EK) = (EP, EF) = (EP, EC) = (BP, BC) = (CD, CB)$ (vì $CD \parallel AB$), nên $EK \parallel BC$ và

$$(GF, GK) = (EF, EK) = (CD, CB) = (CF, CN) = (GF, GN),$$

tức G, K, N thẳng hàng. Vậy M, K, N thẳng hàng.

b) Theo trên $EK \parallel BC$; tương tự $FK \parallel AD$. Theo định lí Thales (với $DE \parallel AB$),

$$\frac{AF}{FN} = \frac{MK}{KN} = \frac{ME}{EB} = \frac{MD}{DA}.$$

Vì $AP \parallel DF$ nên $APFD$ là hình thang cân nội tiếp (O_1), do đó $AD = PF$, $AF = PD$. Suy ra $\frac{MD}{PF} = \frac{MD}{AD} = \frac{AF}{FN} = \frac{DP}{FN}$. Hơn nữa (theo hình vẽ)

$$\angle PDM = \angle PDF + \angle FDM = \angle PAF + \angle BAM = \angle CFN + \angle CFP = \angle PFN.$$

Do đó $\triangle DMP \backsim \triangle FPN$, suy ra $\frac{PM}{PN} = \frac{DP}{FN} = \frac{AF}{FN} = \frac{MK}{KN}$. Theo tính chất đường phân giác, PK là phân giác của góc MPN. □

> **Nhận xét.** Đây là bài toán số 6, ngày 2, vòng 2 kì thi Iran MO 2018. Câu 3 buổi 1 của đề Vĩnh Long là một bài toán quỹ tích trong mặt phẳng tọa độ (liên quan đến parabol), không thuộc phạm vi hình học tổng hợp nên không đưa vào tài liệu này.