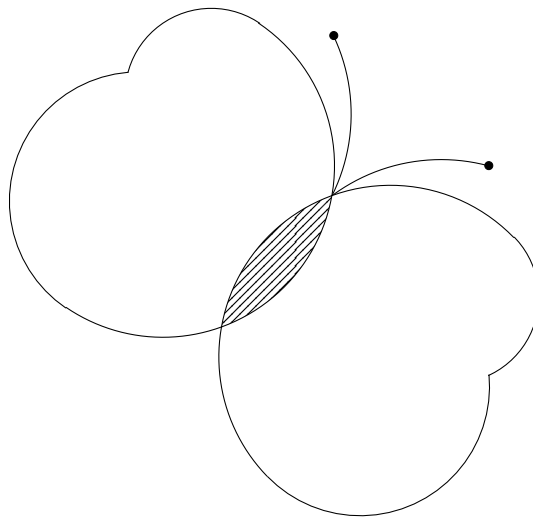


Nguyễn Hồng Điệp

ÔN THI TỐT NGHIỆP

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN



2016

Con bướm vẽ bằng GeoGebra (^.^)

Các công thức

1. Vectơ trong không gian

Trong không gian cho các vectơ $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ và số k tùy ý

- $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$
- $\vec{u}_1 \pm \vec{u}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$
- $k\vec{u}_1 = (kx_1, ky_1, kz_1)$
- Tích có hướng: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
Hai vectơ vuông góc nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$
- $|\vec{u}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
- Gọi φ là góc hợp bởi hai vectơ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$)

$$\cos \varphi = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

- $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
 $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Tọa độ các điểm đặc biệt:
 - ★ Tọa độ trung điểm I của AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 - ★ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC : $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
 - ★ Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

- Tích có hướng của hai vectơ là 1 vectơ vuông góc cả hai vectơ xác định bởi

$$\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

- Một số tính chất của tích có hướng
 - ★ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$
 A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = \vec{0}$
 - ★ Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$
 - ★ $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$
- Các ứng dụng của tích có hướng
 - ★ Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD} = ||[\vec{AB}, \vec{AD}]||$

- ★ Diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|$
- ★ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] \cdot \overrightarrow{AA'} \right|$
- ★ Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$

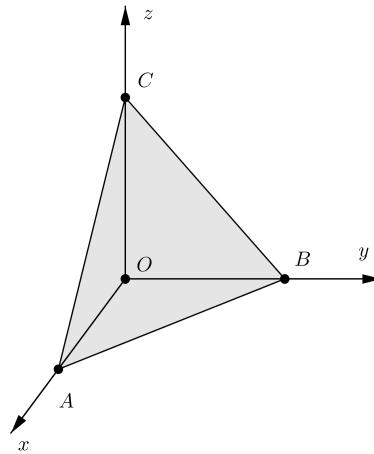
2. Phương trình mặt phẳng

- Phương trình tổng quát (α) : $ax + by + cz + d = 0$ với $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.
- Phương trình mặt phẳng (α) qua $M(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a, b, c)$

$$(\alpha): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: (α) qua $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$

$$(\alpha): \frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{b} + \frac{z - z_0}{c} = 1, \quad \text{với } a, b, c \neq 0$$



- Nếu $\vec{n} = (a, b, c)$ là vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n}$, $k \neq 0$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α) . Do đó một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến. Trong một số trường hợp ta có thể tìm vectơ pháp tuyến bằng cách chọn một giá trị cụ thể cho a (hoặc b hoặc c) và tính hai giá trị còn lại đảm bảo đúng tỉ lệ $a : b : c$.

3. Góc

- Góc giữa hai mặt phẳng: Cho mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha$, mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta$, khi đó góc giữa (α) và (β) được tính bằng

$$\cos((\alpha), (\beta)) = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

- Góc giữa hai đường thẳng: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có các vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$, khi đó góc giữa d_1 và d_2 tính bằng

$$\cos(d_1, d_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

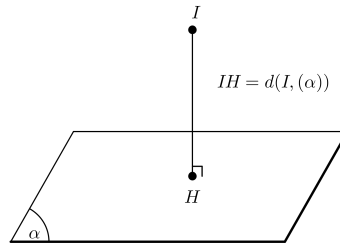
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$, khi đó góc giữa d và (α) là φ được tính bằng

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

4. Khoảng cách

- Khoảng cách từ điểm $A(x_0, y_0, z_0)$ tới $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ là

$$d(A, (\alpha)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



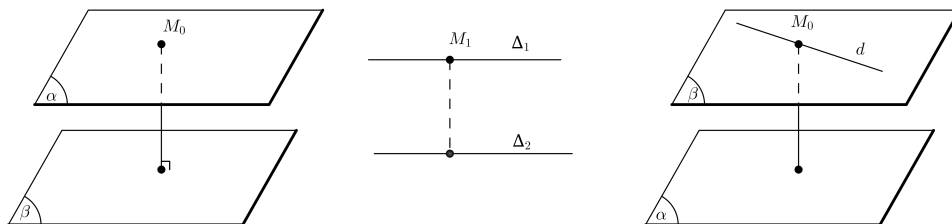
- Khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng Δ qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2 biết Δ_1 qua M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$; Δ_2 qua M_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\vec{u}_1, \vec{u}_2]|}$$

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) song song nhau là khoảng cách từ $M_0 \in (\alpha)$ tới (β) .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song nhau là khoảng cách từ $M_1 \in \Delta_1$ tới Δ_2 .
- Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) song song nhau là khoảng cách từ điểm $M_0 \in d$ tới (α) .



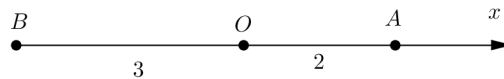
2 Xác định tọa độ điểm

2.1 Tọa độ điểm trên trục tọa độ

Tìm tọa độ điểm A trên trục tọa độ ta tìm khoảng cách từ A đến gốc tọa độ và dựa vào chiều dương đã chọn để xác định tọa độ A .

Ví dụ chọn tia OA trùng tia Ox , điểm A và B nằm trên Ox

- $OA = 2 \Rightarrow A(0, 0, 2)$.
- $OB = 3 \Rightarrow B(0, 0, -3)$ (do B nằm ở phần âm)

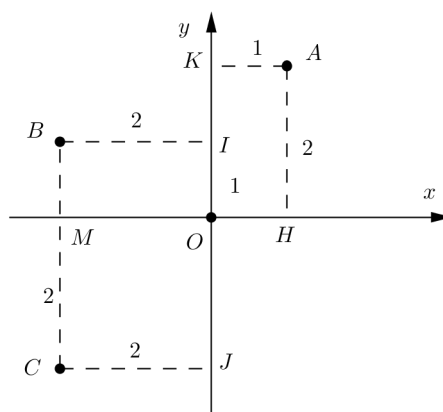


2.2 Tọa độ điểm trên mặt phẳng tọa độ

Tìm tọa độ của A trên 1 mặt phẳng tọa độ ta tìm hình chiếu của A trên các trục tọa độ và dựa vào các tọa độ hình chiếu này để xác định tọa độ A .

Ví dụ các điểm A, B, C có hình chiếu trên các trục với độ dài như hình vẽ, theo chiều dương đã chọn ta được

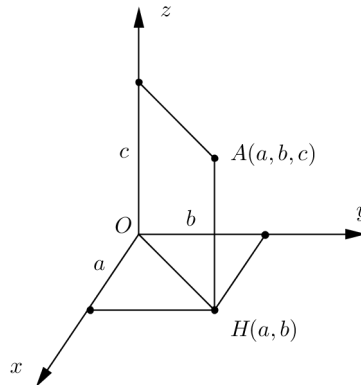
- $AK = 1 = x_K, AH = 2 = y_K$: tọa độ $A(1, 2)$
- $BI = 2 = -x_B$ (do B nằm phần âm của trục hoành), $BM = 1 = y_B$: tọa độ $B(-2, 1)$
- $CJ = 2, CM = 2$: tọa độ $C(-2, -2)$ (do C nằm ở phần âm của trục tung và trục hoành)



2.3 Tọa độ điểm trường hợp tổng quát

Tìm tọa độ của A đầu tiên ta tìm tọa độ hình chiếu H của A lên mặt phẳng tọa độ bất kì, sau đó ta tính độ dài AH . Tọa độ A xác định nhờ tọa độ H và độ dài AH .

Ví dụ tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng Oxy là $H(a, b)$, ta tính được $AH = c$ thì khi đó A có tọa độ $A(a, b, c)$ (giả sử rằng các thành phần tọa độ A đều nằm trong phần dương).



3 Cách chọn hệ trục tọa độ - chọn vectơ

3.1 Chọn vectơ

Đối với dạng bài tập này khi tìm vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của đường thẳng và mặt phẳng ta sẽ gặp trường hợp vectơ chứa tham số a là độ dài cạnh. Khi đó, để tiện cho việc tính toán ta chọn lại **vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến** mất tham số a .

Ví dụ vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{SA} = \left(a, -3a, \frac{a}{3}\right)$ thì ta có thể chọn lại vectơ chỉ phương khác là $\overrightarrow{u} = \left(1, -3, \frac{a}{3}\right)$.

Trường hợp **khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng, khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau** thì vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}$ ta giữ nguyên.

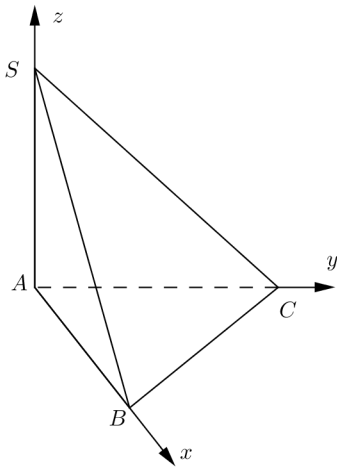
3.2 Chọn hệ trục tọa độ

Phần quan trọng nhất của phương pháp này là cách chọn hệ trục tọa độ. Không có phương pháp tổng quát, có nhiều hệ trục tọa độ có thể được chọn, chúng ta chọn sao cho việc tìm tọa độ các điểm có nhiều số 0 càng tốt.

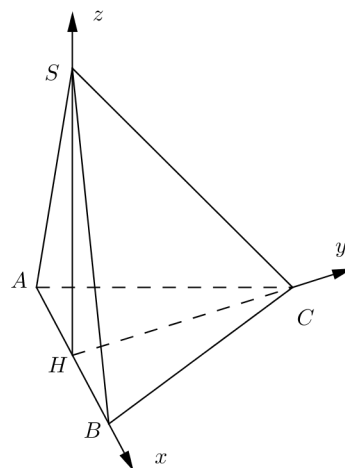
- Hệ trục tọa độ nằm trên 3 đường thẳng đôi 1 vuông góc nhau.
- Gốc tọa độ thường là chân đường cao của hình chóp, hình lăng trụ trùng với đỉnh của hình vuông, hình chữ nhật, tam giác vuông hoặc có thể là trung điểm của cạnh nào đó,...

Ví dụ

- Tứ diện

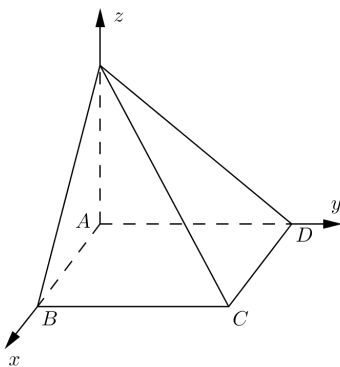


$\triangle ABC$ vuông tại A

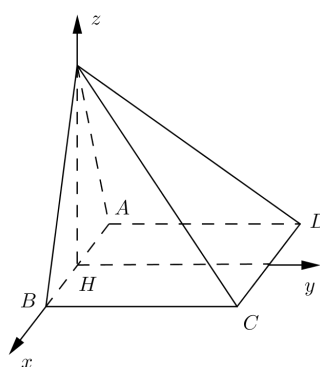


$\triangle ABC$ vuông tại A (hoặc tam giác ABC đều), H là trung điểm AB.

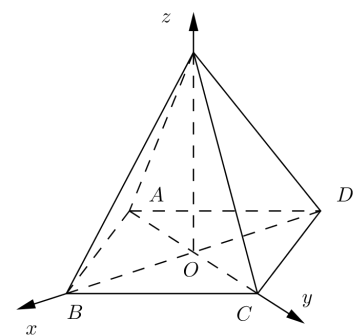
- Hình chóp đáy là tứ giác lồi



• $ABCD$ là hình vuông (hình chữ nhật)

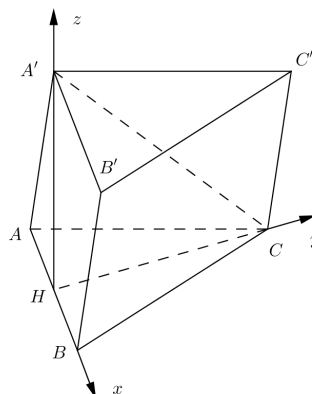


• $ABCD$ là hình vuông (hình chữ nhật)
 $SH \perp (ABCD)$



• $ABCD$ là hình vuông (hình thoi)
 $SO \perp (ABCD)$

- Hình lăng trụ xiên, lăng trụ đứng tương tự hình chóp, riêng đối với hình hộp có nhiều cách chọn hệ tọa độ.



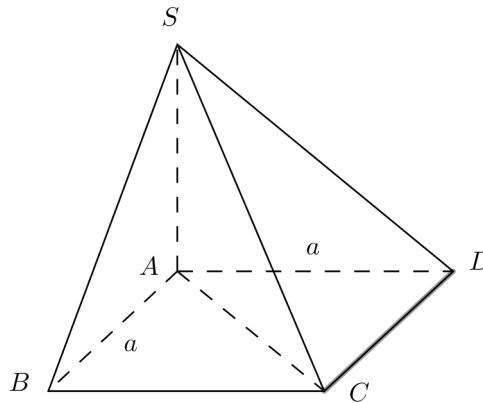
Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều $A'H \perp (ABC)$

4 Các ví dụ

Ví dụ 4.1 (Cao đẳng 2014)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc đáy, SC tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

Giải



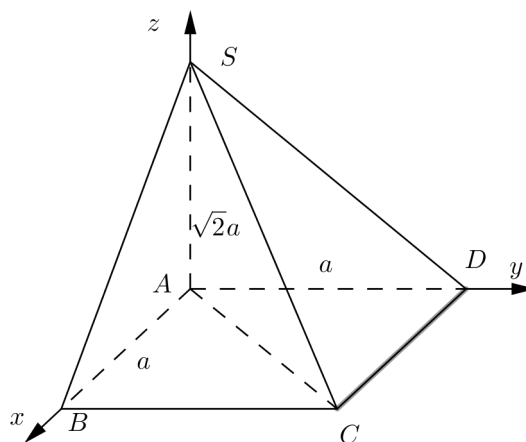
★ Thể tích khối chóp

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA}$. Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = \sqrt{2}a$. Suy ra $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

★ Khoảng cách

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, $A \equiv O$, tia $AB \equiv$ tia Ox , tia $AD \equiv$ tia Oy , tia $AS \equiv$ tia Oz .



Khi đó ta có:

- $A(0, 0, 0)$
- $AB = a \Rightarrow B(a, 0, 0)$

- $AD = a \Rightarrow D(0, a, 0)$
- $AS = \sqrt{2}a \Rightarrow S(0, 0, \sqrt{2}a)$
- $CD = CB = a \Rightarrow C(a, a, 0)$

Ta có: $\overrightarrow{SC} = (a, a, -a\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SD} = (0, -a, -a\sqrt{2})$ suy ra mặt phẳng (SCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1, 1, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{u_2} = (0, -\sqrt{2}, -1)$.

Vectơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (0, -\sqrt{2}, -1)$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) : $-\sqrt{2}y - z + a\sqrt{2} = 0$

Khoảng cách từ B đến (SCD) :

$$d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

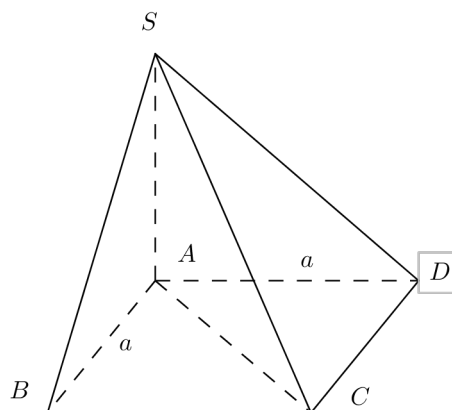
Nhận xét 1

- Thể tích khối chóp ta tính trực tiếp.
- Ta thấy SA vuông góc mặt đáy tại A , $ABCD$ là hình vuông, khi đó A là giao điểm của 2 đường thẳng đôi một vuông góc nhau. Đó là dấu hiệu nhận biết để chọn hệ trục tọa độ với A là gốc.
- Khi tìm tọa độ S ta thấy có xuất hiện $\sqrt{2}a$, lúc này cũng đừng quá lo lắng.

Ví dụ 4.2 (Tốt nghiệp 2015)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC .

Giải



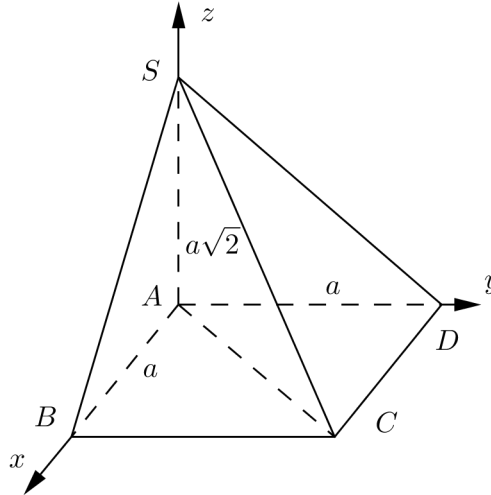
★ **Thể tích khối chóp**

Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA} = 45^\circ$, suy ra $SA = AC \cdot \tan 45^\circ = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

★ **Khoảng cách**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $A \equiv O$, tia $AB \equiv Ox$, tia $AD \equiv Oy$, tia $AS \equiv Oz$



Khi đó

- $A(0,0,0)$
- $AB = a \Rightarrow A(a,0,0)$
- $AD = a \Rightarrow D(0,a,0)$
- $CD = CB = a \Rightarrow C(a,0,0)$
- $AS = \sqrt{2}a \Rightarrow S(0,0,\sqrt{2}a)$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua S, B ; d_2 là đường thẳng qua A, C . Khoảng cách giữa SB và AC cũng là khoảng cách giữa d_1 và d_2 .

Ta có:

- $\overrightarrow{SB} = (a, 0, -\sqrt{2}a) \Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, -\sqrt{2})$
- $\overrightarrow{AC} = (a, a, 0) \Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d_2 là $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, 0)$
- $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$
- $\overrightarrow{AB} = (a, 0, 0)$

Khoảng cách:

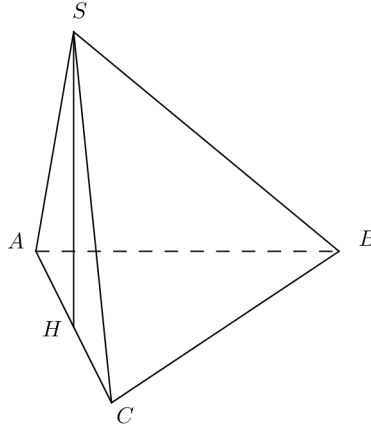
$$d(SA, BC) = (d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{\sqrt{10}a}{5}$$

• **Lưu ý:** trong bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng thì ta được chọn lại vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến, nhưng vectơ $\overrightarrow{AB}$ phải giữ nguyên.

Ví dụ 4.3 (Đề thi minh họa tốt nghiệp 2015)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm cạnh AC và $SH = \sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

Giải



★ Thể tích khối chóp

Ta có: $HA = HC = \frac{1}{2}AC = a$ và $SH \perp (ABC)$.

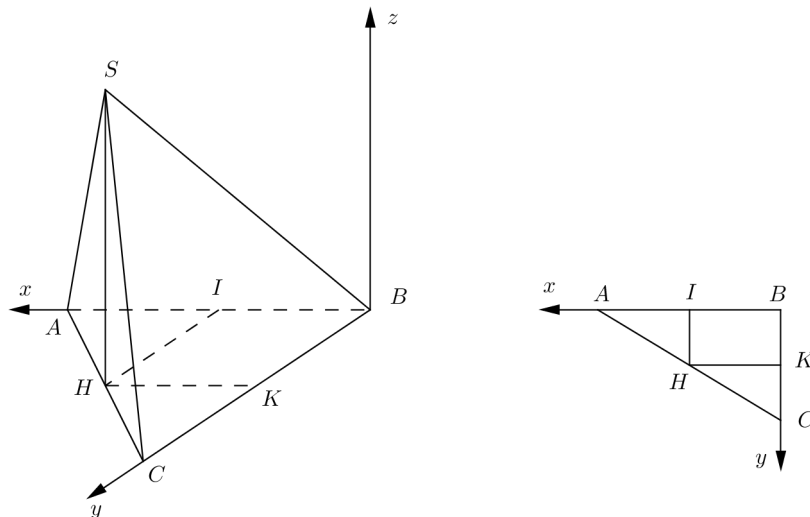
Xét $\triangle ABC$ ta có: $BC = AC \cdot \cos \widehat{ACB} = \sqrt{3}a$.

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$

★ Khoảng cách

Kẻ tia Bz vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, $B \equiv O$, tia $BA \equiv$ tia Ox , tia $BC \equiv$ tia Oy .



Khi đó ta có

- $B(0,0,0)$
- $AB = a \Rightarrow A(a,0,0)$
- $BC = \sqrt{3}a \Rightarrow C(0,\sqrt{3}a,0)$
- Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp BC$. Ta có $HI = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $HK = \frac{AB}{2} = a$; do đó $H\left(a, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$.

Do H là hình chiếu của S xuống (ABC) và $SH = \sqrt{2}a \Rightarrow S\left(a, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \sqrt{2}a\right)$

Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(a, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \sqrt{2}a\right)$, $\overrightarrow{SA} = \left(0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, \sqrt{2}a\right)$ suy ra mặt phẳng (SAB) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{u_2} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến của (SAB) : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \left(0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SAB) : $\sqrt{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$.

Khoảng cách từ C đến (SAB) :

$$d(C, (SAB)) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{66}a}{11}$$

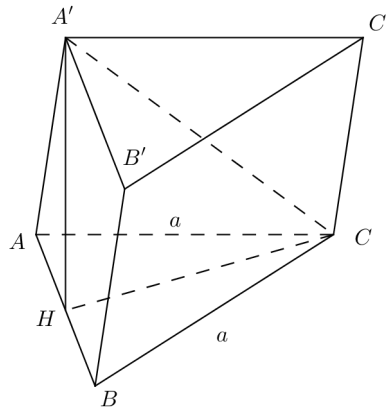
Nhận xét 2

- *Cách chọn hệ trục tọa độ*: ta thấy SH vuông góc với mặt đáy nhưng trong mặt đáy chưa có 2 đường thẳng vuông góc tại H nên không chọn H làm gốc tọa độ. Mặt khác ta có sẵn BA vuông góc BC nên chỉ cần dựng Bz vuông góc mặt đáy là ta có hệ trục tọa độ với B là gốc tọa độ.
- *Tìm độ điểm S* : đầu tiên ta tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) , khi đó $x_S = x_H$, $y_S = y_H$. Để tìm tọa độ H ta tìm khoảng cách từ H xuống các trục đã chọn (BA và BC). Và $z_S = SH$.

Ví dụ 4.4 (Đại học khối B - 2014)

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Giải



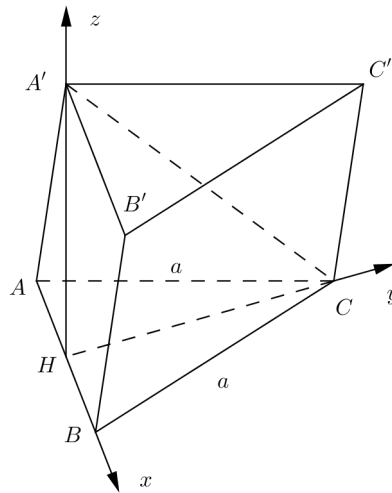
★ **Thể tích**

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $A'H \perp (ABC)$ và $\widehat{A'CH} = 60^\circ$. Do đó $A'H = CH \cdot \tan \widehat{ACH} = \frac{3a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

★ **Khoảng cách**

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với $H \equiv O$, tia $HB \equiv$ tia Ox , tia $HC \equiv$ tia Oy , tia $HA' \equiv$ tia Oz .



Khi đó ta có:

- $H(0,0,0)$
- $HA = HB = \frac{a}{2} \Rightarrow B\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right), A\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$
- $A'H = \frac{3a}{2} \Rightarrow A'\left(0, 0, \frac{3a}{2}\right)$
- $HC = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow C\left(0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{3a}{2}\right), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$ suy ra mặt phẳng $(ACC'A')$ có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1, 0, 3), \vec{u}_2 = (1, \sqrt{3}, 0)$.

Véc tơ pháp tuyến của $(ACC'A')$ là $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-3\sqrt{3}, 3, \sqrt{3})$

Phương trình mặt phẳng $(ACC'A')$: $-3x + \sqrt{3}y + z - \frac{3a}{2} = 0$

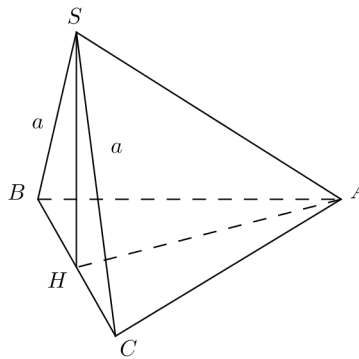
Khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$:

$$d(B, (ACC'A')) = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$$

Ví dụ 4.5 (Đại học khối D - 2014)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

Giải



★ Thể tích

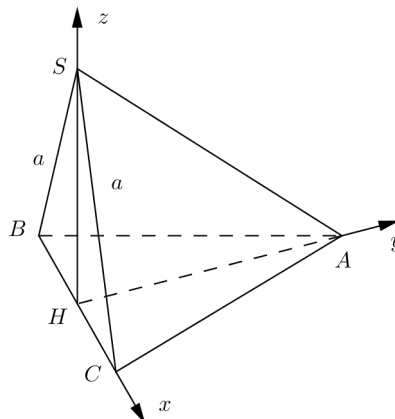
Gọi H là trung điểm BC , suy ra $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$, $SH \perp (ABC)$, $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{a^2}{4}$.

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

★ Khoảng cách

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $H \equiv O$, tia $HC \equiv$ tia Ox , tia $HS \equiv$ tia Oy , tia $HA \equiv$ tia Oz .



Khi đó:

- $H(0,0,0)$
- $HC = HB = \frac{a}{2} \Rightarrow B\left(\frac{-a}{2}, 0, 0\right), C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$.
- $HA = \frac{a}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$
- $HS = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow S\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$

Gọi d_1, d_2 lần lượt là đường thẳng qua SA và BC . Khoảng cách giữa d_1 và d_2 cũng là khoảng cách giữa SA và BC .

Ta có:

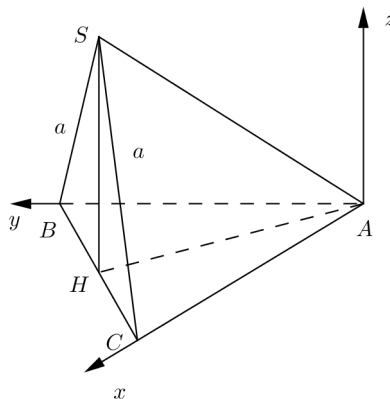
- $\overrightarrow{SA} = \left(0, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (0, 1, \sqrt{3})$
- $\overrightarrow{BC} = (a, 0, 0) \Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d_2 là $\overrightarrow{u_2} = (1, 0, 0)$
- $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (0, \sqrt{3}, -1)$
- $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{-a}{2}, 0\right)$

Khoảng cách

$$d(SA, BC) = d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

Nhận xét 3

Ngoài ra ta còn có thể chọn hệ trục tọa độ như sau



nhưng cách giải sẽ dài hơn vì cần phải tìm tọa độ H để tìm tọa độ S . Do đó khi làm bài nếu cảm thấy hệ tọa độ mình chọn việc tính toán quá phức tạp ta nên nghĩ đến việc đổi sang hệ tọa độ khác.