SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 11
KHÓA NGÀY: 18-3-2025
Môn thi: Toán
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian phát đề)*
Ngày thi: 18-3-2025

Bài 1 *(4,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$, thỏa mãn $\frac{\cos B}{c} = \frac{\cos C}{b} = \frac{\sin A}{a}$. Tính số đo của góc A.

2. Giải phương trình trên tập số thực: $\log_2(x+3) + \log_2\left(\sqrt{x+2} - x^2\right) = 1 + \log_2(2x+1)$.

Bài 2 *(4,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{nu_n^2 + 1}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n).

2. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x, gọi là phần nguyên của số x, và $\{x\} = x - [x]$ gọi là phần lẻ của x. Với mỗi số nguyên dương n, ta đặt $x_n = nu_n$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \{x_n\}$.

Bài 3 *(6,0 điểm)*

1. Ba học sinh An, Lan và Hoa, mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[3;12]$. Tính xác suất để ba số được viết đôi một khác nhau và tích của ba số đó là một số chính phương.

2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$4P(x)P(2x) + \left(P(2x)\right)^2 = 2P(x).P(4x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Lớp $11A$ có 40 học sinh tham gia ngoại khóa tại một khu vui chơi có 4 trò chơi khác nhau. Biết mọi học sinh đều tham gia và mỗi học sinh chỉ được đăng ký tham gia một trò chơi, mỗi trò chơi có ít nhất một người chơi và không trò chơi nào có quá 15 học sinh đăng ký. Hỏi lớp $11A$ có bao nhiêu cách đăng ký trò chơi?.

Bài 4 *(2,5 điểm)*

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, có độ dài cạnh đáy là a và cạnh bên là b, M là trung điểm cạnh BC. Gọi α, β lần lượt là góc giữa đường thẳng AB' và BC' với mặt phẳng $(A'AM)$. Chứng minh rằng $4\cos^2\alpha = 3 + \cos^2\beta$ và xác định mối quan hệ giữa a, b để đường thẳng AB' vuông góc với đường thẳng BC'.

Bài 5 *(3,5 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn không cân $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Tia IH cắt (O) tại T. Trên đường thẳng EF lấy điểm D sao cho $\widehat{AHD} = 90^0$.

1. Chứng minh rằng $\widehat{ATH} = 90^0$ và đường thẳng DT tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.

2. Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIT (M và E khác phía đối với F). Gọi P là giao điểm của đường thẳng AH với $(O)(P \neq A)$. Gọi K là giao điểm của đường thẳng MB với đường thẳng TP. Chứng minh rằng $KC^2 = KP.KT$.

------------ HẾT------------