

LƯ SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

HÌNH HỌC 10



CHƯƠNG

III

PHƯƠNG PHÁP

TỌA ĐỘ

TRONG

MẶT PHẪNG

0355334679 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 10.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Nội dung gồm 3 phần

Phần 1. Kiến thức cần nắm

Phần 2. Dạng bài tập có hướng dẫn giải và bài tập đề nghị

Phần 3. Phần bài tập trắc nghiệm.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355.334.679 – 0916.620.899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

Gv_Trường THPT Tuy Phong – Bình Thuận

MỤC LỤC

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1. Phương trình đường thẳng 01 – 23

§2. Phương trình đường tròn 24 – 39

§3. Elip 40 – 52

Ôn tập chương III 53 – 87

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG



ÔN TẬP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

1. Hệ trục tọa độ Oxy gồm hai trục Ox, Oy đôi một vuông góc với nhau với hai vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$). Gọi là hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ hay gọi mặt phẳng (Oxy)

2. **Tọa độ của vector và của điểm:** $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$; $M(x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

3. **Biểu thức tọa độ của vector:** Cho $\vec{u} = (x; y), \vec{v} = (x'; y')$

a. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (x = x'; y = y')$ b. $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$ c. $k\vec{u} = (kx; ky)$

d. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ e. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ f. $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

g. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$

4. **Liên hệ giữa tọa độ điểm và vector:** Cho $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$

a. $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ b. $|\vec{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c. G là trọng tâm tam giác ABC ta có: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

d. M chia AB theo tỉ số k : $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}$; $y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}$

Đặc biệt: M là trung điểm của AB : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

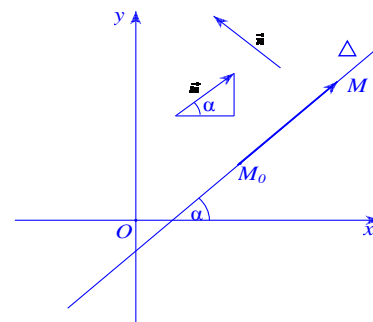
I. Vector chỉ phương và vector pháp tuyến của đường thẳng

1. Vector chỉ phương của đường thẳng (VTCP)

a. **Định nghĩa:** Vector $\vec{u}$ được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

b. **Nhận xét**

- Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTCP của Δ . Do đó một đường thẳng có vô số VTCP.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP của đường thẳng đó.



2. Vector pháp tuyến của đường thẳng (VTPT)

a. **Định nghĩa:** Vector $\vec{n}$ được gọi là VTPT của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với VTCP của Δ .

b. **Nhận xét**

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của Δ . Do đó một đường thẳng có vô số VTPT.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT của đường thẳng đó.

3. **Mối liên hệ giữa tọa độ VTCP và VTPT của đường thẳng**

Gọi $\vec{u} = (a; b)$ và $\vec{n} = (A; B)$ lần lượt là VTCP và VTPT của đường thẳng Δ

Ta có: $\vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow aA + bB = 0$

- VTCP $\vec{u} = (a; b)$ suy ra VTPT $\vec{n} = (b; -a)$ hoặc $\vec{n} = (-b; a)$
- VTPT $\vec{n} = (A; B)$ suy ra VTCP $\vec{u} = (B; -A)$ hoặc $\vec{u} = (-B; A)$
- Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (a; b)$ với $a \neq 0$ thì Δ có hệ số góc $k = \tan \alpha = \frac{b}{a}$.
- Đường thẳng Δ có hệ số góc k thì Δ có VTCP $\vec{u} = (1; k)$

II. Phương trình đường thẳng

1. Phương trình tham số của đường thẳng (Ptts)

Đường thẳng Δ : $\begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (a; b) \end{cases}$. Ptts của đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Lưu ý: • Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ

- Nếu đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Suy ra đường thẳng Δ đi qua điểm

$M_0(x_0; y_0)$ và có một VTCP là $\vec{u} = (a; b)$.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng (Pttq)

Đường thẳng Δ : $\begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (A; B), A^2 + B^2 \neq 0 \end{cases}$.

Pttq của đường thẳng Δ : $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$ (với $C = -Ax_0 - By_0$)

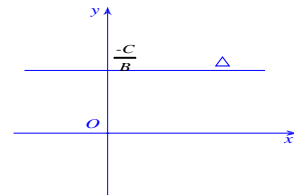
Lưu ý: • Đường thẳng Δ : $Ax + By + C = 0$ thì Δ có VTPT $\vec{n} = (A; B)$

3. Các trường hợp đặc biệt

Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$ (1)

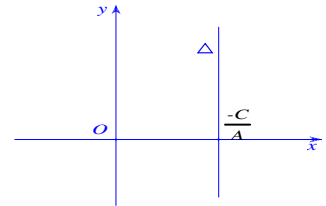
- $A = 0$, pt(1) trở thành: $By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{C}{B}$. Khi đó đường thẳng Δ

vuông góc với trục Oy tại điểm $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$

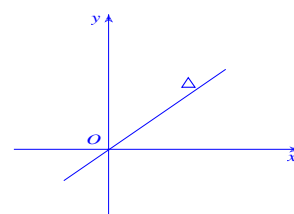


- $B = 0$, pt(1) trở thành: $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}$. Khi đó đường thẳng Δ

vuông góc với trục Ox tại điểm $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$

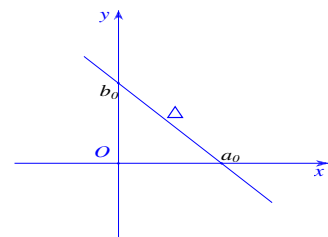


- $C = 0$, pt(1) trở thành: $Ax + By = 0$. Khi đó đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O .



- Đường thẳng Δ cắt các trục tọa độ tại $M(a_0; 0), N(0; b_0)$. Phương trình

đoạn chắn của Δ là $\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1$.



- Đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Δ : $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$. Khi $x_B - x_A = 0$ hoặc $y_B - y_A = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

- Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k có phương trình: $y - y_0 = k(x - x_0)$
- Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ song song với đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$
 $+ \Delta // \Delta_1 \Rightarrow \Delta : A_1x + B_1y + m = 0, (m \neq C_1)$
 $+ \text{Do } M_0(x_0; y_0) \in \Delta \text{ nên } A_1x_0 + B_1y_0 + m = 0 \Rightarrow m = ? \text{ và kết luận.}$
- Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$
 $+ \Delta \perp \Delta_1 \Rightarrow \Delta : B_1x - A_1y + m = 0 \text{ hay } -B_1x + A_1y + m = 0$
 $+ \text{Do } M_0(x_0; y_0) \in \Delta \text{ nên } B_1x_0 - A_1y_0 + m = 0 \Rightarrow m = ? \text{ và kết luận.}$

III. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} (*)$

- Hệ (*) có một nghiệm $(x_0; y_0)$, khi đó Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M_0(x_0; y_0)$
- Hệ (*) có vô số nghiệm, khi đó Δ_1 trùng với Δ_2
- Hệ (*) có vô nghiệm, khi đó $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ hay Δ_1 song song với Δ_2

Lưu ý: Nếu $A_2B_2C_2 \neq 0$ thì:

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

IV. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Đặt $\varphi = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow \varphi = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = 90^\circ$
- $\Delta_1 \not\perp \Delta_2$. + Xác định hai VTPT $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ (hay VTCP) của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2
 $+ \text{Tính } \cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Suy ra góc $\varphi = ?$
 $+ 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Chú ý: Nếu Δ_1 và Δ_2 có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Rightarrow k_1 = k_2$
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

V. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ ,

kí hiệu là $d(M_0, \Delta)$ và được tính bởi công thức: $d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

VI. Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi : $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$;

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ là: $\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Lưu ý: Dấu $\pm$ tương ứng với một đường phân giác của góc nhọn và một đường phân giác góc tù. Để phân biệt được dấu nào là của đường phân giác góc nhọn và dấu nào là đường phân giác góc tù thì cần nhớ quy tắc sau:

Đường phân giác **góc nhọn** luôn **ngược dấu** với tích hai pháp véctor, đường phân giác góc tù mang dấu còn lại.

VII. Cho hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$. Khi đó:

☞ M và N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0$

☞ M và N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0$

B. BÀI TẬP

Các bài tập dưới đây, xét trong mặt phẳng Oxy .

Vấn đề 1. Viết phương trình đường thẳng

1. Đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (a; b) \end{cases}$. Pts của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2. Đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (A; B), A^2 + B^2 \neq 0 \end{cases}$.

Pttq của đường thẳng $\Delta: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$ (với $C = -Ax_0 - By_0$)

3. Đường thẳng Δ cắt các trục tọa độ tại $M(a_0; 0), N(0; b_0)$. Phương trình đoạn chắn của Δ là

$$\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1.$$

4. Đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng

$\Delta: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$. Khi $x_B - x_A = 0$ hoặc $y_B - y_A = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

5. Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k có phương trình: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Lưu ý: Đường thẳng Δ có hệ số góc k thì Δ có VTCP $\vec{u} = (1; k)$

6. Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ song song với đường thẳng $\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$+ \Delta // \Delta_1 \Rightarrow \Delta: A_1x + B_1y + m = 0, (m \neq C_1)$$

$$+ \text{Do } M_0(x_0; y_0) \in \Delta \text{ nên } A_1x_0 + B_1y_0 + m = 0 \Rightarrow m = ? \text{ và kết luận.}$$

7. Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$+ \Delta \perp \Delta_1 \Rightarrow \Delta: B_1x - A_1y + m = 0 \text{ hay } -B_1x + A_1y + m = 0$$

$$+ \text{Do } M_0(x_0; y_0) \in \Delta \text{ nên } B_1x_0 - A_1y_0 + m = 0 \Rightarrow m = ? \text{ và kết luận.}$$

Bài 1.1. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a. Δ đi qua điểm $M(2; 1)$ và có VTCP $\vec{u} = (3; 4)$. b. Δ đi qua điểm $P(5; -2)$ và có VTPT $\vec{n} = (4; -3)$.

c. Δ đi qua điểm $Q(5; 1)$ và có hệ số góc $k = 3$. d. Δ đi qua hai điểm $A(3; 4)$ và $B(4; 2)$.

HD & Giải

a. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } M(2; 1) \\ \text{có VTCP } \vec{u} = (3; 4) \end{cases}$. Pts của $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } P(5; -2) \\ \text{có VTPT } \vec{n} = (4; -3) \Rightarrow \text{VTCP } \vec{u} = (3; 4) \end{cases}$. Pts của $\Delta: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

c. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } Q(5; 1) \\ \text{có hệ số góc } k = 3 \Rightarrow \text{VTCP } \vec{u} = (1; 3) \end{cases}$. Pts của $\Delta: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

d. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } A(3; 4) \\ \text{VTCP } \vec{AB} = (1; -2) \end{cases}$. Pts của $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Bài 1.2. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a. Δ đi qua điểm $M(3; 4)$ và có VTPT $\vec{n} = (1; 2)$. b. Δ đi qua điểm $P(3; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (4; 3)$

- c. Δ đi qua điểm $Q(-5;-8)$ và có hệ số góc $k = -3$. d. Δ đi qua hai điểm $A(2;1)$ và $B(-4;5)$.
 e. Δ qua $C(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $\Delta_1: 2x - 3y + 1 = 0$.
 f. Δ qua $D(2;0)$ và song song với đường thẳng có phương trình $\Delta_2: 2x + y - 5 = 0$.

HD&Giải

a. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } M(3;4) \\ \text{có VTPT } \vec{n} = (1;2) \end{cases}$. Pttq của $\Delta: 1(x-3) + 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$

b. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } P(3;-2) \\ \text{có VTCP } \vec{u} = (4;3) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} = (3;-4) \end{cases}$.

Pttq của $\Delta: 3(x-3) - 4(y+2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 17 = 0$.

c. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } Q(-5;-8) \\ \text{có hệ số góc } k = -3 \Rightarrow \text{VTCP } \vec{u} = (1;-3) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} = (3;1) \end{cases}$.

Pttq của $\Delta: 3(x+5) + y + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 23 = 0$

Chú ý: • Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } Q(-5;-8) \\ \text{có hệ số góc } k = -3 \end{cases}$. Pttq của $\Delta: y + 8 = -3(x+5) \Leftrightarrow 3x + y + 23 = 0$

• Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } Q(-5;-8) \\ \text{có hệ số góc } k = -3 \Rightarrow \text{VTCP } \vec{u} = (1;-3) \end{cases}$. Ptts của $\Delta: \begin{cases} x = -5 + t \\ y = -8 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Từ đó, ta có phương trình: $\frac{x+5}{1} = \frac{y+8}{-3} \Leftrightarrow 3x + y + 23 = 0$.

d. Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{đi qua } A(2;1) \\ \text{VTCP } \vec{AB} = (-6;4) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} = (4;6) \end{cases}$.

Pttq của $\Delta: 4(x-2) + 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 6y - 14 = 0$ hay $2x + 3y - 7 = 0$

Chú ý: Ta có Δ đi qua hai điểm $A(2;1)$ và $B(-4;5)$ có pt: $\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

e. Ta có $\Delta \perp \Delta_1 \Rightarrow \Delta: 3x + 2y + m = 0$.

Do $C(-1;1) \in \Delta$ nên $3(-1) + 2.1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy pt của $\Delta: 3x + 2y + 1 = 0$.

f. Ta có $\Delta // \Delta_2 \Rightarrow \Delta: 2x + y + m = 0, (m \neq -5)$.

Do $D(2;0) \in \Delta$ nên $2.2 + 1.0 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$. Vậy pt của $\Delta: 2x + y - 4 = 0$.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC , biết $A(1;4), B(3;-1)$ và $C(6;2)$.

a. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC .

b. Lập phương trình đường cao AH và đường trung tuyến AM .

HD&Giải

Áp dụng: Đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Phương trình

chính tắc của đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$.

a. Phương trình đường thẳng $AB: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{-1-4} \Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

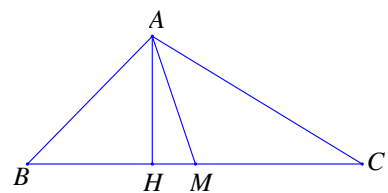
Phương trình đường thẳng $AC: \frac{x-1}{6-1} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow 2x + 5y - 22 = 0$

Phương trình đường thẳng $BC: \frac{x-3}{6-3} = \frac{y+1}{2-(-1)} \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$

b. Phương trình đường cao AH .

Ta có $AH \perp BC \Rightarrow AH: x + y + m = 0$. Do $A \in AH$ nên: $1 + 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -5$

Vậy: $AH: x + y - 5 = 0$



Phương trình đường trung tuyến AM . M là trung điểm của $BC \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Phương trình đường trung tuyến $AM: \frac{x-1}{\frac{9}{2}-1} = \frac{y-4}{\frac{1}{2}-4} \Leftrightarrow x+y-5=0$.

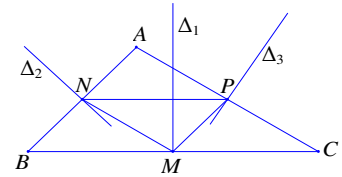
Nhận xét: Phương trình đường cao AH và đường trung tuyến AM trùng nhau, suy ra tam giác ABC cân tại A .

Bài 1.4. Lập phương trình ba đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1;0), N(4;1), P(2;4)$.

HD&Giải

Gọi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ lần lượt là các đường trung trực đi qua M, N, P

Ta có: $\Delta_1: \begin{cases} \text{đi qua } M(-1;0) \\ \perp NP \text{ (do } NP \parallel BC) \Rightarrow VTPT \vec{n}_{\Delta_1} = \overrightarrow{NP} = (-2;3) \end{cases}$



Vậy: $\Delta_1: -2(x+1)+3y=0 \Leftrightarrow 2x-3y+2=0$

Tương tự: $\Delta_2: 3x+4y-16=0$

$\Delta_3: 5x+y-14=0$

Bài 1.5. Cho tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng $AB: x-3y+11=0$, đường cao $AH: 3x+7y-15=0$, đường cao $BH: 3x-5y+13=0$. Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

HD&Giải

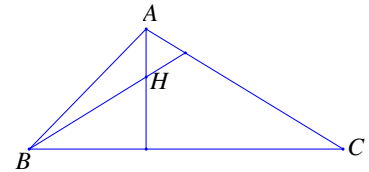
Theo đề bài, tọa độ điểm A thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-3y=-11 \\ 3x+7y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(-2;3)$$

Đường thẳng $AC \perp BH \Rightarrow AC: 5x+3y+m=0$

$A \in AC \Leftrightarrow 5(-2)+3.3+m=0 \Leftrightarrow m=1$. Vậy $AC: 5x+3y+1=0$

Tương tự: $B = AB \cap BH \Rightarrow B(4;5)$. Đường thẳng $BC: \begin{cases} \text{qua } B(4;5) \\ \perp AH \end{cases}$ có phương trình: $7x-3y-13=0$.



Bài 1.6. Cho tam giác ABC có $A(-2;3)$ và hai đường trung tuyến có phương trình: $2x-y+1=0$; $x+y-4=0$. Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

HD&Giải

Nhận thấy điểm A thuộc hai đường trung tuyến. Do đó đường trung tuyến của tam giác là $BM: 2x-y+1=0, CN: x+y-4=0$

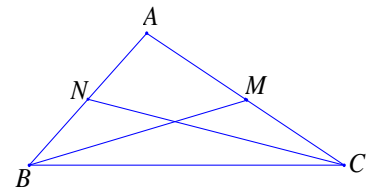
Gọi $B(x;y)$ và N là trung điểm AB . Ta có $N\left(\frac{x-2}{2}; \frac{y+3}{2}\right)$

$$\text{Do } \begin{cases} B \in BM \\ N \in CN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ \frac{x-2}{2} + \frac{y+3}{2} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow B(2;5)$$

Vậy đường thẳng chứa cạnh AB đi qua A và B có phương trình là: $x-2y+8=0$

Tương tự: Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC là $2x+5y-11=0$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $4x+y-13=0$



Vấn đề 2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

1. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1 \\ A_2x+B_2y=-C_2 \end{cases} (*)$$

• Hệ (*) có một nghiệm $(x_0; y_0)$, khi đó Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

- Hệ (*) có vô số nghiệm, khi đó Δ_1 trùng với Δ_2
- Hệ (*) có vô nghiệm, khi đó $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ hay Δ_1 song song với Δ_2

Lưu ý: Nếu $A_2 B_2 C_2 \neq 0$ thì:

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

2. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là $\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Bài 1.7. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

- a. $\Delta_1 : 4x - 10y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : x + y + 2 = 0$ b. $\Delta_1 : 12x - 6y + 10 = 0$ và $\Delta_2 : 2x - y + 5 = 0$
- c. $\Delta_1 : 8x + 10y - 12 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$ d. $\Delta_1 : \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

HD & Giải

- a. Ta có : $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}$. Vậy Δ_1 cắt Δ_2 .
- b. Ta có : $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1} \neq \frac{10}{5}$. Vậy $\Delta_1 // \Delta_2$.
- c. Ta có Pttq của $\Delta_2 : 4x + 5y - 6 = 0$. Nhận thấy: $\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{-12}{-6}$. Vậy $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.
- d. Ta có Pttq: $\Delta_1 : 4x + 5y - 6 = 0$ và $\Delta_2 : 4x + 5y + 14 = 0$. Vậy $\Delta_1 // \Delta_2$.

Bài 1.8. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng dưới đây vuông góc: $\Delta_1 : mx + y + q = 0$ và $\Delta_2 : x - y + m = 0$

HD & Giải

Đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có VTPT là $\vec{n}_1 = (m; 1), \vec{n}_2 = (1; -1)$

Ta có : $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Bài 1.9. Cho hai đường thẳng $d_1 : x - 2y + 5 = 0$ và $d_2 : 3x - y = 0$.

- a. Tìm giao điểm của d_1 và d_2 . b. Tính góc giữa d_1 và d_2 .

HD & Giải

- a. Gọi $M = d_1 \cap d_2$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy $M(1; 3)$

- b. Gọi $\varphi = (d_1, d_2)$. Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có VTPT là $\vec{n}_1 = (1; -2), \vec{n}_2 = (3; -1)$

Ta có : $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$. Vậy $(\widehat{d_1, d_2}) = 45^\circ$

Vấn đề 3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Áp dụng : Cho đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0

đến đường thẳng Δ là $d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2. Cho hai đường thẳng song song $\Delta_1 : Ax + By + C = 0$ và $\Delta_2 : Ax + By + D = 0$.

- a. $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, \Delta_1), M_2 \in \Delta_2$ hoặc $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_1, \Delta_2), M_1 \in \Delta_1$

Vận dụng nhanh công thức $d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

- b. Phương trình đường thẳng Δ_3 song song và cách đều Δ_1 và Δ_2 có dạng: $Ax + By + \frac{C + D}{2} = 0$

Bài 1.10. Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng được cho tương ứng như sau :

a. $A(3;4)$ và $\Delta: 4x+3y+1=0$

b. $B(1;2)$ và $\Delta_1: 3x-4y+1=0$

HD&Giải

$$a. d(A, \Delta) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5$$

$$b. d(B, \Delta) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{5}$$

Bài 1.11. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d và cách điểm $A(0;1)$ một khoảng bằng 5.

HD&Giải

Ta có : $M(x;y) \in d \Rightarrow M(2+2t; 3+t)$ và theo giả thiết $AM = 5$.

$$\text{Ta lại có: } \overline{AM} = (2+2t; 2+t). \text{ Như vậy: } AM^2 = 25 \Leftrightarrow (2+2t)^2 + (2+t)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{17}{5} \end{cases}$$

Vậy: $M(4;4)$ hoặc $M\left(-\frac{24}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ thì thỏa YCBT.

Bài 1.12. Cho đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$ và hai điểm $O(0;0), A(2;0)$.

a. Chứng tỏ rằng hai điểm A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ .

b. Tìm điểm O' đối xứng với O qua Δ .

c. Tìm điểm M thuộc Δ sao cho độ dài của đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất.

HD&Giải

a. Từ đường thẳng $\Delta: x-y+2=0 \Rightarrow y=x+2$. Ta có: $y(A) \cdot y(O) = 4 \cdot 2 = 8 > 0$.

Vậy A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ .

b. Nhận thấy: $O \notin \Delta$. Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với Δ tại H .

$$\text{Ta có: } d: \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{VTCP } \vec{u} = \vec{n}_\Delta = (1; -1) \end{cases} \Rightarrow \text{Pttt } d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}. H \in d \Rightarrow H(t; -t).$$

$$\text{Mặt khác: } H \in \Delta \Rightarrow t - (-t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 1)$$

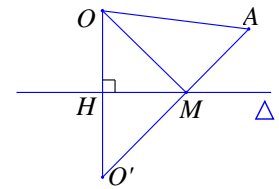
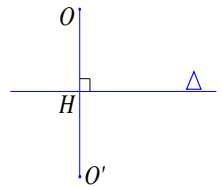
$$\text{Ta có: } H \text{ là trung điểm của } OO'. \text{ Suy ra: } x_{O'} = 2x_H = -2; y_{O'} = 2y_H = 2 \text{ Vậy: } O'(-2; 2)$$

c. Theo câu a. ta có: A và O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ .

Ta có: $OM + MA = O'M + MA \geq AM \Leftrightarrow O', M, A$ thẳng hàng $\Leftrightarrow O'A$ cắt Δ tại M

Phương trình đường thẳng $O'A: x+2y-2=0$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x-y+2=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$



Bài 1.13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x+3y+4=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A và tạo với đường thẳng d một góc 45° .

HD&Giải

Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng: $a(x-2)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ax+by-(2a+b)=0$ ($a^2+b^2 \neq 0$).

$$\text{Ta có: } \cos 45^\circ = \frac{|2a+3b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b \\ 5a = -b \end{cases}$$

❖ Với $a = 5b$. Chọn $a = 5, b = 1 \Rightarrow$ Phương trình $\Delta: 5x + y - 11 = 0$.

❖ Với $5a = -b$. Chọn $a = 1, b = -5 \Rightarrow$ Phương trình $\Delta: x - 5y + 3 = 0$.

Bài 1.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$.

Viết phương trình đường thẳng (d) qua điểm $M(0;1)$ tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1, d_2 .

HD\Giải

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi d_1, d_2 là:

$$\frac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-13=0 & (\Delta_1) \\ 3x-y-4=0 & (\Delta_2) \end{cases}$$

Đường thẳng cần tìm đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 hoặc Δ_2 .

Vậy: $x+3y-3=0$ và $3x-y+1=0$

Bài 1.15. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $B(1;-2)$ đường cao $AH : x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C của tam giác ABC biết C thuộc đường thẳng $d : 2x+y-1=0$ và diện tích tam giác ABC bằng 1.

HD\Giải

Phương trình BC : $x+y+1=0$. $C = BC \cap d \Rightarrow C(2;-3)$.

Gọi $A(x_0; y_0) \in AH \Rightarrow x_0 - y_0 + 3 = 0$ (1); $BC = \sqrt{2}$, $AH = d(A, BC) = \frac{|x_0 + y_0 + 1|}{\sqrt{2}}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|x_0 + y_0 + 1|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 2 & (2) \\ x_0 + y_0 + 1 = -2 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 2). \quad \text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 0)$$

Bài 1.16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1; 1)$ và đường thẳng $\Delta : 2x+3y+4=0$. Tìm điểm B thuộc đường thẳng Δ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau góc 45° .

HD\Giải

Ta có: Δ có VTPT $\vec{n} = (2; 3) \Rightarrow$ VTCP $\vec{u}(-3; 2)$. Giả sử $B(1-3t; -2+2t) \in \Delta$.

$$(AB, \Delta) = 45^\circ \Rightarrow |\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}|}{AB \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 169t^2 - 156t - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{15}{13} \\ t = -\frac{3}{13} \end{cases}$$

$$\text{. Vậy : } B\left(-\frac{32}{13}; \frac{4}{13}\right) \text{ hoặc } B\left(\frac{22}{13}; -\frac{32}{13}\right)$$

Bài 1.17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d : 2x-y+3=0$ và 2 điểm $A(1;0), B(2;1)$. Tìm điểm M trên d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

HD\Giải

Ta có: $(2x_A - y_A + 3) \cdot (2x_B - y_B + 3) = 30 > 0 \Rightarrow A, B$ nằm cùng phía đối với d.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d $\Rightarrow A'(-3; 2) \Rightarrow$ Phương trình A'B : $x+5y-7=0$.

Với mọi điểm $M \in d$, ta có: $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$.

Mà $MA'+MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của A'B và d. Vậy: $M\left(-\frac{8}{11}; \frac{17}{11}\right)$.

Bài 1.18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2;-2)$.

HD\Giải

Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O, nên $B(a;0); C(0;b)$ với

$$a \cdot b \neq 0 \Rightarrow \text{Phương trình của } d \text{ có dạng } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \text{ Vì } d \text{ qua M nên } \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Tam giác ABC cân tại A nên có: } AB = AC \Leftrightarrow (a-2)^2 + 4 = 4 + (b+2)^2 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2). Vậy $d : x+3y-6=0$ hoặc $x-y-2=0$.

Bài 1.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC biết: $B(2; -1)$, đường cao qua A có phương trình $d_1: 3x - 4y + 27 = 0$, phân giác trong góc C có phương trình $d_2: x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

HD&Giải

Phương trình BC: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} \Rightarrow$ Tọa độ điểm $C(-1; 3)$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d_2 , I là giao điểm của BB' và d_2 .

Phương trình BB' : $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(3; 1)$

Vì I là trung điểm BB' nên: $\begin{cases} x_{B'} = 2x_I - x_B = 4 \\ y_{B'} = 2y_I - y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(4; 3)$

Đường AC qua C và B' nên có phương trình: $y - 3 = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-5; 3)$

Bài 1.20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0; 2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB = 2BC$.

HD&Giải

Ta có $B, C \in d$ nên $B(2b - 2; b), C(2c - 2; c)$

Vì ΔABC vuông ở B nên $AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right) \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$BC = \frac{1}{5} \sqrt{125c^2 - 300c + 180} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \Rightarrow C(0; 1) \\ c = \frac{7}{5} \Rightarrow C\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right) \end{cases}$

Bài 1.21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, $A(2; -3)$, $B(3; -2)$.

Tìm tọa độ điểm C, biết điểm C nằm trên đường thẳng (d): $3x - y - 4 = 0$.

HD&Giải

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$. Giả sử $C(t; -4 + 3t) \in d$.

$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4t^2 + 4t + 1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$

Vậy: $C(-2; -10)$ hoặc $C(1; -1)$.

Bài 1.22. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 2x - y + 5 = 0$.

$d_2: 3x + 6y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(2; -1)$ sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 .

HD&Giải

Đường thẳng d_1 có VTPT $\vec{n}_1 = (2; -1)$; d_2 có VTPT $\vec{n}_2 = (3; 6)$

Ta có: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$ nên $d_1 \perp d_2$ và d_1 cắt d_2 tại một điểm I khác P. Gọi d là đường thẳng đi qua $P(2; -1)$ có phương trình: $d: A(x - 2) + B(y + 1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - 2A + B = 0$

d cắt d_1, d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh I $\Leftrightarrow$ khi d tạo với d_1 (hoặc d_2) một góc 45°

$$\Leftrightarrow \frac{|2A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow 3A^2 - 8AB - 3B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3B \\ B = -3A \end{cases}$$

❖ Nếu $A = 3B$ ta có đường thẳng $d: 3x + y - 5 = 0$

❖ Nếu $B = -3A$ ta có đường thẳng $d: x - 3y - 5 = 0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. $d: 3x + y - 5 = 0$; $d: x - 3y - 5 = 0$.

Bài 1.23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x + y + 5 = 0$, $d_2: 3x + y + 1 = 0$ và điểm $I(1; -2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

HD&Giải

Ta có: $A \in d_1 \Rightarrow A(a; -3a - 5); B \in d_2 \Rightarrow B(b; -3b - 1); \overrightarrow{IA} = (a - 1; -3a - 3); \overrightarrow{IB} = (b - 1; -3b + 1)$

Khi đó: I, A, B thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = k(a - 1) \\ -3b + 1 = k(-3a - 3) \end{cases}$

➤ Nếu $a = 1$ thì $b = 1 \Rightarrow AB = 4$ (không thỏa).

➤ Nếu $a \neq 1$ thì $-3b + 1 = \frac{b - 1}{a - 1}(-3a - 3) \Leftrightarrow a = 3b - 2$

$$AB = \sqrt{(b - a)^2 + [3(a - b) + 4]^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 + (3t + 4)^2 = 8 \text{ (với } t = a - b).$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \text{ hoặc } t = -\frac{2}{5}$$

♦ Với $t = -2 \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow b = 0, a = -2 \Rightarrow \Delta: x + y + 1 = 0$

♦ Với $t = -\frac{2}{5} \Rightarrow a - b = -\frac{2}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{5}, a = \frac{2}{5} \Rightarrow \Delta: 7x - y - 9 = 0$

Bài 1.24. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 1 = 0$, $d_2: 2x - y - 1 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(1; -1)$ cắt d_1, d_2 tương ứng tại A và B sao cho $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

HD&Giải

Ta có: $A \in d_1 \Rightarrow A(a; -a - 1); B \in d_2 \Rightarrow B(b; 2b - 1)$

Từ điều kiện $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ tìm được $A(1; -2), B(1; 1)$.

Vậy $d: x - 1 = 0$

Bài 1.25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1; 0)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai đường thẳng $d_1: x + y + 1 = 0$, $d_2: x - 2y + 2 = 0$ lần lượt tại A, B sao cho $MB = 3MA$.

HD&Giải

Ta có: $\begin{cases} A \in (d_1) \\ B \in (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(a; -1 - a) \\ B(2b - 2; b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (a - 1; -1 - a) \\ \overrightarrow{MB} = (2b - 3; b) \end{cases}$.

Từ A, B, M thẳng hàng và $MB = 3MA \Rightarrow \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}$ (1) hoặc $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$ (2)

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \\ B(-4; -1) \end{cases} \Rightarrow (d): x - 5y - 1 = 0 \text{ hoặc } (2) \Rightarrow \begin{cases} A(0; -1) \\ B(4; 3) \end{cases} \Rightarrow (d): x - y - 1 = 0$$

Bài 1.26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1; 1)$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt hai đường thẳng $d_1: 3x - y - 5 = 0$, $d_2: x + y - 4 = 0$ lần lượt tại A, B sao cho $2MA - 3MB = 0$.

HD&Giải

Ta có: $A(a; 3a - 5) \in d_1, B(b; 4 - b) \in d_2$.

Vì A, B, M thẳng hàng và $2MA = 3MB$ nên $\begin{cases} 2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} & (1) \\ 2\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} & (2) \end{cases}$

- ♦ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1) = 3(b-1) \\ 2(3a-6) = 3(3-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right), B(2; 2) .$ Suy ra $d : x - y = 0$.
- ♦ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1) = -3(b-1) \\ 2(3a-6) = -3(3-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; -2), B(1; 3) .$ Suy ra $d : x - 1 = 0$.

Vậy có $d : x - y = 0$ hoặc $d : x - 1 = 0$.

Bài 1.27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(3; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt các tia Ox, Oy tại A và B sao cho $(OA + 3OB)$ nhỏ nhất.

HD & Giải

Phương trình đường thẳng d cắt tia Ox tại $A(a; 0)$, tia Oy tại $B(0; b)$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a, b > 0$)

Do $M(3; 1) \in d$ nên ta có: $1 = \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{\frac{3}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow ab \geq 12$.

Mà $OA + 3OB = a + 3b \geq 2\sqrt{3ab} = 12 \Rightarrow (OA + 3OB)_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ \frac{3}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng d là: $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0$

Bài 1.28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4; 1)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho giá trị của tổng $OA + OB$ nhỏ nhất.

HD & Giải

Giải tương tự bài 7. Vậy $d : x + 2y - 6 = 0$

Bài 1.29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

HD & Giải

Đường thẳng d đi qua $M(1; 2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O, nên $A(a; 0); B(0; b)$ với

$a, b \neq 0 \Rightarrow$ Phương trình của d có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Vì d qua M nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có :

$$1 = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{a} + 1 \cdot \frac{2}{b}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{9} + 1\right) \left(\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right) \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} \geq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} \geq \frac{9}{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{3} : \frac{3}{a} = 1 : \frac{2}{b}$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow a = 10, b = \frac{20}{9}$

Vậy $d : 2x + 9y - 20 = 0$.

Bài 1.30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Lập phương trình đường thẳng d qua $M(2; 1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $S = 4$.

HD & Giải

Gọi $A(a; 0), B(0; b)$ ($a, b \neq 0$) là giao điểm của d với Ox, Oy, suy ra: $d : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ |ab| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + a = ab \\ |ab| = 8 \end{cases}.$

❖ Khi $ab = 8$ thì $2b + a = 8$. Nên: $b = 2; a = 4 \Rightarrow d_1: x + 2y - 4 = 0$.

❖ Khi $ab = -8$ thì $2b + a = -8$. Ta có: $b^2 + 4b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

♦ Với $b = -2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow d: (1 - \sqrt{2})x + 2(1 + \sqrt{2})y - 4 = 0$

♦ Với $b = -2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow d: (1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y + 4 = 0$.

Bài 1.31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; -1)$ và đường thẳng d có phương trình $2x - y + 3 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua A và tạo với d một góc α có $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

HD&Giải

Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng: $a(x - 2) + b(y + 1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a + b = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Ta có: $\cos \alpha = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5(a^2 + b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 7a^2 - 8ab + b^2 = 0$. Chọn $a = 1 \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = 7$.

$\Rightarrow \Delta_1: x + y - 1 = 0$ và $\Delta_2: x + 7y + 5 = 0$

Bài 1.32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$ và điểm $I(1; 1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45° .

HD&Giải

Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng: $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Do $(d, \Delta) = 45^\circ$ nên $\frac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = -3a \end{cases}$

❖ Với $a = 3b \Rightarrow \Delta: 3x + y + c = 0$. Mặt khác $d(I; \Delta) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|4 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = -14 \end{cases}$

❖ Với $b = -3a \Rightarrow \Delta: x - 3y + c = 0$. Mặt khác $d(I; \Delta) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8 \\ c = 12 \end{cases}$

Vậy các đường thẳng cần tìm: $3x + y + 6 = 0; 3x + y - 14 = 0; x - 3y - 8 = 0; x - 3y + 12 = 0$.

Bài 1.33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(0; 2)$ và hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là $3x + y + 2 = 0$ và $x - 3y + 4 = 0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 . Viết phương trình đường thẳng đi qua M , cắt 2 đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại B, C (B và C khác A) sao cho

$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HD&Giải

$A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(-1; 1)$. Ta có $d_1 \perp d_2$. Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. H là hình chiếu vuông góc của A

trên Δ . ta có: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \geq \frac{1}{AM^2}$ (không đổi)

$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AM^2}$ khi và chỉ khi $H \equiv M$, hay Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với AM . $\Rightarrow$ Phương trình $\Delta: x + y - 2 = 0$.

Bài 1.34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 3y - 6 = 0$ và điểm $N(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác OMN (O là gốc tọa độ) có diện tích bằng $\frac{15}{2}$.

HD&Giải

Ta có $\overline{ON} = (3; 4)$, $ON = 5$, Phương trình đường thẳng $ON: 4x - 3y = 0$. Giả sử $M(3m + 6; m) \in d$.

$$\text{Khi đó ta có } S_{\Delta ONM} = \frac{1}{2} d(M, ON) \cdot ON \Leftrightarrow d(M, ON) = \frac{2S_{\Delta ONM}}{ON} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4 \cdot (3m+6) - 3m|}{5} = 3 \Leftrightarrow |9m+24| = 15 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = \frac{-13}{3}$$

$$\diamond \text{ Với } m = -1 \Rightarrow M(3; -1)$$

$$\diamond \text{ Với } m = \frac{-13}{3} \Rightarrow M\left(-7; \frac{-13}{3}\right)$$

Bài 1.35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+y-3=0$, $d_2: x+y-9=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm điểm $B \in d_1, C \in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

HD&Giải

$$\text{Gọi } B(b; 3-b) \in d_1, C(c; 9-c) \in d_2 \Rightarrow \overline{AB} = (b-1; -1-b), \overline{AC} = (c-1; 5-c).$$

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-1) - (b+1)(5-c) = 0 \\ (b-1)^2 + (b+1)^2 = (c-1)^2 + (5-c)^2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Vì } c=1 \text{ không là nghiệm của } (*) \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} b-1 = \frac{(b+1)(5-c)}{c-1} \\ (b+1)^2 \frac{(5-c)^2}{(c-1)^2} + (b+1)^2 = (c-1)^2 + (5-c)^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow (b+1)^2 = (c-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = c-2 \\ b = -c \end{cases}.$$

$$\diamond \text{ Với } b = c-2, \text{ thay vào (1) ta được } c=4, b=2 \Rightarrow B(2;1), C(4;5).$$

$$\diamond \text{ Với } b = -c, \text{ thay vào (1) ta được } c=2, b=-2 \Rightarrow B(-2;5), C(2;7).$$

Vậy: $B(2;1), C(4;5)$ hoặc $B(-2;5), C(2;7)$.

Bài 1.36. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(2; -3), B(3; -2)$, có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

HD&Giải

$$\text{Ta có: } AB = \sqrt{2}, \text{ trung điểm } M\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right). \text{ Phương trình } AB: x - y - 5 = 0.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = \frac{3}{2} \Rightarrow d(C, AB) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Gọi } G(t; 3t-8) \in \Delta \Rightarrow d(G, AB) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|t - (3t-8) - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Với } t = 1 \Rightarrow G(1; -5) \Rightarrow C(-2; -10)$$

$$\diamond \text{ Với } t = 2 \Rightarrow G(2; -2) \Rightarrow C(1; -1)$$

Bài 1.37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-3=0$ và hai điểm $A(-1;2), B(2;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng 2.

HD&Giải

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{10}, C(-2a+3; a) \in d. \text{ Phương trình đường thẳng } AB: x+3y-5=0.$$

$$S_{\Delta ABC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \frac{|a-2|}{\sqrt{10}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Với } a = 6 \text{ ta có } C(-9; 6)$$

$$\diamond \text{ Với } a = -2 \text{ ta có } C(7; -2).$$

Bài 1.38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh AB là $M(-1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(2;-1)$. Đường cao của tam giác kẻ từ A có phương trình $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

HD&Giải

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ qua } M \text{ và nhận } \overline{MI} = (3; -3) \text{ làm VTPT: } (AB): x - y + 3 = 0.$$

Toạ độ điểm iA là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Với $M(-1;2)$ là trung điểm của AB nên $B\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Đường thẳng BC qua B và nhận $\vec{n} = (2;1)$ làm VTCP nên BC : $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + 2t \\ y = \frac{7}{3} + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Giả sử $C\left(-\frac{2}{3} + 2t; \frac{7}{3} + t\right) \in (BC)$.

Ta có: $IB = IC \Leftrightarrow \left(2t - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại vì } C \equiv B) \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$. Vậy: $C\left(\frac{14}{15}; \frac{47}{15}\right)$.

Bài 1.39. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;1)$. Đường cao BH có phương trình $x - 3y - 7 = 0$. Đường trung tuyến CM có phương trình $x + y + 1 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh B, C . Tính diện tích tam giác ABC .

HD & Giải

AC qua A và vuông góc với đường cao $BH \Rightarrow (AC): x - 3y - 7 = 0$.

Toạ độ điểm C thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; -5)$.

Trung điểm M của AB có: $x_M = \frac{2+x_B}{2}; y_M = \frac{1+y_B}{2}$. $M \in (CM) \Rightarrow \frac{2+x_B}{2} + \frac{1+y_B}{2} + 1 = 0$.

Toạ độ điểm B thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ \frac{2+x_B}{2} + \frac{1+y_B}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -3)$.

Toạ độ điểm H thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{14}{5}; -\frac{7}{5}\right)$.

Ta có: $BH = \frac{8\sqrt{10}}{5}; AC = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{5} = 16$ (đvdt).

Bài 1.40. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$. Xác định toạ độ các đỉnh B và C .

HD & Giải

Gọi I là trung điểm của BC . Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng BC qua I vuông góc với AH có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Vì I là trung điểm của BC nên giả sử $B(x_B; y_B)$ thì $C(7 - x_B; 1 - y_B)$ và $x_B - y_B - 3 = 0$.

H là trực tâm của tam giác ABC nên $CH \perp AB$; $\overrightarrow{CH} = (-5 + x_B; y_B)$, $\overrightarrow{AB} = (x_B + 3; y_B - 6)$

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - y_B = 3 \\ (x_B - 5)(x_B + 3) + (y_B - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_B = 6 \\ y_B = 3 \end{cases}$

Vậy $B(1; -2), C(6; 3)$ hoặc $B(6; 3), C(1; -2)$

Bài 1.41. Trong mặt phẳng toạ độ với hệ toạ độ Oxy , cho $\triangle ABC$ với $AB = \sqrt{5}$, đỉnh $C(-1; -1)$, phương trình cạnh $AB: x + 2y - 3 = 0$ và trọng tâm G của $\triangle ABC$ thuộc đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh A, B của tam giác.

HD & Giải

Gọi $I(x; y)$ là trung điểm AB , $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của ΔABC

$$\Rightarrow \overline{CG} = \frac{2}{3} \overline{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2x-1}{3} \\ y_G = \frac{2y-1}{3} \end{cases} \cdot G \in d: x+y-2=0 \text{ nên có: } x_G + y_G - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3} + \frac{2y-1}{3} - 2 = 0$$

Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{2y-1}{3} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(5; -1)$$

Gọi $A(x_A; y_A) \Rightarrow IA^2 = (x_A - 5)^2 + (y_A + 1)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Hơn nữa $A \in AB: x+2y-3=0$ suy ra tọa độ điểm A thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x_A + 2y_A - 3 = 0 \\ (x_A - 5)^2 + (y_A + 1)^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_A = 6 \\ y_A = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy: $A\left(4, -\frac{1}{2}\right), B\left(6, -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $B\left(4, -\frac{1}{2}\right), A\left(6, -\frac{3}{2}\right)$.

CÁC BÀI TẬP LÀM TƯƠNG TỰ

Bài 1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) biết :

- (Δ) qua điểm $A(2; 4)$ và có VTPT $\vec{n} = (3; 5)$
- (Δ) qua điểm $B(1; -2)$ và song song với $(\Delta_1): x + 2y - 4 = 0$
- (Δ) qua điểm $C(-2; 2)$ và vuông góc với $(\Delta_2): x - y - 5 = 0$
- (Δ) qua $E(3; -4)$ và có hệ số góc $k = \frac{2}{5}$
- (Δ) cắt trục Ox tại $M(5; 0)$ và cắt trục Oy tại $N(0; -3)$

Bài 2. Viết phương trình tham số, Phương trình tổng quát và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau:

- (Δ) qua $M(1; -2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1)$
- (Δ) qua gốc tọa độ O và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3; 5)$
- (Δ) qua $N(3; 2)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-3; 7)$
- (Δ) qua $P(-1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình: $2x - 3y + 1 = 0$
- (Δ) qua $Q(2; 0)$ và song song với đường thẳng có phương trình: $2x + y - 5 = 0$
- (Δ) qua $K(3; -2)$ và có hệ số góc $k = -2$
- (Δ) qua hai điểm $A(1; 3), B(-2; 3)$

Bài 3. Viết phương trình tổng quát các đường cao của tam giác ABC biết $A(-1; 2), B(2; -4), C(1; 0)$.

Bài 4. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB :

- Biết $A(1; 2), B(3; 4)$.
- Biết $A(2; 1), B(-6; -1)$.
- Biết $A(1; -2), B(5; 4)$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: 5x - 3y + 2 = 0$ và có phương trình hai đường cao: $AA': 4x - 3y + 1 = 0; BB': 7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình hai cạnh còn lại và đường cao CC' của tam giác ABC .

Bài 6. Cho tam giác ABC có phương trình ba cạnh là: $AB: x - y - 4 = 0, BC: 3x + 2y - 7 = 0, CA: x + 4y - 19 = 0$. Lập phương trình tổng quát các đường cao của tam giác ABC .

Bài 7. Cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh AB, BC, CA lần lượt là $M(-1; -1), N(1; 9), P(9; 1)$

- Lập phương trình các đường trung trực của ba cạnh trong tam giác ABC .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): 2x + y - 2 = 0; (d_2): x - y + 3 = 0$

- Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2)
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $N(2; 4)$ cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B sao cho N là trung điểm của đoạn AB .

Bài 9. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm (Nếu có) của chúng :

- $(\Delta_1): 4x + y - 2 = 0$ và $(\Delta_2): 2x - y + 5 = 0$
- $(\Delta_1): x - 2y + 7 = 0$ và $(\Delta_2): 2x - 4y + 9 = 0$
- $(\Delta_1): \sqrt{2}x - y + 3 = 0$ và $(\Delta_2): 2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2} = 0$
- $(\Delta_1): x - 3y + 4 = 0$ và $(\Delta_2): 0,5x - 1,5y + 4 = 0$

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-1; 3)$, tâm đối xứng $I(-1; -2)$ và một trục đối xứng $(d): y = 2x$.

Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D .

Bài 11. Biện luận vị trí tương đối hai đường thẳng sau theo tham số m

- $\Delta_1: 4x - my + 4 - m = 0; \Delta_2: (2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$
- $\Delta_1: mx + y + 2 = 0; \Delta_2: x + my + m + 1 = 0$
- $\Delta_1: 2mx + (m + 1)y - 2 = 0; \Delta_2: (m + 2)x + (2m - 1)y - (m + 2) = 0$

Bài 12. Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng sau:

- $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = -4 - 5t \\ y = 6 + 2t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = -12 + 1 \\ y = -t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

Bài 13. Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau:

- $4x + y - 5 = 0$
- $-2x + y + 4 = 0$
- $x - 5 = 0$
- $y - 7 = 0$

Bài 14. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau và tìm tọa độ giao điểm của chúng (nếu có):

- $\Delta_1: 2x + y - 3 = 0; \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$
- $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}; \Delta_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-6}$
- $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 - t' \end{cases}$
- $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}; \Delta_2: \frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{2}$

Bài 15. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 + t' \end{cases}$

- Tìm tọa độ giao điểm I của (Δ_1) và (Δ_2)
- Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của:
 - Đường thẳng (Δ') đi qua I và vuông góc với (Δ_1) .
 - Đường thẳng (Δ'') đi qua I và vuông góc với (Δ_2)

Bài 16. Cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ và điểm $A(4; 1)$.

- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm A xuống (Δ) .
- Tìm điểm A' đối xứng của A qua (Δ)

Bài 17. Cho tam giác ABC có $A(6; 2), B(1; 4), C(3; -1)$.

- Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC .
- Viết phương trình đường cao BH và trung tuyến BN của tam giác ABC .

Bài 18. Phương trình hai cạnh của một tam giác trong $mpOxy$ là: $5x - 2y + 6 = 0$ và $4x + 7y - 21 = 0$. Viết phương trình cạnh thứ ba biết trục tâm của tam giác trùng với gốc tọa độ O .

Bài 19. Cho tam giác ABC với $A(1; -1), B(-2; 1)$ và $C(3; 5)$.

- Viết phương trình đường vuông góc AH kẻ từ A đến trung tuyến BK của tam giác ABC .
- Tính diện tích tam giác ABK

Bài 20. Trong $mpOxy$ cho $A(3;0)$ và đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

- Tìm điểm B đối xứng của A qua (Δ)
- Viết phương trình đường thẳng (Δ') là đối xứng của (Δ) qua A .

Bài 21. Tính khoảng cách từ $M(2;-1)$ đến các đường thẳng sau:

- $(\Delta_1): 3x + 4y + 8 = 0$
- $(\Delta_2): \begin{cases} x = 3 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$
- $(\Delta_3): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4}$

Bài 22. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng sau:

- $(\Delta_1): 2x + y - 10 = 0$ và $(\Delta_2): 4x + 2y - 1 = 0$
- $(\Delta_1): -3x + y + 5 = 0$ và $(\Delta_2): 3x - y + 10 = 0$

Bài 23. Tìm góc giữa hai đường thẳng sau:

- $(\Delta_1): x + 2y + 4 = 0$ và $(\Delta_2): 2x - y + 6 = 0$
- $(\Delta_1): 2x - y + 5 = 0$ và $(\Delta_2): x - 3y + 2 = 0$
- $(\Delta_1): 4x - 2y + 5 = 0$ và $(\Delta_2): x - 3y + 1 = 0$

Bài 24. Viết phương trình đường thẳng (Δ) trong mỗi trường hợp sau:

- Qua $M(-2;0)$ và tạo với đường thẳng $(\Delta_1): x + 3y - 3 = 0$ một góc 45° .
- Qua $N(-1;2)$ và tạo với đường thẳng $(\Delta_2): \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$ một góc 60° .
- Qua $P(2;5)$ và cách đều hai điểm $A(-1;2)$ và $B(5;4)$.
- Qua $Q(2;-2)$ và cách điểm $C(3;1)$ một đoạn bằng 3.

Bài 25. Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng sau:

- $(\Delta_1): 2x + 4y + 7 = 0$ và $(\Delta_2): 5x + 3y + 7 = 0$
- $(\Delta_1): -3x + 4y + 8 = 0$ và $(\Delta_2): x - y + 6 = 0$

Bài 26. Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $(\Delta_1): 3x + y - 6 = 0$ và có khoảng cách từ đó đến $(\Delta_2): x + 2y - 2 = 0$ bằng $\sqrt{5}$.

Bài 27. Cho hình vuông có đỉnh $A(-4;5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình: $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

Bài 28. Cho điểm $A(-1;3)$ và đường thẳng $(d): 4x - 3y + 8 = 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng $(\Delta): -x + 2y + 1 = 0$ sao cho AM song song với đường thẳng (d) .

Bài 29. Cho điểm $A(2;5)$ và $B(4;1)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $(\Delta): x - 4y + 6 = 0$ sao cho tam giác ABC cân tại C .

Bài 30. Cho điểm $B(2;3)$ và đường thẳng $(\Delta): 2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A là đối xứng của B qua đường thẳng (Δ) .

Bài 31. Cho tam giác ABC với $A(2;-4), B(0;-2)$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $(\Delta): 3x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C biết rằng tam giác có diện tích bằng 3.

Bài 32. Cho $(\Delta): 2x + y + 1 = 0$ và hai điểm $A(0;3), B(1;5)$.

- Tìm điểm M trên (Δ) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất
- Tìm điểm N trên (Δ) sao cho $NA + NB$ nhỏ nhất

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ΔABC có $A(2;-1); B(4;5); C(-3;2)$. Viết phương trình tổng quát của đường cao AH .

- A. $7x+3y-11=0$. B. $3x+7y+1=0$. C. $7x+3y+13=0$. D. $-3x+7y+13=0$.

Câu 2. Cho hai điểm $A(-2;3); B(4;-1)$. viết phương trình trung trực đoạn AB .

- A. $2x-3y+1=0$. B. $2x+3y-5=0$. C. $3x-2y-1=0$. D. $x-y-1=0$.

Câu 3. Cho tam giác ABC với $A(2;-1); B(4;5); C(-3;2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến AM là

- A. $7x+3y-11=0$. B. $3x+7y+1=0$. C. $7x+3y+13=0$. D. $7x+3y-4=0$.

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây đúng? Đường thẳng $(d): x-2y+5=0$:

- A. (d) có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$. B. (d) cắt (d') có phương trình: $x-2y=0$.
C. Đi qua $A(1;-2)$. D. Có phương trình tham số: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $C(-1;2)$, đường cao $BH: x-y+2=0$, đường phân giác trong $AN: 2x-y+5=0$. Tọa độ điểm A là

- A. $A\left(\frac{-4}{3}; \frac{7}{3}\right)$. B. $A\left(\frac{-4}{3}; \frac{-7}{3}\right)$. C. $A\left(\frac{4}{3}; \frac{-7}{3}\right)$. D. $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 6. Giao điểm M của $(d): \begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+5t \end{cases}$ và $(d'): 3x-2y-1=0$ là

- A. $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. C. $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. D. $M\left(2; -\frac{11}{2}\right)$.

Câu 7. Cho hai đường thẳng $(\Delta_1): 11x-12y+1=0$ và $(\Delta_2): 12x+11y+9=0$. Khi đó hai đường thẳng này

- A. Trùng nhau. B. Song song với nhau.
C. Vuông góc nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 8. Cho tam giác ABC có $A(-1;-2); B(0;2); C(-2;1)$. Đường trung tuyến BM có phương trình là:

- A. $5x-3y+6=0$. B. $3x-5y+10=0$. C. $x-3y+6=0$. D. $3x-y-2=0$.

Câu 9. Cho $(d): \begin{cases} x=2+3t \\ y=5-4t \end{cases}$. Điểm nào sau đây không thuộc (d) ?

- A. $C(-1;9)$. B. $D(8;-3)$. C. $A(5;3)$. D. $B(2;5)$.

Câu 10. Cho hai đường thẳng $(d_1): mx+y=m+1, (d_2): x+my=2$ cắt nhau khi và chỉ khi:

- A. $m \neq 2$. B. $m \neq \pm 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq -1$.

Câu 11. Cho tam giác ABC . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BC}$ là một vecto pháp tuyến của đường cao AH .
B. $\overrightarrow{BC}$ là một vecto chỉ phương của đường thẳng BC .
C. Các đường thẳng AB, BC, CA đều có hệ số góc.
D. Đường trung trực của AB có $\overrightarrow{AB}$ là vecto pháp tuyến.

Câu 12. Cho hai đường thẳng $(d_1): mx+y=m+1, (d_2): x+my=2$ song song nhau khi và chỉ khi

- A. $m = \pm 1$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Câu 13. Cho đường thẳng $(d): 2x+3y-4=0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (d) ?

A. $\vec{n}_2 = (-4; -6)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -3)$. C. $\vec{n}_4 = (-2; 3)$. D. $\vec{n}_1 = (3; 2)$.

Câu 14. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Phương trình các cạnh và đường cao của tam giác là: $AB: 7x - y + 4 = 0$; $BH: 2x + y - 4 = 0$; $AH: x - y - 2 = 0$. Phương trình đường cao CH của tam giác ABC là

A. $x + 7y - 2 = 0$. B. $7x - y = 0$. C. $x - 7y - 2 = 0$. D. $7x + y - 2 = 0$.

Câu 15. Cho đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -2)$. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của (d) ?

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2}$. B. $2x + y - 5 = 0$. C. $y = -2x - 5$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$.

Câu 16. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(\sqrt{2}; 1)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $(\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y = 0$.

A. $-x + (3 + 2\sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$. B. $x - (3 + 2\sqrt{2})y + 3 + \sqrt{2} = 0$.
C. $(1 - \sqrt{2})x + (\sqrt{2} + 1)y + 1 = 0$. D. $(1 - \sqrt{2})x + (\sqrt{2} + 1)y + 1 - 2\sqrt{2} = 0$.

Câu 17. Phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng $(d'): 3x - 4y + 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$.

Câu 18. Đường thẳng đi qua $A(-1; 2)$, nhận $\vec{n} = (2; -4)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

A. $x - 2y + 4 = 0$. B. $x - 2y + 5 = 0$ C. $x - 2y - 4 = 0$. D. $x + y + 4 = 0$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có $A(-2; 3), B(1; -2), C(-5; 4)$. Đường trung trực trung tuyến AM có phương trình tham số

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 - 2t \end{cases}$.

Câu 20. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x - y + 4 = 0$

A. $x - 2y + 5 = 0$. B. $-x + 2y - 5 = 0$. C. $x + 2y - 3 = 0$. D. $x + 2y = 0$.

Câu 21. Cho $\triangle ABC$ có $A(4; -2)$. Đường cao $BH: 2x + y - 4 = 0$ và đường cao $CK: x - y - 3 = 0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A

A. $4x - 3y - 22 = 0$. B. $4x + 5y - 6 = 0$. C. $4x - 5y - 26 = 0$. D. $4x + 3y - 10 = 0$.

Câu 22. Cho tam giác ABC có $A(1; -2)$, đường cao $CH: x - y + 1 = 0$, đường phân giác trong $BN: 2x + y + 5 = 0$. Tọa độ điểm B là

A. $(-4; 3)$. B. $(-4; -3)$. C. $(4; 3)$. D. $(4; -3)$.

Câu 23. Mệnh đề nào dưới đây sai? Đường thẳng (d) được xác định khi biết

- A. Hai điểm phân biệt thuộc (d) .
B. Hệ số góc và một điểm thuộc đường thẳng.
C. Một điểm thuộc (d) và biết (d) song song với một đường thẳng cho trước.
D. Một vectơ pháp tuyến hoặc một vectơ chỉ phương.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $A(-4;1)B(2;-7)C(5;-6)$ và đường thẳng $(d): 3x + y + 11 = 0$. Quan hệ giữa (d) và tam giác ABC là:

- A. Đường Phân giác góc $\widehat{BAC}$. B. Đường cao vẽ từ B .
C. Đường trung tuyến vẽ từ A . D. Đường cao vẽ từ A .

Câu 25. Cho tam giác ABC biết trực tâm $H(1;1)$ và phương trình cạnh $AB: 5x - 2y + 6 = 0$, phương trình cạnh $AC: 4x + 7y - 21 = 0$. Phương trình cạnh BC là

- A. $4x - 2y + 1 = 0$. B. $x - 2y + 14 = 0$. C. $x + 2y - 14 = 0$. D. $x - 2y - 14 = 0$.

Câu 26. Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ và điểm $A\left(\frac{7}{2}; -2\right)$. Điểm $A \in (d)$ ứng với giá trị nào của t ?

- A. $t = -\frac{1}{2}$. B. $t = 2$. C. $t = \frac{3}{2}$. D. $t = \frac{1}{2}$.

Câu 27. Cho hai điểm $P(6;1)$ và $Q(-3;-2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x - y - 1 = 0$. Tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MP + MQ$ nhỏ nhất.

- A. $M(3;5)$. B. $M(0;-1)$. C. $M(2;3)$. D. $M(1;1)$.

Câu 28. Viết Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;-3)$ và cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB vuông cân.

- A. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$. D. $x + y + 1 = 0$.

Câu 29. Cho đường thẳng $(d): x - 2y + 1 = 0$. Nếu đường thẳng (Δ) đi qua $M(1;-1)$ và song song với (d) thì (Δ) có phương trình là

- A. $x + 2y + 1 = 0$. B. $x - 2y + 5 = 0$. C. $x - 2y + 3 = 0$. D. $x - 2y - 3 = 0$.

Câu 30. Cho ba điểm $A(1;-2), B(5;-4), C(-1;4)$. Đường cao AA' của tam giác ABC có phương trình

- A. $3x - 4y + 8 = 0$. B. $3x - 4y - 11 = 0$. C. $-6x + 8y + 11 = 0$. D. $8x + 6y + 13 = 0$.

Câu 31. Cho ba điểm $A(1;1); B(2;0); C(3;4)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách đều hai điểm B, C .

- A. $4x - y - 3 = 0; 2x - 3y + 1 = 0$. B. $4x - y - 3 = 0; 2x + 3y + 1 = 0$.
C. $4x + y - 3 = 0; 2x - 3y + 1 = 0$. D. $x - y = 0; 2x - 3y + 1 = 0$.

Câu 32. Cho hai điểm $A(-1;2), B(3;1)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Tọa độ điểm C thuộc Δ để tam giác ACB cân tại C là

- A. $\left(-\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$. B. $\left(\frac{13}{6}; \frac{7}{6}\right)$. C. $\left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$. D. $\left(\frac{7}{6}; -\frac{13}{6}\right)$.

Câu 33. Cho $(d): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M \in (d)$ cách $A(9;1)$ một đoạn bằng 5?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 34. Cho 4 điểm $A(-3;1), B(-9;-3), C(-6;0), D(-2;4)$. Tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng AB và CD là

- A. $(-9;-3)$. B. $(-9;3)$. C. $(0;4)$. D. $(-6;-1)$.

Câu 35. Đường thẳng (d) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\vec{u}_2 = (-b; a)$ là vectơ chỉ phương của (d) . **B.** $\vec{n} = (ka; kb)$ $k \in R$ là vectơ pháp tuyến của (d) .

C. (d) có hệ số góc $k = \frac{-b}{a}$ ($b \neq 0$). **D.** $\vec{u}_1 = (b; -a)$ là vectơ chỉ phương của (d) .

Câu 36. Cho hai điểm $A(4;0), B(0;5)$. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình của đường thẳng AB ?

A. $y = \frac{-5}{4}x + 15$. **B.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. **C.** $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{5}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5t \end{cases} (t \in R)$.

Câu 37. Hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 2t \end{cases}$ và $(d_2): 4x + 3y - 18 = 0$ cắt nhau tại điểm có tọa độ là

A. $(1;2)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;2)$.

Câu 38. Đường thẳng $(\Delta): 3x - 2y - 7 = 0$ cắt đường thẳng nào dưới đây?

A. $(d_3): -3x + 2y - 7 = 0$. **B.** $(d_4): 6x - 4y - 14 = 0$.
C. $(d_1): 3x + 2y = 0$. **D.** $(d_2): 3x - 2y = 0$.

Câu 39. Cho đường thẳng $(d): 3x - 7y + 15 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\vec{u} = (7;3)$ là vectơ chỉ phương của (d) . **B.** (d) có hệ số góc $k = \frac{3}{7}$.
C. (d) không đi qua gốc tọa độ. **D.** (d) đi qua hai điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ và $N(5;0)$.

Câu 40. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng dưới đây vuông góc

$(\Delta_1): \begin{cases} x = 1 + (m^2 + 1)t \\ y = 2 - mt \end{cases}$ và $(\Delta_2): \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 1 - 4mt' \end{cases}$?

A. $m = \pm 2\sqrt{3}$. **B.** $m = \pm \sqrt{3}$. **C.** $m = \pm 3$. **D.** $m = \pm 1$.

Câu 41. Cho 4 điểm $A(1;2), B(4;0), C(1;-3), D(7;-7)$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD là

A. Vuông góc nhau. **B.** Cắt nhau nhưng không vuông góc.
C. Trùng nhau. **D.** Song song.

Câu 42. Cho đường thẳng $(d): 4x - 3y + 5 = 0$. Nếu đường thẳng (Δ) đi qua gốc tọa độ và vuông góc với (d) thì (Δ) có phương trình là

A. $3x + 4y = 0$. **B.** $4x - 3y = 0$. **C.** $4x + 3y = 0$. **D.** $3x - 4y = 0$.

Câu 43. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;4); B(-6;1)$ là

A. $3x - 4y + 22 = 0$. **B.** $3x - 4y + 8 = 0$. **C.** $3x - 4y - 22 = 0$. **D.** $3x + 4y - 10 = 0$.

Câu 44. Cho hai điểm $P(1;6)$ và $Q(-3;-4)$ và đường thẳng $\Delta: 2x - y - 1 = 0$. Tọa độ điểm N thuộc Δ sao cho $|NP - NQ|$ lớn nhất là

A. $N(3;5)$. **B.** $N(-1;-3)$. **C.** $N(1;1)$. **D.** $N(-9;-19)$.

Câu 45. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng $(\Delta_1): 3x + 4y - 1 = 0$ và $(\Delta_2): (2m - 1)x + m^2y + 1 = 0$ trùng nhau?

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = 2$. **C.** Với mọi m . **D.** Không có m .

Câu 46. Cho phương trình: $ax + by + c = 0$ (1) với $a^2 + b^2 > 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Với $b=0$, (1) là phương trình đường thẳng song song hoặc trùng với trục Oy .

B. Điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (1) khi và chỉ khi $ax_0 + by_0 + c \neq 0$.

C. (1) là phương trình tổng quát của đường thẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$.

D. Với $a=0$ (1) là phương trình đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox .

Câu 47. Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(5; -3)$ và cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB là:

A. $5x - 3y + 34 = 0$. **B.** $3x - 5y - 30 = 0$. **C.** $3x + 5y - 30 = 0$. **D.** $5x - 3y - 34 = 0$.

Câu 48. Đường thẳng dưới đây không song song với đường thẳng $(d): y = 2x - 1$?

A. $-2x + y = 0$. **B.** $2x + y - 5 = 0$. **C.** $2x - y + 5 = 0$. **D.** $2x - y - 5 = 0$.

Câu 49. Cho đường thẳng $(d): 3x + 5y - 15 = 0$. Phương trình nào dưới đây không phải là một dạng khác của (d) ?

A. $y = -\frac{3}{5}x + 3$. **B.** $\begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. **C.** $\begin{cases} x = 5 - \frac{5}{3}t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. **D.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

Câu 50. Cho tam giác ABC với $A(2; 3); B(-4; 5); C(6; -5)$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Phương trình tham số của đường trung bình MN là

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	D	A	C	B	C	A	D	C	C	C	A	A	C	D	A	B	D	C	B	B	D	A	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	B	B	D	B	A	C	B	A	C	A	C	C	D	B	D	A	A	D	D	B	B	B	B	A

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Một đường tròn được xác định khi biết tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

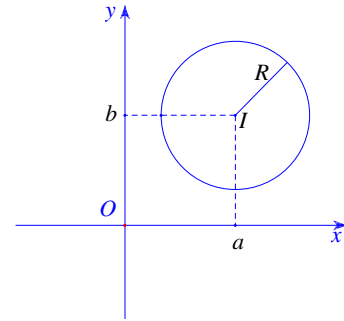
Phương trình:

Dạng 1: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Dạng 2: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ và

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

Đặc biệt: Đường tròn tâm O , bán kính R : $x^2 + y^2 = R^2$



2. Điều kiện để đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C) là:

$$d(I, \Delta) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

3. Vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (C) :

- $d(I, d) > R \Leftrightarrow d \cap (C) = \emptyset$: d không có điểm chung với (C) .
- $d(I, d) = R \Leftrightarrow d \cap (C) = \{A\}$: d tiếp xúc với (C) .
- $d(I, d) < R \Leftrightarrow d \cap (C) = \{A; B\}$: d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

4. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại $M(x_0; y_0)$ có dạng :

$$x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0 \text{ hoặc } (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Nhận dạng phương trình bậc hai là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn

Phương pháp :

1. Phương trình có dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = m$, với $m > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{m}$.

2. Phương trình có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Bài 2.1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính của nó nếu có.

a. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$ (1)

b. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ (2)

c. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$ (3)

d. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ (4)

HD & Giải

a. Phương trình (1) có dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = \frac{-6}{-2} = 3; b = \frac{8}{-2} = -4, c = 100$

Ta có: $a^2 + b^2 - c = 9 + 16 - 100 = -75 < 0$. Vậy (1) không phải là phương trình đường tròn.

b. Phương trình (2) có dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -2; b = 3, c = -12$

Ta có: $a^2 + b^2 - c = 4 + 9 - 12 = 1 > 0$. Vậy (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(-2; 3), R = 1$.

c. Phương trình $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$

Vậy (3) là phương trình đường tròn với tâm $I(1; -2), R = \sqrt{6}$.

d. Phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Vậy (4) là phương trình đường tròn với tâm $I(1;1)$, $R=2$.

Bài 2.2. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$ (1). Với giá trị nào của tham số m thì (1) là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính theo m .

HD & Giải

Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m; b = -2m; c = 6m - 1$

Ta có: (1) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m^2 - 6m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m > 1 \end{cases}$$

(1) có tâm $I(m; -2m)$, bán kính $R = \sqrt{5m^2 - 6m + 1}$.

Vấn đề 2. Lập phương trình đường tròn

Phương pháp: Viết phương trình đường tròn (C), cần xác định tâm và bán kính của nó.

1. Đường tròn (C): $\begin{cases} \text{tâm } I(a;b) \\ \text{bán kính } R \end{cases}$. Có phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ hay viết dưới dạng khai triển

là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $c = a^2 + b^2 - R^2$.

2. Các dạng thường gặp

① Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và đi qua điểm $M(x_0; y_0)$. Ta có: $R = IM = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$

② Đường tròn (C) có đường kính AB . Suy ra (C): $\begin{cases} \text{tâm } I(a;b) \text{ là trung điểm của } AB \\ \text{bán kính } R = \frac{AB}{2} \end{cases}$

③ Đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ tại điểm A . Ta có: $R = IA = d(I, \Delta)$

④ Đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Ta có $R = d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2)$

⑤ Đường tròn (C) qua ba điểm A, B, C . Ta gọi (C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, lần lượt thay tọa độ các điểm A, B, C vào ta được hệ phương trình ba ẩn a, b, c . Sử dụng máy tính, tìm các hệ số a, b, c và kết luận kết quả bài toán.

Bài 2.3. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a. (C) có tâm $I(-2;3)$ và đi qua điểm $M(2;-3)$.

b. (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - 2y + 7 = 0$.

c. (C) có đường kính AB với $A(1;1), B(7;5)$.

HD & Giải

a. Ta có: $\overline{IM} = (4; -6) \Rightarrow IM = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$.

Như vậy: (C): $\begin{cases} \text{tâm } I(-2;3) \\ \text{bán kính } R = IM = \sqrt{52} \end{cases}$ có phương trình: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 52$.

b. Ta có: $d(I, \Delta) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Như vậy: (C): $\begin{cases} \text{tâm } I(-1;2) \\ \text{bán kính } R = d(I, \Delta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$ có phương trình: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$.

c. Gọi $I(x; y)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow I(4;3)$. Ta có: $\overline{AB} = (6;4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{13}$

Như vậy: (C): $\begin{cases} \text{tâm } I(4;3) \\ \text{bán kính } R = \frac{AB}{2} = \sqrt{13} \end{cases}$ có phương trình: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Bài 2.4. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(1;2), B(5;2)$ và $C(1;-3)$.

HD&Giải

Gọi đường tròn (C) có dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Ta có:

$$\begin{cases} A \in (C) \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 - 2a \cdot 1 - 2b \cdot 2 + c = 0 \\ B \in (C) \Leftrightarrow 5^2 + 2^2 - 2a \cdot 5 - 2b \cdot 2 + c = 0 \\ C \in (C) \Leftrightarrow 1^2 + (-3)^2 - 2a \cdot 1 - 2b \cdot (-3) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b - c = 5 \\ 10a + 4b - c = 29 \\ 2a - 6b - c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy (C): $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$

Bài 2.5. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và

a. Đi qua $A(2;-1)$

b. Có tâm thuộc đường thẳng $3x - 5y - 8 = 0$

HD&Giải

Gọi đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R có phương trình dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1)

Theo đề bài, ta có : $d(I, Ox) = d(I, Oy) = R \Leftrightarrow |a| = |b| = R$ (2)

Từ (1) và (2), ta có : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ và $a = \pm b$

a. Ta có : $A \in (C) \Leftrightarrow (2-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$

• Với $a = b$, ta có : $(2-a)^2 + (-1-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$ vô nghiệm

• Với $a = -b$, ta có : $(2-a)^2 + (-1+a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = 5$

$$+ a = 1 \Rightarrow b = -1, R = 1. (C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$+ a = 5 \Rightarrow b = -5, R = 5. (C): (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

b. Ta có : $I \in \Delta : 3x - 5y - 8 = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm I thỏa mãn: $3a - 5b - 8 = 0$

• Với $a = b$, ta có : $3a - 5a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = -4, R = 4$. Vậy (C): $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

• Với $a = -b$, ta có : $3a + 5a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1, R = 1$. Vậy (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

Bài 2.6. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại $A(6;0)$ và đi qua điểm $B(9;9)$.

HD&Giải

Gọi đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R có phương trình dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1)

Theo đề bài, ta có : (C) tiếp xúc với trục hoành tại $A(6;0)$ nên $a = 6, d(I, Ox) = |b| = R$

Suy ra: (C): $(x-6)^2 + (y-b)^2 = b^2$. Mặt khác : $B \in (C) \Leftrightarrow (9-6)^2 + (9-b)^2 = b^2 \Leftrightarrow b = 5 \Rightarrow R = 5$

Vậy (C): $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$

Bài 2.7. Viết phương trình đường tròn đi qua $A(-1;0), B(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x - y - 1 = 0$

HD&Giải

Gọi đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R có phương trình dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1)

Ta có : (C) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b-1|}{\sqrt{2}} = R$ (2)

Ta lại có : $A, B \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-a)^2 + b^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \end{cases}$ (3)

Từ (2) và (3), ta có : $\begin{cases} (-1-a)^2 + b^2 = \frac{(a-b-1)^2}{2} \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = \frac{(a-b-1)^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-b \\ b^2 + (b-2)^2 = 2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy : (C): $x^2 + (y-1)^2 = 2$

Vấn đề 3. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương pháp :

Loại 1. Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm

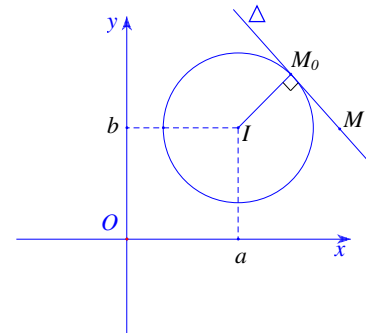
Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

Ta có : $\Delta : \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0) \\ VTPT \quad \overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b) \end{cases}$ có phương trình là

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

Loại 2. Phương trình tiếp tuyến khi không biết tiếp điểm

- Xác định tâm I và bán kính của (C).
- Dựa vào các yếu tố viết phương trình đường thẳng Δ
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc : $d(I, \Delta) = R$



Bài 2.8. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(4; 2)$ thuộc đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

HD❧Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$. Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M_0(4; 2)$ có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (4 - 1)(x - 4) + (2 + 2)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0$$

Bài 2.9. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(3; -2)$.

HD❧Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi Δ là đường thẳng qua A và có hệ số góc k có phương trình dạng :

$$y + 2 = k(x - 3) \Leftrightarrow kx - y - 2 - 3k = 0$$

$$\Delta \text{ là tiếp xúc với đường tròn (C)} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2k - 1 - 2 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến với (C) kẻ từ A : $2x - y - 8 = 0$; $x + 2y + 1 = 0$

Bài 2.10. Lập phương trình tiếp tuyến Δ với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$

a. Biết rằng Δ song song với đường thẳng $d : 3x - y + 2020 = 0$

b. Biết rằng Δ song song với đường thẳng $d : 3x - y + 2019 = 0$

HD❧Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

a. Ta có: $\Delta // d \Rightarrow \Delta : 3x - y + m = 0, m \neq 2020$.

$$\Delta \text{ là tiếp xúc với đường tròn (C)} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|6 + 3 + m|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -19 \end{cases}$$

Vậy phương trình của $\Delta : 3x - y + 1 = 0$ hoặc $3x - y - 19 = 0$

b. Ta có: $\Delta \perp d \Rightarrow \Delta : x + 3y + m = 0$.

$$\Delta \text{ là tiếp xúc với đường tròn (C)} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 9 + m|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 17 \end{cases}$$

Vậy phương trình của $\Delta : x + 3y - 3 = 0$ hoặc $x + 3y + 17 = 0$

Bài 2.11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng (d):

$2x - y - 5 = 0$ và đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 20x + 50 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, C(1; 1).

HD❧Giải

Giải hệ $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20x + 50 = 0 \end{cases}$. Tìm được $A(3; 1)$, $B(5; 5)$

Viết phương trình đường tròn (C) qua ba điểm A, B, C. Vậy (C): $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

Bài 2.12. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ba đường thẳng: $d_1: 2x + y - 3 = 0$, $d_2: 3x + 4y + 5 = 0$, $d_3: 4x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d_1 và tiếp xúc với d_2 và d_3 .

HD\&Giải

Gọi tâm đường tròn là $I(t; 3 - 2t) \in d_1$.

$$\text{Khi đó: } d(I, d_2) = d(I, d_3) \Leftrightarrow \frac{|3t + 4(3 - 2t) + 5|}{5} = \frac{|4t + 3(3 - 2t) + 2|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

Vậy có 2 đường tròn thoả mãn: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{49}{25}$ và $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = \frac{9}{25}$.

Bài 2.13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: x + 3y + 8 = 0$, $\Delta': 3x - 4y + 10 = 0$ và điểm $A(-2; 1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ , đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ' .

HD\&Giải

Gọi tâm đường tròn là: $I(-3t - 8; t) \in \Delta$. Ta có: $d(I, \Delta') = IA$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(-3t - 8) - 4t + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{(-3t - 8 + 2)^2 + (t - 1)^2} \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow I(1; -3), R = 5$$

Vậy đường tròn cần tìm: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Bài 2.14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua $A(2; -1)$ và tiếp xúc với các trục toạ độ.

at\&Giải

Gọi phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Ta có (C) tiếp xúc với Ox và Oy nên: $|a| = |b| = R$

Nên phương trình đường tròn (C) có dạng: $\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2 & (1) \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 & (2) \end{cases}$ và (C) qua $A(2; -1)$

Ta có: 1) $a = 1$; $a = 5$ 2) $\Rightarrow$ vô nghiệm.

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ và $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

Bài 2.15. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục toạ độ và có tâm ở trên đường thẳng d .

HD\&Giải

Gọi $I(a; 2a - 4) \in (d)$ là tâm đường tròn (C) cần tìm. Ta có đường tròn tiếp xúc với các trục toạ độ nên:

$$|a| = |2a - 4| \Leftrightarrow a = 4, a = \frac{4}{3}.$$

❖ $m = \frac{4}{3}$ thì phương trình đường tròn (C) là: $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

❖ $m = 4$ thì phương trình đường tròn là (C): $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

Bài 2.16. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 3)$, đường thẳng (Δ): $3x - 4y + 8 = 0$. Lập phương trình đường tròn qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng (Δ).

HD\&Giải

Tâm I của đường tròn nằm trên đường trung trực d của đoạn AB

d qua $M(1; 2)$ có VTPT là $\overline{AB} = (4; 2) \Rightarrow d: 2x + y - 4 = 0 \Rightarrow$ Tâm $I(a; 4 - 2a)$

$$\text{Ta có } IA = d(I, d) \Leftrightarrow |11a - 8| = 5\sqrt{5a^2 - 10a + 10} \Leftrightarrow 2a^2 - 37a + 93 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{31}{2} \end{cases}$$

$$\text{❖ Với } a = 3 \Rightarrow I(3; -2), R = 5 \Rightarrow (C): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$$\text{❖ Với } a = \frac{31}{2} \Rightarrow I\left(\frac{31}{2}; -27\right), R = \frac{65}{2} \Rightarrow (C): \left(x - \frac{31}{2}\right)^2 + (y + 27)^2 = \frac{4225}{4}$$

Bài 2.17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ và $A(0; -1) \in (C)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc đường tròn (C) sao cho ΔABC đều.

HD\&Giải

Ta có: (C) có tâm $I(1; 2)$ và $R = \sqrt{10}$. Gọi H là trung điểm BC . Suy ra $\overline{AI} = 2.\overline{IH} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$

ΔABC đều $\Rightarrow I$ là trọng tâm. Phương trình $(BC): x + 3y - 12 = 0$

Vì $B, C \in (C)$ nên tọa độ của B, C là các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x = 12 - 3y \end{cases}$$

Giải hệ PT trên ta được: $B\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc

$$C\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right); B\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bài 2.18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$, đường thẳng $(d): x + y + m = 0$. Tìm m để (C) cắt (d) tại A và B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.

HD\&Giải

Ta có: (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$. (d) cắt (C) tại $A, B \Leftrightarrow d(O; d) < 1$

$$\text{Khi đó: } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sin \widehat{AOB} \leq \frac{1}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ.$$

$$\text{Vậy } S_{OAB} \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ. \text{ Khi đó } d(I; d) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Bài 2.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ và đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C) . Tìm m sao cho (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IAB lớn nhất và tính giá trị đó.

HD\&Giải

Ta có: (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$.

$$\begin{aligned} (d) \text{ cắt } (C) \text{ tại 2 điểm phân biệt } A, B &\Leftrightarrow d(I, d) < R \Leftrightarrow |\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}| < 3\sqrt{2 + m^2} \\ &\Leftrightarrow 1 - 4m + 4m^2 < 18 + 9m^2 \Leftrightarrow 5m^2 + 4m + 17 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{9}{2}$$

$$\text{Vậy: } S_{IAB} \text{ lớn nhất là } \frac{9}{2} \text{ khi } \widehat{AIB} = 90^\circ \Leftrightarrow AB = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow d(I, d) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |1 - 2m| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + m^2} \Leftrightarrow 2m^2 + 16m + 32 = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Bài 2.20. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 10 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d biết $d \perp (\Delta)$ và d cắt (C) tại A, B sao cho $AB = 6$.

HD&Giải

Ta có: (C) có tâm $I(-4; 3)$ và có bán kính $R = 5$. Gọi H là trung điểm AB , $AH = 3$. Do $d \perp \Delta$ nên PT của d có dạng: $4x + 3y + m = 0$.

$$\text{Ta có: } d(I, (\Delta)) = IH = \sqrt{AI^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{|-16 + 9 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 27 \\ m = -13 \end{cases}$$

Vậy $d: 4x + 3y + 27 = 0$ hoặc $d: 4x + 3y - 13 = 0$.

Bài 2.21. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$, $d_2: x + 2y - 7 = 0$ và tam giác ABC có $A(2; 3)$, trọng tâm là điểm $G(2; 0)$, điểm B thuộc d_1 và điểm C thuộc d_2 . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

HD&Giải

Do $B \in d_1$ nên $B(m; -m-5)$, $C \in d_2$ nên $C(7-2n; n)$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ nên } \begin{cases} 2 + m + 7 - 2n = 3.2 \\ 3 - m - 5 + n = 3.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -4), C(5; 1)$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC: x^2 + y^2 - \frac{83}{27}x + \frac{17}{9}y - \frac{338}{27} = 0$$

Bài 2.22. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4; 6)$, phương trình các đường thẳng chứa đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh C lần lượt là $d_1: 2x - y + 13 = 0$ và $d_2: 6x - 13y + 29 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

HD&Giải

Đường cao $CH: 2x - y + 13 = 0$, trung tuyến $CM: 6x - 13y + 29 = 0 \Rightarrow C(-7; -1)$

PT đường thẳng $AB: x + 2y - 16 = 0$. $M = CM \cap AB \Rightarrow M(6; 5) \Rightarrow B(8; 4)$.

Giả sử phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp $\Delta ABC: x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

$$\text{Vì } A, B, C \in (C) \text{ nên } \begin{cases} 52 - 8a - 12b + c = 0 \\ 80 - 16a - 8b + c = 0 \\ 50 + 14a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = -72 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 72 = 0$.

Bài 2.23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , có điểm $A(2; 3)$, trọng tâm $G(2; 0)$. Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$ và $d_2: x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG .

HD&Giải

Giả sử $B(-5-b; b) \in d_1$; $C(7-2c; c) \in d_2$.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ nên ta có hệ: } \begin{cases} x_B + x_C + 2 = 6 \\ y_B + y_C + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -4), C(5; 1).$$

Phương trình $BG: 4x - 3y - 8 = 0$. Bán kính $R = d(C, BG) = \frac{9}{5}$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn: } (x-5)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{25}$$

Bài 2.24. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1; -3)$, trọng tâm $G(4; -2)$, trung trực của AB là $d: 3x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

HD&Giải

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} \Rightarrow M\left(\frac{13}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

$AB \perp d \Rightarrow AB$ nhận $\vec{u}_d = (2; -3)$ làm VTPT $\Rightarrow$ Phương trình $AB: 2x - 3y - 7 = 0$.

Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow N = AB \cap d \Rightarrow N(2; -1) \Rightarrow B(5; 1) \Rightarrow C(8; -4)$.

Gọi đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 - c > 0$).

$$\text{Khi đó ta có hệ: } \begin{cases} 2a + 6b - c = 10 \\ 10a + 2b + c = -26 \\ 16a - 8b + c = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{74}{21} \\ b = -\frac{23}{7}; c = \frac{8}{3} \end{cases}. \text{ Vậy: } (C): x^2 + y^2 - \frac{148}{21}x + \frac{46}{7}y + \frac{8}{3} = 0$$

Bài 2.25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có phương trình cạnh $AB: x + y - 3 = 0$, phương trình cạnh $AC: 3x + y - 7 = 0$ và trọng tâm $G\left(2; \frac{1}{3}\right)$. Viết phương trình đường tròn đi qua trực tâm H và hai đỉnh B, C của tam giác ABC .

HD & Giải

$A = AB \cap AC \Rightarrow A(2; 1)$. Giả sử $B(m; 3 - m), C(n; 7 - 3n)$.

$G\left(2; \frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm ΔABC nên: $\begin{cases} 2 + m + n = 6 \\ 1 + 3 - m + 7 - 3n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow B(1; 2), C(3; -2)$

H là trực tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{BH} \perp \overline{AC} \end{cases} \Leftrightarrow H(10; 5)$.

Gọi đường tròn (C) qua B, C, H có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 - c > 0$)

$$\text{Do } B, C, H \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b + c = -5 \\ 6a - 4b + c = -13 \\ 20a + 10b + c = -125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -2 \\ c = 15 \end{cases}. \text{ Vậy } (C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0.$$

Bài 2.26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Đỉnh $B(1; 1)$. Đường thẳng AC có phương trình: $4x + 3y - 32 = 0$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC \cdot BM = 75$. Tìm đỉnh C biết bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

HD & Giải

Đường thẳng (AB) qua B và vuông góc với $(AC) \Rightarrow (AB): 3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow A(5; 4)$.

Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMC với BA thì ta có:

$$\overline{BA} \cdot \overline{BE} = \overline{BM} \cdot \overline{BC} = 75 \text{ (vì } M \text{ nằm trên tia } BC) \Rightarrow E(13; 10).$$

Vì ΔAEC vuông tại A nên CE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\Delta AMC \Rightarrow EC = 5\sqrt{5}$. Do đó C là giao của đường tròn tâm E bán kính $r = 5\sqrt{5}$ với đường thẳng AC .

$$\text{Toạ độ của } C \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} 4x + 3y - 32 = 0 \\ (x - 13)^2 + (y - 10)^2 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 8 \\ x = 8; y = 0 \end{cases}.$$

Vậy: $C(2; 8)$ hoặc $C(8; 0)$.

Bài 2.27. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 3y - 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4y = 0$. Tìm M thuộc d và N thuộc (C) sao cho chúng đối xứng qua điểm $A(3; 1)$.

HD & Giải

Ta có: $M \in d \Rightarrow M(3b + 4; b)$. N đối xứng với M qua A nên $N(2 - 3b; 2 - b)$

$$\text{Do } N \in (C) \text{ nên } (2 - 3b)^2 + (2 - b)^2 - 4(2 - b) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } b = \frac{6}{5}$$

$$\text{Vậy } M(4; 0) \text{ và } N(2; 2) \text{ hoặc } M\left(\frac{38}{5}; \frac{6}{5}\right), N\left(-\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

BÀI TẬP LÀM TƯƠNG TỰ

Bài 2.28. Xét xem các phương trình sau có phải là phương trình đường tròn không ? Nếu có hãy tìm tâm và bán kính của nó.

a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 6$

b) $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 36$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 36 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 = 16$

Bài 2.29. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;-3)$.

b) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc đường thẳng: $x - 2y + 7 = 0$

c) (C) có đường kính là AB với $A(2;-1)$ và $B(-4;5)$.

d) (C) có tâm $I(2;-3)$ và tiếp xúc với trục Ox .

e) (C) có tâm $I(-1;4)$ và tiếp xúc với trục Oy

f) (C) đi qua hai điểm $A(1;2), B(-2;4)$ và đi qua gốc tọa độ O .

Bài 2.30. Viết phương trình đường tròn (C):

a) đi qua $A(2;3), B(-2;1)$ và có tâm nằm trên trục Ox .

b) đi qua $C(3;1), D(5;5)$ và có tâm nằm trên trục Oy .

c) qua điểm $E(10;10)$ và tiếp xúc với trục Oy tại $M(0;7)$.

d) qua điểm $F(9;9)$ và tiếp xúc với trục Ox tại $N(6;0)$.

e) qua điểm $P(-1;0), Q(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng: $x - y - 1 = 0$.

f) qua điểm $K(-2;1)$ và tiếp xúc với $(d): 3x - 2y - 6 = 0$ tại $S(0;-3)$.

g) qua điểm $G(1;3), L(0;-1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $(d): x + 2y - 10 = 0$.

Bài 2.31. Viết phương trình đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau:

a) $A(9;-5)$ và $B(0;5)$

b) $A(-2;3)$ và $B(8;-7)$

c) $A(7;-3)$ và $B(1;7)$

d) $A(-3;2)$ và $B(7;-4)$

e) $A(2m+1;m)$ và $B(2;3m)$

Bài 2.32. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(5;3), B(6;2)$ và $C(3;-1)$

b) $A(1;3), B(5;6)$ và $C(7;0)$

Bài 2.33. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc các trục tọa độ và qua điểm $M(4;2)$.

Bài 2.34. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc các trục tọa độ và có tâm thuộc đường thẳng: $4x - 2y - 8 = 0$

Bài 2.35. Viết phương trình đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đường tròn (C) tại $A \in (C)$ trong mỗi trường hợp sau, rồi sau đó vẽ (Δ) và (C) trên cùng hệ trục tọa độ

a) (C): $x^2 + y^2 = 25$, $A(3;4)$.

b) (C): $x^2 + y^2 = 80$, $B(-4;-8)$.

c) (C): $x^2 + y^2 = 100$, $C(-8;6)$.

d) (C): $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 169$, $D(8;-16)$.

Bài 2.36. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm $A(1;3)$.

a) Chứng minh rằng điểm A nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A

Bài 2.37. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) trong mỗi trường hợp sau:

a) (Δ) tiếp xúc với (C) tại $M(2;1)$

b) (Δ) vuông góc với đường thẳng (d): $3x - 4y + 1 = 0$

c) (Δ) qua $A(2;6)$.

d) (Δ) có hệ số góc bằng 1

e) (Δ) song song với đường phân giác thứ II của các góc toạ độ

Bài 2.38. Cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0; (C_2): x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$.

a) Tìm tâm và bán kính của (C_1) và (C_2)

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

Bài 2.39. Cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0; (C_2): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

a) Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2)

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

Bài 2.40. Viết phương trình đường tròn (C) :

a) Có tâm nằm trên $(d): 4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $(d_1): x + y + 4 = 0$ và $(d_2): 4x + 3y - 7 = 0$

b) Qua $M(2;3)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng: $(d_1): 3x - 4y + 1 = 0$ và $(d_2): 7x - y + 4 = 0$

Bài 2.41. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C)

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A(-1;0)$

c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 5 = 0$.

Bài 2.42. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(-1;0), B(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x - y - 1 = 0$.

Bài 2.43. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ và đường thẳng $d: 2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết Δ song song với d . Tìm tọa độ tiếp điểm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(-2;4), B(5;5), C(6;-2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

B. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2x - y + 20 = 0$.

Câu 2. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(2;4), C(4;0)$.

A. $I(0;0)$.

B. $I(1;0)$.

C. $I(3;2)$.

D. $I(1;1)$.

Câu 3. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(-2;3), R=5$.

B. $I(2;-3), R=5$.

C. $I(-2;3), R=25$.

D. $I(2;-3), R=25$.

Câu 4. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 5. Đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;-3)$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 57 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 39 = 0$.

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{52}$.

D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 52$.

Câu 6. Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

Câu 7. Đường tròn (C) đi qua điểm $M(2;1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 5$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ hoặc $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

C. $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$ hoặc $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Câu 8. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x=5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 3x-y+3=0, d_2: x-3y+9=0$ có phương trình là:

A. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 40$ hoặc $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 10$.

B. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 40$.

C. $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 10$.

D. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 40$ hoặc $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 10$.

Câu 9. Đường tròn đường kính AB với $A(1;1), B(7;5)$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 12 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$.

Câu 10. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $N(-2;0)$ tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$?

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào **không** phải là phương trình của đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - y = 0$.

C. $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 100y + 1 = 0$.

Câu 12. Tìm bán kính R của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

A. $R = \sqrt{10}$.

B. $R = \frac{5}{2}$.

C. $R = 5$.

D. $R = 3$.

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $B(4;6)$.

A. $\Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta: y-6=0$.

B. $\Delta: y-6=0$ hoặc $\Delta: 3x+4y-36=0$.

C. $\Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta: 3x-4y+12=0$.

D. $\Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta: 3x+4y-36=0$.

Câu 14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x-4y-2019=0$.

A. $3x-4y+23=0$ hoặc $3x-4y-27=0$.

B. $3x-4y+23=0$ hoặc $3x-4y+27=0$.

C. $3x-4y-23=0$ hoặc $3x-4y+27=0$.

D. $3x-4y-23=0$ hoặc $3x-4y-27=0$.

Câu 15. Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và tiếp xúc với trục Ox có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3$.

Câu 16. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ tại điểm $N(1;-1)$ là:

A. $d : x - 3y - 4 = 0$. B. $d : x + 3y + 2 = 0$. C. $d : x + 3y - 2 = 0$. D. $d : x - 3y + 4 = 0$.

Câu 18. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1). Điều kiện để (1) là phương trình đường tròn là:

A. $a^2 + b^2 > c$. B. $a^2 + b^2 < c$. C. $a^2 - b^2 < c$. D. $a^2 - b^2 > c$.

Câu 19. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$. B. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. D. $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$.

Câu 20. Đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ có dạng khai triển là:

A. $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 30 = 0$. B. $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 30 = 0$.
C. $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$. D. $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Câu 21. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 9$ là:

A. $I(0;0)$, $R=3$. B. $I(1;1)$, $R=3$. C. $I(0;0)$, $R=9$. D. $I(1;1)$, $R=9$.

Câu 22. Tâm của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0$ cách trục Oy một khoảng bằng:

A. 10. B. 5. C. -5. D. 0.

Câu 23. Có bao nhiêu phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : 4x + 3y + 2020 = 0$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 24. Đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-3;-1)$, $B(-1;3)$ và $C(-2;2)$ có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 20$. B. $x^2 + y^2 + 2x - y - 20 = 0$.
C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Câu 25. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : 3x - 4y + 5 = 0$.

A. $4x + 3y + 29 = 0$. B. $4x + 3y + 29 = 0$ hoặc $4x + 3y - 21 = 0$.
C. $4x - 3y + 5 = 0$ hoặc $4x - 3y - 45 = 0$. D. $4x + 3y + 5 = 0$ hoặc $4x + 3y + 3 = 0$.

Câu 26. Đường tròn đường kính AB với $A(3;-1)$, $B(1;-5)$ có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = \sqrt{5}$. B. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$.
C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$. D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 17$.

Câu 27. Đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 12x - 14y + 4 = 0$ có dạng tổng quát là:

A. $(C) : (x+6)^2 + (y-7)^2 = 89$. B. $(C) : (x+6)^2 + (y-7)^2 = \sqrt{89}$.
C. $(C) : (x+6)^2 + (y-7)^2 = 9$. D. $(C) : (x+6)^2 + (y-7)^2 = 81$.

Câu 28. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C) : x^2 + (y+4)^2 = 5$ là:

A. $I(0;-4)$, $R=\sqrt{5}$. B. $I(0;-4)$, $R=5$. C. $I(0;4)$, $R=\sqrt{5}$. D. $I(0;4)$, $R=5$.

Câu 29. Đường tròn (C) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. B. $x^2 - y^2 - ay + by = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 2ax - by = 0$. D. $x^2 + y^2 - ax - by + xy = 0$.

Câu 30. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d : x + 3y + 8 = 0$, đi qua điểm $A(-2;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 10 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$. B. $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 16$.
C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Câu 31. Cho phương trình $x^2 + y^2 + 2mx + 2(m-1)y + 2m^2 = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < \frac{1}{2}$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 32. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: x + 3y - 5 = 0$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ hoặc $(x+5)^2 + y^2 = 8$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$ hoặc $(x-5)^2 + y^2 = 8$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$ hoặc $(x+5)^2 + y^2 = 8$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ hoặc $(x-5)^2 + y^2 = 8$.

Câu 33. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(5; -2)$.

A. $\Delta: x - 5 = 0$.

B. $\Delta: x + y - 3 = 0$ hoặc $\Delta: x - y - 7 = 0$.

C. $\Delta: x - 5 = 0$ hoặc $\Delta: x + y - 3 = 0$.

D. $\Delta: y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - y - 7 = 0$.

Câu 34. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): 2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$ là:

A. $I(2; 1), R = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

B. $I(-2; 1), R = \sqrt{22}$.

C. $I(2; -1), R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $I(2; -1), R = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

Câu 35. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1) và tiếp xúc với hai trục tọa độ có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ hoặc $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ hoặc $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Câu 36. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 2), B(3; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) , biết tâm của (C) có tọa độ là những số nguyên.

A. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 10 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$.

Câu 37. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ là:

A. $I(-4; 2), R = 8$.

B. $I(-2; 1), R = 8$.

C. $I(2; -1), R = 2\sqrt{2}$.

D. $I(-2; 1), R = 2\sqrt{2}$.

Câu 38. Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$ tại điểm $M(2; 1)$ là:

A. $d: 3x - 4y - 2 = 0$.

B. $d: 4x + 3y - 11 = 0$.

C. $d: -y + 1 = 0$.

D. $d: 4x + 3y + 14 = 0$.

Câu 39. Đường tròn (C) đi qua ba điểm $O(0; 0), A(8; 0)$ và $B(0; 6)$ có phương trình là:

A. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 5$.

B. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$.

C. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$.

D. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Câu 40. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 1), B(5; 3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là:

A. $(x-4)^2 + y^2 = 10$.

B. $(x-4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$.

C. $(x+4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$.

D. $(x+4)^2 + y^2 = 10$.

Câu 41. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 2my + 10 = 0$ (1). Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương không vượt quá 10 để (1) là phương trình của đường tròn?

A. Không có.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 42. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$ là:

A. $I(1;-3), R=16$.B. $I(-1;3), R=16$.C. $I(-1;3), R=4$.D. $I(1;-3), R=4$.

Câu 43. Cho tam giác ABC có $A(1;-2), B(-3;0), C(2;-2)$. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + 3x + 8y + 18 = 0$.B. $x^2 + y^2 - 3x - 8y - 18 = 0$.C. $x^2 + y^2 - 3x - 8y + 18 = 0$.D. $x^2 + y^2 + 3x + 8y - 18 = 0$.

Câu 44. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1;2), B(-2;3)$ và có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y + 10 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$.B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$.C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$.D. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$.

Câu 45. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $A(3;-4)$.

A. $d: x - y - 7 = 0$.B. $d: x - y + 7 = 0$.C. $d: x + y + 1 = 0$.D. $d: x - 2y - 11 = 0$.

Câu 46. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 5x + 7y - 3 = 0$. Tính khoảng cách từ tâm của (C) đến trục Ox .

A. 3,5.

B. 2,5.

C. 5.

D. 7.

Câu 47. Có bao nhiêu đường tròn (C) đi qua điểm $M(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 48. Có bao nhiêu phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 2x - 3y + 2018 = 0$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Câu 49. Đường tròn (C) đi qua điểm $A(1;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ tại $M(1;2)$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-3)^2 + y^2 = 8$.B. $x^2 + (y-3)^2 = 8$.C. $(x-4)^2 + y^2 = 13$.D. $(x-6)^2 + y^2 = 29$.

Câu 50. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 8$ là:

A. $I(1;0), R=2\sqrt{2}$.B. $I(-1;0), R=8$.C. $I(-1;0), R=64$.D. $I(-1;0), R=2\sqrt{2}$.

Câu 51. Cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+3)^2 = 1$. Qua điểm $M(4;-3)$ có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) ?

A. Vô số.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 52. Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(9;-4)$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) , biết Δ đi qua M và không song song với các trục tọa độ. Khi đó khoảng cách từ điểm $P(6;5)$ đến Δ bằng:

A. $\sqrt{3}$.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 53. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 2x + y + 7 = 0$.

A. $2x + y + 1 = 0$ hoặc $2x + y - 1 = 0$.B. $2x + y = 0$ hoặc $2x + y - 10 = 0$.C. $2x + y + 10 = 0$ hoặc $2x + y - 10 = 0$.D. $2x + y = 0$ hoặc $2x + y + 10 = 0$.

Câu 54. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - x - y + 9 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - x = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$.

D. $x^2 - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$.

Câu 55. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4y - 1 = 0$ (1). Với giá trị nào của m để (1) là phương trình đường tròn có bán kính nhỏ nhất?

A. $m = 1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 2$.

D. $m = -1$.

Câu 56. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 10x - 11 = 0$ là:

A. $I(-5; 0), R = 5$.

B. $I(0; -5), R = 6$.

C. $I(5; 0), R = 36$.

D. $I(5; 0), R = 6$.

Câu 57. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

B. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6 = 0$.

C. $5x^2 + 4y^2 + x - 4y + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$.

Câu 58. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(0; 0), R = 9$.

B. $I(0; 0), R = 9$.

C. $I(3; -1), R = 2$.

D. $I(0; 0), R = 9$.

Câu 59. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 5y = 0$ là:

A. $I\left(0; \frac{5}{2}\right), R = \frac{5}{2}$.

B. $I\left(0; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{5}{2}$.

C. $I\left(0; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{5}{2}$.

D. $I\left(\frac{5}{2}; 0\right), R = \frac{5}{2}$.

Câu 60. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 1), B(3; 5)$ và có tâm I thuộc trục tung có phương trình là:

A. $x^2 + (y - 4)^2 = 6$.

B. $x^2 + (y + 4)^2 = 6$.

C. $x^2 + y^2 + 4y + 6 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$.

Câu 61. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): 16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$ là:

A. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), R = 1$.

B. $I(-2; 4), R = 1$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right), R = 1$.

D. $I(2; 1), R = 1$.

Câu 62. Đường tròn có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Câu 63. Đường tròn có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính $R = 1$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

B. $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

C. $x^2 + y^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Câu 64. Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - 2y + 7 = 0$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{25}$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Câu 65. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn có bán kính bằng 7.

A. $m = -8$.

B. $m = -4$.

C. $m = 4$.

D. $m = 8$.

Câu 66. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1; 1), B(3; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x - 4y + 8 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) , biết tâm của (C) có hoành độ nhỏ hơn 5.

A. $(x+5)^2 + (y+2)^2 = 5$.

B. $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$.

C. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Câu 67. Đường tròn (C) có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{26}$.

B. $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 26$.

C. $(x-1)^2 + (y+5)^2 = \sqrt{26}$.

D. $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 26$.

Câu 68. Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$ có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{25}$.

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$.

Câu 69. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$, bán kính $R=5$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-11=0$. Biết tâm I có hoành độ dương. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$ hoặc $(x+8)^2 + (y-3)^2 = 25$.

B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$ hoặc $(x-8)^2 + (y+3)^2 = 25$.

C. $(x-8)^2 + (y+3)^2 = 25$.

D. $(x+8)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Câu 70. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, biết tiếp tuyến vuông góc với trục hoành.

A. $x=0$ hoặc $x-4=0$

B. $y=0$.

C. $x=0$.

D. $y=0$ hoặc $y-4=0$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	B	C	B	D	D	D	D	D	C	B	C	A	B	A	B	A	C	D	A	B	A	D	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	D	A	A	D	C	B	B	D	A	C	C	B	D	A	C	D	B	C	A	A	C	A	A	D
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
D	B	B	B	D	D	C	C	A	A	A	C	C	B	A	C	B	B	C	A					

§3 ELIP

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa :

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2 . Elip là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Các điểm F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm của elip. Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

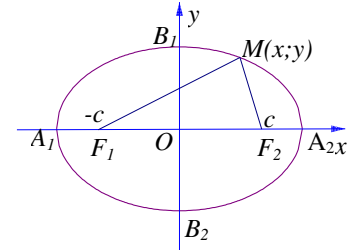
2. Phương trình chính tắc của elip

Cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.

Ta có : $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) trong đó

$$b^2 = a^2 - c^2, (a > b > 0).$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của elip.



3. Hình dạng của elip

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$$

- Trục đối xứng Ox, Oy và có tâm đối xứng là gốc O .
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$
- Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 2a$ • Độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$
- Bốn đỉnh: đỉnh trên trục lớn $A_1(-a;0), A_2(a;0)$, đỉnh trên trục bé $B_1(0;b), B_2(0;-b)$.

- Bán kính qua tiêu điểm: $MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M$;

$$MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$$

- Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d = 2\frac{a}{e}$

4. Điều kiện tiếp xúc

Cho đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Δ tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

B. BÀI TẬP

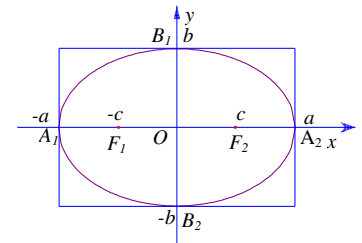
Vấn đề 1. Xác định các thành phần của một elip khi biết phương trình chính tắc của elip đó

Phương pháp: Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$

- Trục lớn của (E) nằm trên Ox , $A_1A_2 = 2a$
- Trục lớn của (E) nằm trên Oy , $B_1B_2 = 2b$
- Hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$
- Bốn đỉnh $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$

- Tâm sai $e = \frac{c}{a} < 1$

- Phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm a; y = \pm b$



Bài 3.1. Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tâm sai, tọa độ của các đỉnh và vẽ elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

HD&Giải

Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

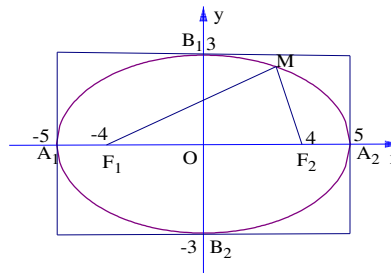
Do đó: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$. Ta có

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$$

Vậy (E) có:

- Trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 10$
- Trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b = 6$
- Hai tiêu điểm: $F_1(-4;0), F_2(4;0)$
- Bốn đỉnh: $A_1(-5;0); A_2(5;0); B_1(0;3); B_2(0;-3)$

- Tâm sai: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$
- Hình vẽ



Bài 3.2. Cho elip (E): $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính là F_1F_2 với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E).

HD&Giải

Phương trình (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ta có: $a^2 = 100, b^2 = 36 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 64 \Rightarrow c = 8$

Khi đó: $F_1(-8;0), F_2(8;0)$.

Đường tròn (C): $\begin{cases} \text{Tâm } O(0;0) \text{ là trung điểm của } F_1F_2 \\ \text{Bán kính } R = c = 8 \end{cases}$ có phương trình: $x^2 + y^2 = 64$

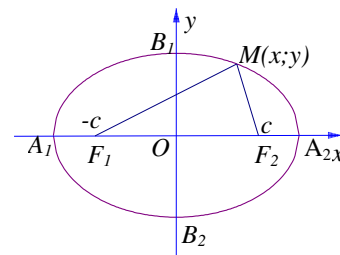
Vấn đề 2. Lập phương trình chính tắc của một elip khi biết các thành phần đủ để xác định elip đó

Phương pháp:

- Từ các thành phần đã biết, áp dụng công thức liên quan ta tìm được phương trình chính tắc của elip.

- Lập phương trình chính tắc của elip theo công thức: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Lưu ý: $a > b > 0$ và $c^2 = a^2 - b^2$



Bài 3.3. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết

a) Một đỉnh là $A(0; -2)$ và một tiêu điểm $F(1; 0)$

b) $F_1(-7;0)$ là một tiêu điểm và (E) đi qua $M(-2;12)$

c) Tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$

d) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 4; y = \pm 3$

e) (E) đi qua hai điểm $M(4;\sqrt{3})$ và $N(2\sqrt{2};-3)$

HD&Giải

Elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

a) $A(0; -2)$ là một đỉnh $\Rightarrow b = 2$; $F(1; 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 1$

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 = 5$. Phương trình của (E): $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $F_1(-7;0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow$ tiêu điểm thứ hai là $F_2(7;0)$

Ta có: $M \in (E) \Rightarrow 2a = MF_1 + MF_2 = \sqrt{(-7+2)^2 + 12^2} + \sqrt{(7+2)^2 + 12^2} = 28$
 $\Rightarrow a = 14$

Ta lại có: $F_1(-7;0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 7$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 147$

Vậy phương trình của (E): $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{147} = 1$

c) Ta có $2c = 6 \Rightarrow c = 3; e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 5, b^2 = a^2 - c^2 = 16$

Vậy phương trình của (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) Ta có $a = 4, b = 3$ nên phương trình của (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

e) (E) đi qua hai điểm M và N nên ta có: $\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ \frac{8}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \\ b^2 = 15 \end{cases}$

Vậy phương trình của (E): $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$

Bài 3.4. Tìm những điểm trên elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ thỏa mãn

- a) Có bán kính qua tiêu điểm trái bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm phải
- b) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông
- c) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 60°

HD & Giải

Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Do đó: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$. Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}$

Elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{2};0); F_2(2\sqrt{2};0)$

a) Gọi $M(x;y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Do điểm $M \in (E) \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{7}{8} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

Vậy có hai điểm cần tìm: $M_1\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right); M_2\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$

b) Gọi $N(x;y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó: $\overrightarrow{F_1N} = (x + 2\sqrt{2}; y)$,

$\overrightarrow{F_2N} = (x - 2\sqrt{2}; y)$. Từ N nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông nên ta có:

$$\overrightarrow{F_1N} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0 \Leftrightarrow (x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

Và $N \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \quad (2)$

Giải (1) và (2), ta được: $x^2 = \frac{63}{8}$ và $y^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ và $y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\pm \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$

c) Gọi $P(x; y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Ta có:

$$\begin{aligned} F_1F_2^2 &= F_1P^2 + F_2P^2 - 2F_1P \cdot F_2P \cos 60^\circ = (F_1P + F_2P)^2 - 2F_1P \cdot F_2P - 2F_1P \cdot F_2P \frac{1}{2} \\ &= 4a^2 - 3F_1P \cdot F_2P = 4a^2 - 3(a + ex)(a - ex) = 4a^2 - 3(a^2 - e^2x^2) \\ &= a^2 + 3e^2x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Nhu vậy: } 4c^2 = a^2 + 3 \cdot \frac{c^2}{a^2} x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(4c^2 - a^2) \cdot a^2}{3c^2} = \frac{(4 \cdot 8 - 9) \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{69}{8} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Mà } P \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{1}{24} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\pm \frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}; \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} \right)$

Bài 3.5. Cho elip (E) : $9x^2 + 25y^2 = 225$

- Tìm tọa độ hai tiêu điểm F_1, F_2 và các đỉnh của (E)
- Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông

HD & Giải

$$(E): 9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \cdot c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Vậy (E) có hai tiêu điểm là: $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$ và có bốn đỉnh là $A_1(-5; 0); A_2(5; 0); B_1(0; -3); B_2(0; 3)$

b) Gọi $M(x; y) \in (E)$ là điểm cần tìm, ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} M \in (E) \\ \widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (E) \\ OM^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = \pm \frac{9}{4} \end{cases} \cdot \text{Vậy có bốn điểm cần tìm là } M \left(\pm \frac{5\sqrt{7}}{4}; \pm \frac{9}{4} \right) \end{aligned}$$

Bài 3.6. Cho elip (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt (E) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB .

HD & Giải

$$(E): 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; 1)$ và có hệ số góc k . Ta có phương trình của (d) :

$$y = k(x - 1) + 1 \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$4x^2 + 9[k(x - 1) + 1]^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 + 4)x^2 + 18k(1 - k)x + 9(1 - k)^2 - 36 = 0 \quad (3)$$

Ta có: (d) cắt (E) tại hai điểm A và B thỏa mãn $MA = MB$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm x_A, x_B sao cho:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{-18k(1-k)}{2(9k^2+4)} = 1 \Leftrightarrow 18k^2 - 18k = 18k^2 + 8 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}$$

Vậy phương trình của (d) là: $4x + 9y - 13 = 0$

Bài 3.7. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm trên (E) các điểm B, C sao cho B, C đối xứng qua trục Ox và $\triangle ABC$ là tam giác đều.

HD & Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $B(x_0; y_0), C(x_0; -y_0)$ với $y_0 > 0$.

Ta có: $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 9$. $BC = 2y_0$ và $(BC): x = x_0 \Rightarrow d(A, (BC)) = |3 - x_0|$

Do $A \in Ox$, B và C đối xứng qua Ox nên $\triangle ABC$ cân tại A

Suy ra: $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow d(A, (BC)) = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Leftrightarrow |3 - x_0| = \sqrt{3}y_0 \Leftrightarrow 3y_0^2 = (x_0 - 3)^2$

$$\Rightarrow x_0^2 + (x_0 - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

❖ Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3} \Rightarrow B(0; \sqrt{3}), C(0; -\sqrt{3})$.

❖ Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0$ (loại).

Vậy: $B(0; \sqrt{3}), C(0; -\sqrt{3})$.

BÀI TẬP LÀM TƯƠNG TỰ

Bài 3.8. Xác định độ dài trục lớn, trục nhỏ, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh và vẽ hình của mỗi elip sau:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $4x^2 + 16y^2 = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 1$

d) $4x^2 + 5y^2 = 20$

e) $x^2 + 3y^2 = 2$

f) $mx^2 + ny^2 = 1; (n > m > 0, n \neq m)$

Bài 3.9. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6

b) Có một tiêu điểm $(-\sqrt{3}; 0)$ và điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip

c) Có một đỉnh trên trục lớn là điểm $(3; 0)$ và một tiêu điểm là $(-2; 0)$

d) Elip qua điểm $M(0; 1)$ và $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 3.10. Lập phương trình chính tắc của elip (E) trong các trường hợp sau :

a) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và độ dài trục lớn bằng 6

b) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{2}$ và tiêu cự bằng 8

c) Tiêu điểm $F_1(-6; 0)$ và tâm sai $e = \frac{2}{3}$

d) Phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm 4, y = \pm 3$

e) Elip đi qua hai điểm $M(4; \sqrt{3}), N(2\sqrt{2}; -3)$

Bài 3.11. Cho elip (E) : $9x^2 + 25y^2 = 225$

a) Tìm toạ độ hai tiêu điểm $F_1; F_2$, tiêu cự, tâm sai và các đỉnh của (E)

b) Viết phương trình hai đường chuẩn của (E) và tìm khoảng cách giữa hai đường chuẩn.

c) Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn xuống F_1F_2 dưới một góc vuông

Bài 3.12. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có các tiêu điểm là $F_1; F_2$.

a) Tìm điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$ b) Tìm điểm M trên (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$

Bài 3.13. Cho $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm một góc 120°

Bài 3.14. Cho $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$. Gọi M là điểm tùy ý trên (E) . Chứng minh rằng:

a) $MO^2 + MF_1 \cdot MF_2 = a^2 + b^2$ b) $a \leq OM \leq b$ c) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$

Bài 3.15. Cho $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai và độ dài các trục của (E)

b) Lấy điểm M tùy ý thuộc (E) . Chứng minh rằng:

i) $MO^2 + MF_1 \cdot MF_2$ là một hằng số ii) $3 \leq OM \leq 4$ iii) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - 9)$

Bài 3.16. Cho $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$.

a) Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, tâm sai và vẽ elip (E) .

b) Xác định m để đường thẳng $(d): y = x + m$ và (E) có điểm chung.

c) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(1;1)$ và cắt (E) tại A, B sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB .

Bài 3.17. Cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

a) Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, tâm sai, viết phương trình hai đường chuẩn và vẽ elip (E) .

b) Cho $M(4; m)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M khi $m < 0$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) đi qua $A(5; 2)$

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) song song với $(d_1): 3x + 5y + 1 = 0$.

e) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) vuông góc với $(d_2): 3x + 5y - 1 = 0$.

Bài 3.18. Cho hai elip $(E_1): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E_1) và (E_2)

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2)

Bài 3.19. Cho hai elip $(E_1): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E_1) và (E_2)

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2)

Bài 3.20. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm (F_1) và (F_2)

a) Tìm tâm sai, tọa độ các đỉnh và viết phương trình hai đường chuẩn của (E) .

b) Cho điểm $M(3; m) \in (E)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) khi $m > 0$.

c) Cho $A, B \in (E)$ sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Tính $AF_2 + BF_1$

Bài 3.21. Cho hai elip $(E_1): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E_1) và (E_2)

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2)

Bài 3.22. Biết $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nhận các đường thẳng $\Delta_1: 3x - 2y - 20 = 0$ và $\Delta_2: x + 6y - 20 = 0$

làm tiếp tuyến. Viết phương trình chính tắc của (E) .

Bài 3.23. Lập phương trình chính tắc của (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{15}; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): x + 4y - 10 = 0$

Bài 3.224. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và điểm $M(-2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt (E) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 3.25. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có các tiêu điểm là $F_1; F_2$.

a) Tìm điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$

b) Tìm điểm M trên (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$

Bài 3.26. Cho $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm một góc 120° .

Bài 3.27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 120^\circ$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)).

Bài 3.28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt elip tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 3.29. Cho $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm một góc 120°

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$. Gọi $2c$ là tiêu cự của (E) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $c^2 = a^2 + b^2$. B. $b^2 = a^2 + c^2$. C. $a^2 = b^2 + c^2$. D. $c = a + b$.

Câu 2. Elip $(E): 4x^2 + 16y^2 = 1$ có độ dài trục lớn bằng:

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 4.

Câu 3. Elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của elip cùng nằm trên một đường tròn. Độ dài trục nhỏ của (E) bằng:

- A. 8. B. 16. C. 2. D. 4.

Câu 4. Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 26 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{12}{13}$.

- A. $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{25} = 1$. B. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. C. $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{25} = 1$. D. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 5. Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 6. Cho elip $(E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ và điểm M nằm trên (E) . Nếu M có hoành độ bằng -13 thì khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm bằng:

- A. 10 và 6. B. 8 và 18. C. $13 \pm \sqrt{5}$. D. $13 \pm \sqrt{10}$.

Câu 7. Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$. Tỉ số k của tiêu cự và độ dài trục bé của elip bằng:

- A. $k = \sqrt{8}$. B. $k = 1$. C. $k = -1$. D. $k = 8$.

Câu 8. Elip có độ dài trục nhỏ là $4\sqrt{6}$ và có một tiêu điểm $F(5;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

- A. $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{24} = 1$. B. $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{96} = 1$. C. $\frac{x^2}{101} + \frac{y^2}{96} = 1$. D. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Câu 9. Tìm phương trình chính tắc của elip, biết elip có tiêu cự bằng 6 và đi qua $A(5;0)$.

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 10. Elip $(E): \frac{x^2}{16} + y^2 = 4$ có tổng độ dài trục lớn và trục bé bằng:

- A. 40. B. 5. C. 10. D. 20.

Câu 11. Cho $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$. Một đường thẳng đi qua điểm $A(2;2)$ và song song với trục hoành cắt (E) tại hai điểm phân biệt M và N . Tính độ dài MN .

- A. $3\sqrt{5}$. B. $15\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{15}$. D. $5\sqrt{3}$.

Câu 12. Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ có một tiêu điểm là:

- A. $(-\sqrt{3};0)$. B. $(3;0)$. C. $(0;3)$. D. $(0;\sqrt{6})$.

Câu 13. Elip có độ dài trục lớn là 10 và có một tiêu điểm $F(-3;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 14. Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

- A. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{16} = 1$. B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. C. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{5} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 15. Elip có tổng độ dài hai trục bằng 18 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{3}{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 16. Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ có tiêu cự bằng:

- A. 5. B. 10. C. $2\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 17. Phương trình của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

- A. $9x^2 + 16y^2 = 144$. B. $9x^2 + 16y^2 = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. D. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Câu 18. Elip $(E): x^2 + 5y^2 = 25$ có độ dài trục lớn bằng:

- A. 2. B. 5. C. 10. D. 1.

Câu 19. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và M là một điểm tùy ý trên (E) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $3 \leq OM \leq 4$. B. $4 \leq OM \leq 5$. C. $OM \geq 5$. D. $OM \leq 3$.

Câu 20. Lập phương trình chính tắc của elip biết tỉ số giữa độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $\sqrt{2}$, tổng bình phương độ dài trục lớn và tiêu cự bằng 64.

- A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$. C. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$. D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 21. Cho elip có phương trình $16x^2 + 25y^2 = 100$. Tính tổng khoảng cách từ điểm M thuộc elip có hoành độ bằng 2 đến hai tiêu điểm.

- A. $4\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 5.

Câu 22. Đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$ cắt elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ tại hai điểm phân biệt M và N . Khi đó độ dài đoạn thẳng MN bằng:

- A. 4. B. 5. C. 25. D. 3.

Câu 23. Elip có một đỉnh là $A(5;0)$ và có một tiêu điểm $F_1(-4;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

- A. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. C. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 24. Elip $(E): \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$, với $p > q > 0$ có tiêu cự bằng:

- A. $2\sqrt{p^2 - q^2}$. B. $p - q$. C. $p^2 - q^2$. D. $p + q$.

Câu 25. Lập phương trình chính tắc của elip biết độ dài trục lớn hơn độ dài trục nhỏ 4 đơn vị, độ dài trục nhỏ hơn độ dài tiêu cự 4 đơn vị.

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. C. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{60} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 26. Elip qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 27. Một elip (E) có khoảng cách giữa hai đỉnh kề tiếp nhau gấp $\frac{3}{2}$ lần tiêu cự của nó. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng:

- A. $e = \frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $e = \frac{2}{5}$. C. $e = \frac{\sqrt{3}}{5}$. D. $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 28. Elip (E) có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn của (E) bằng:

- A. $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $e = \frac{1}{3}$. C. $e = 1$. D. $e = \sqrt{2}$.

Câu 29. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. (E) không có tâm đối xứng. B. (E) có đúng một tâm đối xứng.
C. (E) có hai tâm đối xứng. D. (E) có vô số tâm đối xứng.

Câu 30. Elip đi qua các điểm $M(0;3)$ và $N\left(3; -\frac{12}{5}\right)$ có phương trình chính tắc là:

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 31. Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục nhỏ bằng 12 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{4}{5}$.

- A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$. C. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Câu 32. Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm $N\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{2}{3}$.

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 33. Elip (E) có độ dài trục bé bằng tiêu cự. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn của (E) bằng:

- A. $e = 1$. B. $e = \sqrt{2}$. C. $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $e = \frac{1}{3}$.

Câu 34. Tìm phương trình chính tắc của elip, biết elip có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ và đi qua $A(2;1)$.

- A. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. C. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 35. Phương trình chính tắc của elip có hai tiêu điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$ và đi qua điểm $M(2;3)$ là:

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Câu 36. Phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $A(7;0)$ và $B(0;3)$ có dạng là

- A. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{9} = 1$. B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$. D. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 37. Cho điểm $M(2;3)$ nằm trên đường elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Trong các điểm sau đây điểm nào không nằm trên (E) :

- A. $M_4(3;2)$. B. $M_2(2;-3)$. C. $M_3(-2;-3)$. D. $M_1(-2;3)$.

Câu 38. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. (E) không có trục đối xứng. B. (E) có một trục đối xứng là trục hoành.
C. (E) có hai trục đối xứng là trục hoành và trục tung. D. (E) có vô số trục đối xứng.

Câu 39. Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có độ dài trục lớn bằng:

- A. 5. B. 10. C. 25. D. 50.

Câu 40. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. B. (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.
C. (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$. D. (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Câu 41. Một elip (E) có trục lớn dài gấp 3 lần trục nhỏ. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng:

- A. $e = \frac{1}{3}$. B. $e = \frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 42. Cho elip $(E): x^2 + 4y^2 = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Elip có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$. B. Elip có trục nhỏ bằng 2.
C. Elip có một tiêu điểm là $F\left(0; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. D. Elip có trục lớn bằng 4.

Câu 43. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hai điểm A, B là hai đỉnh của elip lần lượt nằm trên hai trục Ox, Oy . Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng:

- A. 5. B. $\sqrt{136}$. C. 34. D. $\sqrt{34}$.

Câu 44. Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm $A(2; \sqrt{3})$ và tỉ số của độ dài trục lớn với tiêu cự bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Câu 45. Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có tiêu cự bằng:

- A. 6. B. 9. C. 18. D. 3.

Câu 46. Cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Qua một tiêu điểm của (E) dựng đường thẳng song song với trục Oy và cắt (E) tại hai điểm M và N . Tính độ dài MN .

- A. $\frac{36}{5}$. B. $\frac{48}{5}$. C. $\frac{25}{2}$. D. $\frac{64}{5}$.

Câu 47. Tìm phương trình chính tắc của elip nếu trục lớn gấp đôi trục bé và có tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$.

- A. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{16} = 1$. B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Câu 48. Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tỉ số f của độ dài trục lớn và tiêu cự của elip bằng:

- A. $f = \frac{\sqrt{5}}{3}$. B. $f = \frac{3}{2}$. C. $f = \frac{3}{\sqrt{5}}$. D. $f = \frac{2}{3}$.

Câu 49. Elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ có một đỉnh nằm trên trục lớn là:

- A. $(-10;0)$. B. $(-100;0)$. C. $(0;10)$. D. $(100;0)$.

Câu 50. Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$?

- A. $F_1(0;-1)$ và $F_2(0;1)$. B. $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$
C. $F_1(-1;0)$ và $F_2(1;0)$. D. $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.

Câu 51. Elip đi qua các điểm $A(0;1)$ và $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ có phương trình chính tắc là:

- A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Câu 52. Dây cung của elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài bằng:

- A. $\frac{a^2}{c}$. B. $\frac{2c^2}{a}$. C. $\frac{2b^2}{a}$. D. $\frac{2a^2}{c}$.

Câu 53. Elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ có độ dài trục bé bằng:

- A. 10. B. 16. C. 20. D. 8.

Câu 54. Tìm phương trình chính tắc của elip, biết elip có tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M(\sqrt{15}; -1)$.

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 55. Cho elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 và có độ dài trục lớn bằng $2a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2a < F_1F_2$. B. $4a = F_1F_2$. C. $2a = F_1F_2$. D. $2a > F_1F_2$.

Câu 56. Cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. (E) có trục lớn bằng 6. B. (E) có trục nhỏ bằng 4.
C. (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{5}$. D. (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 57. Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ có một đỉnh nằm trên trục bé là:

- A. $(4;0)$. B. $(0;12)$. C. $(0;2\sqrt{3})$. D. $(4;0)$.

Câu 58. Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 6 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$.

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. C. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Câu 59. Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm $A(6;0)$ và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{2}$.

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$. B. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. D. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Câu 60. Elip có hai đỉnh là $(-3;0); (3;0)$ và có hai tiêu điểm là $(-1;0); (1;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$.

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

C. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$.

D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Câu 61. Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó có trục lớn gấp đôi trục bé và đi qua điểm $M(2; -2)$.

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

C. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$.

D. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 62. Giá trị của m để đường thẳng $\Delta: x - 2y + m = 0$ cắt elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ tại hai điểm phân biệt là:

A. $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

B. $m > 2\sqrt{2}$.

C. $m < -2\sqrt{2}$.

D. $m = \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 63. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ và điểm M nằm trên (E) . Nếu M có hoành độ bằng 1 thì khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm bằng:

A. $4 \pm \sqrt{2}$.

B. $4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{7}{2}$ và $\frac{9}{2}$.

D. 3 và 5.

Câu 64. Elip có tổng độ dài hai trục bằng 10 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 65. Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tỉ số e của tiêu cự và độ dài trục lớn của elip bằng:

A. $e = 1$.

B. $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $e = \frac{3}{4}$.

D. $e = \frac{5}{4}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	D	B	C	B	B	D	C	D	C	A	B	D	D	C	A	C	A	B	D	B	B	A	A
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	D	A	B	D	A	D	C	A	A	D	A	C	B	D	D	A	D	C	A	B	B	C	A	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
D	B	B	C	D	C	C	A	C	B	D	A	C	A	B										

ÔN TẬP CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và điểm $A(-4; 8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C , N là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng MD . Tìm tọa độ điểm B và C , biết rằng $N(5; -4)$. (ĐH.KA, A1.2013 – Chuẩn)

HD & Giải

Do điểm $C \in d \Rightarrow C(t; -2t-5)$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là trung điểm của AC . Do đó: $I\left(\frac{t-4}{2}; \frac{-2t+3}{2}\right)$. Tam giác BDN vuông tại N nên $IN = IB$. Suy ra $IN = IA$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, ta có: } & \left(5 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(-4 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2 \\ & = \left(-4 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Vậy } C(1; -7) \end{aligned}$$

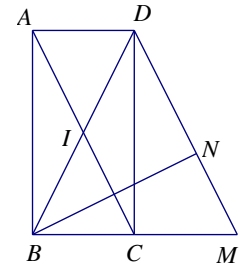
Do M đối xứng với B qua C nên $CM = CB$. Mà $CB = AD$ và $CM \parallel AD$ nên tứ giác $ACMD$ là hình bình hành. Suy ra $AC \parallel DM$. Theo giả thiết, $BN \perp DM$, suy ra $BN \perp AC$ và $CB = CN$. Vậy B là đối xứng của N qua AC .

Đường thẳng AC có phương trình: $3x + y + 4 = 0$

Đường thẳng BN qua N và vuông góc với AC nên có phương trình: $x - 3y - 17 = 0$

$$\text{Do đó: } B(3a+17; a). \text{ Trung điểm } BN \text{ thuộc } AC \text{ nên: } 3\left(\frac{3a+17+5}{2}\right) + \frac{a-4}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -7$$

$$\text{Vậy } B(-4; -7)$$



Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy . Viết phương trình đường tròn (C) . (ĐH.KA, A1.2013 – Nâng cao)

HD & Giải

Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C) , H là giao điểm của AB và IM . Khi đó $M(0; t)$ với $t \geq 0$. H là trung điểm của AB . Suy ra:

$$AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}. \text{ Tam giác } AMI \text{ vuông, ta có:}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AM = 2\sqrt{10}. \text{ Do đó } MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$$

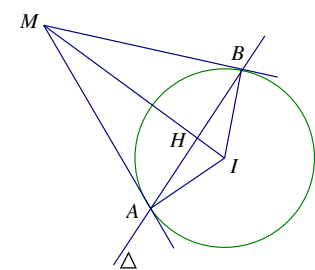
$$\text{Mà } MH = d(M, \Delta) = \frac{|t|}{\sqrt{2}} \text{ nên } t = 8. \text{ Vậy } M(0; 8)$$

Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình $x + y - 8 = 0$

$$\text{Do đó, tọa độ điểm } H \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4; 4)$$

$$\text{Ta có: } IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} = \frac{1}{4}HM \text{ nên } \overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HM}. \text{ Vậy } I(5; 3)$$

$$\text{Vậy đường tròn } (C) \text{ có phương trình: } (x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$$



Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với

nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm $H(-3; 2)$. Tìm tọa độ các điểm C và D . (ĐH.KB.2013 – Chuẩn)

HD & Giải

Gọi I là giao điểm của AC và BD suy ra $IB = IC$. Mà $IB \perp IC$ nên tam giác IBC vuông cân tại I

Do đó: $\widehat{ICB} = 45^\circ$

Mặt khác: $BH \perp AD \Rightarrow BH \perp BC \Rightarrow \Delta HBC$ vuông cân tại $B \Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng HC

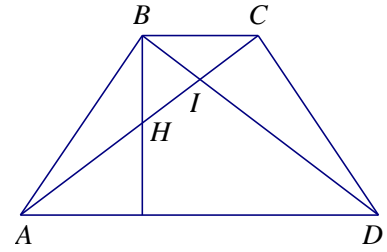
Do $CH \perp BD$ và trung điểm I của CH thuộc BD nên tọa độ điểm C

$$\text{thỏa mãn hệ: } \begin{cases} 2(x+3) - (y-2) = 0 \\ \frac{x-3}{2} + 2\left(\frac{y+2}{2}\right) - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 6)$$

$$\text{Ta có: } \frac{IC}{ID} = \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID = 3IC. CD = \sqrt{IC^2 + ID^2} = IC\sqrt{10} = \frac{CH\sqrt{10}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$D \in BD \Rightarrow D(6-2t; t) \text{ và } CD = 5\sqrt{2} \text{ nên: } (7-2t)^2 + (t-6)^2 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=7 \end{cases}$$

Vậy $D(4; 1)$ hoặc $D(-8; 7)$



Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là $D(5; 3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0; 1)$. Tìm tọa độ điểm C . (ĐH.KB.2013 – Nâng cao)

HD & Giải

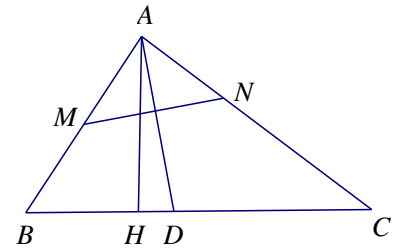
Ta có: $H \in AH$ và $AH \perp HD$ nên AH có phương trình:

$$x + 2y - 3 = 0. \text{ Do đó } A(3-2a; a)$$

Do M là trung điểm AB và tam giác ABH vuông nên $MA = MH$

$$\text{Suy ra: } (3-2a)^2 + (a-1)^2 = 13 \Leftrightarrow a=3 \text{ hoặc } a=-\frac{1}{5}. \text{ Do } A \text{ khác } H$$

nên $A(-3; 3)$



Phương trình đường thẳng AD : $y - 3 = 0$. Gọi N là điểm đối xứng của M qua AD . Suy ra $N \in AC$ và tọa

$$\text{độ điểm } N \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} \frac{1+y}{2} - 3 = 0 \\ 1.x + 0.(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow N(0; 5)$$

Đường thẳng AC có phương trình: $2x - 3y + 15 = 0$

Đường thẳng BC có phương trình: $2x - y - 7 = 0$

$$\text{Tọa độ của điểm } C \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(9; 11)$$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(-2; 4)$ và điểm $I(-1; 1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm C . (ĐH.KD.2013 – Chuẩn)

HD & Giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IM} = \left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right). M \in AB \text{ và } AB \perp IM \text{ nên đường thẳng } AB \text{ có phương trình: } 7x - y + 33 = 0$$

$A \in AB \Rightarrow A(a; 7a+33)$, do M là trung điểm của AB nên $B(-a-9; -7a-30)$

Ta có: $HA \perp HB \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow a^2 + 9a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = -4$ hoặc $a = 5$

❖ Với $a = -4 \Rightarrow A(-4; 5), B(-5; -2)$. Ta có: $BH \perp AC$ nên đường thẳng

$AC: x + 2y - 6 = 0$

Điểm $C \in AC \Rightarrow C(6-2c; c)$. Mặt khác: $IC = IA$ suy ra

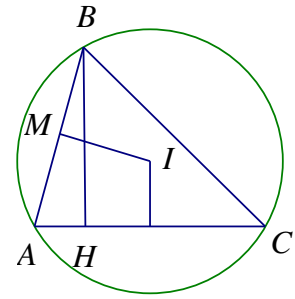
$$(7-2c)^2 + (c-1)^2 = 25 \Leftrightarrow c = 1 \text{ hoặc } c = -5.$$

Do C khác A nên $C(4; 1)$

❖ Với $a = 5 \Rightarrow A(-5; -2), B(-4; 5)$. Ta có: $BH \perp AC$ nên đường thẳng $AC: 2x - y + 8 = 0$

Điểm $C \in AC \Rightarrow C(t; 2t+8)$. Mặt khác: $IC = IA$ suy ra $(t+1)^2 + (2t+7)^2 = 25 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = -5$.

Do C khác A nên $C(-1; 6)$



Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C) , các điểm N và P thuộc Δ , đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C) . Tìm tọa độ điểm P . (ĐH.KD.2013 – Nâng cao)

HD-Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 1)$. Đường thẳng IM vuông góc với Δ

nên có phương trình: $x = 1$. Do đó $M(1; a)$. Do $M \in (C)$ nên

$$(a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = 3$$

Mà $M \notin \Delta \Rightarrow M(1; -1)$

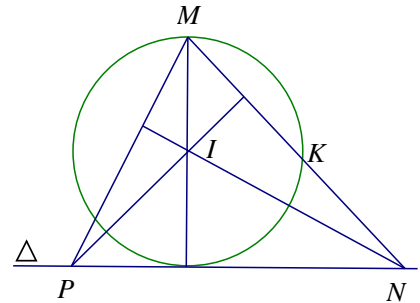
$N \in \Delta \Rightarrow N(b; 3)$. Trung điểm của MN thuộc (C) , suy ra:

$$\left(\frac{b+1}{2}-1\right)^2 + (1-1)^2 = 4 \Leftrightarrow b = 5 \text{ hoặc } b = -3$$

Do đó: $N(5; 3)$ hoặc $N(-3; 3)$. $P \in \Delta \Rightarrow P(c; 3)$

❖ Khi $N(5; 3)$, từ $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{IN}$ suy ra $c = -1$. Do đó: $P(-1; 3)$

❖ Khi $N(-3; 3)$, từ $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{IN}$ suy ra $c = 3$. Do đó: $P(3; 3)$



Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x+y-3=0$, $\Delta: x-y+2=0$ và điểm $M(-1; 3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua M , có tâm thuộc d , cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 3\sqrt{2}$ (CĐ.KA, A1, B và D. 2013 – Chuẩn)

HD-Giải

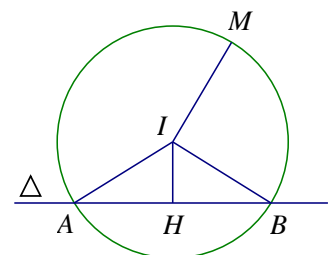
Gọi (C) là đường tròn cần viết phương trình và I là tâm của (C) . Do

$$I \in d \Rightarrow I(t; 3-t). \text{ Gọi } H \text{ là trung điểm của } AB, \text{ suy ra } AH = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{và } IH = d(I, \Delta) = \frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}. \text{ Do đó: } IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5}$$

$$\text{Từ } IM = IA, \text{ ta có được: } \sqrt{2t^2 + 2t + 1} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 2)$$

Bán kính của đường tròn (C) là $R = IM = \sqrt{5}$. Vậy phương trình của $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$



Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại $A(-3; 2)$ và có trọng tâm là

$G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC đi qua điểm $P(-2; 0)$. Tìm tọa độ điểm B và C.

(CĐ.KA, A1, B và D. 2013 – Nâng cao)

HD&Giải

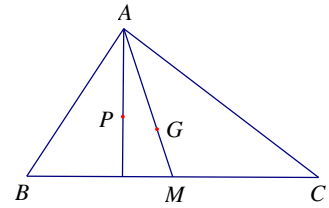
Gọi M là trung điểm của BC. Suy ra $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow M\left(2; -\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng BC qua M và vuông góc với AP, nên có phương trình:

$$x - 2y - 3 = 0$$

Tam giác ABC vuông tại A nên B và C thuộc đường tròn tâm M, bán kính

$$MA = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$



$$\text{Tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ (x - 2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, y = 2 \\ x = -3, y = -3 \end{cases}$$

Vậy: $B(7; 2), C(-3; -3)$ hoặc $B(-3; -3), C(7; 2)$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình

$2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A. (ĐH.KA, A1.2012 – Chuẩn)

HD&Giải

Gọi H là giao điểm của AN và BD. Kẻ đường thẳng qua H và song song với AB, cắt AD và BC lần lượt tại P và Q.

Đặt $HP = x$. Suy ra $PD = x, AP = 3x$ và $HQ = 3x$.

Ta có $QC = x$, nên $MQ = x$.

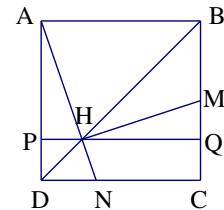
Do đó $\triangle AHP = \triangle HMQ$, suy ra $AH \perp HM$.

Hơn nữa, ta cũng có $AH = HM$

Do đó $AM = \sqrt{2}MH = \sqrt{2}d(M, (AN)) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. Ta có: $A \in AN \Rightarrow A(t; 2t - 3)$

$$MA = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \left(t - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(2t - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 4$$

Vậy: $A(1; -1)$ hoặc $A(4; 5)$.



Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$

Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông. (ĐH.KA, A1.2012 – Nâng cao)

HD&Giải

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ và $2a = 8 \Rightarrow a = 4$.

Do (E) và (C) cùng nhận Ox và Oy làm trục đối xứng và các giao điểm là các đỉnh của một hình vuông nên (E) và (C) có một giao điểm với tọa độ dạng $A(t; t), t > 0$.

$$A \in (C) \Leftrightarrow t^2 + t^2 = 8 \Rightarrow t = 2. \text{ Nên } A(2; 2) \text{ và } A(2; 2) \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{16} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của (E) là: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$,

$(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) , tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d . (ĐH.KB.2012 – Chuẩn)

HD&Giải

(C_1) có tâm là gốc tọa độ O . Gọi I là tâm đường tròn (C) cần viết phương trình.

Ta có $AB \perp OI$ mà $AB \perp d$ nên $OI \parallel d$, do đó OI có phương trình $y = x$

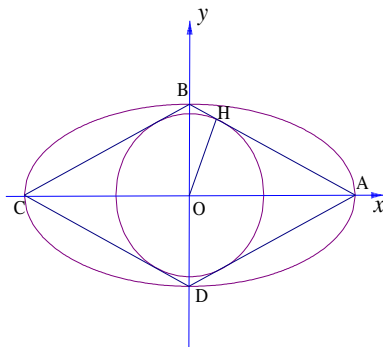
Mặt khác, $I \in (C_2)$, nên tọa độ của I thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow I(3;3)$$

Do (C) tiếp xúc với d nên (C) có bán kính $R = d(I, d) = 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox . (ĐH.KB. 2012 – Nâng cao)

HD&Giải

Giả sử $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

Hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và A, B, C, D thuộc (E) . Suy ra $OA = 2OB$.

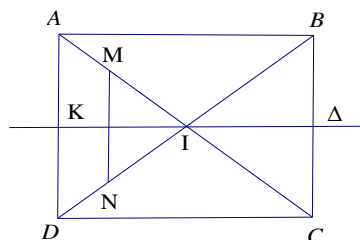
Không mất tính tổng quát, ta có thể xem $A(a;0)$ và $B\left(0; \frac{a}{2}\right)$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB .

Suy ra OH là bán kính của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$

Ta có: $\frac{1}{4} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2}$. Suy ra $a^2 = 20$, do đó

$$b^2 = 5. \text{ Vậy: } (E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , Cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$. (ĐH.KD. 2012 – Chuẩn)

HD&Giải

Tọa độ của điểm A thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$

Gọi N là điểm thuộc AC sao cho $MN \parallel AD$. Suy ra MN có phương trình là: $x - y + \frac{4}{3} = 0$.

Vì N thuộc AC , nên tọa độ của điểm N

thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x - y + \frac{4}{3} = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(-1; \frac{1}{3}\right)$

Đường trung trực Δ của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với AD , nên có phương trình là: $x + y = 0$.

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của Δ với AC và AD . Suy ra tọa độ của điểm I thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;0) \text{ và tọa độ của điểm } K \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;2)$$

Do đó, ta có: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow C(3;-1)$; $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow D(-1;3)$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow B(1;-3)$.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d , cắt trục Ox tại A và B , cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$. (ĐH.KD. 2012 – Nâng cao)

HD&Giải

Gọi I là tâm của đường tròn (C) cần viết phương trình. Do $I \in d \Rightarrow I(t; 2t+3)$

Ta có: $AB = CD \Leftrightarrow d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow |t| = |2t+3| \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = -3$

✓ Với $t = -1$ ta được $I(-1;1)$ nên $d(I, Ox) = 1$. Suy ra, bán kính của (C) là $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Do đó $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

✓ Với $t = -3$ ta được $I(-3;-3)$ nên $d(I, Ox) = 3$. Suy ra, bán kính của (C) là $R = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Do đó $(C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$.

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: 4x - 3y + m = 0$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{AIB} = 120^\circ$, với I là tâm của (C) . (CĐ.KA, A1, B và D. 2012 – Chuẩn)

HD&Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = 2$

Gọi H là hình chiếu của I trên d . Khi đó, ta có: $IH = IA \cdot \cos 60^\circ = 1$

Do đó: $\frac{|m-2|}{5} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=-3 \end{cases}$. Vậy $m=7; m=-3$ là giá trị cần tìm.

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Các đường thẳng $BC, BB', B'C'$ lần lượt có phương trình là $y-2=0, x-y+2=0, x-3y+2=0$; với B', C' tương ứng là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Viết phương trình các đường thẳng AB, AC . (CĐ.KA, A1, B và D. 2012 – Nâng cao).

HD&Giải

Tọa độ điểm B' là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B'(-2;0)$

Đường thẳng AC đi qua B' và vuông góc với BB' nên AC có phương trình: $x+y+2=0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(0;2)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C(-4;2)$

Ta có: $C' \in B'C' \Rightarrow C'(3t-2; t)$ và $BC' \perp CC'$ nên suy ra: $C'\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ hoặc $C'(-2;0)$

① Nếu $C'\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ thì đường thẳng AB có phương trình: $2x - y + 2 = 0$

② Nếu $C'(-2;0)$ thì đường thẳng AB có phương trình: $x - y + 2 = 0$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc Δ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10. (ĐH.KA.2011 – Chuẩn)

HD&Giải

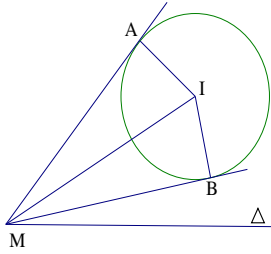
Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = IA = \sqrt{5}$

Tứ giác $MAIB$ có $\widehat{MAI} = \widehat{MBI} = 90^\circ$ và $MA = MB$. Suy ra $S_{MAIB} = IA \cdot MA \Rightarrow MA = 2\sqrt{5}$

Ta có: $M \in \Delta \Rightarrow M(t; -t-2)$

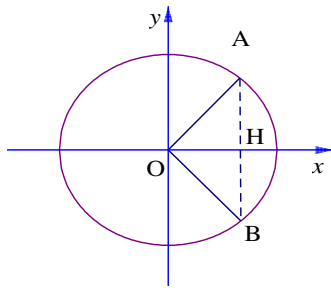
$$IM = 5 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t+3)^2 = 25 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vậy: $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$



Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) , có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất. (ĐH. KA. 2011 – Nâng cao)

HD\&Giải



Gọi $A(x; y)$. Do A, B thuộc (E) có hoành độ dương và tam

giác OAB cân tại O , nên: $B(x; -y), x > 0$. Suy ra: $AB = 2|y| = \sqrt{4-x^2}$

Gọi H là trung điểm của AB , ta có: $OH \perp AB$ và $OH = x$.

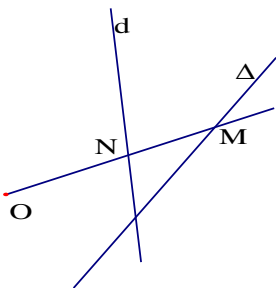
$$\text{Diện tích: } S_{OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2(4-x^2)} \stackrel{Cosi}{\leq} 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x^2 = 4-x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$$\text{Vậy: } A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$ và $d: 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM \cdot ON = 8$. (ĐH.KB.2011 – Chuẩn)

HD\&Giải



Ta có: $N \in d \Rightarrow N(a; 2a-2)$ và $M \in \Delta \Rightarrow M(b; b-4)$.

O, M, N cùng thuộc một đường thẳng khi và chỉ khi:

$$a(b-4) = b(2a-a) \Leftrightarrow b(2-a) = 4a \Leftrightarrow b = \frac{4a}{2-a}$$

Theo giả thiết: $OM \cdot ON = 8 \Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4)^2 = 4(a-2)^2$

$$\Leftrightarrow (5a^2 - 6a)(5a^2 - 10a + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 6a = 0 \\ 5a^2 - 10a + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ hoặc } a = \frac{6}{5} \\ ptn \end{cases} \text{ Vậy: } N(0; -2) \text{ hoặc } N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right).$$

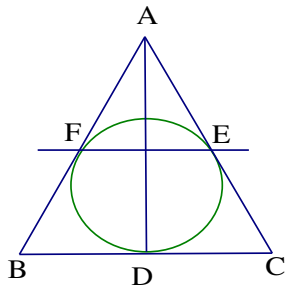
Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F . Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. Tìm tọa độ điểm A , biết A có tung độ dương. (ĐH. KB. 2011 – Nâng cao)

HD\&Giải

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \left(\frac{5}{2}; 0\right) \Rightarrow BD // EF \Rightarrow$ tam giác ABC cân tại A

Suy ra, đường thẳng AD vuông góc với EF , có phương trình: $x - 3 = 0$

Mặt khác, ta có: $F \in EF \Rightarrow F(t; 3)$.



Ta lại có: $BF = BD \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

① Với $t = -1 \Rightarrow F(-1; 3)$. Suy ra đường thẳng BF có phương trình:

$$4x + 3y - 5 = 0$$

Khi đó, A là giao điểm của AD và $BF \Rightarrow A\left(3; -\frac{7}{3}\right)$, không thỏa yêu

cầu (A có tung độ dương).

② Với $t = 2 \Rightarrow F(2; 3)$. Suy ra đường thẳng BF có phương trình:

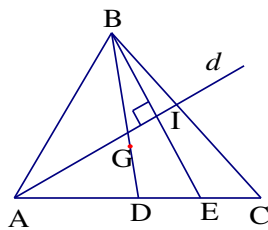
$$4x - 3y + 1 = 0$$

Khi đó, A là giao điểm của AD và $BF \Rightarrow A\left(3; \frac{13}{3}\right)$, thỏa yêu cầu (A có tung độ dương).

Vậy, có: $A\left(3; \frac{13}{3}\right)$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường thẳng chứa đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A và C . (ĐH. KD. 2011 – Chuẩn)

HD & Giải



Gọi $D(x; y)$ là trung điểm của AC , ta có:

$$\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 3(x - 1) \\ y - 1 = 3(y - 1) \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{2}; 1\right)$$

Mặt khác: Gọi $E(x; y)$ là điểm đối xứng của B qua phân giác trong $d: x - y - 1 = 0$ của góc A và I là trung điểm của EB .

Ta có: $BE \perp d \Rightarrow BE: x + y + 3 = 0$

Ta lại có: I là trung điểm của $EB \Rightarrow I\left(\frac{x-4}{2}; \frac{y+1}{2}\right)$ và $I \in d$.

Nên tọa độ điểm E là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ \frac{x-4}{2} - \frac{y+1}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2; -5)$$

Đường thẳng AC qua D và E , có phương trình: $4x - y - 13 = 0$

Do đó, tọa độ của A là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4x - y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4; 3)$$
. Suy ra: $C(3; -1)$

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 0)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A . (ĐH. KD. 2011 – Nâng cao).

HD & Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có: $IM = IN$ và $AM = AN \Rightarrow AI \perp MN$, suy ra phương trình Δ có dạng: $y = m$.

Hoành độ điểm M, N là nghiệm phương trình: $x^2 - 2x + m^2 + 4m - 5 = 0$ (1)

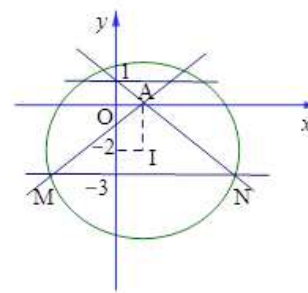
(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $m^2 + 4m - 6 < 0$ (*); khi đó:

$M(x_1; m), N(x_2; m)$ và Theo Vi ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4m - 5$

Mặt khác: $AM \perp AN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \text{ (thỏa (*)). Vậy, phương trình } \Delta: y = 1 \text{ hoặc } y = -3.$$



Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; -4)$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45° . (CĐ. 2011 – Chuẩn)

HD & Giải

Gọi Δ là đường thẳng qua A và có vector pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a; b)$

Phương trình đường thẳng $\Delta: a(x - 2) + b(y + 4) = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$, có vector pháp tuyến $\vec{n}_d = (1; 1)$

$$\text{Theo giả thiết: } \cos(d; \Delta) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a + b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |a + b| = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow ab = 0$$

✎ Với $a = 0$, ta có phương trình $\Delta: y + 4 = 0$

✎ Với $b = 0$, ta có phương trình $\Delta: x - 2 = 0$

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình các cạnh là $AB: x + 3y - 7 = 0, BC: 4x + 5y - 7 = 0, CA: 3x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . (CĐ. 2011 – Nâng cao).

HD & Giải

$$\text{Tọa độ điểm } A \text{ thỏa mãn hệ phương trình: } \begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$$

Gọi AH là đường cao kẻ từ A , suy ra: $AH \perp BC \Rightarrow AH$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (5; -4)$

$$\text{Vậy, phương trình đường cao } AH: 5(x - 1) - 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + 3 = 0$$

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình của (T) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương. (ĐH. KA. 2010 – Chuẩn)

HD & Giải

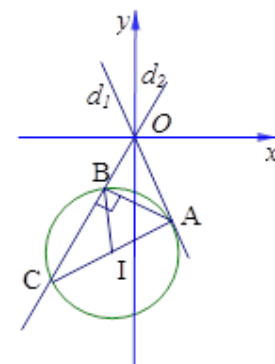
Ta có: d_1 và d_2 cắt nhau tại O , $\cos(d_1; d_2) = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 1|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$ và tam giác OAB

vuông tại O , do đó: $\widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.

$$\text{Ta lại có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (OA \cdot \sin 60^\circ) (OA \cdot \tan 60^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{8} OA^2$$

$$\text{Theo giả thiết: } S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra: } OA^2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Tọa độ } A(x; y), x > 0, \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right)$$



Đường thẳng AC qua A và vuông góc với d_1 , suy ra AC có phương trình: $\sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$

Tọa độ điểm $C(x; y)$, thỏa hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; -2\right)$$

Đường tròn (T) có đường kính AC , suy ra tâm của (T) là $I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}; -\frac{3}{2}\right)$ và bán kính

$R = IA = 1$. Vậy, phương trình (T) : $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình: $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm B và C , biết điểm $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho (ĐH. KA.2010 – Nâng cao)

HD & Giải

Gọi H là trung điểm của BC , D là trung điểm của AH , ta có: $AH \perp BC$ hay $AH \perp d \Rightarrow AH : x - y = 0$.

Do đó tọa độ $D(x; y)$ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2; 2) \Rightarrow H(-2; -2)$$

Đường thẳng BC đi qua H và song song với d , suy ra BC có phương trình: $x + y + 4 = 0$

Điểm B và C thuộc đường thẳng BC và B, C đối xứng với nhau qua $H(-2; -2)$, do đó tọa độ B, C có dạng: $B(t; -4 - t), C(-4 - t; t)$

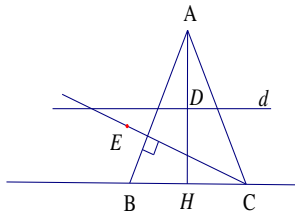
Điểm $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác ABC , suy

ra:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow (t - 6)(5 + t) + (-10 - t)(-3 - t) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

hoặc $t = -6$

Vậy, $B(0; -4), C(-4; 0)$ hoặc $B(-6; 2), C(2; -6)$



Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , có đỉnh $C(-4; 1)$, phân giác trong góc A có phương trình: $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC , biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương (ĐH. KB.2010 – Chuẩn)

HD & Giải

Gọi D là điểm đối xứng của $C(-4; 1)$ qua $d : x + y - 5 = 0$, suy ra, CD có

phương trình: $x - y + 5 = 0$. Và I là trung điểm CD , nên $I\left(\frac{x-4}{2}; \frac{y+1}{2}\right)$

Do đó, tọa độ điểm $D(x; y)$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ \frac{x-4}{2} + \frac{y+1}{2} - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(4; 9)$$

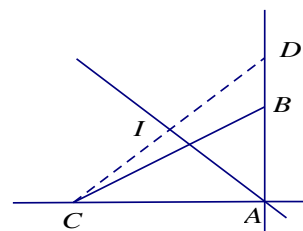
Phương trình đường tròn, đường kính CD là $(C): x^2 + (y - 5)^2 = 32$

Điểm A thuộc đường tròn đường kính CD , nên $A = (C) \cap d$

Do đó tọa độ $A(x; y), x > 0$ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x^2 + (y - 5)^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow A(4; 1)$$

Suy ra: $AC = 8$. Ta lại có: $S_{ABC} = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24 \Leftrightarrow AB = 6$

Mặt khác: B thuộc $AD: x - 4 = 0$, suy ra tọa độ điểm $B(4; y)$ và có: $\overrightarrow{AB} = (0; y - 1) \Rightarrow AB = \sqrt{(y - 1)^2}$



Do đó: $(y-1)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow B(4;7) \text{ hoặc } B(4;-5)$

d là phân giác trong của góc A , nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, suy ra $B(4;7)$

Vậy, đường thẳng BC có phương trình: $3x - 4y + 16 = 0$

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E) ; N là điểm đối xứng của F_2 qua M . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 . (ĐH. KB.2010 – Nâng cao)

HD & Giải

$$(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow F_1(-1;0), F_2(1;0)$$

Đường thẳng AF_1 có phương trình: $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{\sqrt{3}}$. M là giao điểm có tung

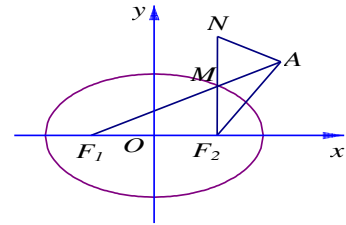
độ dương của đường thẳng AF_1 với (E) , nên tọa độ điểm $M(x;y), y > 0$

$$\text{thỏa mãn hệ: } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x+1}{3} = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ Suy ra } M\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow MA = MF_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Do N là điểm đối xứng của F_2 qua M nên $MF_2 = MN$, suy ra: $MF_2 = MN = MA$

Do đó đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ANF_2 là đường tròn tâm M , bán kính MF_2

$$\text{Vậy, phương trình } (T): (x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$



Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ điểm C , biết C có hoành độ dương. (ĐH. KD.2010 – Chuẩn)

HD & Giải

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(-2;0)$ và bán kính IA nên có

$$\text{phương trình: } (x-2)^2 + y^2 = 74.$$

Phương trình AH : $x=3$ và $BC \perp AH$, suy ra phương trình BC có dạng:
 $y = a(a \neq -7 \text{ do } BC \text{ không đi qua } A)$

Do đó hoành độ B, C thỏa mãn phương trình:

$$(x-2)^2 + a^2 = 74 \Leftrightarrow x^2 + 4x + a^2 - 70 = 0(1)$$

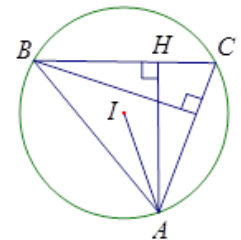
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi: $|a| < \sqrt{70}$

$$\text{Do } C \text{ có hoành độ dương, nên } B\left(-2 - \sqrt{74 - a^2}; a\right), C\left(-2 + \sqrt{74 - a^2}; a\right)$$

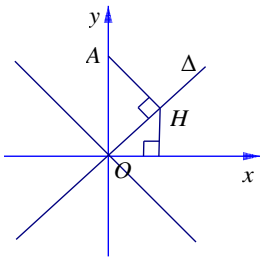
$$\text{Ta có: } AC \perp BH \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{74 - a^2} - 5) \cdot (\sqrt{74 - a^2} + 5) + (a+7)(-1-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 21 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ (thỏa mãn) hoặc } a = -7 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy: } C(-2 + \sqrt{65}; 3)$$



Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0;2)$ và Δ là đường thẳng đi qua O . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ . Viết phương trình đường thẳng Δ , biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH . (ĐH. KD.2010 – Nâng cao).

HD&Giải

Gọi tọa độ H là $(a;b)$, ta có: $AH^2 = a^2 + (b-2)^2$ và $d(H;Ox) = |b|$. Do đó:

$$a^2 + (b-2)^2 = b^2$$

Do H thuộc đường tròn đường kính OA , nên: $a^2 + (b-1)^2 = 1$

Do vậy, tọa độ điểm H thỏa mãn hệ:

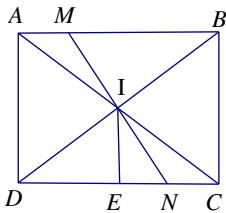
$$\begin{cases} a^2 - 4b + 4 = 0 \\ a^2 + b^2 - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4b - 4 \\ 4b - 4 + b^2 - 2b = 0(1) \end{cases}$$

$$\text{Giải(1): } b^2 + 2b - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 + \sqrt{5} \\ b = -1 - \sqrt{5} \end{cases}. \text{ Với } b = -1 - \sqrt{5} \Rightarrow a^2 = -8 - 4\sqrt{2} \text{ (không thỏa)}$$

$$\text{Suy ra: } H(2\sqrt{\sqrt{5}-2}; \sqrt{5}-1) \text{ hoặc } H(-2\sqrt{\sqrt{5}-2}; \sqrt{5}-1)$$

Vậy, phương trình đường thẳng Δ : $(\sqrt{5}-1)x - 2\sqrt{\sqrt{5}-2}y = 0$ hoặc $(\sqrt{5}-1)x + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}y = 0$

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Cho hình chữ nhật $ACBD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của CD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB . (ĐH. KA.2009 – Chuẩn)

HD&Giải

Gọi N đối xứng với M qua I , suy ra $N(11;-1)$ và N thuộc đường thẳng CD

$$E \in \Delta \Rightarrow E(x; 5-x), \overrightarrow{IE} = (x-6; 3-x) \text{ và } \overrightarrow{NE} = (x-11; 6-x)$$

$$E \text{ là trung điểm của } CD \Rightarrow IE \perp NE \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{NE} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x-11) + (3-x)(6-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 7 \end{cases}$$

❶ Với $x = 6 \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (0; -3)$, đường thẳng AB qua điểm M và nhận vector $\overrightarrow{IE}$

làm vector pháp tuyến. Vậy, phương trình AB : $y - 5 = 0$

❷ Với $x = 7 \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (1; -4)$, đường thẳng AB qua điểm M và nhận vector $\overrightarrow{IE}$ làm vector pháp tuyến. Vậy, phương trình AB : $x - 4y + 19 = 0$.

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C) . Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất. (ĐH. KA.2009 – Nâng cao)

HD&Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$

$$\text{Diện tích tam giác } IAB: S = \frac{1}{2} IA \cdot IB \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2} R^2 = 1. S \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } IA \perp IB$$

$$\text{Khi đó, khoảng cách từ } I \text{ đến } \Delta: d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \Leftrightarrow (1-4m)^2 = 1+m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{cases}$$

Bài 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ và hai đường thẳng

$\Delta_1: x - y = 0, \Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1) ; biết (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và K thuộc đường tròn (C) (ĐH.KB.2009 – Chuẩn)

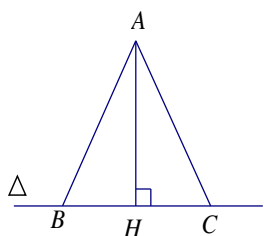
HD & Giải

Gọi $K(a; b); K \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = \frac{5}{4}$ (1); (C_1) tiếp xúc $\Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có:
$$\begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = \frac{5}{4} \\ \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = \frac{5}{4} \\ 5(a-b) = a-7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = \frac{5}{4} \\ 5(a-b) = 7b-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{vô nghiệm} \\ a = \frac{8}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ . Vậy, } K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right), \text{ bán kính của } (C_1) \text{ là } R_1 = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Bài 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1; 4)$ và hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B và C , biết diện tích tam giác ABC bằng 18. (ĐH.KB.2009 – Nâng cao)

HD & Giải

Gọi H là hình chiếu của A trên Δ , suy ra H là trung điểm của BC .

Ta có: $AH = d(A, BC) = \frac{9}{\sqrt{2}}$. Diện tích tam giác ABC :

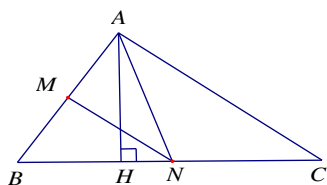
$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{2S}{AH} = 4\sqrt{2}$$

Tam giác ABC cân tại A , nên có: $AB = AC = \sqrt{AH^2 + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{97}{2}}$

Tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{97}{2} \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ . Vậy,}$$

$$B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right) \text{ hoặc } B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC . (ĐH.KD.2009 – Chuẩn)

HD & Giải

Tọa độ điểm A thỏa hệ:
$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$$

M là trung điểm của AB , suy ra $B(3; -2)$

Đường thẳng BC qua B và vuông góc có AH , nên có phương trình: $x + 6y + 9 = 0$

Tọa độ trung điểm N của đoạn thẳng BC thỏa hệ:

$$\begin{cases} x+6y+9=0 \\ 7x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow N\left(0; -\frac{3}{2}\right)$$

Ta có: MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} = (-4; -3)$

Vậy, phương trình đường thẳng AC : $3x - 4y + 5 = 0$

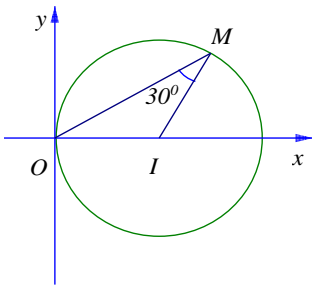
Cách khác: Tìm được tọa độ điểm $B(3; -2)$ và $N\left(0; -\frac{3}{2}\right)$. Ta tìm được tọa độ điểm $C(-3; -1)$ do N là trung điểm của BC . Viết được phương trình đường thẳng AC .

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C) . Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$ (ĐH.KD.2009 – Nâng cao)

HD & Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 0)$ và bán kính $R = 1$

Gọi điểm $M(a; b)$. Do $M \in (C) \Rightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1$; $O \in (C) \Rightarrow IO = IM = R = 1$ và $\widehat{IMO} = 30^\circ$ nên suy ra tam giác IMO cân tại I và $\widehat{IOM} = 120^\circ$



Áp dụng định lý Cosin, có:

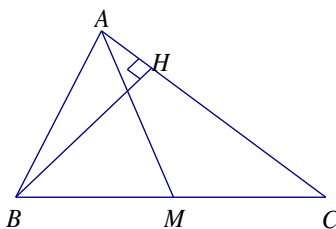
$$OM^2 = OI^2 + IM^2 - 2OI \cdot IM \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3$$

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } M\left(\frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bài 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $C(-1; -2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x + y - 9 = 0$ và $x + 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B . (CĐ.2009 – Chuẩn).

HD & Giải



Đường thẳng AC qua điểm C và vuông góc với BH : $x + 3y - 5 = 0$ nên có phương trình: $3x - y + 1 = 0$.

$$\text{Tọa độ điểm } A \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 5x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 4)$$

Điểm B thuộc đường thẳng BH và trung điểm M của BC thuộc đường thẳng AM .

Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 5\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{y-2}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5; 0). \text{ Vậy: } A(1; 4) \text{ và } B(5; 0).$$

Bài 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta_1: x - 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ_2 bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (CĐ.2009 – Nâng cao).

HD & Giải

Ta có: $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(2t+3; t)$

Khoảng cách từ M đến Δ_2 là: $d(M, \Delta_2) = \frac{|2t+3+t+1|}{\sqrt{2}}$

Theo giả thiết, ta có: $d(M, \Delta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|3t+4|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{5}{3} \end{cases}$

Vậy: $M(1; -1)$ hoặc $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

Bài 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , hãy viết phương trình chính tắc của (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20. (ĐH.CĐ KA.2008).

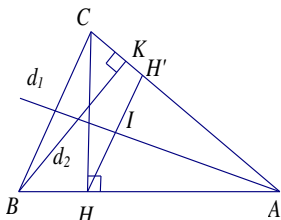
HD & Giải

Gọi phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 2(2a+2b) = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$. Vậy, phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Bài 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC , biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1; -1)$, đường phân giác trong góc A có phương trình: $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình: $4x + 3y - 1 = 0$. (ĐH.CĐ KB.2008).

HD & Giải



Kí hiệu: $d_1: x - y + 2 = 0$ và $d_2: 4x + 3y - 1 = 0$

Gọi $H'(x; y)$, khi đó H' thuộc đường thẳng AC và I là hình chiếu của H' lên d_1 nên I là trung điểm của HH' .

Đường thẳng HH' qua H và vuông góc với d_1 nên có phương trình:

$x + y + 2 = 0$. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 0)$.

Suy ra: $H'(-3; 1)$

Đường thẳng AC qua H' và vuông góc với d_2 nên có phương trình: $3x - 4y + 13 = 0$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - 4y + 13 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(5; 7)$

Đường thẳng CH qua H và vuông góc với HA nên có phương trình: $3x + 4y + 7 = 0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x + 4y + 7 = 0 \\ 3x - 4y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$

Bài 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 16x$ và điểm $A(1; 4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định. (ĐH.CĐ KD.2008)

HD & Giải

Do $B, C \in (P)$, B khác C , B và C khác A nên $B\left(\frac{b^2}{16}; b\right), C\left(\frac{c^2}{16}; c\right), (b, c \in \mathbb{R}, b \neq 4, c \neq 4)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{b^2}{16} - 1; b - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{c^2}{16} - 1; c - 4\right)$. Góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{16} - 1\right)\left(\frac{c^2}{16} - 1\right) + (b - 4)(c - 4) = 0 \Leftrightarrow 272 + 4(b + c) + bc = 0 \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng BC : $\frac{x - \frac{c^2}{16}}{\frac{b^2}{16} - \frac{c^2}{16}} = \frac{y - c}{b - c} \Leftrightarrow 16x - (b + c)y + bc = 0 \quad (2)$

Lấy (1) trừ (2), ta được: $272 - 16x + (b + c)(4 + y) = 0$

Để tìm điểm cố định đường thẳng BC đi qua, ta giải hệ: $\begin{cases} 272 - 16x = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -4 \end{cases}$

Vậy, BC luôn đi qua điểm cố định $M(17; -4)$

Bài 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tìm điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$ (CĐ.2008)

HD & Giải

Ta có: $A \in Ox, B \in Oy \Rightarrow A(a; 0), B(0; b), \overrightarrow{AB} = (-a; b)$

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1)$. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$

A, B đối xứng với nhau qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Vậy: $A(2; 0), B(0; 4)$

Bài 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 2), B(-2; -2)$ và $C(4; -2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B ; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC . Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N . (ĐH.ĐKKA.2007)

HD & Giải

Ta có: M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC nên $M(-1; 0), N(1; -2)$

Gọi $H(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$, phương trình đường thẳng $AC: 4x + 4y - 8 = 0$.

Đường cao BH qua B và vuông góc với AC nên có phương trình: $4x - 4y = 0$.

Tọa độ điểm H thỏa hệ: $\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1; 1)$

Gọi phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (1)$

Do $M, N, H \in (C)$ nên ta có: $\begin{cases} 2a + c = -1 \\ -2a + 4b + c = -5 \\ -2a - 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$

Vậy: $(C): x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

Bài 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; 2)$ và các đường thẳng

$d_1: x + y - 2 = 0, d_2: x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A . (ĐH.ĐKKB.2007)

HD Giải

Vì $B \in d_1, C \in d_2$ nên $B(b; 2-b), C(c; 8-c)$. Từ giả thiết, ta có hệ:

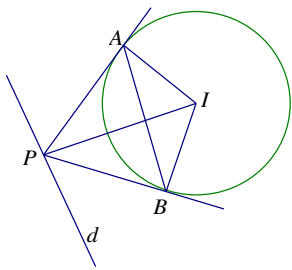
$$\begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - 4b - c + 2 = 0 \\ b^2 - 2b = c^2 - 8c + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4) = 2 \\ (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \end{cases}$$

Đặt $x = b-1; y = c-4$, ta có hệ: $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} (x \neq 0) \\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy: $B(3; -1), C(5; 3)$ hoặc $B(-1; 3), C(3; 5)$

Bài 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều. (ĐH. CĐKD.2007)

HD Giải



Đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$

Tam giác PAB đều nên $\widehat{APB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{API} = 30^\circ \Rightarrow$ tam giác PAI là nửa tam giác đều

Do đó: $IP = 2IA = 2R = 6$ hay P thuộc đường tròn (C') tâm I , bán kính $R' = 6$

Như vậy, trên d có duy nhất một điểm P thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ

$$\text{khi } d \text{ tiếp xúc với } (C') \text{ tại } P \Leftrightarrow d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|m+11|}{5} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 19 \\ m = -41 \end{cases}$$

Vậy, có hai giá trị m thỏa yêu cầu $m = 19$ và $m = -41$

Bài 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các đường thẳng: $d_1: x + y + 3 = 0$, $d_2: x - y - 4 = 0$ và $d_3: x - 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 . (ĐH. CĐKA.2006)

HD Giải

Vì điểm $M \in d_3 \Rightarrow M(2y; y)$

$$\text{Ta có: } d(M, d_1) = \frac{|2y + y + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|3y + 3|}{\sqrt{2}}; d(M, d_2) = \frac{|2y - y - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|y - 4|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{|3y + 3|}{\sqrt{2}} = 2 \frac{|y - 4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -11 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy: $M(-22; -11)$ hoặc $M(2; 1)$

Bài 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3; 1)$. Gọi T_1 và T_2 là các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) . Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 . (ĐH. CĐKB.2006)

HD Giải

Cách 1.

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$, có tâm $I(1; 3)$ và bán kính $R = 2$. Ta có: $MI = 2\sqrt{5} > R$ nên M nằm ngoài (C) .

$$\text{Nếu } T(x_0; y_0) \text{ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ } M \text{ đến } (C) \text{ thì: } \begin{cases} T \in (C) \\ \overline{MT} \perp \overline{IT} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \in (C) \\ \overline{MT} \cdot \overline{IT} = 0 \end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{MT} = (x_0 + 3; y_0 - 1), \overrightarrow{IT} = (x_0 - 1; y_0 - 3)$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 6 = 0 \\ (x_0 + 3)(x_0 - 1) + (y_0 - 1)(y_0 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 + 6 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \quad (1)$$

Vậy, tọa độ các tiếp điểm T_1 và T_2 của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) đều thỏa mãn đẳng thức (1). Do đó, phương trình đường thẳng T_1T_2 : $2x + y - 3 = 0$

Cách 2.

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$, có tâm $I(1; 3)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có: $MI = 2\sqrt{5} > R$ nên M nằm ngoài (C) . Do đó từ M kẻ được hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 đến đường tròn (C) .

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-3; 1)$ thì phương trình đường thẳng Δ là:

$y - 1 = k(x + 3) \Leftrightarrow kx - y + 3k + 1 = 0$. Để Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |2k - 1| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow 3k^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Với $k = 0$, ta có phương trình tiếp tuyến $\Delta_1: y - 1 = 0$

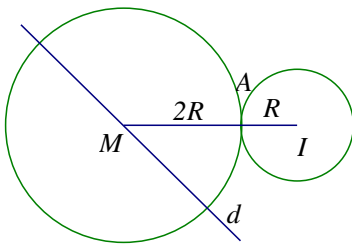
Với $k = \frac{3}{4}$, ta có phương trình tiếp tuyến $\Delta_2: 4x - 3y + 15 = 0$

Khi đó: $T_1 = \Delta_1 \cap (C) \Rightarrow T_1(1; 1), T_2 = \Delta_2 \cap (C) \Rightarrow T_2\left(-\frac{3}{5}; \frac{21}{5}\right)$

Vậy, phương trình đường thẳng T_1T_2 : $2x + y - 3 = 0$

Bài 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) , tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) . (ĐH.CĐKD.2006)

HD❧Giải



Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ có tâm $I(1; 1)$ và bán kính $R = 1$.

Vì $M \in d \Rightarrow M(x; x + 3)$. Đường tròn tâm M , tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) tại A thì $MI = MA + IA$. Trong đó IA là bán kính đường tròn (C) và MA là bán kính đường tròn tâm M .

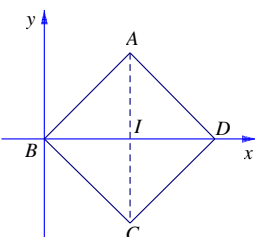
Theo giả thiết, ta có: $MI = R + 2R = 3R = 3.1 = 3$

Như vậy: $MI = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Vậy, có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán là: $M_1(1; 4), M_2(-2; 1)$

Bài 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x - y = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành. (ĐH.CĐKA.2005)

HD❧Giải



Vì điểm $A \in d_1 \Rightarrow A(t; t)$. Do AC đối xứng với nhau qua BD nên $C(t; -t)$

Mà $C \in d_2$ nên có: $2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow C(1; -1), A(1; 1)$

Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I(1; 0)$.

Vì I là tâm hình vuông nên:
$$\begin{cases} IB = IA = 1 \\ ID = IA = 1 \end{cases}$$

Ta có:
$$\begin{cases} B \in Ox \\ D \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(b;0) \\ D(d;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |b-1|=1 \\ |d-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0, b=2 \\ d=0, d=2 \end{cases}$$

Suy ra: $B(0;0), D(2;0)$ hoặc $B(2;0), D(0;0)$

Vậy, bốn đỉnh hình vuông là: $A(1;1), C(1;-1), B(0;0), D(2;0)$ hoặc $A(1;1), C(1;-1), B(2;0), D(0;0)$

Bài 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;0), B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5. (ĐH.CĐKB.2005)

HD & Giải

Gọi tâm của (C) là $I(a;b)$ và bán kính của (C) là R

Đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm $A \Rightarrow a=2$ và $|b|=R$. Như vậy: $I(2;b)$

Theo giả thiết, ta có: $IB=5 \Leftrightarrow (6-2)^2 + (4-b)^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 - 8b + 7 = 0 \Leftrightarrow b=1$ hoặc $b=7$

Với $b=1 \Leftrightarrow I(2;1), R=1$, ta có phương trình đường tròn: $(C_1): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Với $b=7 \Leftrightarrow I(2;7), R=7$, ta có phương trình đường tròn: $(C_2): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$

Bài 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều. (ĐH.CĐKD.2005)

HD & Giải

Giả sử $A(x_0; y_0)$. Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên $B(x_0; -y_0)$

Ta có: $AB^2 = 4y_0^2$ và $AC^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2$

Vì $A \in (E)$ nên $(E): \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Rightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ (1)

và tam giác ABC đều nên $AB=AC \Rightarrow 4y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$ hoặc $x_0 = \frac{2}{7}$

Với $x_0 = 2$ thay vào (1), ta có: $y_0 = 0 \Rightarrow A(2;0) \equiv C$ nên loại

Với $x_0 = \frac{2}{7}$ thay vào (1), ta có: $y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy: $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0;2)$ và $B(-\sqrt{3};-1)$. Tìm tọa độ trục tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . (ĐH.CĐKA. 2004)

HD & Giải

Gọi $H(x; y)$ là trục tâm tam giác ABC .

Đường thẳng AH qua điểm H và vuông góc với OB nên có phương trình: $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$

Đường thẳng BH qua điểm H và vuông góc với OA nên có phương trình: $y + 1 = 0$

Như vậy: $H = AH \cap BH \Rightarrow H(\sqrt{3}; -1)$

Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác OAB có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Khi đó,

$$\text{ta có: } IA^2 = IO^2 = IB^2 \Leftrightarrow \begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IO^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2 \\ a^2 + b^2 = (a+\sqrt{3})^2 + (b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow I(-\sqrt{3}; 1)$$

Vậy, $H(\sqrt{3}; -1)$ và $I(-\sqrt{3}; 1)$

Cách khác: Viết phương trình đường tròn (C) qua ba điểm A, B, C .

Bài 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1), B(4; -3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB bằng 6. (ĐH. CĐKB. 2004)

HD & Giải

Phương trình đường thẳng $AB: 4x + 3y - 7 = 0$

Gọi $C(x; y)$. Theo giả thiết $C \in d: x - 2y - 1 = 0$, ta có: $x - 2y - 1 = 0$ (1)

$$\text{Ta lại có: } d(C, AB) = \frac{|4x + 3y - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 37 = 0 & (2a) \\ 4x + 3y + 23 = 0 & (2b) \end{cases}$$

Giải (1) với (2a), ta được $C(7; 3)$. Giải (1) với (2b), ta được $C(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11})$

Vậy, có 2 điểm C thỏa yêu cầu bài toán: $C(7; 3)$ hoặc $C(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11})$.

Bài 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1; 0), B(4; 0), C(0; m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G . (ĐH. CĐKD. 2004)

HD & Giải

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{m}{3}$

Vậy $G(1; \frac{m}{3})$. Ta có: $\overrightarrow{GA} = (-2; -\frac{m}{3}), \overrightarrow{GB} = (3; -\frac{m}{3})$

Tam giác GBC vuông tại $G \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$

Bài 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AB = AC, \widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G(\frac{2}{3}; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C . (ĐH. CĐKB. 2003)

HD & Giải

Gọi $A(x; y)$. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC nên:

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow (x-1; y+1) = (-1; 3) \Rightarrow A(0; 2)$$

Phương trình đường thẳng BC qua M và vuông góc với AM (Do tam giác ABC vuông cân tại A) nên có phương trình: $-x + 3y + 4 = 0$ (1)

Nhận thấy: $MA = MB = MC = \sqrt{10} \Rightarrow$ tọa độ điểm B, C thỏa mãn phương trình đường tròn tâm M , đường kính MA : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ (2)

Từ (1) và (2) có hệ:
$$\begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ (y+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy: $B(4;0), C(-2;-2)$ hoặc $B(-2;-2), C(0;4)$.

Bài 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d .
 Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C') . (ĐH. CĐKD. 2003)

HD & Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = 2$. (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d nên (C') có tâm I' và bán kính $R' = R = 2$.

Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của I lên trên d , suy ra H là trung điểm của II' . Ta có đường thẳng IH qua điểm I và vuông góc với d nên có phương trình: $x + y - 3 = 0$.

Khi đó: $H = d \cap IH \Rightarrow H(2;1) \Rightarrow I'(3;0)$

Vậy: $(C'): (x-3)^2 + y^2 = 4$

Tọa độ các giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 4y = 0 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy, (C) và (C') cắt nhau tại hai điểm: $A(1;0), B(3;2)$.

Bài 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC . (ĐH. CĐKA. 2002)

HD & Giải

Ta có: B thuộc trục Ox , nên $B = Ox \cap BC \Rightarrow B(1;0)$. Đặt $x_A = a \Rightarrow A(a;0)$ và $x_C = a \Rightarrow y_C = \sqrt{3}a - \sqrt{3}$.

Vậy $C(a; \sqrt{3}a - \sqrt{3})$

$G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$

Ta có: $AB = |a-1|, AC = \sqrt{3}|a-1|, BC = 2|a-1|$. Do đó: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$

Ta có: $r = \frac{2S}{AB + AC + BC} = \frac{\sqrt{3}(a-1)^2}{3|a-1| + \sqrt{3}|a-1|} = \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1}$

Và $r = 2 \Leftrightarrow \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2 \Leftrightarrow |a-1| = 2\sqrt{3}+2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3}+3 \\ a = -2\sqrt{3}-1 \end{cases}$

Với $a = 2\sqrt{3}+3 \Rightarrow G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$. Với $a = -2\sqrt{3}-1 \Rightarrow G\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

Bài 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng A có hoành độ

HD Giải

Cách 1.

Điểm A thuộc đường thẳng $AB \Rightarrow A(2a-2; a)$ (do A có hoành độ âm nên $a < 1$)

I là trung điểm của AC $\Rightarrow C(3-2a; -a)$

BC qua C và vuông góc với AB $\Rightarrow BC: 2x + y + 5a - 6 = 0$

Do đó: $B = AB \cap BC \Rightarrow B(2-2a; 2-a)$, I là trung điểm của BD $\Rightarrow D(2a-1; a-2)$

Ta có: $AB = 2AD \Leftrightarrow (1-a)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2(\text{loại}) \end{cases}$

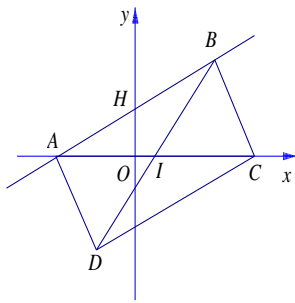
Với $a = 0$, ta có: $A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1; -2)$

Cách 2.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{5}$ và $IA = IB = \frac{5}{2}$

Do đó A, B là các giao điểm của AB với đường tròn tâm I và bán kính

$$R = \frac{5}{2}.$$



Vậy, tọa độ A, B là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \quad (\text{do}$$

$$x_A < 0) \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 2) \Rightarrow C(3; 0), D(-1; -2)$$

Bài 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E) . Xác định tọa độ điểm M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó. (ĐH.CĐKD. 2002)

HD Giải

Cách 1

Điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia $Oy \Rightarrow M(m; 0), N(0; n)$ với $m > 0, n > 0$.

Đường thẳng MN có phương trình: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Đường thẳng MN tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi: $16\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$

Theo BĐT Coôsi, ta có:

$$MN^2 = m^2 + n^2 = \left(m^2 + n^2\right) \left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2}\right) = 25 + 16\frac{n^2}{m^2} + 9\frac{m^2}{n^2} \geq 25 + 2\sqrt{16 \cdot 9} = 47 \Rightarrow MN \geq 7$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16n^2}{m^2} = \frac{9m^2}{n^2} \\ m^2 + n^2 = 49 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7} \\ n = \sqrt{21} \end{cases}$$

Vậy, $M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21})$ thì MN đạt giá trị nhỏ nhất và GTNN bằng 7.

Cách 2

Điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia $Oy \Rightarrow M(m; 0), N(0; n)$ với $m > 0, n > 0$.

Đường thẳng MN có phương trình: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Đường thẳng MN tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi: $16\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$

Theo BĐT Bunhiacôpski, ta có:

$$MN^2 = m^2 + n^2 = \left(m^2 + n^2\right)\left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2}\right) \geq \left(m \cdot \frac{4}{m} + n \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = 49 \Rightarrow MN \geq 7$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} m : \frac{4}{m} = n : \frac{3}{n} \\ m^2 + n^2 = 49 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7} \\ n = \sqrt{21} \end{cases}$$

Vậy, $M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21})$ thì MN đạt giá trị nhỏ nhất và GTNN bằng 7.

Bài 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $K(3; 2)$ và đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ với tâm là I . Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $\widehat{IMK} = 60^\circ$.

HD&Giải

Ta có $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Suy ra tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

Nhận thấy $IK = 2$. Suy ra $K \in (C)$.

Do $M \in (C)$ và $\widehat{IMK} = 60^\circ$. Suy ra $\triangle IMK$ đều. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Tìm $M \in (C)$ sao cho $KM = R = 2$.

$$\text{Gọi } M(x_0, y_0) \text{ và } M(x_0, y_0) \in (C) \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 4 \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } KM = 2 \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 + (y_0 - 2)^2 = 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $M(2; 2 + \sqrt{3})$ hoặc $M(2; 2 - \sqrt{3})$

Bài 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Lập phương trình đường thẳng qua $M(2; 1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

HD&Giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm và $A(a; 0), B(0; b)$ là giao điểm của d với Ox, Oy .

Suy ra $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Theo giả thiết, ta có: $M \in d \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$ và $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}|a \cdot b| = 4 \Leftrightarrow |ab| = 8$

$$\uparrow \begin{cases} ab = 8 \\ 2b + a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow d_1: x + 2y - 4 = 0$$

$$\uparrow \begin{cases} ab = -8 \\ 2b + a = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 4b - 4 = 0 \\ a = -8 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 + 2\sqrt{2} \\ b = -2 - 2\sqrt{2} \\ a = -8 - 2b \end{cases}$$

Với $b = -2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow d_2: (1 - \sqrt{2})x + 2(1 + \sqrt{2})y - 4 = 0$

Với $b = -2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow d_3: (1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y - 4 = 0$

Bài 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các đường thẳng $d_1: 3x + 2y - 4 = 0$,

$d_2: 5x - 2y + 9 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $I \in d_2$ và tiếp xúc với d_1 tại điểm $A(-2; 5)$.

HD&Giải

Do đường tròn tiếp xúc với đường thẳng d_1 tại A nên $IA \perp d_1$.

Vậy, đường thẳng IA có phương trình: $2x - 3y + 19 = 0$

Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm hệ:
$$\begin{cases} 5x - 2y + 9 = 0 \\ 2x - 3y + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow I(1; 7)$$

Bán kính đường tròn $R = IA = \sqrt{13}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 13$

Bài 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường cao AH và trung tuyến AM lần lượt là: $x - 2y - 13 = 0$ và $13x - 6y - 9 = 0$. Biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-5; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

HD&Giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 13 = 0 \\ 13x - 6y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow A(-3; -8)$$

Ta có IM đi qua $I(-5; 1)$ và song song với AH . Phương trình IM là $x - 2y + 7 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 13x - 6y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(3; 5)$$

Đường thẳng BC qua M và vuông góc với AH . Phương trình BC là $2x + y - 11 = 0$

Gọi $B(b; 11 - 2b)$. Ta có $IB = IA \Leftrightarrow (b + 5)^2 + (10 - 2b)^2 = 85 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Với $b = 2 \Rightarrow B(2; 7), C(4; 3)$. Với $b = 4 \Rightarrow B(4; 3), C(2; 7)$

Bài 64. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và hai điểm $A(4; -3), B(-4; 3)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc (E) sao cho diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

HD&Giải

Gọi $C(x_0; y_0) \in (E)$. Ta có $\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x_0^2 + 16y_0^2 = 144$ (1)

Phương trình đường thẳng AB là: $3x + 4y = 0$

$$d(C, AB) = \frac{|3x_0 + 4y_0|}{5}, S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB)$$

Do AB không đổi nên diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $d(C, AB)$ lớn nhất

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ số ta có

$$(3x_0 + 4y_0)^2 \leq 2(9x_0^2 + 16y_0^2) = 2 \cdot 144 \Rightarrow |3x_0 + 4y_0| \leq 12\sqrt{2} \Rightarrow d(C, AB) \leq \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

(Dấu = xảy ra khi $3x_0 = 4y_0$)

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $3x_0 = 4y_0$

Kết hợp với (1) ta có hệ:
$$\begin{cases} 9x_0^2 + 16y_0^2 = 144 \\ 3x_0 = 4y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2\sqrt{2}; y_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ x_0 = -2\sqrt{2}; y_0 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } C\left(2\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ hoặc } C\left(-2\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Bài 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x-y+7=0$. Tìm trên d điểm M mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB tới (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Hướng Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$. Gọi $H = IM \cap AB$ thì H là trung điểm của AB . Ta có:

$$IA = IB, MB = MA \Rightarrow IM \perp AB$$

$$\text{Tam giác vuông } AMI, \text{ có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{4}{AB^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{IM^2 - R^2} \quad (1)$$

Ta có: $d(I, d) = 3\sqrt{2} > R$: d không cắt (C) nên M nằm ngoài $(C) \Rightarrow IM > R$

Do đó từ (1), ta có: Độ dài AB đạt GTNN $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên d

Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với d , nên có phương trình: $x+y-3=0$

$$\text{Khi đó: } M = \Delta \cap d \Rightarrow M(-2;5)$$

BÀI TẬP LÀM TƯƠNG TỰ

Bài 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm $I\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$

và trung điểm của cạnh AD là $M(3;0)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

$$\text{Kết quả: } A(2;1), B(5;4), C(7;2), D(4;-1)$$

Bài 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và

$(C_2): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C_1) và cắt đường tròn (C_2) tại

các điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$

$$\text{Kết quả: } x+y-2=0 \text{ hoặc } 7x-y-2=0$$

Bài 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A , có phương trình các cạnh

$$AB: x+y+1=0 \text{ và } BC: \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Tìm phương trình cạnh } AC \text{ biết nó đi qua điểm } I(1;1).$$

$$\text{Kết quả: } AC: 17x+7y-24=0$$

Bài 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Viết phương trình đường thẳng cách điểm $A(1;1)$ một

khoảng bằng 2 và cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

$$\text{Kết quả: } \Delta: y=-1 \text{ hoặc } \Delta: 4x+3y+3=0$$

Bài 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và độ dài

trục nhỏ bằng 6. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho $|MF_1 - MF_2| = \frac{32}{5}$

$$\text{Kết quả: } M_1\left(4; \frac{9}{4}\right), M_2\left(4; -\frac{9}{4}\right), M_3\left(-4; \frac{9}{5}\right), M_4\left(-4; -\frac{9}{5}\right)$$

Bài 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm $A(-1;4)$ và

tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: \frac{x}{3} = \frac{1-y}{-1}$ tại điểm $B(3;2)$.

Kết quả : $(C): (x-2)^2 + (y-5)^2 = 10$

Bài 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;2)$ và đường thẳng $d: 2x - 6y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua M và hợp với d một góc 45°

Kết quả : $d': 2x - y = 0$ hoặc $d': x + 2y - 5 = 0$

Bài 73. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;1)$, trọng tâm $H\left(\frac{11}{7}; \frac{9}{7}\right)$ và trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C .

Kết quả : $B(1;3), C(-1;0)$ hoặc $B(-1;0), C(1;3)$

Bài 74. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;2), B(1;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với trục Ox .

Kết quả : $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, (C_2): x^2 + y^2 - 18x - 20y + 81 = 0$

Bài 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết góc giữa tiếp tuyến này với trục tung bằng 30° .

Kết quả : có bốn tiếp tuyến $\Delta: \sqrt{3}x - y \pm 2 + \sqrt{3} = 0, \sqrt{3}x + y \pm 2 + \sqrt{3} = 0$

Bài 76. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(c): x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng Δ .

Kết quả : $(C'): (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

Bài 77. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các đường thẳng $d_1: x + y + 4 = 0, d_2: x - y - 5 = 0$ và $d_3: x - 3y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng 3 lần khoảng cách từ M đến d_2 .

Kết quả : $M_1\left(\frac{57}{2}; \frac{19}{2}\right), M_2\left(\frac{33}{10}; \frac{11}{10}\right)$

Bài 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(3;1)$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x - y + 2 = 0, \Delta_2: 2x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Kết quả : $d: 17x - 5y - 46 = 0$

Bài 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip (E) có tiêu điểm thứ nhất là $(-\sqrt{3}; 0)$

và đi qua điểm $M\left(1; \frac{4\sqrt{33}}{5}\right)$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của (E) .

Kết quả : $A_1(-5;0), A_2(5;0), B_1(0; -\sqrt{22}), B_2(0; \sqrt{22})$

Bài 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(10;5), B(15;-5), D(-20;0)$ là ba đỉnh của một hình thang cân $ABCD$. Tìm tọa độ điểm C , biết rằng $CD \parallel AB$.

Kết quả : $C(-7; -26)$

Bài 81. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Biết hình bình hành có tâm đối xứng là $I(3;5)$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành đó.

Kết quả : $x + 3y - 30 = 0$ và $2x - 5y + 39 = 0$.

Bài 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành có một đỉnh là $(4; -1)$. Biết phương trình các đường thẳng chứa hai cạnh là $x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$. Tìm tọa độ ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

Kết quả : $\left(\frac{9}{11}; \frac{3}{11}\right), \left(\frac{17}{11}; -\frac{20}{11}\right), \left(-\frac{18}{11}; -\frac{6}{11}\right)$

Bài 83. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$. Tìm điểm M thuộc Δ cách đều hai điểm $E(0; 4)$ và $F(4; -9)$.

Kết quả : $M\left(-\frac{133}{18}; -\frac{97}{18}\right)$

Bài 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; 0), B(-5; 4)$ và $P(10; 2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B .

Kết quả : $\Delta: x + 2y - 14 = 0$

Bài 85. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $P(3; 1)$ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân cạnh đáy là AB .

Kết quả : $\Delta: (1 + \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$ và $\Delta': (1 - \sqrt{2})(x - 3) + (y - 1) = 0$

Bài 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho một cạnh tam giác có trung điểm $I(-1; 1)$. Hai cạnh kia nằm trên các đường thẳng $2x + 6y + 3 = 0$ và $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh thứ ba của tam giác.

Kết quả : $\begin{cases} x = -1 + 5t' \\ y = 1 + 3t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$

Bài 87. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ và

$\Delta': \begin{cases} x = -2 - t' \\ y = t' \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng đối xứng với Δ' qua Δ .

Kết quả : $x + 7y - 22 = 0$

Bài 88. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 2), B(3; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

Tìm tọa độ điểm C trên Δ sao cho :

a) Tam giác ABC cân

b) Tam giác ABC đều

Kết quả : a) $C_1\left(\frac{\sqrt{30}}{2}; \frac{\sqrt{30} + 2}{2}\right), C_2\left(\frac{\sqrt{30}}{2}; \frac{\sqrt{30} - 2}{2}\right), C_3(-1; 0), C_4(4; 5), C_5\left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$

b) Không tồn tại điểm C trên Δ sao cho tam giác ABC đều.

Bài 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và điểm $M(3; 1)$.

a) Tìm tọa độ điểm A trên Δ sao cho A cách M một khoảng bằng $\sqrt{13}$

b) Tìm tọa độ điểm B trên Δ sao cho đoạn MB ngắn nhất.

Kết quả : a) $A_1(0; -1), A_2(1; -2)$

b) $B \equiv H\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ (H là hình chiếu M lên Δ)

Bài 90. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $P(1; 6), Q(-3; -4)$ và đường thẳng

$$\Delta: 2x - y - 1 = 0$$

a) Tìm tọa độ điểm M trên Δ sao cho $MP + MQ$ nhỏ nhất

b) Tìm tọa độ điểm N trên Δ sao cho $|NP - NQ|$ lớn nhất.

Kết quả: a) $M(0; -1)$

b) $N(-9; -19)$

Bài 91. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $A(-1; 0), B(2; 3), C(3; -6)$ và đường thẳng

$\Delta: x - 2y - 3 = 0$. Tìm điểm M trên Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

Kết quả: $M\left(\frac{19}{15}; -\frac{13}{15}\right)$

Bài 92. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng

$\Delta: 4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x + y + 4 = 0$ và $d_2: 7x - y + 4 = 0$.

Kết quả: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$ và $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$ và đường thẳng (d): $x + 3y + 2 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với (d) là

A. $x + 3y \pm 9 = 0$.

B. $x + 3y \pm 10 = 0$.

C. $x + 3y \pm 11 = 0$.

D. $x + 3y \pm 5 = 0$.

Câu 2. Cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(6, 2)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

A. $3x - y = 0$ và $x + 12y - 12 = 0$

B. $x - 3y = 0$ và $x + 3y + 12 = 0$

C. $x - 3y = 0$ và $x + 3y - 12 = 0$

D. $3x - y = 0$ và $x + 12y + 12 = 0$

Câu 3. Elip có hai tiêu điểm nằm trên trục hoành, đối xứng O , (E) có tâm sai $e = \frac{2}{3}$ và đi qua điểm

$M\left(-2; \frac{5}{3}\right)$. Phương trình chính tắc của (E) là

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$.

Câu 4. Cho đường thẳng $d: 4x - 3y + 13 = 0$. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi (d) và trục Ox là

A. $4x - 8y + 13 = 0$ và $4x + 2y + 13 = 0$.

B. $x + 3y + 13 = 0$ và $x - 3y + 13 = 0$.

C. $3x + y + 13 = 0$ và $3x - y + 13 = 0$.

D. $4x + 4y + 13 = 0$ và $4x - y + 13 = 0$.

Câu 5. Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào không phải là phương trình đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 13 = 0$.

D. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6 = 0$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x + y + 4 - m = 0$ và $d_2: (m + 3)x + y - 2m - 1 = 0$. d_1 song song với d_2 khi và chỉ khi m bằng

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. 3.

Câu 7. Cho điểm $I(1; 1)$ và đường thẳng (d): $x - 2y + 2 = 0$. Phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua I là

A. $2x - y + 12 = 0$.

B. $x - 2y + 12 = 0$.

C. $2x - y = 0$.

D. $x - 2y = 0$.

Câu 8. Cho đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ và điểm $A(1; 3)$. Phương trình tiếp tuyến (C) vẽ từ A là

A. $x - 1 = 0$ và $3x - 4y + 15 = 0$.

B. $x - 1 = 0$ và $3x + 4y + 15 = 0$.

C. $x - 1 = 0$ và $3x + 4y - 15 = 0$.

D. $x - 1 = 0$ và $3x - 4y - 15 = 0$.

Câu 9. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng

(d): $4x + 3y + 2 = 0$ có phương trình là

A. $-3x + 4y + 10 = 0$ và $-3x + 4y - 20 = 0$.

B. $-3x + 4y + 15 = 0$ và $-3x + 4y - 5 = 0$.

C. $-3x + 4y + 5 = 0$ và $-3x + 4y - 15 = 0$.

D. $-3x + 4y + 20 = 0$ và $-3x + 4y - 10 = 0$.

Câu 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình tổng quát là: $4x + 5y - 8 = 0$. Phương trình tham số của (d) là:

A. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -4t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 4t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -5t \\ y = 4t \end{cases}$.

Câu 11. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$?

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2}$.

B. $2x + y + 1 = 0$.

C. $x + 2y + 1 = 0$.

D. $4x - 2y + 1 = 0$.

Câu 12. Đường tròn qua $A(5;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng: $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm $B(1;-1)$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 2 = 0$.

Câu 13. Cho điểm $M(1;2)$ và đường thẳng (d): $2x + y - 5 = 0$. Toạ độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua (d) là:

A. $M'(3;-5)$.

B. $M'\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

C. $M'(-2;6)$.

D. $M'\left(\frac{9}{5};\frac{12}{5}\right)$.

Câu 14. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 23 = 0$ và điểm $M(8;-3)$. Chiều dài của tiếp tuyến xuất phát từ M với (C) là

A. $\sqrt{10}$.

B. 10.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Câu 15. Phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 12, trục nhỏ bằng 8 là:

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$.

B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

C. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$.

D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 16. Đường thẳng qua $M(2;1)$ và nhận $\vec{u} = (1;-1)$ là vectơ chỉ phương có phương trình là:

A. $x - y - 1 = 0$.

B. $x - y + 5 = 0$.

C. $x + y - 3 = 0$.

D. $x + y - 1 = 0$.

Câu 17. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + y - 1 = 0$ và $\Delta_2: x - 3y + 3 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ đối xứng với Δ_1 qua Δ_2 là

A. $7x + y + 1 = 0$.

B. $x - 7y + 1 = 0$.

C. $x + 7y + 1 = 0$.

D. $7x - y + 1 = 0$.

Câu 18. Với giá trị nào của m thì phương trình dưới đây là phương trình của đường tròn $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$?

A. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

B. $1 < m < 2$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

D. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

Câu 19. Đường thẳng nào không cắt đường thẳng $2x + 3y - 1 = 0$?

A. $2x - 3y + 3 = 0$.

B. $4x - 6y - 2 = 0$.

C. $2x + 3y + 1 = 0$.

D. $x - 2y + 5 = 0$.

Câu 20. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng $4x - 3y - 5 = 0$ bằng

A. -5.

B. $\frac{1}{5}$.

C. 0.

D. 1.

Câu 21. Cho $A(2;1)$ và $B(3;-2)$. Tập hợp những điểm $M(x;y)$ sao cho $MA^2 + MB^2 = 30$ là một đường tròn có phương trình

A. $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 12 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 5x + y - 6 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 5x - y - 6 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 5x + y + 6 = 0$

Câu 22. Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Câu 23. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1;2), B(3;1)$ và $C(5;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ A ?

- A. $5x - 6y + 7 = 0$. B. $3x - 2y + 5 = 0$. C. $2x + 3y - 8 = 0$. D. $3x - 2y - 5 = 0$.

Câu 24. Tọa độ điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;4)$ trên đường thẳng $(\Delta): x - 2y + 2 = 0$ là:

- A. $(-2;2)$. B. $(2;2)$. C. $(2;-2)$. D. $(3;0)$.

Câu 25. Đường tròn: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ có tâm và bán kính là

- A. $I(1;2), R = \sqrt{15}$. B. $I(-1;-2), R = 5$. C. $I(1;-2), R = 5$. D. $I(1;2), R = 5$.

Câu 26. Cho đường thẳng $(d): -3x + y - 3 = 0$ và điểm $N(-2;4)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc N' của N trên (d) là:

- A. $\left(\frac{2}{5}; \frac{21}{5}\right)$. B. $\left(\frac{1}{10}; \frac{33}{10}\right)$. C. $(-3;-6)$. D. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right)$.

Câu 27. Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng: $x - 3y + 4 = 0$?

- A. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

Câu 28. Phương trình chính tắc của (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $8\sqrt{2}$ là:

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 29. Cho đường thẳng $(\Delta): 2x - 3y + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ O và $(d) \parallel (\Delta)$ là:

- A. $2x - y + 6 = 0$. B. $2x - 3y + 2 = 0$. C. $2x - 3y = 0$. D. $x - 2y - 6 = 0$.

Câu 30. Cho đường thẳng $d: 2x + y - 2 = 0$ và điểm $M(6;5)$. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d là:

- A. $M'(-5;-6)$. B. $M'(-6;5)$. C. $M'(-6;-1)$. D. $M'(5;6)$.

Câu 31. Cho hai đường thẳng song song $\Delta_1: 5x - 7y + 4 = 0$ và $\Delta_2: 5x - 7y + 6 = 0$. Phương trình đường thẳng song song và cách đều Δ_1 và Δ_2 là:

- A. $5x - 7y + 3 = 0$. B. $5x - 7y + 5 = 0$. C. $5x - 7y + 2 = 0$. D. $3x - 7y - 3 = 0$.

Câu 32. Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $\Delta: x \cos \alpha + y \sin \alpha + 3(2 - \sin \alpha) = 0$ bằng

- A. $3 \sin \alpha$. B. $\frac{3}{\sin \alpha + \cos \alpha}$. C. $\sqrt{6}$. D. 6.

Câu 33. Đường thẳng qua $N(3;-2)$ và có hệ số góc $k = \frac{2}{3}$ có phương trình là:

- A. $2x - 3y - 12 = 0$. B. $3x - 2y - 13 = 0$. C. $2x - 3y - 9 = 0$. D. $2x + 3y = 0$.

Câu 34. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Từ điểm $A(3;-2)$ có thể kẻ đến (C) 2 tiếp tuyến phân biệt có phương trình là:

- A. $2x - y - 8 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$. B. $2x - y + 8 = 0$ và $x + 2y + 1 = 0$.
C. $2x - y - 8 = 0$ và $x + 2y + 1 = 0$. D. $2x - y + 8 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$.

Câu 35. Cho hai điểm $A(6;2)$ và $B(-2;0)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

- A. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 12 = 0$. B. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 12 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 12 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 12 = 0$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(-1;1)$, $B(4;7)$ và $C(3;-2)$, M là trung điểm đoạn thẳng AB . Phương trình tham số của trung tuyến CM là:

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$.

Câu 37. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x - 3y + 5 = 0$ và $\Delta_2: 3x - y + 15 = 0$. Phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng trên là:

A. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$.

B. $x + y + 5 = 0$.

C. $x - y + 5 = 0$.

D. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$.

Câu 38. Cho tam giác ABC, biết $A(1;3)$ và hai trung tuyến lần lượt có phương trình là:

$x - 2y + 1 = 0, y - 1 = 0$. Phương trình cạnh AB là

A. $x + 2y + 7 = 0$.

B. $2x + y + 7 = 0$.

C. $x + 2y - 7 = 0$.

D. $2x + y - 7 = 0$.

Câu 39. Cho $M(2;1)$. Đường thẳng (d) đi qua M cắt trục tọa độ tại A, B sao cho M là trung điểm AB có phương trình là:

A. $x + 2y - 2 = 0$.

B. $2x + y - 2 = 0$.

C. $2x + y - 2 = 0$.

D. $x + 2y - 4 = 0$.

Câu 40. Cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$ và $d_2: y = -10$. Số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng

A. $88^\circ 57' 52''$.

B. $1^\circ 13' 8''$.

C. 45° .

D. 30° .

Câu 41. Đường thẳng qua $P(1;-2)$ và nhận $\vec{n} = (-2;4)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình là:

A. $-2x + 4y = 0$.

B. $x + 2y + 4 = 0$.

C. $x - 2y - 5 = 0$.

D. $x - 2y + 4 = 0$.

Câu 42. Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng $x - y + 3 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$.

Câu 43. Cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(4;7)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

A. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 29 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 29 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 29 = 0$.

Câu 44. Hai cạnh hình chữ nhật có phương trình: $3x - 4y + 5 = 0, 4x + 3y - 12 = 0$ và một đỉnh có tọa độ $(3;-2)$. Phương trình hai cạnh còn lại là:

A. $4x + 3y - 6 = 0$ và $3x - 4y - 17 = 0$.

B. $4x + 3y - 6 = 0$ và $3x - 4y + 17 = 0$.

C. $4x + 3y + 6 = 0$ và $3x - 4y + 17 = 0$.

D. $4x + 3y + 6 = 0$ và $3x - 4y - 17 = 0$.

Câu 45. Đường thẳng đi qua điểm $M(1;0)$ và song song với đường thẳng $d: 4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là:

A. $4x + 2y + 3 = 0$.

B. $2x + y + 4 = 0$.

C. $2x + y - 2 = 0$.

D. $x - 2y + 3 = 0$.

Câu 46. Elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Điểm dưới đây là tiêu điểm của (E) ?

A. $(10;0)$.

B. $(6;0)$.

C. $(4;0)$.

D. $(-8;0)$.

Câu 47. Phương trình nào dưới đây là phương trình tổng quát của đường thẳng: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$?

A. $x + 2y - 2 = 0$.

B. $2x + y - 1 = 0$.

C. $2x + 3y + 1 = 0$.

D. $x + 2y + 2 = 0$.

Câu 48. Cho hai điểm $A(1;1), B(-3;3)$ và đường thẳng $(d): x + y + 5 = 0$. Điểm M thuộc đường thẳng (d) và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

A. $(-3;2)$.

B. $(-3;-2)$.

C. $(3;-2)$.

D. $(3;2)$.

Câu 49. Phương trình chính tắc của elip (E) qua điểm $M\left(\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$ và có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ là:

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. D. $\frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{1} = 1$.

Câu 50. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1; -3), G(4; -2)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Đường trung trực của cạnh AB có phương trình: $3x + 2y - 4 = 0$. Toạ độ đỉnh C của tam giác ABC là:

- A. $(8; 4)$. B. $(-8; -4)$. C. $(8; -4)$. D. $(-8; 4)$.

Câu 51. Cho hai điểm $A(5; 6), B(-3; 2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là:

- A. $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{-1}$. B. $\frac{x+5}{2} = \frac{y+6}{1}$. C. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{-1}$. D. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-6}{1}$.

Câu 52. Cho đường thẳng $(d_1): x + y - 1 = 0$ và $(d_2): x - 3y + 3 = 0$. Gọi (d) là đường thẳng đối xứng với d_1 qua d_2 . Phương trình đường thẳng (d) là:

- A. $7x + y + 1 = 0$. B. $7x + y - 1 = 0$. C. $7x - y + 1 = 0$. D. $7x - y - 1 = 0$.

Câu 53. Cho đường thẳng $d: 3x + 5y + 2006 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -3)$. B. (d) có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$.
C. (d) song song với đường thẳng: $3x + 5y = 0$. D. (d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$.

Câu 54. Phương trình chính tắc của elip (E) đi qua hai điểm $M(4; -\sqrt{3}), N(2\sqrt{2}; 3)$ là

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. C. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{20} = 1$. D. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$.

Câu 55. Đường thẳng $\Delta: mx + y + 2 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ khi m bằng

- A. $-\frac{8}{15}$. B. $\frac{8}{15}$. C. $\frac{15}{8}$. D. 0 .

Câu 56. Cho tam giác ABC có phương trình hai đường cao là $BB': x + 3y - 17 = 0$,

$CC': 3x + 8y - 12 = 0$ và đỉnh $A(-1; -3)$. Toạ độ đỉnh B là

- A. $(-2; -5)$. B. $(2; -5)$. C. $(2; 5)$. D. $(-2; 5)$.

Câu 57. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$?

- A. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 58. Phương trình nào dưới đây là phương trình tổng quát của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$?

- A. $x + 2y + 1 = 0$. B. $2x + y - 1 = 0$. C. $2x + y - 3 = 0$. D. $x - 2y = 0$.

Câu 59. Cho tam giác ABC có $A(1; 1)$, đường cao $BB': -2x + y - 8 = 0$ và đường cao $CC': 2x + 3y - 8 = 0$. Đường cao AA' có phương trình là:

- A. $x + y + 2 = 0$. B. $x + y - 2 = 0$. C. $x - y - 2 = 0$. D. $x - y + 2 = 0$.

Câu 60. Phương trình đường tròn tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 2$ là

- A. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. B. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

Câu 61. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ có tâm I và bán kính R là

- A. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $I(1; -1), R = \sqrt{6}$.

D. $I(-1; 1), R = 1$.

Câu 62. Bán kính của đường tròn tâm $I(0; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x - 4y - 23 = 0$ bằng

A. 5.

B. 3.

C. $\frac{3}{5}$.

D. 15.

Câu 63. Cho đường thẳng $(d_1): x - 3y + 3 = 0$ và $(d_2): 3x - y - 1 = 0$. Điểm M nằm trên trục hoành có hoành độ dương và cách đều d_1 và d_2 có tọa độ là

A. $(2; 0)$.

B. $(3; 0)$.

C. $(1; 0)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 64. Đường tròn tâm $I(1, -2)$ tiếp xúc với đường thẳng $(d): 3x - 4y - 26 = 0$ có bán kính R bằng

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 65. Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ có vector pháp tuyến là:

A. $\vec{n} = (2; 1)$.

B. $\vec{n} = (-1; 2)$.

C. $\vec{n} = (2; -1)$.

D. $\vec{n} = (1; -1)$.

Câu 66. Cho hình thoi $ABCD$ biết $A(-1; 2), B(-2; -1)$ và $D(2; 3)$. Phương trình đường chéo AC là:

A. $x + y - 1 = 0$.

B. $x + y - 3 = 0$.

C. $x - y + 3 = 0$.

D. $2x + 3y - 6 = 0$.

Câu 67. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ và đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$. Một tiếp tuyến của (C) song song với (d) có phương trình là:

A. $x - y + 3 - \sqrt{2} = 0$.

B. $x - y + 4\sqrt{2} = 0$.

C. $x - y - 3 + 3\sqrt{2} = 0$.

D. $x - y + 6 = 0$.

Câu 68. Một tam giác vuông cân có đỉnh góc vuông $A(4; -1)$, cạnh huyền có phương trình:

$$3x - y + 5 = 0. \text{ Hai cạnh góc vuông có phương trình là}$$

A. $2x + y + 6 = 0$ và $x - 2y + 1 = 0$.

B. $3x + y - 7 = 0$ và $x - 3y + 1 = 0$.

C. $x + 2y - 6 = 0$ và $2x - y + 7 = 0$.

D. $x - 2y - 6 = 0$ và $2x + y - 7 = 0$.

Câu 69. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1; 1)$ và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $4x + 9y - 13 = 0$.

B. $4x - 9y - 13 = 0$.

C. $9x + 4y + 13 = 0$.

D. $9x - 4y - 13 = 0$.

Câu 70. Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; -1)$ và $B(4; 1)$ là:

A. $2x + y - 1 = 0$.

B. $x - y - 3 = 0$.

C. $x + y + 2 = 0$.

D. $x + y - 3 = 0$.

Câu 71. Cho $A(-2; 5), B(2; 3)$. Đường thẳng $(d): x - 4y + 4 = 0$ cắt AB tại điểm M có tọa độ là:

A. $(2; -4)$.

B. $(4; 2)$.

C. $(-2; 4)$.

D. $(-2; -4)$.

Câu 72. Cho hai đường thẳng song song $\Delta_1: 5x - 7y + 4 = 0$ và $\Delta_2: 5x - 7y + 6 = 0$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

A. $\frac{4}{\sqrt{74}}$.

B. $\frac{6}{\sqrt{74}}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{74}}$.

D. $\frac{10}{\sqrt{74}}$.

Câu 73. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Đường thẳng qua $M(1; 2)$ và tiếp xúc với (C) có phương trình là

A. $3x + 4y = 0$ và $3x - 4y + 1 = 0$

B. $x - 1 = 0$ và $3x - 4y + 5 = 0$

C. $x + 1 = 0$ và $3x + 4y + 5 = 0$

D. $3x + 4y + 5 = 0$ và $3x + 4y - 5 = 0$

Câu 74. Cho tam giác ABC có cạnh AB, AC lần lượt có phương trình là: $4x + y + 15 = 0, 2x + 5y + 3 = 0$ và trọng tâm $G(-2; -1)$. Tọa độ trung điểm M của cạnh BC là:

A. $(-1; -2)$.

B. $(1; -2)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-1; 2)$.

Câu 75. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng: $4x - 3y + 1 = 0$?

A. $\begin{cases} x = -4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 8t \\ y = -3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

Câu 76. Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A(-3;2), B(-3;3)$ có vector pháp tuyến là

A. $\vec{n} = (-1;0)$.

B. $\vec{n} = (0;1)$.

C. $\vec{n} = (-3;5)$.

D. $\vec{n} = (6;5)$.

Câu 77. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 5$ tại điểm $M(1;2)$ là

A. $2x + y - 5 = 0$.

B. $x - 2y - 5 = 0$.

C. $x + 2y - 5 = 0$.

D. $2x - y + 5 = 0$.

Câu 78. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + 2y + 1 = 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Δ đi qua tâm của (C).B. Δ cắt (C) tại hai điểm.C. Δ tiếp xúc với (C).D. Δ không có điểm chung với (C).

Câu 79. Cho hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 4 = 0$ và $d_2: 2x - y + 6 = 0$. Số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 80. Vector pháp tuyến của đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$ là:

A. $\vec{n} = (1;2)$.

B. $\vec{n} = (-1;2)$.

C. $\vec{n} = (1;-2)$.

D. $\vec{n} = (2;-1)$.

Câu 81. Đường thẳng qua $A(4;2)$ và tiếp xúc với đường tròn: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ có phương trình là

A. $4x + 3y - 20 = 0$.

B. $3x + 4y - 20 = 0$.

C. $3x - 4y + 20 = 0$.

D. $4x - 3y + 20 = 0$.

Câu 82. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 2x - 4y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 3x - y + 17 = 0$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{3\pi}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Câu 83. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: mx + (m-1)y + 2m = 0$ và $\Delta_2: 2x + y - 1 = 0$. Nếu Δ_1 song song với Δ_2 thì m có giá trị là:

A. m tùy ý.

B. $m = 1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Câu 84. Cho điểm $M(0;4)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. M trùng với tâm của (C).B. M nằm trên (C).C. M nằm trong (C).D. M nằm ngoài (C).

Câu 85. Một elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi $2c$ là tiêu cự của (E). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b^2 = a^2 + c^2$.

B. $a^2 = b^2 + c^2$.

C. $c = a + b$.

D. $c^2 = a^2 + b^2$.

Câu 86. Elip (E) có độ dài trục bé bằng tiêu cự. Tâm sai của (E) bằng

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 87. Cho đường thẳng (d) có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$. Phương trình tổng quát của (d) là:

A. $x + 3y - 5 = 0$.

B. $x + 3y = 0$.

C. $3x - y + 2 = 0$.

D. $3x - y + 5 = 0$.

Câu 88. Cho đường thẳng $(\Delta): 2x - 3y + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1;2)$ và $(d) \parallel (\Delta)$ có là:

A. $2x - 3y + 4 = 0$.

B. $x + 2y - 3 = 0$.

C. $2x - y = 0$.

D. $4x + 2y - 6 = 0$.

Câu 89. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-2;4), B(5;5)$ và $C(6;-2)$ là

A. $x^2 + y^2 - 2x - y + 10 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 20 = 0$

Câu 90. Cho đường thẳng $(d_1): x+3y-1=0$ và $(d_2): x-3y-5=0$. Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua giao điểm của d_1 và d_2 đồng thời vuông góc với đường thẳng $(d): 2x-y+7=0$ là:

- A. $x+3y-6=0$. B. $2x+6y=0$. C. $6x+y-2=0$. D. $3x+6y-5=0$.

Câu 91. Phương trình chính tắc của (E) đi qua điểm $M(\sqrt{15}; -1)$ và có tiêu cự bằng 8 là

- A. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$. C. $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{10} = 1$. D. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Câu 92. Cho elip $(E): 9x^2+16y^2-144=0$ và điểm $M(x; y) \in (E)$, F_1, F_2 là hai tiêu điểm. Biểu thức $OM^2 + MF_1 \cdot MF_2$ có giá trị không đổi và bằng

- A. 7. B. 9. C. 16. D. 25.

Câu 93. Đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ khi và chỉ khi

- A. $m=1$. B. $m=0$. C. $m=3$. D. $m=5$.

Câu 94. Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng $\begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$?

- A. $\begin{cases} x=5+t' \\ y=-2t' \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=5-2t' \\ y=t' \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=5+4t' \\ y=2t' \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=5+t' \\ y=2t' \end{cases}$.

Câu 95. Cho đường thẳng $(\Delta): x-3y+1=0$. Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$ và $(d) \perp (\Delta)$ là

- A. $2x-y+1=0$. B. $x+3y=0$. C. $3x+y-3=0$. D. $3x+y+5=0$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	B	A	B	D	D	C	D	A	D	A	D	A	D	C	D	D	C	D	B	A	C	B	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	B	C	C	B	D	A	C	C	A	D	C	D	C	C	C	A	A	C	D	B	B	C	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	B	B	D	C	C	B	B	B	A	A	B	A	D	A	A	B	D	A	B	B	C	B	A	C
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	C	C	D	A	B	A	D	D	B	D	A	A	C	D	A	D	D	A	C					