

2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt phẳng

a) Vector pháp tuyến – Cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

- Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến (VTPT) của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) .
- Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp vector chỉ phương (VTCP) của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α) .

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của (α) .
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp VTCP của (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một VTPT của (α) .

b) Phương trình tổng quát của mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

- Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một VTPT của (α) .
- Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

c) Các trường hợp đặc biệt

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O .
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$.
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$.
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$.
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$.
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$.
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$.

Chú ý:

• Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

• Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

2. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức $d[A, (\alpha)] = \frac{|Ax_A + By_A + Cz_A + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Vị trí tương đối**a) Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng**

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\bullet (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\bullet (\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\bullet (\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$\bullet (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

b) Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng và mặt cầu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Để xét vị trí của (α) và (S) ta làm như sau:

• **Bước 1.** Tính khoảng cách từ tâm I của (S) đến (α) .

• **Bước 2.**

+ Nếu $d[I, (\alpha)] > R$ thì (α) không cắt (S) .

+ Nếu $d[I, (\alpha)] = R$ thì (α) tiếp xúc (S) tại H . Khi đó H được gọi là tiếp điểm, là hình chiếu vuông góc của I lên (α) và (α) được gọi là tiếp diện.

+ Nếu $d[I, (\alpha)] < R$ thì (α) cắt (S) theo đường tròn có phương trình $(C): \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$.

Bán kính của (C) là $r = \sqrt{R^2 - d[I, (\alpha)]^2}$.

Tâm J của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (α) .

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos \widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta} \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

DẠNG 1. Phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ là phương trình của một mặt phẳng khi và chỉ khi $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Chú ý: Đi kèm với họ mặt phẳng (P_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K , biện luận theo vị trí của M số mặt phẳng của họ (P_m) đi qua M .

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn chứa một đường thẳng cố định.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho phương trình: $mx + m(m-1)y - (m^2-1)z - 1 = 0$. (1)

- Tìm điều kiện của m để phương trình (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ (P_m) .
- Tìm điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua.
- Giả sử (P_m) với $m \neq 0, \pm 1$ cắt các trục tọa độ tại A, B, C .
 - Tính thể tích tứ diện $OABC$.
 - Tìm m để ΔABC nhận điểm $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ làm trọng tâm.

Nhận xét: Như vậy, để tìm điểm cố định mà họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của họ (P_m) , khi đó $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \forall m$.

Bước 2. Nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0, từ đó nhận được $(x_0; y_0; z_0)$.

Bước 3. Kết luận.

Ví dụ 2. Cho phương trình: $(a+b)x + ay + bz - 3(a+b) = 0$.

- Tìm điều kiện của a, b để phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ $(P_{a,b})$.
- Giả sử $(P_{a,b})$ với $a, b \neq 0$ cắt các trục tọa độ tại A, B, C . Tìm a, b để:
 - ΔABC nhận điểm $G\left(1; 4; \frac{4}{3}\right)$ làm trọng tâm.
 - ΔABC nhận điểm $H(2; 1; 1)$ làm trọng tâm.

- Tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất với $a > 0, b > 0$.
- c. Chứng tỏ rằng họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định.

DẠNG 2. Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Để viết phương trình mặt phẳng (P) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Xác định $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (P)$ và vtcp $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$ của (P).

Bước 2. Khi đó: (P): $\begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(n_1; n_2; n_3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$

Cách 2: Sử dụng phương pháp quỹ tích.

Chú ý: Chúng ta có các kết quả:

1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, luôn có dạng: (P): $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
2. Mặt phẳng (P) có vtcp $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$, luôn có dạng: (P): $n_1x + n_2y + n_3z + \underline{D} = 0$

Để xác định (P), ta cần đi xác định D.

3. Mặt phẳng (P) song song với (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$, luôn có dạng: (P): $Ax + By + Cz + \underline{E} = 0$

Để xác định (P), ta cần đi xác định E.

4. Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn, đó là mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$

có phương trình: (P): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

5. Với phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm không thẳng hàng M, N, P chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtcp của mặt phẳng (P), ta có: $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}].$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi: (P): $\begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$, (1) với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì M, N, P thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hệ ba phương trình với bốn ẩn A, B, C, D.

Biểu diễn ba ẩn theo một ẩn còn lại, rồi thay vào (1) chúng ta nhận được phương trình mặt phẳng (P).

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết:

- a. (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1; 1; 2)$ và $B(1; -3; 2)$.
- b. (P) đi qua điểm $C(1; 2; -3)$ và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
- c. (P) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$ và có cặp vtcp $\vec{a}(2; -1; 1)$, $\vec{b}(2; -1; 3)$.
- d. (P) đi qua điểm $E(3; 1; 2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng: $(R_1): 2x + y + 2z - 10 = 0$ và $(R_2): 3x + 2y + z + 8 = 0$.

Ví dụ 2. Cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 4)$, $C(3; 0; 5)$.

- a. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B và C.
- b. Lập phương trình mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ làm đường tròn lớn.

Ví dụ 3. Cho hai điểm $A(1; -1; 5)$, $B(0; 0; 1)$.

- a. Tìm điểm M thuộc Oy sao cho $\triangle MAB$ cân tại M.
- b. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Oy.
- c. Lập phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm A, B và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.

Ví dụ 4. Cho hai điểm $A(2; 1; -3)$, $B(3; 2; -1)$ và mặt phẳng (Q) có phương trình (Q): $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (Q).
- Tìm tọa độ điểm I thuộc (Q) sao cho I, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 5. Cho điểm $A(2; -2; -4)$.

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và chứa trục Ox.
- Tìm điểm B thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\triangle OAB$ đều.

Ví dụ 6. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau:

- Đi qua điểm $G(1; 2; 3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm $\triangle ABC$.
- Đi qua điểm $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm $\triangle ABC$.
- Đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ cắt chiều dương của các trục tọa độ tại ba điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

DẠNG 3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là: (P): $x - 3y - 3z + 5 = 0$,

$$(Q): (m^2 + m + 1)x - 3y + (m + 3)z + 1 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì:

- Hai mặt phẳng đó song song ?
- Hai mặt phẳng đó trùng nhau ?
- Hai mặt phẳng đó cắt nhau ?
- Hai mặt phẳng đó vuông góc ?

Ví dụ 2. Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) lần lượt có phương trình là: $(P_1): Ax + By + Cz + D = 0$,

$$(P_2): Ax + By + Cz + D' = 0 \text{ với } D \neq D'.$$

- Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .
- Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

Áp dụng với hai mặt phẳng: $(P_1): x + 2y + 2z + 3 = 0$, $(P_2): 2x + 4y + 4z + 1 = 0$.

Chú ý: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) song song với nhau (giả sử có vtcp $\vec{n}(A; B; C)$) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

- Tính khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều (P_1) , (P_2) .
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P_1) , (P_2) và $d((Q), (P_1)) = k \cdot d((Q), (P_2))$.
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
 - Tiếp xúc với (P_2) .
 - Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

Với yêu cầu "Tính khoảng cách d giữa (P_1) và (P_2) " chúng ta sử dụng kết quả: $d = d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2))$, với $M_1 \in (P_1)$.

Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều (P_1) , (P_2) ", chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tính chất): Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng: $(P): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0$. (*)

Bước 2. Lấy các điểm $E_1 \in (P_1)$ và $E_2 \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng AB có trung điểm $E(x_0; y_0; z_0)$.

Để (P) cách đều (P₁) và (P₂) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \underline{D} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D}.$$

Bước 3. Thay $\underline{D}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P).

Cách 2: (Sử dụng phương pháp quỹ tích): Điểm $M(x; y; z) \in (P)$ cần dựng khi: $d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow$ Phương trình (P).

Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P₁), (P₂) và $d((Q), (P_1)) = k.d((Q), (P_2))$ ", chúng ta sử dụng ý tưởng trong cách 2 của yêu cầu (2), cụ thể:

Điểm $M(x; y; z) \in (Q)$ cần dựng khi: $d(M, (P_1)) = k.d(M, (P_2)) \Rightarrow$ Phương trình (Q).

Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P₁) tại điểm M₁ và thỏa mãn điều kiện K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi M₂ là hình chiếu vuông góc của M₁ trên (P₂). Toạ độ của điểm M₂ được xác định bằng cách:

$$\begin{cases} \overline{M_1M_2} \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{M_1M_2} = t.\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 2. Với điều kiện K là:

- Tiếp xúc với (P₂) thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu đường kính M₁M₂.
- Cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn lớn thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu tâm M₂ và bán kính $R = M_1M_2 = d$.

Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P₁) tại điểm M₁ và cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(x; y; z) và bán kính R. Ta lần lượt:

- (S) tiếp xúc với (P₁) tại M₁ khi: $\overline{M_1I} \perp (P_1) \Leftrightarrow \overline{M_1I} = t.\vec{n}$.
- (S) cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi: $r^2 + M_2I^2 = R^2 = M_1I^2 \Rightarrow$ Giá trị t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 2. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1I$.

Ví dụ 3. Cho điểm M₁(2; 1; -3) và hai mặt phẳng (P₁), (P₂) có phương trình:

$$(P_1): x + y + 2z + 3 = 0,$$

$$(P_2): x + (m - 2)y + (m - 1)z - 3m = 0.$$

- Tìm để (P₁) song song với (P₂).
- Với m tìm được ở câu 1) hãy:
 - Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P₁) và (P₂).
 - Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (P₁) và (P₂).
 - Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P₁), (P₂) và $d((Q), (P_1)) = 2d((Q), (P_2))$.
 - Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P₁) tại điểm M₁ và tiếp xúc với (P₂).
 - Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P₁) tại điểm M₁ và cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P₁) tại điểm M₁ và cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = 6\sqrt{2}$.

Chú ý: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P₁) và (P₂) cắt nhau chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

- Tính góc giữa (P₁) và (P₂).
- Viết phương trình giao tuyến (d) của (P₁) và (P₂).
- Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P₁) và (P₂).
- Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và thỏa mãn điều kiện K.
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P₁) tại điểm M₁ và:
 - Tiếp xúc với (P₂).
 - Cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - Cắt (P₂) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

Với yêu cầu "Tính góc giữa (P₁) và (P₂)", chúng ta có ngay:

- (P₁) có vtpT $\vec{n}_1$ (A₁; B₁; C₁) và (P₂) có vtpT là $\vec{n}_2$ (A₂; B₂; C₂).
- Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P₁) và (P₂) ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Lưu ý: Để $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) ", chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases}$. (1)

Bước 2. Lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Lấy điểm $M \in (d)$ và gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì: $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. Từ đó, ta có: (d): $\begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}$.

Cách 2: Lấy hai điểm M và N thuộc (d), ta có: (d): $\begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{Qua } N \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \vec{u} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$.

Cách 3: Đặt $x = f_1(t)$ (hoặc $y = f_2(t)$ hoặc $z = f_3(t)$) ($t \in \mathbb{R}$), ta biến đổi hệ (1) về dạng: $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t), t \in \mathbb{R} \\ z = f_3(t) \end{cases}$.

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Lưu ý: Như vậy, để thực hiện được yêu cầu này chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng trong không gian.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2) ", chúng ta lập luận:
Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn:
 $d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow$ Hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) .

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và thỏa mãn điều kiện K", chúng ta đã được thấy thông qua yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và thỏa mãn điều kiện K" trong dạng toán 2 và sẽ được thấy trong chủ đề về **đường thẳng**.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và thỏa mãn điều kiện K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R.

(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra: $M_1 I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1 I} // \vec{n}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1 I} = t \cdot \vec{n}_1$.

Bước 2. Với điều kiện K là:

a. Tiếp xúc với (P_2) thì: $M_1 I = d(I, (P_2)) \Rightarrow$ Giá trị tham số $t \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Lưu ý: Với giả thiết này chúng ta còn có thể sử dụng phương trình mặt phẳng phân giác (Q_1) , (Q_2) để xác định toạ độ tâm I.

b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì: $I \in (P_2) \Rightarrow$ Giá trị tham số $t \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:

$R^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1 I^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2 \Rightarrow$ Giá trị tham số $t \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1 I$.

Ví dụ 4. Cho điểm $M_1(2; 5; 0)$ và hai mặt phẳng (P_1) , (P_2) có phương trình: $(P_1): 3x - 2y - z + 4 = 0$, $(P_2): x - 3y + 2z - 1 = 0$.

a. Chứng tỏ rằng (P_1) cắt (P_2) theo giao tuyến (d). Tính góc giữa (P_1) , (P_2) và tìm một vtcp của đường thẳng (d).

b. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2) .

c. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và tiếp xúc với (P_2) .

d. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.

e. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{21/2}$.

Chú ý: Với ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) có chứa tham số chúng ta thường gặp thêm câu hỏi "Xác định giá trị của tham số để ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng". Khi đó, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm các vtcp $\vec{n_P}, \vec{n_Q}, \vec{n_R}$ của các mặt phẳng (P), (Q), (R).

Bước 2. Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \vec{n_P} \perp \vec{n_Q} \\ \vec{n_P} \perp \vec{n_R} \\ \vec{n_R} \perp \vec{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 0 \\ \vec{n_P} \cdot \vec{n_R} = 0 \\ \vec{n_R} \cdot \vec{n_Q} = 0 \end{cases}.$$

Bước 3. Tọa độ điểm chung I của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) là nghiệm hệ phương trình tạo bởi (P), (Q), (R).

Ví dụ 5. Cho ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) có phương trình: (P): $x + y + z - 6 = 0$; (Q): $x - 2y + z = 0$;

(R): $kx + (m - 1)y - z + 2 = 0$.

- Xác định giá trị m và k để ba mặt phẳng đó cùng đi qua một đường thẳng.
- Xác định giá trị m và k để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng.

DẠNG 4. Vị trí tương đối của mặt cầu với mặt phẳng

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

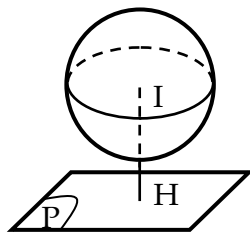
Bước 1. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S). Xác định $d = d(I, (P))$

Bước 2. So sánh d với R để đưa ra kết luận:

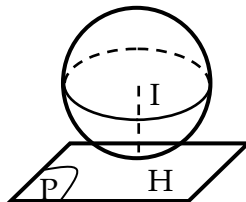
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \emptyset$ (Hình 1 trang bên).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow (P)$ tiếp xúc với (S) tại H (Hình 2 trang bên).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = (C)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) (Hình 3 trang bên).

Và trong trường hợp này nếu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, thì phương

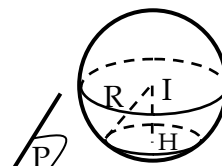
trình đường tròn (C) có phương trình: (C):
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Chú ý: 1. Trong phần này chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới các dạng toán:

- Dạng 1:** Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu và thỏa mãn điều kiện K cho trước.
- Dạng 2:** Viết phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.
- Dạng 3:** Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện K cho trước.
- Dạng 4:** Viết phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

- Trong trường hợp mặt phẳng không cắt mặt cầu, cụ thể với mặt phẳng (P) (có vtcp $\vec{n}(A; B; C)$) không cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:

- a. Tiếp xúc với (S).
- b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
2. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

Ta lần lượt:

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và thỏa mãn điều kiện K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Mặt phẳng (Q) song song với (P) nên có phương trình: $(Q): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0$.

Bước 2. Với điều kiện K là:

- a. (Q) tiếp xúc với (S), suy ra: $d(I, (Q)) = R \Rightarrow$ Giá trị của $\underline{D} \Rightarrow$ Phương trình (Q).
- b. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
 $I \in (Q) \Rightarrow$ Giá trị của $\underline{D} \Rightarrow$ Phương trình (Q).
- c. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r, suy ra:

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D} \\ \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất", chúng ta thấy ngay đó là đường thẳng đi qua I và có vtcp $\vec{n}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm tọa độ điểm I' đối xứng với I qua (P).

Bước 2. Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S)", các em học sinh cần có thêm kiến thức về đường thẳng để trình bày theo các bước:

Bước 1. Gọi (T) là mặt cầu thỏa mãn điều kiện đầu bài và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H (H chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P)), suy ra M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases}.$$

Bước 2. Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P).

Bước 3. Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S).

Bước 4. Viết phương trình mặt cầu đường kính MH.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(P): 2x - 3y + 2z - 3 = 0,$$

$$(S): (x - 8)^2 + (y + 8)^2 + (z - 7)^2 = 68.$$

- a. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).
- b. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- c. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- d. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng $r = \sqrt{51}$.
- e. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
- f. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

Chú ý: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtcp $\vec{n}(A; B; C)$) tiếp xúc với mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) tại điểm M chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S).

2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
 - a. Tiếp xúc với (S).
 - b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
3. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt mặt cầu (S) tại điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).

✚ Với yêu cầu "Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S)", chúng ta thấy ngay M chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và thỏa mãn điều kiện K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu (2.a) chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1. Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

Bước 2. Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi: $(Q): \begin{cases} \text{Qua } N \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt mặt cầu (S) tại điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất", chúng ta thấy ngay đường thẳng (d) đi qua hai điểm M và I.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm tọa độ điểm I' đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M.

Bước 2. Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình: $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$, $(S): (x - 3)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$.

- a. Chứng tỏ rằng mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S).
- b. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- c. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- d. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và chia (S) thành hai phần có tỉ số thể tích bằng $\frac{7}{20}$.
- e. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).

Chú ý: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) theo thiết diện là đường tròn (C) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của (C).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
 - a. Tiếp xúc với (S).
 - b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C') có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C')).
3. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

✚ Với yêu cầu "Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của (C)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Bán kính r_C của (C) được xác định bởi $r_C = \sqrt{R^2 - d(I, (P))}$.

Bước 2. Tọa độ tâm của (C) chính là hình chiếu vuông góc M của I trên (P).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và thỏa mãn điều kiện K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng (C)" chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1. Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

Bước 2. Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi: $(Q): \begin{cases} \text{Qua } N \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}$.

✚ Các yêu cầu còn lại được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S).

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình: $(P): x + 2y + 3z - 10 = 0$, $(S): (x - 2)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 56$.

- Chứng tỏ rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Xác định toạ độ tâm M và tính bán kính r của (C).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r.
- Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

11. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Lập phương trình mặt phẳng (P) biết:

- (P) đi qua $A(1;2;3), B(4;-2;-1), C(3;-1;2)$;
- (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC (Với A, C ở câu 1);
- (P) đi qua $M(0;0;1), N(0;2;0)$ và song song với AB;
- (P) đi qua các hình chiếu của A lên các mặt phẳng toạ độ.

Bài 2 Cho hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): x - y + z - 4 = 0$ & $(\beta): 3x - y + z - 1 = 0$.

Lập phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ và mặt phẳng (P)

- Qua điểm $A(1;8;2)$.
- Vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 8y + z + 2 = 0$.
- Tạo với $(R): x + 2y - 2z + 1 = 0$ góc φ với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{33}}$.

Bài 3 Lập phương trình mặt phẳng (α) , biết:

- (α) đi qua $M(2;3;1)$ và song song với mp $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$;
- (α) đi qua $A(2;1;1), B(-1;-2;-3)$ và (α) vuông góc với $(\beta): x + y + z = 0$;
- (α) chứa trục Ox và vuông góc với $(Q): 2x + 3y - z + 2 = 0$.
- (α) qua ba điểm $A(2;8;5), B(18;14;0), C(12;8;3)$.
- (α) là mặt phẳng trung trực của EF với $E(5;2;7), F(1;8;1)$.
- (α) qua $D(2;3;5)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) .
- (α) qua $G(1;-3;2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): x + 2y - 5z + 1 = 0, (\gamma): 2x - 3y - z + 4 = 0$.
- (α) qua các hình chiếu của điểm $H(-2;1;5)$ trên các trục toạ độ.

Bài 4. Lập phương trình của (P) trong các trường hợp sau:

- (P) đi qua $A(1;2;1)$ và song song với $(Q): x + y + 3z - 1 = 0$;
- (P) đi qua $M(0;1;2), N(0;1;1), E(2;0;0)$;
- (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN (M, N ở ý 2);
- (P) đi qua các hình chiếu của $A(1;2;3)$ lên các trục toạ độ;
- (P) đi qua $B(1;2;0), C(0;2;0)$ và vuông góc với $(R): x + y + z + 1 = 0$;
- (P) đi qua $D(-1;2;3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2 = 0; (\beta): y - z - 1 = 0$.

Bài 5 Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(3;0;0), B(1;2;1), C(2;-1;2)$.

- Lập phương trình mặt phẳng qua A, B và cắt trục Oz tại điểm M sao cho diện tích tam giác MAB bằng $\frac{9}{2}$ (đvdt).
- Lập phương trình mặt phẳng qua C, A và cắt trục Oy tại điểm N sao cho thể tích khối tứ diện ABCN bằng 12 (đvtt).
- Lập phương trình mặt phẳng (α) qua ba điểm B, C và tâm mặt cầu nội tiếp hình tứ diện OABC.

Bài 6 Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(1;2;3), B(-2;3;-1), C(0;1;1), D(-4;-3;5)$. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết:

- (α) đi qua A và chứa Ox
- (α) đi qua A, B và cách đều hai điểm C, D.

Bài 7 Lập phương trình mặt phẳng (α) , biết:

- (α) đi qua $A(-1;1;1), B(3;0;2)$ và khoảng cách từ $C(1;0;-2)$ đến (α) bằng 2;
- (α) cách đều hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0, (Q): x - 2y + 2z - 4 = 0$
- (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) , đồng thời (α) vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 3x + 2y - z + 5 = 0$.

Bài 8 Lập phương trình (P) biết (P) :

- Song song với $(Q): 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ và khoảng cách từ O đến (P) bằng 5.
- Đi qua giao tuyến của hai mp $(\alpha): x - 3z - 2 = 0; (\beta): y - 2z + 1 = 0$, khoảng cách từ $M\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ đến (P) bằng $\frac{7}{6\sqrt{3}}$.

Bài 9 Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

- (α) đi qua $A(1;0;2), B(2;-3;3)$ và tạo với mặt phẳng $(\beta): 4x + y + z - 3 = 0$ một góc 60° .
- (α) đi qua $C(2;-3;5)$, vuông góc với $(P): x - 5y - z + 1 = 0$ và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x + 2y + z - 3 = 0$ góc 45° .

Bài 10 Cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0$ và ba điểm $A(1;2;-1), B(0;1;2), C(-1;-1;0)$.

- Tìm điểm $M \in Ox$ sao cho $d(M, (P)) = 3$.
- Tìm điểm $N \in Oy$ sao cho điểm N cách đều mặt phẳng (P) và điểm A .
- Tìm điểm $K \in (P)$ sao cho $KB = KC$ và $KA = \frac{3}{2}$.
- Tìm điểm $H \in (P)$ sao cho $HA = HB = HC$.

Bài 11

- Tìm m, n để 3 mặt phẳng sau cùng đi qua một đường thẳng:

$(P): x + my + nz - 2 = 0, (Q): x + y - 3z + 1 = 0$ và $(R): 2x + 3y + z - 1 = 0$. Khi đó hãy viết phương trình mặt phẳng

(α) đi qua đường thẳng chung đó và tạo với (P) một góc φ sao cho $\cos \varphi = \frac{23}{\sqrt{679}}$.

- Cho ba mặt phẳng: $(\alpha_1): x + y + z - 3 = 0; (\alpha_2): 2x + 3y + 4z - 1 = 0$ và $(\alpha_3): x - 2y + 2z + 4 = 0$.

- Chứng minh các cặp mp (α_1) và $(\alpha_2); (\alpha_1)$ và (α_3) cắt nhau;
 - Viết phương trình (P) đi qua $A(1;0;1)$ và giao tuyến của (α_1) và (α_2) ;
 - Viết phương trình (Q) đi qua giao tuyến của hai mp (α_1) và (α_2) và đồng thời vuông góc với mp (α_3) .
- Cho ba mặt phẳng $(P): (4-a)x - (a+5)y + az + a = 0$ và $(Q): 2x + 3y + bz + 5 = 0; (R): 3x + cy + a(c-a)z + c = 0$.
 - Biện luận vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
 - Tìm a, c để (P) song song với (R) .
 - Tìm a, c để (P) qua điểm $A(1; 3; 2)$ và (P) vuông góc với (R) .

Bài 12 Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

- (α) qua hai điểm $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$ và vuông góc với $(P): 2x - y - z + 1 = 0$.
- (α) cách đều hai mặt phẳng $(\beta): x + 2y - 2z + 2 = 0, (\gamma): 2x + 2y + z + 3 = 0$.
- (α) qua hai điểm $C(-1;0;2), D(1;-2;3)$ và khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) là 2.
- (α) đi qua $E(0; 1; 1)$ và $d(A, (\alpha)) = 2; d(B, (\alpha)) = \frac{11}{7}$, trong đó $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$.
- Qua hai điểm $A(1;2;3), B(5;-2;3)$ và (α) tạo với mặt phẳng (β) góc 45° , với $(\beta): 4x + y - z - 2 = 0$.
- Qua $C(1;-1;1)$, (α) tạo với mặt phẳng $(\gamma): x - y + 2 = 0$ góc 60° đồng thời $d(O, (\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài 13 Lập phương trình mặt phẳng (α) biết (α)

- Cách đều hai mặt phẳng $(\alpha_1): 5x + 2y + 7z + 8 = 0, (\alpha_2): 5x + 2y + 7z + 60 = 0$.
- Song song với $(\alpha_3): 6x - 3y - 2z + 1 = 0$ và khoảng cách từ $A(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng (α) là 1.
- Qua hai điểm $B(-5;0;-3), C(2;-5;0)$ đồng thời (α) cách đều hai điểm $M(1;-2;-6)$ và $N(-1;-4;2)$.

4. Qua $D(1; -3; 1)$, vuông góc với mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 4 = 0$ và $d(E, (\alpha)) = 3$, với $E(5; 2; 3)$.

5. Qua $F(4; 2; 1)$ và $d(I, (\alpha)) = \frac{7}{3}$, $d(J, (\alpha)) = 1$ trong đó $I(1; -1; 2)$ và $J(3; 4; 1)$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Vấn đề 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Câu 115. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n} = (-1; 0; -1)$. B. $\vec{n} = (3; -1; 2)$.
C. $\vec{n} = (3; -1; 0)$. D. $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\begin{cases} \vec{a} \parallel (P) \\ \vec{b} \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vector pháp tuyến của (P) .
B. $\begin{cases} \vec{a} \parallel (P), \vec{b} \parallel (P) \\ \vec{a} = k\vec{b}, k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vector pháp tuyến của (P) .
C. $\begin{cases} \vec{a} \parallel (P), \vec{b} \parallel (P) \\ \vec{a} = k\vec{b}, k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k[\vec{a}, \vec{b}]$ là một vector pháp tuyến của (P) .
D. $\begin{cases} \vec{a} \parallel (P), \vec{b} \parallel (P) \\ \vec{a} \neq k\vec{b}, k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vector pháp tuyến của (P) .

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Nếu $D = 0$ thì (α) song song với mặt phẳng (Oyz) .
B. Nếu $D = 0$ thì (α) đi qua gốc tọa độ.
C. Nếu $\begin{cases} BC \neq 0 \\ A = D = 0 \end{cases}$ thì (α) song song với trục Ox .
D. Nếu $\begin{cases} BC \neq 0 \\ A = D = 0 \end{cases}$ thì (α) chứa trục Oy .

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(Q): 2x - y + 5z - 15 = 0$ và điểm $E(1; 2; -3)$. Mặt phẳng (P) qua E và song song với (Q) có phương trình là:

- A. $(P): x + 2y - 3z + 15 = 0$ B. $(P): x + 2y - 3z - 15 = 0$
C. $(P): 2x - y + 5z + 15 = 0$ D. $(P): 2x - y + 5z - 15 = 0$

Câu 119. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

- A. $(P): x + y + 2z - 3 = 0$ B. $(P): x + y + 2z - 6 = 0$.
C. $(P): x + 3y + 4z - 7 = 0$ D. $(P): x + 3y + 4z - 26 = 0$.

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua điểm $G(1; 1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là:

- A. $(P): x + y + z - 3 = 0$ B. $(P): x + y + z = 0$
C. $(P): x - y + z = 0$ D. $(P): x + y - z - 3 = 0$

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(0; -2; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC ?

- A. $x - 2y - 5z + 5 = 0$ B. $x - 2y - 5z = 0$
C. $x - 2y - 5z - 5 = 0$ D. $2x - y + 5z - 5 = 0$

Câu 122. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 1; -2)$ và $B(5; 9; 3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

- A. $2x + 6y - 5z + 40 = 0$ B. $x + 8y - 5z - 41 = 0$
C. $x - 8y - 5z - 35 = 0$ D. $x + 8y + 5z - 47 = 0$

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y - 7z + 3 = 0$ và điểm $I(1; -1; 2)$. Phương trình mặt phẳng (β) đối xứng với (α) qua I là:

- A. $(\beta): 4x - 3y - 7z - 3 = 0$ B. $(\beta): 4x - 3y - 7z + 11 = 0$
C. $(\beta): 4x - 3y - 7z - 11 = 0$ D. $(\beta): 4x - 3y - 7z + 5 = 0$

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$ và $C(2;0;2)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình :

- A. $3x - 3y + z - 14 = 0$ B. $3x + 3y + z - 8 = 0$
C. $3x - 2y + z - 8 = 0$ D. $2x + 3y - z + 8 = 0$

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) chứa trục Oz và đi qua điểm $P(2;-3;5)$ có phương trình là:

- A. $(\alpha): 2x + 3y = 0$ B. $(\alpha): 2x - 3y = 0$
C. $(\alpha): 3x + 2y = 0$ D. $(\alpha): y + 2z = 0$

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-1;5)$ và $N(0;0;1)$. Mặt phẳng (α) chứa M, N và song song với trục Oy có phương trình là:

- A. $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$ B. $(\alpha): x - 4z + 2 = 0$
C. $(\alpha): 2x + z - 3 = 0$ D. $(\alpha): x + 4z - 1 = 0$

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và song song với giá của hai vector $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (3;0;5)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $(\alpha): -5x + 2y + 3z + 3 = 0$
B. $(\alpha): 5x - 2y - 3z - 21 = 0$
C. $(\alpha): 10x - 4y - 6z + 21 = 0$
D. $(\alpha): 5x - 2y - 3z + 21 = 0$

Câu 128. Trong không gian với hệ tọa độ mặt phẳng (α) đi qua $A(2;-1;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ và $(Q): y = 0$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $(\alpha): 2x + y - 4 = 0$ B. $(\alpha): x + 2z - 4 = 0$
C. $(\alpha): x + 2y + z = 0$ D. $(\alpha): 2x - y + z = 0$

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $P(2;0;-1)$, $Q(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 5 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua

P, Q và vuông góc với (P) , phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $(\alpha): -7x + 11y + z - 3 = 0$ B. $(\alpha): 7x - 11y + z - 1 = 0$
C. $(\alpha): -7x + 11y + z + 15 = 0$ D. $(\alpha): 7x - 11y - z + 1 = 0$

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $M(8;0;0)$, $N(0;-2;0)$ và $P(0;0;4)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $(\alpha): \frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$ B. $(\alpha): \frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$
C. $(\alpha): x - 4y + 2z = 0$ D. $(\alpha): x - 4y + 2z - 8 = 0$

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-3;2)$. Hình chiếu vuông góc của A lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự lần lượt là M, N, P . Phương trình mặt phẳng (MNP) là:

- A. $4x - 3y + 2z - 5 = 0$ B. $3x - 4y + 6z - 12 = 0$
C. $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ D. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} + 1 = 0$

Câu 132. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt trục Oz tại điểm có cao độ bằng 2 và song song với mặt phẳng (Oxy) . Phương trình của mặt phẳng (P) là:

- A. $(P): z - 2 = 0$ B. $(P): x - 2 = 0$
C. $(P): y + z - 2 = 0$ D. $(P): x - y - 2 = 0$

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua G , cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $(\alpha): 2x + 3y + 6z - 18 = 0$ B. $(\alpha): 3x + 2y + 6z - 18 = 0$
C. $(\alpha): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$ D. $(\alpha): 6x + 3y + 3z - 18 = 0$

Câu 134. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua H , cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $(\alpha): 2x + y + z - 6 = 0$ B. $(\alpha): x + 2y + z - 6 = 0$ C. $(\alpha): x + y + 2z - 6 = 0$ D. $(\alpha): 2x + y + z + 6 = 0$	A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2}{9}$
Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (SBH): A. $x + 5y - 7z - 15 = 0$ B. $5x - y + 7z + 15 = 0$ C. $7x + 5y + z - 15 = 0$ D. $x - 7y + 5z + 15 = 0$	Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3,-2,-2)$, $B(3,2,0)$, $C(0,2,1)$ và $D(-1,1,2)$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có bán kính bằng: A. 9 B. 5 C. $\sqrt{14}$ D. $\sqrt{13}$
Vấn đề 2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG Câu 136. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P). A. $d = \frac{5}{9}$. B. $d = \frac{5}{29}$. C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.	Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - 3z + 6 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 25$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng: A. $r = 6$ B. $r = 5$ C. $r = \sqrt{6}$ D. $r = \sqrt{5}$
Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;-1)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH. A. 55. B. $\frac{11}{5}$. C. $\frac{11}{25}$. D. $\frac{22}{5}$.	Câu 143. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$? A. $x + y + z + \sqrt{3} = 0$ B. $2x + 2y - z + 12 = 0$ C. $4x - 3y - z - 4\sqrt{26} = 0$ D. $3x - 4y + 5z - 17 + 20\sqrt{2} = 0$
Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C. A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.	Câu 144. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S). A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$. B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$. C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$. D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.
Câu 139. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (P) là: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4	Câu 145. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 2z + 15 = 0$. Khoảng cách ngắn nhất giữa điểm M trên (S) và điểm N trên (P) là: A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của (S) bằng:	

Câu 146. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x - y + z = 0$ và $2x - y + z - 7 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng:

- A. 7. B. $6\sqrt{7}$. C. $7\sqrt{6}$. D. $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với mặt phẳng (α) . Tính khoảng cách giữa (α) và (β) .

- A. $\frac{9}{14}$. B. $\frac{9}{\sqrt{14}}$. C. $\frac{3}{14}$. D. $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Vấn đề 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z + 20 = 0$ và $(Q): 4x - 13y - 6z + 40 = 0$. Vị trí tương đối của (P) và (Q) là:

- A. Song song. B. Trùng nhau.
C. Cắt nhưng không vuông góc. D. Vuông góc.

Câu 149. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 14 = 0$ và $(Q): -x - 2y - 2z - 16 = 0$. Vị trí tương đối của (P) và (Q) là:

- A. Song song. B. Trùng nhau.
C. Cắt nhưng không vuông góc. D. Vuông góc.

Câu 150. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp mặt phẳng nào sau đây song song với nhau?

- A. $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ và $(Q): -4x + 2y - 2z + 10 = 0$.
B. $(R): x - y + z - 3 = 0$ và $(S): 2x - 2y + 2z + 6 = 0$.
C. $(T): x - y + z = 0$ và $(U): \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$.
D. $(X): 3x - y + 2z - 3 = 0$ và $(Y): 6z - 2y - 6 = 0$.

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$, $(\beta): x + y - z + 2 = 0$ và $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $(\alpha) \perp (\beta)$ B. $(\gamma) \perp (\beta)$ C. $(\alpha) \parallel (\beta)$ D. $(\alpha) \perp (\gamma)$

Câu 152. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y - 6z - 5 = 0$, $(Q): x + 2y - 3z = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) .
B. Mặt phẳng (Q) không đi qua A và song song với (P) .
C. Mặt phẳng (Q) đi qua A và không song song với (P) .
D. Mặt phẳng (Q) không đi qua A và không song song với (P) .

Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): (2m-1)x + m(1-2m)y + (2m-4)z + 14 = 0$. Để (P) và (Q) vuông góc với nhau khi m ?

- A. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$ B. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$
C. $m = 2$ D. $m = \frac{3}{2}$

Câu 154. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - y + nz - 3 = 0$ và $(\beta): 2x + my + 2z + 6 = 0$. Với giá trị nào sau đây của m, n thì (α) song song với (β) ?

- A. $m = -2$ và $n = 1$ B. $m = 1$ và $n = -2$
C. $m = -\frac{1}{2}$ và $n = 1$ D. $m = 1$ và $n = -\frac{1}{2}$

Câu 155. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 2; 2)$, $B(2; 2; -2)$ và vector $\vec{v} = (2; -1; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AB và song song với vector $\vec{v}$. Xác định m, n để mặt phẳng $(Q): 4x + my + 5z + 1 - n = 0$ trùng với (P) .

- A. $m = 23, n = 45$. B. $m = -23, n = 45$.
C. $m = 45, n = 23$. D. $m = 45, n = -23$.

Câu 156. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và

$(\beta): (m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó cắt nhau? A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq \frac{1}{2}$.	C. (P) tiếp xúc với (S) . D. (P) cắt (S) .
Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y + 7z - 7 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ? A. Trục Oz cắt (α) tại $M(0;0;1)$. B. Trục Oz chứa trong mặt phẳng (α) . C. Trục Oz song song với (α) . D. Trục Oz vuông góc với (α) .	Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y + 2z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 14$. Vị trí tương đối của (P) và (S) là: A. (P) đi qua tâm của (S) . B. (P) không cắt (S) . C. (P) tiếp xúc với (S) . D. (P) cắt (S) .
Câu 158. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2y + z = 0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau: A. $(\alpha) \parallel Ox$ B. $(\alpha) \parallel (yOz)$ C. $(\alpha) \parallel Oy$ D. $(\alpha) \supset Ox$	Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Mặt phẳng nào sau đây cắt mặt cầu (S) ? A. $(P_1): x - y + z - 2 = 0$ B. $(P_2): x + y + z + 2 = 0$ C. $(P_3): x + y - z - 2 = 0$ D. $(P_4): x + y + z - 2 = 0$
Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây cắt các trục tọa độ? A. $(P): 3x - 2y + 6z - 6 = 0$ B. $(Q): x + 2 = 0$ C. $(R): x + 2z - 2 = 0$ D. $(S): y - 3z + 3 = 0$	Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) ? A. $(\alpha): 6x + 2y + 3z = 0$ B. $(\alpha): 2x + 3y + 6z - 5 = 0$ C. $(\alpha): 6x + 2y + 3z - 55 = 0$ D. $(\alpha): x + 2y + 2z - 7 = 0$
Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;6;-3)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x - 2 = 0$, $(\beta): y - 6 = 0$, $(\gamma): z + 3 = 0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau: A. (α) đi qua I B. $(\gamma) \parallel (Oz)$ C. $(\beta) \parallel (xOz)$ D. $(\alpha) \perp (Oz)$	Câu 166. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 4 = 0$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) và song song với (α) . Phương trình của mặt phẳng (P) là: A. $(P): 2x - y + 2z + 4 = 0$ B. $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$ C. $(P): 2x - y + 2z - 4 = 0$ D. $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$
Câu 161. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 36$. Vị trí tương đối của (P) và (S) là: A. (P) đi qua tâm của (S) . B. (P) không cắt (S) . C. (P) tiếp xúc với (S) . D. (P) cắt (S) .	Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(3;4;0)$ thuộc
Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 24 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Vị trí tương đối của (P) và (S) là: A. (P) đi qua tâm của (S) . B. (P) không cắt (S) .	

(S). Phương trình mặt phẳng tiếp diện với (S) tại A là: A. $2x - 2y - z + 2 = 0$ B. $2x - 2y + z + 2 = 0$ C. $2x + 2y + z - 14 = 0$ D. $x + y + z - 7 = 0$	(P) và mặt phẳng (Q) bằng: A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
Câu 168. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 3$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x + (m-4)y - 3mz + 2m - 8 = 0.$ Với giá trị nào của m thì (α) tiếp xúc với (S)? A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. $m = 2$	Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là: A. $m = \pm \frac{12}{5}$ B. $m = \pm \frac{2}{5}$ C. $m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$ D. $m = \pm \frac{5}{2}$
Vấn đề 4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°	Vấn đề 5. TÌM ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC Câu 175. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên trục Oy điểm M cách mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 2 = 0$ một khoảng bằng 4. A. $M(0;6;0)$ hoặc $M(0;-6;0)$. B. $M(0;7;0)$ hoặc $M(0;-5;0)$. C. $M(0;4;0)$ hoặc $M(0;-4;0)$. D. $M(0;3;0)$ hoặc $M(0;-3;0)$.
Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 9 = 0$ và $(Q): x - y - 6 = 0$. Số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng bằng: A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°	Câu 176. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Điểm M nằm trên trục Oy cách đều (P) và (Q) là: A. $M(0;2;0)$. B. $M(0;3;0)$. C. $M(0;-3;0)$. D. $M(0;-2;0)$
Câu 171. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;2;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;\sqrt{2})$ và $D(0;-2;0)$. Số đo góc của hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là: A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°	Câu 177. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z - 17 = 0$. A. $M(0;0;0)$. B. $M(0;0;1)$. C. $M(0;0;3)$. D. $M(0;0;2)$.
Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng: A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$	Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm E thuộc mặt phẳng (Oxy), có hoành độ bằng 1, tung độ nguyên và cách đều hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x - y - z + 2 = 0$. Tọa độ của E là: A. $E(1;4;0)$. B. $E(1;-4;0)$. C. $E(1;0;4)$. D. $E(1;0;-4)$.
Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y - 6 = 0$ và (Q). Biết rằng điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q). Số đo góc giữa mặt phẳng	Câu 179. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$, điểm $I(1;2;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d , N thuộc (S) sao cho I là trung điểm MN .

A. $\begin{bmatrix} N(3;2;1) \\ N(3;6;-1) \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} N(-3;-2;1) \\ N(3;6;-1) \end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix} N(-3;2;1) \\ N(3;6;1) \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} N(-3;-2;1) \\ N(3;6;1) \end{bmatrix}$.

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;4)$, $B'(2;-5;-5)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(2;1;1)$. B. $M(2;-1;1)$. C. $M(1;2;1)$. D. $M(-1;1;2)$.

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$. Điểm M thuộc (P) thỏa mãn $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất có tọa độ:

A. $M(-1;-3;4)$. B. $M(2;-1;1)$.

C. $M(1;2;1)$. D. $M(-1;1;2)$.

Câu 182. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4;-1;0)$. B. $M(-1;-4;0)$.

C. $M(4;1;0)$. D. $M(1;-4;0)$.

Câu 183. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4;-1;0)$. B. $M(4;-1;0)$.

C. $M(4;1;0)$. D. $M(1;-4;0)$.

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ có giá trị lớn nhất.

A. $M(-6;-18;12)$. B. $M(6;18;12)$.

C. $M(6;-18;12)$. D. $M(-6;18;+12)$.

Đ2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Dạng toán 1: Phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

là phương trình của một mặt phẳng khi và chỉ khi $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

F *Chú ý:* Đi kèm với họ mặt phẳng (P_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số mặt phẳng của họ (P_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ mặt phẳng (P_m) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Thí dụ 1. Cho phương trình:

$$mx + m(m-1)y - (m^2-1)z - 1 = 0. \quad (1)$$

- Tìm điều kiện của m để phương trình (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ (P_m).
- Tìm điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua.
- Giả sử (P_m) với $m \neq 0, \pm 1$ cắt các trục toạ độ tại A, B, C.
 - Tính thể tích tứ diện OABC.
 - Tìm m để ΔABC nhận điểm $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ làm trọng tâm.

 *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= m^2 + m^2(m-1)^2 + (m^2-1)^2 \\ &= m^2 + (m-1)^2[m^2 + (m+1)^2] > 0, \text{ mọi } m. \end{aligned}$$

Vậy, với mọi m phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

b. Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (P_m) luôn đi qua, ta có:

$$mx_0 + m(m-1)y_0 - (m^2-1)z_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow m^2(y_0 - z_0) + m(x_0 - y_0) + z_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 - z_0 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \\ z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 1 \end{cases}.$$

Vậy, họ (P_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1; 1; 1)$.

c. Ta có ngay toạ độ của các điểm A, B, C là:

$$A\left(\frac{1}{m}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{1}{m(m-1)}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{1}{1-m^2}\right).$$

Khi đó:

- Thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$\begin{aligned} V_{OABC} &= \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot \left|\frac{1}{m}\right| \cdot \left|\frac{1}{m(m-1)}\right| \cdot \left|\frac{1}{1-m^2}\right| \\ &= \frac{1}{6m^2(m-1)^2|m+1|}. \end{aligned}$$

- Điểm $G\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{18}; -\frac{1}{24}\right)$ là trọng tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{1-m^2} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m(m-1) = 6 \\ 1-m^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

F Nhận xét: Như vậy, để tìm điểm cố định mà họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định của họ (P_m) , khi đó $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \forall m$.

Bước 2: Nhóm theo bậc của m rồi cho các hệ số bằng 0, từ đó nhận được $(x_0; y_0; z_0)$.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 2. Cho phương trình:

$$(a+b)x + ay + bz - 3(a+b) = 0.$$

- Tìm điều kiện của a, b để phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng, gọi là họ $(P_{a,b})$.
- Giả sử $(P_{a,b})$ với $a, b \neq 0$ cắt các trục tọa độ tại A, B, C . Tìm a, b để:
 - ΔABC nhận điểm $G\left(1; 4; \frac{4}{3}\right)$ làm trọng tâm.
 - ΔABC nhận điểm $H(2; 1; 1)$ làm trực tâm.
 - Tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất với $a > 0, b > 0$.
- Chứng tỏ rằng họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định.

 **Giải**

- Xét điều kiện:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0.$$

Vậy, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ phương trình đã cho là phương trình của một mặt phẳng.

- Với $a, b \neq 0$ ta có ngay :

$$A\left(3; 0; 0\right), B\left(0; \frac{3(a+b)}{a}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3(a+b)}{b}\right).$$

Khi đó:

- Điểm $G\left(1; 4; \frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{a} = 4 \\ \frac{a+b}{b} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ 3a = b \end{cases} \Leftrightarrow b = 3a.$$

Vậy, với $b = 3a \neq 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- Điểm $H(2; 1; 1)$ là trực tâm ΔABC khi:

$$\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp AC \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a-b=0 \\ 2(a+b) + a + b - 3(a+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b.$$

Vậy, với $a = b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- Thể tích tứ diện OABC được cho bởi:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6} OA.OB.OC = \frac{9}{2} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab} \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{2ab}{ab} = 9.$$

Vậy, ta được $(V_{O.ABC})_{\min} = 9$, đạt được khi $a = b$.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Viết lại phương trình mặt phẳng $(P_{a,b})$ dưới dạng:

$$(P_{a,b}): a(x + y - 3) + b(x + z - 3) = 0.$$

Từ đó, suy ra họ $(P_{a,b})$ luôn chứa các điểm có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) chính là phương trình giao tuyến (d) của hai mặt phẳng cố định:

$$(P_1): x + z - 3 = 0 \text{ và } (P_2): x + y - 3 = 0.$$

Vậy, họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d).

Cách 2: Nhận xét rằng họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ luôn đi qua hai điểm $M(1; 2; 2)$ và $N(2; 1; 1)$ nên họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d) được cho bởi:

$$\begin{aligned} (d): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 2; 2) \\ \text{Qua } N(2; 1; 1) \end{cases} &\Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 2; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{MN}(1; -1; -1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases} \end{aligned}$$

Cách 3: Nhận xét rằng họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ luôn đi qua điểm $M(1; 2; 2)$ và có vtpt $\vec{n}(a + b; a; b)$, suy ra:

$$\vec{n}(a + b; a; b) \cdot \vec{u}(1; -1; -1) = a + b - a - b = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}, \forall a, b \neq 0.$$

Vậy, họ $(P_{a,b})$ luôn chứa một đường thẳng cố định (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 2; 2) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1; -1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

F Nhận xét: Như vậy, để tìm đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng $(P_{a,b})$ chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng và các em học sinh cần nhớ lại rằng *một đường thẳng (d) được hoàn toàn xác định khi biết nó:*

- Là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau – Ứng với cách 1.
- Đi qua hai điểm phân biệt M, N – Ứng với cách 2.
- Đi qua một điểm M và có phương cố định – Ứng với cách 3.

Và câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra đối với các cách 2, cách 3 là việc xác định tọa độ điểm M, N và vector $\vec{u}$. Câu trả lời như sau:

- Các điểm M, N có tọa độ thỏa mãn hệ (*) và khi biết được tọa độ của cả M, N thì suy ra được tọa độ của vector $\vec{u}$.
- Tọa độ của vector $\vec{u}$ có thể được xác định độc lập với M, N dựa trên nhận xét:

$$\begin{cases} (d) \subset (P_1) \\ (d) \subset (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_1 - \text{là vtpt của } (P_1) \\ \vec{u} \perp \vec{n}_2 - \text{là vtpt của } (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2].$$

Dạng toán 2: Viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp

Để viết phương trình mặt phẳng (P) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (P)$ và vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$ của (P) .

Bước 2: Khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(n_1; n_2; n_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp quỹ tích.

F Chú ý: Chúng ta có các kết quả:

- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, luôn có dạng:
 $(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$, luôn có dạng:
 $(P): n_1x + n_2y + n_3z + D = 0$
 Để xác định (P) , ta cần đi xác định D .
- Mặt phẳng (P) song song với $(Q): Ax + By + Cz + D = 0$, luôn có dạng:
 $(P): Ax + By + Cz + E = 0$
 Để xác định (P) , ta cần đi xác định E .
- Phương trình mặt phẳng theo các đoạn chắn, đó là mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ có phương trình:
 $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$
- Với phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm không thẳng hàng M, N, P chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) , ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}].$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì M, N, P thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hệ ba phương trình với bốn ẩn A, B, C, D .

Biểu diễn ba ẩn theo một ẩn còn lại, rồi thay vào (1) chúng ta nhận được phương trình mặt phẳng (P) .

Thí dụ 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết:

- (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1; 1; 2)$ và $B(1; -3; 2)$.
- (P) đi qua điểm $C(1; 2; -3)$ và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình $x - 2y + 3z + 1 = 0$.
- (P) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$ và có cặp vtcp $\vec{a}(2; -1; 1)$, $\vec{b}(2; -1; 3)$.
- (P) đi qua điểm $E(3; 1; 2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng:
 $(R_1): 2x + y + 2z - 10 = 0$ và $(R_2): 3x + 2y + z + 8 = 0$.

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1 (Sử dụng công thức): Gọi I là trung điểm của đoạn AB , suy ra $I(1; -1; 2)$.

Khi đó, mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua I} \\ (P) \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua I}(1; -1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB}(0; -4; 0) \text{ chọn } (0; 1; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 0.(x - 1) + 1.(y + 1) + 0.(z - 2) = 0 \Leftrightarrow (P): y + 1 = 0.$$

Cách 2 (Sử dụng phương pháp quỹ tích): Điểm M(x; y; z) thuộc mặt phẳng (P) khi:

$$AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta lần lượt sử dụng giả thiết:

$$\begin{aligned} \bullet & (P) \text{ đi qua điểm } C(1; 2; -3) \text{ nên có phương trình:} \\ & (P): A(x - 1) + B(y - 2) + C(z + 3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (P): Ax + By + Cz - A - 2B + 3C = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet & (P) \text{ song song với } (Q): x - 2y + 3z + 1 = 0 \text{ nên:} \\ & \frac{A}{1} = \frac{B}{-2} = \frac{C}{3} \neq \frac{-A - 2B + 3C}{1} \Rightarrow \begin{cases} B = -2A \\ C = 3A \end{cases}. \end{aligned} \quad (2)$$

Cách 2: Ta lần lượt sử dụng giả thiết:

$$\begin{aligned} \bullet & (P) \text{ song song với } (Q): x - 2y + 3z + 1 = 0 \text{ nên có phương trình:} \\ & (P): x - 2y + 3z + \underline{D} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet & \text{Điểm } C \text{ thuộc } (P), \text{ suy ra:} \\ & 1 - 2.2 + 3(-3) + \underline{D} = 0 \Leftrightarrow \underline{D} = 12. \end{aligned}$$

Vậy, phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Thay (2) vào (1) rồi thực hiện phép đơn giản biểu thức, ta được phương trình mặt phẳng (P): $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Cách 3: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$\begin{aligned} (P): \begin{cases} \text{qua C} \\ (P) \parallel (Q) \end{cases} & \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua C}(1; 2; -3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; 3) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (P): 1.(x - 1) - 2.(y - 2) + 3.(z + 3) = 0 \Leftrightarrow (P): x - 2y + 3z + 12 = 0. \end{aligned}$$

c. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -4; 0).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua D}(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 2; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (P): (x - 1) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y - 3 = 0.$$

d. Gọi $\vec{n}$, $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (R_1) , (R_2) , ta có:

$$\vec{n}_1(2; 1; 2), \vec{n}_2(3; 2; 1).$$

Vì (P) vuông góc với (R_1) và (R_2) nên nó nhận $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ làm cặp vtcp, từ đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{n}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3; 4; 1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua E}(3; 1; 2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-3; 4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x - 4y - z - 3 = 0.$$

F Nhận xét: Như vậy, qua bài toán:

- Ở câu a), chúng ta nhận được hai phương pháp (có tính minh họa) để viết phương trình mặt phẳng.
- Ở câu b), với ba cách giải đó thì các cách 1 và cách 2 có tính minh họa để các em học sinh hiểu cách khai thác từng giả thiết. Và như vậy, cách 3 luôn là sự lựa chọn khi thực hiện bài thi.
- Câu c), câu d) minh họa việc viết phương trình mặt phẳng khi biết cặp vtcp của nó.

Thí dụ 2. Cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 4)$, $C(3; 0; 5)$.

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B và C.
- Lập phương trình mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp ΔABC làm đường tròn lớn.

 **Giải**

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; -2; -10) \text{ chọn } \vec{n} (4; -1; -5).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1; 2; 3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(4; -1; -5) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 4(x - 1) - (y - 2) - 5(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): 4x - y - 5z + 13 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (1)$$

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} A + 2B + 3C + D = 0 \\ 3A + 5B + 4C + D = 0 \\ 3A + 5C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -4B \\ C = 5B \\ D = -13B \end{cases}.$$

Thay A, B, C vào (1), ta được:

$$(P): -4Bx + By + 5Bz - 13B = 0 \Leftrightarrow (P): 4x - y - 5z + 13 = 0.$$

b. Mặt cầu (S) có tâm $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 4)^2 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x - 3)^2 + y^2 + (z - 5)^2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 36 \\ x - y + z = 5 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 39/7 \\ y = 89/14 \\ z = 81/14 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{39}{7}; \frac{89}{14}; \frac{81}{14}\right).$$

Khi đó, mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Đi qua } A \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{39}{7}; \frac{89}{14}; \frac{81}{14}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{9338}}{14} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{39}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{89}{14}\right)^2 + \left(z - \frac{81}{14}\right)^2 = \frac{667}{14}.$$

F Nhận xét: Như vậy, câu a) của thí dụ trên trên đã minh họa hai phương pháp viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước (kiến thức đã được trình bày trong phần chú ý của bài toán 2).

Thí dụ 3. Cho hai điểm $A(1; -1; 5)$, $B(0; 0; 1)$.

- Tìm điểm M thuộc Oy sao cho ΔMAB cân tại M .
- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A , B và song song với trục Oy .
- Lập phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm A , B và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.

 **Giải**

- a. Với điểm M thuộc Ox thì $M(0; y; 0)$, ta có:

$$\begin{aligned} AM = BM &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (-1)^2 + (y+1)^2 + (-5)^2 = y^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2y = -26 \Leftrightarrow y = -13 \Rightarrow M(0; -13; 0). \end{aligned}$$

Vậy, với $M(0; -13; 0)$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- b. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{AB} \text{ và } \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A(1; -1; 5) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{j}] = (4; 0; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 4x - z + 1 = 0.$$

- c. Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua hai điểm A , B và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn chính là mặt cầu đường kính AB , ta có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \text{ là trung điểm } AB \\ \text{Bán kính } R = \frac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tâm } I \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right) \\ \text{Bán kính } R = \frac{\sqrt{18}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{2}.$$

Thí dụ 4. Cho hai điểm $A(2; 1; -3)$, $B(3; 2; -1)$ và mặt phẳng (Q) có phương trình $(Q): x + 2y + 3z - 4 = 0$.

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A , B và vuông góc với mặt phẳng (Q) .
- Tìm tọa độ điểm I thuộc (Q) sao cho I , A , B thẳng hàng.

 **Giải**

- a. Gọi $\vec{n}$, $\vec{n}_Q$ theo thứ tự là vtpt của (P) và (Q) , ta được $\vec{n}_Q(1; 2; 3)$.

Ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(1; 1; 2) \\ \vec{n} \perp \vec{n}_Q(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] = (-1; -1; 1) \text{ chọn } \vec{n}(1; 1; -1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(2; 1; -3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 2 + y - 1 - (z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P): x + y - z - 6 = 0.$$

- b. Giả sử điểm $I(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Q) , vì vector $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với vector $\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AB}$.
Suy ra, tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2=t \\ y-1=t \\ z+3=2t \\ x+2y+3z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \\ t+2+2(t+1)+3(2t-3)-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=-1 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(3; 2; -1).$$

Thí dụ 5. Cho điểm $A(2; -2; -4)$.

- Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và chứa trục Ox.
- Tìm điểm B thuộc mặt phẳng (P) sao cho ΔOAB đều.

 Giải

a. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O \\ \text{cặp vtcp } \overrightarrow{OA} \text{ và } \vec{i} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \vec{i}] = (0; -4; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 2y - z = 0.$$

b. Giả sử điểm $B(x; y; z)$, ta lần lượt có:

- Điểm $B \in (P)$ nên $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. (1)
- ΔOAB đều, ta được:

$$OA = OB = AB \Leftrightarrow \begin{cases} OB^2 = OA^2 \\ AB^2 = OA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 24 \\ (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 24 \end{cases}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 24 \\ x - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ 2x^2 + (x-3)^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} B_1(1 + \sqrt{6}; -1 - \sqrt{6}; \sqrt{6} - 2) \\ B_2(1 - \sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}; -\sqrt{6} - 2) \end{bmatrix}.$$

Vậy, tồn tại hai điểm B_1 và B_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 6. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau:

- Đi qua điểm $G(1; 2; 3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm ΔABC .
- Đi qua điểm $H(2; 1; 1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm ΔABC .
- Đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ cắt chiều dương của các trục tọa độ tại ba điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

 Giải

a. Với ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Để $G(1; 2; 3)$ là trọng tâm ΔABC , điều kiện là:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow (P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

b. Với ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1)$$

Đề $H(2; 1; 1)$ là trực tâm ΔABC , điều kiện là:

$$\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp AC \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ 2a - c = 0 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = c = 6 \end{cases}.$$

Thay a, b, c vào (1), ta được:

$$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow (P): 2x + y + z - 6 = 0.$$

c. Với ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$, ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Điểm M thuộc (P) nên:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \Leftrightarrow abc \geq 27.$$

Thể tích tứ diện $OABC$, được cho bởi:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot abc \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Vậy, ta được $(V_{OABC})_{\min} = \frac{9}{2}$, đạt được khi:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 3.$$

và khi đó:

$$(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (P): x + y + z - 3 = 0.$$

Dạng toán 3: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Phương pháp

Sử dụng kiến thức trong phần vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

Thí dụ 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là:

$$(P): x - 3y - 3z + 5 = 0,$$

$$(Q): (m^2 + m + 1)x - 3y + (m + 3)z + 1 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì:

- Hai mặt phẳng đó song song ?
- Hai mặt phẳng đó trùng nhau ?
- Hai mặt phẳng đó cắt nhau ?
- Hai mặt phẳng đó vuông góc ?

 **Giải**

a. Để hai mặt phẳng song song với nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{m^2 + m + 1} = \frac{-3}{-3} = \frac{-3}{m + 3} \neq \frac{5}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + 1 = 1 \\ m + 3 = -1 \\ 1 \neq 5 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để hai mặt phẳng song song với nhau

b. Để hai mặt phẳng trùng nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{m^2 + m + 1} = \frac{-3}{-3} = \frac{-3}{m+3} = \frac{5}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + 1 = 1 \\ m + 3 = -1 \\ 1 = 5 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để hai mặt phẳng trùng nhau

c. Từ kết quả của các câu a) và b) suy ra với mọi m hai mặt phẳng (P) và (Q) luôn cắt nhau.

d. Gọi $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$ theo thứ tự là vtp của (P) và (Q) , ta được:

$$\vec{n}_P(1; -3; -3) \text{ và } \vec{n}_Q(m^2 + m + 1; -3; m + 3).$$

Để hai mặt phẳng vuông góc với nhau điều kiện là:

$$\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 1 - 3(-3) - 3(m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ thì hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Thí dụ 2. Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) lần lượt có phương trình là:

$$(P_1): Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(P_2): Ax + By + Cz + D' = 0 \text{ với } D \neq D'.$$

a. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

b. Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

Áp dụng với hai mặt phẳng:

$$(P_1): x + 2y + 2z + 3 = 0, (P_2): 2x + 4y + 4z + 1 = 0.$$

 Giải

a. Nhận xét rằng (P_1) và (P_2) song song với nhau.

Lấy điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P_1) , ta có:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (1)$$

Khi đó:

$$d((P_1), (P_2)) = d(M, (P_2)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b. Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): Ax + By + Cz + E = 0. \quad (2)$$

Để (P) cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) điều kiện là:

$$\frac{|D_1 - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow |D_1 - E| = |D_2 - E|$$

$$\stackrel{D \neq E}{\Leftrightarrow} E = \frac{1}{2}(D_1 + D_2). \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được $(P): Ax + By + Cz + \frac{1}{2}(D_1 + D_2) = 0$.

Áp dụng với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) : Trước tiên ta có:

$$(P_2): x + 2y + 2z + \frac{1}{2} = 0.$$

a. Khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) được cho bởi:

$$d((P_1), (P_2)) = \frac{\left| \frac{1}{2} - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}.$$

b. Ta có thể trình bày theo ba cách sau:

Cách 1: (Sử dụng kết quả trên): Ta có ngay:

$$(P): x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0.$$

Cách 2: (Sử dụng phương pháp quỹ tích): Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Điểm $M(x; y; z) \in (P)$ khi:

$$\begin{aligned} d(M, (P_1)) &= d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + 2y + 2z + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{\left|x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \\ \Leftrightarrow |x + 2y + 2z + 3| &= \left|x + 2y + 2z + \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0. \end{aligned}$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

Cách 3: (Sử dụng tính chất): Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): x + 2y + 2z + D = 0. \quad (*)$$

Lấy các điểm $A(-3; 0; 0) \in (P_1)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng AB có trung điểm $M\left(-\frac{7}{4}; 0; 0\right)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức:

$$-\frac{7}{4} + D = 0 \Leftrightarrow D = \frac{7}{4}.$$

Thay $D = \frac{7}{4}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P): $x + 2y + 2z + \frac{7}{4} = 0$.

F Chú ý: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) song song với nhau (giả sử có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$)

chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính khoảng cách giữa (P_1) và (P_2) .
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều $(P_1), (P_2)$.
3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với $(P_1), (P_2)$ và $d((Q), (P_1)) = k \cdot d((Q), (P_2))$.
4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
 - a. Tiếp xúc với (P_2) .
 - b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

✚ Với yêu cầu "Tính khoảng cách d giữa (P_1) và (P_2) " chúng ta sử dụng kết quả:
 $d = d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2))$, với $M_1 \in (P_1)$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều $(P_1), (P_2)$ ", chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tính chất): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:
 $(P): Ax + By + Cz + \underline{D} = 0. \quad (*)$

Bước 2: Lấy các điểm $E_1 \in (P_1)$ và $E_2 \in (P_2)$, suy ra đoạn thẳng E_1E_2 có trung điểm $E(x_0; y_0; z_0)$.
 Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \underline{D} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị của } \underline{D}.$$

Bước 3: Thay $\underline{D}$ vào (*), ta nhận được phương trình (P).

Cách 2: (Sử dụng phương pháp quỹ tích): Điểm $M(x; y; z) \in (P)$ cần dựng khi:

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Phương trình (P)}.$$

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với $(P_1), (P_2)$ và $d((Q), (P_1)) = k \cdot d((Q), (P_2))$ ", chúng ta sử dụng ý tương trong cách 2 của yêu cầu (2), cụ thể:

Điểm $M(x; y; z) \in (Q)$ cần dựng khi:

$$d(M, (P_1)) = k.d(M, (P_2)) \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và thỏa mãn điều kiện K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2) . Toạ độ của điểm M_2 được xác định bằng cách:

$$\begin{cases} M_1M_2 \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = t.\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

- Tiếp xúc với (P_2) thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu đường kính M_1M_2 .
- Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu tâm M_2 và bán kính $R = M_1M_2 = d$.

- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R. Ta lần lượt:

- (S) tiếp xúc với (P_1) tại M_1 khi:
 $M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t.\vec{n}.$
- (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi:
 $r^2 + M_2I^2 = R^2 = M_1I^2 \Rightarrow$ Giá trị t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1I$.

Thí dụ 3. Cho điểm $M_1(2; 1; -3)$ và hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có phương trình:

$$(P_1): x + y + 2z + 3 = 0,$$

$$(P_2): x + (m - 2)y + (m - 1)z - 3m = 0.$$

- Tìm để (P_1) song song với (P_2) .
- Với m tìm được ở câu 1) hãy:
 - Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .
 - Viết phương trình mặt phẳng song song và cách đều hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .
 - Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với $(P_1), (P_2)$ và $d((Q), (P_1)) = 2d((Q), (P_2))$.
 - Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và tiếp xúc với (P_2) .
 - Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = 6\sqrt{2}$.

 Giải

1. Để hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ song song với nhau điều kiện là:

$$\frac{1}{1} = \frac{m-2}{1} = \frac{m-1}{2} \neq \frac{-3m}{3} \Leftrightarrow m = 3.$$

2. Với $m = 3$ mặt phẳng $(P_2): x + y + 2z - 9 = 0$ và có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$.

- a. Ta có ngay:

$$d((P_1), (P_2)) = d(M_1, (P_2)) = \frac{|2 + 1 + 2(-3) - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{6}.$$

- b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: (Sử dụng tính chất): Mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đã cho sẽ có dạng:

$$(P): x + y + 2z + D = 0. \quad (*)$$

Lấy điểm $N(1; 0; 4) \in (P_2)$, suy ra M_1N có trung điểm $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Để (P) cách đều (P_1) và (P_2) điều kiện là (P) đi qua điểm M, tức là:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + D = 0 \Leftrightarrow D = -3.$$

Thay $D = -3$ vào (*), ta nhận được phương trình (P): $x + y + 2z - 3 = 0$.

Cách 2: (Sử dụng phương pháp quỹ tích): Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm thì điểm $M(x; y; z) \in (P)$ khi:

$$\begin{aligned} d(M, (P_1)) &= d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + y + 2z + 3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|x + y + 2z - 9|}{\sqrt{1+1+4}} \\ \Leftrightarrow |x + y + 2z + 3| &= |x + y + 2z - 9| \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cần tìm.

c. Điểm $M(x; y; z) \in (Q)$ khi:

$$\begin{aligned} d(M, (P_1)) &= 2d(M, (P_2)) \Leftrightarrow \frac{|x + y + 2z + 3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2|x + y + 2z - 9|}{\sqrt{1+1+4}} \\ \Leftrightarrow |x + y + 2z + 3| &= 2|x + y + 2z - 9| \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - 21 = 0 \\ x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn điều kiện đầu bài là:

$$(Q_1): x + y + 2z - 21 = 0 \text{ và } (Q_2): x + y + 2z - 5 = 0.$$

d. Gọi $M_2(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2) , ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} M_1M_2 \perp (P_2) \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{M_1M_2} = t\vec{n} \\ M_2 \in (P_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = t \\ z + 3 = 2t \\ x + y + 2z - 9 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \\ 6t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M_2(4; 3; 1). \end{aligned}$$

Khi đó, mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính M_1M_2 , tức là:

$$\begin{aligned} (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(3; 2; -1) \text{ là trung điểm } M_1M_2 \\ \text{Bán kính } R = \frac{M_1M_2}{2} = \sqrt{6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (S): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6. \end{aligned}$$

e. Gọi $M_2(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2) , theo d) ta có ngay $M_2(4; 3; 1)$.

Khi đó, mặt cầu (S) cần dựng chính là:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } M_2(4; 3; 1) \\ \text{Bán kính } R = M_1M_2 = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 24.$$

f. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R .

Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên (P_2) thì M_2 chính là tâm của đường tròn (C), ta có:

$$\begin{aligned} R^2 - r^2 &= M_2I^2 = |\overline{M_1M_2} - \overline{IM_1}|^2 = (d - R)^2 \Leftrightarrow 2dR = d^2 + r^2 \\ \Leftrightarrow R &= \frac{d^2 + r^2}{2d} = \frac{24 + 72}{4\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} \Rightarrow IM_2 = 2\sqrt{6} = d(I, (P_2)). \quad (*) \end{aligned}$$

Ta lần lượt có:

- (S) tiếp xúc với (P_1) tại M_1 khi:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overline{M_1I} = t\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = t \\ z + 3 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases}.$$

- (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r khi:

$$r^2 + M_2 I^2 = R^2 = M_1 I^2$$

$$\Leftrightarrow (6\sqrt{2})^2 + \left[\frac{|(t+2) + (t+1) + 2(2t-3) - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} \right]^2 = t^2 + t^2 + (2t)^2$$

$$\Leftrightarrow 72 + 6(t-2)^2 = 6t^2 \Leftrightarrow 96 - 24t = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow I(6; 5; 5).$$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(6; 5; 5) \\ \text{Bán kính } R = M_1 I = 4\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 96.$$

F Chú ý: Trong trường hợp hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) cắt nhau chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (P_1) và (P_2) .
2. Viết phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) .
3. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2) .
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và thỏa mãn điều kiện K.
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và:
 - a. Tiếp xúc với (P_2) .
 - b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

✚ Với yêu cầu "Tính góc giữa (P_1) và (P_2) ", chúng ta có ngay:

- (P_1) có vtp $\vec{n}_1 (A_1; B_1; C_1)$ và (P_2) có vtp $\vec{n}_2 (A_2; B_2; C_2)$.
- Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Lưu ý: Để $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình giao tuyến (d) của (P_1) và (P_2) ", chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases} \quad (1)$$

Bước 2: Lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Lấy điểm $M \in (d)$ và gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì:

$$\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2].$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 2: Lấy hai điểm M và N thuộc (d), ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{Qua } N \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \vec{u} = \overrightarrow{MN} \end{cases}.$$

Cách 3: Đặt $x = f_1(t)$ (hoặc $y = f_2(t)$ hoặc $z = f_3(t)$) ($t \in \mathbb{R}$), ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t), t \in \mathbb{R}. \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Lưu ý: Như vậy, để thực hiện được yêu cầu này chúng ta cần có thêm kiến thức về đường thẳng trong không gian.

- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2) ", chúng ta lập luận: Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn: $d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) \Rightarrow$ Hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) .
- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và thoả mãn điều kiện K ", chúng ta đã được thấy thông qua yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và thoả mãn điều kiện K " trong dạng toán 2 và sẽ được thấy trong chủ đề về **đường thẳng**.
- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và thoả mãn điều kiện K ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R .
 (S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overline{M_1I} // \overline{n_1} \Leftrightarrow \overline{M_1I} = t \cdot \overline{n_1}.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. Tiếp xúc với (P_2) thì:

$$M_1I = d(I, (P_2)) \Rightarrow \text{Giá trị tham số } t \Rightarrow \text{Toạ độ tâm } I.$$

Lưu ý: Với giả thiết này chúng ta còn có thể sử dụng phương trình mặt phẳng phân giác $(Q_1), (Q_2)$ để xác định toạ độ tâm I .

b. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn thì:

$$I \in (P_2) \Rightarrow \text{Giá trị tham số } t \Rightarrow \text{Toạ độ tâm } I.$$

c. Cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:

$$R^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1I^2 = d^2(I, (P_2)) + r^2$$

$$\Rightarrow \text{Giá trị tham số } t \Rightarrow \text{Toạ độ tâm } I.$$

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và bán kính $R = M_1I$.

Thí dụ 4. Cho điểm $M_1(2; 5; 0)$ và hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có phương trình:

$$(P_1): 3x - 2y - z + 4 = 0, \quad (P_2): x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

- a. Chứng tỏ rằng (P_1) cắt (P_2) theo giao tuyến (d) . Tính góc giữa $(P_1), (P_2)$ và tìm một vtcp của đường thẳng (d) .
- b. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2) .
- c. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và tiếp xúc với (P_2) .
- d. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- e. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 và cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{21/2}$.

 **Giải**

a. Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ theo thứ tự có vtpt $\overline{n_1}(3; -2; -1), \overline{n_2}(1; -3; 2)$, suy ra $\overline{n_1}$ và $\overline{n_2}$ không cùng phương nên (P_1) cắt (P_2) theo giao tuyến (d) .

Ta lần lượt có:

- Côsin góc α tạo bởi $(P_1), (P_2)$ được cho bởi:

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{|3 \cdot 1 - 2(-3) - 1 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

- Giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Tới đây, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của (d) thì $\vec{u} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}] = (-7; -7; -7)$ chọn $\vec{u}(1; 1; 1)$.

Cách 2: Lấy hai điểm $A(0; 1; 2)$ và $B(1; 2; 3)$ thuộc (d) , thì vtcp của (d) là $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1; 1; 1)$.

Cách 3: Đặt $x = t$, ta biến đổi hệ (1) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 3t - 2y - z + 4 = 0 \\ t - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{u}(1; 1; 1).$$

b. Mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) gồm các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn:
 $d(M, (P_1)) = d(M, (P_2))$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 2y - z + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - 3y + 2z - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z + 5 = 0 \\ 4x - 5y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng $(Q_1): 2x + y - 3z + 5 = 0$ và $(Q_2): 4x - 5y + z + 3 = 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R .

(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} // \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1I} = t \cdot \overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}$$

Tới đây, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: (S) tiếp xúc với (P_2) thì:

$$\begin{aligned} M_1I &= d(I, (P_2)) \Leftrightarrow \sqrt{(3t)^2 + (-2t)^2 + (-t)^2} = \frac{|(3t+2) - 3(-2t+5) + 2(-t) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} \\ \Leftrightarrow 14t^2 &= \frac{|7t - 14|^2}{14} \Leftrightarrow 4t^2 = (t - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = t - 2 \\ 2t = -t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 2/3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta lần lượt có:

- Với $t_1 = -2$ ta được tâm $I_1(-4; 9; 2)$, suy ra mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-4; 9; 2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_1 = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x+4)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 56.$$

- Với $t_2 = \frac{2}{3}$ ta được tâm $I_2\left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$\begin{aligned} (S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_2 = \sqrt{56/9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (S_2): (x-4)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}. \end{aligned}$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: (Dựa theo kết quả câu b): (S) tiếp xúc với (P_2) thì tâm I phải thuộc mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi (P_1) và (P_2) .

Ta lần lượt:

- Với mặt phẳng phân giác $(Q_1): 2x + y - 3z + 5 = 0$, suy ra:
 $2(3t+2) + (-2t+5) - 3(-t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 7t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Khi đó, ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-4; 9; 2) \\ \text{Bán kính } R = M_1I_1 = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x+4)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 56.$$

- Với mặt phẳng phân giác $(Q_2): 4x - 5y + z + 3 = 0$, suy ra:

$$4(3t + 2) - 5(-2t + 5) + (-t) + 3 = 0 \Leftrightarrow 21t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Khi đó, ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2 \left(4; \frac{11}{3}; \frac{2}{3} \right) \\ \text{Bán kính } R = M_1 I_2 = \sqrt{56/9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_2): \left(x - 4 \right)^2 + \left(y - \frac{11}{3} \right)^2 + \left(z - \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{56}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

d. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm $I(x; y; z)$ và bán kính R .

(S) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1 I \perp (P_1) \Leftrightarrow \overline{M_1 I} // \overline{n_1} \Leftrightarrow \overline{M_1 I} = t \cdot \overline{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}$$

Để (S) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn lớn điều kiện là:

$$I \in (P_2) \Leftrightarrow (3t + 2) - 3(-2t + 5) + 2(-t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 7t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S) cần dựng được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(8; 1; -2) \\ \text{Bán kính } R = M_1 I = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 8)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 56.$$

e. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm $T(x; y; z)$ và bán kính R .

(T) tiếp xúc với (P_1) tại điểm M_1 suy ra:

$$M_1 T \perp (P_1) \Leftrightarrow \overline{M_1 T} // \overline{n_1} \Leftrightarrow \overline{M_1 T} = t \cdot \overline{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3t \\ y - 5 = -2t \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 5 \\ z = -t \end{cases}$$

Để (T) cắt (P_2) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính r thì:

$$R^2 = d^2(T, (P_2)) + r^2 \Leftrightarrow M_1 T^2 = d^2(T, (P_2)) + r^2$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 = \frac{|7t - 14|^2}{14} + \frac{21}{2} \Leftrightarrow 4t^2 = (t - 2)^2 + 3 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -7/3 \end{cases}.$$

Ta lần lượt có:

- Với $t_1 = 1$ ta được tâm $T_1(5; 3; -1)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1(5; 3; -1) \\ \text{Bán kính } R = M_1 T_1 = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow (T_1): (x - 5)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 14.$$

- Với $t_2 = -\frac{7}{3}$ ta được tâm $T_2\left(-\frac{15}{3}; \frac{29}{3}; \frac{7}{3}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(-\frac{15}{3}; \frac{29}{3}; \frac{7}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = M_1 T_2 = \sqrt{\frac{686}{9}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): \left(x + \frac{15}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{29}{3} \right)^2 + \left(z - \frac{7}{3} \right)^2 = \frac{686}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

F Chú ý: Với ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) có chứa tham số chúng ta thường gặp thêm câu hỏi "Xác định giá trị của tham số để ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng". Khi đó, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các vpt $\vec{n}_P, \vec{n}_Q, \vec{n}_R$ của các mặt phẳng (P), (Q), (R).

Bước 2: Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \\ \vec{n}_P \perp \vec{n}_R \\ \vec{n}_R \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \\ \vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 0 \\ \vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0 \end{cases}.$$

Bước 3: Toạ độ điểm chung I của ba mặt phẳng (P), (Q), (R) là nghiệm hệ phương trình tạo bởi (P), (Q), (R).

Thí dụ 5. Cho ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) có phương trình:

$$(P): x + y + z - 6 = 0; (Q): x - 2y + z = 0;$$

$$(R): kx + (m - 1)y - z + 2 = 0.$$

- Xác định giá trị m và k để ba mặt phẳng đó cùng đi qua một đường thẳng.
- Xác định giá trị m và k để ba mặt phẳng đó đôi một vuông góc với nhau. Tìm điểm chung của cả ba mặt phẳng.

 **Giải**

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

nên hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Hai điểm } A(4; 2; 0) \text{ và } B(0; 2; 4) \text{ thuộc } (d).$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng điều kiện là:

$$(d) \in (R) \Leftrightarrow A \in (R) \text{ và } B \in (R)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 2(m - 1) + 2 = 0 \\ 2(m - 1) - 4 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + m = 0 \\ 2m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Vậy, với m = 2 và k = -1 ba mặt phẳng (P), (Q), (R) cùng đi qua một đường thẳng.

b. Gọi $\vec{n}_P, \vec{n}_Q, \vec{n}_R$ theo thứ tự là vpt của các mặt phẳng (P), (Q), (R), ta được:

$$\vec{n}_P(1; 1; 1), \vec{n}_Q(1; -2; 1), \vec{n}_R(k; m - 1; -1).$$

Để ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau, điều kiện là:

$$\begin{cases} \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \\ \vec{n}_P \perp \vec{n}_R \\ \vec{n}_R \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \\ \vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 0 \\ \vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 + 1 = 0 \\ k + m - 1 - 1 = 0 \\ k - 2(m - 1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + m = 2 \\ k - 2m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = k = 1.$$

Khi đó, toạ độ điểm chung I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2; 3).$$

Vậy, với m = k = 1 thì ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau và có điểm chung là I(1; 2; 3).

Dạng toán 4: Vị trí tương đối của mặt cầu với mặt phẳng

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

Xác định $d = d(I, (P))$

Bước 2: So sánh d với R để đưa ra kết luận:

- Nếu $d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \emptyset$ (Hình 1 trang bên).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow (P)$ tiếp xúc với (S) tại H (Hình 2 trang bên).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = (C)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) (Hình 3 trang bên).

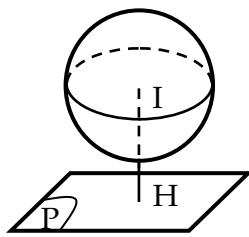
Và trong trường hợp này nếu:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

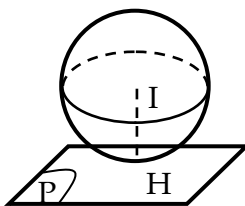
$$(P): Ax + By + Cz + D = 0,$$

thì phương trình đường tròn (C) có phương trình:

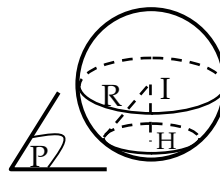
$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

F Chú ý: 1. Trong phần này chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới các dạng toán:

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu và thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Dạng 3: Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Dạng 4: Viết phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng theo giao tuyến là đường tròn (C) thỏa mãn điều kiện K cho trước.

2. Trong trường hợp mặt phẳng không cắt mặt cầu, cụ thể với mặt phẳng (P) (có vpt $\vec{n}(A; B; C)$)

không cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:

- a. Tiếp xúc với (S).
- b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).

2. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

3. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).

4. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

Ta lần lượt:

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và thỏa mãn điều kiện K", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Mặt phẳng (Q) song song với (P) nên có phương trình:

$$(Q): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Bước 2: Với điều kiện K là:

a. (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Rightarrow \text{Giá trị của } D \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

b. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:

$$I \in (Q) \Rightarrow \text{Giá trị của } D \Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

c. (Q) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r, suy ra:

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \text{Giá trị của } D$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (Q)}.$$

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất", chúng ta thấy ngay đó là đường thẳng đi qua I và có vtcp $\vec{n}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm tọa độ điểm I' đối xứng với I qua (P).

Bước 2: Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S)", các em học sinh cần có thêm kiến thức về đường thẳng để trình bày theo các bước:

Bước 1: Gọi (T) là mặt cầu thỏa mãn điều kiện đầu bài và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H (H chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P)), suy ra M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua I} \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases}.$$

Bước 2: Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P).

Bước 3: Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S).

Bước 4: Viết phương trình mặt cầu đường kính MH.

Thí dụ 1. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(P): 2x - 3y + 2z - 3 = 0,$$

$$(S): (x-8)^2 + (y+8)^2 + (z-7)^2 = 68.$$

- Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng $r = \sqrt{51}$.
- Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

 **Giải**

a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(8; -8; 7) và bán kính $R = 2\sqrt{17}$, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 8 - 3 \cdot (-8) + 2 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 3\sqrt{17} > 2\sqrt{17}.$$

Do đó, mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:

$$(Q): 2x - 3y + 2z + D = 0.$$

(1)

- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 8 - 3 \cdot (-8) + 2 \cdot 7 + D|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow |D + 54| = 34$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = -20 \\ D_2 = -88 \end{cases}.$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -20$ thay vào (1), ta được (Q_1) : $2x - 3y + 2z - 20 = 0$.
- Với $D_2 = -88$ thay vào (1), ta được (Q_2) : $2x - 3y + 2z - 88 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
 (R) : $2x - 3y + 2z + D = 0$.
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
 $I \in (R) \Leftrightarrow 2.8 - 3(-8) + 2.7 + D = 0 \Leftrightarrow D = -54$.

Vậy, phương trình mặt phẳng (R) có dạng $2x - 3y + 2z - 54 = 0$.

d. Gọi (α) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
 (α) : $2x - 3y + 2z + D = 0$. (2)
- (α) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{51}$, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|2.8 - 3(-8) + 2.7 + D|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{68 - 51}$$

$$\Leftrightarrow |D + 54| = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = -37 \\ D_2 = -71 \end{cases}.$$

Khi đó:

- Với $D_1 = -37$ thay vào (2), ta được (α_1) : $2x - 3y + 2z - 37 = 0$.
- Với $D_2 = -71$ thay vào (2), ta được (α_2) : $2x - 3y + 2z - 71 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = 2\sqrt{17}$ và tâm I' là điểm đối xứng với I qua (P) . Để xác định tọa độ điểm I' ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) , suy ra:

$$\begin{cases} IH \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} // \overrightarrow{n_p} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IH} = t \cdot \overrightarrow{n_p} (2; -3; 2) \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 2t \\ y + 8 = -3t \\ z - 7 = 2t \\ 2x - 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t - 8 \\ z = 2t + 7 \\ 17t + 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(2; 1; 1) \Rightarrow I'(-4; 10; -5).$$

Cách 2: Giả sử $I'(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} II' \perp (P) \\ H \in (P) \text{ với } H \text{ là trung điểm của } II' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{II'} // \overrightarrow{n_p} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{II'} = t \cdot \overrightarrow{n_p} \\ H \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 2t \\ y + 8 = -3t \\ z - 7 = 2t \\ 2 \cdot \frac{x+8}{2} - 3 \cdot \frac{y-8}{2} + 2 \cdot \frac{z+7}{2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t - 8 \\ z = 2t + 7 \\ 17t + 85 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \\ z = -5 \\ t = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(2; 1; 1) \Rightarrow I'(-4; 10; -5).$$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') cần dựng được cho bởi:

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(-4; 10; -5) \\ R = 2\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x+4)^2 + (y-10)^2 + (z+5)^2 = 68.$$

f. Gọi (T) là mặt cầu cần dựng và giả sử (T) tiếp xúc với (S), (P) theo thứ tự tại M và H, suy ra:

- (T) là mặt cầu đường kính MH.
- M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(8; -8; 7) \\ \text{vtcp } \vec{n}(2; -3; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -8 - 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$

Tiếp điểm H của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P), suy ra:

$$2(8 + 2t) - 3(-8 - 3t) + 2(7 + 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 17t + 51 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \\ \Rightarrow H(2; 1; 1).$$

Tiếp điểm M của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S), suy ra:

$$(S): (8 + 2t - 8)^2 + (-8 - 3t + 8)^2 + (7 + 2t - 7)^2 = 68 \\ \Leftrightarrow 17t^2 = 68 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Khi đó, ta lần lượt với:

- Với $t = 2$ ta được $M_1(12; -14; 11)$ và mặt cầu đường kính M_1H là:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1\left(7; -\frac{13}{2}; 6\right) \text{ là trung điểm } M_1H \\ \text{Bán kính } R = \frac{M_1H}{2} = \sqrt{\frac{425}{4}} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (T_1): (x-7)^2 + \left(y + \frac{13}{2}\right)^2 + (z-6)^2 = \frac{425}{4}.$$

- Với $t = -2$ ta được $M_2(4; -2; 3)$ và mặt cầu đường kính M_2H là:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2\left(3; -\frac{1}{2}; 2\right) \text{ là trung điểm } M_2H \\ \text{Bán kính } R = \frac{M_2H}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (T_2): (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{17}{4}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

F Chú ý: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) tiếp xúc với mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) tại điểm M chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
 - a. Tiếp xúc với (S).
 - b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C)).
3. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt mặt cầu (S) tại điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).

✚ Với yêu cầu "Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S)", chúng ta thấy ngay M chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và thỏa mãn điều kiện K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu (2.a) chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

Bước 2: Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua N} \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}.$$

- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt mặt cầu (S) tại điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất", chúng ta thấy ngay đường thẳng (d) đi qua hai điểm M và I.

- ✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm tọa độ điểm I' đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M.

Bước 2: Mặt cầu (S') có tâm I' và bán kính R.

Thí dụ 2. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(P): 2x - y + 2z - 5 = 0, \quad (S): (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9.$$

- Chứng tỏ rằng mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và chia (S) thành hai phần có tỉ số thể tích bằng $\frac{7}{20}$.
- Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).

✍ Giải

- a. Xét mặt cầu (S) có tâm I(3; 0; 4) và bán kính R = 3, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 0 + 2 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 = R.$$

Do đó, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Tọa độ tiếp điểm M(x; y; z) chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{IH} \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IH} // \vec{n}_P \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IH} = t \cdot \vec{n}_P (2; -1; 2) \\ H \in (P) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2t \\ y = -t \\ z - 4 = 2t \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t \\ z = 2t + 4 \\ 9t + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1; 2). \end{aligned}$$

Vậy, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M(1; 1; 2).

- b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:
(Q): $2x - y + 2z + D = 0$.
- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 3 - 0 + 2 \cdot 4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow |D + 14| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = -5 \text{ (loại)} \\ D_2 = -23 \end{cases}.$$

Khi đó, với $D_2 = -23$ ta được (Q): $2x - y + 2z - 23 = 0$.

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) cần dựng tiếp xúc với (S) tại điểm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I nên N(5; -1; 6).

Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } N(5; -1; 6) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2; -1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - y + 2z - 23 = 0.$$

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
(R): $2x - y + 2z + D = 0$.
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
 $I \in (R) \Leftrightarrow 2.3 + 2.4 + D = 0 \Leftrightarrow D = -14$.

Khi đó, với $D = -14$ ta được (R): $2x - y + 2z - 14 = 0$.

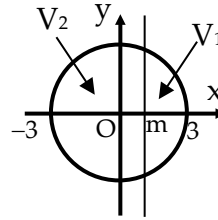
d. Trước tiên, trong mặt phẳng Oxy ta xét đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 3$ và đường thẳng $x = m$ ($0 < m < 3$) (hình bên). Gọi V là thể tích của mặt cầu có bán kính $R = 3$, ta có:

$$\frac{7}{20} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} \Leftrightarrow 7(V - V_1) = 20V_1$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{7}{27}V \Leftrightarrow \pi \int_m^3 (9 - x^2) dx = \frac{7}{27} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Leftrightarrow \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_m^3 = \frac{28}{3} \Leftrightarrow (27 - 9) - \left(9m - \frac{m^3}{3} \right) = \frac{28}{3}$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 27m + 26 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 26) = 0 \stackrel{0 < m < 3}{\Leftrightarrow} m = 1.$$



Từ đó, yêu cầu của bài toán được phát biểu lại dưới dạng "Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cách I một khoảng bằng 1", do đó ta lần lượt:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
(α): $2x - y + 2z + D = 0$. (2)
- (α) cách I một khoảng bằng 1, suy ra:
 $d(I, (\alpha)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2.3 + 2.4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |D + 14| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = -11 \\ D_2 = -17 \end{cases}$.

Khi đó:

- Với $D_1 = -11$ thay vào (2), ta được mặt phẳng (α_1): $2x - y + 2z - 11 = 0$.
- Với $D_2 = -17$ thay vào (2), ta được mặt phẳng (α_2): $2x - y + 2z - 17 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

e. Mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = 3$ và tâm I' là điểm đối xứng với I qua (P), suy ra I' đối xứng với I qua M nên I'(-1; 2; 0).

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') cần dựng được cho bởi:

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(-1; 2; 0) \\ \text{Bán kính } R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9.$$

F Chú ý: Trong trường mặt phẳng (P) (có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$) cắt mặt cầu (S) (có tâm I bán kính R) theo thiết diện

là đường tròn (C) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của (C).
2. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và:
 - a. Tiếp xúc với (S).
 - b. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
 - c. Cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C') có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi, diện tích của (C')).
3. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
4. Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
5. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).



Với yêu cầu "Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của (C)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bán kính r_C của (C) được xác định bởi $r_C = \sqrt{R^2 - d(I, (P))}$.

Bước 2: Toạ độ tâm của (C) chính là hình chiếu vuông góc M của I trên (P).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và thoả mãn điều kiện K", được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S). Tuy nhiên, với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng (C)" chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N, suy ra N là điểm đối xứng với M qua I.

Bước 2: Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua N} \\ \text{vtpt } \vec{n} \end{cases}$$

✚ Các yêu cầu còn lại được thực hiện tương tự như trong trường hợp (P) không cắt (S).

Thí dụ 3. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(P): x + 2y + 3z - 10 = 0, \quad (S): (x - 2)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 56.$$

- Chứng tỏ rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Xác định toạ độ tâm M và tính bán kính r của (C).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r.
- Viết phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P).
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (P) và (S).

✍ Giải

- a. Xét mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{56}$, ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 + 3 \cdot (-2) - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14} < \sqrt{56}.$$

Do đó, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) lần lượt có:

- Bán kính r được xác định bởi:

$$r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2} = \sqrt{56 - 14} = \sqrt{42}.$$

- Toạ độ tâm M(x; y; z) của (C) chính là hình chiếu vuông góc của I trên (P), suy ra:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{IH} \perp (P) \\ H \in (P) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IH} // \vec{n}_P \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IH} = t \cdot \vec{n}_P(1; 2; 3) \\ H \in (P) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y = 2t \\ z + 2 = 3t \\ x + 2y + 3z - 10 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t \\ z = 3t - 2 \\ 14t - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 2; 1). \end{aligned}$$

Vậy, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{42}$ và tâm $M(3; 2; 1)$.

- b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (Q) song song với (P) nên có phương trình:

$$(Q): x + 2y + 3z + D = 0. \quad (1)$$

- (Q) tiếp xúc với (S), suy ra:

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 + 3 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{56} \Leftrightarrow |D - 4| = 28 \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = 32 \\ D_2 = -24 \end{cases}.$$

Khi đó:

- Với $D_1 = 12$ thay vào (1), ta được $(Q_1): x + 2y + 3z + 32 = 0$.
- Với $D_2 = -44$ thay vào (1), ta được $(Q_2): x + 2y + 3z - 24 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (R) song song với (P) nên có phương trình:
 $(R): x + 2y + 3z + D = 0.$
- (R) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn lớn, suy ra:
 $I \in (R) \Leftrightarrow 2 + 3(-2) + D = 0 \Leftrightarrow D = 4.$

Vậy, phương trình mặt phẳng (R) cần dựng có dạng $x + 2y + 3z + 4 = 0.$

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi (α) là mặt phẳng cần dựng, ta lần lượt sử dụng giả thiết:

- (α) song song với (P) nên có phương trình:
 $(\alpha): x + 2y + 3z + D = 0.$
- (α) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{42}$, suy ra:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|2 + 3 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{56 - 42} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = -10 \text{ (loại)} \\ D_2 = 18 \end{cases}.$$

Khi đó, với $D_2 = 18$ ta được $(Q): x + 2y + 3z + 18 = 0.$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (α) cần dựng cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có tâm N , suy ra N là điểm đối xứng với M qua I nên $N(1; -2; -5).$

Phương trình mặt phẳng (α) được cho bởi:

$$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } N(1; -2; -5) \\ \text{vptp } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha): x + 2y + 3z + 18 = 0.$$

e. Mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua (P) sẽ có bán kính $R = \sqrt{56}$ và tâm I' là điểm đối xứng với I qua (P) , suy ra I' đối xứng với I qua M nên $I'(4; 4; 4).$

Khi đó, phương trình mặt cầu (S') cần dựng được cho bởi :

$$(S'): \begin{cases} \text{Tâm } I'(4; 4; 4) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{56} \end{cases} \Leftrightarrow (S'): (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 56.$$

f. Gọi (T) là mặt cầu cần dựng và giả sử (T) tiếp xúc với $(S), (P)$ theo thứ tự tại A và M , suy ra:

- (T) là mặt cầu đường kính $MA.$
- M, H, I thuộc (d) có phương trình cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } I(2; 0; -2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tiếp điểm M của (T) với mặt phẳng (P) là giao điểm của (d) với (P) , suy ra:

$$(2 + t) + 2.2t + 3(3t - 2) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 2; 1).$$

Tiếp điểm A của (T) với mặt cầu (S) là giao điểm của (d) với (S) , suy ra:

$$(S): (2 + t - 2)^2 + (2t)^2 + (-2 + 3t + 2)^2 = 56 \Leftrightarrow 14t^2 = 56 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Khi đó, ta lần lượt với:

- Với $t = 2$ ta được $A_1(4; 4; 4)$ và mặt cầu đường kính M_1H là:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } T_1\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{5}{2}\right) \text{ là trung điểm } A_1M \\ \text{Bán kính } R = T_1M = \sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_1): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

- Với $t = -2$ ta được $A_2(0; -4; -8)$ và mặt cầu đường kính A_2M là:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } T_2 \left(\frac{3}{2}; -1; -\frac{7}{2} \right) \text{ là trung điểm } A_2M \\ \text{Bán kính } R = T_2M = \sqrt{63/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{7}{2} \right)^2 = \frac{63}{2}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Bài 1

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; -4), \overrightarrow{AC} = (2; -3; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8; -5; -1)$

Vì (P) đi qua A, B, C nên (P) nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-8; -5; -1)$ làm VTPT

Vậy phương trình (P) là: $-8(x-1) - 5(y-2) - (z-3) = 0$

$$\text{Hay : } 8x + 5y + z - 21 = 0.$$

2. Gọi M là trung điểm AC , ta có: $M \left(2; \frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right)$

Vì (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC nên (P) đi qua M và nhận $\overrightarrow{AC} = (2; -3; -1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $2\left(x-2\right) - 3\left(y-\frac{1}{2}\right) - 1\left(z-\frac{5}{2}\right) = 0$

$$\text{Hay : } 2x - 3y - z = 0.$$

3. Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 2; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}] = (-12; -3; -6)$

Vì (P) đi qua M, N và song song với AB nên (P) nhận $\vec{n} = -\frac{1}{3}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}] = (4; 1; 2)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $4x + y + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 2z - 2 = 0.$

4. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz

Ta có $A_1(1; 0; 0), A_2(0; 2; 0), A_3(0; 0; 3)$ nên phương trình (P) là:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Bài 2 Xét hai điểm B, C thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$.

Khi đó tọa độ các điểm B, C thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Chọn $y = 0$ thì $x = -\frac{3}{2}, z = \frac{11}{2} \Rightarrow B \left(-\frac{3}{2}; 0; \frac{11}{2} \right)$.

Chọn $z = 0$ thì $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{11}{2} \Rightarrow C \left(-\frac{3}{2}; -\frac{11}{2}; 0 \right)$.

Mặt phẳng (P) qua giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ khi và chỉ khi (P) qua hai điểm B, C .

Chú ý: Nếu chọn giá trị của x (hoặc y, z) mà hệ vô nghiệm thì hai mặt phẳng không cùng đi qua điểm có hoành độ (hoặc tung độ, cao độ) đó. Chẳng hạn, trong bài này, không thể chọn $x \neq -\frac{3}{2}$ vì nếu trừ vế với vế hai phương trình trên, ta luôn có $x = -\frac{3}{2}$.

1. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng qua ba điểm A, B, C. Ta có

$$\overrightarrow{AB} \left(-\frac{5}{2}; -8; -\frac{7}{2} \right), \overrightarrow{BC} \left(0; -\frac{11}{2}; -\frac{11}{2} \right) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = -\frac{11}{4}(23; -5; 5).$$

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$23(x-1) - 5(y-8) + 5(z-2) = 0 \Leftrightarrow 23x - 5y + 5z + 7 = 0.$$

2. Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q) nên $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)}$, $\vec{n}_{(P)} \perp \overrightarrow{BC}$ do đó ta có véc tơ pháp tuyến của nó là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}, \overrightarrow{BC}] = -\frac{11}{2}(7; -1; 1)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là $7x - y + z + 5 = 0$.

3. Giả sử véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(A; B; C)$. Vì (P) qua B, C nên $\vec{n}_{(P)} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow C = -B$.
Vậy $\vec{n}_{(P)}(A; B; -B)$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sqrt{33}} = \cos \varphi = \frac{|A \cdot 1 + B \cdot 2 + (-B) \cdot (-2)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + (-B)^2} \cdot 3}, \text{ do đó}$$

$$3(A^2 + 2B^2) = 11(A + 4B)^2 \Leftrightarrow 4A^2 + 44AB + 85B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2A + 5B)(2A + 17B) = 0 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}B, A = -\frac{17}{2}B.$$

Nếu $A = -\frac{5}{2}B$ thì chọn $B = -2 \Rightarrow A = 5, C = 2$ nên

$$(P): 10x - 4y + 4z - 7 = 0.$$

Nếu $A = -\frac{17}{2}B$ thì chọn $B = -2 \Rightarrow A = 17, C = 2$ nên

$$(P): 34x - 4y + 4z + 29 = 0.$$

Bài 3

1. Ta có $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là VTPT của (P)

Vì $(\alpha) \parallel (P)$ nên $\vec{n} = (1; -2; 3)$ cũng là VTPT của (α) .

Vậy phương trình (α) là: $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

2. Ta có $\vec{a} = (1; 1; 1)$ là VTPT của (β) , $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; -4)$.

$$\text{Suy ra } [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (-1; 1; 0)$$

Vì (α) đi qua A, B và $(\alpha) \perp (\beta)$ nên (α) nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \overrightarrow{AB}] = (-1; 1; 0)$ làm VTPT

Vậy phương trình (α) là: $x - y - 1 = 0$.

3. Vì (α) chứa trục Ox và vuông góc với (Q) nên (α) nhận $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{i}]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{a} = (2; 3; -1)$ là VTPT của (Q) nên $\vec{n} = (0; 1; 3)$

Vậy phương trình (α) là: $y + 3z = 0$.

4. Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}(16; 6; -5), \overrightarrow{AC}(10; 0; -2)$ nên

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-12; -18; -60) = -6(2; 3; 10)$$

Do đó (α) là mặt phẳng đi qua $A(2; 8; 5)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 3; 10)$ nên có phương trình

$$2(x - 2) + 3(y - 8) + 10(z - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 10z - 78 = 0.$$

Vậy $(\alpha): 2x + 3y + 10z - 78 = 0$.

Cách 2: Gọi mặt phẳng (α) cần tìm có phương trình là

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Mặt phẳng (α) qua ba điểm $A(2; 8; 5), B(18; 14; 0), C(12; 8; 3)$ nên

$$\begin{cases} 2A + 8B + 5C + D = 0 \\ 18A + 14B + D = 0 \\ 12A + 8B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18A + 14B + D = 0 \\ 16A + 6B - 5C = 0 \\ 6A + 6B - 3C = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta tính được $C = 5A, 2B = 3A, D = -39A$.

Do $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ nên chọn $A = 2$ thì $B = 3; C = 10, D = -78$, hay phương trình mặt phẳng cần tìm là $(\alpha): 2x + 3y + 10z - 78 = 0$.

5. Gọi I là trung điểm của EF , ta có $I(3; 5; 4), \overline{EF}(-4; 6; -6)$.

Mặt phẳng trung trực của EF là mặt phẳng đi qua I và có véc tơ pháp tuyến $\overline{EF}(-4; 6; -6)$, phương trình của (α)

$$-4(x - 3) + 6(y - 5) - 6(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 3z - 3 = 0.$$

Vậy $(\alpha): 2x - 3y + 3z - 3 = 0$.

6. Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(Oyz)}(1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (Oyz) nên cũng có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Oyz)}(1; 0; 0)$, nên phương trình của mặt phẳng (α) là

$$1.(x - 2) + 0.(y - 3) + 0.(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0.$$

Vậy $(\alpha): x - 2 = 0$.

7. Ta có $\vec{n}_{(\beta)}(1; 2; -5), \vec{n}_{(\gamma)}(2; -3; -1)$.

Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta), (\gamma)$ nên

$$\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{n}_{(\beta)}, \vec{n}_{(\gamma)}] = (-17; -9; -7).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là

$$-17(x - 1) - 9(y + 3) - 7(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 17x + 9y + 7z - 4 = 0.$$

Vậy $(\alpha): 17x + 9y + 7z - 4 = 0$.

8. Hình chiếu của điểm $H(-2; 1; 5)$ lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $M(-2; 0; 0), N(0; 1; 0), P(0; 0; 5)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow 5x - 10y - 2z + 10 = 0.$$

Vậy $(\alpha): 5x - 10y - 2z + 10 = 0$.

Bài 4.

1. Ta có $\vec{n}_Q = (1; 1; 3)$ là một VTPT của (Q) . Vì $(P) // (Q)$ nên (P) có một VTPT

$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q} = (1; 1; 3)$. Vậy (P) có phương trình là :

$$1(x-1) + 1(y-2) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z - 6 = 0.$$

2. Vì (P) đi qua M, N, E nên $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}] = (-1; -2; 0)$ là một VTPT của (P) .

Vậy phương trình của (P) : $x + 2y = 0$.

3. Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow I(0; 1; \frac{3}{2})$. Vì (P) là mp trung trực của đoạn MN nên (P)

đi qua I và nhận $\overrightarrow{MN} = (0; 0; -1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) : $2z - 3 = 0$.

4. Tọa độ hình chiếu của A lên các trục tọa độ là $A_1(1; 0; 0), A_2(0; 2; 0), A_3(0; 0; 3)$.

Áp dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(P) là:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

5. Vì (P) đi qua B, C và vuông góc với (R) ((R) có $\overrightarrow{n_R} = (1; 1; 1)$ là một VTPT)

Nên (P) nhận $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{n_R}] = (0; 1; -1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) : $y - z - 2 = 0$.

6. Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{n_\beta} = (0; 1; -1)$ lần lượt là VTPT của $(\alpha), (\beta)$.

Vì (P) vuông góc với hai (α) và (β) nên $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}] = (0; 1; 1)$ là VTPT của (P)

Vậy phương trình (P) : $y + z - 5 = 0$.

Bài 5

1. Giả sử (α) cắt trục Oz tại điểm $M(0; 0; t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2; 2; 1)$, $\overrightarrow{AM}(-3; 0; t)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (2t; 2t - 3; 6)$.

Vì thế $S_{ABM} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(2t)^2 + (2t - 3)^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8t^2 - 12t + 45}$.

Theo bài ra $S_{ABM} = \frac{9}{2}$, nên $\sqrt{8t^2 - 12t + 45} = 9 \Leftrightarrow 8t^2 - 12t - 36 = 0$, hay $t = 3; t = -\frac{3}{2}$.

• Với $t = 3$ thì $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (6; 3; 6)$ nên phương trình (α) : $2x + y + 2z - 6 = 0$.

• Với $t = -\frac{3}{2}$ thì $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (-3; -6; 6)$ nên phương trình (α) : $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

2. Giả sử (α) cắt trục Oy tại điểm $N(0; t; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2; 2; 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AN}(-3; t; 0)$ nên

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 3; 4) \Rightarrow V_{ABCN} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN}| = \frac{1}{2} |t - 5|.$$

Vì thế $\frac{1}{2} |t - 5| = 12 \Leftrightarrow |t - 5| = 24 \Rightarrow t = 29; t = -19$.

• Nếu $t = 29 \Rightarrow -\frac{1}{2} [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}] = (29; 3; 16)$ nên phương trình (α) : $29x + 3y + 16z - 87 = 0$

• Nếu $t = -19 \Rightarrow \frac{1}{2} [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}] = (19; -3; 8)$ nên phương trình (α) : $19x - 3y + 8z - 57 = 0$.

3. Phương trình mặt phẳng (OBC) : $x - y = 0$ và phương trình mặt phẳng

$$(ABC): 5x + 3y + 4z - 15 = 0.$$

Vì (α) đi qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ nên (α) cắt cạnh OA và $M \in (\alpha)$ thì $d(M, (OBC)) = d(M, (ABC))$.

Gọi $M(x; y; z)$ thì từ điều kiện $d(M, (OBC)) = d(M, (ABC))$ suy ra hai mặt phẳng chứa M thỏa mãn là $x + 3y - 5 = 0, 10x + 3y - z - 15 = 0$.

Mặt phẳng $10x + 3y - z - 15 = 0$ cắt OA tại điểm $N\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ nằm trong đoạn thẳng OA nên mặt phẳng cần tìm là $(\alpha): 10x + 3y - z - 15 = 0$.

Bài 6

1. Vì mặt phẳng (α) chứa Ox nên phương trình (α) có dạng: $ay + bz = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Do $A \in (\alpha)$ nên: $2a + 3b = 0$, chọn $b = -2 \Rightarrow a = 3$.

Vậy phương trình của $(\alpha): 3y - 2z = 0$.

2. **Cách 1:** Vì (α) cách đều C, D nên ta có hai trường hợp:

TH1: $CD \parallel (\alpha)$, khi đó $[\overline{AB}, \overline{CD}] = \vec{n}$ là VTPT của (α)

$$\text{Mà } \overline{AB} = (-3; 1; -4), \overline{CD} = (-4; -4; 4) \Rightarrow \vec{n} = (-12; 28; 16)$$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $3x - 7y - 4z + 23 = 0$

TH 2: $CD \cap (\alpha) = \{I\}$, khi đó ta có được I là trung điểm của CD , suy ra $I(-2; -1; 3)$

Mặt phẳng (α) đi qua A, B, I .

$$\text{Ta có } \overline{AI} = (-3; -3; 0), \overline{BI} = (0; -4; 4) \Rightarrow [\overline{AI}, \overline{BI}] = (-12; 12; 12)$$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $x - y - z + 4 = 0$.

Cách 2: Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a - 2b - 3c = 0 \quad (*)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên $-3a + b - 4c = 0 \Rightarrow b = 3a + 4c$ (1)

$$\text{Mặt khác: } d(C, (\alpha)) = d(D, (\alpha)) \text{ nên ta có: } \frac{|-a - b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-5a - 5b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 5a + 5b - 2c \\ a + b + 2c = -5a - 5b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 3c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

• $4a + 3c = 0$ ta chọn $c = -4 \Rightarrow a = 3, b = -7$, suy ra phương trình (α) là: $3x - 7y - 4z + 23 = 0$.

• $a + c = 0$ ta chọn $c = -1 \Rightarrow a = 1, b = -1$, suy ra phương trình của (α) là: $x - y - z + 4 = 0$.

Bài 7

1. Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x + 1) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0 \quad (1)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $4a - b + c = 0 \Rightarrow b = 4a + c$

$$\text{Mặt khác } d(C, (\alpha)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2a - b - 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|2a + 4c|}{\sqrt{a^2 + (4a + c)^2 + c^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow (a+2c)^2 = 17a^2 + 8ac + 2c^2 \Leftrightarrow 8a^2 + 2ac - c^2 = 0 \Leftrightarrow c = -2a, c = 4a$$

• $c = -2a$ ta chọn $a = 1 \Rightarrow c = -2, b = 2$ nên phương trình $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$

• $c = 4a$ ta chọn $a = 1 \Rightarrow c = 4, b = 8$ nên phương trình $(\alpha): x + 8y + 4z - 11 = 0$.

2. Ta có $M(x; y; z)$ là một điểm bất kì thuộc (α) khi và chỉ khi

$$d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|2x + y + 2z - 1|}{3} = \frac{|x - 2y + 2z - 4|}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = x - 2y + 2z - 4 \\ 2x + y + 2z - 1 = -x + 2y - 2z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ 3x - y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán:

$$(\alpha_1): x + 3y + 3 = 0 \text{ và } (\alpha_2): 3x - y + 4z - 5 = 0.$$

3. Gọi E, F là hai điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó tọa độ

$$\text{của } E, F \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} (*)$$

Cho $x = 0$, từ $(*)$ ta có $y = -1, z = 1 \Rightarrow E(0; -1; 1)$

Cho $x = 6$, từ $(*)$ ta có $y = -3, z = -4 \Rightarrow F(6; -3; -4)$

Suy ra $\overrightarrow{EF} = (6; -2; -5)$.

Vì (α) đi qua E, F và vuông góc với (β) nên (α) nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{EF}, \vec{a}]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{a} = (3; 2; -1)$ là VTPT của (β) nên $\vec{n} = (12; -9; 18)$

Vậy phương trình của $(\alpha): 4x - 3y + 6z - 9 = 0$.

Bài 8

1. Vì $(P) // (Q) \Rightarrow (P): 2x - 3y - 6z + D = 0$.

$$\text{Mà } d(O, (P)) = 5 \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 5 \Leftrightarrow D = \pm 35.$$

Vậy phương trình $(P): 2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$.

2. Giả sử $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Ta có $A(2; -1; 0), B(5; 1; 1)$ là điểm chung của (α) và (β)

Vì (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A, B \in (P)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2a - b + d = 0 \\ 5a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + d \\ c = -7a - 2d \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } d(M, (P)) = \frac{7}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}c + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{7}{6\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |c + 2d| = \frac{7}{3\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 27(c + 2d)^2 = 49(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 27.49a^2 = 49[a^2 + (2a + d)^2 + (7a + 2d)^2] \Leftrightarrow 27a^2 + 32ad + 5d^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ a = -\frac{5}{27}d \end{cases}$$

$$\bullet d = -a \Rightarrow b = a; c = -5a$$

Suy ra phương trình (P): $ax + ay - 5az - a = 0 \Leftrightarrow x + y - 5z - 1 = 0$.

$$\bullet d = -\frac{27}{5}a \Rightarrow b = -\frac{17}{5}a; c = -\frac{36}{5}a. \text{ Suy ra phương trình (P): } 5x - 17y - 36z - 27 = 0.$$

Bài 9

1. Mặt phẳng (α) qua $A(1;0;2)$ nên có phương trình dạng:

$$A(x-1) + By + C(z-2) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì (α) qua $B(2;-3;3)$ nên $A - 3B + C = 0 \Leftrightarrow A = 3B - C$.

Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = (3B - C, B, C)$, của (β) là $\vec{n}_\beta = (4, 1, 1)$, nên

$$\cos 60^\circ = \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \frac{|4(3B - C) + B + C|}{\sqrt{(3B - C)^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{18}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} = \frac{|4(3B - C) + B + C|}{6\sqrt{5B^2 - 3BC + C^2}} \Leftrightarrow 9(5B^2 - 3BC + C^2) = (13B - 3C)^2$$

$$\Leftrightarrow 124B^2 - 51BC = 0 \Leftrightarrow B = 0; B = \frac{51}{124}C.$$

• Nếu $B = 0$ thì chọn $C = -1 \Rightarrow A = 1$ nên $(\alpha): x - z + 1 = 0$.

• Nếu $B = \frac{51}{124}C$ thì chọn $C = 124 \Rightarrow A = 29$ nên mặt phẳng cần tìm là :

$$(\alpha): 29x + 51y + 124z - 277 = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là: $(\alpha): 29x + 51y + 124z - 277 = 0$; $(\alpha): x - z + 1 = 0$.

2. Mặt phẳng (α) qua $C(2;-3;5)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-5) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì $(\alpha) \perp (P)$ nên $A - 5B - C = 0 \Leftrightarrow A = 5B + C$ (1).

$$\text{Vì góc giữa } (\alpha) \text{ và } (Q) \text{ là } 45^\circ \text{ nên } \frac{|2A + 2B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2).$$

$$\text{Thế (1) vào (2) ta có } \frac{|4B + C|}{\sqrt{(5B + C)^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ hay}$$

$$2(4B + C)^2 = (5B + C)^2 + B^2 + C^2 \Leftrightarrow B^2 + BC = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ B = -C \end{cases}$$

Nếu $B = 0$ thì có phương trình $(\alpha): x + z - 7 = 0$.

Nếu $B = -C$ thì có phương trình $(\alpha): 4x + y - z = 0$.

Bài 10 (P): $2x + y - 2z - 3 = 0$ và $A(1;2;-1), B(0;1;2), C(-1;-1;0)$.

$$1. M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0), d(M, (P)) = \frac{|2x - 3|}{3} = 3.$$

Các điểm cần tìm $M(6;0;0)$ hoặc $M(-3; 0; 0)$.

2. $N \in Oy \Rightarrow N(0;y;0)$. Vì $d(N, (P)) = NA$ nên

$$\frac{|y - 3|}{3} = \sqrt{1^2 + (2 - y)^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow 8y^2 - 30y + 45 = 0.$$

Không tồn tại điểm N thỏa mãn.

$$3. \text{ Gọi } K(x; y; z) \text{ ta có hệ } \begin{cases} K \in (P) \\ KB = KC \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 3 \end{cases} \\ KA = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $K\left(-\frac{1}{2}; 2; -1\right), K\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

4. Từ $HA = HB = HC$ với $H(x; y; z)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 3 \\ 2x + 2y - 6z = 1 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Bài 11

$$1. \text{ Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

* Cho $z = 1 \Rightarrow x = 6, y = -4 \Rightarrow A(6; -4; 1) \in (Q) \cap (R)$.

* Cho $z = 0 \Rightarrow x = -4, y = 3 \Rightarrow B(-4; 3; 0) \in (Q) \cap (R)$.

Ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng $\Leftrightarrow A, B \in (P)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m + n = -4 \\ 3m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 4 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Ta có: $\vec{n} = (1; 2; 4)$ là VTPT của (P)

Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x - 6) + b(y + 4) + c(z - 1) = 0$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $c = -10a + 7b$. Suy ra $\vec{v} = (a; b; -10a + 7b)$ là VTPT của (α)

$$\text{Nên theo giả thiết ta có: } \cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-39a + 30b|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (7b - 10a)^2}}$$

$$\text{Suy ra } \cos \varphi = \frac{23}{\sqrt{679}} \Leftrightarrow \frac{|-39a + 30b|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (7b - 10a)^2}} = \frac{23}{\sqrt{679}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{97} |39a - 30b| = 23 \sqrt{3(101a^2 + 50b^2 - 140ab)}$$

$$\Leftrightarrow 3.97(13a - 10b)^2 = 23^2(101a^2 - 140ab + 50b^2)$$

$$\Leftrightarrow 85a^2 + 32ab - 53b^2 = 0 \Leftrightarrow a = -b, a = \frac{53}{85}b$$

• $a = -b$ ta chọn $b = -1 \Rightarrow a = 1, c = -17$. Phương trình $(\alpha): x - y - 17z + 7 = 0$

• $a = \frac{53}{85}b$ ta chọn $b = 85 \Rightarrow a = 53, c = 65$. Phương trình $(\alpha): 53x + 85y + 65z - 43 = 0$.

2. a) Ta có: $\overrightarrow{n_{\alpha_1}} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{n_{\alpha_2}} = (2; 3; 4)$, $\overrightarrow{n_{\alpha_3}} = (1; -2; 2)$ lần lượt là VTPT của ba mặt phẳng

$(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$. Vì $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha_1)$ và (α_2) cắt nhau.

Tương tự ta cũng chứng minh được hai mặt phẳng (α_1) và (α_3) cắt nhau.

b) Xét hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

• Cho $z = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow B(8; -5; 0) \in (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$

• Cho $z = 1 \Rightarrow x = 9; y = -7 \Rightarrow C(9; -7; 1) \in (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$

Vì (P) đi qua A và giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên $(P) \equiv (ABC)$.

Từ đó ta lập được phương trình của (P) : $7x + 8y + 9z - 16 = 0$.

c) Vì (Q) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên (Q) đi qua hai điểm B, C .

Mặt khác: $(Q) \perp (\alpha_3)$ nên $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{n_{\alpha_3}}] = (-2; -1; 0)$ là VTPT của (Q) .

Vậy phương trình (Q) : $2x + y - 11 = 0$.

3.

a)

Hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau khi và chỉ khi

$$\frac{4-a}{2} = \frac{-a-5}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-a}{2} = \frac{-a-5}{3} \\ \frac{-a-5}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 22 \\ -9 = \frac{22}{b} = \frac{22}{5} \end{cases}$$

Vậy không tồn tại a, b để hai mặt phẳng trùng nhau.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi $\frac{4-a}{2} = \frac{-a-5}{3} = \frac{a}{b} \neq \frac{a}{5}$, giải ra ta có $a = 22, b = -\frac{22}{9}$.

Hai mặt phẳng cắt nhau khi chúng không song song, không trùng nhau nên (P) và (Q) cắt nhau với mọi giá trị a, b trừ $a = 22, b = -\frac{22}{9}$.

b)

Nếu $a = 0$ thì $c = 0$ nên thay vào thấy không thỏa mãn.

Nếu $c = 0$ hoặc $c - a = 0$ thì $a = 0$ và cũng không thỏa mãn.

Xét $a \neq 0, c \neq 0, a \neq c$ thì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi và

chỉ khi $\frac{4-a}{3} = \frac{-a-5}{c} = \frac{a}{a(c-a)} \neq \frac{a}{c}$.

Do đó: $\frac{4-a}{3} = \frac{-a-5}{c} = \frac{1}{c-a} \Rightarrow \frac{4-a}{3} = \frac{-a-5-1}{c-c+a} \Rightarrow \frac{4-a}{3} = \frac{-a-6}{a}$

Hay $a^2 - 7a - 18 = 0 \Rightarrow a = 9; a = -2$.

Với $a = 9$ thì $c = \frac{42}{5}$ và với $a = -2$ thì $c = -\frac{3}{2}$.

Vậy các cặp số cần tìm là $(a; c) = \left(9; \frac{42}{5}\right), \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$.

c) Mặt phẳng (P) qua điểm $A(1; 3; 2)$ nên

$$4 - a - 3(a + 5) + 2a + a = 0 \Leftrightarrow a = -11.$$

Vì (P) vuông góc với (R) nên $3(4 - a) - (a + 5).c + a.a(c - a) = 0$, hay
 $45 + 6c + 121(c + 11) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1376}{127}.$

Vậy giá trị cần tìm của a, c là $(a; c) = \left(-11; -\frac{1376}{127}\right).$

Bài 12 Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}$ để chỉ VTPT của mặt phẳng $(\alpha).$

1. Ta có $\overrightarrow{AB}(-1; -5; 3), \overrightarrow{n_{(P)}}(2; -1; -1)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (8; 5; 11).$

Mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên

$$\overrightarrow{n_{(\alpha)}} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(\alpha)}} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (8; 5; 11).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm: $8x + 5y + 11z - 7 = 0.$

2. Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng $(\alpha).$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d(M, (\beta)) = d(M, (\gamma)) &\Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 2z + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|2x + 2y + z + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &\Leftrightarrow |x + 2y - 2z + 2| = |2x + 2y + z + 3| \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z + 2 = 2x + 2y + z + 3 \\ x + 2y - 2z + 2 = -2x - 2y - z - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ 3x + 4y - z + 5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai mặt phẳng (α) cần tìm là

$$(\alpha): x + 3z + 1 = 0 \text{ hoặc } (\alpha): 3x + 4y - z + 5 = 0.$$

3. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $C(-1; 0; 2)$ nên có phương trình dạng

$$a(x + 1) + by + c(z - 2) = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

Vì (α) qua $D(1; -2; 3)$ nên $2a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 2a$ (1).

Ta có $d(O, (\alpha)) = 2$ nên $\frac{|a - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2$ (2).

Thế (1) vào (2) rồi bình phương, rút gọn ta thu được

$$5a^2 - 8ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = -\frac{2}{5}b \end{cases}$$

Do $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ nên

- Với $a = 2b$ thì chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2, c = -2$, do đó phương trình $(\alpha): 2x + y - 2z + 6 = 0.$
- Với $a = -\frac{2}{5}b$ thì chọn $b = -5 \Rightarrow a = 2, c = -14$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x - 5y - 14z + 30 = 0.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn $2x + y - 2z + 6 = 0, 2x - 5y - 14z + 30 = 0.$

4. Mặt phẳng (α) qua $E(0; 1; 1)$ có phương trình dạng:

$$Ax + B(y - 1) + C(z - 1) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Theo bài ra $d(A,(\alpha)) = 2; d(B,(\alpha)) = \frac{11}{7}$ nên

$$\begin{cases} \frac{|A+B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 2 \\ \frac{|-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A+B-2C| = 2\sqrt{A^2+B^2+C^2} \quad (1) \\ 11|A+B-2C| = 14|-4B+C| \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $\begin{cases} 11(A+B-2C) = 14(-4B+C) \\ 11(A+B-2C) = 14(4B-C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-67B+36C}{11} \\ A = \frac{45B+8C}{11} \end{cases}$

• Với $A = \frac{-67B+36C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{-56B+14C}{11}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{-67B+36C}{11}\right)^2 + B^2 + C^2\right] \Leftrightarrow 3826B^2 - 4432BC + 1368C^2 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) chỉ có nghiệm $B = C = 0$, khi đó $A = 0$ (không thỏa mãn điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$)

• Với $A = \frac{45B+8C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{56B-14C}{11}\right)^2 = 4\left[\left(\frac{45B+8C}{11}\right)^2 + B^2 + C^2\right] \Leftrightarrow 1362B^2 + 1112BC + 136C^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow B = -\frac{2}{3}C, B = -\frac{34}{227}C.$$

• Với $B = -\frac{2}{3}C$ thì chọn $C = -3 \Rightarrow B = 2, A = 6$ phương trình $(\alpha): 6x + 2y - 3z + 1 = 0$.

• Với $B = -\frac{34}{227}C$ thì chọn $C = 227 \Rightarrow B = -34, A = 26$ phương trình (α) là

$$26x - 34y + 227z - 193 = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $6x + 2y - 3z + 1 = 0, 26x - 34y + 227z - 193 = 0$.

5. (α) qua $A(1;2;3)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

(α) qua $B(5;-2;3)$ nên $B = A$.

Vì $\widehat{((\alpha), (\beta))} = 45^\circ$ nên $|5A - C| = 3\sqrt{2A^2 + C^2}$, suy ra

$$7A^2 - 10AC - 8C^2 = 0 \Rightarrow A = 2C, A = -\frac{4}{7}C.$$

Từ đó tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha): 2x + 2y + z - 9 = 0, (\alpha): 4x + 4y - 7z + 9 = 0.$$

6. (α) qua $C(1;-1;1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1) + B(y+1) + C(z-1) = 0, A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì $\widehat{((\alpha), (\gamma))} = 60^\circ$ nên $2|A - B| = \sqrt{2(A^2 + B^2 + C^2)}$.

Vì $d(O,(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ nên $3|-A + B - C| = \sqrt{2(A^2 + B^2 + C^2)}$.

$$\text{Suy ra } 2|A - B| = 3|-A + B - C|.$$

Do đó có hai trường hợp

$$\text{Với } C = \frac{5(B-A)}{3} \text{ thì } 2(A-B)^2 = A^2 + B^2 + 25\left(\frac{B-A}{3}\right)^2 \text{ nên}$$

$$8A^2 - 7AB + 8B^2 = 0 \Rightarrow A = B = 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } C = \frac{B-A}{3} \text{ thì } 2(A-B)^2 = A^2 + B^2 + \left(\frac{B-A}{3}\right)^2 \text{ nên}$$

$$4A^2 - 17AB + 4B^2 = 0 \Rightarrow A = 4B, A = \frac{1}{4}B$$

Từ đó ta có hai mặt phẳng thỏa mãn

$$4x + y - z - 2 = 0; \quad x + 4y + z + 2 = 0.$$

Bài 13

1. Gọi $M \in (\alpha), M(x, y, z)$. Từ $d(M, (\alpha_1)) = d(M, (\alpha_2))$ suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm $(\alpha): 5x + 2y + 7z + 34 = 0$.

2. (α) song song với $(\alpha_3): 6x - 3y - 2z + 1 = 0$ nên

$$(\alpha): 6x - 3y - 2z + D = 0 \quad (D \neq 1).$$

$$d(A, (\alpha)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2+D|}{7} = 1 \Rightarrow D = 5; D = -9.$$

Có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$(\alpha): 6x - 3y - 2z + 5 = 0, \quad (\alpha): 6x - 3y - 2z - 9 = 0.$$

3. (α) qua $B(-5; 0; -3)$ nên có phương trình dạng

$$A(x+5) + By + C(z+3) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

$$(\alpha) \text{ qua } C(2; -5; 0) \text{ nên } B = \frac{7A+3C}{5}.$$

$$\text{Ta có } d(M, (\alpha)) = d(N, (\alpha)) \Leftrightarrow |6A - 2B - 3C| = |4A - 4B + 5C|.$$

Giải ra ta có hai mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha): x + 2y + z + 8 = 0, \quad (\alpha): 17x + 31y + 12z + 121 = 0.$$

4. (α) qua $D(1; -3; 1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1) + B(y+3) + C(z-1) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

$$(\alpha) \text{ vuông góc với mặt phẳng } 3x - 2y + 2z + 4 = 0 \text{ nên } 2C = 2B - 3A.$$

$$\text{Ta có } d(E, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|4A + 5B + 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 3.$$

$$\text{Suy ra } (A + 7B)^2 = 9 \left[A^2 + B^2 + \left(\frac{2B-3A}{2} \right)^2 \right], \text{ tức là}$$

$$113A^2 - 164AB - 124B^2 = 0 \Rightarrow A = 2B; A = -\frac{62}{113}B.$$

Có hai mặt phẳng thỏa mãn là

$$(\alpha): 2x + y - 2z + 3 = 0, \quad (\alpha): 62x - 113y - 206z - 195 = 0.$$

5. (α) qua $F(4; 2; 1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-4) + B(y-2) + C(z-1) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì $d(I,(\alpha)) = \frac{7}{3}$, $d(J,(\alpha)) = 1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{|-3A - 3B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{7}{3} \\ \frac{|-A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|-3A - 3B + C| = 7\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \\ |-A + 2B| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}$$

Có hai trường hợp

Với $C = \frac{16A - 5B}{3}$ thì $256A^2 - 124AB - 2B^2 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}B$; $A = -\frac{1}{64}B$.

Suy ra các mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha): x + 2y + 2z - 10 = 0, (\alpha): x - 64y + 112z + 12 = 0.$$

Với $C = \frac{2A + 23B}{3}$ thì

$$2A^2 + 64AB + 251B^2 = 0 \Rightarrow A = \frac{-32 - 3\sqrt{58}}{2}B; A = \frac{-32 + 3\sqrt{58}}{2}B.$$

Suy ra các mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha): (-32 - 3\sqrt{58})x + 2y - (6 + 2\sqrt{58})z + 130 + 14\sqrt{58} = 0$$

$$(\alpha): (-32 + 3\sqrt{58})x + 2y - (6 - 2\sqrt{58})z + 130 - 14\sqrt{58} = 0$$

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 115. Chọn D. Câu 116. Chọn D.

Câu 117. Ta cần chú ý

- Khi $D = 0$ thì (α) đi qua gốc tọa độ.
- Nếu $\begin{cases} BC \neq 0 \\ A = D = 0 \end{cases}$ thì (α) chứa trục Ox . **Chọn B.**

Câu 118. Ta có (P) song song với (Q) nên có dạng: $(P): 2x - y + 5z + D = 0$ với $D \neq 0$.

Lại có (P) qua $E(1;2;-3)$ nên thay tọa độ điểm E vào phương trình của (P) , ta được $D = 15$.

Vậy $(P): 2x - y + 5z + 15 = 0$. **Chọn C.**

Câu 119. Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1;1;2)$ làm một VTPT nên có phương trình $(P): x + y + 2z - 3 = 0$. **Chọn A.**

Câu 120. Mặt phẳng (P) đi qua $G(1;1;1)$ và nhận $\overrightarrow{OG} = (1;1;1)$ làm một VTPT nên có phương trình $(P): x + y + z - 3 = 0$. **Chọn A.**

Câu 121. Mặt phẳng cần tìm đi qua $A(2;1;-1)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (1;-2;-5)$ làm một VTPT nên có phương trình $x - 2y - 5z - 5 = 0$. **Chọn C.**

Câu 122. Tọa độ trung điểm của AB là $M\left(\frac{9}{2}; 5; \frac{1}{2}\right)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua $M\left(\frac{9}{2}; 5; \frac{1}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 8; 5)$ làm một VTPT nên có phương trình $x + 8y + 5z - 47 = 0$. **Chọn D.**

Câu 123. Do (β) đối xứng với (α) qua I nên $(\beta) \parallel (\alpha)$.

Suy ra $(\beta): 4x - 3y - 7z + D = 0$ với $D \neq 3$.

Chọn $M(0; 1; 0) \in (\alpha)$, suy ra tọa độ điểm N đối xứng với M qua I là $N(2; -3; 2)$.

Rõ ràng $N(2; -3; 4) \in (\beta)$ nên thay tọa độ vào phương trình (β) , ta được $D = 11$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\beta): 4x - 3y - 7z + 11 = 0$. **Chọn B.**

Câu 124. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 0)$. Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; 3; 1)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua $A(3; -1; 2)$ và nhận $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; 3; 1)$ làm một VTPT nên có phương trình $3x + 3y + z - 8 = 0$. **Chọn B.**

Câu 125. Mặt phẳng (α) chứa trục Oz nên phương trình có dạng

$$Ax + By = 0 \text{ với } A^2 + B^2 \neq 0.$$

Lại có (α) đi qua $P(2; -3; 5)$ nên $2A - 3B = 0$. Chọn $B = 2 \Rightarrow A = 3$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y = 0$. **Chọn C.**

Câu 126. Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; -4)$, trục Oy có VTCP $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Suy ra $[\overrightarrow{MN}, \vec{j}] = (4; 0; -1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $M(1; -1; 5)$ và nhận $[\overrightarrow{MN}, \vec{j}] = (4; 0; -1)$ làm một VTPT nên có phương trình $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$. **Chọn A.**

Câu 127. Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-10; 4; 6) = -1 \cdot (10; -4; -6)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $M(0; 0; -1)$ và nhận $[\vec{a}, \vec{b}] = (-10; 4; 6)$ làm một VTPT nên có phương trình $(\alpha): -10x + 4y + 6z + 6 = 0$. **Chọn A.**

Câu 128. Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P} = (2; 0; -1)$ và (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q} = (0; 1; 0)$.

Ta có $[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (1; 0; 2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $A(2; -1; 1)$ và nhận $[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (1; 0; 2)$ làm một VTPT nên có phương trình $(\alpha): x + 2z - 4 = 0$.

Chọn B.

Câu 129. Ta có $\overrightarrow{PQ} = (-1; -1; 4)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P} = (3; 2; -1)$.

Suy ra $[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{n_P}] = (-7; 11; 1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $P(2;0;-1)$ và nhận $\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{n_p}\right] = (-7;11;1)$ làm một VTPT nên có phương trình $(\alpha): -7x + 11y + z + 15 = 0$. **Chọn C.**

Câu 130. Phương trình mặt phẳng (α) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $M(8;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;4)$ thuộc (α) nên

$$(\alpha): \frac{x}{8} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x - 4y + 2z - 8 = 0. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 131. Từ giả thiết, ta có $M(4;0;0)$, $N(0;-3;0)$, $P(0;0;2)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) theo đoạn chắn là:

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow 3x - 4y + 6z - 12 = 0. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 132. Ta có $(P) \cap Oz = M(0;0;2)$. Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{k} = (0;0;1)$.

Mặt phẳng cần tìm (P) đi qua $M(0;0;2)$ và nhận $\vec{k} = (0;0;1)$ làm một VTPT nên có phương trình $(P): z - 2 = 0$.

Chọn A.

Câu 133. Do $A = (\alpha) \cap Ox \Rightarrow A(a;0;0)$. Tương tự $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$.

Suy ra tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

Kết hợp với giả thiết, ta được $a = 3; b = 6; c = 9$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$ hay $(\alpha): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$. **Chọn C.**

Câu 134. Vì $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$ nên (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Vì } H(2;1;1) \in (\alpha) \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow 2bc + ab + ac = abc.$$

$$\text{Và } H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - b = 0 \\ c - 2a = 0 \end{cases}.$$

Từ đó, ta được $a = 3, b = c = 6$.

Do đó phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$ hay $(\alpha): 2x + y + z - 6 = 0$. **Chọn A.**

Câu 135. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0;3;-6) \\ \overrightarrow{AC} = (-2;0;-6) \end{cases}$, suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-18;12;6)$ là một VTPT của mp (ABC) .

Do $(SBH) \perp (ABC)$ nên mặt phẳng (SBH) có một VTPT là

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{SB} = (-6; -30; 42).$$

Vậy mặt phẳng (SBH) đi qua điểm $B(0; 3; 0)$ và có một VTPT

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{SB} = (-6; -30; 42) \text{ nên có phương trình } x + 5y - 7z - 15 = 0. \text{ Chọn A.}$$

Câu 136. Ta có $d[A, (P)] = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}.$ **Chọn C.**

Câu 137. Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (α) . Do đó $AH = d[A, (\alpha)]$.

$$\text{Mà } d[A, (\alpha)] = \frac{|16 \cdot 2 - 12 \cdot (-1) - 15 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-15)^2}} = \frac{11}{5}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 138. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (1; 2; 2)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(ABC): x + 2y + 2z - 9 = 0$.

$$\text{Khi đó } d[O, (ABC)] = \frac{|-9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3. \text{ Chọn B.}$$

Câu 139. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$

$$\text{hay } (S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$.

$$\text{Khoảng cách cần tìm là: } d[I, (P)] = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = 3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 140. Bán kính của (S) là: $R = d[I, (\alpha)] = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - (-1)(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 141. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (-3, 0, 1) \\ \overrightarrow{BD} = (-4, -1, 2) \end{cases}.$

Suy ra mặt phẳng (BCD) có một VTPT là $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (1, 2, 3)$.

Do đó mặt phẳng (BCD) có phương trình $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

$$\text{Suy ra bán kính mặt cầu cần tìm: } R = d[A, (BCD)] = \frac{|3 - 4 - 6 - 7|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 142. Mặt cầu (S) có tâm $I(4; -5; -2)$, bán kính $R = 5$.

Ta có $d[I, (P)] = \frac{|3.4 + (-5) - 3.(-2) + 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{19}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{R^2 - d^2[I, (P)]} = \sqrt{5^2 - 19} = \sqrt{6}$. **Chọn C.**

Câu 143. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng cần tìm cắt (S) theo đường tròn có bán kính

$$r = 3 \Leftrightarrow d[I, (P)] = \sqrt{R^2 - r^2} = 4.$$

Tính khoảng cách từ I đến các mặt phẳng đã cho chỉ có kết quả D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 144. Ta có $d[I, (P)] = \frac{|4 + 1 + 2 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3$.

Suy ra bán kính mặt cầu $R = \sqrt{r^2 + d^2[I, (P)]} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$. **Chọn D.**

Câu 145. Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Ta có $d[I, (P)] = \frac{|2.0 + 2.1 - 2.1 + 15|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất: $h_{\min} = d[I, (P)] - R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 146. Chọn $O(0; 0; 0) \in (P)$.

Do $(P) \parallel (Q)$ nên $d[(P), (Q)] = d[O, (Q)] = \frac{7}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là $d((P); (Q)) = \frac{|7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$.

Chọn D.

Câu 147. Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 7; 3)$.

Vì (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với mặt phẳng (α) nên

$$d[(\alpha), (\beta)] = d[M, (\alpha)] = \frac{|3.1 - 2.7 - 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 148. Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_P = (2; -3; 4)$, mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_Q = (4; -13; -6)$.

Ta có $\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{-13}$. Do đó (P) cắt (Q) .

Lại có $\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 2.4 + (-3).(-13) + 4.(-6) = 23 \neq 0$. **Chọn C.**

Câu 149. Ta có $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{2}{-2} \neq \frac{-14}{-16}$. Do đó (P) song song với (Q) . **Chọn A.**

Câu 150. Ta xét hai mặt phẳng (R) và (S) , ta có $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{6} \Rightarrow (R) \parallel (S)$.

Xét các cặp còn lại ta thấy chúng không song song với nhau. **Chọn B.**

Câu 151. Ta có VTPT của (α) , (β) , (γ) lần lượt là $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; 1; 2)$, $\vec{n}_{(\beta)} = (1; 1; -1)$, $\vec{n}_{(\gamma)} = (1; -1; 0)$.

Xét cặp $\vec{n}_{(\alpha)}$ và $\vec{n}_{(\beta)}$, ta có $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$. Suy ra (α) không song song với (β) . **Chọn C.**

Câu 152. Ta có $A \in (Q)$ vì $-1 + 2.2 - 3.1 = 0$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)} = (2; 4; -6)$, mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_{(Q)} = (1; 2; -3) = \frac{1}{2} \vec{n}_{(P)}$.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) . **Chọn A.**

Câu 153. Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n_P} = (1; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n_Q} = (2m - 1; -2m^2 + m; 2m - 4)$.

Để $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n_P} \perp \vec{n_Q} \Leftrightarrow \vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 0 \Leftrightarrow (2m - 1).1 + (-2m^2 + m).(-3) + (2m - 4).2 = 0$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 154. Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = (1; -1; n)$, mặt phẳng (β) có VTPT $\vec{n}_\beta = (2; m; 2)$.

Để $(\alpha) \parallel (\beta)$ khi và chỉ khi $\vec{n}_\alpha = k \vec{n}_\beta$ ($k \neq 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k.2 \\ -1 = k.m \\ n = k.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 155. Ta có $\vec{AB} = (5; 0; -4)$. Suy ra $[\vec{AB}, \vec{v}] = (-4; -23; -5)$.

Do đó mặt phẳng (P) được xác định là đi qua $A(-3; 2; 2)$ và có một VTPT $[\vec{AB}, \vec{v}] = (-4; -23; -5)$ nên có phương trình $(P): 4x + 23y + 5z - 44 = 0$.

Để $(P) \equiv (Q)$ khi và chỉ khi $\frac{4}{4} = \frac{m}{23} = \frac{5}{5} = \frac{1-n}{-44}$, suy ra $\begin{cases} m = 23 \\ n = 45 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 156. Để (α) trùng (β) khi $\frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} = \frac{-6+m}{-10} \Leftrightarrow m = 1$.

Để (α) song song (β) khi $\frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{-6+m}{-10}$: không có giá trị m .

Vậy để (α) cắt (β) thì $m \neq 1$. **Chọn C.**

Câu 157. Trục Oz có VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (4; -3; 7)$.

Rõ ràng $\vec{n}$ không cùng phương với $\vec{k}$ và $\vec{n} \cdot \vec{k} = 7 \neq 0$.

Suy ra trục Oz cắt mặt phẳng (α) tại $M(0; 0; 1)$. **Chọn A.**

Câu 158. Trục Ox có VTCP $\vec{i} = (1; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) có VTP $\vec{n} = (0; 2; 1)$.

Ta có $\vec{i} \cdot \vec{n} = 0$ và điểm $O(0; 0; 0) \in (\alpha)$. Suy ra mặt phẳng (α) chứa trục Ox . **Chọn D.**

Câu 159. Xét mặt phẳng (P) , ta có
$$\begin{cases} P \cap Ox = A(2; 0; 0) \\ P \cap Oy = B(0; -3; 0) \\ P \cap Oz = C(0; 0; 1) \end{cases}$$
 Chọn A.

Cách khác. Ta thấy (Q) vắng y và z nên song song với (Oyz) , (R) vắng y nên song song với trục Oy , (S) vắng x nên song song với trục Ox .

Câu 160. Mặt phẳng (γ) có VTPT là $\vec{n} = (0; 0; 1)$ cùng phương với VTCP của trục Oz .

Suy ra $(\gamma) \perp (Oz)$. Do đó B sai. **Chọn B.**

Câu 161. Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 4; 1)$, bán kính $R = 6$.

Khoảng cách từ tâm I đến (P) là: $d[I, (P)] = \frac{|0 - 8 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3 < R$.

Vậy (P) cắt (S) . **Chọn D.**

Câu 162. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 3$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d[I, (P)] = \frac{|1 - 4 + 6 + 24|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{27}{3} = 9 > R$.

Do đó (P) không cắt (S) . **Chọn B.**

Câu 163. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{14}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là:

$$d[I, (P)] = \frac{|9 + 2 + 2 + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \sqrt{14} = R.$$

Do đó (P) tiếp xúc với (S) . **Chọn C.**

Câu 164. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Nhận thấy $d[I, (P_4)] = \frac{|-1 + 2 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 0$.

Suy ra (P_4) đi qua tâm mặt cầu (S) . **Chọn D.**

Câu 165. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 7$.

Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Leftrightarrow d[I, (\alpha)] = R$.

Nhận thấy mặt phẳng $6x + 2y + 3z - 55 = 0$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 166. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Do $(P) \parallel (\alpha)$ nên suy ra $(P): 2x - y + 2z + D = 0$ với $D \neq -4$.

Lại có (P) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d[I, (P)] = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|(-1).2 + 2.(-1) + 2.1 + D|}{3} = 2 \Leftrightarrow |D - 2| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 8 \\ D = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. **Chọn B.**

Câu 167. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$.

Mặt phẳng tiếp diện với (S) tại A đi qua $A(3; 4; 0)$ và nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$ làm một VTPT nên có phương trình $2x + 2y + z - 14 = 0$. **Chọn C.**

Câu 168. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

$$\text{Đề } (\alpha) \text{ tiếp xúc } (S) \Leftrightarrow d[I, (\alpha)] = R \Leftrightarrow \frac{|3.1 + (m-4)(-3) - 3m(-1) + 2m - 8|}{\sqrt{9 + (m-4)^2 + 9m^2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m+7|}{\sqrt{10m^2 - 8m + 25}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (2m+7)^2 = 3(10m^2 - 8m + 25) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn A.

Câu 169. VTPT của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là: $\vec{n}_P = (2; -1; -1)$, $\vec{n}_Q = (1; 0; -1)$.

$$\text{Ta có } \cos[(P), (Q)] = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra hai mặt phẳng (P) và (Q) hợp với nhau góc 30° . **Chọn A.**

Câu 170. VTPT của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là: $\vec{n}_1 = (2; -1; -2)$, $\vec{n}_2 = (1; -1; 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|2.1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = 45^\circ. \text{ **Chọn B.}**$$

Câu 171. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; -4)$.

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ACD) là $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] = (4\sqrt{2}; 0; 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|(-2\sqrt{2}) \cdot 4\sqrt{2}|}{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(4\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 60^\circ. \text{ Chọn C.}$$

Câu 172. Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}] = (1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 173. Từ giả thiết, suy ra $\overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_p = (1; -1; 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_p, \overrightarrow{OH}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = 45^\circ. \text{ Chọn B.}$$

Câu 174. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; m)$.

Suy ra mặt phẳng (ABC) có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2m; m; 2)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|2m \cdot 0 + m \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{(2m)^2 + m^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}.$$

Chọn C.

Câu 175. Vì $M \in Oy$ nên $M(0; y_0; 0)$.

$$\text{Theo giả thiết: } d[M, (\alpha)] = 4 \Leftrightarrow \frac{|2y_0 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 4 \Leftrightarrow |y_0 - 1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 7 \\ y_0 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 7; 0) \\ M(0; -5; 0) \end{cases}.$$

Chọn B.

Câu 176. Gọi $M(0; y; 0) \in Oy$.

$$\text{Ta có: } d(M, P) = d(M, Q) \Leftrightarrow \frac{|y + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|y - 5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |y + 1| = |y - 5| \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow M(0; 2; 0).$$

Chọn A.

Câu 177. Giả sử $M(0;0;z) \in Oz$ là điểm cần tìm.

$$\text{Theo giả thiết: } AM = d[M, (\alpha)] \Leftrightarrow \sqrt{(0-2)^2 + (0-3)^2 + (z-4)^2} = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + z - 17|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow 13 + (z-4)^2 = \frac{(z-17)^2}{14} \Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \Rightarrow M(0;0;3). \text{ Chọn C.}$$

Câu 178. Gọi $E(1;y;0)$ với $y \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Theo giả thiết: } d[E, (\alpha)] = d[E, (\beta)] \Leftrightarrow \frac{|2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|4-y|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 - y \\ 2y = -4 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow E(1; -4; 0). \text{ Chọn B.}$$

Câu 179. Ta có $M \in d$ nên $M(2+3t; 2+4t; -t)$.

Do I là trung điểm MN , suy ra $N(-3t; 2-4t; t)$.

Mặt khác, $N \in (S)$ nên $(-3t-1)^2 + (2-4t-2)^2 + (t-3)^2 = 36$

$$\Leftrightarrow 26t^2 - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-3; -2; 1) \\ N(3; 6; -1) \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 180. Đặt $f = x + y + z - 4$.

Ta có $f(A) = 2 + 4 + 4 - 4 = 6 > 0$ và $f(B) = 2 - 5 - 5 - 4 = -12 < 0$.

Suy ra A, B ở khác phía đối với mặt phẳng (P) .

Khi đó điểm M thỏa mãn bài toán chính là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra tọa độ điểm } M \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 3t \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1; 1). \text{ Chọn A.}$$

Câu 181. Đặt $f = 2x - y - z + 3$.

Ta có $f(A) = 2 + 1 - 2 + 3 = 4 > 0$ và $f(B) = 4 - 0 - 1 + 3 = 6 > 0$.

Suy ra A, B ở cùng phía đối với mặt phẳng (P) . (1)

Ta có $|MA - MB| \leq AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm M thỏa mãn là giao của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng (AB) : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Suy ra độ điểm M thỏa mãn $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -3; 4)$ **Chọn A.**

Câu 182. Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$, suy ra $I(4; -1; -3)$.

Ta có $2\vec{MA} - \vec{MB} = 2\vec{MI} + 2\vec{IA} - \vec{MI} - \vec{IB} = \vec{MI}$. Suy ra $|2\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{MI}| = MI$.

Do đó $|2\vec{MA} - \vec{MB}|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) . Đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) có là $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}$.

Tọa độ hình chiếu M của I trên (P) thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1} \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; -4; 0). \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 183. Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$, suy ra $I(1; 2; 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Do I cố định nên $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) có là $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-2}$.

Tọa độ hình chiếu M của I trên (P) thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-2} \\ 3x - 3y - 2z - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(4; -1; 0). \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 184. Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\vec{IA} - 2\vec{IB} = \vec{0}$, suy ra $I(13; -11; 19)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 - 2MB^2 &= \vec{MA}^2 - 2\vec{MB}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 - 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= -MI^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} - 2\vec{IB}) + IA^2 - 2IB^2 = -MI^2 + IA^2 - 2IB^2. \end{aligned}$$

Do I cố định nên $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất khi $-MI^2$ lớn nhất hay MI nhỏ nhất nên M là hình chiếu của I trên (P) . Vì M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) nên

$$\begin{cases} M(13+t; -11+t; 19+t) \\ M \in (P) \Leftrightarrow (13+t) + (-11+t) + (19+t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -7. \text{ Suy ra } M(6; -18; 12). \text{ Chọn C.}$$