

Chuyên Đề :

MŨ VÀ LOGARIT

Nguyễn Thành Long

CHƯƠNG I: PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ MŨ CHỦ ĐỀ I: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

Dạng 1: Phương trình $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

TH 1: Khi a là một hằng số thỏa mãn $0 < a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

TH 2: Khi a là một hàm của x thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

Đặc biệt:

Khi $b = 0, b < 0$ thì kết luận ngay phương trình vô nghiệm

Khi $b = 1$ ta viết $b = a^0 \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Khi $b \neq 1$ mà b có thể biểu diễn thành $b = a^c \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^c \Leftrightarrow f(x) = c$

Chú ý:

Trước khi biến đổi tương đương thì $f(x)$ và $g(x)$ phải có nghĩa

II. Bài tập áp dụng:

Loại 1: Cơ số là một hằng số

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \cdot \frac{1}{8^{1-x}} = 16^x$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} = 3$

c. $2^{x+1} + 2^{x-2} = 36$

Giải:

a. PT $\Leftrightarrow 2^{x+1+2x-2-3+3x} = 2^{4x} \Leftrightarrow 6x-4=4x \Leftrightarrow x=2$

$$b. \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} = 3 \Leftrightarrow 3^{-(x^2-3x+1)} = 3^1 \Leftrightarrow -(x^2-3x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$c. 2^{x+1} + 2^{x-2} = 36 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{4} = 36 \Leftrightarrow \frac{8 \cdot 2^x + 2^x}{4} = 36$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 36 \cdot 4 \Leftrightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 2: Giải các phương trình

$$a. 0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$$

$$b. 8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25(\sqrt{2})^{7x}$$

$$c. 2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}$$

Giải:

$$Pt \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot (2^2)^{2x-3} = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3}\right)^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-3} \cdot 2^{2(2x-3)} = \left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x} \Leftrightarrow 2^{-3+4x-6} = 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 4x-9 = \frac{5}{2}x \Leftrightarrow x = 6$$

b. Điều kiện $x \neq -1$

$$PT \Leftrightarrow 2^{3\frac{2x-1}{x+1}} = 2^{\frac{7x}{2}-2} \Leftrightarrow 3\frac{2x-1}{x+1} = \frac{7x}{2}-2 \Leftrightarrow 7x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{2}{7} \end{cases}$$

$$c. Pt \Leftrightarrow (2.5)^{x+2} = (2.5)^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 10^{x+2} = 10^{3x} \Leftrightarrow x+2 = 3x \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Bài 2: Giải phương trình: } \sqrt{\left(x-2\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2}$$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 1 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \log_3 x \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \log_3 x = 0 \\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x-\frac{1}{2} = 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 3: Giải các phương trình:

a. $(\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} = (\sqrt{10} - 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$

b. $\left[2 \left(2^{\sqrt{x}+3} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

Giải:

a. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Vì $\sqrt{10} + 3 = \frac{1}{\sqrt{10} - 3}$.

PT $\Leftrightarrow (\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} = (\sqrt{10} - 3)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = \frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow 9 - x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\sqrt{5}$

b. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow 2^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} \left(2^{\sqrt{x}+3} \right)^{\frac{2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} \cdot 2^{\frac{2(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 4$

$\Leftrightarrow 2^{\left(\frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 2(\sqrt{x}+3) = 4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow 4x - 10\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 9$

Loại 2: Khi cơ số là một hàm của x

Bài 1: Giải phương trình $(2 + x - x^2)^{\sin x} = (2 + x - x^2)^{2 - \sqrt{3}\cos x}$

Giải:

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 2 + x - x^2 > 0 \\ (2 + x - x^2 - 1)(\sin x - 2 + \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2(*) \\ \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0(1) \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2(2) \end{cases} \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*)

Giải (2): $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Để nghiệm thỏa mãn điều kiện (*) ta phải có:

$$-1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left(-1 - \frac{\pi}{6} \right) < k < \frac{1}{2\pi} \left(2 - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow k = 0, k \in \mathbb{Z} \text{ khi đó ta nhận được } x_3 = \frac{\pi}{6}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{\pi}{6}$.

Bài 2: Giải phương trình: $(x-3)^{3x^2-5x+2} = (x^2-6x+9)^{x^2+x-4}$

Giải:

Phương trình được biến đổi về dạng: $(x-3)^{3x^2-5x+2} = [(x-3)^2]^{x^2+x-4} = (x-3)^{2(x^2+x-4)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ 0 < x-3 \neq 1 \\ 3x^2-5x+2=2x^2+2x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x < 3 \neq 4 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x=4, x=5$.

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $4 \cdot 9^{x-1} = 3 \cdot 2^{\frac{2x+1}{2}}$ b. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

c. $\left[\left(\sqrt[5]{27} \right)^{\frac{x}{4}} \sqrt[3]{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x}{3}}} = \sqrt[4]{3^7}$ d. $\sqrt[3]{(x-1)^{x-1}} = (x-1)^{\frac{3}{x-1}}$

HD:

a. $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^{2x-3} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

b. $\Leftrightarrow 3^{x+1} = 5^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5} \right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -1$

c. $x = 10$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ VÀ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ lũy thừa người ta có thể logarit theo cùng 1 cơ số cả 2 vế của phương trình, ta có các dạng:

Dạng 1: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình: (cơ số khác nhau và số mũ khác nhau)

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$$

hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.

Đặc biệt: (cơ số khác nhau và nhưng số mũ bằng nhau)

Khi $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ (vì $b^{f(x)} > 0$)

Chú ý: Phương pháp áp dụng khi phương trình có dạng tích – thương của các hàm mũ

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải các phương trình

a. (ĐH KTQD – 1998) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

b. $3^{x^2-2} \cdot 4^{\frac{2x-3}{x}} = 18$

c. $2^{x^2-4} \cdot 5^{x-2} = 1$

d. $2^{x^2-2x} = \frac{3}{2}$

Giải:

a. **Cách 1:** Viết lại phương trình dưới dạng:

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3x-1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1$$

Lấy logarit cơ số 2 vế, ta được:

$$\log_2 \left(5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 (5^{x-3}) + \log_2 \left(2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot \log_2 5 + \frac{x-3}{x} \log_2 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\log_2 5 + \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{\log_2 5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = 3; x = -\frac{1}{\log_2 5}$

Cách 2: PT $\Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{\frac{3-x}{x}} \Leftrightarrow 5^{x-3} = \left(2^{\frac{1}{x}} \right)^{x-3}$

$$\Leftrightarrow 5^{x-3} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}} \right)^{x-3} \Leftrightarrow \left(5 \cdot 2^{\frac{1}{x}} \right)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 5 \cdot 2^{\frac{1}{x}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x = -\log_5 2 \end{cases}$$

b. Ta có $3^{x^2-2} \cdot 4^{\frac{2x-3}{x}} = 18 \Leftrightarrow \log_3 \left(3^{x^2-2} \cdot 4^{\frac{2x-3}{x}} \right) = \log_3 18$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 + \frac{4x-6}{x} \cdot \log_3 2 = 2 + \log_3 2 \Leftrightarrow (x^2 - 4) + \frac{3(x-2)}{x} \cdot \log_3 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(x^2 + 2x + 3 \log_3 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x^2 + 2x + 3 \log_3 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

c. PT $\Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-4} + \log_2 5^{2-x} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 - (x-2)\log_2 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2-\log_2 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + 2 - \log_2 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 + \log_2 5 \end{cases}$$

d. Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình ta được:

$$\log_2 2^{x^2-2x} = \log_2 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = \log_2 3 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \log_2 3 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 1 + \log_2 3 = \log_2 3 > 0$$

suy ra phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

Chú ý:

Đối với 1 phương trình cần thiết rút gọn trước khi logarit hoá.

Bài 2: Giải các phương trình

a. $8^{\frac{x}{x+2}} = 4 \cdot 3^{4-x}$

b. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{2}} - 2^{2x-1}$

c. $4^{\log_{0,5}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}$

d. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+3} + 3^{x+1}$

Giải:

a. Điều kiện $x \neq -2$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2} = 3^{4-x} \Leftrightarrow \frac{3x}{x+2} - 2 = (4-x)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-4) \cdot \left(\frac{1}{x+2} + \log_2 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \frac{1}{x+2} + \log_2 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2-\log_2 3 \end{cases}$$

b.

$$\text{PT} \Leftrightarrow 4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^{x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

c. Điều kiện $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 > 0$ (*)

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_{2^{-1}}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2) = \log_4 3^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2) = -\log_2 3 \text{ thỏa mãn (*)}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = 3 \Leftrightarrow \cos x(5 \sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5 \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x = \frac{1}{5} = \tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \alpha + l\pi \end{cases}$$

d. PT

$$\Leftrightarrow 5^x + 5.5^x + 25.5^x = 3^x + 27.3^x + 3.3^x$$

$$\Leftrightarrow 31.5^x = 31.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$

Bài 3: Giải các phương trình

a. $x^{\lg x} = 1000x^2$

b. $x^{\log_2(x+4)} = 32$

c. $7^{\log_{25}^2(5x)-1} = x^{\log_5 7}$

d. $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$

Giải:

a. Điều kiện $x > 0$

$$\Leftrightarrow \lg x \cdot \lg x = \lg 1000 + \lg x^2 \Leftrightarrow (\lg x)^2 - 2 \lg x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lg x + 1)(\lg x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 1 = 0 \\ \lg x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/10 \\ x = 1000 \end{cases}$$

b. Điều kiện $x > 0$

$$PT \Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2(x+4)} = \log_2 32(\log_2 x + 4) \cdot \log_2 x = 5 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1) \cdot (\log_2 x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{32} \end{cases}$$

c. Điều kiện $x > 0$

$$\Leftrightarrow \log_5 \left(7^{\log_{25}^2(5x)-1} \right) = \log_5 \left(x^{\log_5 7} \right) \Leftrightarrow (\log_{25}^2(5x) - 1) \cdot \log_5 7 = \log_5 7 \cdot \log_5 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_5^2(5x) - \log_5 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x - 2 \log_5 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = -1 \\ \log_5 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = 125 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = 125 \end{cases}$

d. Điều kiện $x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \log_2 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = \log_2 36 = 2 + 2 \log_2 3 \Leftrightarrow x \cdot \log_2 3 + \frac{3x}{x+1} = 2 + 2 \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \log_2 3 + (3 + \log_2 3)x = 2(x+1) + 2(x+1) \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \log_2 3 + (1 - \log_2 3)x - 2 - 2 \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 - \log_3 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 - \log_3 2 \end{cases}$

Bài 4: Giải các phương trình sau :

a. $8^x \cdot 5^{x^2-1} = \frac{1}{8}$

b. $3^x \cdot 9^{1-x} = \frac{4}{27^x}$

c. $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$

d. $2^x \cdot 5^{x^2} = 10$

Giải:

a. Lấy logarit hai vế với cơ số 8, ta được

$$\begin{aligned}8^x \cdot 5^{x^2-1} &= \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_8 8^x \cdot 5^{x^2-1} = \log_8 \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow \log_8 8^x + \log_8 5^{x^2-1} &= \log_8 8^{-1} \Leftrightarrow x + (x^2-1)\log_8 5 = -1 \\ \Leftrightarrow x+1+(x^2-1)\log_8 5 &= 0 \Leftrightarrow (x+1)+(x+1)(x-1)\log_8 5 = 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)[1+(x-1)\log_8 5] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 1+(x-1)\log_8 5=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \cdot \log_8 5 = \log_8 5 - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1-\log_5 8 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -1, x = 1 - \log_5 8$

$$\begin{aligned}\text{b. PT } \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^{2-2x} \cdot 3^{3x} &= 4 \Leftrightarrow 3^{2x+2} = 4 \Leftrightarrow 2x+2 = \log_3 4 \\ \Leftrightarrow 2x &= \log_3 4 - 2 \Leftrightarrow 2x = \log_3 4 - \log_3 9 = \log_3 \frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \frac{2}{3}$$

c. Lấy log hai vế của phương trình theo cơ số 2

$$\begin{aligned}\text{Ta được phương trình } \log_2 3^x + \log_2 2^{x^2} &= 0 \Leftrightarrow x \log_2 3 + x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x(\log_2 3 + x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\log_2 3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d. PT } \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 5^{x^2}) &= \log_2 (2.5) \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 5^{x^2} = \log_2 2 + \log_2 5 \\ \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 5 &= 1 + \log_2 5 \Leftrightarrow (\log_2 5)x^2 + x - 1 - \log_2 5 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{-1-\log_2 5}{\log_2 5} \end{cases}\end{aligned}$$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: Giải các phương trình sau

$$\text{a. } 5^x \cdot \sqrt{x+1} \sqrt{8^x} = 100$$

HD: Điều kiện $x > 0$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 5^{x(x+1)} \cdot 2^{3x} &= 5^{2(x+1)} \cdot 2^{2(x+1)} \Leftrightarrow 5^{x^2-x-2} = 2^{2-x} \\ \Leftrightarrow \log_2 5 \cdot (x^2 - x - 2) &= 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1-\log_5 2 (\text{loại}) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{b. } 2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$$

HD:

$$\Leftrightarrow 2^{x-2} = 3^{(x-2)(x+4)} \Leftrightarrow x-2 = (x-2)(x+4)\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_3 2 - 4 \end{cases}$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $3^{x^2} \cdot 2^x = 1$ b. $2^{x^2-4} = 3^{x-2}$ c. $5^{x^2-5x+6} = 2^{x-3}$ d. $3^x \cdot 4^{\frac{x-1}{x}} = 18$
 e. $8^{\frac{x}{x+2}} = 36 \cdot 3^{2-x}$ f. $5^{7^x} = 7^{5^x}$ g. $5^{3-\log_5 x} = 25x$ i. $x^4 \cdot 5^3 = 5^{\log_x 5}$
 k. $9 \cdot x^{\log_9 x} = x^2$

Đs:

a. $0; -\log_3 2$ b. $2; \log_3 2 - 2$ c. $3; 2 + \log_5 2$ d. $2; -\log_3 2$
 e. $4; -2 - \log_3 2$ f. $\log_7(\log_5 7)$ g. $\sqrt{5}$ h. $\frac{1}{5}; \sqrt[4]{5}$ k. 9

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 1

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng 1 ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Phương trình $\alpha_k + \alpha_{k-1}a^{(k-1)x} + \dots + \alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0$

Khi đó đặt $t = a^x$ điều kiện $t > 0$, ta được: $\alpha_k t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0 = 0$

Mở rộng: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hợp $t > 0$. Khi đó: $a^{2f(x)} = t^2, a^{3f(x)} = t^3, \dots, a^{kf(x)} = t^k$

Và $a^{-f(x)} = \frac{1}{t}$

Dạng 2: Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 a^x + \alpha_3 = 0$ với $a.b = 1$

Khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t < 0$ suy ra $b^x = \frac{1}{t}$ ta được: $\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0$

Mở rộng: Với $a.b = 1$ thì khi đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hợp $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

Dạng 3: Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$ khi đó chia 2 vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$ (hoặc

$a^{2x}, (a.b)^x$), ta được: $\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, điều kiện $t < 0$, ta được: $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$

Mở rộng:

Với phương trình mũ có chứa các nhân tử: $a^{2f}, b^{2f}, (a.b)^f$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia 2 vế phương trình cho $b^{2f} > 0$ (hoặc $a^{2f}, (a.b)^f$)

- Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^f$ điều kiện hợp $t > 0$

Dạng 4: Lượng giác hoá.

Chú ý: Ta sử dụng ngôn từ điều kiện hợp $t > 0$ cho trường hợp đặt $t = a^{f(x)}$ vì:

- Nếu đặt $t = a^x$ thì $t > 0$ là điều kiện đúng.

- Nếu đặt $t = 2^{x^2+1}$ thì $t > 0$ chỉ là điều kiện hợp, bởi thực chất điều kiện cho t phải là $t \geq 2$. Điều kiện này đặc biệt quan trọng cho lớp các bài toán có chứa tham số.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình

a. $4^{\cot^2 x} + 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 3 = 0 \quad (1)$

b. $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2 + \sqrt{2}$

Giải:

a. Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (*)$

Vì $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ nên phương trình (1) được biết dưới dạng:

$$4^{\cot^2 x} + 2.2^{\cot^2 x} - 3 = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = 2^{\cot^2 x}$ điều kiện $t \geq 1$ vì $\cot^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 2^{\cot^2 x} \geq 2^0 = 1$

Khi đó phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{\cot^2 x} = 1 \Leftrightarrow \cot^2 x = 0$$

thoả mãn (*)

$$\Leftrightarrow \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b. PT $\Leftrightarrow \left(2^{\sin^2 x}\right)^2 + 2^{1-\sin^2 x} = 2 + \sqrt{2}$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$ ($t > 0$) ta được

$$t^2 + \frac{2}{t} = 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow t^3 - (2 + \sqrt{2})t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2} \\ t = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Với $t = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2} = 2^{\sin^2 x}$ (phương trình vô nghiệm)

Bài 2: Giải các phương trình

a. $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$

b. (ĐH – B 2007) $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

c. $(3 + \sqrt{5})^x + 16(3 - \sqrt{5})^x = 2^{x+3}$

d. (ĐHL – 1998) $(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^{\sin x} + (\sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^{\sin x} = 4$

e. $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$

Giải:

a. Nhận xét rằng: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$; $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Do đó nếu đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$ điều kiện $t > 0$, thì: $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$ và $(7 + 4\sqrt{3})^x = t^2$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

b. Đặt $t = (\sqrt{2} + 1)^x$ ta được Pt:

$$t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} - 1 \vee t = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

c. Chia 2 vế của phương trình cho $2^x > 0$, ta được:

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + 16\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^x = 8 \quad (*)$$

Nhận xét rằng: $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1$

Đặt $t = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0 \Rightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$

Khi đó pt (*) có dạng:

$$t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} 4$$

d. Nhận xét rằng: $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})} = 1$

Đặt $t = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}$, điều kiện $t > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = \frac{1}{t}$

Khi đó pt (1) có dạng:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - \sqrt{3} \\ t = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = 2 - \sqrt{3} \\ \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\right)^{\sin x} = (2+\sqrt{3})^{-1} \\ \left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\right)^{\sin x} = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+\sqrt{3})^{\sin x} = (2+\sqrt{3})^{-1} \\ (2+\sqrt{3})^{\sin x} = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e. Nhận xét rằng: $(5+\sqrt{24})(5-\sqrt{24})=1$

Đặt $t = (5+\sqrt{24})^x$, điều kiện $t > 0 \Rightarrow (5-\sqrt{24})^x = \frac{1}{t}$

Khi đó pt (1) có dạng:

$$t + \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 - \sqrt{24} \\ t = 5 + \sqrt{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5+\sqrt{24})^x = 5 - \sqrt{24} \\ (5+\sqrt{24})^x = 5 + \sqrt{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5+\sqrt{24})^x = (5-\sqrt{24})^{-1} \\ (5+\sqrt{24})^x = 5 + \sqrt{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nhận xét:

- Như vậy trong ví dụ trên bằng việc đánh giá:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2; (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

Ta đã lựa chọn được ẩn phụ $t = (2 + \sqrt{3})^x$ cho phương trình

- Việc lựa chọn ẩn phụ thông qua đánh giá mở rộng của $a.b = 1$, đó là: $a.b = c \Leftrightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1$ tức là với các phương

trình có dạng: $A.a^x + B.b^x + C = 0$

Khi đó ta thực hiện phép chia cả 2 vế của phương trình cho $c^x \neq 0$, để nhận được:

$$A\left(\frac{a}{c}\right)^x + B\left(\frac{b}{c}\right)^x + C = 0 \text{ từ đó thiết lập ẩn phụ } t = \left(\frac{a}{c}\right)^x, t > 0 \text{ và suy ra } \left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{1}{t}$$

Bài 3: Giải các phương trình

a. (ĐHTL – 2000) $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

b. $2.4^{x^2+1} + 6^{x^2+1} = 9^{x^2+1}$

Giải:

a. Chia cả 2 vế phương trình cho $2^{2x+2} \neq 0$ ta được:

$$2^{2x^2-2x-1} - 9 \cdot 2^{x^2-2x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4} \cdot 2^{x^2-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x^2-2x} - 9 \cdot 2^{x^2-x} + 4 = 0$$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1 \vee x = 2$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2 \cdot 2^{2(x^2+1)} + (2 \cdot 3)^{x^2+1} = 3^{2(x^2+1)}$$

Chia hai vế của phương trình cho $2^{2(x^2+1)} \neq 0$, ta được:

$$2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2+1)} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}, \text{ vì } x^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^1 \Leftrightarrow t \geq \frac{3}{2}$$

Khi đó pt (*) có dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1(l) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2+1 = \log_{\frac{3}{2}} 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\log_{\frac{3}{2}} 2 - 1}$$

Chú ý:

Trong ví dụ trên, vì bài toán không có tham số nên ta sử dụng điều kiện cho ẩn phụ chỉ là $t > 0$ và chúng ta đã thấy với $t = \frac{1}{2}$ vô nghiệm. Do vậy nếu bài toán có chứa tham số chúng ta cần xác định điều kiện đúng cho ẩn phụ như sau:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-x} \geq 2^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Bài 4: Giải các phương trình

a. (ĐHYHN – 2000) $2^{3x} - 6 \cdot 2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$

b. (ĐHQGHN – 1998) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

Giải:

a. Viết lại phương trình có dạng:

$$\left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - \frac{2}{2^x} \Rightarrow 2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 + 3 \cdot 2^x \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = t^3 + 6t$$

$$\text{Khi đó phương trình (1) có dạng: } t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1$$

Đặt $u = 2^x, u > 0$ khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{u}{2} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \text{ (loại)} \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$125^x + 50^x = 2.8^x \quad (1)$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $8^x \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{125}{8}\right)^x + \left(\frac{50}{8}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{5}{2}\right)^x, \text{ điều kiện } t > 0$$

Khi đó pt (2) có dạng:

$$t^3 + t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + 2t + 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 5: Giải các phương trình

$$\text{a. } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} = 12$$

$$\text{b. } 3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$$

$$\text{c. } 4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$$

Giải:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 12 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, \text{ điều kiện } t > 0$$

$$\text{Khi đó pt (1) có dạng: } t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 3 \Leftrightarrow x = -1$$

b. Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{Biến đổi phương trình về dạng: } 3^{\sqrt{x}} - \frac{3}{3^{\sqrt{x}}} + 4 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 3^{\sqrt{x}}, \text{ điều kiện } t \geq 1$$

$$\text{Khi đó pt (1) có dạng: } t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{c. Biến đổi phương trình về dạng: } 2^{2(x+1)} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 8 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, \text{ điều kiện } t > 0$$

Khi đó pt (1) có dạng:

$$2t^2 - 6t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -1(\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 6: Giải các phương trình

a. (ĐHDB – 2006) $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0$

b. $3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0$

c. $3^{x+2} - 3^{2-x} = 24$

d. $7.2^{2(x^2+1)} - 20.2^{x^2+1} + 12 = 0$

Giải:

a. Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{9}9^{x^2+x} - \frac{10}{9}.3^{x^2+x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (3^{x^2+x})^2 - 10.3^{x^2+x} + 9 = 0$

Đặt $t = 3^{x^2+x}, t > 0$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 9 \end{cases}$$

Với $t = 1 \Rightarrow 3^{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow 3^{x^2+x} = 3^0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Với $t = 9 \Rightarrow 3^{x^2+x} = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2+x} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

b. $3^8.3^{2x} - 4.3^5.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow 6561.(3^x)^2 - 972.3^x + 27 = 0 \quad (*)$

Đặt $t = 3^x > 0$. Pt (*) $\Leftrightarrow 6561t^2 - 972t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \\ t = \frac{1}{27} \end{cases}$

Với $t = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

Với $t = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -2, x = -3$

c. $3^{x+2} - 3^{2-x} = 24 \Leftrightarrow 9.3^x - \frac{9}{3^x} - 24 = 0 \Leftrightarrow 9.(3^x)^2 - 24.3^x - 9 = 0 \quad (*)$

Đặt $t = 3^x > 0$

$$\text{Pt} (*) \Leftrightarrow 9t^2 - 24t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$

d. Đặt $t = 2^{x^2+1}$, vì $x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} \geq 2^1 \Leftrightarrow t \geq 2$

Khi đó pt có dạng:

$$7t^2 - 20t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{6}{7} \end{cases} (loi) \Leftrightarrow 2^{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 7: Giải các phương trình

a. $6 \cdot 2^{-x} = 2^x + 1$

b. $64.9^x - 84.2^x + 27.6^x = 0$

c. $3^{4x} - 4 \cdot 3^{2x+1} + 27 = 0$

d. $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$

Giải:

a. Pt $\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{1}{2^x} = 2^x + 1$. Đặt $t = 2^x$, $t > 0$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{1}{t} = t + 1 \Leftrightarrow 6 = t^2 + t \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \text{ (loại)} \\ t = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b. PT} \Leftrightarrow 64.9^x - 84.2^x + 27.6^x = 0 \Leftrightarrow 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{16}{9} \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{c. } 3^{4x} - 4 \cdot 3^{2x+1} + 27 = 0 \Leftrightarrow (3^{2x})^2 - 12 \cdot 3^{2x} + 27 = 0$$

đặt $t = 3^{2x}$; $t > 0$ ta được $t^2 - 12t + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x}=3 \\ 3^{2x}=9=3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$$

d. $5^{2x} + (2.5)^x = 2.2^{2x}$

Chia hai vế của phương trình cho $2^{2x} \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2 \quad (*)$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$

Khi đó pt (*) có dạng:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2(l) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 8: Giải các phương trình

a. $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$

b. (ĐH – D 2003) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

Giải:

$$\text{a. Pt} \Leftrightarrow (2^2)^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 3^3} = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_9 x})^2 - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^3 = 0$$

Đặt $t = 2^{\log_9 x}$, $t > 0$.

$$Pt \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow 2^{\log_9 x} = 2 \Rightarrow 2^{\log_9 x} = 2^1 \Leftrightarrow \log_9 x = 1 \Leftrightarrow x = 9$$

$$\text{Với } t = 4 \Rightarrow 2^{\log_9 x} = 4 \Rightarrow 2^{\log_9 x} = 2^2 \Leftrightarrow \log_9 x = 2 \Leftrightarrow x = 9^2 = 81$$

$$b. 2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} - \frac{4}{2^{x^2-x}} = 3$$

$$\text{đặt } t = 2^{x^2-x} \quad (t > 0) \text{ ta được } t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(\text{loại}) \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 9: Giải các phương trình

a. $4^{\log_3 x} - 5.2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 9} = 0$

b. $3.16^x + 2.81^x = 5.36^x$

Giải:

$$a. Pt \Leftrightarrow (2^2)^{\log_3 x} - 5.2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 3^2} = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_3 x})^2 - 5.2^{\log_3 x} + 2^2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 2^{\log_3 x}, t > 0.$$

$$Pt \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow 2^{\log_3 x} = 1 \Rightarrow 2^{\log_3 x} = 2^0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Với } t = 4 \Rightarrow 2^{\log_3 x} = 4 \Rightarrow 2^{\log_3 x} = 2^2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$$

b. Chia cả hai vế cho 36^x ta được

$$PT \Leftrightarrow 3.\left(\frac{16}{36}\right)^x + 2.\left(\frac{81}{36}\right)^x = 5 \Leftrightarrow 3.\left(\frac{4}{9}\right)^x + 2.\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 = 0$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{4}{9}\right)^x = t \quad (t > 0)$$

Khi đó phương trình tương đương

$$\begin{cases} 3t + 2.\frac{1}{t} - 5 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3t^2 - 5t + 2}{t} = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

Bài 10: Giải các phương trình

a. $3^{2(x+\log_3 2)} - 2 = 3^{x+\log_3 2}$
b. (ĐHDB – 2007) $2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$

Giải:

a. Pt $\Leftrightarrow \left[3^{(x+\log_3 2)}\right]^2 - 3^{x+\log_3 2} - 2 = 0$. Đặt $t = 3^{x+\log_3 2}, t > 0$.

Pt $\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(\text{loại}) \\ t = 2 \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow 3^{x+\log_3 2} = 2 \Leftrightarrow x + \log_3 2 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = 0$

b. $2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0$ ($t = 2^x, t > 0$)

$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - 5t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 2 \vee t = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

Bài 11: Giải phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9$

Giải:

Pt $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9$

$\Leftrightarrow \left(2^{-2}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9 \Leftrightarrow 2^{-2(x-2)} = 2^{5-x} + 9 \Leftrightarrow 2^{4-2x} - 2^{5-x} - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2^4}{2^{2x}} - \frac{2^5}{2^x} - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{(2^x)^2} - \frac{32}{2^x} - 9 = 0$

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Pt $\Leftrightarrow \frac{16}{t^2} - \frac{32}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{16 - 32t - 9t^2}{t^2} = 0 \Leftrightarrow -9t^2 - 32t + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{4}{9} \Rightarrow 2^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = 2 - \log_2 9 \end{cases}$

Bài 12: Giải các phương trình

a. $\frac{9}{2^{x-2}} = \frac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$

b. $8^x + 9 \cdot 2^x + \frac{27}{8^x} + \frac{27}{2^x} = 64$

Giải:

Pt $\Leftrightarrow 9 \cdot 4 = 2^{x-2} \cdot \left(10 + 4^{\frac{x}{2}}\right)$

$\Leftrightarrow 36 = 2^{x-2} \cdot 10 + 2^{x-2} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{2^x}{2^2} + \frac{2^x}{2^2} \cdot 2^x = 36$

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t^2 + 10t - 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \\ t = -18(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 \cdot 2^x}{4} + \frac{(2^x)^2}{4} = 36 \Leftrightarrow 10 \cdot 2^x + (2^x)^2 = 36 \cdot 4 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 10 \cdot 2^x - 144 = 0$$

b. Phương trình: $8^x + 9 \cdot 2^x + \frac{27}{8^x} + \frac{27}{2^x} = 64$

$$\Leftrightarrow \left(2^x + \frac{3}{2^x}\right)^3 = 64 \Leftrightarrow 2^x + \frac{3}{2^x} = 4 \Leftrightarrow 4^x - 4 \cdot 2^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{cases}$$

Bài 13: Giải các phương trình

a. $\frac{3^{2x}}{100^x} = 2 \cdot (0,3)^x + 3$

b. $\frac{7^{2x}}{100^x} = 6 \cdot (0,7)^x + 7$

Giải:

a. $\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{(10^2)^x} = 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^x + 3$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{10^{2x}} - 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{10}\right)^x\right]^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^x - 3 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{10}\right)^x, t > 0$.

$\text{Pt} \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{10}} 3 \\ t = -1(\text{loại}) \end{cases}$$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{2x} = 6 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^x + 7 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{7}{10}\right)^x$, điều kiện $t > 0$

Khi đó pt (1) có dạng:

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = -1(l) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{7}{10}} 7$$

Bài 14: Giải các phương trình

a. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$

b. (ĐH – A 2006) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

Giải:

a. Chia hai vế pt cho 27^x , ta được :

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{8^x}{27^x} + \frac{18^x}{27^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{18}{27}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, t > 0.$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{b. } 3 \cdot 2^{3x} + 4 \cdot 3^x 2^{2x} - 3^{2x} 2^x - 2 \cdot 3^{3x} = 0$$

$$\text{Chia 2 vế của Pt cho } 3^{3x} \text{ ta được: } 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, t > 0 \text{ ta có: } 3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do ĐK ta chỉ nhận } t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 15: Giải các phương trình

a. (ĐH L – 2001) $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2 \cdot 3^{\log_2 4x^2}$

b. $6 \cdot 9^{\log_2 x} + 6x^2 = 13 \cdot x^{\log_2 6}$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $4^{\log_2 2x} = 4^{1 + \log_2 x} = 4 \cdot 4^{\log_2 x}$; $x^{\log_2 6} = 6^{\log_2 x}$ và $3^{\log_2 4x^2} = 3^{2 + 2\log_2 x} = 9 \cdot 9^{\log_2 x}$

Do đó phương trình trở thành:

$$4 \cdot 4^{\log_2 x} - 6^{\log_2 x} = 18 \cdot 9^{\log_2 x} \Leftrightarrow 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = 18 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{\log_2 x} (*)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}. \text{ Điều kiện: } t > 0.$$

$$\text{Khi đó phương trình (*) trở thành } 4 - t = 18t^2 \Leftrightarrow 18t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{9} \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình } \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \log_2 x = -2$$

Vậy $x = \frac{1}{4}$ là nghiệm của phương trình.

b. Điều kiện $x > 0$

Cách 1: Chú ý công thức: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ với $a, b, c > 0$ và $b \neq 1$

Áp dụng công thức trên, ta chuyển phương trình $6.9^{\log_2 x} + 6x^2 = 13.x^{\log_2 6}$ về phương trình:

$$6.9^{\log_2 x} + 6x^2 = 13.6^{\log_2 x}$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t \Leftrightarrow x^2 = 4^t$$

Khi đó ta có phương trình: $6.9^t + 6.4^t = 13.6^t$

Cách 2: Ta có: $6.9^{\log_2 x} + 6x^2 = 13x^{\log_2 6}$

$$\Leftrightarrow 6.9^{\log_2 x} + 6x^{\log_2 4} = 13x^{\log_2 6} \Leftrightarrow 6.9^{\log_2 x} + 64^{\log_2 x} = 136^{\log_2 x}$$

... Tự giải

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

b. $9^x + 6^x = 2.4^x$

c. $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$

d. $3^{2x+5} - 36.3^{x+1} + 9 = 0$

e. $3^{2x^2+2x+1} - 28.3^{x^2+x} + 9 = 0$

f. (**ĐHH – D 2001**) $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$

HD:

a. Đặt $2^{x^2-x} = t$ ($t > 0$) ta được $t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

b. Chia cả hai vế phương trình cho 4^x ta được $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c. Đặt $2^{x-\sqrt{x^2-5}} = t$ ($t > 0$) $\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2-5} = 1 \\ x - \sqrt{x^2-5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{9}{4} \end{cases}$

d. $x = -1 \vee x = -2$

e. $x = -2 \vee x = 1$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. (**ĐHL – 1998**) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = 4$

Đs: $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b. (**ĐHNN – 1998**) $(2+\sqrt{3})^x + (7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^x = 4(2+\sqrt{3})$

Đs: $x = 0 \vee x = 2$

c. $\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x = 12$

d. $(7+5\sqrt{2})^x + (\sqrt{2}-5)(3+2\sqrt{2})^x + 3(1+\sqrt{2})^x + 1-\sqrt{2} = 0$

HD: Đặt $t = (1+\sqrt{2})^x; t > 0$

$$\Leftrightarrow t^3 + (\sqrt{2} - 5)t^2 + 3t + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + (\sqrt{2} - 4)t + \sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 - 2\sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{e. } \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x = 4$$

$$\text{HD: Đặt } t = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x \ (t > 0) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - \sqrt{3} \\ t = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. (ĐHTCKT – 1999) $4^{x+1} + 2^{x+1} = 2^{x+2} + 12$

Đs: $x = 0$

b. (ĐHAN – D 1999) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10 \quad x = k \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

c. (ĐHHĐ – A 2001) $5.3^{2x-1} - 7.3^{x-1} + \sqrt{1 - 6.3^x + 9^{x+1}} = 0$

Đs: $x = \log_3 \frac{3}{5} \vee x = \log_3 \frac{1}{5}$

d $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1 - 6.3^x + 3^{2(x+1)}}$

Đs: $x = \log_3 \left(2 + \sqrt{\frac{11}{3}} \right)$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. (ĐHHP – 2000) $25^x + 15^x = 2.9^x$

Đs: $x = 0$

b. (ĐHTL – 2000) $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

Đs: $x = -1 \vee x = 2$

c. (ĐHHH – 1999) $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{\frac{x}{2}}$

Đs: $x = 4$

d. $3^{2x^2+6x-9} + 4.15^{x^2+3x-5} = 3.5^{2x^2+6x-9}$

Đs: $x = 1 \vee x = -4$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 2

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho 1 biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được 1 phương trình bậc 2 theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $3^{2x} - (2^x + 9).3^x + 9.2^x = 0$

Giải:

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - (2^x + 9)t + 9.2^x = 0; \Delta = (2^x + 9)^2 - 4.9.2^x = (2^x + 9)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 2^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$+ \text{Với } t = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$$

$$+ \text{Với } t = 2^x \Leftrightarrow 3^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$

Bài 2: Giải phương trình $9^{x^2} + (x^2 - 3)3^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0$

Giải:

Đặt $t = 3^{x^2}$ điều kiện $t \geq 1$ vì $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2} \geq 3^0 = 1$

Khi đó phương trình tương đương với: $t^2 + (x^2 - 3)t - 2x^2 + 2 = 0$

$$\Delta = (x^2 - 3)^2 - 4(-2x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 - x^2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$+ \text{Với } t = 2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\log_3 2}$$

+ Với $t = 1 - x^2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 1 - x^2$ ta có nhận xét:

$$\begin{cases} VT \geq 1 \\ VP \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = \pm \sqrt{\log_3 2}; x = 0$

Bài 3: Giải phương trình: $9^x + (x - 12).3^x + 11 - x = 0$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow (3^x)^2 + (x - 12)3^x + 11 - x = 0$$

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 11 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 3^x + x - 11 = 0(*) \end{cases} \quad (a + b + c = 0)$$

Xét phương trình (*) ta có

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0, \forall x \\ f(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (*) \text{ có nghiệm duy nhất } x = 2$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; 2\}$

Bài 4: Giải phương trình: $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x-3$

Giải:

$$\text{PT } 3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x-3$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2} (3 \cdot 5^{x-2} - 1) + x(3 \cdot 5^{x-2} - 1) - 3(3 \cdot 5^{x-2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 \cdot 5^{x-2} - 1)(5^{x-2} + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5^{x-2} - 1 = 0 & (1) \\ 5^{x-2} + x - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 5^{x-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 + \log_5 \frac{1}{3} = 2 - \log_5 3$$

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow 5^{x-2} = -x + 3$$

Vế trái là hàm đồng biến vế phải là hàm nghịch biến mà (2) có nghiệm $x = 2$ nên là nghiệm duy nhất.

Vậy Pt có nghiệm là: $x = 2 - \log_5 3$ hoặc $x = 2$

Bài 5: Giải phương trình: $4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+3} - 16 = 0 \quad (1)$

Giải :

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$

Khi đó pt (1) tương đương với:

$$t^4 + 2t^3 + 8t - 16 = 0 \Leftrightarrow 4^2 - 2t \cdot 4 - t^4 - 2t^3 = 0$$

Đặt $u = 4$, ta được: $u^2 - 2t \cdot u - t^4 - 2t^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = t - t(t+1) \\ u = t + t(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -t^2 \\ 4 = t^2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{5} \\ t = -1 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow x = \log_2 (\sqrt{5} - 1)$$

Bài 6: Giải phương trình: $9^x + 2(x-2) \cdot 3^x + 2x - 5 = 0 \quad (1)$

Giải:

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$

Khi đó pt (1) tương đương với:

$$t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 5 - 2x \quad (2)$$

Ta đoán được nghiệm $x = 1$

Vế trái (2) là một hàm số đồng biến còn vế phải (2) là một hàm nghịch biến

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của pt (2)

Bài 7: Giải phương trình: $3^{2x} + \sqrt{3^x + 5} = 5 \quad (1)$

Giải:

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$

Khi đó pt (1) tương đương với:

$$t^2 + \sqrt{t+5} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{t+5} = 5 - t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t^2 \geq 0 \\ t + 5 = (5 - t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq \sqrt{5} \\ 5^2 - (2t^2 + 1) \cdot 5 + t^4 - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt $u = 5$, pt (2) có dạng: $u^2 - (2t^2 + 1)u + t^4 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2t^2 + 1 - (2t + 1)}{2} \\ u = \frac{2t^2 + 1 + (2t + 1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = t^2 - 1 \\ 5 = t^2 + t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 5 = 0 (I) \\ t^2 + t - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} (I) \\ t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

Bài 8: Giải phương trình: $m^2 \cdot 3^{3x} - 3m \cdot 3^{2x} + (m^2 + 2) \cdot 3^x - m = 0, m \neq 0 \quad (1)$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải:

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$

Khi đó pt (1) tương đương với:

$$m^2 \cdot t^3 - 3m \cdot t^2 + (m^2 + 2) \cdot t - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^3 + t)m^2 - (3t^2 + 1)m + 2t = 0$$

Coi m là ẩn, còn t là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m , ta được:

$$\begin{cases} m = \frac{1}{t} \\ m = \frac{2t}{t^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{m} \\ f(t) = mt^2 - 2t + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

a. Với $m = 2$, ta được:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ f(t) = 2t^2 - 2t + 2 = 0 \quad (VN) \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$$

Vậy, với $m = 2$ pt có ... nghiệm ...

b. Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương khác $\frac{1}{m}$ và $m > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ f\left(\frac{1}{m}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ \frac{2}{m} > 0 \\ 1 > 0 \\ m - \frac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Vậy với $0 < m < 1$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài 9: Giải pt $3.9^{x-1} + (3x-7).3^{x-1} + 2 - x = 0$ (1)

Giải:

Đặt $t = 3^{x-1}, t > 0$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3t^2 + (3x-7).t + 2 - x = 0$

$$\Delta = (3x-7)^2 - 12(2-x) = 9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-3x+7+3x-5}{6} = \frac{1}{3} \\ t = \frac{-3x+7-3x+5}{6} = -x+2 \end{cases}$$

$$\bullet t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\bullet t = -x+2 \Leftrightarrow 3^{x-1} = -x+2 \quad (*)$$

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (*)

$$\text{Đặt : } \begin{cases} f(x) = 3^{x-1} \\ g(x) = -x+2 \end{cases}$$

Ta có : $f'(x) = 3^{x-1} \cdot \ln 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x) = 3^{x-1}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = -1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Vậy pt (1) có 2 nghiệm là $x = 0; x = 1$.

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 3

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ trong phương trình và khéo léo biến đổi phương trình thành phương trình tích.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: (HVQHQT – D 1997) Giải phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

Giải:

Viết lại phương trình dưới dạng: $4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{2x^2+6x+5} + 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 4^{x^2-3x+2} \\ v = 4^{2x^2+6x+5} \end{cases}, u, v > 0$$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(1-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-3x+2} = 1 \\ 4^{2x^2+6x+5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 = 0 \\ 2x^2+6x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=-5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Bài 2: Cho phương trình: $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m$ (1)

a. Giải phương trình với $m = 1$

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải:

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{7-5x} + m \Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{(x^2-5x+6)+(1-x^2)} + m$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6} \cdot 2^{1-x^2} + m$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}, u, v > 0. \text{ Khi đó phương trình tương đương với:}$$

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow (u-1)(v-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ 2^{1-x^2} = m(*) \end{cases}$$

Vậy với mọi m phương trình luôn có 2 nghiệm $x = 3, x = 2$

a. Với $m = 1$, phương trình (*) có dạng: $2^{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy với $m = 1$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt: $x = 3, x = 2, x = \pm 1$

b. Để (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1-x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}. \text{ Khi đó điều kiện là:}$$

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 4 \\ 1 - \log_2 m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \neq \frac{1}{8} \\ m \neq \frac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$$

Vậy với $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 3: (ĐH – D 2006) Giải phương trình $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

Giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2^{x^2+x} \\ v = 2^{x^2-x} \end{cases} \text{ Suy ra } u.v = 2^{2x} \quad (u > 0, v > 0)$$

Phương trình thành:

$$u - 4v - uv + 4 = 0 \Leftrightarrow u(1-v) + 4(1-v) = 0 \Leftrightarrow (u+4)(1-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow v = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Chú ý:

Có thể biến đổi tương đương đưa về phương trình tích

$$2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} (2^{x^2-x} - 1) - 4(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2-x} - 1)(2^{2x} - 4) = 0$$

Bài 4: Giải phương trình

a. $2^{2\sqrt{x+3}-x} - 5.2^{\sqrt{x+3}+1} + 2^{x+4} = 0$

b. $2^{x^2-3x+3} + 2^{x-1} = 2 + 2^{(x-1)^2}$

Giải:

a. Ta có: $2^{2\sqrt{x+3}-x} - 5.2^{\sqrt{x+3}+1} + 2^{x+4} = 0 \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+3}-x} - 5.2^{\sqrt{x+3}+1} + 4.2^{x+2} = 0$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = 2^{2\sqrt{x+3}-x} \\ v = 2^{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{uv} = 2^{\sqrt{x+3}+1} \\ \sqrt{\frac{u}{v}} = 2^{\sqrt{x+3}-x-1} \end{cases} \quad (u, v > 0)$$

$$\text{Khi đó ta có phương trình: } \Leftrightarrow u - 5\sqrt{uv} + 4v = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} - 5\sqrt{\frac{u}{v}} + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{u}{v}} = 1 \\ \sqrt{\frac{u}{v}} = 4 \end{cases}$$

Với: $\sqrt{\frac{u}{v}} = 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+3}-x-1} = 1$ và $\sqrt{\frac{u}{v}} = 4 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+3}-x-1} = 4$ (giải phương trình đại số tìm nghiệm)

Tập nghiệm phương trình: $S = \{1; -2\}$

b. Đặt $\begin{cases} u = f(x) = x^2 - 3x + 3 \\ v = g(x) = x - 2 \end{cases} \Rightarrow u + v = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$$\Leftrightarrow 2^u + 2.2^v = 2 + 2^{u+v} \Leftrightarrow 2^u + 2.2^v = 2 + 2^u.2^v$$

$$\Leftrightarrow (2^u - 2)(1 - 2^v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^u = 2 \\ 2^v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 3 = 1 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 5: Giải phương trình:

a. $(\sqrt{3}+1)^{\log_2 x} + x.(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x} = 1 + x^2$

b. $2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + 1$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$

Đặt $(\sqrt{3}+1)^{\log_2 x} = u$, $(\sqrt{3}-1)^{\log_2 x} = v$

Ta có pt

$$u + uv^2 = 1 + u^2v^2 \Leftrightarrow (uv^2 - 1)(u - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ uv^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1$$

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{7-5x} + 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{(x^2-5x+3)+(1-x^2)} + 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+3} \cdot 2^{1-x^2} + 1$$

Đặt $\begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}, u, v > 0$

Khi đó, pt tương đương với:

$$u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bài 6: Giải các phương trình:

a. $9^{x^2-2x+\frac{3}{2}} - 3^{x^2} = 3^{(x-2)^2-1} - 1$

b. $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} - 1$

c. $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 24 + 6^x$

d. $2^{2x^2-5x+2} + 2^{4x^2-8x+3} = 1 + 2^{6x^2-13x+5}$

Giải:

a. Đặt $\begin{cases} u = 9^{x^2-2x+\frac{3}{2}} \\ v = 3^{x^2} \end{cases}, uv > 0$

Nhận xét rằng: $\frac{u}{v} = \frac{9^{x^2-2x+\frac{3}{2}}}{3^{x^2}} = \frac{3^{2(x^2-2x+\frac{3}{2})}}{3^{x^2}} = 3^{x^2-4x+3} = 3^{(x-2)^2-1}$

Khi đó, pt tương đương với:

$$u - v = \frac{u}{v} - 1 \Leftrightarrow (u-v)(v-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9^{x^2-2x+\frac{3}{2}} = 3^{x^2} \\ 3^{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2(x^2-2x+\frac{3}{2})} = 3^{x^2} \\ 3^{x^2} = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

b. Đặt $\begin{cases} u = 4^{x^2+x} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}, uv > 0$

Nhận xét rằng: $u \cdot v = 4^{x^2+x} \cdot 2^{1-x^2} = 2^{2(x^2+x)} \cdot 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2}$

Khi đó, pt tương đương với:

$$u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2+x} = 1 \\ 2^{1-x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

c. Đặt $\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^x \end{cases}, uv > 0$

Khi đó, pt tương đương với:

$$8u + 3v = 24 + uv \Leftrightarrow (u-3)(v-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 2^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

d. Nhận xét:

Phương trình trên có dạng $a^{f(x)} + \alpha^{g(x)} = \alpha + a^{h(x)}$ $[h(x) = f(x) + g(x)]$

Đặt $\begin{cases} u = a^{f(x)} > 0 \\ v = \alpha^{g(x)} > 0 \end{cases}$

$$PT \Leftrightarrow u + \alpha v = \alpha + uv \Leftrightarrow (u-\alpha) - v(u-\alpha) = 0 \Leftrightarrow (u-\alpha)(1-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=\alpha \\ v=1 \end{cases}$$

Mà $\alpha = 1 \Rightarrow u = v = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x^2-5x+2} = 1 \\ 2^{4x^2-8x+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 4

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 4 là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với k ẩn phụ.

Trong hệ mới thì k - 1 thì phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng.

Trường hợp đặc biệt là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x, khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu tượng trong phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f[x, \varphi(x)] = 0$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$ ta biến đổi phương trình thành hệ:
$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x; y) = 0 \end{cases}$$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2^x+2} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Giải:

Viết lại phương trình dưới dạng: $\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{1}{2^{1-x}+1} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Đặt: $\begin{cases} u = 2^{x-1} + 1 \\ v = 2^{1-x} + 1 \end{cases}, u, v > 1$

Nhận xét rằng: $u \cdot v = (2^{x-1} + 1) \cdot (2^{1-x} + 1) = 2^{x-1} + 2^{1-x} + 2 = u + v$

Phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \frac{8}{u} + \frac{1}{v} = \frac{18}{u+v} \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+8v=18 \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v=2 \\ u=9; v=\frac{9}{8} \end{cases}$$

+ Với $u = v = 2$, ta được: $\begin{cases} 2^{x-1} + 1 = 2 \\ 2^{1-x} + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

+ Với $u = 9$ và $v = \frac{9}{8}$, ta được: $\begin{cases} 2^{x-1} + 1 = 9 \\ 2^{1-x} + 1 = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 4$.

Bài 2: Giải phương trình $2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6$

Giải:

Đặt $u = 2^x$, điều kiện $u > 0$. Khi đó phương trình thành: $u^2 - \sqrt{u+6} = 6$

Đặt $v = \sqrt{u+6}$, điều kiện $v \geq \sqrt{6} \Rightarrow v^2 = u+6$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = v+6 \\ v^2 = u+6 \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 = -(u-v) \Leftrightarrow (u-v)(u+v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=0 \\ u+v+1=0 \end{cases}$$

+ Với $u = v$ ta được: $u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = -2(1) \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

+ Với $u + v + 1 = 0$ ta được:

$$u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ u = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = \frac{\sqrt{21}-1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 8$ hoặc $x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

Bài 3: Giải các phương trình:

a. $8^x + 1 = 2 \sqrt[3]{2^{x+1}} - 1$ b. $3^{2x} + \sqrt{3^x + 5} = 5$

Giải:

a. Đặt $2^x = u > 0$; $\sqrt[3]{2^{x+1}} - 1 = v$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b. Đặt $u = 3^x$, điều kiện $u > 0$

Khi đó, pt (1) tương đương với:

$$u^2 + \sqrt{u+5} = 5 \quad (2)$$

Đặt $v = \sqrt{u+5}$, điều kiện $v \geq \sqrt{5} \Rightarrow v^2 = u+5$

Khi đó, pt (2) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u^2 = 5 - v \\ v^2 = u + 5 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u+v) \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ u - v + 1 = 0 \end{cases}$$

TH 1: Với $u = -v$, ta được:

$$u^2 - u - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ u = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

TH 2 : Với $u - v + 1 = 0$, ta được :

$$u^2 + u - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ u = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

Bài 4: Giải phương trình: $27^x + 2 = 3\sqrt[3]{3^{x+1}} - 2 \quad (1)$

Giải :

Đặt $u = 3^x$, điều kiện $u > 0$

Khi đó, pt (1) tương đương với:

$$u^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3u} - 2 \quad (2)$$

Đặt $v = \sqrt[3]{3u} - 2 \Rightarrow v^3 = 3u - 2$

Khi đó, pt (2) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u^3 + 2 = 3v & (3) \\ v^3 = 3u - 2 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 2 = 3v \\ v^3 + 2 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = -3(u - v) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ u^2 + uv + v^2 + 3 = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow u = v$$

Thay $u = v$ vào (3), ta được:

$$u^3 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 + u - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - 1 = 0 \\ u^2 + u - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -2(I) \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

BÀI TOÁN 7: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có 3 hướng áp dụng:

Hướng 1: Thực hiện các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x) = k$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Nhận xét:

+ Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$ do đó $x = x_0$ là nghiệm

+ Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm

+ Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số $y = f(x)$ là

Là đồng biến còn hàm số $y = g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến

Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$

Bước 3: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(u) = f(v)$ (3)

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Khi đó: (3) $\Leftrightarrow u = v$ với $\forall u, v \in D_f$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải các phương trình

a. $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3$ (1)

b. $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$

Giải:

a. Điều kiện $x > 0$. Biến đổi phương trình về dạng: $2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 - x$ (2)

Nhận xét rằng:

+ Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.

+ Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.

Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2) vì $2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 - 1$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b. Ta có: $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x \geq x - 1$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} \geq 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x^2-x} - 2^{x-1} \leq 0$ (do hàm số $y = 2^t$ đồng biến).

Suyra: $\begin{cases} VT \leq 0 \\ VP \geq 0 \end{cases}$ mà $VT = VP$ (Giả thuyết) nên ta có: $\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ 2^{x-1} = 2^{x^2-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Tập nghiệm phương trình: $x = 1$

Bài 2: Giải phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2$ (1)

Giải:

Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, điều kiện $u \geq 0$ suy ra: $x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$

Khi đó (1) có dạng: $\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = 2$

Xét hàm số: $f(x) = \log_3(x + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x^2} = \log_3(x + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5^{x^2}$

+ Miền xác định $D = [0; +\infty)$

+ Đạo hàm: $f' = \frac{1}{(x+2)\ln 3} + \frac{1}{5} \cdot 2x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 3 > 0, \forall x \in D$. Suy ra hàm số tăng trên D

Mặt khác $f(1) = \log_3(1 + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5 = 2$.

Do đó, phương trình (2) được viết dưới dạng:

$f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 3: Cho phương trình $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+2} = x^2 + 2mx + m$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{4}{5}$

b. Giải và biện luận phương trình

Giải:

Đặt $t = x^2 + 2mx + 2$ phương trình có dạng: $5^t + t = 5^{2t+m-2} + 2t + m - 2$ (1)

Xác định hàm số $f(t) = 5^t + t$

+ Miền xác định $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $f' = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số tăng trên D

Vậy (1) $\Leftrightarrow f(t) = f(2t + m - 2) \Leftrightarrow t = 2t + m - 2 \Leftrightarrow t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0$ (2)

a. Với $m = -\frac{4}{5}$ ta được: $x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$

Vậy với $m = -\frac{4}{5}$ phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -\frac{2}{5}$

b. Xét phương trình (2) ta có: $\Delta' = m^2 - m$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$. Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

với $m = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = 0$

với $m = 1$ phương trình có nghiệm kép $x_0 = -1$

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - m}$ đó cũng là nghiệm kép

của (1)

Kết luận:

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = 0$

Với $m = 1$ phương trình có nghiệm kép $x_0 = -1$

Với $0 < m < 1$ phương trình vô nghiệm

Với $m > 1$ hoặc $m < 0$ phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - m}$

Bài 4: Giải phương trình $2^{x^2-x} + 9^{3-2x} + x^2 + 6 = 4^{2x-3} + 3^{x-x^2} + 5x$

Giải:

Phương trình

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} + 3^{6-4x} + x^2 + 6 = 2^{4x-6} + 3^{x-x^2} + 5x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} + x^2 - x - 3^{x-x^2} = 2^{4x-6} + 4x - 6 - 3^{6-4x}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 - x \\ v = 4x - 6 \end{cases} \Rightarrow 2^u + u - 3^{-u} = 2^v + v - 3^{-v}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2^t + t - \left(\frac{1}{3}\right)^t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^t \ln \frac{1}{3} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(t) \text{ đồng biến, mà } f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$$

$$\text{Ta có phương trình: } x^2 - x = 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{1; 6\}$

Bài 5: Giải các phương trình

a. $2^{x^2-x} - 2^{x+8} = 8 + 2x - x^2$

b. $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 7} - 2$

Giải:

a. Đặt:
$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 - x \\ v = x + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow v - u = 8 + 2x - x^2$$

Phương trình trên $\Leftrightarrow 2^u - 2^v = v - u \Leftrightarrow 2^u + u = 2^v + v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$

Xét hàm số: $f(t) = 2^t + t$, $f'(t) = 2^t \ln 2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)$ đồng biến

mà $f(u) = f(v)$ nên $u = v \Leftrightarrow x^2 - x = x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{-2; 4\}$

b. $\Leftrightarrow 2^{\log_2 x} + 3^{\log_2 x} = 7^{\log_2 x} - 2$

Đặt $t = \log_2 x$ thì pt trở thành: $2^t + 3^t = 7^t - 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^t + \left(\frac{3}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t = 1$

Xét hàm số

$$f(t) = \left(\frac{2}{7}\right)^t + \left(\frac{3}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^t \ln \frac{2}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^t \ln \frac{3}{7} + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t \ln \frac{1}{7} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm giảm trên $\mathbb{R}$

lại có $f(1) = 1$ nên pt đã cho luôn có nghiệm duy nhất $t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

Bài 6: Giải các phương trình

a. $9^x = 5^x + 4^x + 2(\sqrt{20})^x$

b. $3 \cdot x^{\log_3 x} + (\log_3 x - 1)^2 = x^2$

Giải:

a. PT $\Leftrightarrow 3^{2x} = [(\sqrt{5})^x + 2^x]^2 \Leftrightarrow 3^x = (\sqrt{5})^x + 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \quad (1)$

Vì $0 < \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3} < 1$ nên vế trái là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $f(2) = 1$ nên PT $\Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$.

b. Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$

Phương trình trở thành: $3 \cdot 3(3^t)^t + (t-1)^2 = 3^{2t} \Leftrightarrow 3^{t^2+1} + t^2 + 1 = 3^{2t} + 2t \quad (1)$

Xét hàm số $f(u) = 3^u + u$ có $f'(u) = 3^u \ln 3 + 1 > 0 \quad \forall u$

Suy ra $f(u) = 3^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

PT (1) $\Leftrightarrow f(t^2 + 1) = f(2t) \Leftrightarrow t^2 + 1 = 2t \Leftrightarrow t = 1$

Với $t = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Bài 7: Giải các phương trình sau

a. $2^x + 3^x = 5$

b. $2^x + 3^x = 5^x$

Giải:

a. Phương trình nhận nghiệm $x = 1$

$$2^x + 3^x = 5 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - 5 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x - 5$ (xác định với mọi x)

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 > 0 \forall x$. Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

b. Phương trình nhận nghiệm $x = 1$

Chia hai vế của phương trình cho 3^x

$$PT \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^x$$

$$\text{Đặt } f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \text{ và } g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$$

Cả hai hàm số đều có tập xác định là $\mathbf{R}$

$$\text{Ta có } f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} < 0 \text{ và } g'(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x \ln \frac{5}{3} > 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến và hàm số $g(x)$ đồng biến

Do đó đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm $x = 1$

Bài 6: Giải phương trình: $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow (2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) = 0 & (1) \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1.$$

- Khi $\sin(2^x + y - 1) = 1$, thay vào (1), ta được: $2^x = 0$ (VN)

- Khi $\sin(2^x + y - 1) = -1$, thay vào (1), ta được: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào (1)} \Rightarrow \sin(y + 1) = -1 \Leftrightarrow y = -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Kết luận: Phương trình có nghiệm: } \left(1; -1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right).$$

Bài 7: Giải phương trình $3^x + x - 4 = 0$

Giải:

$$\text{Cách 1: Ta có } 3^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x + x = 4 \quad (*)$$

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (*)

$$\text{Đặt : } \begin{cases} f(x) = 3^x + x \\ g(x) = 4 \end{cases}$$

Ta có : $f'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0 \forall x$. Suy ra $f(x) = 3^x + x$ là hàm đồng biến trên $\mathbf{R}$.

Mà $g(x) = 4$ là hàm hằng

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x = 1$

Cách 2: $3^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x + x = 4$ (*)

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (*)

Nếu $x > 1$, ta có $\begin{cases} 3^x > 3^1 = 3 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 3^x + x > 3 + 1 = 4$ (vô lý)

Nếu $x < 1$, ta có $\begin{cases} 3^x < 3^1 = 3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow 3^x + x < 3 + 1 = 4$ (vô lý).

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài 8: Giải các phương trình

a. $2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$

b. $2^{\log_5(x+3)} = x$

c. $2^x + 5^x = 29^{\frac{x}{2}}$

d. $4^x = 9^{\frac{x}{2}} + 7$

Giải:

a. Ta có : $2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1 \Leftrightarrow 2^x = (\sqrt{3})^x + 1 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (*)

• Ta thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (*)

• Đặt : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ g(x) = 1 \end{cases}$

Ta có : $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $g(x) = 1$ là hàm hằng

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x = 2$

b. Điều kiện : $x > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_5(x+3) = \log_2 x$ (*)

Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \log_5(2^t + 3) = t \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t = 1$ (**)

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t \Rightarrow f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \ln 0.4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t \ln 0.2 < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra: $f(t)$ là hàm giảm trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(1) = 1$ nên pt (**) có nghiệm duy nhất $t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

c. Chia hai vế cho $(\sqrt{29})^x$ ta được : $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^x + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^x = 1$

Ta thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình. chứng minh $x = 2$ là một nghiệm duy nhất.

$$\text{Nếu } x < 2 \text{ thì: } \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^x > \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{4}{29} \\ \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^x > \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{25}{29} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^x + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^x > \frac{4}{29} + \frac{25}{29} = 1$$

$\Rightarrow$ pt vô nghiệm khi $x < 2$

Nếu $x > 2$: cm tương tự ta cũng được pt vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

$$\text{d. PT} \Leftrightarrow 4^x = 3^x + 7 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = 1 + 7\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\text{Đặt: } f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \ln \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$g(x) = 1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow g'(x) = 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow g(x) \text{ là hàm giảm trên } \mathbb{R}$$

Do đó đồ thị hàm số hai hàm chỉ có thể cắt nhau tại 1 điểm duy nhất $x = 2$.

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x = 2$

Bài 9: Giải phương trình: $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$

Giải:

Nhận xét: ta thấy pt $3^x \cdot 2x = 3^x + 2x + 1$ có hai nghiệm $x = \pm 1$.

Với $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên

$$\text{PT} \Leftrightarrow 3^x = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Ta có hàm số $y = 3^x$ tăng trên $\mathbb{R}$

hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ luôn giảm trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

Vậy Phương trình chỉ có hai nghiệm $x = \pm 1$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$\text{a. } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$$

HD:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^x = 1$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = u; 0 < u < 1; \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = v; v > 1$$

$$+ \text{ Nếu } x \geq 0: u^x > 0; v^x \geq 1 \Rightarrow VT > 1$$

$$+ \text{ Nếu } x < 0: u^x \geq 1; v^x > 0 \Rightarrow VT > 1$$

Vậy pt vô nghiệm.

b. $8^x(3x+1)=4$ c. $e^{|2x-5|}-e^{|x-1|}=\frac{1}{|2x-5|}-\frac{1}{|x-1|}$ d. $2^{2x-1}+3^{2x}+5^{2x+1}=2^x+3^{x+1}+5^{x+2}$

e. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=10^{\frac{x}{2}}$ f. $x^2+(2^x-3)x+2(1-2^x)=0$

Đs:

b. $x=\frac{1}{3}$ c. $x=2;4$ d. $x=1$ e. $x=2$ f. $x=\{0;2\}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. **(TL – 2001)** $2^{x-1}-2^{x^2-x}=(x-1)^2$

b. $2^{x+1}-4^x=x-1$

c. **(QHQT – 1997)** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=(\sqrt{5})^x$

d. **(SPHN – 2001)** $3^x+5^x=6x+2$

e. **(BCVT – 1998)** $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=4^x$

f. $2^{3x}+3x.2^{2x}+(1+3x^2).2^x+x^3+x-2=0$

g. $x(2.3^x-1)=3^x+2$

h. $8-x.2^x+2^{3-x}-x=0$

Đs:

a. $x=1$ b. $x=1$ c. VN d. $x=\{0;1\}$ e. $x=1$ f. $x=0$
 g. $x=1$ h. $x=2$

BAI TOÁN 8: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1: Giải phương trình $3^{x^2+2x+3}+4^{x^2+2x+2}+5^{x^2+2x+1}=14$

HD:

Cách 1: Phương trình: $3^{x^2+2x+3}+4^{x^2+2x+2}+5^{x^2+2x+1}=14$

Ta có:
$$\begin{cases} 3^{x^2+2x+3}=3^{(x+1)^2+2} \geq 3^2=9 \\ 4^{x^2+2x+2}=4^{(x+1)^2+1} \geq 4^1=4 \Rightarrow 3^{x^2+2x+3}+4^{x^2+2x+2}+5^{x^2+2x+1} \geq 14 \\ 5^{x^2+2x+1}=5^{(x+1)^2} \geq 5^0=1 \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $x=-1$.

Cách 2: Phương trình: $3^{x^2+2x+3}+4^{x^2+2x+2}+5^{x^2+2x+1}=14$

$\Leftrightarrow 3^{(x+1)^2+2}+4^{(x+1)^2+1}+5^{(x+1)^2}=1 \Leftrightarrow 3^{t+2}+4^{t+1}+5^t=1 \Leftrightarrow 9.3^t+4.4^t+5^t=1$

Dùng đạo hàm ta chứng minh phương trình $9.3^t+4.4^t+5^t=1$ có $t=0$ là nghiệm duy nhất.

Với $t=0$ ta suy ra $x=-1$.

Vậy tập nghiệm phương trình: $S=\{-1\}$

Bài 2: Giải phương trình $2^{x+1}+2^{1-2x}=3\sqrt[3]{2}$

Giair:

Cách 1: Sử dụng BĐT Cauchy.

Vì $\frac{1}{2}2^{x+1}$ và 2^{1-2x} là các số dương. Nên áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số $\frac{1}{2}2^{x+1}$, $\frac{1}{2}2^{x+1}$ và 2^{1-2x} , ta có:

$$\frac{1}{2}2^{x+1} + \frac{1}{2}2^{x+1} + 2^{1-2x} \geq 3\sqrt[3]{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{1}{2}2^{x+1} = 2^{1-2x} \Leftrightarrow 2^x = 2^{1-2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Cách 2: Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Khi đó ta có phương trình: $2t + \frac{2}{t^2} = 3\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow 2t^3 - 3\sqrt[3]{2}t + 2 = 0$. Ta có $t = \sqrt[3]{2}$ là nghiệm của phương trình. Áp dụng lược đồ Horner, ta có:

$\sqrt[3]{2}$	2	$-3\sqrt[3]{2}$	0	2
	2	$-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{4}$	0

Khi đó: $2t^3 - 3\sqrt[3]{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt[3]{2})(2t^2 - \sqrt[3]{2}t - \sqrt[3]{4}) = 0$

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{2} \\ 2t^2 - \sqrt[3]{2}t - \sqrt[3]{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bài 3: Giải phương trình: $2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)}$

Giải:

Ta có $4x^2 - 4x + 4 = (2x - 1)^2 + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \log_3(4x^2 - 4x + 4) \geq 1 \Rightarrow VP = \frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)} \leq 8$

Mặt khác theo BĐT Côsi, ta có: $VT = 2^{2x+1} + 2^{3-2x} \geq 2\sqrt{2^{2x+1} \cdot 2^{3-2x}} = 2\sqrt{2^4} = 8$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+1} + 2^{3-2x} = 8 \\ \frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)} = 8 \end{cases}$

Giải hệ ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2}$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $3^x + \frac{1}{3^x} = \sqrt[3]{8 - x^2}$

b. $|3^x - 1| + |3^x - 3| = 2$

c. $|2^x - 1| + |2^x - 2| = -x^2 + 2x$

d. $8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y$

e. $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cos(xy) + 2^{|y|} = 0$

f. $9^{|x|} + 3^{|x|} = 10x + 2$

g. $27^{x^2} = (6x^2 - 4x + 1).9^x$

h. $x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{x-1} + 1$

Đs:

- a. $x = 0$ b. $0 \leq x \leq 1$ c. $x = 1$ d. $x = \frac{k\pi}{2}; y = \frac{\pi}{2} + l\pi$ e. $x = k\pi; y = 0$
- f. $x = 0 \vee x = 1$ g. $x \in \left\{0; 1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$ h. $x = 1$

BÀI TOÁN 9: SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Với phương trình có chứa tham số: $f(x, m) = g(m)$. Chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập luận số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = f(x, m)$ và đường thẳng $d: y = g(m)$.

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x, m)$

- + Tìm miền xác định D
- + Tính đạo hàm y' rồi giải phương trình $y' = 0$
- + Lập bảng biến thiên của hàm số

Bước 3: Kết luận:

- + Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min f(x, m) \leq g(m) \leq \max f(x, m) (x \in D)$
- + Phương trình có k nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (d)$ cắt (C) tại k điểm phân biệt
- + Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (C) = \emptyset$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho phương trình $3^{x^2-2x+2} + 2^{2(x^2-2x+2)} + x^2 - 2x = m - 2$

- Giải phương trình với $m = 8$
- Giải phương trình với $m = 27$
- Tìm m để phương trình có nghiệm

Giải:

Viết lại phương trình dưới dạng: $3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2 = m$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số:

$$y = 3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2 \text{ với đường thẳng } y = m$$

Xét hàm số $y = 3^{x^2-2x+2} + 4^{x^2-2x+2} + x^2 - 2x + 2$ xác định trên $D = \mathbb{R}$

Giới hạn: $\lim y = +\infty$

Bảng biến thiên: vì $3 > 1$, $4 > 1$ nên sự biến thiên của hàm số phụ thuộc vào sự biến thiên của hàm số

$t = x^2 - 2x + 2$ ta có:

- Với $m = 8$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$
- Với $m = 27$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 2$
- Phương trình có nghiệm khi $m > 8$

Bài 2: Với giá trị nào của m thì phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt

Giải:

Vì $m^4 - m^2 + 1 > 0$ với mọi m do đó phương trình tương đương với:

$$|x^2 - 4x + 3| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1)$$

Đặt $\log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) = a$, khi đó: $|x^2 - 4x + 3| = a$

Phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại 4 điểm phân biệt

Xét hàm số: $y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{ khi } x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ -x^2 - 4x + 3 & \text{ khi } 1 < x < 3 \end{cases}$

Đạo hàm: $y' = \begin{cases} 2x - 4 & \text{ khi } x < 1 \text{ hoặc } x > 3 \\ -2x + 4 & \text{ khi } 1 < x < 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

Từ đó, đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < |m| < 1$$

Vậy với $0 < |m| < 1$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 3: Giải và biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$

Giải:

Đặt $t = 2^x, t > 0$ phương trình được viết dưới dạng:

$$t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}} = m \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}}$ với đường thẳng d: $y = m$

Xét hàm số: $y = \frac{t + 3}{\sqrt{t^2 + 1}}$ xác định trên $D(0; +\infty)$

+ Đạo hàm: $y' = \frac{1 - 3t}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}; y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

+ Giới hạn: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 1$

+ Bảng biến thiên:

Biện luận:

Với $m \leq 1$ hoặc $m > \sqrt{10}$ phương trình vô nghiệm

Với $1 < m \leq 3$ hoặc $m = \sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất

Với $3 < m < \sqrt{10}$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Bài 4: Giải phương trình $3^x + 5^x = 2.4^x$

HD:

Ta có: $x = 0 \Rightarrow VT = VP \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình.

$x = 1 \Rightarrow VT = VP \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra: $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Vì $4^x > 0$ nên ta chia hai vế phương trình cho 4^x , ta được: $\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x = 2$

Xét hàm số: $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x - 2$ với $x \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x = 2$ (hay phương trình $3^x + 5^x = 2.4^x$) chính là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x)$ và trục hoành Ox ($y = 0$)

Đạo hàm: $f'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^x \ln \frac{5}{4}$

$f''(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln^2 \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^x \ln^2 \frac{5}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Suyra: $f'(x)$ đồng biến

Mặt khác, ta có:
$$\begin{cases} f'(0) = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{5}{4} = \ln \frac{15}{16} < 0 \\ f'(1) = \frac{3}{4} \ln \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \ln \frac{5}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) f'(1) < 0 \quad \forall x \in [0; 1]$$

Suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$. Mà $f'(x)$ đồng biến

Nên $f'(x) = 0$ có nghiệm x_0 duy nhất thuộc $(0; 1)$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$f(x_0)$		$+\infty$

Kết luận:

Phương trình $f(x) = 0$ chỉ có tối đa hai nghiệm

Suy ra: $x = 0$ và $x = 1$ là hai nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{0; 1\}$

Bài 5: (ĐHDB – 2004) CMR phương trình sau có nghiệm duy nhất $x^{x+1} = (x+1)^x \quad (x > 0)$

HD:

$$x^{x+1} = (x+1)^x \Leftrightarrow \ln x^{x+1} = \ln (x+1)^x \Leftrightarrow (x+1) \ln x = x \ln (x+1) \Leftrightarrow (x+1) \ln x - x \ln (x+1) = 0$$

$$\text{Đặt } f(x) = (x+1) \ln x - x \ln (x+1)$$

$$f'(x) = \ln x - \ln (x+1) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}; \quad f''(x) = \frac{-x^2 - x - 1}{x^2(x+1)^2} < 0 \text{ Suy ra } f'(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}^+$$

$$\text{Mà: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ với mọi } x > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \quad f(e) = e + 1 - e \ln(e+1) > 0$$

Vậy có x_0 thuộc $(0; e)$ để $f(x_0) = 0$ và x_0 là nghiệm duy nhất.

Bài 6: Giải phương trình: $4^x + 6^x = 25x + 2$

Giải:

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow f(x) = 4^x + 6^x - 25x + 2 = 0.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 + 6^x \cdot \ln 6 - 25 \Rightarrow f''(x) = 4^x \cdot (\ln 4)^2 + 6^x \cdot (\ln 6)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến $\mathbb{R}$.

$$\text{Mặt khác } f'(x) \text{ liên tục và } f'(0) = \ln 4 + \ln 6 - 25 < 0$$

$$f'(2) = 16 \cdot \ln 4 + 36 \cdot \ln 6 - 50 > 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_0 \in (0; 2)$$

Vậy $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	x_0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$f(x_0)$		$+\infty$

$$\text{Ta có } f(0) = 0 \text{ và } f(2) = 0$$

Vậy phương trình có đúng hai nghiệm $x = 0 \vee x = 2$.

BÀI TOÁN 10: ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

$$\text{TQ 1: } ab + cd = ac + bd \Leftrightarrow ab + cd - ac - bd = 0 \Leftrightarrow a(b - c) - d(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - c)(a - d) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases}$$

$$\text{TQ 2: } u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với phương trình mũ: } a^{f(x)} + a^{g(x)} = \alpha + a^{h(x)} \quad [h(x) = f(x) + g(x)]$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình

a. $12 + 6^x = 4 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x$

b. $15^x - 3 \cdot 5^x + 3^x = 3$

Giải:

a. PT

$$\Leftrightarrow 12 - 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x - 6^x \Leftrightarrow 4(3 - 3^x) = 2^x(3 - 3^x)$$

$$\Leftrightarrow (4 - 2^x)(3 - 3^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2^x = 0 \\ 3 - 3^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b. PT

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x + 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5^x(3^x - 3) + 3^x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3)(5^x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (5^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

Giải các phương trình sau:

1. $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 24 + 6^x \rightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$

2. $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20$

3. $2^x + 3^x = 1 + 6^x$

4. $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$

5. $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0$

6. $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$

7. $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

8. $5 \cdot 3^{2x-1} - 7 \cdot 3^{x-1} + \sqrt{1-6 \cdot 3^x + 9^{x+1}} = 0$

9. $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$

10. $x^2 3^{x-1} + x(3^x - 2^x) = 2(2^x - 3^{x-1})$

11. $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cos(xy) + 2^{|y|}$

12. $2^{2(x^2+x)} + 2^{1-x^2} - 2^{2(x^2+x)} \cdot 2^{1-x^2} - 1 = 0$

BÀI TOÁN 11: PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Bài 1: Giải phương trình: $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$ với tham số $a \in (0;1)$

Giải:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x + 1$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$,

ta được: $1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x$. Vì $a \in (0;1)$ nên tồn tại góc $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ để cho $\tan \frac{\varphi}{2} = a$.

Thu được phương trình:

$$1 = \left(\frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}}\right)^x + \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}}\right)^x \Leftrightarrow 1 = (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x$$

Hàm số $y = (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x$ là hàm nghịch biến và ta có

$f(2) = (\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$. Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2: Cho hai phương trình: $(3+2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2}-1)^x + 3$ (1) và $(\sqrt{2}+1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9}$ (2)

Giả sử x là nghiệm của phương trình G (1). Chứng minh rằng, khi đó x cũng là nghiệm của phương trình (2).

Giải:

$$(3+2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2}-1)^x + 3 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{2x} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x} + 3$$

Đặt $(\sqrt{2}+1)^x = 2t$ với $t > 0$.

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{1}{2}. \text{ Xét } t \in (-1;1), \text{ đặt } t = \cos \alpha, \alpha \in (0; \pi) \text{ ta được}$$

$$4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$$

$$\text{Vì } \alpha \in (0; \pi) \text{ nên } \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}$$

$$\text{suy ra } t_1 = \cos \frac{\pi}{9}; t_2 = \cos \frac{5\pi}{9}; t_3 = \cos \frac{7\pi}{9}$$

Rõ ràng phương trình bậc ba có đủ ba nghiệm nên ta không xét

nghiệm $t \notin (-1;1)$. Mặt khác $t_2 = \cos \frac{5\pi}{9} < 0$ và $t_3 = \cos \frac{7\pi}{9} < 0$ do đó nghiệm của phương trình (1)

$$\text{là: } t_1 = \cos \frac{\pi}{9} \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9}.$$

Vậy nếu x là nghiệm của phương trình (1) thì x cũng là nghiệm của phương trình (2)

Bài 3: Giải phương trình: $4 \cdot 3^{3x} - 3^{x+1} = \sqrt{1-9^x}$

Giải:

Điều kiện: $1 - 9^x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < 9^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4 \cdot 3^{3x} - 3 \cdot 3^x = \sqrt{1 - 3^{2x}}$$

Với điều kiện (*) thì $0 < 3^x \leq 1$

Đặt $\cos t = 3^x$, với $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó pt có dạng:

$$4 \cos^3 t - 3 \cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \begin{matrix} 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ (l) \end{matrix} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Ta có: } \cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Do đó: } t = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 3^x = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Bài 4: Giải phương trình $\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2^{2x}}} = (1 + 2\sqrt{1 - 2^{2x}}) \cdot 2^x$

Giải:

Điều kiện $1 - 2^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Như vậy $0 < 2^x \leq 1$, đặt $2^x = \sin t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \sin t (1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 t}) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos t} = (1 + 2 \cos t) \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = 2 \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{3t}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{t}{2} = 0(1) \\ \sin \frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

Bài tập tổng hợp tự giải:

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $|x-1|^{x^2-4x+3} = 1$ b. $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cdot \cos xy + 2^{|y|} = 0$ c. $9^{-|x|} = \frac{1}{2}^{|x+1|+|x-1|}$
d. $(x+4)3^{1-|x-1|} - x = (x+1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$ e. $2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2$
f. $3^{2x+2} + \sqrt{3x^4 - 6x^2 + 7} = 1 + 2 \cdot 3^{x+1}$ g. $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2 - \sqrt{3})}$

h. (HVQHQT – 1997) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$
i. (ĐHQGHN – D 1997) $(5 - \sqrt{21})^x + 7(5 + \sqrt{21})^x = 2^{x+3}$
k. (ĐHCT – D 2000) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{\sin x} + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{\sin x} = 2$
l. $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = (2\sqrt{2})^x$

Đs:

a. $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$ b. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), y = 0$ c. $x = \pm \log_3 2$
d. $x = \{-1\} \cup [0;1]$ e. $x = y = \frac{1}{2}$ f. $x = -1$
g. $x = 1 \pm \sqrt{\frac{\lg 10(2 + \sqrt{3})}{\lg(2 + \sqrt{3})}}$ h. Vô nghiệm i. $x = 0 \vee x = \log_{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} 7$
k. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ k. $x = 2$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt[4]{x^x} = x^{\sqrt{x}}$ b. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$ c. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^{3x-4}$
d. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ e. $2^{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{2^{\sqrt{6}}} = 4^{\sqrt{x+1}}$ f. $x^{-1} \sqrt[3]{2^{3x-1}} = 3x-7 \sqrt[3]{8^{x-3}}$
g. $1000 \cdot \sqrt[3]{0,1} = 100^x$ h. $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$ i. $\sqrt[9]{9^{\frac{x(x-1)-1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$
k. (ĐH mở - D 2001) $2^{\frac{1}{x}} (\sqrt{x^2 + 4} - x - 2) = 4\sqrt{x^2 + 4} - 4x - 8$

HD: Điều kiện $x \neq 0$

$$\left(\sqrt{x^2 + 4} - x - 2\right) \left(2^{\frac{1}{x}} - 4\right) = 0$$

l. $4x^2 + x \cdot 3^x + 3^{x+1} = 2x^2 \cdot 3^x + 2x + 6$
m. (ĐHKTHN – 1997) $25^x - 2(3-x)5^x + 2x - 7 = 0$

Đs:

a. $x = 1 \vee x = \sqrt[3]{256}$ b. $x = \log_{\frac{2}{7}} \frac{228}{343}$ c. $x = 2$
d. $x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{31}{43}$ e. $x = \frac{1}{2}$ f. $x \in \Phi$

g. $x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$

h. $x = -\frac{1}{2}$

i. $x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

k. $x = \frac{1}{2}$

l. $x = \left\{ -1; \frac{3}{2}; \log_3 2 \right\}$

m. $x = 1$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x = -2x + 6$

b. $2^x (\sqrt{x^2 + 4} - x - 2) = 4\sqrt{x^2 + 4} - 4x - 8$

c. (ĐHQGHN - 2000) $(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2$

d. $6.9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}+6} + 6.4^{\frac{1}{x}} = 0$

e. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$

f. $5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} = 0$

g. $(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 4(x-2)^3$

h. $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

i. $2 \cdot x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$

l. $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}$

m. $x + \log_2 (9 - 2^x) = 3$

n. $7^{3x} + 9.5^{2x} = 5^{2x} + 9.7^{3x}$

Đs:

c.

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$

b. $7.3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

c. $4^{x+\frac{3}{2}} + 9^x = 6^{x+1}$

d. $5^{2x} = 3^{2x} + 2.5^x + 2.3^x$

e. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$

f. $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

PHƯƠNG TRÌNH MŨ CÓ CHỨA THAM SỐ

Bài 1: (ĐHDB - 2002) Tìm a để phương trình sau có nghiệm $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a+1 = 0$

Giải:

Điều kiện $x \in [-1;1]$

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$; $x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [3;9]$

Ta có: (1) viết lại $t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow (t-2)m = t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2}$, với $t \in [3;9]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên

t	3	9
f'(t)	+	
f(t)	$\frac{64}{7}$	
	4	

Căn cứ bảng biến thiên, (1) có nghiệm $x \in [-1;1] \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t \in [3;9] \Leftrightarrow 4 \leq m \leq \frac{64}{7}$

Bài 2: Cho phương trình $2.4^{\sqrt{x}-1} - 5.2^{\sqrt{x}-1} + m = 0$ (1) với m là tham số

a. Giải phương trình ứng với $m = 2$

b. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có nghiệm

Giải:

Cho $2.4^{\sqrt{x}-1} - 5.2^{\sqrt{x}-1} + m = 0$ (1)

a. Giải (1) khi $m = 2$

Đặt $t = 2^{\sqrt{x}-1}$ Điều kiện $t \geq \frac{1}{2}$ (vì $\sqrt{x} - 1 \geq -1$)

Khi đó (1) trở thành: $2t^2 - 5t + m = 0$ (*)

Với $m = 2$ (*) trở thành: $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}$

Vậy (1) $\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}-1} = 2 \vee 2^{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 1 \vee \sqrt{x} - 1 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \vee \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0$

b. Tìm m để (1) có nghiệm:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2t^2 - 5t = -m$

Xem hàm số: $y = 2t^2 - 5t$ trên $[\frac{1}{2}, +\infty)$, $y' = -4t + 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
y'	+	0	-
y		$\frac{25}{8}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm trong $[\frac{1}{2}, +\infty) \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{8}$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Với giá trị nào của p thì phương trình $p.2^x + 2^{-x} = 5$ có nghiệm

Bài 2: (ĐHTS – 2001) Giải và biện luận phương trình $\sqrt{a + 2^x} + \sqrt{a - 2^x} = a$

Bài 3: (ĐHHD – 2000) Cho phương trình $(k+1)4^x + (3k-2)2^{x+1} - 3k+1 = 0$

a. Giải phương trình khi $k = 3$

b. Tìm tất cả các giá trị của k để phương trình có hai nghiệm trái dấu

Bài 3: Cho phương trình $5.16^x + 2.81^x = a.36^x$

a. Giải phương trình khi $a = 7$

b. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình vô nghiệm

Đs: a. $x = 0 \vee x = \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{5}{2}}$

b. $a \in (-\infty; 2\sqrt{10})$

Bài 1: Giải và biện luận phương trình: $(m-2).2^x + (m-5).2^{-x} - 2(m+1) = 0$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình: $(3+\sqrt{5})^x + a(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$

Bài 3: Xác định m để phương trình sau có nghiệm: $(m-2)2^{2(x^2+1)} - 2(m+1).2^{x^2+1} + 2m - 6 = 0$

Bài 4: Tìm m để phương trình: $(m+3).16^x + (2m-1).4^x + m+1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

Bài 5: Cho phương trình: $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$

a. Giải phương trình khi $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$

Bài 6: Giải và biện luận phương trình:

a. $m.3^x + m.3^{-x} = 8$

b. $(m-2).2^x + m.2^{-x} + m = 0$

Bài 7: Xác định m để các phương trình sau có nghiệm:

a. $(m-1)3^{2x} + 2(m-3)3^x + m+3 = 0$

b. $(m-4)4^x - 2(m-2)2^x + m-1 = 0$

Bài 8: Cho phương trình: $m.16^x + 2.81^x = 5.36^x$

a. Giải phương trình với $m = 3$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài 9: Cho phương trình: $(3+2\sqrt{2})^{tgx} + (3-2\sqrt{2})^{tgx} = m$

a. Giải phương trình với $m = 6$.

b. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm $\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 10: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{1}{3^{|x-2|}} = 2m-1$

Bài 11: Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$9^{x^2} + 3^{x^2+1} - 4 = 0$$

$$|m-4|.2^{x-2} + m.4^{x-1} = 1$$

Bài 12: Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$$

$$|m-9|.3^{x-2} + m.9^{x-1} = 1$$

Bài 13: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{1}{2^{|x-2|}} = 3m-2$

Bài 14: Xác định m để mọi nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ cũng là nghiệm của bất phương

trình $(m-2)^2 x^2 - 3(m-6)x - (m-1) < 0$

CHƯƠNG II:
PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH- HỆ LÔGARIT.

CHỦ ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ VÀ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi lôgarit người ta có thể lôgarit hoá theo cùng 1 cơ số cả 2 vế của phương trình, bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Phương trình: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$

Chú ý:

- Việc lựa chọn điều kiện $f(x) > 0$ hoặc $g(x) > 0$ tùy thuộc vào độ phức tạp của $f(x)$ và $g(x)$
- Khi cơ số a là một hằng số thỏa mãn $0 < a \neq 1$ thì không cần kiểm tra điều kiện mà biến đổi tương đương luôn

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Phương trình được viết dưới dạng:

$$2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x = 2\log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1) \Leftrightarrow \left[\log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1} - 1)\right]\log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1} - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2x+1 - 2\sqrt{2x+1} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2\sqrt{2x+1} = x+2 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \begin{cases} x = 1 \\ 4(2x+1) = (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \xrightarrow{x>0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 4$.

Bài 2: Giải phương trình

a. $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

b. $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$

c. $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_4 x$

d. $\frac{1}{3}\log_2(5-x) + 2\log_8 \sqrt{3-x} = 1$

Giải:

a. Điều kiện $x > 0$.

Ta biến đổi về cùng cơ số 3:

$$\log_4 x = \log_4 3 \cdot \log_3 x \text{ và } \log_5 x = \log_5 3 \cdot \log_3 x$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\log_3 x + \log_4 3 \cdot \log_3 x = \log_5 3 \cdot \log_3 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x (1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Điều kiện $x > \frac{1}{3}$.

$$\Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2 + 1 = 3\log_5(2x+1) \Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5(2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3 \Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được $x = 2$.

c. Điều kiện $x > 0$ (*)

Phương trình

$$\Leftrightarrow \log_2 5 \cdot \log_5 x + \log_3 5 \cdot \log_5 x + \log_5 x = \log_2 3 \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x \cdot [\log_2 3 \cdot (\log_3 x)^2 - \log_2 5 - \log_3 5 - 1] = 0$$

TH 1: $\log_5 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ thỏa mãn (*)

TH 2: $(\log_3 x)^2 = \frac{\log_2 5 + \log_3 5 + 1}{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_3 x = \pm \sqrt{\frac{\log_2 5 + \log_3 5 + 1}{\log_2 3}}$

$$\Leftrightarrow x = 3^{\pm \sqrt{\frac{\log_2 5 + \log_3 5 + 1}{\log_2 3}}} \text{ thỏa mãn (*)}.$$

d. Điều kiện : $x < 3$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_{2^3}(5-x) + 2\log_8(3-x)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_8(5-x) + 2 \cdot \frac{1}{2} \log_8(3-x) = 1 \Leftrightarrow \log_8(5-x)(3-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (5-x)(3-x) = 8 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 3: (ĐHDB - 2007) Giải phương trình $\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$.

Giải:

Điều kiện: $x > 1$

$$\text{Đưa về } \frac{1}{2} \log_2(x-1) + \frac{1}{2 \log_{2x+1} 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(2x+1) = 1 + \log_2(x+2) \Leftrightarrow \log_2(x-1)(2x+1) = \log_2 2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{2}$$

Do ĐK, chỉ nhận nghiệm $x = \frac{5}{2}$

Bài 4: (ĐHDB - 2007) Giải phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$

Giải:

Điều kiện: $x > 1$

$$\text{Đưa về } 2 \log_3(x-1) + 2 \log_3(2x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1)(2x-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Do ĐK chỉ nhận $x = 2$

Bài 5: (ĐHDB - 2006) Giải phương trình $\log_x 2 + 2 \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$

Giải:

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$

$$\text{Pt tương đương với: } \frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_4 2x} = \frac{1}{\log_8 \sqrt{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{4}{1 + \log_2 x} = \frac{6}{1 + \log_2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} = \frac{2}{1 + \log_2 x} \Leftrightarrow 1 + \log_2 x = 2 \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow 2x = x^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 6: (ĐHDB - 2006) Giải phương trình $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8(x-1)^3 = 0$

Giải:

Điều kiện: $1 < x < 3$.

Biến đổi PT

$$\log_2(x+1) + \log_2(3-x) - \log_2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x+1)(3-x)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3-x)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

Do ĐK chỉ nhận $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

Bài 7: (ĐHDB - 2002) Giải phương trình $16\log_{27x^2} x - 3\log_{3x} x^2 = 0$

HD:

Với ĐK: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Đưa về dạng $\frac{8\log_3 x}{3+2\log_3 x} = \frac{3\log_3 x}{1+\log_3 x}$

Hoặc $\log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Hoặc $\frac{8}{3+2\log_3 x} = \frac{3}{1+\log_3 x} \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

Bài 8: Giải phương trình

a. $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \quad (1)$

b. $\log_2 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{4}} (x^2 - 2x + 1) - \log_4 (x^2 - 4x + 4) - \log_{\frac{1}{2}} (x-1) = 0$

c. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$

Giải:

a. Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (16-x^2) \\ \Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$$

+ Với $-1 < x < 4$ ta có phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0 \quad (2)$;

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \text{ (loại)} \end{cases}$$

+ Với $-4 < x < -1$ ta có phương trình $x^2 - 4x - 20 = 0 \quad (3)$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{24} \\ x = 2 + \sqrt{24} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 2(1-\sqrt{6})$

b. Điều kiện $x > 1; x \neq 2$

$$\log_2 \sqrt{x} - \log_2 |x-1| - \log_2 |x-2| + \log_2 (x-1) = 0 \quad \text{do } x > 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x} = \log_2 |x-2|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy pt có nghiệm $x = 4$.

c. Điều kiện: $x > 0$.

$$Pt \Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 11$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 11 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \log_3 x = 11$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{6} \log_3 x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x = 11 \cdot \frac{6}{11} \Leftrightarrow \log_3 x = 6 \Leftrightarrow x = 3^6 = 729$$

Bài 9: (ĐHDB – 2002) Giải phương trình $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} (x+3) + \frac{1}{4} \log_4 (x-1)^8 = \log_2 (4x)$

Giải:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \log_2 (x+3) + \log_2 |x-1| = \log_2 (4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \log_2 |x-1| = \log_2 \frac{4x}{x+3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ |x-1| = \frac{4x}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x+1 = \frac{4x}{x+3} \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ x-1 = \frac{4x}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x^2 - 2x + 3 = 4x \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 3 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 + 6x - 3 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 + 2\sqrt{3} \vee x = 3$$

Bài 10: Giải phương trình $\log_5 (-4x^2 + 13x - 5) - \log_{25} (3x+1) = 0$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} -4x^2 + 13x - 5 > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases}$

$$Pt \Leftrightarrow \log_5 (-4x^2 + 13x - 5) = \log_5 \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow -4x^2 + 13x - 5 = \sqrt{3x+1}$$

Đặt $\sqrt{3x+1} = -2y+3$. Ta được hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 - 13x - 2y + 8 = 0 \\ 4y^2 - 12y - 3x + 8 = 0 \end{cases}$

Giải hệ được $y = x$ hoặc $2y = 5 - 2x$

Với $y = x \Rightarrow 4x^2 - 15x + 8 = 0$, tìm được nghiệm $x = \frac{15 - \sqrt{97}}{8}$

Với $2y = 5 - 2x \Rightarrow 4x^2 - 11x + 3 = 0$, tìm được nghiệm $x = \frac{11 + \sqrt{73}}{8}$

Vậy tập nghiệm của pt đã cho là $T = \left\{ \frac{15 - \sqrt{97}}{8}; \frac{11 + \sqrt{73}}{8} \right\}$

Chú ý:

$$Pt \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + \frac{25}{4} = 3x + 1 - \sqrt{3x+1} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Bài 11: Giải phương trình :

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 (5-2x) + \log_2 (5-2x) \cdot \log_{2x+1} (5-2x) = \log_2 (2x-5)^2 + \log_2 (2x+1) \cdot \log_{\sqrt{2}} (5-2x)$$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

PT đã cho tương đương với

$$\log_2^2(5-2x) + \frac{\log_2^2(5-2x)}{\log_2(2x+1)} = 2\log_2(5-2x) + 2\log_2(5-2x)\log_2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x+1) = -1 \\ \log_2(5-2x) = 2\log_2(2x+1) \\ \log_2(5-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \vee x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐK trên PT đã cho có 3 nghiệm $x = \frac{1}{4} \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$

Bài 12: Giải phương trình: $\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}}(\cos x + \cos 2x) = 0$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \cos x - \sin x > 0 \\ \cos x + \cos 2x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó Pt} \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$ (Với $k \in \mathbb{N}^*$).

Bài 14: Giải các phương trình:

a. $\log_{(x+3)}(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \frac{1}{2}$

b. $\log_2(x^2 + x + 1) + \log_2(x^2 - x + 1) = \log_2(x^4 - x^2 + 1) + \log_2(x^4 + x^2 + 1)$

c. $\log_3(4 \cdot 16^x + 12^x) = 2x + 1$

Giải:

a.

$$\begin{aligned}
 \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+3 \neq 1 \\ 3-\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \neq -2 \\ \sqrt{x+3} = 3-|x-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \neq -2 \\ \sqrt{x+3} = 4-x \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -3 \\ x \neq -2 \\ \sqrt{x+3} = x+2 \\ x \leq 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4-x \geq 0 \\ x+3 = (4-x)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ 2+x > 0 \\ x+3 = (2+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x^2-9x+13=0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 1 \\ x^2+3x+1=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x = \frac{9-\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{9+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 1 \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9-\sqrt{29}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}
 \end{aligned}$$

b. Phương trình

$$\Leftrightarrow \log_2(x^4 + x^2 + 1) = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^4 - x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{c. PT} \Leftrightarrow 4 \cdot 16^x + 12^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 4 \cdot 4^{2x} + 4^x \cdot 3^x = 3 \cdot 3^{2x}.$$

$$\text{Chia 2 vế cho } 3^{2x} > 0, \text{ ta có: } 4\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{4}{3}\right)^x, t > 0. \text{ PT trở thành } 4t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi } t = \frac{3}{4}, \text{ ta có: } \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: Giải phương trình: $\log_9(x+1)^2 = \log_3(4-x) + \log_3(4+x)$

HD:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \log_3|x+1| = \log_3(16-x^2) \Rightarrow |x+1| = 16-x^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 4 \\ x^2 + x - 15 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -4 < x < -1 \\ x^2 - x - 17 = 0 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{69}}{2} \end{array} \right.$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

HD: Điều kiện $x > 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(1 - 2\log_3 x - 6\log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{array} \right.$$

b. $2\log(x-1) = \frac{1}{2}\log x^5 - \log \sqrt{x}$

HD: Điều kiện $x > 1$

$$\Leftrightarrow \log(x-1)^2 = \log x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (PTVN)}$$

c. $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$

HD: Điều kiện $x > \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3) = \log_2(3x - 5) \Leftrightarrow x^2 - 3 = 3x - 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

d. $\log(x+10) + \frac{1}{2}\log x^2 = 2 - \log 4$

HD: Điều kiện $-10 < x \neq 0$

$$\Leftrightarrow |x|(x+10) = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = -5 + 5\sqrt{2} \end{array} \right.$$

e. $\log_{(x^2-x+2)}(x+3) = \log_{(x+5)}(x+3)$

HD: Điều kiện $x > -3$

TH 1: $x+3=1 \Leftrightarrow x=-2$ là nghiệm của pt

TH 2: $x+3 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{(x+3)}(x^2-x+2)} = \frac{1}{\log_{(x+3)}(x+5)} \Leftrightarrow x^2-x+2 = x+5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Bài 3:

a. $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 = 1$

HD: Điều kiện $0 < x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+2) = \frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+2) = \log_2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

b. $\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3$

HD: Điều kiện $\begin{cases} x < -4 \\ -3 < x < -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$$

Đặt $x^2 + 5x + 5 = t$ phương trình trở thành $(t-1)(t+1) = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$. Giải được $\begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

c. $\log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 9$

Đs: $x = 25 \vee x = -29$

d. (**ĐHAN – 2001**) $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{x+3} 2} = 2 + \log_2(x+1)$

Đs: $x = 1$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 1

I. Phương pháp:

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng 1 ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Nếu đặt $t = \log_a x$ với $x > 0$ thì: $\log_a^k x = t^k$; $\log_x a = \frac{1}{t}$ với $0 < x \neq 1$

Dạng 2: Ta biết rằng: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ do đó nếu đặt $t = a^{\log_b x}$ thì $t = x^{\log_b a}$. Tuy nhiên trong nhiều bài toán có chứa $a^{\log_b x}$, ta thường đặt ẩn phụ dần với $t = \log_b x$.

Bài tập áp dụng:

Bài 1: (ĐHDB - 2003) Giải phương trình $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$

Giải:

Điều kiện: $5^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \log_5 4$

$$\log_5(5^x - 4) = 1 - x \Leftrightarrow 5^x - 4 = 5^{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^x > 0 \\ t - 4 = \frac{5}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^x \\ t^2 - 4t - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^x \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 2: (ĐH – A 2008) Giải phương trình $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$

Giải:

Với điều kiện $x > \frac{1}{2}$

PT tương đương: $\log_{2x-1}(2x-1)(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$

$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 3$

Đặt $t = \log_{2x-1}(x+1)$ ta được: $t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

Với $t = 1$ ta có: $\log_{2x-1}(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$ thỏa ĐK $x > \frac{1}{2}$

Với $t = 2$ ta có: $\log_{2x-1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$

Do ĐK ta chỉ nhận $x = \frac{5}{4}$.

Đs: $x = 2 \vee x = \frac{5}{4}$

Bài 3: Giải các phương trình

a. (ĐH – D 2007) $\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2\log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$

b. $\log_2(4^{x+1} + 4) \cdot \log_2(4^x + 1) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{8}}$

Giải:

a. Điều kiện $x > \log_2 \frac{3}{4}$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ ta được:

$$\log_2(t^2 + 15t + 27) + 2\log_2 \frac{1}{4t - 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{4}{3} \\ t^2 + 15t + 27 = (4t - 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{4}{3} \\ 5t^2 - 13t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{2}{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 3 = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 3$

b. PT $\Leftrightarrow \log_2 4(4^x + 1) \cdot \log_2(4^x + 1) = 3$

$$\Leftrightarrow [2 + \log_2(4^x + 1)] \log_2(4^x + 1) = 3$$

Đặt $t = \log_2(4^x + 1)$ ta được $(t+2)t = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_2(4^x + 1) = 1 \Leftrightarrow 4^x + 1 = 2 \Leftrightarrow 4^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = -3 \Leftrightarrow \log_2(4^x + 1) = -3 \Leftrightarrow 4^x + 1 = \frac{1}{8}$ (vô nghiệm)

Bài 4: (ĐHDB - 2006) Giải phương trình $\log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$

Giải:

Biến đổi PT về dạng

$$\log_3(3^x - 1) \log_3(3(3^x - 1)) = 6 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) [1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t &= \log_3(3^x - 1) \\ \Leftrightarrow t(1+t) &= 6 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -3 \\ \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) &= 2 \vee \log_3(3^x - 1) = -3 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 9 \vee 3^x - 1 = \frac{1}{27} \\ \Leftrightarrow 3^x &= 10 \vee 3^x = \frac{28}{27} \Leftrightarrow x = \log_3 10 \vee x = \log_3 \frac{28}{27} \end{aligned}$$

Bài 5: (ĐHDB - 2006) Giải phương trình $2(\log_2 x + 1)\log_4 x + \log_2 \frac{1}{4} = 0$

HD:

Biến đổi PT

$$(\log_2 x + 1)\log_2 x - 2 = 0. \text{ Đặt } t = \log_2 x$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{4}$$

Bài 6: (ĐH - A 2002) Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$

1. Giải PT khi $m = 2$

2. Tìm m để PT có nghiệm trên $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

Giải:

$$1. \log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \\ t^2 + t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}$$

$$2. \text{ Xét } 1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 x \leq \sqrt{3}$$

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \\ m = f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t - 2) \end{cases}$$

- Pt ban đầu có nghiệm x thỏa $1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}}$ khi và chỉ khi m thuộc miền giá trị của $f(t)$ với $1 \leq t \leq 2$

- Khảo sát hàm số ta được $0 \leq m \leq 2$

Bài 7: Cho phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m$ (1)

a. Giải phương trình với $m = 1$

b. Xác định m để phương trình có nghiệm $x \geq 1$

Giải:

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2} \log_2(5^x - 1) \cdot \log_2[2(5^x - 1)] = m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] = 2m$$

Điều kiện: $5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$$\text{Đặt } t = \log_2(5^x - 1). \text{ Khi đó phương trình có dạng: } t(1+t) = 2m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - 2m = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{a. Với } m = 1 \text{ ta được: } t^2 + t - 2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(5^x - 1) = 1 \\ \log_2(5^x - 1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 1 = 2 \\ 5^x - 1 = 2^{-2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 3 \\ 5^x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 3 \\ x = \log_5 \frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có 2 nghiệm $x = \log_5 3; x = \log_5 \frac{5}{4}$

$$\text{b. Với } x \geq 1 \Rightarrow 5^x - 1 \geq 5 - 1 = 4 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \geq \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$\text{Vậy để phương trình (1) có nghiệm } x \geq 1 \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq t_1 \leq t_2 (*) \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{cases} \text{ (loại (*))}$$

$$\Leftrightarrow a.f(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Vậy với $m \geq 3$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

$$\text{Bài 8: Giải phương trình } \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Nhận xét rằng: } (x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{x^2 - 1}) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$$\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\text{sử dụng phép biến đổi cơ số: } \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\text{và } \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_3 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$$\log_2 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}). \text{ Khi đó (1) có dạng: } t(\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 0 \Rightarrow \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$+ \text{ Với } \log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot t - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) &= 0 \Leftrightarrow \log_2 6 \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \\ \Leftrightarrow \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \log_6 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} = 3^{-\log_6 2} \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{2} (3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$

Bài 9: Giải phương trình $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \geq \log_3 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\begin{aligned}\text{Pt} &\Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - (\log_3 3 + \log_3 x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - 1 - \log_3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 x - 2 = 0\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\log_3 x} \Rightarrow t^2 = \log_3 x$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 3t - t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \sqrt{\log_3 x} = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1^2 \Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{\log_3 x} = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2^2 \Rightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81.$$

Vậy: Pt đã cho có nghiệm là: $x = 3$ hoặc $x = 81$.

Bài 10: Giải phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 2 = 0$.

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} \Rightarrow t^2 = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} = 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x = 1^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x = 2^2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x = 4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow x = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

Vậy: Pt đã cho có nghiệm là $x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{81}$

Bài 11: Giải phương trình $2(\log_3 x)^2 - 5\log_3(9x) + 3 = 0$

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 5(\log_3 9 + \log_3 x) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 5(2 + \log_3 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 10 - 5\log_3 x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 7 = 0$$

Đặt $t = \log_3 x$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Với } t = \frac{7}{2} \Rightarrow \log_3 x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 3^{\frac{7}{2}} = \sqrt{3^7} = 27\sqrt{3}$$

Bài 12: Giải phương trình

a. $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$

b. $\log_2^2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} = \log_4 x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg x = 2\lg x - 4 \Leftrightarrow \lg^2 x - 5\lg x + 4 = 0$$

Đặt $t = \lg x$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ t = 4 \Rightarrow \lg x = 4 \Rightarrow x = 10^4 \end{cases}$$

b. Điều kiện: $x > 0$.

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 \frac{2}{x} = \log_2 x \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 (*)$$

Đặt $t = \log_2 x$

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta có } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Với } t = 2 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 13: Giải phương trình

a. $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$

b. $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) = 12$

Giải:

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2}$$

Đặt $t = \log_3 x$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9 \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{cases}$$

b. Điều kiện : $x > 1$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot [1 + \log_2 (2^x - 1)] - 12 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = \log_2 (2^x - 1) \text{ thì } (1) \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = -4$$

$$t = 3 \Leftrightarrow \log_2 (2^x - 1) = 3 \Leftrightarrow 2^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_2 9$$

$$t = -4 \Leftrightarrow \log_2 (2^x - 1) = -4 \Leftrightarrow 2^x = \frac{17}{16} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{17}{16}$$

Bài 14: Giải phương trình

a. $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 = 3$

b. $\frac{2}{1 + \log x} + \frac{1}{5 - \log x} = 1$

c. $2^{\log_3 x + 1} + 2^{\log_3 x - 2} = x$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_{2x} 2^6 + \log_{x^2} 2^4 = 3$$

$$\Leftrightarrow 6 \log_{2x} 2 + 4 \log_{x^2} 2 = 3 \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 2x} + \frac{4}{\log_2 x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} + \frac{4}{2 \log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \frac{6}{1 + \log_2 x} + \frac{2}{\log_2 x} = 3$$

Đặt $t = \log_2 x$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{6}{1+t} + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow \frac{6t + 2(1+t)}{(1+t)t} = 3 \Leftrightarrow 6t + 2(1+t) = 3(1+t)t$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$\text{b. Điều kiện} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 10^5 \\ x \neq 10^{-1} \end{cases}$$

Đặt $t = \log x$

$$\text{Ta được PT: } \frac{2}{1+t} + \frac{1}{5-t} = 1$$

$$\text{Thu gọn: } t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100 \\ \log x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000 \end{cases}$$

c. Điều kiện $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$.

$$\text{Ta có: } 2.2^t + \frac{1}{4}2^t = 3^t \Leftrightarrow \frac{9}{4}.2^t = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Khi $t = 2$ thì $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 9$.

Bài 15: Giải phương trình

a. $4\log_4^2 x - \frac{3}{2}\log_2 x^2 + 2 = 0$

b. $(1 + \log_2 x)(2 - \log_4 x) = 3$

c. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$

d. $\log_3 x + 2\log_9(x+6) = 3$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 4(\log_2 x)^2 - \frac{3}{2}.2.\log_2 x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}.\log_2 x\right)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{1}{2}\right)^2.(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$$

Đặt $t = \log_2 x$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2 \\ t = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

b. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$

$$\text{Ta được PT: } (1+t)(2-\frac{1}{2}t) = 3$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

c. Đưa về cơ số 2, ta được phương trình

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = \frac{11}{6} \Leftrightarrow (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\log_2 x = \frac{11}{6} \Leftrightarrow \frac{11}{6}\log_2 x = \frac{11}{6}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{d. } \log_3 x(x+6) = 3 \Leftrightarrow x(x+6) = 27 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -9(\text{loại}) \end{cases}$$

Bài 16: Giải các phương trình

a. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + \log_3(3x^4) = 3$

b. $\lg^4(x-1) + 2\lg^2(x-1)^3 = 40$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$.

$$Pt \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3^2}} x^{\frac{1}{2}} + \log_{3^{-1}} x^3 + \log_3 3 + \log_3 x^4 = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{3}{-1} \log_3 x + 1 + 4 \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x - 3 \log_3 x + 4 \log_3 x = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3 + 4) \log_3 x = 2 \Leftrightarrow 2 \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$$

b. điều kiện: $x > 1$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \lg^4(x-1) + 2.9 \lg^2(x-1) - 40 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } t = \lg^2(x-1); t > 0$$

$$PT (*) \Leftrightarrow t^2 + 18t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -20 & (\text{loại}) \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \lg^2(x-1) = 2 \Leftrightarrow \lg^2(x-1) = \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 10^{\sqrt{2}} \\ x = 1 + 10^{-\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bài 11: Giải phương trình :

$$a. (2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$$

$$b. \log_2(2^x + 4) - x = \log_2(2^x + 12) - 3$$

Giải:

$$a. \text{Điều kiện } x > 0; x \neq 3, x \neq \frac{1}{9}$$

$$(2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow (2 - \log_3 x) \frac{1}{\log_3 9x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{2 + \log_3 x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$$

$$\text{Đặt: } t = \log_3 x \text{ pt thành: } \frac{2-t}{2+t} - \frac{4}{1-t} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1, t \neq -2 \\ t^2 - 3t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{So sánh điều kiện được 2 nghiệm } x = \frac{1}{3}; x = 81$$

b. Phương trình

$$\Leftrightarrow \log_2(2^x + 4) + 3 = \log_2(2^x + 12) + x \Leftrightarrow \log_2(2^x + 4) + \log_2 8 = \log_2(2^x + 12) + \log_2 2^x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 8(2^x + 4) = \log_2 2^x(2^x + 12) \Leftrightarrow 8(2^x + 4) = 2^x(2^x + 12) \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x (t > 0)$$

$$\text{Khi đó phương trình } (*) \text{ trở thành } 8(t+4) = t(t+12) \Leftrightarrow t^2 + 4t - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -8 & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 4 = 2^x \Leftrightarrow x = 2$$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1:

a. $\log_{(x+1)} 16 = \log_2 (x+1)$

HD: Điều kiện $-1 < x \neq 0$

Đặt $\log_2 (x+1) = t$. Pt trở thành $\frac{4}{t} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$

b. $\log_x 4x^2 \cdot \log_2^2 x = 12$

HD: Điều kiện $-1 < x \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\log_2 4x^2}{\log_2 x} \cdot \log_2^2 x = 12 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x) \log_2 x = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$

c. $\log_2 \sqrt{|x|} - 4\sqrt{\log_4 |x|} - 5 = 0$

HD: Điều kiện $|x| \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 |x| - 4\sqrt{\frac{1}{2} \log_2 |x|} - 5 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{1}{2} \log_2 |x|}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow |x| = 2^{50}$

d. (**ĐHCB – 2001**) $\log_2 (4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 3)$

Đs: $x = 2$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 2

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho 1 biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được 1 phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biết số Δ là 1 số chính phương.

II. Bài tập:

Bài 1: Giải phương trình $\lg^2 x - \lg x \cdot \log_2 (4x) + 2 \log_2 x = 0$

Giải: Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\lg^2 x - (2 + \lg^2 x) \lg x + 2 \lg_2 x = 0$

Đặt $t = \lg x$, khi đó phương trình tương đương với: $t^2 - (2 + \log_2 x) \cdot t + 2 \log_2 x = 0$

Ta có: $\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 8 \log_2 x = (2 - \log_2 x)^2$ suy ra phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg x = \frac{\lg x}{\lg 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 100$ và $x = 1$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 3

I. Phương pháp:

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức lôgarit trong phương trình và biến đổi phương trình thành phương trình tích.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $\log_2 \left[x(x-1)^2 \right] + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x(x-1)^2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \text{ Biến đổi phương trình về dạng:}$$

$$\log_2 \frac{(x^2 - x)^2}{x} + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2 (x^2 - x) + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \log_2 (x^2 - x) \\ v = \log_2 x \end{cases}. \text{ Khi đó phương trình tương đương với:}$$

$$2u + v - uv - 2 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x^2 - x) = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(L) \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = 4$.

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 4

I. Phương pháp:

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 4 là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với k ẩn phụ.

Trong hệ mới thì $k - 1$ phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$

Giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ v = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases}$$

Nhận xét rằng:

$$u + v = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2 1 = 0$$

Khi đó phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ u + 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ 2v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -1 \\ \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{4}$

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} + 2\sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 6 \quad (1)$

Giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0 \\ 3 + \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \leq 2^5 \Leftrightarrow 2^2 - 4x \\ 5 - \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{29} \leq x \leq 2 + \sqrt{29} (*)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} \\ v = \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} \end{cases} \text{ điều kiện } u, v \geq 0. \text{ Khi đó phương trình được chuyển thành:}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} u + 2v = 6 \\ u^2 + v^2 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - 2v \\ (6 - 2v)^2 + v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - 2v \\ 5v^2 - 24v + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - 2v \\ v = 2 \\ v = \frac{14}{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2; u = 2 \\ v = \frac{14}{5}; v = \frac{2}{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 2 \\ \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} = \frac{14}{5} \\ \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 4x + 5) = 1 \\ \log_2(x^2 - 4x + 5) = \frac{121}{25} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ x^2 - 4x + 5 = 2^{\frac{121}{25}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 5 - 2^{\frac{121}{25}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2^{\frac{121}{25}} - 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 5

I. Phương pháp:

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 5 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng: $f[x, \varphi(x)] = 0$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ: $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x; y) = 0 \end{cases}$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$ (1)

Giải:

Đặt $u = \log_2 x$. Khi đó phương trình thành: $u^2 + \sqrt{u + 1} = 1$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} u + 1 \geq 0 \\ 1 - u^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1$

Đặt $v = \sqrt{u + 1}$ điều kiện $0 \leq v \leq \sqrt{2} \Rightarrow v^2 = u + 1$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = 1-v \\ v^2 = 1+u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u+v) \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ u-v+1=0 \end{cases}$$

Khi đó:

$$+ \text{ Với } v = -u \text{ ta được: } u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} (1) \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+ \text{ Với } u - v + 1 = 0 \text{ ta được: } u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm.

BÀI TOÁN 7: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có 3 hướng áp dụng sau:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x) = k$ (1)

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Nhận xét:

+ Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$ do đó $x = x_0$ là nghiệm

+ Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm

+ Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$ do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$ (2)

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số $y = f(x)$ là đồng biến còn hàm số $y = g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến. Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$

Bước 3: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(u) = f(v)$ (3)

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến)

Bước 3: Khi đó (3) $\Leftrightarrow u = v$ với $\forall u, v \in D_f$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $\log_2(x^2 - 4) + x = \log_2[8(x + 2)]$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2(x^2 - 4) - \log_2(x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 3 - x \Leftrightarrow \log_2(x - 2) = 3 - x$$

Nhận xét rằng:

- + Hàm số $y = \log_2(x - 2)$ là hàm đồng biến
- + Hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến
- + Vậy phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất
- + Nhận xét rằng $x = 3$ là nghiệm của phương trình
- Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Bài 2: Giải phương trình $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2 \log_2(x^2 - 2x - 4)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{5} \\ x > 1 + \sqrt{5} \end{cases}$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2 - 2x - 3) = \log_2(x^2 - 2x - 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_4(x^2 - 2x - 4) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x - 4 \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow \log_5(t + 1) = \log_4 t \quad (2)$$

Đặt $y = \log_4 t \Rightarrow t = 4^y$ phương trình (2) được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} t = 4^y \\ t + 1 = 5^y \end{cases} \Rightarrow 4^y + 1 = 5^y \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1 \quad (3)$$

Hàm số $f(y) = \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y$ là hàm nghịch biến

Ta có:

+ Với $y = 1, f(1) = 1$ do đó $y = 1$ là nghiệm của phương trình (3)

+ Với $y > 1, f(y) < f(1) = 1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm.

+ Với $y < 1, f(y) > f(1) = 1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm

Vậy $y = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

$$\text{Suy ra: } y = 1 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4; x = -2$

Bài 3: Giải phương trình $x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5} \quad (1)$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t.$$

$$\text{Khi đó phương trình có dạng: } (2^t)^2 + 3^t = (2^t)^{\log_2 5} \Leftrightarrow 4^t + 3^t = 5^t$$

Chia cả 2 vế cho $5^t \neq 0$ ta được: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1$ (2)

Nhận xét rằng:

- + Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến
- + Vế phải của phương trình là một hàm hằng
- + Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất
- + Nhận xét rằng $t = 2$ là nghiệm của phương trình (2) vì $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 4: Giải phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2$ (1)

Giải:

Điều kiện $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}; u \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$

Khi đó (1) có dạng: $\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - u^2} = 2$ (2)

Xét hàm số $f(u) = \log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1 - u^2} = \log_3(u + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5^{u^2}$

Miền xác định $D = [0; +\infty)$

Đạo hàm: $f'(u) = \frac{1}{(u + 2)\ln 3} + \frac{1}{5} \cdot 2u \cdot 5^{u^2} \cdot \ln 5 > 0, \forall u \in D$.

Suy ra hàm số đồng biến trên D

Mặt khác $f(1) = \log_3(1 + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5 = 2$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình $6^x = 1 + 2x + 3\log_6(5x + 1)$

Giải:

Phương trình: $6^x = 1 + 2x + 3\log_6(5x + 1)$. Điều kiện: $x > -\frac{1}{5}$

Đặt $t = \log_6(5x + 1) \Leftrightarrow 5x + 1 = 6^t \Leftrightarrow 1 = 6^t - 5x$. Khi đó ta có phương trình:

$6^x = (6^t - 5x) + 2x + 3t \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^t + 3t$. Xét hàm số: $f(u) = 6^u + 3u$.

Chứng minh $f(u)$ đơn điệu khi đó ta có $t = x$.

Khi đó ta có phương trình: $5x + 1 = 6^x$.

Bài 6: Giải phương trình

a. $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}$

b. $\log_2(1 + \sqrt[3]{x}) = \log_7 x$

c. $\log_2 x + \log_3(x-1) = 3$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó đặt $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x} = 6y$

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} \log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2y \\ \log_2 \sqrt{x} = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 3^{2y} \\ x = 2^{6y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^{3y} + 2^{2y} = 9^y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t + \left(\frac{4}{9}\right)^t = 1. \text{ Ta có } t = 2 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Với $t = 2$, ta có $x = 2^{12} = 4096$

b. Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_7 x \Leftrightarrow x = 7^t$.

PT $\Leftrightarrow \log_2\left(1 + 7^{\frac{t}{3}}\right) = t \Leftrightarrow 1 + 7^{\frac{t}{3}} = 2^t \Leftrightarrow 1 + 7^{\frac{t}{3}} = 8^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{t}{3}} - 1 = 0 \quad (*)$.

Hàm số $f(t) = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{t}{3}} - 1$ nghịch biến và $f(3) = 0$ nên $(*)$ có nghiệm $t = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 343$.

c. Điều kiện $x > 1$

Nhận xét: ta thấy $x = 4$ là một nghiệm của phương trình

Xét $f(x) = \log_2 x + \log_3(x-1) - 3$ trên $(1, +\infty)$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x} \ln 2 + \frac{1}{x-1} \ln 3 > 0$ suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến $(1, +\infty)$

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 7: Giải phương trình : $9^{-\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{8}} \cdot \log_2(x^2-x+2) - 3^{-x^2+x} \cdot \log_2\left(2 \cdot \left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{7}{4}\right) = 0$

Giải:

Điều kiện: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-x+\frac{1}{4}} \cdot \log_2(x^2-x+2) = 3^{2\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{7}{4}} \cdot \log_2\left(2 \cdot \left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{7}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-x+2} \cdot \log_2(x^2-x+2) = 3^{2\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{7}{4}} \cdot \log_2\left(2 \cdot \left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{7}{4}\right)$$

Hai vế đều có dạng $f(t) = 3^t \cdot \log_2(t)$ với $t > 0$, là hàm số đồng biến. Vậy PT này tương đương với:

$$x^2 - x + 2 = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0 \\ x < \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + x - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; x = \frac{5}{2}; x = -\frac{3}{2}$$

Bài 8: Giải phương trình $\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} \right) = x^2 + 3x + 2$

Giải:

Ta có: $\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) - \log_3(2x^2 + 4x + 5) = x^2 + 3x + 2$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) - \log_3(2x^2 + 4x + 5) = (2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5)$

Đặt :
$$\begin{cases} u = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \\ v = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x+1)^2 + 3 \geq 3 \end{cases}$$

Khi đó ta được $\log_3 u + u = \log_3 v + v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \quad (t > 2) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 2$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng trên $(2; +\infty)$

Do đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 5 = x^2 + x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

Bài 9: Giải phương trình $x \cdot 2^{1-x} + 2 \cdot \log_2(1+x) = x \cdot \log_2(1+x) + \log_2(x+1)^2$

Giải:

Điều kiện: $x > 0$

$\Leftrightarrow x \cdot 2^{1-x} + 2 \cdot \log_2(1+x) - x \cdot \log_2(1+x) - 2 \log_2(1+x) = 0$

$$\Leftrightarrow x \cdot (2^{1-x} - \log_2(1+x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2^{1-x} - \log_2(1+x) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số

$f(x) = 2^{1-x} - \log_2(x+1) \quad (x > -1)$

$f'(x) = -2^{1-x} \ln 2 - \frac{1}{(x+1) \ln 2} < 0 \quad \forall x > -1$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm giảm trên $(-1; +\infty)$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 1 điểm duy nhất $x = 1$
 $\Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $x = 1$
Vậy phương trình có nghiệm $x = \{0; 1\}$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1:

a. $2^{x^2+1} \cdot \log_2(x^2+1) = 4^{|x+1|} \cdot (\log_2|x+1|+1)$

HD:

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+1} \log_2(x^2+1) = 2^{2|x+1|} \cdot \log_2 2|x+1|$$

$$\begin{cases} u = x^2 + 1 \\ v = 2|x+1| \end{cases} (u \geq 1, v \geq 0) \Rightarrow 2^u \log_2 u = 2^v \log_2 v$$

$$+ u > v \Leftrightarrow VT > VP$$

$$+ u < v \Leftrightarrow VT < VP$$

$$+ u = v \text{ cho nghiệm } x = 1 \pm \sqrt{2}$$

b. $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

HD: Điều kiện: $x > 0$

$$\Leftrightarrow 9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1$$

Đặt $\log_2 x = t$ pt trở thành $3^t + 1 = 4^t$. Pt có nghiệm $t = 1 \Rightarrow x = 2$.

c. $\log_3(x^2 + 2x + 1) = \log_2(x^2 + 2x)$

HD: Đặt $t = \log_3(x^2 + 2x + 1) = \log_2(x^2 + 2x)$. Ta có hệ pt $\begin{cases} x^2 + 2x = 2^t \\ 2^t + 1 = 3^t \end{cases} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

d. $2\log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x$

HD: Điều kiện: $x > 0$

$$\Leftrightarrow \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \frac{1}{2} \log_4 x = \log_4 \sqrt{x}$$

Đặt $t = \log_4 \sqrt{x}$. Phương trình trở thành $\log_6(4^t + 2^t) = t \Leftrightarrow 4^t + 2^t = 6^t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 16$

e. $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

HD: Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } t = \log_6 x \Leftrightarrow x = 6^t. \text{ Phương trình trở thành } 2^t = 6^t + 3^t \Leftrightarrow 1 = 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Bài 2:

a. $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5}\right) = 7x^2 + 21x + 14$

HD:

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) - \log_3(2x^2 + 4x + 5) = 7[(2x^2 + 4x + 5) - (x^2 + x + 3)]$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + x + 3) + 7(x^2 + x + 3) = \log_3(2x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 4x + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{b. } \log_3 \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4x + 3} = x^2 - 3x + 2$$

HD:

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + 1) - \log_3(2x^2 - 4x + 3) = (2x^2 - 4x + 3) - (x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = \log_3(2x^2 - 4x + 3) + (2x^2 - 4x + 3)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 - x + 1 \\ v = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow \log_3 u + u = \log_3 v + v$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến với $t > 0$

$$\text{PT} \Leftrightarrow u = v \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{c. } 2^x - 2^{1-x} = \log_2 \left(\frac{1-x}{x} \right)$$

HD: Điều kiện $0 < x < 1$

$$\Leftrightarrow 2^x + \log_2 x = 2^{1-x} + \log_2(1-x)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + \log_2 t$ trên $(0; 1)$ là hàm số đồng biến nên pt $\Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\text{d. } \log(x^2 - x - 6) + x = \log(x + 2) + 4$$

HD: Điều kiện $x > 3$

$$\Leftrightarrow \log(x - 3) = 4 - x$$

Xét sự BT của 2 hàm số suy ra pt có nghiệm duy nhất $x = 4$

$$\text{e. } 2x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$$

HD: Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t. \text{ Pt trở thành } 2 \cdot (2^t)^t + 2 \cdot (2^t)^{-t} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{t^2} + \frac{2}{2^{t^2}} - 5 = 0 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{f. } \log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$$

HD: Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \text{ phương trình trở thành } t^2 + (x - 1)t + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{g. } 2^{\log_5(x+3)} = x$$

HD: Điều kiện $x > -3$

Đặt $\log_5(x+3) = t \Rightarrow x+3 = 5^t \Rightarrow x = 5^t - 3$. Phương trình trở thành

$$2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2$$

BÀI TOÁN 8: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình $\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) = 1$ (1)

Giải:

Cách 1: Theo bất đẳng thức Bunhiacôski ta có:

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \leq \sqrt{(1+1)(4-x+x+5)} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \leq 1$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1} = \frac{\sqrt{x+5}}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất}$$

Cách 2: Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5})^2 &= 4-x+x+5+2\sqrt{(4-x)(x+5)} \leq 9+(4-x)+(x+5) = 18 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} &\leq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \leq 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{4-x} = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình}$$

Bài 2: Giải phương trình $\log_2(2x^2 + 4x + 2) - \log_2 x = 1 + 4x - 2x^2$

Giải:

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2(2x^2 + 4x + 2) - \log_2 x = 1 + 4x - 2x^2 \Leftrightarrow \log_2\left(2x + 4 + \frac{2}{x}\right) = 3 - 2(1-x)^2$$

$$\text{Vì } x > 0, \text{ ta có: } 2x + \frac{2}{x} \geq 4 \Leftrightarrow 2x + 4 + \frac{2}{x} \geq 8 \Leftrightarrow \log_2\left(2x + 4 + \frac{2}{x}\right) \geq 3$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \log_2\left(2x + 4 + \frac{2}{x}\right) \geq 3 \\ 3 - 2(1-x)^2 \leq 3 \end{cases} \text{ . Ta có } VT \geq 2, \quad VP \leq 2 \text{ mà } VT = VP$$

$$\text{Nên ta có: } \begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ 1-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Tập nghiệm phương trình } S = \{1\}$$

Bài 3: Giải phương trình $2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)}$

Giải:

Ta có: $4x^2 - 4x + 4 = (2x - 1)^2 + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \log_3(4x^2 - 4x + 4) \geq 1$

Hay $\frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)} \leq 8 \Rightarrow VP \leq 8$

Theo BĐT Cauchy ta có: $2^{2x+1} + 2^{3-2x} \geq 8 \Rightarrow VT \geq 8$.

Mà VT = VP (theo giả thuyết).

Suy ra: $\begin{cases} VT = 8 \\ VP = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2^{2x+1} = 2^{3-2x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Bài 4: Giải phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$

Chú ý: $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$. Với $x \geq 1$ thì ta có:

$\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}$

Áp dụng công thức đổi cơ số ta có:

$\frac{\log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\log_6 2} \cdot \frac{\log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\log_6 3} = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \\ \log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \end{cases} \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2}$

Vì $x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{3^{\log_6 2}} = 3^{-\log_6 2}$, nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} = 3^{-\log_6 2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$$

Rõ ràng theo BĐT Cauchy, ta có: $3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}) \geq 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$

Bài 5: Giải phương trình $\log_x(x+1) = \lg\left(\frac{3}{2}\right)$

Giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow \log_x(x+1) < \log_x 1 = 0$. Mà $\lg\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ nên pt vô nghiệm

Nếu $x > 1 \Rightarrow x+1 > x \Rightarrow \log_x(x+1) > \log_x x = 1 > \lg\left(\frac{3}{2}\right)$ nên pt vô nghiệm

Vậy pt vô nghiệm

Bài 6: (ĐHNTCSII – 2001) Giải phương trình: $\log_3\left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5}\right) = x^2 + 3x + 2$

Giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 + x + 3 \\ v = 2x^2 + 4x + 5 \end{cases}$$

Hiển nhiên $u, v > 0, \forall x$ và $v - u = x^2 + 3x + 2$.

Khi đó phương trình trở thành: $\log_2 \frac{u}{v} = v - u$ (*)

Nếu $u > v$ thì $\frac{u}{v} > 1$. Do đó: $VT = \log_2 \frac{u}{v} > 0$; $VP = v - u < 0$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $u < v$ thì $0 < \frac{u}{v} < 1$. Do đó: $VT = \log_2 \frac{u}{v} < 0$; $VP = v - u > 0$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy: (*) $\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$

Tóm lại nghiệm của phương trình là: $x = -1 \vee x = -2$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1:

a. $\log_2\left(2x^2 + \frac{1}{2}\right) - \log_2 x = 3x^2 - 2x^3$

HD: Điều kiện $x > 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(2x + \frac{1}{2x} \right) = 3x^2 - 2x^3$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số dương $2x; \frac{1}{2x} : 2x + \frac{1}{2x} \geq 2 \Rightarrow VT \geq \log_2 2 = 1$

Xét hàm số $y = 3x^2 - 2x^3$ trên $(0; +\infty)$ có GTLN là 1 khi $x = 1$

Do đó pt có nghiệm duy nhất $x = 1$

$$b. 3x^2 - 2^{\log_2 x^3 + 1} = \log_2 (x^2 + 1) - \log_2 x$$

HD: Điều kiện $x > 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 = \log_2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1$$

Bài tập tự giải tổng hợp:

Bài 1: Giải các phương trình sau

$$a. \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1} = \log_2 (|x-2| + |x+2|) - \frac{11}{9}$$

$$b. \left(\frac{3}{5} \right)^{2 \log_9 (x+1)} \left(\frac{125}{27} \right)^{\log_{\frac{1}{27}} (x-1)} = \frac{\log_5 27}{\log_5 243}$$

$$c. \log_{\frac{1}{2}} |x| = \frac{1}{4} (|x-2| + |x+2|)$$

$$d. (\text{ĐHSPV} - 2001) \log_4 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \log_5 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_{20} (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$e. \log_3 (\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) - \frac{1}{2} \log_3 (4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|) = 0$$

$$f. \log_3 \frac{3}{x} \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$$

Đs:

$$a. x = \frac{9}{7} \vee x = \frac{7}{9}$$

$$b. x = 2$$

$$c. x = \pm \frac{1}{2}$$

$$d. x = 1 \vee x = \frac{1}{2} (5^{\log_{20} 4} + 5^{-\log_{20} 4})$$

$$e. x = 4 \vee 0 \leq x \leq 1$$

$$f. x = 1 \vee x = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

$$a. \lg \sqrt{1+x^2} + 3 \lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1-x^2} + 2$$

$$b. \log_{7-x^2} \frac{3 \sin 2x - 2 \sin x}{\sin 2x \cos x} = \log_{7-x^2} 2$$

$$c. \frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\frac{\log_{\frac{1}{25}} (2+5x-x^2)}{25}}$$

$$d. \log_{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} (x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}} (x^2 - 2x - 3)$$

e. $\frac{1}{2^x} = \lg(x-2) + \frac{1}{8}$

f. $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}$

Đs:

a. VN

b.

c. $x = 2 \vee x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$

d. $x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$

e. $x = 3$

f. $x = 4069$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\frac{\log_1(1+7x-2x^2)}{4}}$

b. $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}$

c. $\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}}(\cos x + \cos 2x) = 0$

d. $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$

e. $2\log_9^2 x = \log_3 x \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$

f. $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. **(ĐHNHI – B)** $\log_{2+x^2}(2+x) + \log_{\sqrt{2+x}} x = 2$

b. **(ĐHKTQD – 2001)** $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

c. **(ĐHAG – 2001)** $|\ln(2x-3) + \ln(4-x^2)| = |\ln(2x-3)| + |\ln(4-x^2)|$

d. $\log_3(9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 2) = 3x + 1$

e. $\log_x[\log_3(9^x - 6)] = 1$

Đs:

a. $x = 2$

b. $x = -\frac{1}{4}$

x. $\sqrt{3} < x < 2$

d. $\begin{cases} x = 0 \\ x = \log_3(3 + \sqrt{15}) - 1 \end{cases}$

e. VN

Bài 5: Giải các phương trình sau

a. **(BCVT – 2001)** $\log_9(x^2 - 5x + 6)^2 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} \frac{x-1}{2} + \log_3|x-3|$

b. **(ĐHV – D 2001)** $(x-1)\log_5 3 + \log_5(3^{x+1} + 3) = \log_5(11 \cdot 3^x - 9)$

c. **(HVQHQT – 2001)** $\log_2(x^2 + x + 1) + \log_2(x^2 - x + 1) = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$

d. **(ĐHBKHN – 2001)** $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$

e. **(PVBCTT – 2001)** $\log_{27}(x^2 - 5x + 6)^3 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} \frac{x-1}{2} + \log_9(x-3)^2$

f. **(ĐHKT – 2001)** $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$

g. **(ĐHCB – 2001)** $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

h. (KTQD – 2001) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

i. (ĐHAN – 2001) $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{x+3} 2} = 2 + \log_2(x+1)$

k. (ĐHH – D 2001) $x + \log_2(9-2^x) = 3$

l. $\log_3(2x+1) + \log_5(4x+1) + \log_7(6x+1) = 3x$

Đs:

a. $x = \frac{5}{3}$

b. $x = 0 \vee x = 2$

c. $x = 0 \vee x = \pm 1$

d. $x = 2 \vee x = 2 - \sqrt{24}$

e. $x = \frac{5}{3}$

f. $x = 49$

g. $x = 2$

h. $x = -\frac{1}{4}$

i. $x = 1$

k. $x = 0 \vee x = 3$

l. $x = 0 \vee x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau

a. $2^{tg^2 xy + \cot^2 g^2 xy} = \frac{4}{\log_2(4x^2 - 4x + 3)}$

b. $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$

c. $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_4 \sqrt{\frac{2}{x}} = 2$

d. $\log_5(x^2+1) + \log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_5(x+2) - 2 \log_{\frac{1}{25}}(x-2)$

e. $(x+2) \log_3^2(x+1) + 4(x+1) \log_3(x+1) - 16 = 0$

f. $2.9^{\log_2 \frac{x}{2}} = x^{\log_2 6} - x^2$

Đs:

a. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

b. $x = 2 \vee x = 1 - \sqrt{33}$

c. $x = 2$

d. $x = \frac{\sqrt{21}}{2}$

e. $x = 2 \vee x = -\frac{80}{81}$

f. $x = 2 \vee x = 2^{\frac{1}{1-\log_3 2}}$

Bài 7: Giải các phương trình sau

a. (ĐHTS – 2001) $\sqrt{(\log_2 \sqrt{2x} + \log_4 \sqrt{2x}) \log_2 x^2} + \sqrt{(\log_2 \sqrt{\frac{x}{2}} + \log_4 \sqrt{\frac{2}{x}}) \log_4 x^2} = 2$

b. $\log_3 \left(\sin \frac{x}{2} - \sin x \right) + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos 2x \right) = 0$

c. $\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)^2 + \log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}-x) = 6$

d. $\lg x - \frac{1}{2} \lg \left(x - \frac{1}{2} \right) = \lg \left(x + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \lg \left(x + \frac{1}{8} \right)$

e. $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$

f. $(x^2 - 1)\lg^2(x^2 + 1) + 4\sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \lg(x^2 + 1) = 0$

g. $\left| \log_2 \left(x + \frac{3}{x} \right) \right| + \log_2 \left(x - \frac{3}{x} \right) = 3$

h. $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_x 3\sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

Bài 8: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}}} = \sqrt{\log_2 x}$

b. $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+5}(6x^2 + 23x + 21) = 4$

c. $\log_2^2 x + x \log_7(x + 3) = \left[\frac{x}{2} + 2 \log_7(x + 3) \right] \log_2 x$

d. $(\sqrt{x-1} + \sqrt{1+x-2}) \log_2(x^2 - x) = 0$

e. $(x-3)^2 \cdot \log_2(x-1) + 2 \log_{x-1} \sqrt{2} = (x-3)^2 \cdot \log_{x-1} 2 + 2 \log_2 \sqrt{x-1}$

f. $x^2 \cdot \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$

g. $\frac{\log_2 36}{\log_2 4} + \log_2 81 = \log_2 3^{x^2 - 4x - 15}$

h. $2 \cdot \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 [\sqrt{2x+1} - 1]$

i. $(x+3) \log_3^2(x+2) + 4(x+2) \log_3(x+2) = 16$

k. $3x^2 - 2^{\log_2(x^3+1)} = \log_2(x^2+1) - \log_2 x$

l. $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) - 2 = 0$

m. $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \cdot \log_5 x + \log_3 x \cdot \log_5 x$

n. $\lg(x+10) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 2 - \lg 4$

Bài 9: Giải các phương trình sau

a. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 x^3 + \log_2 x - 3$

c. $x + \lg(x^2 - x - 6) = 4 + \lg(x + 2)$

e. $\log_2(2^x + 4) - x = \log_2(2^x + 12) - 1$

g. $\log_2(\log_3(\log_2 x)) = 1$

i. $\lg(\lg x) + \lg[\lg(x^3) - 2] = 0$

l. $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_5(2^x - 2)^2 = 2$

Bài 10: Giải các phương trình sau

a. $\log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 9$

b. $\log_5 x + \log_3 x = \log_5 3 \cdot \log_9 225$

d. $\log_3^2(x+1) + (x-5) \log_3(x+1) - 2x + 6 = 0$

f. $\log_5(5^x - 1) \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$

h. $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2$

k. $\log_{\frac{x}{2}} x^2 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} - 14 \log_{16x} x^3 = 0$

m. $\log_x [9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 2] = 3x + 1$

b. $\log_2 |x-2| + \log_4 |x+5| + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$

c. $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$

d. $(2 + \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$

e. $\log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) = 2$

f. $\log_4 (x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$

g. $\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$

h. $2 \log_2 (2x+2) + \log_{\frac{1}{2}} (9x-1) = 1$

k. $3 + \frac{1}{\log_3 x} = \log_x \left(9x - \frac{6}{x} \right)$

m. $\log_2 x + 2 \log_7 x = 2 + \log_2 x \log_7 x$

Đs:

b. $x \in \left\{ -6; 3; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

d. $x = \frac{1}{3} \vee x = 8$

e. $x = 2$

f. $x = \frac{5}{2}$

g.

$x = 1$ h. $x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$

k. $x = \sqrt{2}$

m. $x = 2 \vee x = 4$

Bài 11:

a. (**ĐHMCĐC – 2001**) Tìm các nghiệm của phương trình

$x^{\log_6(3x)} - 36\sqrt[5]{x^7} = 0$

b. Tìm các nghiệm của phương trình $2^{2 \log_3 (x^2-16)} + 2^{\log_3 (x^2-16)+1} + 2^{\log_5 x-1} = 24$ thỏa mãn $\cos \frac{3x+1}{x-4} < 0$

PHƯƠNG TRÌNH LOGA CÓ CHỨA THAM SỐ

Bài 1: Tìm m để phương trình $(x^2 - 1) \log^2 (x^2 + 1) - m \sqrt{2(x^2 - 1)} \log(x^2 + 1) + m + 4 = 0$ có đúng hai nghiệm thực thỏa mãn điều kiện $1 \leq |x| \leq 3$

Giải:

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 1} \log(x^2 + 1)$ ta thấy $t(x)$ là hàm chẵn với mỗi giá trị của t không âm luôn cho 2 giá trị của x, từ điều kiện của x suy ra $x^2 \in [1; 9] \Rightarrow t \in [0; \sqrt{8}]$.

Bài toán trở thành:

Tìm m để phương trình $t^2 - \sqrt{2}mt + m + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[0; \sqrt{8}]$

$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 4}{\sqrt{2}t - 1}$ có nghiệm duy nhất trên $[0; \sqrt{8}] \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{\sqrt{2}t^2 - 2t - 4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

Lập bảng biến thiên suy ra điều kiện m là $|m| \geq 4$

Bài 2: Cho phương trình: $(m-3) \log_{\frac{1}{2}}(x-4) + (2m+1) \log_2(x-4) + m + 2 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $4 < x_1 < x_2 < 6$

Giải:

Ta m để phương trình có 2 nghiệm

pt đó cho tương đương với pt: $(m-3)\log_2(x-4) + (2m+1)\log_2(x-4) + m+2 = 0$
 trên khoảng (4; 6) phương trình luôn xác định.

Đặt $t = \log_2(x-4)$ với điều kiện $t < 1$ do $0 < x-4 < 2 \quad \forall x \in (4; 6)$

Dẫn đến pt $(m-3)t^2 + (2m+1)t + m+2 = 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 2t+1) = 3t^2 - t - 2 \quad (*)$

Nhận xét thấy $t = -1$ không thỏa mãn pt $(*)$. Biến đổi pt về dạng $\frac{3t^2 - t - 2}{t^2 + 2t + 1} = m$

Bài toán trở thành:

Ta m để pt: $f(t) = \frac{3t^2 - t - 2}{t^2 + 2t + 1} = m$, có hai nghiệm phân biệt $t_1 < t_2 < 1$.

Tính đạo hàm $f'(t) = \frac{7t+3}{(t+1)^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{7}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên khoảng $(-\infty; 1)$

t	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{7}$	1
f'(t)	+		-	+
f(t)	3		$-\frac{25}{8}$	0

Từ đó suy ra các giá trị cần ta là: $\begin{cases} -\frac{25}{8} < m < 0 \\ m > 3 \end{cases}$

Bài 3: Tìm m để phương trình sau luôn có nghiệm trong đoạn $[1; 9]$

$$\log_3^2 x + 2m(2 + \log_3 x) + 4 = m(1 + \log_3 x) \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện $x > 0$

Đặt: $\log_3 x = t$, khi $x \in [1; 9] \Rightarrow t \in [0; 2]$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2m(t+2) + 4 = m + mt \Leftrightarrow t^2 + 4 = -(3+t)m \quad (2)$$

$$\text{Vì } t \in [0; 2] \text{ từ (2)} \Leftrightarrow m = -\frac{t^2 + 4}{3+t}$$

$$\text{Đặt } f(t) = -\frac{t^2 + 4}{3+t} \Rightarrow f'(t) = \frac{-t^2 - 6t + 4}{(3+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 - \sqrt{13} \text{ (loại)} \\ t = -3 + \sqrt{13} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f(-3 + \sqrt{13}) = 2\sqrt{13} - 6; f(0) = -\frac{4}{3}; f(2) = -\frac{8}{5}$$

Vậy với $m \in \left[-\frac{8}{5}; 2\sqrt{13}-6\right]$ thì phương trình có nghiệm với mọi $x \in [1;9]$

Bài 4: Tìm giá trị của m để phương trình nghiệm duy nhất $\log_{0,5}(m+6x) + \log_2(3-2x-x^2) = 0$

Giải:

$$\log_{0,5}(m+6x) + \log_2(3-2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(m+6x) = \log_2(3-2x-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 > 0 \\ m+6x = 3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1 \\ m = -x^2 - 8x + 3 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - 8x + 3$, $-3 < x < 1$ ta có $f'(x) = -2x - 8$, $f'(x) < 0$ khi $x > -4$ do đó $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-3;1)$, $f(-3) = 18$, $f(1) = -6$.

Vậy phương trình sau có nghiệm duy khi $-6 < m < 18$

Bài 5: Tìm m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$

HD:

Điều kiện $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x$; $x \in [32; +\infty) \Rightarrow t \in [5; +\infty)$. Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3)$

+ $t = 3$ không là nghiệm

+ $t \neq 3$ ta có

$$m = f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3}; t \in [5; +\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1; f'(t) = \frac{-2t}{(t-3)\sqrt{t^2 - 2t - 3}} < 0$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $[5; +\infty)$

Lập BBT ta có $1 < m \leq \sqrt{3}$

Bài 7: Tìm m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.

HD: Điều kiện $x > 0$

$$PT \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$$

Đặt $t = \log_2 x$; $x \in (0;1) \Rightarrow t \in (-\infty; 0)$. Phương trình trở thành $t^2 + t + m = 0$

$S = -1 < 0$ nên pt có nghiệm ẩn t thì sẽ có nghiệm âm. Do đó đk: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.

Bài 8: Giải và biện luận phương trình: $2\log_3 x - \log_3(x-1) - \log_3 m = 0$.

HD:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$PT \Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0$$

+ $0 < m < 4$: phương trình vô nghiệm

+ $m = 4$ phương trình có nghiệm $x = 2$

+ $m > 4$ ta có $\frac{S}{2} = \frac{m}{2} > 2 \Rightarrow x_1 > x_2 > 2$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{m^2 - 4m})$

Bài 9: (Tham khảo 2003) Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0;1)$

$$4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$$

HD:

$$4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow m = -(\log_2 x)^2 - \log_2 x$$

- Với $0 < x < 1$ thì $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_2 x < 0$

- PT có nghiệm thuộc $(0;1)$ khi và chỉ khi m thuộc miền giá trị của hàm số $f(t) = -t^2 - t \quad (t < 0)$

- Khảo sát hàm số cho kết quả $m \leq \frac{1}{4}$

Bài 10: (ĐHYD – 2001) Cho phương trình: $2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{1/2}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$

Xác định tham số m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 > 1$

Giải:

$$2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) - \log_2(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x^2 - (1+m)x + 2m - 2m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x_1 = 2m, x_2 = 1 - m \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 > 1 \\ x_1^2 + mx_1 - 2m^2 > 0 \text{ với } x_1 = 2m, x_2 = 1 - m \\ x_2^2 + mx_2 - 2m^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 2m > 0 \\ 4m^2 > 0 \\ -2m^2 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \vee \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2}$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho phương trình $(x^2 - 1)\lg^2(x^2 + 1) - m\sqrt{2(x^2 - 1)}\lg(x^2 + 1) + m + 4 = 0$

a. Giải phương trình khi $m = -4$

b. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thỏa mãn $1 \leq |x| \leq 3$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình

$$\left[1 + (m + 2)^2\right]\log_3(2x - x^2) + \left[1 + (3m - 1)^2\right]\log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

Bài 3: Tìm m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình $2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$

thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$

Bài 4: Tìm x để phương trình $\log_2(m^2x^3 - 5m^2x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+m^2}(3 - \sqrt{x-1})$ nghiệm đúng với mọi m

Đs: $x = 5$

Bài 5: Tìm m để phương trình $\frac{\log_5 mx}{\log_5(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất

Bài 6: (ĐHY HP – 2001) Tìm x để phương trình $\log_2(m^2x^2 - 5mx + 3 + \sqrt{5-x}) = \log_{2+m^2}(5 - \sqrt{x-1})$ nghiệm đúng với mọi m

Bài 7: Tìm m để phương trình $\log_3(x^2 + 4mx) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - 2m - 1) = 0$ có nghiệm duy nhất

Đs: $m = 0 \vee -\frac{1}{2} \leq m \leq -\frac{1}{10}$

Bài 8: Tìm m để phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$ có ba nghiệm

Đs: $m = \frac{1}{2} \vee m = \frac{3}{2} \vee m = 1$

Bài 9: Cho phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $2 < x_1 \leq x_2 < 4$

Bài 10: Tìm a để phương trình $\log_2(x^2 + x + 2) + a = \frac{a}{\log_2(x^2 + x + 2)}$ có nghiệm $(0,1)$

Bài 11: Tìm m để phương trình $\log_7(m-x+4) + \log_{\frac{1}{7}}(mx-x^2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Bài 12: Giải và biện luận phương trình $2x^2 + (1 - \log_3 m)x + \log_3 m - 1 = 0$ với $m \in R_+^*$

Bài 13: Giải và biện luận phương trình $\log_x a + \log_{ax} a + \log_{a^2x} a = 0$ với $a \in R_+^*$

Bài 14: Giải và biện luận phương trình $\log_{\sqrt{2-x^2}}(2x^2 + m) = 4$ tùy theo $m \in R$

Bài 15: Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{5+2}}(x^2 + mx + m + 1) + \log_{\sqrt{5-2}} x = 0$ có nghiệm duy nhất

Bài 16: Tìm a để phương trình $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2 + a$ có nghiệm

Bài 17: Tìm a để phương trình $\log_a(x^2 + ax - 3) = \log_a x$ có nghiệm

Bài 18: Tìm m thực để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$(m-1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5) \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$$

Đs: $m \in (-3;1) \cup (1; \frac{7}{3})$

CHỦ ĐỀ II: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN I: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Ta sử dụng các phép biến đổi tương đương sau:

$$\text{Dạng 1: Với bất phương trình: } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2: Với bất phương trình: } a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] \leq 0 \end{cases}$$

Chú ý: Cần đặc biệt lưu ý tới giá trị của cơ số a đối với bất phương trình mũ.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải các bất phương trình:

a. $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$

b. $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$

Giải:

a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-2x}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x^2-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$

Chú ý:

Để tránh sai sót không đáng có khi biến đổi bất phương trình mũ với cơ số nhỏ hơn 1 các em học sinh nên lựa chọn cách biến đổi:

$$\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{x^2-2x}} \leq 2^{x-1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2-2x} \leq x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq 2$$

b. Nhận xét rằng: $(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=1 \Rightarrow \sqrt{10}-3=(\sqrt{10}+3)^{-1}$

Khi đó bất phương trình được viết dưới dạng:

$$\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} \leq \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5}{(x-1)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $(-3; -\sqrt{5}) \cup (1; \sqrt{5})$

Bài 2: Giải các bất phương trình

a. $4^{\frac{x-1}{x+1}} \leq 0.25.32^{\frac{x}{x-2}}$

b. $(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5}+2)^{x-1}$

Giải:

a. Đưa về cơ số 2, ta được:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (2^2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq 2^{-2} \cdot (2^5)^{\frac{x}{x-2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-2}{x+1}} \leq 2^{\frac{5x}{x-2}-2} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-2}{x+1}} \leq 2^{\frac{3x+4}{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{x+1} \leq \frac{3x+4}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(2x-2)(x-2)-(3x+4)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-13x}{(x+1)(x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -13 \vee -1 < x \leq 0 \vee x \geq 2$$

b. Vì $\sqrt{5}+2=(\sqrt{5}-2)^{-1}$

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq \left(\sqrt{5}-2\right)^{1-x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 1-x \quad \text{do } 0 < \sqrt{5}-2 < 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ hoặc } -2 \leq x < -1$$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HOÁ VÀ ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ lũy thừa người ta có thể logarit hoá theo cùng 1 cơ số cả hai vế của bất phương trình mũ. Chúng ta lưu ý 1 số trường hợp cơ bản sau cho các bất phương trình mũ:

Dạng 1: Với bất phương trình: $a^{f(x)} < b$ (với $b > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$

Dạng 2: Với bất phương trình: $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \neq 0 \\ b < 0 \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \end{cases}$

Dạng 3: Với bất phương trình: $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)} > \lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \lg a > g(x) \cdot \lg b$ hoặc có thể sử dụng logarit theo cơ số a hay b.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải các bất phương trình

a. $49 \cdot 2^{x^2} > 16 \cdot 7^x$	b. $3^{x^2-2x+2} > 9$
c. $2^{x-1} + 2^{x+2} \geq 25$	d. $2^x > 3^{x+1}$
e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x}$	f. $5^{x^2-7x+12} > 1$

Giải:

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $2^{x-4} > 7^{x-2}$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình ta được:

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{x-4} > \log_2 7^{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 > (x-2) \log_2 7 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - x \log_2 7 + 2 \log_2 7 - 4 > 0$$

Ta có: $\Delta = \log_2^2 7 - 8 \log_2 7 + 16 = (\log_2 7 - 4)^2 = (4 - \log_2 7)^2$. Suy ra $f(x)=0$ có nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{\log_2 7 \pm (4 - \log_2 7)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \log_2 7 - 2 < x_1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 2$ hoặc $x < \log_2 7 - 2$

b. BPT $\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+2} > 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$

c. BPT $\Leftrightarrow \frac{2^x}{2} + 4 \cdot 2^x \geq 25 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x \geq 50 \Leftrightarrow 2^x \geq \frac{50}{9} \Leftrightarrow x \geq \log_2 \frac{50}{9}$

d. $\Leftrightarrow 2^x > 3^x \cdot 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$

e.

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 13 > 4 - 3x \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$$f. \text{ Bpt } \Leftrightarrow 5^{x^2-7x+12} > 5^0 \Leftrightarrow x^2-7x+12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 4 \end{cases}$$

Bài 2: Giải các bất phương trình

$$a. 2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^x \quad b. (\text{ĐHDB} - 2004) \quad 2 \cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$$

Giải:

$$a. \text{ BPT } \Leftrightarrow 2^{x-1} > \left(\frac{1}{2^4}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > (2^{-4})^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^{-4x} \Leftrightarrow x-1 > -4x \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$$

$$b. \text{ BPT } 2 \cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{3}{2}\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2 \left(2 \cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \right) \geq \log_2 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\log_2 x \geq \frac{3}{2}\log_2 x \Leftrightarrow 1 \geq \log_2 x \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$$

Bài 3: Giải bất phương trình

$$a. 3^{\log_{\sin 2} \frac{x-2}{x+4}} > 1 \quad b. e^{\ln(1+\sin \frac{\pi}{2})} - \log_2(x^2+3x) \geq 0$$

$$c. (x^2+x+1)^x < 1$$

Giải:

$$a. \text{ BPT } \Leftrightarrow \log_{\sin 2} \frac{x-2}{x+4} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x-2}{x+4} < 1 \quad (\text{vì } 0 < \sin 2 < 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x-2}{x+4} \\ \frac{x-2}{x+4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x-2}{x+4} \\ \frac{x-2}{x+4} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x-2}{x+4} \\ \frac{-6}{x+4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

$$b. \Leftrightarrow e^{\ln 2} - \log_2(x^2+3x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \log_2(x^2+3x) \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(x^2+3x) \leq 2 \Leftrightarrow x^2+3x \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$$

So điều kiện bất phương trình có nghiệm: $-4 \leq x < -3$; $0 < x \leq 1$

$$c. \text{ Vì } x^2+x+1 > 0 \quad \forall x$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow x \lg(x^2+x+1) < 0$$

Bất phương trình này tương đương với hai hệ:

$$(I): \begin{cases} x > 0 \\ \lg(x^2+x+1) < 0 \end{cases} \quad (II): \begin{cases} x < 0 \\ \lg(x^2+x+1) > 0 \end{cases}$$

Giải hệ (I): $\begin{cases} x > 0 \\ \lg(x^2 + x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x + 1 < 1 \end{cases} \text{ (vô lý)}$

Giải hệ (II): $\begin{cases} x < 0 \\ \lg(x^2 + x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

Nghiệm của bất phương trình là : $x < -1$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 1

I. Phương pháp:

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải bất phương trình $(2^x - 2)^2 < (2^x + 2)(1 - \sqrt{2^x - 1})^2$

Giải:

Điều kiện $2^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{2^x - 1}$, điều kiện $t \geq 0$, khi đó: $2^x = t^2 + 1$. Bất phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} (t^2 + 1 - 2)^2 &< (t^2 + 1 + 2)(1 - t)^2 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 < (t^2 + 3)(1 - t)^2 \\ \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 - (t^2 + 3)(1 - t)^2 &< 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 [(t + 1)^2 - (t + 3)^2] < 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)^2 (2t - 2) &< 0 \Leftrightarrow (t - 1)^3 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2^x - 1} < 1 &\Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $[0; 1)$

Bài 2: Giải bất phương trình $(9 + \sqrt{3} + 11\sqrt{2})^x + 2(5 + 2\sqrt{6})^x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x < 1$

Giải:

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned} (9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})^x &= \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 \right]^x = \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x \right]^3 \\ (5 + 2\sqrt{6})^x &= \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \right]^x = \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x \right]^2 \\ (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x &= \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right]^x = 1 \end{aligned}$$

Do đó nếu đặt $t = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$, điều kiện $t > 0$ thì $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = \frac{1}{t}$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$t^3 + 2t^2 - 2\frac{1}{t} < 1 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - t - 2 < 1 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)(t^2+t+1) < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1$$

Kết hợp với điều kiện của t ta được: $0 < t < 1 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$.

Bài 3: Giải các bất phương trình

a. $(5+\sqrt{21})^x + (5-\sqrt{21})^x \leq 2^{x+\log_2 5}$ b. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

c. $(3-\sqrt{5})^{2x-x^2} + (3+\sqrt{5})^{2x-x^2} - 2^{1+2x-x^2} \leq 0$ d. $(\sqrt{2}+1)^{x-1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Giải:

a. Chia 2 vế bất phương trình cho $2^x > 0$ ta được: $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x \leq 5$

Nhận xét rằng: $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = 1$

Nên nếu đặt $t = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x$ điều kiện $t > 0$ thì $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$. Khi đó bất phương trình có dạng:

$$t + \frac{1}{t} \leq 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq t \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $[-1;1]$

b. Bpt $\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x} \leq 4$

Đặt $t = (2+\sqrt{3})^{x^2-2x}$ ($t > 0$) ta được

$$t + \frac{1}{t} \leq 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \leq t \leq 2+\sqrt{3}$$

Khi đó: $2-\sqrt{3} \leq (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} \leq 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x \leq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$$

c. BPT $\Leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} - 2 \leq 0$

Đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}$ ($t > 0$) $\Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2} = \frac{1}{t}$

ta được bất phương trình: $t + \frac{1}{t} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

d. Vì $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} + 1)^{-1}$

nên bpt $\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)^{x-1} \geq (\sqrt{2} + 1)^{\frac{-x-1}{x+1}} \Leftrightarrow x-1 \geq -\frac{x-1}{x+1}$ (do $\sqrt{2} + 1 > 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Bài 4: Giải bất phương trình $5^x + \frac{2 \cdot 5^x}{\sqrt{5^{2x} - 4}} > 3\sqrt{5}$

Giải:

Điều kiện $5^{2x} - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > \log_5 4 \Leftrightarrow x > \log_5 2$ (*)

Đặt $u = 5^x$, điều kiện $u > 2$, khi đó bất phương trình có dạng: $u + \frac{2u}{\sqrt{u^2 - 4}} > 3\sqrt{5}$ (1)

Bình phương 2 vế phương trình (1) ta được:

$$u^2 + \frac{4u^2}{u^2 - 4} + \frac{4u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{u^2}{u^2 - 4} + 4 \cdot \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 45 \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}}, t > 0$. Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 5 \Leftrightarrow u^4 - 25u^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 > 20 \\ u^2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > \sqrt{20} \\ u < \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x > \sqrt{20} (*) \\ 5^x > \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_5 \sqrt{20} \\ \log_2 5 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\log_5 2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\log_5 \sqrt{20}; +\infty\right)$

Bài 5: Giải bất phương trình

a. $4^{x-1} - 2^{x-2} < 3$ b. (ĐHDB – 2005) $9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3$

Giải:

a. Bpt $\Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - \frac{2^x}{2^2} < 3 \Leftrightarrow 4^x - 2^x < 12 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 < 0$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Bpt $\Leftrightarrow t^2 - t - 12 < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 4$

Do $t > 0$, suy ra : $0 < t < 4 \Leftrightarrow t < 4 \Leftrightarrow 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^x < 2^2 \Leftrightarrow x < 2$

b. Đặt $t = 3^{x^2-2x}$, $t > 0$ ta có $t^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3$

BPT thành $3^{x^2-2x} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Bài 6: Giải bất phương trình:

a. $9^{x^2+x-1} + 1 \geq 10.3^{x^2+x-2}$

b. $2^{x+2}.5^{x+2} \leq 2^{3x}.5^{3x}$

Giải:

a. Đặt $t = 3^{x^2+x}$ ($t > 0$) ta được

$$t^2 - 10t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 9 \end{cases}$$

Khi $t \leq 1 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$ (a)

Khi $t \geq 9 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \geq 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ (b)

Kết hợp (a) và (b) ta có tập nghiệm của bpt là: $S = (-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

b. BPT $\Leftrightarrow (2.5)^{x+2} \leq (2.5)^{3x} \Leftrightarrow 10^{x+2} \leq 10^{3x} \Leftrightarrow x+2 \leq 3x \Leftrightarrow x \geq 1$

Bài 8: Giải các bất phương trình

a. $3^{2x+2} - 4.3^{x+2} + 27 < 0$

b. $3^{2x+2} - 4.3^{x+2} + 27 > 0$

c. $5^{2x+1} - 26.5^x + 5 > 0$

Giải

a. Bpt $\Leftrightarrow 3^{2x}.3^2 - 4.3^x.3^2 + 27 < 0 \Leftrightarrow 9.(3^x)^2 - 36.3^x + 27 < 0$

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$.

Bpt $\Leftrightarrow 9t^2 - 36t + 27 < 0$

$\Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow 3^0 < 3^x < 3^1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

b. Bpt $\Leftrightarrow 3^{2x}.3^2 - 4.3^x.3^2 + 27 > 0 \Leftrightarrow 9.(3^x)^2 - 36.3^x + 27 > 0$

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$.

Bpt $\Leftrightarrow 9t^2 - 36t + 27 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x < 1 \\ 3^x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x < 3^0 \\ 3^x > 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

c. Bpt $\Leftrightarrow 5^{2x}.5 - 26.5^x + 5 > 0 \Leftrightarrow 5.(5^x)^2 - 26.5^x + 5 > 0$

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$.

Bpt $\Leftrightarrow 5t^2 - 26t + 5 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{1}{5} \\ t > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \frac{1}{5} \\ t > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < \frac{1}{5} \\ 5^x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < 5^{-1} \\ 5^x > 5^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Bài 9: Giải các bất phương trình

a. $4^{x-1} - 2^{x-2} > 3$

b. $9^{x^2+x-1} + 1 \geq 10.3^{x^2+x-2}$

Giải:

a. Bpt $\Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - \frac{2^x}{2^2} > 3 \Leftrightarrow 4^x - 2^x > 12 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 > 0$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Bpt $\Leftrightarrow t^2 - t - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ t > 4 \end{cases}$

Do $t > 0$ suy ra: $t > 4 \Leftrightarrow t > 4 \Leftrightarrow 2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

b. Đặt $t = 3^{x^2+x}, t > 0$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 10t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t \leq 1 \text{ hoặc } t \geq 9)$

Khi $t \leq 1 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$.(i)

Khi $t \geq 9 \Rightarrow t = 3^{x^2+x} \geq 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ (2i)

Kết hợp (i) và (2i) ta có tập nghiệm của bpt là: $S = (-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

Bài 10: Giải bất phương trình: $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x} \leq 4$

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x} (t > 0)$ ta được bất phương trình

$t + \frac{1}{t} \leq 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 + \sqrt{3}$ (thỏa mãn)

Khi đó $2 - \sqrt{3} \leq (2 + \sqrt{3})^{x^2-2x} \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x \leq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$

Bài 11: (ĐHDB - 2003) Giải BPT $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$

Giải:

Đặt $t = 2^x$ ta được $\sqrt{30t+1} \geq |t-1| + 2t$

- $t = 1$ thỏa BPT

- $t > 1$ ta được $\sqrt{30t+1} \geq 3t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ 30t+1 \geq 9t^2-6t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t^2-4t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < t \leq 4$

- $t < 1$ ta được

$\sqrt{30t+1} \geq t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t \geq \frac{-1}{30} \end{cases} \vee \begin{cases} -1 \leq t < 1 \\ 30t+1 \geq t^2+2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{30} \leq t < -1 \vee \begin{cases} -1 \leq t < 1 \\ t^2-28t \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{30} \leq t < -1 \vee \begin{cases} -1 \leq t < 1 \\ 0 \leq t \leq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{30} \leq t < -1 \vee 0 \leq t < 1$

Tổng hợp các trường hợp và điều kiện $t > 0$ ta có $0 < t \leq 4 \Leftrightarrow 0 < 2^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

Bài 11: Giải bất phương trình

a. $2^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \leq 0$

b. $3^{2\log_2 x} - 2x^{1+\log_2 3} - 8x^2 \leq 0$

Giải:

a. Điều kiện: $x > 0$

BPT $\Leftrightarrow 2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \leq 0$

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Ta được $4^{2t^2} + 2^{2t^2} - 20 \leq 0$.

Đặt $y = 2^{2t^2}$ ($y \geq 1$)

Ta được $y^2 + y - 20 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 4$.

Đổi chiều điều kiện ta có: $2^{2t^2} \leq 4 \Leftrightarrow 2t^2 \leq 2 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$

Do đó $-1 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$

b. Điều kiện: $x > 0$

Biến đổi $3^{2\log_2 x} - 2x^{1+\log_2 3} - 8x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 9^{\log_2 x} - 2x^{\log_2 6} - 8x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 9^{\log_2 x} - 2.6^{\log_2 x} - 8x^2 \leq 0$.

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Ta được BPT: $9^t - 2.6^t - 8.4^t \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t - 2\left(\frac{3}{2}\right)^t - 8 \leq 0$

Đặt $u = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ ($u > 0$) ta được:

$u^2 - 2u - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq u \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^t \leq 4$

$\Leftrightarrow t \leq \log_3 4 \Leftrightarrow \log_2 x \leq \log_3 4 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2^{\frac{\log_3 4}{2}}$

Từ đó tìm được nghiệm của BPT đã cho là: $S = \left(0; 2^{\frac{\log_3 4}{2}}\right]$

Bài 12: Giải bất phương trình $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$

Giải:

Đặt $y = 2^{x-1}$ ($y > 0$), BPT trở thành:

$\frac{1}{2y-1} > \frac{1}{1-y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2y-1} - \frac{1}{1-y} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-3y}{(2y-1)(1-y)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < y < \frac{2}{3} \text{ hay } y > 1$

Do đó ta có:

Khi $\frac{1}{2} < y < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2^{x-1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2^{-1} < 2^{x-1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -1 < x-1 < \log_2 \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \log_2 \frac{2}{3} + 1 \Leftrightarrow 0 < x < \log_2 \frac{4}{3}$$

$$\text{Khi } y > 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} > 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Nghiệm của bất phương trình là : } 0 < x < \log_2 \frac{4}{3} \text{ hay } x > 1$$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 2

I. Phương pháp:

Phương pháp này giống như phương trình mũ.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải bất phương trình $4^x - 2^{x+1} + 4^{x^2} \leq 0$

Giải:

Đặt $t = 2^x$ điều kiện $t > 0$

Khi đó bất phương trình có dạng: $t^2 - 2t + 4^{x^2} \leq 0$. Ta có: $\Delta' = 1 - 4^{x^2} \leq 0$

$$\text{Do đó: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4^{x^2} = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2} = 1 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 2: Giải bất phương trình $9^x - 2(x+5).3^x + 9(2x+1) \geq 0$

Giải:

Đặt $t = 3^x$ điều kiện $t > 0$. khi đó bất phương trình tương đương với:

$$f(t) = t^2 - 2(x+5)t + 9(2x+1) \geq 0. \text{ Ta có } \Delta' = (x+5)^2 - 9(2x+1) = (x-4)^2.$$

Do đó $f(t) = 0$ có 2 nghiệm $t = 9$ hoặc $t = 2x + 1$

Do đó bất phương trình có dạng: $(t-9)(t-2x-1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-9 \geq 0 \\ t-2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 9 \\ 3^x \geq 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$ hoặc $0 \leq x \leq 1$

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 3

I. Phương pháp:

Sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ trong bất phương trình và khéo léo biến đổi bất phương trình thành phương trình tích, khi đó lưu ý:

$$A.B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ và } A.B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải bất phương trình $6^x + 2^{x+2} \geq 4.3^x + 2^{2x}$

Giải:

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $2^x \cdot 3^x + 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x - 2^{2x} \geq 0$

Đặt $\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^x \end{cases}$ điều kiện $u, v > 0$. khi đó bất phương trình có dạng:

$$uv + 4v - 4u - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)(v - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v \geq 0 \\ v - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 2^x \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u - v \leq 0 \\ v - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 2^x \\ 2^x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$ hoặc $x \leq 0$

Bài 2: Giải bất phương trình $2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2^{2x+1} + 4x+2}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Viết lại bất phương trình dưới dạng: } 2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2 \cdot 2^{2x} + 2(2x+1)}$$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = \sqrt{2x+1} \end{cases}$ điều kiện $u > 0$ và $v \geq 0$. Khi đó bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$u + v < \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow (u + v)^2 < (2u^2 + 2v^2) \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow u \neq v \Leftrightarrow 2^x \neq \sqrt{2x+1}$$

$$\text{Ta xét phương trình: } 2^x = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy bất phương trình có nghiệm } x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$$

Bài 3: Giải bất phương trình $\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{5^{2x + \log_5 2} - 2 \cdot 5^{x+1} + 16}$ có nghiệm là

Giải:

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{2 \cdot 5^{2x} - 10 \cdot 5^{x+1} + 16}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{2(5^x - 3)^2 + 2(5^x - 1)}$$

Điều kiện: $5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{5^x - 1} \geq 0 \\ v = 5^x - 3 \end{cases}$. Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$u + v \geq \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u + v)^2 \geq 2u^2 + 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u - v)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \sqrt{5^x - 1} = 5^x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{5^x - 1} = 5^x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \geq 3 \\ 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x = 1$.

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU ĐỂ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài 1: Giải bất phương trình: $2^x + 3^x + 5^x \geq 38$ (1)

Giải:

Đặt $f(x) = VT(1)$, có $f(x)$ xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ có:

$f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(*)$. Do

$$\text{đó (1)} \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \geq 2$.

Bài 2: Giải bất phương trình: $1 + 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x < 6^x$ (1)

Giải:

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1 \quad (2) \quad (\text{do } 6^x > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

Đặt $f(x) = VT(2)$, có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ có:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x \ln \frac{1}{6} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } f(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}, \text{ do đó}$$

$$((1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x < 1$.

Mặt khác: $f(2) = 1$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow x < 2$

Vậy tập nghiệm của bpt là $x < 2$

Bài 3: Giải bất phương trình: $3^x + 4^x > 5^x$

Giải:

Ta chia hai vế của bất phương trình cho 5^x , ta được: $BPT \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$

Xét hàm số: $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ (TXĐ: $D = \mathbb{R}$)

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ đồ thị hàm số $f(x)$ chỉ cắt đường thẳng $y=1$ tại 1 điểm có tọa độ $(2,1)$.

Vậy để $f(x) > 1$ thì $x < 2$

Nghiệm của bất phương trình là: $x < 2$

BÀI TOÁN 7: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN KHOẢNG

Bài 1: Giải hệ thức $3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1$ (1)

Giải:

- Với $|x| > 2$ thì $x^2 - 4 > 0$ và $x - 2 > 0$. Do đó $3^{x^2-4} > 3^0 = 1$ (vì hàm đồng biến)

nên VT(1) $> 1 =$ VP(1). Bất phương trình không có nghiệm trong khoảng trên

- Với $|x| < 2$ thì $x^2 - 4 < 0$ và $x - 2 < 0$. Do đó $3^{x^2-4} < 3^0 = 1$ (vì hàm đồng biến)

và $(x^2 - 4)3^{x-2} < 0$ nên VT(1) $< 1 =$ VP(1). Bất phương trình không có nghiệm trong khoảng trên

- Với $x = 2$ thay vào thỏa mãn.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 2: Giải bất phương trình $(\sqrt[3]{x} + 1)^5 + \sqrt[3]{x}2^{x-1} \geq 1$ (1)

Lời giải:

- Với $x < 0$ thì $\sqrt[3]{x} < 0$ mà $2^{x-1} > 0$ nên $(\sqrt[3]{x} + 1)^5 < 1$; $\sqrt[3]{x}2^{x-1} < 0$. Do đó VT(1) < 1 . Vậy bất phương trình không có nghiệm trong khoảng trên

- Với $x \geq 0$ thì $\sqrt[3]{x} \geq 0$ mà $2^{x-1} > 0$ nên $(\sqrt[3]{x} + 1)^5 \geq 1$; $\sqrt[3]{x}2^{x-1} \geq 0$. Do đó VT(1) ≥ 1

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq 0$.

Bài 3: (ĐHDB - 2004) Giải BPT $\frac{2^{x-1} + 6x - 11}{x - 2} > 4$

Giải:

$$BPT \Leftrightarrow \frac{2^{x-1} + 2x - 3}{x - 2} > 0$$

- Với $x < 1$ thì $\begin{cases} 2^{x-1} + 2x - 3 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ suy ra $x < 1$ thỏa BPT

- Với $x = 1$ không thỏa BPT
- Với $1 < x < 2$ thì $\begin{cases} 2^{x-1} + 2x - 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ suy ra $1 < x < 2$ không thỏa BPT
- với $x > 2$ thì $\begin{cases} 2^{x-1} + 2x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ suy ra $x > 2$ thỏa BPT

Kết luận: nghiệm là $x < 1, x > 2$

CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ ĐƯỢC GIẢI BẰNG NHIỀU CÁCH

I. ĐẶT VẤN ĐỀ :

Như vậy thông qua các bài toán trên, chúng ta đã biết được các phương pháp cơ bản để giải bất phương trình mũ và thông qua các ví dụ minh họa chúng ta cũng có thể thấy ngay một điều rằng, một bất phương trình có thể được thực hiện bằng nhiều phương pháp khác nhau. Trong mục này sẽ minh họa những ví dụ được giải bằng nhiều phương pháp khác nhau với mục đích cơ bản là:

- + Giúp các em học sinh đã tiếp nhận đầy đủ kiến thức toán THPT trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.
- + Giúp các em học sinh lớp 10 và 11 lựa chọn được phương pháp phù hợp với kiến thức của mình.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm m dương để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m + 1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m - 1} \leq 8 + 4\sqrt{3}$$

Giải:

Nhận xét rằng: $\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$

Nên nếu đặt $u = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m}$ điều kiện $u > 1$

Thì $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m} = \frac{1}{u}$. Khi đó bất phương trình có dạng:

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)u + \frac{2 + \sqrt{3}}{u} \leq 4\left(2 + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq u \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x^2 + 2|x-m| + m^2 + m} \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 2|x-m| + m^2 + m \leq 1 \quad (1)$$

Ta có thể lựa chọn 1 trong 2 cách giải sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Đặt $t = x - m$, bất phương trình có dạng: $t^2 + 2(|t| + mt) + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \quad (2)$

+ Với $t \geq 0$ thì $(2) \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2(m+1)t + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \quad (3)$

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 0$

$f(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 0$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$ hoặc $t_1 \leq 0 \leq t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ \frac{s}{2} \geq 0 \\ af(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2m^2 - m + 1 \geq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \geq 0 \\ -m - 1 \geq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -1 \\ m \leq -1 \\ -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

+ Với $t \leq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow g(t) = t^2 + 2(m-1)t + 2m^2 + m - 1 \leq 0$ (3)

Vậy (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(t) = 0$ có ít nhất (1) nghiệm $t \leq 0$ $\left(\begin{cases} t_1 \leq t_2 \leq 0 \\ t_1 \leq 0 \leq t_2 \end{cases} \right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ ag(0) \geq 0 \\ \frac{s}{2} \leq 0 \\ ag(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 2m^2 - m + 1 \geq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \geq 0 \\ -m - 1 \leq 0 \\ 2m^2 + m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq 1 \\ -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $t = |x - m|$, điều kiện $t \geq 0$. Bất phương trình có dạng: $h(t) = t^2 + 2t + 2mx + m - 1 \leq 0$ (4)

Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \min h(t) \leq 0 (t \geq 0)$ (5)

Nhận xét rằng $h(t)$ là 1 Parabol có đỉnh $t = -1 < 0$, do đó $\min h(t) = h(0) (t \geq 0)$.

Do đó: (5) $\Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$. Vậy bất phương trình có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{1}{2}$

Bài tập tổng hợp tự giải :

Bài 1: Giải các bất phương trình sau

a. (ĐHDB – B 2008) $2^{2x^2-4x-2} - 16.2^{2x-x^2-1} - 2 \leq 0$

Đs: $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$

b. (ĐHDB – B 2008) $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5.6^x \leq 0$

Đs: $x \leq \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$

c. $2^{\log_{\sqrt{3}}|x+1|} . 5^{\log_3|x+1|} < 400$

Đs: $-10 < x < 8$

d. (ĐHSPHN – B 2001) $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$

Đs: $0 < x \leq \log_{\frac{3}{2}} 3$

e. (ĐHGTVT – 1998) $(\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10} - 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$

Đs: $\begin{cases} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{cases}$

f. (ĐHY TB – 2001) $\sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 2x > 3^x \cdot 2x\sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + (2x)^2 \cdot 3^x$

Đs: $-1 < x \leq \frac{1}{3}$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

a. (ĐHTCKT – 2001) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2}{2} + 2^{\log_2(x-1)} \right) + 3 \right]} \geq 1$

Đs: $\frac{-1 + \sqrt{73}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{217}}{2}$

b. (ĐHXD – 2001) $x^4 - 8e^{x-1} > x(x^2 e^{x-1} - 8)$

Đs: $x < -2$

c. (ĐHY – 1999) $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x > 6^x - 1$

Đs: $x < 2$

d. $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Đs: $\begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau

a. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}} \cdot x + 3^{1+\sqrt{x}} < 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x + 6$

b. $(0,12)^{\log_{x-1} x} \geq \left[\frac{5\sqrt{3}}{3} \right]^{\log_{(x-1)} (2x-1)}$

c. $9^{\sqrt{x^2-2x-1}} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x-1}} \leq 2$

d. $4x^2 + x \cdot 2^{x^2+1} + 3 \cdot 2^{x^2} > x^2 \cdot 2^{x^2} + 8x + 12$

e. $\sqrt{2-5x-3x^2} + 2x > 2x \cdot 3^x \sqrt{2-5x-3x^2} + 4x^2 \cdot 3^x$

f. $6 \cdot 9^{2x^2-x} - 13 \cdot 6^{2x^2-x} + 6 \cdot 4^{2x^2-x} \leq 0$

Đs:

d. (ĐHDHN – 1997) $-\sqrt{2} < x < -1 \vee \sqrt{2} < x < 3$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau

a. $8 \cdot 3^{\sqrt{x+4\sqrt{x}}} + 9^{4\sqrt{x+1}} \geq 9^{\sqrt{x}}$

b. $9 \cdot 4^{\frac{-1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{-1}{x}} < 4 \cdot 9^{\frac{-1}{x}}$

c. $2^{\log_2 x} \cdot 3^{\log_2(x-1)} \cdot 5^{\log_2(x-2)} \geq 12$

d. $5^{\frac{\log_1 \log_2 (3^{2 \cdot \log_3 x - 3x + \log_3 9})}{2}} < 1$

e. $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34 \cdot 15^{2x-x^2}$

f. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-1)}{3}} > 52$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau

a. $3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1$

c. $5^{(\log_5 x)^2} + x^{\log_5 x} \leq 10$

e. $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau

a. $(\sqrt{5}+1)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3(\sqrt{5}-1)^{-x^2+x}$

c. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$

e. $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_4 8$

Đs:

a. $x < 0 \vee x > 1$

f. $x < -1$

Bài 7: Giải các bất phương trình sau

a. $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$

Đs: $x > 0$

b. (ĐHYD HCM – 2001) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}+1} > 12$

Đs: $x > -1$

c. (ĐHPCCC – 2000) $(3+\sqrt{5})^{2x-x^2} + (3-\sqrt{5})^{2x-x^2} - 2^{1+2x-x^2} \leq 0$

d. $\frac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Đs: $0 < x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$

e. $4x^2 + x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$

Đs: $0 \leq x < \log_3^2 2 \vee x > \frac{3}{2}$

Bài 8: Giải các bất phương trình sau

a. $6 \cdot 9^{2x^2-x} - 13 \cdot 6^{2x^2-x} + 6 \cdot 4^{2x^2-x} < 0$

c. (ĐHBCVT – 1998) $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$

e. $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$

Đs:

a. $-\frac{1}{2} < x < 1$

b. $0 \leq x \leq 4$

c. $x > 0$

d. $x < 2$

e. $x < 2$

f. $x \geq 1$

Bài 9: Giải các bất phương trình sau

a. $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$

b. $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$

d. $3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1$

f. $16^{\log_a x} \geq 4 + 3 \cdot x^{\log_a 4}$

b. $2^{2x+1} - 21\left[\frac{1}{2}\right]^{2x+3} + 2 \geq 0$

d. $x^{\log_2 x+4} \leq 32$

f. $(x^2 + x + 1)^x < 1$

b. $4^x \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{x}+1}$

d. $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x > 6^x - 1$

f. $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Đs: $x \geq 2$

b. (ĐHBK – 1997) $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$

Đs: $x \geq 2$

c. $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$

Đs: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x > 1$

d. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} < 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$

Đs: $x > 2$

e. $2^{x^2-3x-2} \cdot 3^{x^2-3x-3} \cdot 5^{x^2-3x-4} \geq 12$

Đs: $x \leq -1 \vee x \geq 4$

Bài 9: Giải các bất phương trình sau

a. $\frac{1}{3^{\sqrt{x^2+5x-6}}} < \frac{1}{3^{x+2}}$

Đs: $x \leq -6 \vee x \geq 10$

b. $(x-2)^{2x^2-7x} > 1$

Đs: $2 < x < 3 \vee x > \frac{7}{2}$

c. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$

Đs: $(-1; 2) \setminus \{0; 1\}$

d. $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$

Đs: $x > \frac{8}{3}$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

Bài 1: Xác định m để bất phương trình: $m \cdot 4^x - 2(m+1) \cdot 2^x - m + 5 < 0$ nghiệm đúng với $\forall x < 0$

Bài 2: Cho bất phương trình: $m \cdot 9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} + 16(1-m)4^{x^2-3x} < 0$ (1)

a. Xác định m để mọi nghiệm của (1) thỏa mãn bất phương trình $1 < x < 2$ (2)

b. Xác định m để mọi nghiệm của (2) đều là nghiệm của (1).

Bài 3: Xác định các giá trị của m để bất phương trình:

$$9^{2x^2-x} - 2(m-1)6^{2x^2-x} + (m+1)4^{2x^2-x} \geq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \text{ thỏa mãn điều kiện } |x| \geq \frac{1}{2}$$

Bài 4: Cho bất phương trình: $(m-1)4^x + 2^{x+1} + m + 1 > 0$

a. Giải bất phương trình khi $m = -1$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài 5: Cho bất phương trình: $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$

a. Giải bất phương trình khi $m = \frac{16}{9}$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài 6: Xác định m để bất phương trình:

a. $m \cdot 4^x + (m-1)2^{x+2} + m-1 > 0$ nghiệm đúng với $\forall x$.

b. $4^x - m \cdot 2^x + m + 3 \leq 0$ có nghiệm.

c. $m \cdot 9^x - (2m+1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in [0; 1]$

Bài 7: Cho bất phương trình: $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 12$ (1)

a. Giải bất phương trình (1)

b. Xác định m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của bất phương trình:

$$2x^2 + (m+2)x + 2 - 3m < 0$$

Bài 8: (QGHN – 1997) Giải và biện luận bất phương trình $x^{\log_a(ax)} \geq (ax)^4$

HD:

Điều kiện $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

$$\Leftrightarrow (1 + \log_a x) \log_a x \leq 4(1 + \log_a x) \Leftrightarrow (\log_a x + 1)(\log_a x - 4) \leq 0$$

Với $0 < a < 1$. Lấy lôgarit cơ số a hai vế PT

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log_a x \leq 4 \Leftrightarrow a^4 \leq x \leq \frac{1}{a}$$

Với $a > 1$, Biến đổi như trên với chú ý cơ số > 1 ta được $(\log_a x + 1)(\log_a x - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x \leq -1 \\ \log_a x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{a} \\ x \geq a^4 \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ III: BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Để chuyển ẩn số khỏi loga người ta có thể mũ hoá theo cùng 1 cơ số cả 2 vế bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Với bất phương trình: $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$$

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

II. Bài tập áp dụng:

Loại 1: Khi cơ số a là một hằng số dương

Bài 1: (ĐHDB – 2002) Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$

Giải:

$$\text{Bất phương trình } \log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x > 0 \\ 4^x + 4 \leq 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow 4^x + 4 \leq 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x \text{ (vì } 4^x + 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq -1 \text{ (loại)} \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Bài 2: (ĐHDB - 2004) Giải bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) \right] < 0$.

Giải:

$$\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) \right] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) > 0 \\ \log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2x^2 - x} > 0 \\ x + \sqrt{2x^2 - x} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 - x} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x} > 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 0 \\ 2x^2-x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2x^2-x > x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2+3x-4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 1 \end{cases}$$

Bài 3: (ĐH – B 2008) Giải bất phương trình $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < 0$

Giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} \Leftrightarrow -4 < x < -3 \vee x > 8$$

Bài 4: (ĐH – D 2008) Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0$

Giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x} > 0 \\ \frac{x^2-3x+2}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee x > 2 \\ \frac{x^2-4x+2}{x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee x > 2 \\ \frac{x^2-4x+2}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee x > 2 \\ (x < 0) \vee (2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{2} \leq x < 1 \\ 2 < x \leq 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 5: Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2x}{4-x} \right) - 4} \leq \sqrt{5}$.

Giải:

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2x}{4-x} - 4 \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2x}{4-x} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{4-x} \leq -2(1) \\ 2 \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{4-x} \leq 3(2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } (1) \Leftrightarrow 4 \leq \frac{2x}{4-x} \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-8}{4-x} \geq 0 \\ \frac{5x-16}{4-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leq x \leq \frac{16}{5}$$

Giải (2): $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{2x}{4-x} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x-4}{4-x} \geq 0 \\ \frac{9x-4}{4-x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{17} \leq x \leq \frac{4}{9}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $\left[\frac{4}{17}; \frac{4}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{3}; \frac{16}{5}\right]$.

Bài 6: Giải bất phương trình: $\frac{1}{2} \log_2(x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+7}\right)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty) \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-7; -5) \cup (1; +\infty)$

BPT $\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 4x - 5) > -2 \log_2 \frac{1}{x+7} \Leftrightarrow \log_2(x^2 + 4x - 5) > \log_2(x+7)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 > x^2 + 14x + 49 \Leftrightarrow x < \frac{-27}{5}$

Kết hợp điều kiện: BPT có nghiệm: $x \in (-7; \frac{-27}{5})$

Bài 7: Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq \log_3(2-x)$

Giải:

Điều kiện: $-1 < x < 2$

BPT $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq \log_3(2-x) \Leftrightarrow -\log_3(x+1) \leq \log_3(2-x) \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{x+1} \leq \log_3(2-x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \frac{1}{x+1} \leq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \frac{x^2 - x - 1}{x+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Loại 2: Khi cơ số a chứa tham số

Bài 1: (ĐH – B 2002) Giải BPT $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$

Giải:

Bất phương trình $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ \log_3(9^x - 72) \leq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_3(9^x - 72) \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ 9^x - 72 > 1 \\ 9^x - 72 \leq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 9^x - 72 \geq 3^x \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ 3^x > 6\sqrt{2} \\ 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3^x \leq -8 \vee 3^x \geq 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ 6\sqrt{2} \leq 3^x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3(6\sqrt{2}) < x \leq 2$$

Chú ý:

Đề không phải xét hai trường hợp ta làm như sau

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9^x - 72 > 1 \Leftrightarrow x > \log_9 73 (*)$$

Vì $x > \log_9 73 > 1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \dots \Leftrightarrow x \leq 2$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $\log_9 73 < x \leq 2$

Bài 2: (ĐHDB - 2004) Giải BPT $\log_3 x > \log_x 3$

Giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ t = \log_3 x \\ t > \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ t = \log_3 x \\ \frac{t^2 - 1}{t} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ t = \log_3 x \\ -1 < t < 0 \vee t > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ -1 < \log_3 x < 0 \vee \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1 \vee x > 3$$

Bài 3: Giải bất phương trình $\log_x(3x-1) > \log_x(x^2+1)$

Giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x > 1 \\ 3x-1 > x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2-3x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < 3x-1 < x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x-1 > 0 \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > \frac{1}{3} \\ x > 2 \vee x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right) \setminus \{1\}$

Bài 4: Giải bất phương trình $\log_x(5x^2-8x+3) > 2$

Giải:

Cách 1: Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x > 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 4x^2 - 8x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 0 < x < 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Cách 2: Bất phương trình tương đương với: $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > \log_x x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0 \\ x^2 > 0 \\ (x-1)[5x^2 - 8x + 3 - x^2] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Bài 5: Giải bất phương trình: $\log_{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} 2 \leq \log_{\sqrt{x+1}} 2$ (1)

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+2}-\sqrt{x} > 0, \neq 1 \\ \sqrt{x+1} > 0, \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases} (*)$

$$\text{BPT (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) \geq \log_2 \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) - \log_2 \sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2-1) \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x}-\sqrt{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 \geq x+x+1+2\sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow 1-x \geq 2\sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (1-x)^2 \geq 4x(x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2+6x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

Kết hợp với (*) ta được (1) có nghiệm $0 < x \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 6: Giải bất phương trình: $\log_{x(3-x)}(3-x) > 1$ (1)

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3-x > 0 \\ x(3-x) > 0, \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x^2 - 3x + 1 \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{BPT (1)} \Leftrightarrow 1 - \log_{x(3-x)}(3-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{x(3-x)} x(3-x) - \log_{x(3-x)}(3-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{x(3-x)} x < 0 \Leftrightarrow [x(3-x) - 1](x-1) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) (x-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy (1) có nghiệm } \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3.$$

Bài 7: Giải các bất phương trình:

a. $\log_x 3 < \log_{\frac{x}{3}} 3$ b. $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$

Giải:

$$\text{a. Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} < \frac{1}{\log_3 \frac{x}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} < \frac{1}{\log_3 x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x(\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \log_3 x(\log_3 x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log_3 x < 0 \vee \log_3 x > 1$$

$$\text{TH 1: } \log_3 x < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ kết hợp ĐK : } 0 < x < 1$$

$$\text{TH 2: } \log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của BPT: } x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{b. Điều kiện: } x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases} > 0$$

$$\text{TH 1: Nếu } 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ bất phương trình đã cho:}$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x} 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 2x \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6$$

$$\text{Vậy trong trường hợp này, nghiệm của bất phương trình là: } 1 < x < 2 \vee 3 < x < 6$$

TH 2: Nếu $0 < 2x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho $x^2 - 5x + 6 > 2x \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 6 \end{cases}$

Vậy trong trường hợp này nghiệm của bất phương trình là: $0 < x < \frac{1}{2}$

Kết hợp hai trường hợp ta có $0 < x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < 2 \vee x < 6$

Bài 8: (ĐHAG – 2001) Giải bất phương trình: $\log_{x^2} 2x \geq 1$

Giải:

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ 2x \geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ 0 < 2x < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \\ x > 0 \\ x < 0 \vee x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Bài 9: Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm: $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 + 1} > \log_{\frac{1}{3}} (ax + a)$

Giải:

Điều kiện: $ax + a > 0$

Bpt tương đương $\sqrt{x^2 + 1} < a(x + 1)$

Nếu $a > 0$ thì $x + 1 > 0$. Ta có $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} < a$

Nếu $a < 0$ thì $x + 1 < 0$. Ta có $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} > a$

Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ với $x \neq -1$

$$y' = \frac{x - 1}{(x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	-1 $\searrow$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$ 1

Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a < -1 \end{cases}$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LÔGARIT

I. Phương pháp:

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải bất phương trình $2\lg\left[\sqrt{5(x-1)}\right] > \lg(5-x) + 1$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5 \quad (*)$

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\lg\left[5(x-1)^2\right] > \lg\left[10.(5-x)\right] \Leftrightarrow 5(x-1)^2 > 10.(5-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow 3 < x < 5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $3 < x < 5$

Bài 2: Giải bất phương trình $\frac{\log_3(35-x^3)}{\log(5-x)} > 3$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ \log_a(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Bất phương trình tương đương với: $\log_{5-x}(35-x^3) > 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5-x > 1 \\ 35-x^3 > (5-x)^3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 5-x < 1 \\ 0 < 35-x^3 < (5-x)^3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 4 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 < x < 5 \\ x < \sqrt[3]{35} \\ x^2-5x+6 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $2 < x < 3$.

Bài 3: Giải bất phương trình $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}x < \log_{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{x-1}) \quad (1)$

Giải:

Điều kiện $x > 0$. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} > \log_{\frac{1}{3}} \left(1 + \sqrt[3]{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 + \sqrt[3]{x-1} \xleftarrow{x>0 \rightarrow 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x > \left(1 + \sqrt[3]{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x > 1 + 2\sqrt[3]{x-1} + \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow x - 1 - \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-1} > 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0} t > -1$. Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^3 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 2) > 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) > 0 \xleftarrow{t+1>0} t(t-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 2 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 8 \\ x-1 < 0 \end{cases} \xleftarrow{x>0} \begin{cases} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

Bài 4: Giải bất phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x > 11$

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x > 11$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x > 11 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \log_3 x > 11$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{6} \log_3 x > 11 \Leftrightarrow \log_3 x > 11 \cdot \frac{6}{11}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x > 6 \Leftrightarrow x > 3^6 \Leftrightarrow x > 729$$

Bài 5: Giải bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + \log_3 (3x^4) > 3$

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3^2}} x^{\frac{1}{2}} + \log_{3^{-1}} x^3 + \log_3 3 + \log_3 x^4 > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{3}{-1} \log_3 x + 1 + 4 \log_3 x > 3 \Leftrightarrow \log_3 x - 3 \log_3 x + 4 \log_3 x > 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3 + 4) \log_3 x > 2 \Leftrightarrow 2 \log_3 x > 2 \Leftrightarrow \log_3 x > 1 \Leftrightarrow x > 3$$

Bài 6: (ĐHDB - 2007) Giải BPT $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$

Giải:

Điều kiện: $x < \frac{1}{2} \vee x > 1$

$$\text{Đưa về } -\frac{1}{2} \log_2 (x-1)(2x-1) + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+4x-1}{(x-1)(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(-3x+1)}{(x-1)(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp điều kiện:
$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \vee x > 1 \\ \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$$

Bài 7: (ĐH – A 2007) Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$

Giải:

BPT tương đương

$$\begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \log_3(4x-3)^2 - \log_3(2x+3) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ 8x^2 - 21x - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8} \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < x \leq 3$$

Bài 8: Giải bất phương trình: $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0 \quad (1)$

Lời giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ (x+1)^3 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 4 \end{cases} (*)$$

BPT (1) $\Leftrightarrow [2\log_2(x+1) - 3\log_3(x+1)](x^2 - 3x - 4) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \left(\frac{2}{\log_{x+1} 2} - \frac{3}{\log_{x+1} 3} \right) (x+1)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2\log_{x+1} 3 - 3\log_{x+1} 2}{\log_{x+1} 2 \cdot \log_{x+1} 3} (x+1)(x-4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (\log_{x+1} 9 - \log_{x+1} 8) \cdot \log_2(x+1) \cdot \log_3(x+1) \cdot (x+1)(x-4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \log_{x+1} \frac{9}{8} \cdot \log_2(x+1) \cdot \log_3(x+1) \cdot (x+1)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \log_{x+1} \frac{9}{8} \cdot \log_2(x+1) \cdot \log_3(x+1) \cdot (x+1)(x-4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x+1-1) \left(\frac{9}{8} - 1 \right) \cdot (2-1)(x+1-1) \cdot (3-1)(x+1-1) \cdot (x+1)(x-4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^3(x+1)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(x+1)(x-4) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 4$$

Kết hợp với (*) ta được (1) có nghiệm $-1 < x < 0 \vee x > 4$.

Chú ý:

Để tránh phức tạp ta có thể làm như sau

$$\text{Do } x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ khi } x > 4$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ khi } -1 < x < 4$$

$$\text{Xét trên } (4; +\infty) \Rightarrow BPT \Leftrightarrow \log_{x+1} 9 - \log_{x+1} 8 > 0 \Leftrightarrow \forall x \Rightarrow BPT \text{ có nghiệm } S = (4; +\infty)$$

$$\text{Xét trên } (-1; 4) \Rightarrow BPT \Leftrightarrow \log_{x+1} 9 - \log_{x+1} 8 < 0 \Leftrightarrow \log_{x+1} \frac{9}{8} < 0$$

$$\text{- Xét trên } (-1; 0) \Rightarrow BPT \Leftrightarrow \log_{x+1} \frac{9}{8} < 0 \Leftrightarrow \forall x \in (-1; 0)$$

$$\text{- Xét trên } (0; 4) \Rightarrow BPT \Leftrightarrow \log_{x+1} \frac{9}{8} < 0 \Leftrightarrow VN$$

$$\textbf{Tương tự: Giải bất phương trình } \frac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$$

HD:

Điều kiện $x > -1$

$$BPT \Leftrightarrow \frac{2\log_3(x+1) - \frac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(x+1)}{x-6} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$$

$$\textbf{Bài 9: Giải bất phương trình: } \log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} (x+3)$$

Giải:

Điều kiện: $x > 3$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{2} \log_3 (x^2 - 5x + 6) + \frac{1}{2} \log_{3^{-1}} (x-2) > \frac{1}{2} \log_{3^{-1}} (x+3) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 (x^2 - 5x + 6) - \frac{1}{2} \log_3 (x-2) > -\frac{1}{2} \log_3 (x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [(x-2)(x-3)] > \log_3 (x-2) - \log_3 (x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [(x-2)(x-3)] > \log_3 \left(\frac{x-2}{x+3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > \frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow x^2 - 9 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{10} \\ x > \sqrt{10} \end{cases}$$

Giao với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x > \sqrt{10}$

$$\textbf{Bài 10: Giải bất phương trình: } (4\log_4^2 x + 1) \log_x 2 \leq \frac{1}{2}$$

Giải:

Điều kiện: $0 < x \neq 1$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x + 1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\log_2^2 x - \log_2 x + 2}{2\log_2 x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \leq 0, \left(\text{Do : } 2\log_2^2 x - \log_2 x + 2 > 0 \right) \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Đối chiếu điều kiện: BPT có nghiệm $0 < x < 1$

$$\text{Bài 11: Giải bất phương trình } \sqrt{\log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x}} \leq 4 - \log_{16} x^4$$

Giải:

$$\sqrt{\log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x}} \leq 4 - \log_{16} x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \log_{16} x^4 \geq 0 \\ \log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x} \geq 0 \\ \log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x} \leq (4 - \log_{16} x^4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \log_2 x \geq 0 \\ \log_2^2 x + 2\log_2 x \geq 0 \\ \log_2^2 x + 2\log_2 x \leq 16 - 8\log_2 x + \log_2^2 x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \log_2 x \leq \frac{8}{5} \\ \log_2 x \leq -2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2^{\frac{8}{5}} \\ 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 2^{\frac{8}{5}}] \cup (0; \frac{1}{4}]$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 1

I. Phương pháp:

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

II. Bài tập áp dụng:

$$\text{Bài 1: (ĐH – B 2006) Giải BPT } \log_5 (4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5 (2^{x-2} + 1)$$

Giải:

Biến đổi BPT

$$\log_5 \left(\frac{4^x + 144}{16} \right) < \log_5 (5 \cdot 2^{x-2} + 5) \Leftrightarrow \frac{4^x + 144}{16} < 5 \cdot 2^{x-2} + 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0$$

$$\text{Đặt } t = 2^x > 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 20t + 64 < 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-16) < 0 \Leftrightarrow 4 < t < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

$$\text{Bài 2: (ĐHDB - 2007) Giải BPT } (\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$$

Giải:

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$

$$\text{Đưa về } 3\log_x 2 + \log_2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x \Leftrightarrow \frac{6}{t} + 2t = 1 + t \quad (t = \log_2 x)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = -2 \Leftrightarrow x = 8 \vee t = \frac{1}{4}$$

Bài: Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2)\log_2 \sqrt{2x} \geq 0$

$$(\log_x 8 + \log_4 x^2)\log_2 \sqrt{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Bài 3: Giải bất phương trình $\log_2^4(x) - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{\frac{1}{2}}^2(x)$

Giải:

Điều kiện $x > 0$. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_2^4(x) - \log_{2^{-1}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [\log_2 x^3 - \log_2 8]^2 + 9[\log_2 32 - \log_2 x^2] < 4\log_2^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [3\log_2 x - 3]^2 + 9[5 - 2\log_2 x] < 4\log_2^2(x)$$

Đặt $t = \log_2 x$ ta được:

$$t^4 - (3t - 3)^2 + 9(5 - 2t) < 4t^2 \Leftrightarrow t^4 - 13t^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow 4 < t^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < t < -2 \\ 2 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < \log_2 x < -2 \\ 3 < \log_2 x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4} \\ 4 < x < 8 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$

Chú ý:

Trong ví dụ trên các em cần lưu ý khi thực hiện các phép biến đổi cho 2 toán tử:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) = \left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = \left[-\log_2\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = \left[\log_2\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = [\log_2 x^3 - \log_2 8]^2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(x) = \left[\log_{\frac{1}{2}}(x)\right]^2 = [-\log_2(x)]^2 = \log_2^2(x)$$

Bài 4: Giải bất phương trình $2(\log_3 x)^2 - 5\log_3(9x) + 3 < 0$

Giải:

Điều kiện : $x > 0$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 5(\log_3 9 + \log_3 x) + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 5(2 + \log_3 x) + 3 < 0 \Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 10 - 5\log_3 x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 7 < 0$$

Đặt $t = \log_3 x$.

$$Pt \Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 7 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < \frac{7}{2} \Leftrightarrow -1 < \log_3 x < \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3^{-1} < x < 3^{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 3^{\frac{7}{2}}$$

Theo điều kiện $x > 0$.

Vậy: Nghiệm của BPT là : $\frac{1}{3} < x < 3^{\frac{7}{2}}$

Bài 5: Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

đặt $t = \log_2 x$

$$BPT (1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t - 3) \Leftrightarrow \sqrt{(t - 3)(t + 1)} > \sqrt{5}(t - 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t > 3 \\ (t + 1)(t - 3) > 5(t - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{cases}$$

Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là: $(0; \frac{1}{2}] \cup (8; 16)$

Bài 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_9(3x^2 + 4x + 2)} + 1 > 2 \log_3(3x^2 + 4x + 2)$

Giải:

BPT tương đương với $\sqrt{\log_9(3x^2 + 4x + 2)} + 1 > 2 \log_9(3x^2 + 4x + 2)$

Đặt $t = \sqrt{\log_9(3x^2 + 4x + 2)}$ ($t \geq 0$).

BPT trở thành: $t + 1 > 2t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < t < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_9(3x^2 + 4x + 2) \geq 0 \\ \log_9(3x^2 + 4x + 2) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 2 \geq 1 \\ 3x^2 + 4x + 2 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{-1}{3} \\ -\frac{7}{3} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} < x \leq -1 \\ -\frac{1}{3} \leq x < 1 \end{cases}$$

Bài 7: Giải bất phương trình: $\frac{\log_8 x}{\log_2(1 + 2x)} \leq \frac{\log_2 \sqrt[3]{1 + 2x}}{\log_2 x}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2(1+2x)} \leq \frac{\log_2(1+2x)}{\log_2 x}$$

Đặt $t = \frac{\log_2 x}{\log_2(1+2x)}$ ta được BPT

$$t \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

TH 1: $t \leq -1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2(1+2x)} \leq -1 \Leftrightarrow \log_2 x \leq -\log_2(1+2x)$ (vì $1+2x > 1$)

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{1+2x} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ So sánh ĐK ta có : } 0 < x \leq \frac{1}{2}$$

TH 2: $0 < t \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\log_2 x}{\log_2(1+2x)} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \log_2 x \leq \log_2(1+2x)$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 1+2x \Leftrightarrow x > 1$$

Tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$

Bài 8: Giải bất phương trình $\sqrt{\log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x}} \leq 4 - \log_{16} x^4$

Giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \log_{16} x^4 \geq 0 \\ \log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x} \geq 0 \\ \log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x} \leq (4 - \log_{16} x^4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \log_2 x \geq 0 \\ \log_2^2 x + 2\log_2 x \geq 0 \\ \log_2^2 x + 2\log_2 x \leq 16 - 8\log_2 x + \log_2^2 x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \log_2 x \leq \frac{8}{5} \\ \log_2 x \leq -2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2^{\frac{8}{5}} \\ 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 2^{\frac{8}{5}}] \cup (0; \frac{1}{4}]$

Bài 9: Giải bất phương trình: $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$

Giải:

Điều kiện : $0 < x \neq 1 \Leftrightarrow 2\log_5 x - 3\log_x 5 < 0$

Đặt $t = \log_5 x (t \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_x 5$

Bất phương trình thành: $2t - \frac{3}{t} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - t - 3}{t} < 0 \Leftrightarrow t < -1 \vee 0 < t < \frac{3}{2}$

Vậy: $\begin{cases} \log_5 x < -1 \\ 0 < \log_5 x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x < \log_5 5^{-1} \\ \log_5 1 < \log_5 x < \log_5 \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{5} \\ 1 < x < \sqrt{5^3} \end{cases}$

Bài 10: Giải bất phương trình: $\frac{6}{\log_2 2x} + \frac{4}{\log_2 x^2} > 3$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0 < x \neq 1/2 \text{ và } 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $t = \log_2 x$ ($t \neq 0$)

Ta được $\frac{-3t^2 + 5t + 2}{t(1+t)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < -\frac{1}{3} \\ 0 < t < 2 \end{cases} \dots$ Suy ra tập nghiệm là: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup (1; 4)$.

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 2

I. Phương pháp:

II. VD minh họa:

Bài 1: Giải bất phương trình $\log_3^2 x - \log_2(8x) \cdot \log_3 x + \log_2 x^3 < 0$ (1)

Giải:

Điều kiện $x > 0$

Biến đổi phương trình tương đương về dạng: $\log_3^2 x - (3 + \log_2 x) \log_3 x + 3 \log_2 x < 0$

Đặt $t = \log_3 x$ khi đó bất phương trình có dạng: $f(t) = t^2 - (3 + \log_2 x) \cdot t + 3 \log_2 x < 0$ (2)

Ta có: $\Delta = (3 + \log_2 x)^2 - 12 \log_2 x = (3 - \log_2 x)^2$. Do đó $f(t) = 0$ có nghiệm: $\begin{cases} t = 3 \\ t = \log_2 x \end{cases}$

Do đó (2) tương đương với: $(t - 3)(t - \log_2 x) < 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 3)(\log_3 x - \log_2 x) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x - 3 > 0 \\ \log_3 x - \log_2 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 3 \\ \log_3 x < \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

Vậy bất phương trình có nghiệm là tập $(0;1) \cup (27;+\infty)$

BÀI TOÁN 5: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - DẠNG 3

I. Phương pháp:

Sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ trong bất phương trình và biến đổi bất phương trình thành bất phương trình tích, khi đó lưu ý:

$$A.B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad A.B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

II. Bài tập áp dụng:

Giải bất phương trình $\log_3 x \cdot \log_2 x < 2\log_3 x - \log_2 \frac{x}{4}$

Giải:

Điều kiện $x > 0$ (*)

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $\log_3 x \cdot \log_2 x - 2\log_3 x - \log_2 x - 2 < 0$

Đặt $\begin{cases} u = \log_3 x \\ v = \log_2 x \end{cases}$. Khi đó bất phương trình có dạng:

$$uv - 2u - v - 2 < 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-1 > 0 \\ v-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_2 x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4 \quad \text{thỏa mãn (*)}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $3 < x < 4$.

BÀI TOÁN 6: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải bất phương trình $\log_2(\sqrt{x-2}+4) \leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right)$ (1)

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 \quad (*)$

Ta có nhận xét sau:

+) $\sqrt{x-2} + 4 \geq 4 \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow VT \geq 2$

$$x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq 9$$

+) $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8\right) \leq \log_3 9 = 2 \Leftrightarrow VP \leq 2$

Do đó bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 2: Giải bất phương trình $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \\ -1 < x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$

Ta có: $A = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$$

$$B = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

+ Với $-1 < x < 0$; $VT < 0$; $VP > 0$. Bất phương trình (1) sai

+ Với $0 < x < 1/2$; $VT > 0$; $VP < 0$. Bất phương trình (1) đúng

+ Với $1 < x < 3/2$; $VT > 0$; $VP < 0$. Bất phương trình (1) đúng.

+ Với $x > 3/2$; $VT < 0$; $VP < 0$. Bất phương trình (1) tương đương với:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

Kết hợp với trường hợp đang xét ta được $x > 5$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$

PHƯƠNG PHÁP PHÂN KHOẢNG

Bài 1: Giải $\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leq 0$ (1)

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 8x - 2x^2 - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 3$$

- Với $x = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{5} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 + 1 = 0 \leq 0$ (luôn đúng)

- Với $x = 3$ thì (1) $\Leftrightarrow \log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq 5^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{27}{125} \leq \frac{1}{5}$ (loại)

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Bài 2: Giải bất phương trình: $\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right) \left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right) \log_x \frac{2}{x}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ -2x^2 + 14x - 24 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

- Với $x = 3$ bất phương trình trở thành bất đẳng thức

$$2\left(\frac{2}{3} - 1\right) \leq 2 \log_3 \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \log_3 \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \geq 3^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow 2^3 \geq 3^2 \text{ (sai)}$$

- Với $x = 4$ bất phương trình trở thành

$$2\left(\frac{2}{4} - 1\right) \leq 2 \log_4 \frac{2}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \log_4 \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq -\log_4 2 = -\frac{1}{2} \text{ (đúng)}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x = 4$.

PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Bài 1: (NTA - 2000) Giải bất phương trình: $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$ (1)

Giải:

Đặt $f(x) = VT(1)$, có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ có:

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(2^x + 1) \ln 2} + \frac{4^x \ln 4}{(4^x + 2) \ln 3} > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

nên $f(x)$ đồng biến trên $(*)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \leq 0$.

Bài 2: Giải bất phương trình: $x(3\log_2 x - 2) > 9\log_2 x - 2$

Giải:

Điều kiện: $x > 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3(x-3)\log_2 x > 2(x-1)$

Nhận thấy $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình

TH1: Nếu $x > 3$ BPT $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x > \frac{x-1}{x-3}$

Xét hàm số:

$f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $g(x) = \frac{x-1}{x-3}$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$

mà $f(4) = g(4) = 3$

Với $x > 4$: Ta có $\left. \begin{matrix} f(x) > f(4) = 3 \\ g(x) < g(4) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ Bpt có nghiệm $x > 4$

Với $x < 4$: Ta có $\left. \begin{matrix} f(x) < f(4) = 3 \\ g(x) > g(4) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ Bpt vô nghiệm

TH 2: Nếu $0 < x < 3$ BPT $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x < \frac{x-1}{x-3}$

$f(x) = \frac{3}{2}\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $g(x) = \frac{x-1}{x-3}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$

mà $f(1) = g(1) = 1$

Với $x > 1$: Ta có $\left. \begin{matrix} f(x) > f(1) = 0 \\ g(x) < g(1) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ Bpt vô nghiệm

Với $x < 1$: Ta có $\left. \begin{matrix} f(x) < f(1) = 0 \\ g(x) > g(1) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ Bpt có nghiệm $0 < x < 1$

Vậy Bpt có nghiệm $\begin{cases} x > 4 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ được nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

Giải:

Điều kiện: $mx^2 + 4x + m > 0$ đúng với $\forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \quad (1)$$

$1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow (5 - m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0$ đúng với $\forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -m^2 + 10m - 21 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3(2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ bất phương trình đúng với $\forall x \in R$ khi $m=3$

Bài tập tổng hợp tự giải:

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a. $2.\log_{25}^2(x-1) \geq \log_5\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}-1}\right) \cdot \log_{\frac{1}{5}}(x-1)$

b. $\sqrt{\log_4(2x^2+3x+2)}+1 > \log_2(2x^2+3x+2)$

c. $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x$

d. $2x + \log_2(x^2 - 4x + 4) > 2 - (x+1)\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

e. $(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1) \leq 0$

f. $(\log_9 x)^2 \geq \left(\log_3 \sqrt{x - \frac{1}{4}}\right)^2$

Đs:

e. (KTQD – 2001) $x = 1$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

b. $\sqrt{1-9.\log_{\frac{1}{8}}^2 x} > 1-4\log_{\frac{1}{8}} x$

c. $\log_3 x - \log_5 x < \log_3 x \cdot \log_5 x$

d. $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}} < 0$

e. $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}$

f. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$

Đs:

f. $x = 5 \vee x \in (4 + \sqrt{2}; +\infty)$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(1-\sqrt[3]{2-x})$

b. $\log_4(3^x-1) \cdot \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right) \leq \frac{3}{4}$

c. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$

d. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$

e. $\log_{\frac{1}{2}}(9^{x-1}+1)-2 > \log_{\frac{1}{2}}(3^{x-1}+7)$

f. $\log_4(18-2^x) \log_2 \left[\frac{18-2^x}{8} \right] \leq -1$

Đs:

b. $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(3; \frac{10}{3}\right]$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{\log_2(x^2 - 9x + 8)}{\log_2(3 - x)} < 2$

c. $\sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} < 1$

e. $\sqrt{\log_9(3x^2 + 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 + 4x + 2)$

b. $\log_2 \sqrt{x^2 + 1} < \log_2(-2x - 2)$

d. $2x + \log_2(x^2 - 4x + 4) > 2 - (x+1)\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

f. $\log_x 2(2 + \log_2 x) > \frac{1}{\log_{2x} 2}$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

a. $(4x^2 - 16x + 7)\log_3(x-3) \geq 0$

c. $\log_2 x + \log_{2x} 8 \leq 4$

e. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$

b. $\frac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\log_2 x > 1$

d. $\log_2 x + \log_3 x < 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x$

f. $|\log_3 x| - \log_3 x - 3 < 0$

Đs:

c. (ĐHYTH – 2001) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[2^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}; 2^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\right]$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

c. $\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right)\left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right)\log_x \frac{2}{x}$

e. $2\log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \frac{2}{3}$

b. $\frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x + 11)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0$

d. $\log_{\frac{1}{3}} \left[\log_4(x^2 - 5)\right] > 0$

f. $\log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 0$

Đs:

a. (GTVT – 2000) $x > \sqrt{10}$ b. $x \in (-2; 2 - \sqrt{15})$

Bài 7: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}$

c. $\log_{x^2} \left(\frac{4x-5}{x-2}\right) \leq \frac{1}{2}$

e. $\log_x \left[\log_2(4^x - 6)\right] \leq 1$

b. $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 8) + 2\log_5(x-4) < 0$

d. $\log_x \left[\log_9(3^x - 9)\right] < 1$

f. $\log_{3x-x^2}(3-x) > 1$

Bài 8: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_{x^2-x+1} \sqrt{2x^2 - 2x - 1} < \frac{1}{2}$

c. $\log_{x^3} \frac{|x-5|}{6x} \geq \frac{-1}{3}$

b. $\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x + 9} \geq 2\log_3 x - 3$

d. $\frac{1 + \log_3^2 x}{1 + \log_3 x} > 1$

e. (ĐHKT – 1997) $\frac{\lg(x^2 - 3x + 2)}{\lg x + \lg 2} > 2$

Đs:

a. $\frac{-3 + \sqrt{33}}{6} < x < \frac{1}{2}$

e. VN

f. $\log_{x\sqrt{3}}(5x^2 - 18x + 16) > 2$

Bài 9: Giải các bất phương trình sau:

a. (ĐHDB – D 2007) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x - 1)^2 \geq \frac{1}{2}$

Đs: $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$

b. (ĐHDB – A 2008) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x+1} \right) \geq 0$

Đs: $x < -1$

c. (ĐHY HN – 2001) $\log_2 (\sqrt{x^2 + 3} - x^2 - 1) + 2 \log_2 x \leq 0$

Đs:
$$\begin{cases} x < \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \\ x > \frac{5 + \sqrt{53}}{2} \end{cases}$$

d. (ĐHSP HCM – A 2000) $\sqrt{\log_9 (3x^2 + 4x + 2)} + 1 > \log_3 (3x^2 + 4x + 2)$

Đs:
$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x < 1 \\ -\frac{7}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

e. $\log_9 (x + 3)^2 - \log_{\frac{1}{3}} |x - 2| - \log_3 2 < 1$

Đs: $(-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$

f. $\log_2 \frac{x+3}{x-2} + \log_4 (x^2 + 4x + 4) > -\log_2 3$

Đs: $x > 2 \vee x < -4$

g. $2 \log_3 (4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 3) \leq 2$

Đs: $\frac{3}{4} < x \leq 3$

h. $\log_{0,5} x + 2 \log_{0,25} (x - 1) + \log_2 6 \leq 0$

Đs: $x \geq 3$

i. $\log_2 (\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 1) + \log_3 (x^2 - 5x + 7) \leq 2$

Đs: $1 \leq x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{5+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 4$

Bài 10: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_2 \left[\log_{0,5} \left(2^x - \frac{31}{16} \right) \right] \leq 2$

Đs: $x > 2$

b. $\log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2$

Đs: $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \vee x > \frac{3}{2}$

c. (**ĐHY HN – 1997**) $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$

Đs: $\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \vee 1 < x \leq 4$

d. $\log_x \left(\frac{3x+2}{x+2} \right) > 1$

Đs: $1 < x < 2$

Bài 11: Giải các bất phương trình sau:

a. $5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}$

b. $\frac{\lg \frac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0$

c. $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x (2 - \log_3 x)}{\log_3 x}$

d. $\log_{\frac{1}{2}} \log_5 (\sqrt{x^2 + 1} + x) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

e. $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x 2x^3}$

f. $|1 + \log_x 2000| < 2$

g. $\frac{x-1}{\log_3 (9-3^x) - 3} \leq 1$

Đs:

a. $x \in \left(\frac{5}{2}; 3 \right]$ b. $x \in (-5; 0) \cup (1; 3)$ c. $x \in \left(0; \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \cup (1; 3)$ d. $x \in \left(-\infty; \frac{12}{5} \right)$

e. $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \cup [2; \infty)$ f. $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2000}} \right) \cup (2000; +\infty)$ g. $\in [2 - \log_3 10; 2)$

Bài 12: Giải các bất phương trình sau:

a. (**ĐHV – 1999**) $\log_{x^2} \frac{4x-2}{|x-2|} \geq \frac{1}{2}$

b. $(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}) \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \leq (\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2) \log_x \frac{2}{x}$

c. $\frac{1}{2} \log_{x^2+3} (x^2 - 6)^2 < 2 + \frac{1}{12} \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64}$

d. $\log_{\frac{x+1}{2}} \log_2 \frac{2x-1}{x+3} < 0$

e. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-2x-x^2}{14} > 1$

f. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

Đs:

a. $\in \left[\frac{1}{2}; -1 + \sqrt{3}\right] \cup (1; 2) \cup (2; 3 + \sqrt{7}]$ b. $x = 4$ c. $x \notin \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

d. $x \in (4; +\infty)$ e. $\in (-3; 1) \cup (3; 4)$ f. $x \in (2^{-\sqrt{2}}; 0, 5) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$

Bài 13: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_2(2^x - 1) \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$ b. **(QHQT – 2001)** $\log_x \frac{3x+2}{x+2} > 1$

c. $\log_x \log_9(3^x - 9) \leq 1$ d. $\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$ e. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$

f. $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0$ g. $2\log_9^2 x > \log_3 x \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$ h. $\frac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5 - x)} \geq 3$

Đs:

a. $x \in (-2 + \log_2 5; \log_2 3)$ b. $x \in (1; 2)$ c. $x > \log_{13} 10$ d. $x = 2 \vee x \in \left(0; \frac{4}{5}\right]$

e. $x \in (4; 10)$ f. $x \in (-1; 0) \cup (4; \infty)$ g. $x \in (1; 4)$ h. $x \in [2; 3]$ (với $0 < a \neq 1$)

Bài 14: Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$ b. $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

c. $(x+1) \log_{\frac{1}{2}} x + (2x+5) \log_{\frac{1}{2}} x + 6 \geq 0$ d. $\log_{x\sqrt{3}}(5x^2 - 18x + 16) > 2$

e. $\log_{12x-4x^2-8} |4x-5| > 0$ f. $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

g. $\frac{4 + \lg^2 \frac{2x}{x^2+1}}{2 + \lg \frac{2x}{x^2+1}} > 2$ h. $x^{\log_2 x + 4} \leq 32$

Đs:

a. $x \in (-\infty; 0]$ b. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (8; 16)$ c. $x \in (0; 2] \cup [4; \infty)$

d. $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \cup (8; \infty)$ e. $x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$ f. $x \in (0; \infty)$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ

Bài 1: (QGHN – 1999) Tìm m để bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm

Đs: $m \leq 4$

Bài 2: (ĐHDL – 2001) Tìm m để bất phương trình $\log_{x-m}(x^2 - 1) > \log_{x-m}(x^2 + x - 2)$ có nghiệm

Đs: $\begin{cases} m > 0 \\ m < -3 \end{cases}$

Bài 3: Cho bất phương trình $\sqrt{\log_2 x + a} > \log_2 x$

a. Giải bất phương trình khi $a = 1$

b. Tìm a để bất phương trình có nghiệm $x \geq -\frac{1}{4}$

Đs:

a. $x \in \left[\frac{1}{2}; 2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)$ b.

Bài 3: (ĐHSP HN – 2001) Tìm m để $\forall x \in [0; 2]$ đều thỏa mãn $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + \sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} \leq 5$

Đs: $2 \leq m \leq 4$

Bài 4: Tìm m để bất phương trình $x^2 \left(2 - \log_2 \frac{m}{m+1} \right) + 2x \left(1 + \log_2 \frac{m}{m+1} \right) - 2 \left(1 + \log_2 \frac{m}{m+1} \right) \geq 0$ có nghiệm duy nhất

Đs: $m = -\frac{32}{31}$

Bài 4: Tìm m để bất phương trình $x^2 - (3+m)x + 3m \leq (x-m) \log_{\frac{1}{2}} x$ có nghiệm duy nhất

Đs: $m = 2$

Bài 4: (ĐH Mỏ HN – 2001) Tìm m để hai bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}} (x-5) + 3 \log_{5\sqrt{5}} (x-5) + 6 \log_{\frac{1}{25}} (x-5) + 2 \leq 0$

và $(x-m)(x-35) \geq 0$ chỉ có một nghiệm chung duy nhất

Bài 5: Tìm m để bất phương trình $\log_m (x^2 - 2x + m + 1) > 0$ nghiệm đúng với $\forall x$

Bài 6: (ĐHNN I – 2001) Giải và biện luận bất phương trình $\log_a \log_{a^2} x + \log_{a^2} \log_a x \geq \frac{1}{2} \log_a 2$

Đs: Nếu $0 < a < 1 \Leftrightarrow a^2 \leq x < 1$. Nếu $a > 1 \Leftrightarrow x \geq a^2$

Bài 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình $a \cdot 9^x + (a-1)3^{x+2} + a-1 > 0$ nghiệm đúng với $\forall x$

Đs: $a \geq 1$

Bài 8: (ĐHGTVT – 2001) Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $x > 1$ nghiệm đúng bất phương trình $\log_{\frac{2x^2+2x}{m}} (x+m-1) < 1$ với $0 < m \leq 4$.

Đs: $x > 3$

Bài 9: Với giá trị nào của m thì bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x + m) > -3$ có nghiệm và mọi nghiệm của nó đều

thuộc miền xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_x (x^3 + 1) \log_{x+1} x - 2}$

Bài 10: Cho hai bất phương trình $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$ (1), với $0 < a \neq 1$ và

$$1 + \log_5(x^2 + 1) - \log_5(x^2 + 4x + m) > 0 \quad (2)$$

Tìm tất cả các giá trị của m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)

Bài 11: Cho hai bất phương trình $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ (1), với $0 < a \neq 1$ và $x^2 - 2x + 1 - a^4 \geq 0$ (2)

Tìm tất cả các giá trị của a để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)

Bài 12: Với giá trị nào của a thì bất phương trình $\log_{2a+1}(2x-1) + \log_a(x+3) > 0$ được thỏa mãn đồng thời tại $x=1$ và $x=4$

Bài 13: Tìm giá trị nào của a để bất phương trình $\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$ có nghiệm. Tìm nghiệm đó

Bài 14: Giải bất phương trình $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(-x^2 + 2x + 3)$ biết nó có nghiệm $x = \frac{9}{4}$

CHỦ ĐỀ 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1: (ĐH – D 2002) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{(2^x + 2)2^x}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x \\ y^3 - 5y^2 + 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^x \\ y = 1 \vee y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{x+y} + 3 \cdot 4^{2y} = 8 \\ x + 3y = 2 - \log_4 3 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$$

Giải:

Hệ đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ x + y - 1 = 1 - 2y - \log_4^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{1-2y-\log_4^3} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ x + y - 1 = 1 - 2y - \log_4^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4^{1-2y}}{3} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ x = 2 - 3y - \log_4^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4^{2y-1} = 1 \\ x = 2 - 3y - \log_4^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + \log_4^3) \\ y = \frac{1}{2}(1 - \log_4^3) \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left[\frac{1}{2}(1 + \log_4^3); \frac{1}{2}(1 - \log_4^3) \right]$

Cách khác:

Đặt $u = 4^{x+y-1}; v = 3.4^{2y-1} (u > 0; v > 0)$

Hệ tương đương với $\begin{cases} u + v = 2 \\ u.v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + \log_4^3) \\ y = \frac{1}{2}(1 - \log_4^3) \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3|y| + 2 = 0 \\ \sqrt{27^x} - \sqrt{3^{y^2}.9^x} = 0 \end{cases}$

Giải:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 3|y| + 2 = 0 & (1) \\ \sqrt{27^x} - \sqrt{3^{y^2}.9^x} = 0 & (2) \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \sqrt{27^x} = \sqrt{3^{y^2}.9^x} \Leftrightarrow 3^{y^2} = 3^x \Leftrightarrow x = y^2$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$y^2 - 3|y| + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = 1 \\ |y| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1); (1; -1); (4; 2); (4; -2)$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. Phương pháp:

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để giải các hệ mũ là việc sử dụng các ẩn phụ. Tùy theo dạng của hệ mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa

Bước 2: Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ bậc nhất 2 ẩn, hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II và hệ đẳng cấp bậc 2)

Bước 3: Giải hệ nhận được

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ ban đầu.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2.3^{x+1} + 3.2^y = 8 \end{cases} \quad (I)$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u, v > 0$. Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 9u^2 + 4v^2 = 17 \\ 6u + 3v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2 - 6u + 1 = 0 \\ v = \frac{8-6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{1}{3} \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có cặp nghiệm $(-1; 1)$

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} m3^{\sqrt{x}+1} + 2^y = 2m \\ 3^{\sqrt{x}+1} + m2^y = m+1 \end{cases}$

- a. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.
b. Tìm m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 3^{\sqrt{x}+1} \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u \geq 3$ và $v > 0$. Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} mu + v = 2m \\ u + mv = m+1 \end{cases} \quad (II). \quad \text{Ta có:}$$

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; \quad D_u = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1; \quad D_v = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m$$

- a. Hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$\begin{cases} D \neq 0 \\ u = \frac{D_u}{D} \geq 3 \\ v = \frac{D_v}{D} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ \frac{2m+1}{m+1} \geq 3 \\ \frac{m}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ -2 \leq m < -1 \\ m < -1 \vee m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < -1$$

Vậy hệ có nghiệm khi $-2 \leq m < -1$.

- b. Với m nguyên ta có $m = -2$ khi đó hệ có nghiệm là:

$$\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}+1} = 3 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = -2$ hệ có nghiệm nguyên $(0; 1)$

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9^{2\cot gx + \sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 81^{\cot gx} = 2m \end{cases}$

- a. Giải hệ phương trình với $m = 1$
b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Giải:

Biến đổi hệ về dạng:
$$\begin{cases} u + v = 2m \\ u \cdot v = -3 \end{cases}$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình $f(t) = t^2 - 2mt - 3 = 0$ (1)

a. Với $m = 1$ ta được:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \xleftrightarrow{u>0; v<0} \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\sin y} = 3 \\ -9^{2\cot gx} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{1}{2} \\ \cot gx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l\pi; y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi; y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}; k, l \in \mathbb{Z}$$

Vậy với $m = 1$ hệ có 2 họ cặp nghiệm.

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3 \cdot 2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}$
--

Giải:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:
$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y = 4 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} u = 4^{x^2-1} \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u \geq \frac{1}{4}$ và $v > 0$.

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:
$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1(1) \\ v^2 - 4uv = 4(2) \end{cases} \quad (II)$$

Để giải hệ (II) ta có thể sử dụng 1 trong 2 cách sau:

Cách 1:

Khử số hạng tự do từ hệ ta được: $4u^2 - 13uv + 3v^2 = 0$ (3)

Đặt $u = tv$, khi đó: $(3) \Leftrightarrow v^2(4t^2 - 13t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$

+ Với $t = 3$ ta được $u = 3v$ do đó: $(2) \Leftrightarrow -8v^2 = 4$ vô nghiệm.

+ Với $t = \frac{1}{4}$ ta được $u = \frac{1}{4}v \Leftrightarrow v = 4u$ do đó: $(2) \Leftrightarrow 4u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (1;2) và (-1;2)

Cách 2:

Nhận xét rằng nếu (u;v) là nghiệm của hệ thì $u \neq 0$

Từ (2) ta được $u = \frac{v^2 - 4}{3v}$ (4). Thay (4) vào (1) ta được: $2v^4 - 31v^2 - 16 = 0$ (5)

$$\text{Đặt } t = v^2, t > 0 \text{ ta được: } (5) \Leftrightarrow 2t^2 - 31t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 16 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow v^2 = 16 \Leftrightarrow v = 4 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(x; y) = (1; 2); (-1; 2)$

$$\text{Bài 5: Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2^{2|x|+1} = 3 \cdot 2^{|x|} = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = 2^{2|x|} - 2 \end{cases}$$

Giải:

Đặt $u = 2^{|x|}$ điều kiện $u \geq 1$. Hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2u^2 - 3u = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow 2(u^2 - y^2) - 3(u - y) = -(u^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(u - y)(u + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ y = 1 - u \end{cases}$$

+ Với $u = y$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} u = y \\ 2u^2 - 3u = u^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ u^2 - 3u + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = y = 1 \\ u = y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ 2^{|x|} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

+ Với $y = 1 - u$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 - u \\ 2u^2 - 3u = (1 - u)^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - u \\ u^2 - 3u + 1 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm là $(x; y) = (0; 1), (1; 2), (-1; 2)$

$$\text{Bài 6: Giải hệ phương trình } \begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \quad (1) \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $xy > 0$

+ Giải (1): Đặt $t = \log_2(xy) \Rightarrow xy = 2^t$. Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$9^t - 3 = 2(2^t)^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{2t} - 3 = 2 \cdot 3^t \Leftrightarrow 3^{2t} - 2 \cdot 3^t - 3 = 0 \quad (3)$$

Đặt $u = 3^t, u > 0$, khi đó phương trình (3) có dạng:

$$u^2 - 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1(1) \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^t = 3 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow xy = 2$$

+ Giải (2): $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 2xy + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 3 = 0 \quad (4)$$

Đặt $v = x + y$, khi đó phương trình (4) có dạng:

$$v^2 + 2v - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Với $x + y = 1$ ta được: $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - X + 2 = 0$ vô nghiệm

Với $x + y = -3$, ta được: $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1;2) hoặc (2;1)

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$

Giải:

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x^2 + 1 + xy = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x + y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \end{cases}$$

+ Với $x = 0$ thay vào (1) ta được: $2 + 2^{y-2} = 3.2^y \Leftrightarrow 8 + 2^y = 12.2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2 \frac{8}{11}$

+ Với $\begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1 - 3x \end{cases}$ thay $y = 1 - 3x$ vào (1) ta được: $2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3.2$ (3)

Đặt $t = 2^{3x+1}$ vì $t \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{4}$

$$(3) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - \sqrt{8} \\ t = 3 + \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 3 + \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} [\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1] \Rightarrow y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8})$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2 \frac{8}{11} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1] \\ y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8}) \end{cases}$

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 7xy + 6y^2 = 0 & (1) \\ 3^{x+2y+1} - 3^{4y+x+1} + 3^{3y+x} = 0 & (2) \end{cases}$
--

Giải:

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases}$

TH 1: Với $x = -2y$ thế vào (2) $\Rightarrow 3^{2y+1} - 3^{4y+1} + 3^{3y-2y} = 0$ (3)

Đặt: $t = 3^y > 0$ ta được

$$(3) \Leftrightarrow 3t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-\sqrt{37}}{6} \\ t = \frac{1+\sqrt{37}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow y = \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right) \Rightarrow x = -2\log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right)$$

TH 2: Với $x = -\frac{3}{2}y$ thế vào (2) $\Rightarrow 3 \cdot 3^{\frac{y}{2}} - 3 \cdot 3^{\frac{5y}{2}} + 3^{\frac{3y}{2}} = 0$ (4)

Đặt: $u = 3^{\frac{y}{2}} > 0$ ta được

$$(4) \Leftrightarrow 3u - 3u^5 + u^3 = 0 \Leftrightarrow 3u^4 - u^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow u^2 = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3^y = \frac{1+\sqrt{37}}{6} \Leftrightarrow y = \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right)$$

Vậy nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = -2\log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right) \\ y = \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right) \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right) \\ y = \log_3 \left(\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right) \end{cases}$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. Phương pháp:

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2: Từ hệ ban đầu chúng ta xác định được 1 phương trình hệ quả theo 1 ẩn hoặc cả 2 ẩn, giải phương trình này bằng phương pháp hàm số đã biết

Bước 3: Giải hệ mới nhận được

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1+4^{x-y}).5^{1-x+y} = 1+3^{x-y+2} & (1) \\ x^2 - 3y\sqrt{y - \frac{1}{x}} = 1-2y & (2) \end{cases}.$$

Giải:

Xét (1): Đặt $t = x - y$. $(1) \Leftrightarrow 5 \left[\left(\frac{1}{5} \right)^t + \left(\frac{4}{5} \right)^t \right] = 1 + 9.3^t$.

- Với $t > 0$, VT < 10, VP > 10.
- Với $t < 0$, VT > 10, VP < 10.

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 0$ hay $x = y$.

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được: $(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 - 3x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0$.

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho $x = 0$ ta được:

$(2) \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - 3\sqrt{x - \frac{1}{x}} + 2 = 0$. Đặt $y = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ ($y \geq 0$)

Ta được phương trình: $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Từ đó ta tìm được x .

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases}$.

Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u \end{cases}$

$\Rightarrow 3^u + u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v + v + \sqrt{v^2 + 1} \Leftrightarrow f(u) = f(v)$, với $f(t) = 3^t + t + \sqrt{t^2 + 1}$

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến

$\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u \Leftrightarrow u - \log_3(u + \sqrt{u^2 + 1}) = 0$ (2)

Xét hàm số: $g(u) = u - \log_3(u + \sqrt{u^2 + 1}) \Rightarrow g'(u) > 0 \Rightarrow g(u)$ đồng biến

Mà $g(0) = 0 \Rightarrow u = 0$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy $x = y = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ PT.

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2 + 1} + xy = \sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$$

Giải:

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x^2+1+xy = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x+y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x=0 \\ 3x+y-1=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y=1-3x \end{cases} \end{cases}$$

Với $x=0$ thay vào (1): $2+2^{y-2} = 3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y = 12.2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2 \frac{8}{11}$

- Với $\begin{cases} x \geq -1 \\ y=1-3x \end{cases}$ thay $y=1-3x$ vào (1) ta được: $2^{3x+1} + 2^{-3x-1} = 3.2$ (3)

Đặt $t = 2^{3x+1}$. Vì $x \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{4}$

$$(3) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - \sqrt{8} \text{ (loại)} \\ t = 3 + \sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1] \\ y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8}) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y = \log_2 \frac{8}{11} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{1}{3} [\log_2 (3 + \sqrt{8}) - 1] \\ y = 2 - \log_2 (3 + \sqrt{8}) \end{cases}$

Bài 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ x-2y = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ (2y-x)[(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y-x = 0 \end{cases}$$

(do $(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \text{ (1)} \\ 2y = x \text{ (2)} \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{cases}$$

Với $x=0$ thay vào (2) ta được $y=0$

Với $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$ thay vào (2) ta được $y = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$, $y = \frac{1}{2} \log_{\frac{3}{2}} 4$

Bài 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} e^{x-y} + e^{x+y} = 2(x+1) \\ e^{x+y} = x - y + 1 \end{cases}$$

Giải:

Đặt
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = x + y + 1 \\ e^{x+y} = x - y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^v = u + 1 \\ e^u = v + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^v = u + 1 \\ e^u - e^v = v - u \end{cases} \quad (1)$

- Nếu $u > v$ hoặc $u < v$ thì (2) vô nghiệm

- Nên (2) $\Leftrightarrow u = v$. Thế vào (1) ta có $e^u = u + 1$ (3).

Xét $f(u) = e^u - u - 1$, $f'(u) = e^u - 1$

Từ BBT của $f(u)$ ta có $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Do đó (3) có 1 nghiệm $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Bài 6: (ĐHDB - 2004) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y. \end{cases}$$

Giải:

Xét PT thứ nhất: $(x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

TH1: Thay $y = x$ vào PT thứ hai $2^{2x} - 2^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x = x - 1 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1$

TH2: Thay $y = 1 - x$ vào PT thứ hai $2^{x-1} + 2x - 3 = 0$

Hàm số $f(x) = 2^{x-1} + 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 0$ nên $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm là $(x; y) = (-1; -1) \vee (1; 0)$

Bài 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x(1) \\ x^2 + xy + y^2 = 12(2) \end{cases}$$

Giải:

Xét phương trình (1) dưới dạng: $3^x + x = 3^y + y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (3) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(2; 2) \vee (-2; -2)$

Bài 8: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 2^y + 2y = 3 + x \end{cases}$$

Giải:

Biến đổi tương đương hệ về dạng:
$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 3 + x = 2^y + 2y \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3x + 3 = 2^y + 3y + 3 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3t + 3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó hệ thành:
$$\begin{cases} x = y \\ 2^x + 2x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2^x = 3 - x(2) \end{cases} \quad (II)$$

+ Giải (2): Ta đoán được $x = 1$ vì $2^1 = 3 - 1$. Vế trái là một hàm đồng biến còn vế phải là hàm số nghịch biến do vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình này. Khi đó hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = 1$.

Bài 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Giải:

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2^x - 2^y = (y - x)(x^2 + y^2 + xy) \Leftrightarrow 2^x - 2^y = y^3 - x^3$$

$$\Leftrightarrow 2^x - x^3 = 2^y - y^3 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (3) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm $(x; y) = (1; 1) \vee (-1; -1)$

Bài 10: Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{\frac{8y^2+1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) & (1) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $x, y > 0$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow 2^{x^2+1} + 3\sqrt{x} = 2^{(4y)^2+1} + 3\sqrt{4y} \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = 2^{t^2+1} + 3\sqrt{t}$ ($t > 0$) thì (3): $f(x) = f(4y)$

Ta có $f'(t) = 2t \cdot 2^{t^2+1} \ln 2 + \frac{2}{2\sqrt{t}} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$

Nếu $\begin{cases} f(x) = f(4y) \\ x, y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y \quad (4)$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 2^{(x+y)^2+1} + 3\sqrt{x+y} = 7$

Đặt : $u = x + y$ thì $2^{u^2+1} + 3\sqrt{u} = 7 \quad (5)$

Hàm $f(u) = 2^{u^2+1} + 3\sqrt{u}$ là hàm tăng

Lại có: $f(1) = 7$ nên $u = 1$ là nghiệm duy nhất của (5) $\Rightarrow x + y = 1 \quad (6)$

Từ (4) & (6) $\Rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$

Bài 11: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^{z-x} = x \end{cases} \quad (I)$

Giải:

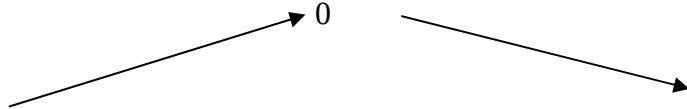
Nhận xét:

Hệ có nghiệm $x = y = z = 0$ ta cm hệ có nghiệm duy nhất. thật vậy:

Nếu $x = 0$ thì (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-y} = y \\ e^{-y} - e^{y-z} = z \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Xét hàm số : $f(y) = e^{-y} + y - 1, f'(y) = -e^{-y} + 1, f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Bảng biến thiên

Y	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(y)$	+	0	-
$f(y)$			

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có nghiệm duy nhất $y = 0$ thế vào (2) ta được $1 - e^z = z$.

Tương tự với $z = 0$

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow y, z \neq 0$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^x \cdot e^{-y} = y \\ e^y - e^y \cdot e^{-z} = z \\ e^z - e^z \cdot e^{-x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{ye^x}{e^y - 1} = f(y) \\ e^y = \frac{ze^y}{e^z - 1} = f(z) \\ e^z = \frac{xe^z}{e^x - 1} = f(x) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{te^t}{e^t - 1}$, $f'(t) = \frac{e^t(e^t - t - 1)}{(e^t - 1)^2}$

Với $\forall t \neq 0$, ta cm $e^t - t - 1 > 0$

$$f(t) = e^t - t - 1; f'(t) = e^t - 1$$

Suy ra $f'(t) > 0 \forall t \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

Bảng biến thiên:

T	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	+		+
$f(t)$	1^{∞} 		1^{∞} 

Từ đó suy ra:

$$\text{Nếu } x > y \text{ thì } f(x) > f(y) \Rightarrow e^x > e^y \Rightarrow x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y > x$$

Như vậy $x > y > y > x > x$ vô lý

Khi đó hệ trở thành $e^x - 1 = x > 0$ nên pt vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

Nhiều bài toán bằng cách đánh giá tính tế dựa trên các:

- + Tam thức bậc hai
- + Tính chất hàm số mũ
- + Bất đẳng thức
- +.....

Ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của hệ hoặc biến đổi hệ về dạng đơn giản hơn.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |2^x - 3^{y^2-1}| + 2^x = 2 + 3^{y^2-1} \\ 2^x \cdot 3^{y^2-1} = 1 \end{cases}$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = y^2 - 1 \end{cases}$ điều kiện $u > 0$ và $v \geq \frac{1}{3}$.

Hệ có dạng:
$$\begin{cases} |u - v| + u + v = 2(1) \\ uv = 1(2) \end{cases} \quad (I)$$

Biến đổi (1) về dạng: $\Leftrightarrow 4 = (u - v)^2 + (u + v)^2 + 2|u^2 - v^2| = 2(u^2 + v^2) + 2|u^2 - v^2| \geq 2(u^2 + v^2) \geq 4uv = 4$

Khi đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2|u^2 - v^2| = 0 \\ u = v \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 3^{y^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm $(x; y) = (0; 1) \vee (0; -1)$

CHỦ ĐỀ 4: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. Phương pháp:

Dựa vào các phép toán biến đổi tương đương cho các bất đẳng thức trong hệ bất phương trình, ta có thể tìm được nghiệm của hệ. Phép toán thường được sử dụng là: $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \xrightarrow{+} A + C > B + D$

Việc lựa chọn phương pháp biến đổi tương đương để giải hệ bất phương trình mũ thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ có nghĩa

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi tương đương chuyển hệ về 1 bất phương trình đại số đã biết cách giải.

Bước 3: Kiểm tra tính hợp lệ cho nghiệm tìm được, từ đó đưa ra lời kết luận cho hệ.

Với hệ bất phương trình mũ chứa tham số thường được thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của hệ có nghĩa

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi tương đương (phương pháp thế được sử dụng khá nhiều trong phép biến đổi tương đương) để nhận được từ hệ 1 bất phương trình 1 ẩn chưa tham số.

Bước 3: Giải và biện luận theo tham số bất phương trình nhận được.

Bước 4: Kiểm tra tính hợp lệ cho nghiệm tìm được, từ đó đưa ra kết luận cho hệ.

Chú ý: Đối với hệ bất phương trình mũ 1 ẩn thường được giải từng bất phương trình của hệ, rồi kết hợp các tập nghiệm tìm được để đưa ra kết luận về nghiệm cho hệ bất phương trình.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2^{2x^2+1} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 2^{2x+2} > 0 \\ 2x-5 < \sqrt{-x^2+4x-3} \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

Giải (1): $2 \cdot 2^{2x^2} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 4 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{x^2-x} - 9 + 4 \cdot 2^{x-x^2} = 0$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ điều kiện $t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Khi đó phương trình có dạng:

$$2t + \frac{4}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Giải (2): } \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -x^2+4x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < \frac{5}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{14}{5} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được nghiệm của hệ là $x = 2$.

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. Phương pháp:

Việc lựa chọn đặt ẩn phụ thích hợp cho hệ phương trình mũ, ta có thể chuyển hệ về các hệ đại số đã biết cách giải. Cụ thể ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức của hệ có nghĩa.

Bước 2: Lựa chọn ẩn phụ cho hệ và điều kiện cho các ẩn phụ.

Bước 3: Giải hệ nhận được từ đó suy ra nghiệm $x; y$

Bước 4: Kiểm tra tính hợp lệ cho nghiệm tìm được, từ đó đưa ra lời kết luận cho hệ.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2^{2x}-2} = 2^y - 1 \\ \log_3(2^{2x} - 2^{2y})^2 \leq 0 \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases}$; $u, v > 0$. Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{u^2 - 2} = v - 1 \\ \log_3(u^2 - v^2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u^2 - 2} = v - 1 \\ \log_3|u^2 - v^2| \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u^2 - 2} = v - 1(1) \\ u \neq v; |u^2 - v^2| \leq 1(2) \end{cases}$$

Giải (1) ta biến đổi: $\begin{cases} v - 1 \geq 0 \\ u^2 - 2 = (v - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 1 \\ u^2 - v^2 = -2v + 3(3) \end{cases}$

Giải (2) bằng cách thay (3) vào (2) ta được:

$$\begin{cases} -2v + 3 \neq 0 \\ |-2v + 3| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq \frac{3}{2} \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y \neq \frac{3}{2} \\ 1 \leq 2^y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \log_2 \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là các cặp số (x;y) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y \neq \log_2 \frac{3}{2}; 1 \leq y \leq 2 \\ x = \pm \sqrt{(y - 1)^2 + 2} \end{cases}$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

I. Phương pháp:

Trong phần này chúng ta sử dụng phương pháp cần và đủ đã biết để giải các hệ bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} + 2^{y+1} \leq m - 1 \\ 2^{2y} + 2^{2x} + 2^{x+1} \leq m - 1 \end{cases}$

Giải:

Trước hết cần $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Đặt: $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases}$, điều kiện $u, v > 0$. Hệ được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + 2v + 1 \leq m \\ u^2 + v^2 + 2u + 1 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (v + 1)^2 \leq m(1) \\ v^2 + (u + 1)^2 \leq m(2) \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm $(u_0; v_0)$ suy ra $(u_0; v_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $u_0 = v_0$.

Khi đó: $u_0^2 + (u_0 + 1)^2 \leq m \Leftrightarrow 2u_0^2 + 2u_0 - m + 1 \leq 0 \quad (1)$

Ta cần (1) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $m = \frac{1}{2}$

Điều kiện đủ: Với $m = \frac{1}{2}$ hệ có dạng:
$$\begin{cases} u^2 + (v+1)^2 \leq \frac{1}{2} \\ v^2 + (u+1)^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (II)$$

$$\Rightarrow u^2 + (v+1)^2 + (u+1)^2 + v^2 \leq 1 \Leftrightarrow 2u^2 + 2u + 2v^2 + 2v + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(v\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow u = v = -\frac{1}{2}$$

Nhận xét rằng $u = v = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ (II) suy ra $x = y = -1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \frac{1}{2}$

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

Nhiều bất phương trình đánh giá tính tế dựa trên:

- + Tam thức bậc 2
- + Các bất đẳng thức cơ bản như: Côsi, Bunhiacôpxki.....
- + Tính chất trị tuyệt đối

.....

Ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của nó.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2^{x+y}} + \sqrt{1-2^y} \leq \sqrt{2^y} \quad (1) \\ 2\sqrt{2^{x+y}-2^y} + \sqrt{2^y} = -1 \quad (2) \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} 1-2^y \geq 0 \\ 2^{x+y}-2^y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y \leq 1 \\ 2^y(2^x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y \leq 1 \\ 2^x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Giải (1):
$$\Leftrightarrow \sqrt{2^x} + \sqrt{\frac{1-2^y}{2^y}} \leq 1 \xleftarrow{(*)} \begin{cases} 2^x = 1 \\ 1-2^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) thấy thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \quad (1) \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \quad (2) \end{cases}$$

Giải:

Giải (1) ta được:
$$5^{-(y+4)} = 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} \geq 3^{-\log_3 5} = 5^{-1} \Rightarrow -(y+4) \geq -1 \Leftrightarrow y \leq -3 \quad (3)$$

Giải (2) với $y \leq -3$ ta được: $-4y + (y-1) + (y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $y = -3$, khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = -3 \\ x = 3; y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(-1; -3)$ hoặc $(3; -3)$.

Bài tập tổng hợp tự giải:

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + xy + \frac{3}{2} = 2^y \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} (x^4 + y)3^{y-x^4} = 1 \\ 8(x^4 + y) - 6^{x^4-y} = 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^x + (1 + \sqrt{2})^y = 4 \\ (3 + 2\sqrt{2})^y + (1 + \sqrt{2})^x = 4 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{1}{y}} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ \frac{x+3y}{x} = \frac{2x}{y} - 4 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} x + y = 5^{\frac{x-y}{3}} \\ 5^{\frac{x-y}{3}} = 5 \cdot 3^{x-y-3} \end{cases}$$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -19 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5\left(\frac{y-x}{3}\right)} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau

a.
$$\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5 \cdot 6^x + 4 \cdot 2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3} + 1 = 6\sqrt{2y^2-2y+1} + 8y \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ 10\sqrt{x^6+1} = 3(y^4+2) \\ \pi < x, y < \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{h. } \begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases}$$

$$\text{i. } \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$$

$$\text{k. } \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt[3]{3}}(x-y) = 3 \end{cases}$$

$$\text{l. } \begin{cases} x + 3^{y-1} = 2 \\ 3x + 9^y = 18 \end{cases}$$

$$\text{m. } \begin{cases} y = 1 + \log_4 x \\ x^y = 4096 \end{cases}$$

Đs:

$$\text{h. } x = y = -1 \vee x = 1, y = 0$$

$$\text{i. } (x; y) = (-2; 7) \quad \text{k. } (5; 2) \quad \text{l. } \left(\frac{2}{3}; \log_3 4\right) \quad \text{m. } (16; 3), \left(\frac{1}{64}; -2\right)$$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ

Bài 1: Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải:

Hệ có tính chẵn đối với ẩn x . do đó nếu gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ thì $(-x_0; y_0)$ cũng là một nghiệm của hệ.

Để nghiệm của hệ duy nhất thì ta cần có: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$$\text{Thế } x_0 \text{ vào hệ ta được: } \begin{cases} 1 = y_0 + a \\ y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - y_0 \\ y_0 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

$$\text{Với } a = 0, \text{ ta có hệ: } \begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Từ đẳng thức: } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 2^{|x|} + |x| - x^2 = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|) \geq 1 \text{ vì } \begin{cases} |x| \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|(1 - |x|) \geq 0 \\ |y| \leq 1 \Rightarrow y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra pt (1) có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ nghiệm này là duy nhất nên giá trị thỏa đề.}$$

Với $a = 2$ ta có hệ :
$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Nhận thấy hệ này có hai nghiệm $(1;0);(-1;0)$ nên $a = 2$ không thỏa

Tương tự:

Bài 1: Giải và biện luận theo k hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_x(3x + ky) = 2 \\ \log_y(3y + kx) = 2 \end{cases}$$

Bài 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} a^x + a^y = \frac{1}{2} \\ x + y = b^2 - b + 1 \end{cases}$$
, tìm a để hệ có nghiệm với mọi $b \in [0,1]$

Bài 3: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$
,

tìm a để hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị b .

Bài 4: Tìm a để hệ bất phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \leq 0 \\ (x^2 - 2x + 3)^{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)} > 1 \end{cases}$$

Bài 5: Giải và biện luận theo tham số a :
$$\begin{cases} x + y = 1 - a \\ 2a^2 \cdot 4^{x+y-xy} = 2 \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BÀI TOÁN 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG

I. Phương pháp:

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa

Bước 2: Sử dụng các phép thế để nhận được từ hệ 1 phương trình theo ẩn x hoặc y (đôi khi có thể là theo cả 2 ẩn x, y)

Bước 3: Giải phương trình nhận được bằng các phương pháp đã biết đối với phương trình chứa căn thức

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x+1})3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} (1) \\ y + \log_3 x = 1 (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 4 \\ x > 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta được: $y = 1 - \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = 3^{1-\log_3 x} = \frac{3}{3^{\log_3 x}} = \frac{3}{x}$ (3)

Thế (3) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1}-1)\frac{3}{x} &= \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x}+1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4-x} &= x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=0 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm (3;0).

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x+y) - \log_3(2x-y) = 1 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x+y > 0 \\ 2x-y > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \log_2(4x^2 - y^2) &= \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(2x+y) + \log_2(2x-y) = 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x+y) &= 1 - \log_2(2x-y) \end{aligned}$$

Thế vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned} 1 - \log_2(2x-y) - \log_3 2 \cdot \log_2(2x-y) &= 1 \Leftrightarrow (1 + \log_3 2) \log_2(2x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x-y) &= 0 \Leftrightarrow 2x-y=1 \end{aligned}$$

Vậy ta được hệ mới:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ thoả mãn điều kiện } (*)$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm.

Bài 3: (ĐH – A 2009) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2+y^2-xy} = 81 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $xy > 0$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2+y^2-xy} = 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Bài 4: (ĐH – B 2005) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3. \end{cases}$$

Giải:

Với điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}$

Ta có hệ tương đương
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ \log_3(3x) - \log_3 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ \log_3\left(\frac{3x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \end{cases}$$

Xét $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$ ($1 \leq x \leq 2$) ta có

$$x-1+2-x+2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$$

Nghiệm của hệ là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Bài 5: (ĐH – A 2004) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $y > 0, y > x$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\log_4(y-x) + \log_4 y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \frac{y}{y-x} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{y-x} = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{3} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{3} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -4 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Bài 6: (ĐHDB - 2002) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \log_4 x \geq 0 \\ \log_4 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Hệ phương trình } &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - 3 \\ \log_4 x = \log_2 y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - 3 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - 3 \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 7: (ĐHDB - 2002) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_x (x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y (y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3 \end{cases}$

Giải:

Điều kiện $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \log_x (x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y (y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 3x - 5y = x^3 \\ y^3 + 2y^2 - 3y - 5x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5y = 0 \\ 2y^2 - 3y - 5x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - y^2) - 3(x - y) - 5(y - x) = 0 \\ 4(x^2 + y^2) - 3(x + y) - 5(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y + 1) = 0 \\ 4(x^2 + y^2) - 8(x + y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 8x^2 - 16x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 - x \\ 8x^2 + 8x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 8: (ĐH - D 2010) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x - 2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$
--

Giải:

Điều kiện $x > 2, y > 0$

$$\text{Hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 & (1) \\ 2\log_2(x - 2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow (x - 2)^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$\text{Với } y = x - 2 \quad (1) \Rightarrow x^2 - 4x + x - 2 + 2 = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 2 - x \quad (1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 - x + 2 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 1 \text{ hoặc } x = 4; y = -2$$

Bài 9: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8 (\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$$

Giải :

Điều kiện: $x+y > 0, x-y > 0$

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8 (2 + \sqrt{x-y}) \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ta có hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Thế (1) vào (2) ta có:}$$

$$\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0.$$

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases} uv = 0 \\ u+v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0 \text{ (vì } u > v \text{)}. \text{ Từ đó ta có: } x = 2; y = 2. (T/m)$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (2; 2)$

Bài 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \\ x^2 + y^4 = 16 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $x > 0, y > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y^2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 (x.y^2) = \log_2 2^3 \Leftrightarrow x.y^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{y^2}$$

Thay vào (2) ta được

$$\frac{64}{y^4} + y^4 = 16 \Leftrightarrow y^8 - 16y^4 + 64 = 0 \Leftrightarrow y^4 = 8 \Rightarrow y = \sqrt[4]{8} \text{ (vì } y > 0 \text{)}$$

$$\text{Với } y = \sqrt[4]{8} \Rightarrow x = \sqrt{8}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt[4]{8} = \sqrt{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y).3^{y-x} = \frac{5}{27} \\ 3.\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $x + y > 0$

$$\begin{aligned} \text{Hệ đã cho} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) = \frac{5}{27} 3^{x-y} \\ (x+y)^3 = 5^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\frac{x-y}{3}} = \frac{5}{27} 3^{x-y} \\ (x+y)^3 = 5^{x-y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\frac{x-y-3}{3}} = 3^{x-y-3} \\ (x+y)^3 = 5^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ (x+y)^3 = 5^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ (2x-3)^3 = 125 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ 2x-3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện} \end{aligned}$$

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2009^{y^2-x^2} = \frac{x^2+2010}{y^2+2010} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $x > 0, y > 0$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2^{2\log_3 xy} - 2^{\log_3 xy} - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 xy = 1 \Leftrightarrow xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \\ (2) &\Leftrightarrow \log_4(4x^2 + 4y^2) = \log_4(2x^2 + 6xy) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 9 \end{aligned}$$

Giải hệ (1), (2) ta được nghiệm của hệ: $((x; y) = (\sqrt{3}; \sqrt{3}) \vee (\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}))$

Bài 13: (ĐH – B 2010) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Hệ phương trình} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x+1}{3} \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x+1}{3} \\ 3(4^x + 2^x) = (2^x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x+1}{3} \\ 2 \cdot 4^x + 2^x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x+1}{3} \\ (2^x+1)(2^x - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x+1}{3} \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 14: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \log_x(6x+4y) = 2 \\ \log_x(6y+4x) = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x, y \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = x^2 & (1) \\ 6y + 4x = y^2 & (2) \end{cases}$$

Hệ trở thành hệ đối xứng: $(1) - (2)$ ta được: $(x - y)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Với $x = y$ thế vào (1) $\Rightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy nghiệm hệ là: $x = y = 10$

$$\text{Với } y = 2 - x \text{ thế vào (1)} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = -2 & (\text{loại}) \\ x = -2 & (\text{loại}) \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(10; 10)$

BÀI TOÁN 2: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. Phương pháp:

Phương pháp được sử dụng nhiều nhất để giải các hệ lôgarit là việc sử dụng các ẩn phụ. Tùy theo dạng của hệ mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức của hệ có nghĩa.

Bước 2: Lựa chọn ẩn phụ để biến đổi hệ ban đầu về các hệ đại số đã biết cách giải (hệ đối xứng loại I, loại II và hệ đẳng cấp bậc hai)

Bước 3: Giải hệ nhận được

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ ban đầu.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$
--

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} -xy - 2x + y + 2 > 0, x^2 - 2x + 1 > 0, y + 5 > 0, x + 4 > 0 \\ 0 < 1 - x \neq 1, 0 < 2 + y \neq 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)] + 2\log_{2+y}(1-x) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2) + \log_{2+y}(1-x) - 2 = 0 & (1) \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 & (2). \end{cases}$$

Đặt $\log_{2+y}(1-x) = t$ thì (1) trở thành: $t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có: $1 - x = y + 2 \Leftrightarrow y = -x - 1$ (3). Thế vào (2) ta có:

$$\log_{1-x}(-x + 4) - \log_{1-x}(x + 4) = 1 \Leftrightarrow \log_{1-x} \frac{-x + 4}{x + 4} = 1 \Leftrightarrow \frac{-x + 4}{x + 4} = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra: } \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

+ Kiểm tra thấy chỉ có $x = -2, y = 1$ thỏa mãn điều kiện trên.
 Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = -2, y = 1$.

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4^{\frac{x+y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x-y > 0 \\ x+y > 0 \\ x, y \neq 0 \end{cases}$$

Biến đổi hệ phương trình về dạng:
$$\begin{cases} 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 5 \\ \log_3(x^2 - y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 5 \quad (1) \\ x^2 - y^2 = 3 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (1): Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{t}$. Khi đó (1) có dạng:

$$2\left(t + \frac{1}{t}\right) = 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2x \end{cases}$$

+ Với $x = 2y \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 4y^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

+ Với $y = 2x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 3$ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm (2;1)

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^{\log_2 x} + \log_2^2\left(\frac{x}{2}\right) = y^2 \\ \log_2(xy - x + y) = 2\log_2 x \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện
$$\begin{cases} x > 0 \\ xy - x + y > 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $(x+1)(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ thế vào phương trình đầu ta có:

$$2x^{\log_2 x} + \log_2^2\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 \quad (1).$$

Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow 2 = x^t$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2^{t^2+1} + (t-1)^2 = 2^{2t} \Leftrightarrow 2^{t^2+1} + t^2 + 1 = 2^{2t} + 2t \quad (*)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên (*) tương đương $t^2 + 1 = 2t \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (2; 2)$

Bài 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_{x+y}(3x+y) + \log_{3x+y}(x^2 + 2xy + y^2) = 3 \\ 4^{x+y} + 2.4^{\frac{x}{x+y}} = 20 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} 0 < x+y \neq 1 \\ 0 < 3x+y \neq 1 \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \log_{x+y}(3x+y) + \log_{3x+y}(x+y)^2 = 3 \Leftrightarrow \log_{x+y}(3x+y) + 2\log_{3x+y}(x+y) = 3 \quad (3)$

Đặt $t = \log_{x+y}(3x+y)$

Phương trình (3) trở thành $t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- Với $t = 1$ ta có $\log_{x+y}(3x+y) = 1 \Leftrightarrow 3x+y = x+y \Leftrightarrow x = 0$ thay vào (2) ta được

$4^y + 2.4^0 = 20 \Leftrightarrow 4^y = 18 \Leftrightarrow y = \log_4 18$ (thỏa mãn)

- Với $t = 2$ ta có $\log_{x+y}(3x+y) = 2 \Leftrightarrow 3x+y = (x+y)^2$ (4) thay vào (2) ta được

$(2) \Leftrightarrow 2^{2(x+y)} + 2^{\frac{2x}{x+y}+1} = 20 \Leftrightarrow 2^{2(x+y)} + 2^{\frac{3x+y}{x+y}} = 20 \quad (5)$

+ Thay (4) vào (5) ta được $2^{2(x+y)} + 2^{\frac{(x+y)^2}{x+y}} = 20 \Leftrightarrow 2^{2(x+y)} + 2^{x+y} = 20 \quad (6)$

Đặt $u = 2^{(x+y)}$ phương trình (6) trở thành $u^2 + u - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -5(\text{loại}) \\ u = 4 \end{cases}$

Với $u = 4$ ta có $2^{x+y} = 4 \Leftrightarrow x+y = 2 \Rightarrow 3x+y = 4$

Ta có hệ $\begin{cases} x+y = 2 \\ 3x+y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; \log_4 18); (1; 1)$

Bài 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_3 y - 2^x = 4 \\ 2^x \cdot \log_3 y = \log_3 y^2 + 2^{x+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Giải:

Điều kiện: $y > 0$.

Đặt $a = \log_3 y; b = 2^x (b > 0)$

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 2a - b = 4 \\ ab = 2a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 4 \\ 2a^2 - 10a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \log_3 y = 4 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 81 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 81)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2.\log_3 y = \log^2_{\frac{1}{2}} x - 1 \\ \log_2 y = (\log_2 x - 1).\log_2 3 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2.\log_3 y = (-\log_2 x)^2 - 1 \\ \frac{\log_2 y}{\log_2 3} = \log_2 x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\log_3 y = \log^2_2 x - 1 \\ \log_3 y = \log_2 x - 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \log_2 x \\ b = \log_3 y \end{cases}$ khi đó HPT trở thành: $\begin{cases} 2.b = a^2 - 1 \\ b = a - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.(a-1) = a^2 - 1 \\ b = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ b = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_3 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 1)$

Bài 7: (ĐHCT – 2001) Xác định mọi giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (1) \end{cases}$

$\begin{cases} \log_2(x^2 - 2x + 5) = m \log_{x^2 - 2x + 5} 2 = 5 & (2) \end{cases}$

Giải:

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2\log_3(x+1) - 2\log_3(x-1) > 2\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3(x+1) > \log_3(x-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2(x-1) \\ 2(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Đặt $t = \log_2(x^2 - 2x + 5)$ thì (2) trở thành: $t - \frac{m}{t} = 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t - m = 0$

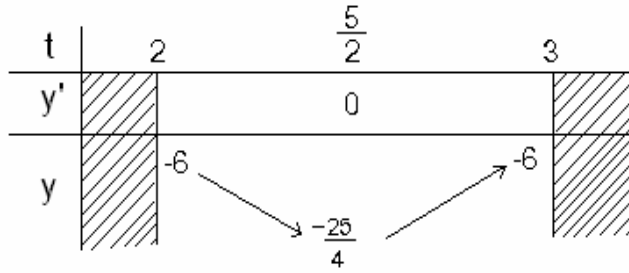
Ta có: $t' = \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)\ln 2} > 0, \forall x \in (1,3) \Rightarrow t = \log_2(x^2 - 2x + 5) = f(x)$ đồng biến trên $(1;3)$.

Lại do: $t = f(x)$ đồng biến trên $(1, 3)$ nên $1 < x < 3 \Leftrightarrow 2 < t < 3$

Vậy hệ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < t < 3 \\ t^2 - 5t = m \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Xem hàm số: $y = f(t) = t^2 - 5t$ trên $(2, 3)$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có đáp số $m \in \left(-\frac{25}{4}; -6\right)$

Bài 8: (ĐHTS – 2001) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{3-x}(6-3y+xy-2x) + \log_{2-y}(x^2-6x+9) = 6 \\ \log_{3-x}(5-y) - \log_{2-y}(x+2) = 1 \end{cases}$$

Giải:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{3-x}(6-3y+xy-2x) + \log_{2-y}(x^2-6x+9) = 6 & (1) \\ \log_{3-x}(5-y) - \log_{2-y}(x+2) = 1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} 0 < 3-x \neq 1 \\ 0 < 2-y \neq 1 \\ 6-3y+xy-2x > 0 \\ x^2-6x+9 > 0 \\ 5-y > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ x \neq 2 \\ y < 2 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\log_{3-x}(2-y)(3-x) + \log_{2-y}(3-x)^2 = 6 \Leftrightarrow 2[\log_{3-x}(2-y) + 1] + 2\log_{2-y}(3-x) = 6$
 (vì $2-y > 0$ và $3-x > 0$)

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(2-y) + \log_{2-y}(3-x) = 2 \quad (*)$$

Đặt $t = \log_{3-x}(2-y)$ thì (*) trở thành: $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$ (vì $t = 0$ không là nghiệm)

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow \log_{3-x}(2-y) = 1 \Leftrightarrow 3-x = 2-y \Leftrightarrow y = x-1$

Thế $y = x-1$ vào (2) ta được:

$$\log_{3-x}(6-x) - \log_{3-x}(x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(6-x) = \log_{3-x}(x+2) + \log_{3-x}(3-x) \Leftrightarrow \log_{3-x}(6-x) = \log_{3-x}(x+2)(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 6-x = (x+2)(3-x) \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5(\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow y = -1$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 4^{-y} \cdot \log_2 x = 4 \\ \log_2 x + 2^{-2y} = 4 \end{cases}$$

HD:

Đặt: $u = 2^{-2y} > 0, v = \log_2 x$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 2 \longrightarrow x = 4; y = -\frac{1}{2}$

BÀI TOÁN 3: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho 2 biểu thức của hệ có nghĩa

Bước 2: Từ hệ ban đầu chúng ta xác định được 1 phương trình hệ quả theo 1 ẩn hoặc theo cả 2 ẩn, giải phương trình này bằng phương pháp hàm số đã biết.

Bước 3: Giải hệ mới nhận được.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1 + \log_3 y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1 + \log_3 x \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $x, y > 0$.

Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} \log_2 (x+3) = 2(1 + \log_3 y) \\ \log_2 (y+3) = 2(1 + \log_3 x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x+3) = 2(1 + \log_3 y) \\ 2(1 + \log_3 x) = \log_2 (y+3) \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \log_2 (x+3) + 2\log_3 x = \log_2 (y+3) + 2\log_3 y \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 (t+3) + 2\log_3 t$

Miền xác định $D = (0; +\infty)$.

Đạo hàm $f'(t) = \frac{1}{(t+3)\ln 2} + \frac{2}{t \cdot \ln 3} > 0, \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy phương trình (1) được viết dưới dạng: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Khi đó hệ (I) trở thành:
$$\begin{cases} x = y \\ \log_2 (x+3) = 2(1 + \log_3 x) \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Giải (2): } \Leftrightarrow x+3 = 2^{2(1+\log_3 x)} \Leftrightarrow x+3 = 4 \cdot 2^{\log_3 x^2} \Leftrightarrow x+3 = 4 \cdot 2^{\log_3 2 \cdot \log_2 x^2}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 4 \cdot (x^2)^{\log_3 2} \Leftrightarrow x+3 = 4 \cdot x^{\log_3 4} \Leftrightarrow x^{1-\log_3 4} + 3 \cdot x^{-\log_3 4} = 4 \quad (3)$$

Xét hàm số $g(x) = x^{1-\log_3 4} + 3 \cdot x^{-\log_3 4}$

Miền xác định $D = (0; +\infty)$

Đạo hàm: $g'(x) = (1 - \log_3 4) \cdot x^{-\log_3 4} - 3 \log_3 4 \cdot x^{-1-\log_3 4} < 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến

Vậy phương trình (3) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Nhận xét rằng nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình bởi khi đó:

$$1^{1-\log_3 4} + 3 \cdot 1^{-\log_3 4} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ đúng}$$

Khi đó hệ (II) trở thành: $\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1)$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x + 1) = y & (1) \\ y^2 + 3y + \ln(2y + 1) = x & (2) \end{cases}$

Giải:

Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}; y > -\frac{1}{2}$

Lấy (1) - (2) $\Rightarrow f(x) = f(y)$

Với $f(t) = t^2 + 4t + \ln(2t + 1) \quad (t > -\frac{1}{2}) \Rightarrow f$ đồng biến $\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow g(x) = x^2 + 4x + \ln(2x + 1) = 0$; $g(x)$ đồng biến

$\Rightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất. Thử lại thỏa mãn

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$

Bài 3: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} (2x+1)[\ln(x+1) - \ln x] = (2y+1)[\ln(y+1) - \ln y] & (1) \\ \sqrt{y-1} - 2\sqrt{(y+1)(x-1)} + m\sqrt{x+1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Đặt $f(x) = (2x+1)[\ln(x+1) - \ln x] = (2x+1) \ln \frac{x+1}{x}$

Gọi $x_1; x_2 \in [0; +\infty)$ với $x_1 > x_2$

Ta có: $\left. \begin{matrix} 2x_1 + 1 > 2x_2 + 1 > 0 \\ \ln \frac{x_1+1}{x_1} > \ln \frac{x_2+1}{x_2} > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) : f(x) \text{ là hàm số tăng}$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow x = y$

$$(2) \Rightarrow \sqrt{x-1} - 2\sqrt{(x-1)(x+1)} + m\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 0$$

$$\text{Đặt } X = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow 0 \leq X < 1$$

Vậy hệ có nghiệm khi phương trình: $X^2 - 2X + m = 0$ có nghiệm $0 \leq X < 1$

Đặt $f(X) = X^2 - 2X \Rightarrow f'(X) = 2X - 2$ suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 < m \leq 0$

Tương tự:

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} (2x-1)[\ln x + \ln(x-1)] - (2y+1)\ln[(y+1)y] = 0 & (1) \\ \sqrt{y-1} - 2\sqrt[4]{(y+1)(x-2)} + m\sqrt{x} = 0 & (2) \end{cases}$$

Đặt $x = t + 1$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} (2t+1)[\ln(t+1) + \ln t] = (2y+1)[\ln(y+1) + \ln y] & (1) \\ \sqrt{y-1} - 2\sqrt[4]{(y+1)(t-1)} + m\sqrt{t+1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $y \geq 1, t \geq 1$

Xét hàm số $f(x) = (2x+1)[\ln(x+1) + \ln t]$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Từ (1) $\Leftrightarrow f(t) = f(y) \Leftrightarrow t = y$

...bạn đọc giải tiếp $-1 < -m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m < 1$

Bài 4: (ĐHDB - 2006) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0. \end{cases}$

Giải:

Xét PT thứ nhất $\ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y$

Đặt $f(t) = \ln(1+t) - t$ ($t > -1$)

$$f'(t) = \frac{1}{t+1} - 1 = \frac{-t}{t+1}$$

- Nếu $-1 < t < 0$ thì $f'(t) > 0$, Nếu $t > 0$ thì $f'(t) < 0$

PT thành $f(x) = f(y)$

- Xét $x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10y$ hoặc $x = 2y$

Nếu $y = 0$ thì $x = 0$ thỏa hệ PT

Nếu $y > 0$ thì $x = 10y$ hay $x = 2y$ đều cho $x > 0, y > 0$

Nếu $-1 < y < 0$ thì $x = 10y$ hay $x = 2y$ đều cho $x < 0, y < 0$

Vậy $y > -1$ ($y \neq 0$) thì x, y cùng dấu và tính chất đơn điệu của hàm số trên các khoảng $(-1; 0), (0; +\infty)$ khi đó phương trình đầu $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

$$\text{Hệ đã cho thành } \begin{cases} y > -1, y \neq 0 \\ x = 10y \vee x = 2y \text{ vô nghiệm} \\ x = y \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất ($x = 0; y = 0$)

Bài 5: (ĐH - D 2006) CM với mỗi $a > 0$ hệ sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$

Giải:

Biến đổi
$$\begin{cases} e^{x+a} - e^x - \ln(1+x+a) + \ln(1+x) = 0 \\ y = x+a \end{cases}$$

Xét hàm số

$$f(x) = e^{x+a} - e^x - \ln(1+x+a) + \ln(1+x), x > -1$$

$$f'(x) = e^x(e^a - 1) + \frac{a}{(1+x)(1+x+a)} > 0 \text{ (vì } a > 0 \text{ và } x > -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, f(x) \text{ liên tục trên } (-1; +\infty).$$

Từ hai kết quả trên, $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 trên $(-1; +\infty)$

Do $f'(x) > 0, \forall x > -1$ nên $f(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm

Kết luận $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 và HPT có nghiệm duy nhất. ($x = x_0; y = x_0 + a$)

Bài 6: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2009^{y^2-x^2} = \frac{x^2+2010}{y^2+2010} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x+2y+6 > 0 \\ x+y+2 > 0 \end{cases}$$

Lấy loga cơ số 2009 của phương trình (1) ta được $x^2 + \log_{2009}(x^2+2010) = y^2 + \log_{2009}(y^2+2010)$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_{2009}(t+2010), t \geq 0$ hiển nhiên là một hàm đồng biến đồng biến

từ đó suy ra $\Rightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y, x = -y$

TH 1: Với $x = y$ thế vào (2) và ta được: $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6t$

Đưa pt về dạng $\left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t = 1$

Phương trình này có nghiệm duy nhất $t = 1$ (bạn đọc tự cm)

$$\Rightarrow x = y = 7$$

TH 2: Với $x = -y$ thế vào (2) được phương trình $\log_3(y+6) = 1 \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow x = 3$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: (ĐHDB – 2007) Chứng minh rằng hệ
$$\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} & (1) \\ e^x = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & (2) \end{cases}$$
 có đúng hai nghiệm $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

HD:

Từ $x > 0; y > 0 \Rightarrow e^x > 1; e^y > 1$

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow$ (3): $f(x) = f(y)$,

Với $f(t) = e^t - \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ ($t > 1$) $\Rightarrow f(t)$ đồng biến $\forall t > 1 \Rightarrow x = y$

$$\Rightarrow g(x) = e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 = 0 \Rightarrow g''(x) > 0$$

kết hợp tính liên tục của hàm số $\Rightarrow$ đpcm

BÀI TOÁN 4: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I. Phương pháp:

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: (ĐHTN – 1997) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy + 1) & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $x, y > 0$

Giải (1) ta có nhận xét sau:

- Nếu $x > y \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 y$, khi đó:
$$\begin{cases} VT_{(1)} > 0 \\ VP_{(1)} < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm}$$

- Nếu $x < y \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 y$, khi đó:
$$\begin{cases} VT_{(1)} < 0 \\ VP_{(1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm}$$

- Vậy $x = y$ là nghiệm của (1)

Khi đó hệ có dạng:
$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy hệ có 1 cặp nghiệm $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_2(x+y) = x+y-1 \\ \log_{x+y+2}(xy+1) = x+y-1 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x+y > 0 \\ xy+1 > 0 \\ 0 < x+y+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ xy+1 > 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ với việc sử dụng ẩn phụ $t = x+y > 0$, ta được: $\log_2 t = t-1$

Đặt $u = \log_2 t \Rightarrow t = 2^u$ khi đó phương trình có dạng:

$$2^u = u + 1 \xleftrightarrow{\text{Bernoulli}} \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 t = 0 \\ \log_2 t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

+ Với $x + y = 1$ hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 1 \\ \log_3(xy + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 1; y = 0 \end{cases}$

+ Với $x + y = 2$ hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 2 \\ \log_4(xy + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 2t + 3 = 0$ vô nghiệm
 Vậy hệ có 2 cặp nghiệm $(0;1)$ và $(1;0)$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y - x)(x^2 - xy + y^2). (*) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Giải:

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 \forall x, y > 0$

Xét $x > y \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x < \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} \text{VT} (*) > 0 \\ \text{VP} (*) < 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Xét $x < y \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x > \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} \text{VT} (*) < 0 \\ \text{VP} (*) > 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Khi $x = y$ hệ cho ta $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x^2 = 2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$ (do $x, y > 0$).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Bài tập tự giải có hướng dẫn:

Bài 1: (ĐHDB - 2002) Tìm k để hệ BPT sau có nghiệm $\begin{cases} |x-1|^3 - 3x - k < 0 \\ \frac{1}{2}\log_2 x^2 + \frac{1}{3}\log_2 (x-1)^3 \leq 1 \end{cases}$

HD:

Xét BPT ta có $\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \frac{1}{3}\log_2 (x-1)^3 \leq 1$

- Giải xong được $-1 \leq x \leq 2$

- Xét BPT $|x-1|^3 - 3x - k < 0 \Leftrightarrow k > f(x) = |x-1|^3 - 3x$

- Xét $-1 \leq x \leq 1, k > f(x) = (1-x)^3 - 3x$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(1 + 3\sqrt{1 - \tan^2 x}) = 2 + \log_3(1 - \tan^2 y) \\ \log_2(1 - 3\sqrt{1 - \tan^2 y}) = 2 + \log_3(1 - \tan^2 x) \end{cases}$

HD:

Nếu một trong ba số x, y, z bằng 1

Giả sử $x = 1$ thì $y - 1 = y \ln y$

Xét $f(y) = y - 1 - y \ln y$

$f'(y) = -\ln y; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$ và $f(1) = 0$

Nếu $0 < y < 1$ thì $f'(y) > 0$ suy ra $f(y) > 0$

Nếu $y > 1$ thì $f'(y) < 0$ suy ra $f(y) < 0$

Vậy $y = 1$ là nghiệm duy nhất

Bài tập tổng hợp tự giải:

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a. } \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \cdot \log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} \log_2 \sqrt{1 + 3 \sin x} = \log_3(3 \cos y) \\ \log_2 \sqrt{1 + 3 \cos y} = \log_3(3 \sin x) \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} \log_x xy = \log_y x^2 \\ y^{2 \log_y x} = 4y + 3 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2 \\ \log_y \left(\frac{x-2}{y-1} \right) + \log_x \left(\frac{y-1}{x-2} \right) = (x-3)^3 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + 3 \lg 2 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3 \end{cases}$$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a. } \begin{cases} 4^{\frac{x+y}{x}} = 32 \\ \log_3(x+y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} \log_x(3x+5y) + \log_y(3y+5x) = 4 \\ \log_x(3x+5y) \cdot \log_y(3y+5x) = 4 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x+3y) \\ \log_4(xy+1) - \log_4(4y^2 + 2y - 2x + 4) = \log_4 \frac{x}{y} - 1 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} \log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 y) \\ \log_4(\log_2 x) = \log_2(\log_4 x) \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 12 \end{cases}$$

Đs: a. (2;1)

$$\text{b. } \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{e. (ĐHM - 1999)} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \text{ với } \alpha > 0 \text{ tùy ý hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

f. (1;3), (3;1)

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau

$$a. \begin{cases} 2 \cdot \log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2 + \log_2 3 \\ \log_7(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} 2x + xy + y = 14 \\ \log_{(x+1)}(y + 2) - \log_{y+2}(x + 1) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Đs:

$$d. (\text{TCKT} - 2001) \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau

$$a. \begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2 \\ \log_y(3y + 2x) = 2 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} \frac{1}{2} \log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2 + xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases}$$

Đs:

$$a. (x; y) = (5; 5) \quad d. (x; y) = (4; 2), (2; 4)$$

Bài 5: Giải các hệ phương trình sau

$$a. \begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ (2y^2 - y + 12)3^x = 81y \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} \lg x + \lg y = 1 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau

$$a. \begin{cases} y^{2 \cdot \log_y x} = 3 + 4y \\ \log_x xy = \log_y x^2 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x - y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} 5 \cdot \log_2 x - \log_4 y^2 = -8 \\ 5 \cdot \log_2 x^3 - \log_4 y = -9 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} (\sqrt{x+1} - 1)3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ \log_3 x + y = 1 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} \log_2 xy = 4 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y^{\log_y(y-3x)} = 1 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} xy = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y+2} = 3 \end{cases}$$

Đs: d. $x = y = 2$

Bài 7: Giải các hệ phương trình sau

$$a. \begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \\ 2^x + 2^y = 3 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} x(y-1) = y \ln y \\ y(z-1) = z \ln z \\ z(x-1) = x \ln x \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} \log_2 (1 + 3\sqrt{1-x^2}) = \log_3 (1-y^2) + 2 \\ \log_2 (1 + 3\sqrt{1-y^2}) = \log_3 (1-x^2) + 2 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y & (1) \\ y^2 = 2^x y + 2^{2x+1} & (2) \end{cases}$$

Đs:

$$a. x = y = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$b. \text{ Nếu } x \neq 1 \text{ theo trên } y, z \neq 1 \text{ hệ đã cho } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y \ln y}{y-1} \\ y = \frac{z \ln z}{(z-1)} \\ z = \frac{x \ln x}{(x-1)} \end{cases} \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm}$$

$$d. (x; y) = (-1; 1) \vee (4; 32)$$

Bài 8: Giải các hệ phương trình sau

$$a. \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_{27} (x+y) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \\ x^4 + y^4 = 16 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_{\sqrt{2}} 2 \\ \log_2 y = 8 - \log_{\sqrt{2}} x \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} |\log_2 (x+y)| + |\log_2 (x-y)| = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3} \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} \log_{\sqrt{x}} (x-y) = 2 \\ \log_4 x - \log_x y = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$g. \begin{cases} \log_x (x+1) = \lg 1,7 \\ \log_3 (3 - \sqrt{1-2x+x^2}) = 0,5 \end{cases}$$

$$h. \begin{cases} \sqrt{y} + 2\lg x = 3 \\ y - 3\lg^2 x = 1 \end{cases}$$

$$i. \begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1} (y+23) = 3 \end{cases} \quad k. \begin{cases} \lg \sqrt{(x+y)^2} = 1 \\ \lg y - \lg |x| = \lg 2 \end{cases}$$

$$l. \begin{cases} xy = a^2 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2} (\lg a^2)^2 \end{cases}$$

Đs:

a. $(x; y) = (3; 6), (6; 3)$ b. $(2\sqrt{2}; \sqrt[4]{8})$ c. $\left(2\sqrt[3]{2}; \frac{32}{\sqrt[3]{2}}\right)$
d. $(3; 1) \vee \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)$ e. $(1; 2)$ f. $(5; 2)$ g. $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{9-\sqrt{29}}{2}\right)$
h. $(\sqrt{10}; 4)$ i. $(2; 4)$ k. $(-10; 20) \vee \left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right)$ l. $\left(\frac{1}{a}; a^3\right) \vee \left(a^3; \frac{1}{a}\right)$

Bài 9: Giải các hệ bất phương trình sau

a. $\begin{cases} \log_2^2 x - \log_2 x^2 < 0 \\ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 9 > 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} (x-1)\log 2 + \log(2^{x+1} + 1) < 1 + \log(7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2 \end{cases}$
c. $\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2) + \log_{1-y}(1+2x+x^2) = 4 \\ \log_{1+x}(1+2y) + \log_{1-y}(1+2x) = 2 \end{cases}$
e. $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x-y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$
Đs: d. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right)$ e. $(0; 0)$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LOGA CÓ CHỨA THAM SỐ

Bài 1: Cho hệ $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - ay = 0 \end{cases}$ (a là tham số)

- a. Giải hệ khi $a = 2$
b. Tìm a để hệ có nghiệm

Đs: $a > 0$

Bài 2: Cho hệ $\begin{cases} \log_x(ax+by) + \log_y(ay+bx) = 4 \\ \log_x(ax+by) \cdot \log_y(ay+bx) = 4 \end{cases}$

- a. Giải hệ khi $a = 3, b = 5$
b. Giải và biện luận khi $a > 0, b > 0$

Bài 3: Cho hệ $\begin{cases} \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 \\ \log_x(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \cdot \log_y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = 4 \end{cases}$

- a. Giải hệ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$
b. Cho $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ biện luận hệ

Bài 3: Xác định a để hệ có nghiệm $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 1 \end{cases} \quad (0 < a \neq 1)$

Bài 4: Giải và biện luận hệ $\begin{cases} \log_x(3x+ky) = 2 \\ \log_y(3y+kx) = 2 \end{cases} \quad (k \in R)$

LỜI KẾT:

Tôi hi vọng rằng tài liệu này sẽ có ích cho tất cả các bạn học sinh, cũng như các bạn đồng nghiệp, tài liệu dài và có tham khảo thêm một số tài liệu nên không thể tránh được những sai sót, rất mong các bạn lượng thứ

Góp ý theo địa chỉ Email: Loinguyen1310@gmail.com hoặc địa chỉ: **Nguyễn Thành Long**
Số nhà 15 – Khu phố 6 – Phường ngọc trạo – Thị xã bửu sơn – Thành phố thanh hóa

“Vì một ngày mai tươi sáng, các em hãy cố lên, chúc các em học tốt và đạt kết quả cao... chào thân ái”