CHƯƠNG
IV

CHỈ DẪN LỊCH SỬ · CHƯƠNG IV. VECTƠ

KHI CÁC MŨI TÊN BIẾT CỘNG VỚI NHAU

✎ CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU

Ngày 16 tháng 10 năm 1843, nhà toán học Ireland **William Rowan Hamilton** đi dạo cùng vợ dọc kênh đào ở Dublin. Đã nhiều năm ông tìm cách "nhân" các bộ ba số để mô tả phép quay trong không gian mà chưa thành công. Đến cầu Broom, lời giải bất chợt loé lên. Quá phấn khích, ông lấy dao **khắc ngay công thức lên đá thành cầu**: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

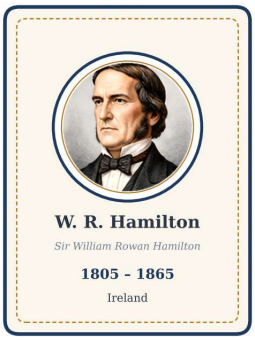
Từ những con số kì lạ ấy (quaternion), Hamilton đặt ra hai từ mà em dùng ở Chương IV: **"vectơ"** (vector – từ tiếng Latin "vehere", mang, chở) và **"vô hướng"** (scalar).

A NHỮNG NGƯỜI ĐẶT NỀN MÓNG



Kĩ sư **Stevin** chứng minh quy tắc cộng lực bằng một thí nghiệm tưởng tượng tuyệt đẹp (năm 1586): vắt một chuỗi hạt đều nhau lên lăng trụ tam giác. Nếu chuỗi tự trượt thì nó sẽ quay mãi – một cỗ máy chuyển động vĩnh cửu, điều không thể có. Vậy chuỗi đứng yên, và từ đó suy ra lực trên mặt phẳng nghiêng.

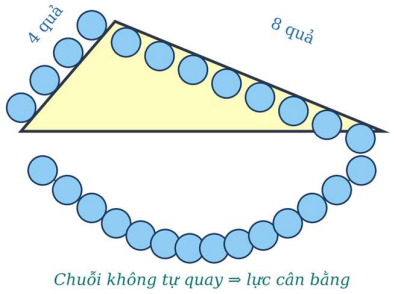
Ông khắc hình chuỗi hạt lên trang bìa sách với câu châm ngôn: *"Điều kì diệu chẳng phải là điều kì diệu"*. Stevin cũng là người phổ biến cách viết **số thập phân** ở châu Âu.



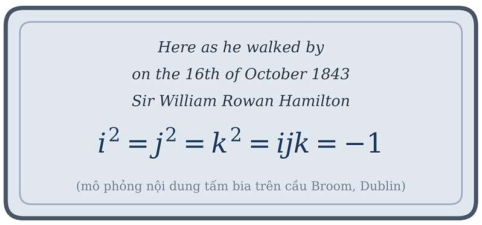
Thần đồng **Hamilton** biết hơn chục ngôn ngữ từ nhỏ, 21 tuổi đã là giáo sư thiên văn. Quaternion của ông là "tổ tiên" của phép toán vectơ trong không gian.

Cuối thế kỉ XIX, **Josiah Willard Gibbs** (Mĩ) và **Oliver Heaviside** (Anh) tách phần "vectơ" ra khỏi quaternion, xây dựng **giải tích vectơ** gọn gàng như ngày nay: tổng, hiệu, tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

B CÔNG TRÌNH QUA HÌNH ẢNH



Chuỗi hạt của Stevin (1586): cạnh dài gấp đôi có số hạt gấp đôi, nhưng chuỗi vẫn cân bằng.



Nội dung tấm bia kỉ niệm trên cầu Broom (Dublin). Hằng năm, ngày 16/10 vẫn có "Cuộc đi bộ Hamilton" theo đúng lộ trình của ông.

C DÒNG THỜI GIAN

Thời điểm	Sự kiện
1586	Stevin: quy tắc hình bình hành cho lực (dạng chuỗi hạt).
1687	Newton dùng quy tắc hình bình hành để tổng hợp chuyển động trong *Principia*.
1843	Hamilton khám phá quaternion trên cầu Broom.
1844	Hermann Grassmann xây dựng "lí thuyết mở rộng" – không gian nhiều chiều.
1881 – 1884	Gibbs soạn tài liệu *Các yếu tố của giải tích vectơ*; Heaviside dùng vectơ viết lại các phương trình điện từ.
Ngày nay	Vectơ là ngôn ngữ của vật lí, đồ hoạ máy tính, trí tuệ nhân tạo.

D TOÁN HỌC QUANH TA

⚙ CHƯƠNG NÀY ĐANG "LÀM VIỆC" Ở ĐÂU?

- **Vật lí:** lực, vận tốc, gia tốc đều là vectơ; tổng hợp lực bằng quy tắc hình bình hành.
- **Hàng không, hàng hải:** vận tốc thực của máy bay = vận tốc riêng + vận tốc gió (cộng hai vectơ).
- **Trò chơi điện tử và đồ hoạ 3D:** mỗi chuyển động, va chạm, ánh sáng đều được tính bằng vectơ và tích vô hướng.
- **Trí tuệ nhân tạo:** mỗi từ, mỗi bức ảnh được biểu diễn thành một vectơ nhiều chiều; "góc" giữa hai vectơ đo độ giống nhau.

✱ EM CÓ BIẾT?

- Tích vô hướng giúp máy tính quyết định một mặt của vật thể 3D có quay về phía camera hay không: chỉ cần xét dấu của $\vec{n} \cdot \vec{v}$.
- Hamilton viết thư cho con trai kể lại khoảnh khắc ấy: ông cảm thấy "một mạch điện như vừa khép kín, và một tia lửa loé lên".

E CÂU HỎI SUY NGẪM

Câu 1. Một máy bay bay về hướng bắc với vận tốc 800 km/h, gió thổi về hướng đông 60 km/h. Vận tốc thực của máy bay có độ lớn bao nhiêu?

Gợi ý: Hai vectơ vuông góc: $\sqrt{800^2 + 60^2} \approx 802{,}2$ *km/h, lệch về phía đông một góc* α *với* $\tan\alpha = \frac{60}{800}$, *tức* $\alpha \approx 4{,}3°$.

Câu 2. Trong hình chuỗi hạt của Stevin, cạnh dài gấp đôi cạnh ngắn. Vì sao lực kéo của 8 hạt trên mặt dốc thoải lại bằng lực kéo của 4 hạt trên mặt dốc đứng?

Gợi ý: Thành phần trọng lực dọc mặt nghiêng tỉ lệ với sin *góc nghiêng; với cùng chiều cao,* sin *góc nghiêng tỉ lệ nghịch với độ dài cạnh, nên số hạt* × sin *góc ở hai bên bằng nhau.*

BÀI 7

CHƯƠNG IV. VECTƠ

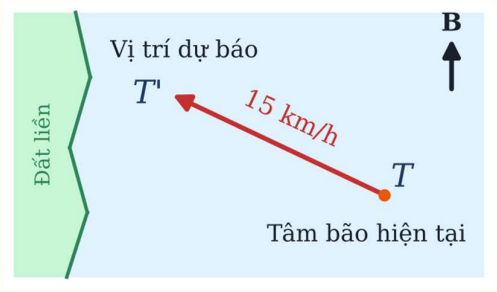
CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

◎ MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Nhận biết khái niệm vectơ, độ dài của vectơ, giá của vectơ, vectơ-không.
- Nhận biết hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, hai vectơ bằng nhau.
- Biểu thị được một số đại lượng trong thực tiễn như lực, vận tốc bằng vectơ.

✦ CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU · Bản tin bão và "mũi tên" trên bản đồ

Bản tin thời tiết lúc 7 giờ sáng: *"Tâm bão đang ở trên vùng biển phía đông, di chuyển theo hướng **tây tây bắc**, mỗi giờ đi được khoảng **15 km**."* Trên màn hình, các chuyên gia vẽ một **mũi tên** từ vị trí hiện tại của tâm bão đến vị trí dự báo sau 24 giờ.



Chỉ nói "bão đi được 15 km mỗi giờ" là chưa đủ – người dân ven biển cần biết bão đi **về đâu**. Nhiệt độ 30°C chỉ cần một con số; còn vận tốc của bão, lực đẩy của gió, độ dịch chuyển của con tàu… cần **cả độ lớn lẫn hướng**. Toán học gọi những "mũi tên" như vậy là **vectơ**.

Khái niệm vectơ được hoàn thiện vào cuối thế kỉ XIX nhờ các nhà khoa học J. W. Gibbs (Mỹ) và O. Heaviside (Anh) khi nghiên cứu điện từ học. Ngày nay, vectơ có mặt ở khắp nơi: từ đồ hoạ máy tính, trò chơi điện tử đến định vị GPS và trí tuệ nhân tạo.

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ

◆ ĐỊNH NGHĨA

- **Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$; vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, …
- **Độ dài** của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$; độ dài của $\vec{a}$ kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là **giá** của vectơ.

✱ CHÚ Ý

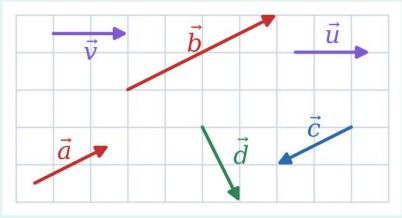
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là **hai vectơ khác nhau** (dù có cùng độ dài).
- Với hai điểm phân biệt A, B có đúng hai vectơ khác $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. Với n điểm phân biệt có

$n(n-1)$ vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong n điểm đó (điểm đầu có n cách chọn, điểm cuối có $n-1$ cách chọn).

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

ĐỊNH NGHĨA

- Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng hoặc **cùng hướng**, hoặc **ngược hướng**. (Chỉ khi hai vectơ cùng phương mới nói tới cùng hướng hay ngược hướng.)
- Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng **cùng độ dài và cùng hướng**.



Trong hình: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng; $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng; $\vec{d}$ không cùng phương với $\vec{a}$; $\vec{u}=\vec{v}$.

VECTƠ-KHÔNG

- Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau ($\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{MM}$, …) gọi là **vectơ-không**.
- Quy ước: vectơ-không có độ dài bằng 0 và **cùng hướng** (do đó cùng phương) với mọi vectơ. Vì vậy **mọi vectơ-không đều bằng nhau**, kí hiệu chung là $\vec{0}$: $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}$, $|\vec{0}|=0$.
- Với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có **duy nhất** điểm A sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

- Ba điểm phân biệt A, B, C **thẳng hàng** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Tứ giác $ABCD$ là **hình bình hành** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ (SGK, Bài 4.3).
- M là trung điểm của đoạn $AB\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.
- Có thể dùng vectơ biểu diễn **lực, vận tốc, gia tốc**: hướng của vectơ chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vectơ tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vectơ – Độ dài vectơ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- **Đếm vectơ.** Hai điểm phân biệt A, B xác định đúng hai vectơ khác $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$. Từ n điểm phân biệt lập được $n(n-1)$ vectơ khác $\vec{0}$: điểm đầu có n cách chọn, điểm cuối có $n-1$ cách chọn.
- **Đếm giá.** Mỗi đường thẳng chứa ít nhất hai trong các điểm đã cho là giá của ít nhất hai vectơ. Khi có nhiều điểm cùng nằm trên một đường thẳng, các cặp điểm đó chỉ cho **một** giá

chung.

- **Tính độ dài.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$: tính độ dài đoạn thẳng AB bằng định lí Pythagore, tính chất của hình (đường chéo, đường trung tuyến, trọng tâm, đường trung bình), hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc định lí côsin.
- *Sai lầm thường gặp:* coi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ (đếm thiếu một nửa); quên rằng G chia trung tuyến theo tỉ số $AG = \frac{2}{3}AM$.

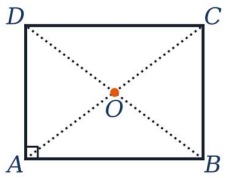
▶ **Ví dụ 1.** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là hai trong bốn điểm đó?

Lời giải

Điểm đầu có 4 cách chọn; với mỗi điểm đầu, điểm cuối (khác điểm đầu) có 3 cách chọn. Vậy có $4 \cdot 3 = 12$ vectơ, đó là:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}.$$

▶ **Ví dụ 2.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 3$; O là giao điểm của hai đường chéo. Tính $\left|\overrightarrow{AC}\right|$, $\left|\overrightarrow{DB}\right|$, $\left|\overrightarrow{OA}\right|$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|$.



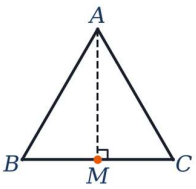
Lời giải

Tam giác ABC vuông tại B, $BC = AD = 3$, nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau nên $DB = AC = 5$.

O là trung điểm của AC nên $OA = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \frac{5}{2}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 3$.

▶ **Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC cạnh a, M là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ và $\left|\overrightarrow{MB}\right|$.



Lời giải

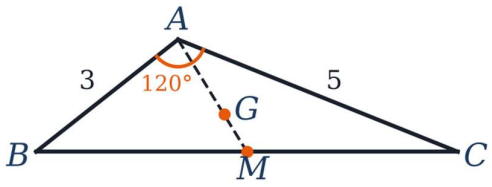
M là trung điểm của BC nên $MB = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác đều, trung tuyến AM cũng là đường cao, nên tam giác ABM vuông tại M:

$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\left|\overrightarrow{MB}\right| = \frac{a}{2}$.

▶ **Ví dụ 4.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$, $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác. Tính $\left|\overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AG}\right|$.



Lời giải

Tính BC. Theo định lí côsin:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120° = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$, nên $BC = 7$.

Tính AM. Trong tam giác ABC: $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{9+49-}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{14}$.

Tam giác ABM có $AB = 3$, $BM = \frac{7}{2}$, nên

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B = 9 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{14} = \frac{85}{4} - \frac{33}{2} = \frac{19}{4}$.

Suy ra $AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Tính AG. G là trọng tâm nên G nằm trên đoạn AM và $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{19}}{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 7$, $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{\sqrt{19}}{2} \approx 2{,}18$, $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \frac{\sqrt{19}}{3} \approx 1{,}45$.

Chú ý: đừng nhầm AM với $\frac{BC}{2} = 3{,}5$: đẳng thức $AM = \frac{BC}{2}$ chỉ đúng khi góc A vuông. Góc A tù thì $AM < \frac{BC}{2}$; ở đây $AM \approx 2{,}18$, còn ngắn hơn cả hai cạnh AB, AC.

✎ Bài tập luyện tập

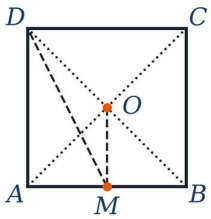
Bài 1. (**Vận dụng**) Cho bảy điểm phân biệt, trong đó có đúng bốn điểm nằm trên đường thẳng d; ngoài các bộ ba điểm nằm trên d, không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong bảy điểm đó?

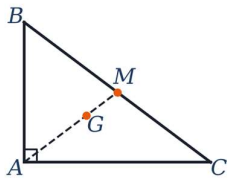
b) Có bao nhiêu vectơ trong số đó có giá là đường thẳng d?

c) Các vectơ đó có tất cả bao nhiêu giá khác nhau?

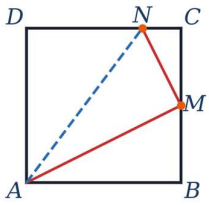
Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, tâm O; M là trung điểm của AB. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MD}$.



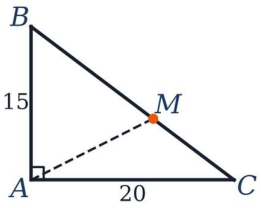
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác. Tính $\left|\overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AM}\right|$, $\left|\overrightarrow{AG}\right|$.



Bài 4. (**Vận dụng**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 1$. Tính $\left|\overrightarrow{AM}\right|$, $\left|\overrightarrow{MN}\right|$, $\left|\overrightarrow{AN}\right|$, từ đó chứng minh tam giác AMN vuông.



Bài 5. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 15, AC = 20$. Điểm M thay đổi trên cạnh BC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{AM}\right|$; khi đó tính $\left|\overrightarrow{BM}\right|$.



Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng

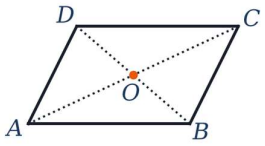
⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Xác định giá của hai vectơ: hai giá song song hoặc trùng nhau thì hai vectơ cùng phương.
- Với hai vectơ cùng phương, so sánh chiều đi từ điểm đầu đến điểm cuối để kết luận cùng hướng hay ngược hướng.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương. Muốn chứng minh thẳng hàng, ta chỉ ra hai vectơ **có chung một điểm** và cùng phương.
- *Chú ý:* chỉ xét cùng hướng hay ngược hướng khi hai vectơ đã cùng phương. Hai vectơ "không cùng hướng" chưa chắc ngược hướng.

▶ **Ví dụ 5.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$ và:

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng hướng với $\overrightarrow{AO}$.



Lời giải

a) Giá của vectơ cần tìm song song hoặc trùng với AB. Trong năm điểm đã cho, chỉ có hai đường thẳng như vậy chứa ít nhất hai điểm: AB và CD (đường thẳng qua O song song với AB không chứa điểm nào khác).

Các vectơ cần tìm: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$.

b) Vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AO}$ phải nằm trên đường thẳng AC và có chiều từ phía A sang phía C.

Các vectơ cần tìm: $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC}$.

▶ **Ví dụ 6.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng hay ngược hướng? Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thì sao?

Lời giải

Bốn vectơ đã cho đều có giá là đường thẳng AC nên chúng cùng phương.

B nằm giữa A và C nên, nhìn từ B, hai điểm A và C ở về hai phía: $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ **ngược hướng**.

Nhìn từ A, hai điểm B và C ở cùng một phía: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ **cùng hướng**.

▶ **Ví dụ 7.** (**Vận dụng**) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{c}$ cùng phương với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì $\vec{c} = \vec{0}$.

Lời giải

Vì vectơ-không cùng phương với mọi vectơ nên $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương kéo theo $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Giả sử $\vec{c} \neq \vec{0}$; gọi d là giá của $\vec{c}$. Vì $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{c}$ nên giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d; tương tự, giá của $\vec{b}$ song song hoặc trùng với d.

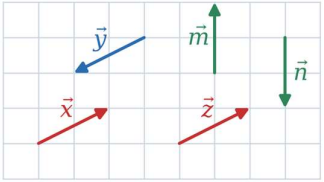
Hai đường thẳng cùng song song hoặc trùng với d thì song song hoặc trùng nhau. Do đó giá của $\vec{a}$ và giá của $\vec{b}$ song song hoặc trùng nhau, tức là $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương – mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $\vec{c} = \vec{0}$.

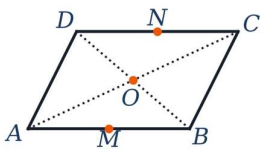
Nhận xét: kết quả này cho thấy "cùng phương" có tính bắc cầu **qua một vectơ khác** $\vec{0}$; qua vectơ-không thì không (mọi vectơ đều cùng phương với $\vec{0}$).

✎ Bài tập luyện tập

Bài 6. Quan sát hình bên. Chỉ ra các cặp vectơ cùng phương; trong đó, cặp nào cùng hướng, cặp nào ngược hướng?



Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tìm các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O; M; N\}$ và **ngược hướng** với $\overrightarrow{AM}$.



Bài 8. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

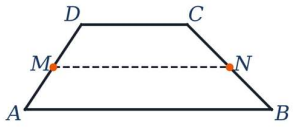
b) Nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{c}$.

c) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

Bài 9. (**Vận dụng**) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$ đôi một cùng hướng.

b) Cho $AB = 7$, $CD = 3$. Tính $\left|\overrightarrow{MN}\right|$. Trong các vectơ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; M; N\}$, có vectơ nào khác $\overrightarrow{MN}$ mà bằng $\overrightarrow{MN}$ không?



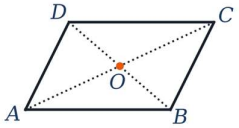
Bài 10. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC. Có tồn tại điểm M sao cho ba vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ đôi một cùng phương không?

Dạng 3. Hai vectơ bằng nhau – Chứng minh đẳng thức vectơ

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng **và** cùng độ dài. Thiếu một trong hai điều kiện thì hai vectơ không bằng nhau.
- Công cụ chính: tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; M là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$; đường trung bình của tam giác (hình thang) song song và bằng nửa cạnh đáy (nửa tổng hai đáy).
- Dựng điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$: qua O kẻ đường thẳng song song (hoặc trùng) với giá của $\vec{a}$, lấy M trên đó sao cho $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $OM = |\vec{a}|$.
- Ngược lại, từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (bốn điểm không thẳng hàng) suy ra $ABCD$ là hình bình hành, rồi dùng tính chất **hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường** để chứng minh trung điểm trùng nhau, ba điểm thẳng hàng.
- *Sai lầm thường gặp:* viết sai thứ tự đỉnh, chẳng hạn từ hình bình hành $ABCD$ lại kết luận $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (thực ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng).

▶ **Ví dụ 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm các vectơ khác $\overrightarrow{AB}$ mà bằng $\overrightarrow{AB}$, và các vectơ khác $\overrightarrow{OA}$ mà bằng $\overrightarrow{OA}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$.



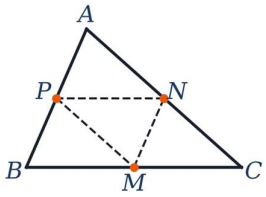
Lời giải

Theo Ví dụ 5, các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$. Trong đó $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$; còn $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $DC = AB$. Vậy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{OA}$ nằm trên đường thẳng AC. Vì O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{CO}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$ và $CO = OA$. Các vectơ còn lại trên AC hoặc ngược hướng với $\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC}$), hoặc dài gấp đôi ($\overrightarrow{CA}$).

Vậy vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$; vectơ bằng $\overrightarrow{OA}$ là $\overrightarrow{CO}$.

▶ **Ví dụ 9.** Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$.



Lời giải

M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$.

NP là đường trung bình của tam giác ABC nên $NP \parallel BC$ và $NP = \frac{1}{2}BC = CM$.

Tứ giác $NPMC$ có $NP \parallel MC$, $NP = MC$ nên là hình bình hành; suy ra $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CM}$.

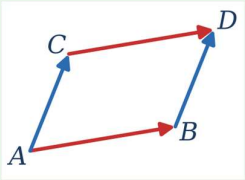
Vậy $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$.

▶ **Ví dụ 10.** (**Vận dụng**) Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Nếu $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ thì $A \equiv B$, $C \equiv D$ và hiển nhiên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Xét $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

Trường hợp 1: bốn điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Khi đó giá AB, CD không trùng nhau, nên $AB \parallel CD$; hơn nữa $AB = CD$ và $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, nên $ABDC$ là hình bình hành.



Trong hình bình hành $ABDC$, hai cạnh đối AC, BD song song, bằng nhau và $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng.

Vậy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

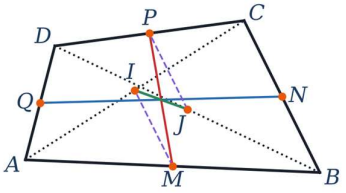
Trường hợp 2: bốn điểm cùng nằm trên một đường thẳng. Chọn trên đường thẳng đó một trục số; gọi a, b, c, d là toạ độ của A, B, C, D. Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ nghĩa là $b - a = d - c$, suy ra $c - a = d - b$, tức là $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng, cùng độ dài.

Vậy trong mọi trường hợp, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ kéo theo $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

▶ **Ví dụ 11.** (**Vận dụng cao**) Cho tứ giác $ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA; I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{JP}$.

b) Chứng minh ba đoạn thẳng MP, NQ, IJ có chung trung điểm.



Lời giải

a) MI là đường trung bình của tam giác ABC (M, I là trung điểm của AB, AC) nên $MI \parallel BC$, $MI = \frac{1}{2}BC$ và $\overrightarrow{MI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

JP là đường trung bình của tam giác DBC (J, P là trung điểm của DB, DC) nên $JP \parallel BC$, $JP = \frac{1}{2}BC$ và $\overrightarrow{JP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{JP}$ cùng hướng, cùng độ dài: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{JP}$.

b) Tương tự, IP là đường trung bình của tam giác CAD nên $IP \parallel AD$. Vì $MI \parallel BC$ và AD không song song với BC, ba điểm M, I, P không thẳng hàng. Kết hợp với $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{JP}$, tứ giác $MIPJ$ là hình bình hành; hai đường chéo MP, IJ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

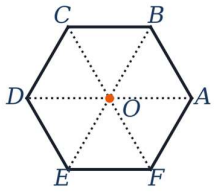
Mặt khác, MN và QP cùng là đường trung bình ứng với cạnh AC (trong các tam giác ABC, ADC) nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ và $MNPQ$ là hình bình hành; hai đường chéo MP, NQ cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy trung điểm của MP cũng là trung điểm của IJ và của NQ: ba đoạn thẳng MP, NQ, IJ có chung trung điểm.

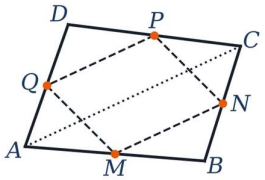
Nhận xét: ý tưởng then chốt là "tìm hai vectơ bằng nhau để có hình bình hành, rồi dùng tính chất đường chéo". Điểm chung đó được gọi là **trọng tâm** của tứ giác $ABCD$.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm các vectơ khác $\overrightarrow{OA}$ mà bằng $\overrightarrow{OA}$, và các vectơ khác $\overrightarrow{AB}$ mà bằng $\overrightarrow{AB}$, có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác hoặc tâm O.

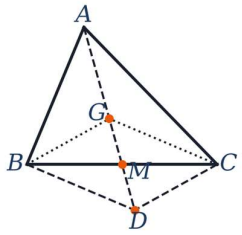


Bài 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

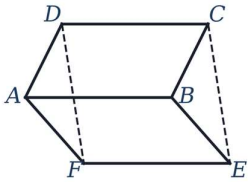


Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$, từ đó suy ra C là trung điểm của DE.

Bài 14. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G; M là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng với G qua M. Chứng minh $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{GC}$ và $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$.



Bài 15. (**Vận dụng**) Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$, trong đó F không thuộc đường thẳng CD. Chứng minh $DCEF$ là hình bình hành và $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}$.



Dạng 4. Vectơ biểu diễn lực, vận tốc – Bài toán thực tế

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chọn tỉ lệ (chẳng hạn 1 ô ứng với 100 N, 1 cm ứng với 5 km/h), rồi vẽ vectơ có hướng là hướng của đại lượng, độ dài tỉ lệ với độ lớn. Ngược lại, đo độ dài vectơ rồi nhân với tỉ lệ để đọc độ lớn.
- Chuyển động trên một đường thẳng có dòng chảy (sông, băng chuyền, lối đi tự động…): đi **xuôi** thì vận tốc thực cùng hướng với dòng và bằng **tổng** hai vận tốc; đi **ngược** (vận tốc riêng lớn hơn) thì vận tốc thực có hướng của vận tốc riêng và bằng **hiệu** hai vận tốc.
- Hai vectơ vận tốc bằng nhau khi hai vật đi **cùng hướng và cùng tốc độ** – dù ở hai vị trí khác nhau.
- *Chú ý:* vật đứng yên hoặc lơ lửng chịu hai lực cân bằng: cùng phương, ngược hướng, cùng độ lớn.

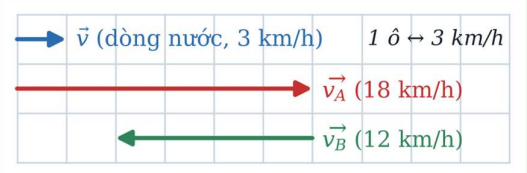
▶ **Ví dụ 12.** Hai ca nô A, B có vận tốc riêng cùng bằng 15 km/h, chạy trên một khúc sông thẳng có vận tốc dòng nước 3 km/h; ca nô A xuôi dòng, ca nô B ngược dòng. Biểu diễn vectơ vận tốc dòng nước và các vectơ vận tốc thực của hai ca nô (1 ô ứng với 3 km/h), rồi nhận xét về phương, hướng và độ dài của chúng.

Lời giải

Gọi $\vec{v}$ là vectơ vận tốc dòng nước; $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$ là vectơ vận tốc thực của hai ca nô.

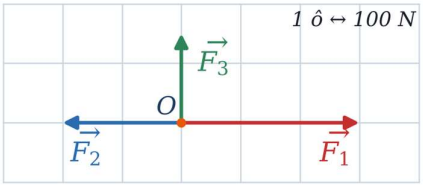
Ca nô A xuôi dòng: $15 + 3 = 18$ (km/h), cùng hướng với dòng nước. Ca nô B ngược dòng: $15 - 3 = 12$ (km/h), ngược hướng với dòng nước.

Theo tỉ lệ đã chọn: $\vec{v}$ dài 1 ô, $\overrightarrow{v_A}$ dài $18:3 = 6$ ô, $\overrightarrow{v_B}$ dài $12:3 = 4$ ô.



Ba vectơ cùng phương; $\vec{v_A}$ cùng hướng với $\vec{v}$, còn $\vec{v_B}$ ngược hướng với $\vec{v}$ và với $\vec{v_A}$; $|\vec{v_A}| = 6|\vec{v}|$, $|\vec{v_B}| = 4|\vec{v}|$.

▶ **Ví dụ 13.** Ba bạn cùng kéo một chiếc thùng; các lực kéo đặt tại điểm O được biểu diễn như hình bên (1 ô ứng với 100 N). Nêu hướng, độ lớn của mỗi lực và chỉ ra cặp lực cùng phương.



Lời giải

$\vec{F_1}$ dài 3 ô, hướng sang phải: độ lớn $3 \cdot 100 = 300$ (N).

$\vec{F_2}$ dài 2 ô, hướng sang trái: độ lớn $2 \cdot 100 = 200$ (N).

$\vec{F_3}$ dài 1,5 ô, hướng lên trên: độ lớn $1{,}5 \cdot 100 = 150$ (N).

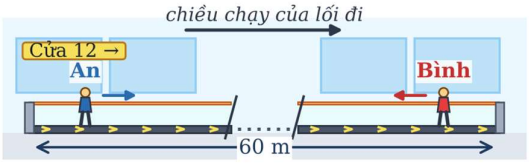
$\vec{F_1}, \vec{F_2}$ cùng nằm trên đường nằm ngang qua O nên cùng phương, và ngược hướng; $\vec{F_3}$ có giá thẳng đứng nên không cùng phương với hai lực kia.

▶ **Ví dụ 14.** (**Vận dụng**) Ở sân bay, một lối đi tự động dài 60 m chạy với vận tốc không đổi. An đứng yên trên lối đi thì sau 60 giây tới đầu bên kia; nếu vừa đứng trên lối đi vừa bước đều cùng chiều chạy thì An chỉ mất 24 giây. Bình bước trên lối đi ngược chiều chạy với cùng tốc độ bước chân như An.

a) Tính vận tốc của lối đi và tốc độ bước chân của An (so với lối đi).

b) Bình đi hết lối đi trong bao lâu? Vectơ vận tốc thực (so với mặt đất) của Bình có hướng thế nào?

c) Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{u}$ của lối đi, các vectơ vận tốc thực $\vec{v_1}$ của An (khi bước cùng chiều) và $\vec{v_2}$ của Bình theo tỉ lệ 1 ô ứng với 0,5 m/s; nhận xét.

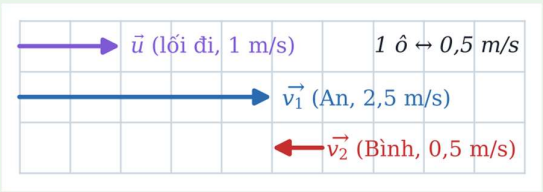


Lời giải

a) Khi đứng yên, An đi cùng lối đi: $|\vec{u}| = 60 : 60 = 1$ (m/s). Khi bước cùng chiều, vận tốc thực của An là $60 : 24 = 2{,}5$ (m/s), bằng tổng vận tốc lối đi và tốc độ bước chân, nên tốc độ bước chân là $2{,}5 - 1 = 1{,}5$ (m/s).

b) Bình bước ngược chiều với tốc độ 1,5 m/s, lớn hơn 1 m/s, nên Bình vẫn tiến theo hướng bước chân, ngược hướng với lối đi, với vận tốc thực $1{,}5 - 1 = 0{,}5$ (m/s). Thời gian đi hết lối đi: $60 : 0{,}5 = 120$ (giây).

c) Theo tỉ lệ 1 ô ứng với 0,5 m/s: $\vec{u}$ dài 2 ô, $\vec{v_1}$ dài 5 ô (cùng hướng với $\vec{u}$), $\vec{v_2}$ dài 1 ô (ngược hướng với $\vec{u}$).



Ba vectơ cùng phương; $|\vec{v_1}| = 5|\vec{v_2}|$ nên Bình mất thời gian gấp 5 lần An ($120 = 5 \cdot 24$).

✎ Bài tập luyện tập

Bài 16. Một máy bay bay về hướng đông với vận tốc 800 km/h, một máy bay khác bay về hướng tây với vận tốc 600 km/h. Vẽ các vectơ vận tốc của hai máy bay (1 cm ứng với 200 km/h). Hai vectơ vận tốc đó có quan hệ gì?

Bài 17. Một vật chìm hoàn toàn và **lơ lửng** trong nước. Trọng lực $\vec{P}$ và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ tác dụng lên vật có quan hệ gì về phương, hướng và độ dài?

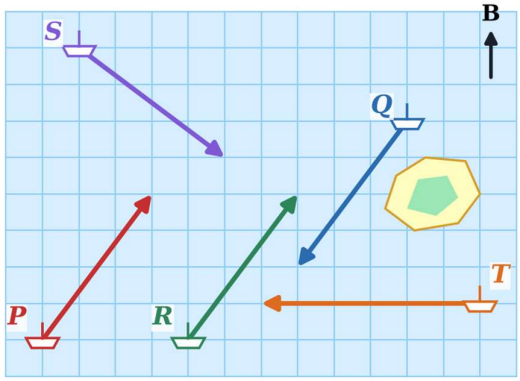
Bài 18. (**Vận dụng**) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (mỗi đơn vị trên các trục ứng với 10 km), một xe xuất phát từ $M(0;-1)$ chuyển động thẳng đều; vectơ vận tốc của xe (tính theo giờ) được biểu diễn bởi $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$ với $A(1;2)$. Xe có đi qua điểm $N(3;8)$ không? Nếu có thì sau bao lâu?

Bài 19. (**Vận dụng**) Trên một hải đồ (mỗi ô vuông có cạnh ứng với 5 hải lí, phía trên là hướng bắc), vectơ vận tốc của năm con tàu P, Q, R, S, T được biểu diễn bởi các mũi tên xuất phát từ vị trí của tàu; độ dài mỗi mũi tên ứng với quãng đường tàu đi trong 1 giờ.

a) Tàu nào có vectơ vận tốc bằng vectơ vận tốc của tàu P? Tàu nào có vectơ vận tốc ngược hướng với của tàu P?

b) Tính tốc độ (hải lí/giờ) của mỗi tàu. Tàu nào chạy nhanh nhất?

c) Hai tàu P và S có cùng tốc độ. Vectơ vận tốc của chúng có bằng nhau không?

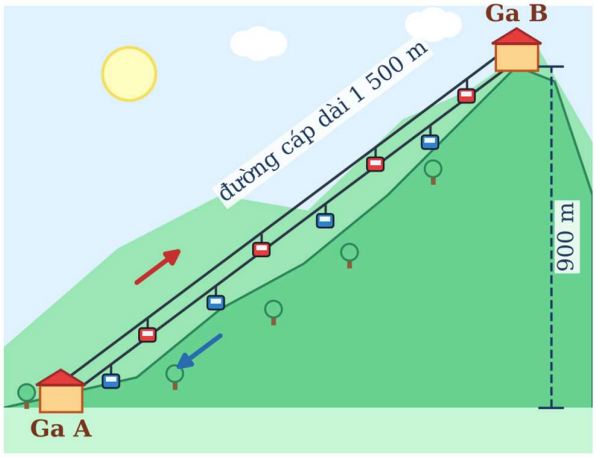


1 ô ↔ 5 hải lí

★ BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Những bài toán giàu ý tưởng, gắn với thực tiễn hoặc đòi hỏi tổng hợp nhiều kiến thức của bài. Hãy tự suy nghĩ trước khi xem lời giải ở phần Hướng dẫn giải.

Điểm nhấn 1. Cáp treo lên đỉnh núi. Một hệ thống cáp treo gồm hai đường cáp thẳng, song song, nối ga A dưới chân núi với ga B trên đỉnh núi. Mỗi đường cáp dài 1 500 m, ga B cao hơn ga A là 900 m. Các cabin chạy đều với tốc độ 6 m/s: trên đường cáp thứ nhất các cabin đi lên, trên đường cáp thứ hai các cabin đi xuống; hai cabin liên tiếp trên cùng một đường cáp cách nhau 120 m.



a) So sánh vectơ vận tốc của hai cabin bất kì trên cùng một đường cáp; của hai cabin trên hai đường cáp khác nhau. Vẽ vectơ vận tốc của một cabin đi lên và một cabin đi xuống theo tỉ lệ 1 cm ứng với 2 m/s.

b) Một cabin đi từ ga A lên ga B mất bao lâu? Mỗi phút có bao nhiêu cabin rời ga A?

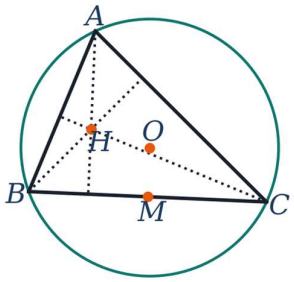
c) Lúc 8 giờ, cabin X rời ga A đi lên, cùng lúc cabin Y rời ga B đi xuống. Sau bao nhiêu giây hai cabin ở cùng độ cao? Độ cao đó hơn ga A bao nhiêu mét?

d) Mỗi giây, cabin đi lên cao thêm bao nhiêu mét theo phương thẳng đứng?

Gợi ý

Các cabin trên một đường cáp chạy cùng hướng, cùng tốc độ. Với câu c và d, hãy đặt quãng đường s cabin đã đi dọc theo cáp và độ cao h tương ứng, rồi dùng hai tam giác đồng dạng.

Điểm nhấn 2. Hình bình hành ẩn quanh trực tâm. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R; H là trực tâm, M là trung điểm của BC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O và N là trung điểm của AH.



a) Chứng minh $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$; suy ra M là trung điểm của HA'.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AH}$ và $AH = 2OM$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NH} = \overrightarrow{OM}$. Từ đó suy ra $MN = R$ và trung điểm của OH cũng là trung điểm của MN.

Gợi ý

AA' là đường kính, nên các góc $\widehat{ABA'}$, $\widehat{ACA'}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. So sánh $A'C$ với BH, $A'B$ với CH (cùng vuông góc với một đường thẳng). Ở câu b, tìm một đường trung bình.

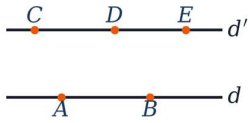
C LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(Mỗi câu chỉ chọn một phương án.)*

Câu 1. Vectơ có điểm đầu D, điểm cuối E được kí hiệu là

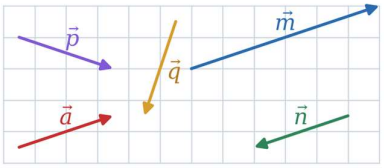
A. $\overrightarrow{ED}$ **B.** $\overrightarrow{DE}$ **C.** DE **D.** $\left|\overrightarrow{DE}\right|$

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Trên d lấy hai điểm phân biệt A, B; trên d' lấy ba điểm phân biệt C, D, E. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; E\}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là



A. 8 **B.** 20 **C.** 4 **D.** 6

Câu 3. Trên lưới ô vuông ở hình bên, vectơ nào **ngược hướng** với $\vec{a}$?



A. $\vec{n}$ **B.** $\vec{m}$ **C.** $\vec{p}$ **D.** $\vec{q}$

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và có cùng độ dài. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương
B. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ có chung điểm đầu thì $\vec{a} = \vec{b}$
C. Nếu $\vec{a} \neq \vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng
D. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} = \vec{b}$

Câu 5. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\left|\vec{0}\right| = 0$
B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ
C. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ
D. $\overrightarrow{AA} \neq \overrightarrow{BB}$ với hai điểm phân biệt A, B

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{BA}$ **D.** $\overrightarrow{AD}$

Câu 7. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ **B.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ **D.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Câu 8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là

A. 2 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** 1

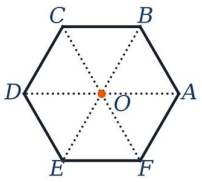
Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. a **B.** $2a$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 10. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương
C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$
D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{OB}$?



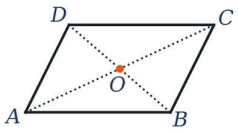
A. $\overrightarrow{EO}$ **B.** $\overrightarrow{BO}$ **C.** $\overrightarrow{OC}$ **D.** $\overrightarrow{EB}$

Câu 12. Trên một bản đồ thời tiết, vận tốc gió tại một trạm quan trắc được biểu diễn bởi vectơ dài 2,5 cm, hướng về phía đông bắc, theo tỉ lệ 1 cm ứng với 8 km/h. Gió tại trạm đó

A. thổi về phía đông bắc với tốc độ 3,2 km/h
B. thổi về phía tây nam với tốc độ 20 km/h
C. thổi về phía đông bắc với tốc độ 20 km/h
D. thổi về phía đông bắc với tốc độ 10,5 km/h

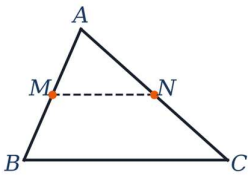
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai *(Ở mỗi ý a), b), c), d) chọn Đúng hoặc Sai.)*

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, không phải là hình chữ nhật.



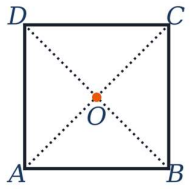
Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$.	☐	☐
d)	$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.	☐	☐

Câu 2. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.	☐	☐

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 6, tâm O.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6\sqrt{2}$.	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 3$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.	☐	☐
d)	Có đúng 6 vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$, cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (kể cả $\overrightarrow{AC}$).	☐	☐

Câu 4. Hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ cùng đặt tại điểm O của một vật, $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = 50$ N; hai lực cùng phương nhưng ngược hướng.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$.	☐	☐
b)	Giá của $\overrightarrow{F_1}$ và giá của $\overrightarrow{F_2}$ trùng nhau.	☐	☐
c)	Nếu vẽ theo tỉ lệ 1 cm ứng với 10 N thì mỗi vectơ lực dài 5 cm.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ là hai lực cân bằng.	☐	☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

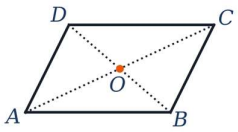
Câu 1. Từ n điểm phân biệt ($n \geq 2$) lập được đúng 56 vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong n điểm đó. Tìm n.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 8$, $AC = 15$, M là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{AM}\right|$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. (**Vận dụng cao**) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Xét tất cả các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$; hai vectơ bằng nhau chỉ tính là một. Có bao nhiêu vectơ đôi một khác nhau?



Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Cho tam giác đều ABC cạnh 6, G là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{AG}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp số: | | | | |

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 7. KHÁI NIỆM VECTƠ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Vectơ là

A. một đoạn thẳng **B.** một đường thẳng
C. một tia **D.** một đoạn thẳng có hướng

Câu 2. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. khoảng cách giữa hai điểm A và B
B. số đo góc giữa đường thẳng AB và trục Ox
C. toạ độ của điểm B
D. luôn bằng 1

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình vuông và có độ dài bằng cạnh của hình vuông là

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 12

Câu 4. Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. đoạn thẳng AB **B.** đường thẳng AB **C.** tia AB **D.** điểm B

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{DA}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{CD}$

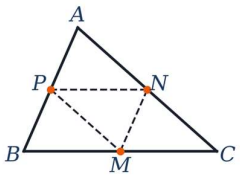
Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, A nằm giữa B và C. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng **B.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng **D.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng

Câu 7. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai vectơ có cùng độ dài thì bằng nhau
B. Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng
C. Hai vectơ bằng nhau thì có cùng độ dài
D. Hai vectơ ngược hướng thì không cùng phương

Câu 8. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{MN}$?



A. $\overrightarrow{PA}$ **B.** $\overrightarrow{AP}$ **C.** $\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{PB}$

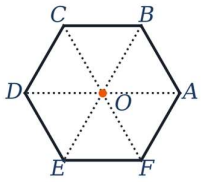
Câu 9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 4$. Độ dài của vecto $\overrightarrow{AB}$ là

A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 4 **D.** $4\sqrt{2}$

Câu 10. Với điểm O và vecto $\vec{a}$ cho trước, số điểm A thoả mãn $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ là

A. 0 **B.** vô số **C.** 2 **D.** 1

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vecto nào sau đây **ngược hướng** với $\overrightarrow{OA}$?



A. $\overrightarrow{CB}$ **B.** $\overrightarrow{FE}$ **C.** $\overrightarrow{EF}$ **D.** $\overrightarrow{OB}$

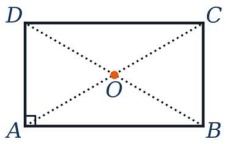
Câu 12. Thả một viên bi sắt vào cốc nước, viên bi chìm xuống đáy cốc. Khi viên bi đang chìm, trọng lực $\vec{P}$ và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ tác dụng lên viên bi

A. cùng hướng, $|\vec{P}| > |\vec{F}|$ **B.** không cùng phương

C. ngược hướng, $|\vec{P}| < |\vec{F}|$ **D.** ngược hướng, $|\vec{P}| > |\vec{F}|$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 2$, tâm O.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương, ngược hướng.	☐	☐

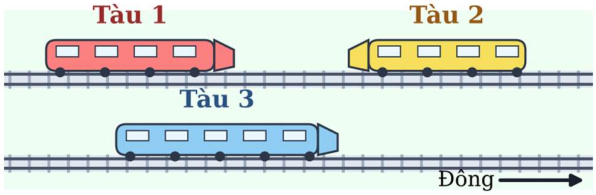
Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ thoả mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AB \parallel CD$ và $AB = CD$.	☐	☐
b)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.	☐	☐

Câu 3. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.	☐	☐
b)	Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ và $\vec{b}=\vec{c}$ thì $\vec{a}=\vec{c}$.	☐	☐
c)	Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương và $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert$ thì $\vec{a}=\vec{b}$.	☐	☐
d)	Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì giá của $\vec{a}$ và giá của $\vec{b}$ trùng nhau.	☐	☐

Câu 4. Trên hai đường ray thẳng, song song, chạy theo hướng đông – tây có ba đoàn tàu: tàu 1 chạy về phía đông với vận tốc 60 km/h; tàu 2 chạy về phía tây với vận tốc 60 km/h; tàu 3 chạy về phía đông với vận tốc 40 km/h. Gọi $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ lần lượt là vectơ vận tốc của ba tàu.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_2}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_3}$ cùng hướng.	☐	☐
c)	Nếu vẽ theo tỉ lệ 1 cm ứng với 20 km/h thì vectơ $\overrightarrow{v_3}$ dài 2 cm.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{v_2}$ và $\overrightarrow{v_3}$ cùng hướng.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

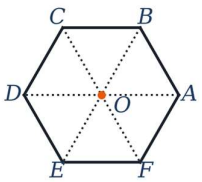
Câu 1. Trên đường thẳng d lấy năm điểm phân biệt A, B, C, D, E theo thứ tự đó. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối là hai trong năm điểm đó, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ (kể cả $\overrightarrow{AB}$)?

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=5$, $BC=12$. Tính $\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

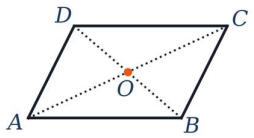
Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O có cạnh bằng 2. Tính $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



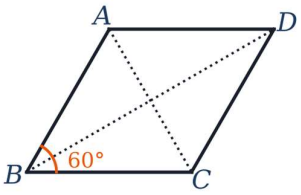
Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$, bằng $\overrightarrow{OB}$ (kể cả $\overrightarrow{OB}$)?



Đáp số: | | | | |

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 5 và $\widehat{ABC} = 60°$. Tính $\left|\overrightarrow{BD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Đáp số: | | | | |

Câu 6. Trên một sơ đồ, lực 25 N được biểu diễn bởi vectơ dài 1 cm. Một lực có độ lớn 175 N được biểu diễn bởi vectơ dài bao nhiêu xentimét?

Đáp số: | | | | |

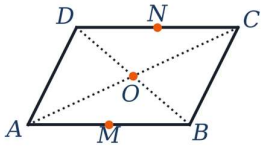
PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.

b) Tìm các vectơ (khác $\overrightarrow{OM}$) bằng $\overrightarrow{OM}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O; M; N\}$.

c) Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.



Bài 2. (**Vận dụng**) Một con thuyền vượt sông theo hướng vuông góc với bờ với vận tốc riêng 4 m/s; dòng nước chảy song song với bờ với vận tốc 3 m/s.

a) Vẽ (theo tỉ lệ 1 cm ứng với 1 m/s) vectơ vận tốc riêng $\vec{v_1}$ của thuyền và vectơ vận tốc dòng nước $\vec{v_2}$, có chung điểm đầu. Hai vectơ đó có cùng phương không?

b) Vectơ vận tốc thực $\vec{v}$ của thuyền được biểu diễn bởi đường chéo (xuất phát từ điểm đầu chung) của hình chữ nhật dựng trên hai vectơ $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$. Tính độ lớn vận tốc thực của thuyền.

— HẾT —

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 7. KHÁI NIỆM VECTƠ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Vectơ-không là vectơ

A. có độ dài bằng 1
B. có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau
C. có giá song song với trục Ox
D. không có hướng

Câu 2. Với hai điểm phân biệt A, B, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
B. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng
D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ không cùng phương

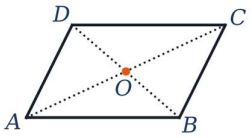
Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng là giá của các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong bốn điểm đó là

A. 6 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 12

Câu 4. Hai vectơ cùng hướng thì

A. bằng nhau
B. cùng độ dài
C. cùng phương
D. có chung điểm đầu

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{BO}$?



A. $\overrightarrow{OD}$ **B.** $\overrightarrow{DO}$ **C.** $\overrightarrow{OB}$ **D.** $\overrightarrow{CO}$

Câu 6. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hai vectơ nào sau đây ngược hướng?

A. $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ **C.** $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ **D.** $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BA}$

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $2a$

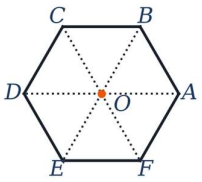
Câu 8. Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$?

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** vô số

Câu 9. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

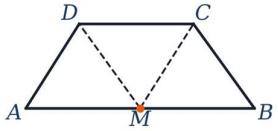
A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Câu 10. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{AF}$?



A. $\overrightarrow{BO}$ **B.** $\overrightarrow{BE}$ **C.** $\overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{FA}$

Câu 11. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD với $AB = 2CD$; M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?



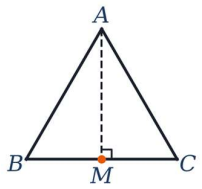
A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CM}$

Câu 12. Máy bay A bay về hướng bắc với vận tốc 700 km/h, máy bay B bay về hướng nam với vận tốc 700 km/h. Hai vectơ vận tốc của hai máy bay

A. bằng nhau **B.** cùng hướng
C. cùng độ dài, ngược hướng **D.** không cùng phương

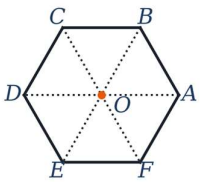
PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$, M là trung điểm của BC.



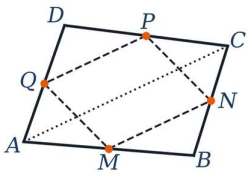
Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM}$.	☐	☐

Câu 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OE}$ cùng hướng.	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$.	☐	☐

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.



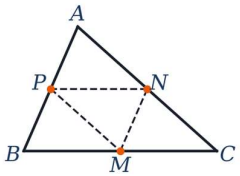
Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.	☐	☐

Câu 4. Hai bạn An và Bình cùng làm cho một chiếc xe chuyển động thẳng trên đường: An kéo ở phía trước với lực 80 N, Bình đẩy ở phía sau với lực 60 N; cả hai lực đều theo hướng chuyển động của xe. Lực cản tác dụng lên xe có độ lớn 140 N và ngược hướng chuyển động.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Lực của An và lực của Bình ngược hướng.	☐	☐
b)	Lực cản ngược hướng với lực của An.	☐	☐
c)	Vectơ lực cản bằng vectơ lực của Bình.	☐	☐
d)	Nếu lực của An được biểu diễn bởi vectơ dài 4 cm thì, với cùng tỉ lệ, lực của Bình được biểu diễn bởi vectơ dài 3 cm.	☐	☐

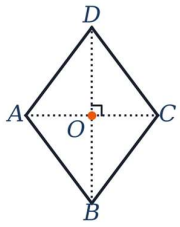
PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; M; N; P\}$, cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ (kể cả $\overrightarrow{BC}$)?



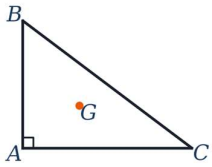
Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 6, BD = 8$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.



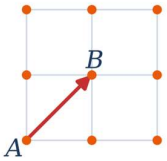
Đáp số: | | | | |

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9, AC = 12$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính $\left|\overrightarrow{BG}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



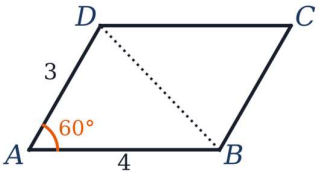
Đáp số: | | | | |

Câu 4. Cho chín điểm là các nút của một lưới ô vuông 2×2 như hình bên. Có bao nhiêu vectơ, có điểm đầu, điểm cuối là hai trong chín điểm đó, bằng $\overrightarrow{AB}$ (kể cả $\overrightarrow{AB}$)?



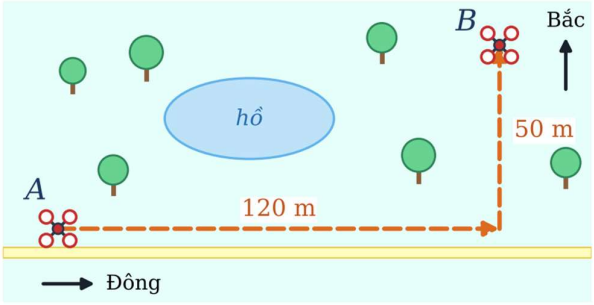
Đáp số: | | | | |

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, AD = 3$ và $\widehat{BAD} = 60°$. Tính $\left|\overrightarrow{BD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Đáp số: | | | | |

Câu 6. Một flycam cất cánh tại điểm A của công viên, bay theo hướng đông 120 m rồi bay theo hướng bắc 50 m thì đến điểm B (độ cao không đổi). Tính độ dài (theo mét) của vectơ dịch chuyển $\overrightarrow{AB}$.



Đáp số:

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho tam giác ABC. Dựng các điểm D, E sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.

a) Chứng minh $ABCD$ và $AEBC$ là các hình bình hành.

b) Chứng minh A là trung điểm của DE.

c) Tìm các vectơ (khác $\overrightarrow{AB}$) bằng $\overrightarrow{AB}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; E\}$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (mỗi đơn vị trên các trục ứng với 10 m), một robot giao hàng xuất phát từ điểm $M(1; 0)$, mỗi phút dịch chuyển đúng bằng vectơ $\overrightarrow{OA}$ với $A(2; 1)$.

a) Sau 1 phút, 2 phút, 3 phút, robot ở những điểm nào?

b) Robot có đi qua điểm $N(9; 4)$ không? Nếu có thì sau bao nhiêu phút?

c) Gọi P là vị trí của robot sau 3 phút. Chứng minh $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$ và $\left|\overrightarrow{MP}\right| = 3\left|\overrightarrow{OA}\right|$.

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BÀI 7. KHÁI NIỆM VECTƠ · Mỗi bài gồm đề và lời giải ngay bên dưới

B LỜI GIẢI BÀI TẬP CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vectơ – Độ dài vectơ

Bài 1. (**Vận dụng**) Cho bảy điểm phân biệt, trong đó có đúng bốn điểm nằm trên đường thẳng d; ngoài các bộ ba điểm nằm trên d, không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong bảy điểm đó?

b) Có bao nhiêu vectơ trong số đó có giá là đường thẳng d?

c) Các vectơ đó có tất cả bao nhiêu giá khác nhau?

Lời giải

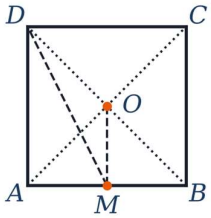
a) Điểm đầu có 7 cách chọn, điểm cuối có 6 cách chọn. Vậy có $7 \cdot 6 = 42$ vectơ khác $\vec{0}$.

b) Vectơ có giá d phải có cả điểm đầu và điểm cuối thuộc d, tức là thuộc bốn điểm nằm trên d. Có $4 \cdot 3 = 12$ vectơ như vậy.

c) Mỗi cặp hai điểm (không kể thứ tự) xác định một đường thẳng. Số cặp hai điểm là $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$; trong đó có $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ cặp nằm trên d nhưng chúng chỉ cho **một** đường thẳng d. Các cặp còn lại cho các đường thẳng đôi một khác nhau (vì không có ba điểm nào khác thẳng hàng).

Vậy số giá là $21 - 6 + 1 = 16$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, tâm O; M là trung điểm của AB. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MD}$.



Lời giải

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}$, nên $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2a\sqrt{2}$.

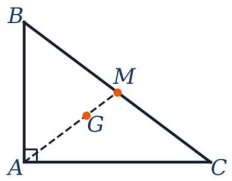
Hai đường chéo của hình vuông bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường, nên $OB = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$.

OM là đường trung bình của tam giác ABC nên $OM = \frac{BC}{2} = a$.

Tam giác AMD vuông tại A, $AM = a$, $AD = 2a$, nên $MD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2a\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = a\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{MD}\right| = a\sqrt{5}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác. Tính $\left|\overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AM}\right|$, $\left|\overrightarrow{AG}\right|$.



Lời giải

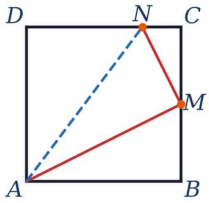
$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \frac{BC}{2} = 5$.

G nằm trên đoạn AM và $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{10}{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 10$, $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \frac{10}{3}$.

Bài 4. (**Vận dụng**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 1$. Tính $\left|\overrightarrow{AM}\right|$, $\left|\overrightarrow{MN}\right|$, $\left|\overrightarrow{AN}\right|$, từ đó chứng minh tam giác AMN vuông.



Lời giải

Tam giác ABM vuông tại B, $BM = 2$: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$.

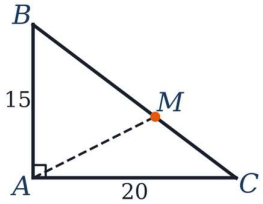
Tam giác MCN vuông tại C, $MC = 2$, $CN = 1$: $MN = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Tam giác ADN vuông tại D, $DN = DC - CN = 3$: $AN = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Ta có $AM^2 + MN^2 = 20 + 5 = 25 = AN^2$. Theo định lí Pythagore đảo, tam giác AMN vuông tại M.

Vậy $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 2\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{AN}\right| = 5$ và tam giác AMN vuông tại M.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 15, AC = 20$. Điểm M thay đổi trên cạnh BC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{AM}\right|$; khi đó tính $\left|\overrightarrow{BM}\right|$.



Lời giải

$\left|\overrightarrow{AM}\right| = AM$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A. Với mọi M thuộc BC, đường vuông góc ngắn hơn đường xiên nên $AM \geq AH$; dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$.

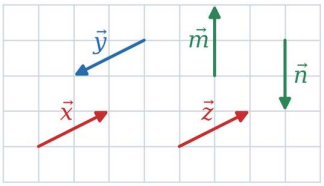
$BC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Từ $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ (hai lần diện tích) suy ra $AH = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Khi $M \equiv H$: theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, $AB^2 = BH \cdot BC$, nên $BM = BH = \frac{225}{25} = 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ là 12, đạt được khi $\left|\overrightarrow{BM}\right| = 9$.

Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng

Bài 6. Quan sát hình bên. Chỉ ra các cặp vectơ cùng phương; trong đó, cặp nào cùng hướng, cặp nào ngược hướng?



Lời giải

Trên lưới, $\vec{x}$ và $\vec{z}$ đều đi sang phải 2 ô, lên 1 ô; $\vec{y}$ đi sang trái 2 ô, xuống 1 ô. Giá của ba vectơ này có cùng độ dốc nên song song hoặc trùng nhau: $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đôi một cùng phương.

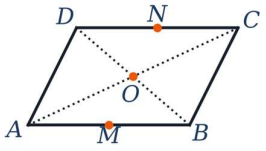
$\vec{x}$ và $\vec{z}$ cùng hướng (hơn nữa cùng độ dài nên $\vec{x} = \vec{z}$); $\vec{y}$ ngược hướng với cả $\vec{x}$ và $\vec{z}$.

$\vec{m}$ và $\vec{n}$ có giá thẳng đứng nên cùng phương; $\vec{m}$ hướng lên, $\vec{n}$ hướng xuống nên chúng ngược hướng.

Giá xiên của $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không song song với giá thẳng đứng của $\vec{m}$, $\vec{n}$, nên các cặp còn lại không cùng phương.

Vậy có bốn cặp cùng phương: $(\vec{x};\vec{y})$, $(\vec{x};\vec{z})$, $(\vec{y};\vec{z})$, $(\vec{m};\vec{n})$; chỉ cặp $(\vec{x};\vec{z})$ cùng hướng, ba cặp còn lại ngược hướng.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tìm các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A;B;C;D;O;M;N\}$ và **ngược hướng** với $\overrightarrow{AM}$.



Lời giải

Vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AM}$ trước hết phải cùng phương với nó, tức là có giá song song hoặc trùng với AB.

Trong bảy điểm đã cho, các đường thẳng song song hoặc trùng với AB và chứa ít nhất hai điểm là AB (chứa A, M, B) và DC (chứa D, N, C). Đường thẳng MN đi qua O nhưng song song với AD, không song song với AB.

$\overrightarrow{AM}$ có chiều từ A đến B; $\overrightarrow{DC}$ cũng có chiều đó (vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$). Vectơ ngược hướng phải có chiều từ B về A (trên AB) hoặc từ C về D (trên DC).

Trên AB: $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BA}$; trên DC: $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{CD}$.

Vậy có 6 vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AM}$ như đã liệt kê.

Bài 8. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ và $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{c}$.

c) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

Lời giải

a) Đúng. Ba vectơ cùng phương (giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng song song hoặc trùng với giá của $\vec{c}$), và trên phương chung đó $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều có chiều của $\vec{c}$, nên $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

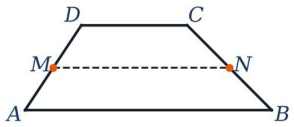
b) Đúng. Ba vectơ cùng phương; trên phương chung, $\vec{a}$ và $\vec{c}$ đều có chiều ngược với chiều của $\vec{b}$, nên $\vec{a}$, $\vec{c}$ có cùng một chiều, tức là cùng hướng.

c) Sai. Với tam giác ABC, lấy $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$: hai vectơ không cùng phương nên $\vec{b}$ không cùng hướng và cũng không ngược hướng với $\vec{a}$.

Bài 9. (**Vận dụng**) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$ đôi một cùng hướng.

b) Cho $AB = 7$, $CD = 3$. Tính $\left|\overrightarrow{MN}\right|$. Trong các vectơ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; M; N\}$, có vectơ nào khác $\overrightarrow{MN}$ mà bằng $\overrightarrow{MN}$ không?



Lời giải

a) MN là đường trung bình của hình thang nên $MN \parallel AB \parallel CD$; ba vectơ đã cho cùng phương.
Ba điểm đầu A, M, D nằm trên cạnh bên AD, ba điểm cuối B, N, C nằm trên cạnh bên BC, và các đoạn AB, MN, DC song song với nhau. Vì vậy cả ba vectơ đều có chiều đi từ cạnh bên AD sang cạnh bên BC: chúng đôi một cùng hướng.

b) $MN = \frac{AB+CD}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$, nên $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 5$.

Vectơ bằng $\overrightarrow{MN}$ phải cùng hướng với $\overrightarrow{MN}$, nên nằm trên một trong các đường thẳng AB, MN, CD và có chiều từ cạnh bên AD sang cạnh bên BC. Các vectơ như vậy chỉ có $\overrightarrow{AB}$ (độ dài 7), $\overrightarrow{MN}$ (độ dài 5) và $\overrightarrow{DC}$ (độ dài 3).

Vậy $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 5$ và không có vectơ nào khác $\overrightarrow{MN}$ bằng $\overrightarrow{MN}$. (Điều đó chỉ xảy ra khi $AB = CD$, tức là $ABCD$ là hình bình hành.)

Bài 10. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC. Có tồn tại điểm M sao cho ba vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ đôi một cùng phương không?

Lời giải

Giả sử có điểm M như vậy. Xét hai trường hợp.

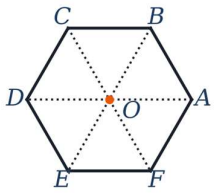
Trường hợp 1: M trùng với một đỉnh, chẳng hạn $M \equiv A$. Khi đó $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$ cùng phương, nên A, B, C thẳng hàng – vô lí.

Trường hợp 2: M khác cả ba đỉnh. $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương và có chung điểm M nên M, A, B thẳng hàng, tức là M thuộc đường thẳng AB. Tương tự, M thuộc đường thẳng AC. Hai đường thẳng AB, AC chỉ có một điểm chung là A, nên $M \equiv A$ – trái với giả thiết của trường hợp này.

Vậy không tồn tại điểm M thoả mãn yêu cầu.

Dạng 3. Hai vectơ bằng nhau – Chứng minh đẳng thức vectơ

Bài 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm các vectơ khác $\overrightarrow{OA}$ mà bằng $\overrightarrow{OA}$, và các vectơ khác $\overrightarrow{AB}$ mà bằng $\overrightarrow{AB}$, có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác hoặc tâm O.



Lời giải

Lục giác đều được chia thành 6 tam giác đều OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA, nên các tứ giác $OABC$, $OAFE$, $ABOF$, $OCDE$ có bốn cạnh bằng nhau, là hình thoi.

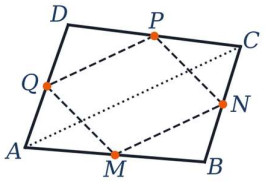
– Bằng $\overrightarrow{OA}$: O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OA}$; hình thoi $OABC$ cho $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$; hình thoi $OAFE$ cho $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}$.

– Bằng $\overrightarrow{AB}$: hình thoi $ABOF$ cho $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AB}$; hình thoi $OABC$ cho $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$; hình thoi $OCDE$ cho $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OC}$, nên $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$.

Không còn vectơ nào khác: các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{OA}$ chỉ nằm trên AD, BC, EF, và ngoài $\overrightarrow{OA}$ chỉ có ba vectơ vừa nêu là cùng hướng, cùng độ dài với nó. Lập luận tương tự cho $\overrightarrow{AB}$ (các đường thẳng AB, FC, ED).

Vậy các vectơ bằng $\overrightarrow{OA}$ là $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EF}$; các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$.

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.



Lời giải

MN là đường trung bình của tam giác ABC: $MN \parallel AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.

QP là đường trung bình của tam giác ADC: $QP \parallel AC$, $QP=\frac{1}{2}AC$ và $\overrightarrow{QP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.

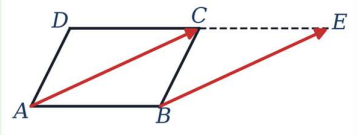
Vậy $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QP}$ cùng hướng và cùng độ dài, tức là $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ (và $MNPQ$ là hình bình hành).

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng điểm E sao cho $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}$, từ đó suy ra C là trung điểm của DE.

Lời giải

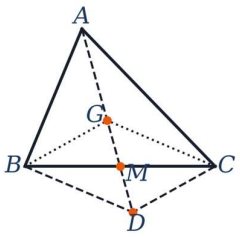
Vì $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$ và B không thuộc đường thẳng AC nên tứ giác $ACEB$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Do đó $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}$.



Hai vecto $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE}$ cùng hướng và có chung điểm C nên D, C, E thẳng hàng và C nằm giữa D, E; lại có $DC = CE$. Vậy C là trung điểm của DE.

Bài 14. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G; M là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng với G qua M. Chứng minh $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{GC}$ và $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$.



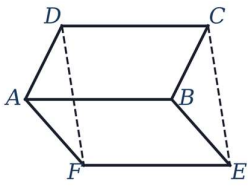
Lời giải

Tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo BC, GD cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{GC}$.

G là trọng tâm nên G nằm trên đoạn AM và $AG = 2GM$. D đối xứng với G qua M nên D nằm trên tia GM, $GD = 2GM$.

Vậy A, G, M, D thẳng hàng theo thứ tự đó, $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{GD}$ cùng hướng, $AG = GD = 2GM$. Suy ra $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$, tức là G là trung điểm của AD.

Bài 15. (**Vận dụng**) Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$, trong đó F không thuộc đường thẳng CD. Chứng minh $DCEF$ là hình bình hành và $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}$.



Lời giải

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $ABEF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$. Suy ra $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$.

Bốn điểm D, C, E, F không thẳng hàng (vì F không thuộc đường thẳng CD) và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$, nên tứ giác $DCEF$ là hình bình hành.

Trong hình bình hành $DCEF$, hai cạnh đối DF, CE song song, bằng nhau và cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}$.

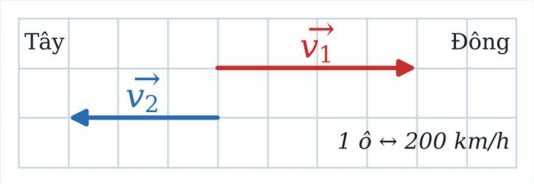
Dạng 4. Vectơ biểu diễn lực, vận tốc – Bài toán thực tế

Bài 16. Một máy bay bay về hướng đông với vận tốc 800 km/h, một máy bay khác bay về hướng tây với vận tốc 600 km/h. Vẽ các vectơ vận tốc của hai máy bay (1 cm ứng với 200 km/h). Hai vectơ vận tốc đó có quan hệ gì?

Lời giải

Gọi $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ lần lượt là vectơ vận tốc của hai máy bay.

Theo tỉ lệ 1 cm ứng với 200 km/h: $\overrightarrow{v_1}$ dài $800:200=4$ (cm), hướng đông; $\overrightarrow{v_2}$ dài $600:200=3$ (cm), hướng tây (mỗi ô trong hình ứng với 1 cm).



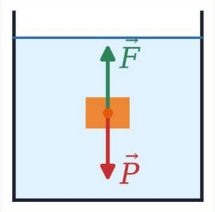
Hướng đông và hướng tây ngược nhau nên $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ cùng phương, ngược hướng, và $\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\frac{4}{3}\left|\overrightarrow{v_2}\right|$.

Bài 17. Một vật chìm hoàn toàn và **lơ lửng** trong nước. Trọng lực $\vec{P}$ và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ tác dụng lên vật có quan hệ gì về phương, hướng và độ dài?

Lời giải

Vật lơ lửng nghĩa là vật đứng yên trong nước, nên $\vec{P}$ và $\vec{F}$ là hai lực cân bằng: $\left|\vec{P}\right|=\left|\vec{F}\right|$.

Trọng lực có phương thẳng đứng, hướng xuống; lực đẩy Archimedes có phương thẳng đứng, hướng lên.



Vậy $\vec{P}$ và $\vec{F}$ cùng phương, ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

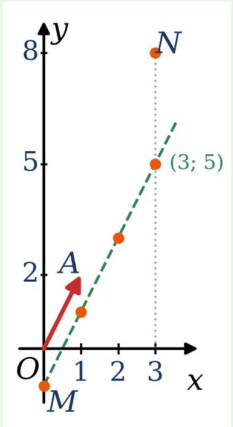
Bài 18. (**Vận dụng**) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (mỗi đơn vị trên các trục ứng với 10 km), một xe xuất phát từ $M(0;-1)$ chuyển động thẳng đều; vectơ vận tốc của xe (tính theo giờ) được biểu diễn bởi $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$ với $A(1;2)$. Xe có đi qua điểm $N(3;8)$ không? Nếu có thì sau bao lâu?

Lời giải

Vì $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$ với $O(0;0)$, $A(1;2)$ nên mỗi giờ xe dịch chuyển như đi từ O đến A: hoành độ tăng 1, tung độ tăng 2.

Sau t giờ xe ở điểm $(t;-1+2t)$; chẳng hạn sau 1, 2, 3 giờ xe ở $(1;1)$, $(2;3)$, $(3;5)$.

Muốn hoành độ bằng 3 thì $t=3$; khi đó tung độ là $-1+2\cdot 3=5\neq 8$.



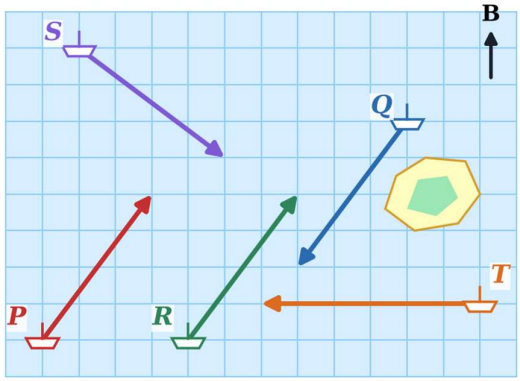
Vậy xe **không** đi qua N (sau 3 giờ xe ở $(3;5)$, nằm phía dưới N).

Bài 19. (**Vận dụng**) Trên một hải đồ (mỗi ô vuông có cạnh ứng với 5 hải lí, phía trên là hướng bắc), vectơ vận tốc của năm con tàu P, Q, R, S, T được biểu diễn bởi các mũi tên xuất phát từ vị trí của tàu; độ dài mỗi mũi tên ứng với quãng đường tàu đi trong 1 giờ.

a) Tàu nào có vectơ vận tốc bằng vectơ vận tốc của tàu P? Tàu nào có vectơ vận tốc ngược hướng với của tàu P?

b) Tính tốc độ (hải lí/giờ) của mỗi tàu. Tàu nào chạy nhanh nhất?

c) Hai tàu P và S có cùng tốc độ. Vectơ vận tốc của chúng có bằng nhau không?



1 ô ↔ 5 hải lí

Lời giải

Đọc trên lưới (sang phải, lên trên là dương): mũi tên của P và R đều đi sang phải 3 ô, lên 4 ô; của Q đi sang trái 3 ô, xuống 4 ô; của S đi sang phải 4 ô, xuống 3 ô; của T đi sang trái 6 ô.

a) Mũi tên của R cùng hướng và cùng độ dài với mũi tên của P, nên vectơ vận tốc của tàu R bằng vectơ vận tốc của tàu P (dù hai tàu ở hai nơi khác nhau). Mũi tên của Q có giá song song với giá mũi tên của P, chiều ngược lại, nên tàu Q có vectơ vận tốc ngược hướng với tàu P.

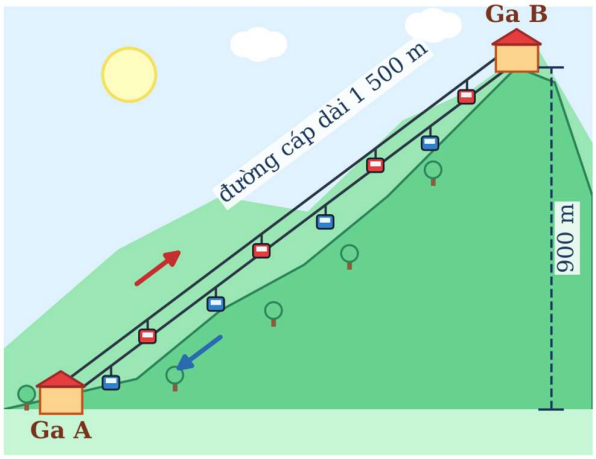
b) Mũi tên của P, Q, R, S là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông 3 ô và 4 ô, nên dài $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ô, ứng với $5\cdot 5=25$ (hải lí/giờ). Mũi tên của T dài 6 ô, ứng với 30 hải lí/giờ.

Vậy bốn tàu P, Q, R, S cùng chạy 25 hải lí/giờ; tàu T chạy nhanh nhất, 30 hải lí/giờ.

c) Không. Mũi tên của S (phải 4, xuống 3) không song song với mũi tên của P (phải 3, lên 4) – thực ra hai giá vuông góc với nhau – nên hai vectơ không cùng phương, càng không bằng nhau. Cùng tốc độ chỉ là cùng độ dài.

★ LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Điểm nhấn 1. Cáp treo lên đỉnh núi. Một hệ thống cáp treo gồm hai đường cáp thẳng, song song, nối ga A dưới chân núi với ga B trên đỉnh núi. Mỗi đường cáp dài 1 500 m, ga B cao hơn ga A là 900 m. Các cabin chạy đều với tốc độ 6 m/s: trên đường cáp thứ nhất các cabin đi lên, trên đường cáp thứ hai các cabin đi xuống; hai cabin liên tiếp trên cùng một đường cáp cách nhau 120 m.



a) So sánh vectơ vận tốc của hai cabin bất kì trên cùng một đường cáp; của hai cabin trên hai đường cáp khác nhau. Vẽ vectơ vận tốc của một cabin đi lên và một cabin đi xuống theo tỉ lệ 1 cm ứng với 2 m/s.

b) Một cabin đi từ ga A lên ga B mất bao lâu? Mỗi phút có bao nhiêu cabin rời ga A?

c) Lúc 8 giờ, cabin X rời ga A đi lên, cùng lúc cabin Y rời ga B đi xuống. Sau bao nhiêu giây hai cabin ở cùng độ cao? Độ cao đó hơn ga A bao nhiêu mét?

d) Mỗi giây, cabin đi lên cao thêm bao nhiêu mét theo phương thẳng đứng?

Lời giải

a) Các cabin trên cùng một đường cáp chạy theo cùng một hướng (dọc theo đường cáp) với cùng tốc độ 6 m/s, nên vectơ vận tốc của chúng **bằng nhau**, dù các cabin ở những vị trí khác nhau.

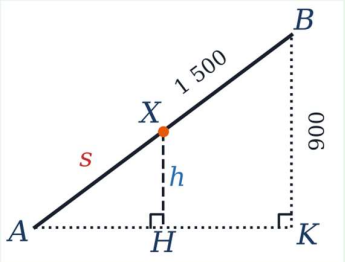
Hai đường cáp song song, một chiều lên, một chiều xuống, nên vectơ vận tốc của hai cabin trên hai đường cáp **cùng phương, ngược hướng** và cùng độ dài; chúng không bằng nhau.

Theo tỉ lệ 1 cm ứng với 2 m/s, mỗi vectơ vận tốc dài $6:2=3$ (cm): vectơ của cabin đi lên hướng theo chiều từ A đến B, vectơ của cabin đi xuống hướng theo chiều từ B đến A, hai vectơ nằm trên hai đường thẳng song song.

b) Thời gian đi hết đường cáp: $1500:6=250$ (giây), tức là 4 phút 10 giây.

Hai cabin liên tiếp cách nhau 120 m nên cabin sau rời ga chậm hơn cabin trước $120:6=20$ (giây). Mỗi phút có $60:20=3$ cabin rời ga A.

c) Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ B xuống mặt phẳng ngang qua A: tam giác AKB vuông tại K, $AB=1500$ m, $BK=900$ m (hình dưới).



Một cabin đã đi được quãng đường s (m) dọc theo cáp tính từ A thì ở điểm X; hạ $XH \perp AK$. Hai tam giác vuông AHX và AKB đồng dạng nên $\frac{h}{900} = \frac{s}{1500}$, tức là độ cao của cabin so với ga A là $h = \frac{3}{5}s$. Độ cao tỉ lệ với quãng đường đã đi dọc cáp.

Sau t giây, X đã đi $6t$ m tính từ A; Y đã đi $6t$ m tính từ B, tức là cách A (dọc theo cáp) $1500 - 6t$ m. Hai cabin cùng độ cao khi $6t = 1500 - 6t$, tức là $t = 125$ (giây).

Khi đó mỗi cabin cách điểm đầu dọc theo cáp $6 \cdot 125 = 750$ m, đúng nửa đường cáp, và độ cao so với ga A là $h = \frac{3}{5} \cdot 750 = 450$ (m).

d) Mỗi giây cabin đi được 6 m dọc theo cáp, nên lên cao thêm $\frac{3}{5} \cdot 6 = 3{,}6$ (m).

Vậy: vận tốc các cabin cùng đường cáp bằng nhau, khác đường cáp thì ngược hướng; một chuyến lên mất 250 giây, mỗi phút có 3 cabin rời ga; X và Y ngang nhau sau 125 giây, ở độ cao 450 m; mỗi giây cabin lên cao 3,6 m.

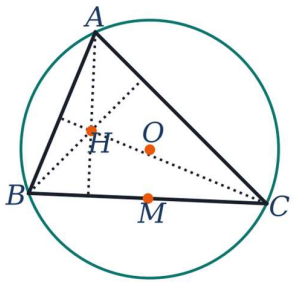
Nhận xét – Mở rộng

Hai vectơ bằng nhau không cần "nằm chồng lên nhau": mọi cabin trên một đường cáp, ở bất kì vị trí nào, đều có **cùng một** vectơ vận tốc. Nói cách khác, một vectơ có thể "đặt" tại bất kì điểm nào: với mỗi điểm O, có duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA}$ bằng vectơ đã cho.

Con số 3,6 m/s ở câu d chính là độ dài **hình chiếu** của vectơ vận tốc lên phương thẳng đứng; phần hình chiếu lên phương ngang là $\frac{4}{5} \cdot 6 = 4{,}8$ m/s, và $3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 6^2$. Ở Bài 8, ta sẽ thấy vectơ vận tốc bằng tổng của hai vectơ thành phần này.

Sai lầm thường gặp ở câu c: cho rằng hai cabin gặp nhau ở độ cao $900 : 2 = 450$ m "vì đi được nửa đường" mà không giải thích – lập luận đúng phải dựa vào việc độ cao tỉ lệ với quãng đường dọc theo cáp.

Điểm nhấn 2. Hình bình hành ẩn quanh trực tâm. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R; H là trực tâm, M là trung điểm của BC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O và N là trung điểm của AH.



a) Chứng minh $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$; suy ra M là trung điểm của HA'.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AH}$ và $AH = 2OM$.

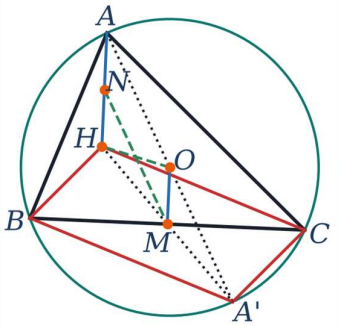
c) Chứng minh $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NH} = \overrightarrow{OM}$. Từ đó suy ra $MN = R$ và trung điểm của OH cũng là trung điểm của MN.

Lời giải

a) AA' là đường kính nên $\widehat{ACA'} = 90°$, tức là $A'C \perp AC$. Mặt khác $BH \perp AC$ (BH nằm trên đường cao kẻ từ B). Suy ra $BH \parallel A'C$.

Tương tự, $\widehat{ABA'} = 90°$ nên $A'B \perp AB$; mà $CH \perp AB$, nên $CH \parallel A'B$.

Tứ giác $BHCA'$ có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$.



Trong hình bình hành $BHCA'$, hai đường chéo BC và HA' cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Trung điểm của BC là M, nên M cũng là trung điểm của HA'.

b) Trong tam giác AHA': O là trung điểm của AA', M là trung điểm của $A'H$, nên OM là đường trung bình. Do đó $OM \parallel AH$ và $OM = \frac{1}{2}AH$, tức là $AH = 2OM$.

Hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AH}$ đều có chiều từ cạnh AA' sang cạnh $A'H$ (điểm đầu O, A thuộc cạnh AA'; điểm cuối M, H thuộc cạnh $A'H$), nên chúng cùng hướng.

c) N là trung điểm của AH nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NH}$ và $AN = NH = \frac{1}{2}AH = OM$. Các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AH}$, do đó cùng hướng với $\overrightarrow{OM}$. Vậy $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NH} = \overrightarrow{OM}$.

Từ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OM}$: vì tam giác không cân tại A nên O không thuộc đường cao AH, bốn điểm A, N, M, O không thẳng hàng; tứ giác $ANMO$ là hình bình hành, suy ra $MN = OA = R$.

Từ $\overrightarrow{NH} = \overrightarrow{OM}$: tứ giác $NHMO$ là hình bình hành, nên hai đường chéo NM và HO cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy trung điểm của OH cũng là trung điểm của MN.

Nhận xét – Mở rộng

Gọi I là trung điểm của OH. Theo câu c, I là trung điểm của MN và $MN = R$, nên $IM = IN = \frac{R}{2}$. Làm tương tự với các cạnh CA, AB ta được sáu điểm (ba trung điểm cạnh, ba trung điểm của HA, HB, HC) cùng cách I một khoảng $\frac{R}{2}$: đó là **đường tròn Euler** (đường tròn chín điểm).

Toàn bộ lời giải chỉ dùng một ý: **hai vectơ bằng nhau ⇔ hình bình hành**, kết hợp tính chất hai đường chéo của hình bình hành. Câu b còn cho một hệ thức đẹp: $AH = 2OM$; ở Bài 9 ta sẽ viết gọn thành $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OM}$.

Sai lầm thường gặp: kết luận $BHCA'$ là hình bình hành chỉ vì "M là trung điểm của BC" – thực ra ta chưa biết M là trung điểm của HA'; điều đó là **hệ quả**, không phải giả thiết.

C LỜI GIẢI LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Vectơ có điểm đầu D, điểm cuối E được kí hiệu là

A. $\overrightarrow{ED}$ **B.** $\overrightarrow{DE}$ **C.** DE **D.** $\left|\overrightarrow{DE}\right|$

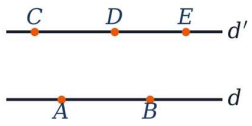
Lời giải

Kí hiệu vectơ ghi điểm đầu trước, điểm cuối sau và có mũi tên ở phía trên, nên vectơ có điểm đầu D, điểm cuối E là $\overrightarrow{DE}$.

Còn $\overrightarrow{ED}$ là vectơ có điểm đầu E, điểm cuối D; DE là kí hiệu đoạn thẳng (hoặc độ dài đoạn thẳng); $\left|\overrightarrow{DE}\right|$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{DE}$.

Chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Trên d lấy hai điểm phân biệt A, B; trên d' lấy ba điểm phân biệt C, D, E. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; E\}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là



A. 8 **B.** 20 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải

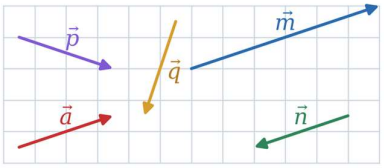
Vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ phải có giá song song hoặc trùng với d, tức là có cả điểm đầu và điểm cuối cùng nằm trên d hoặc cùng nằm trên d'.

Trên d có $2 \cdot 1 = 2$ vectơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})$; trên d' có $3 \cdot 2 = 6$ vectơ. Vậy có $2 + 6 = 8$ vectơ.

Đáp số 20 là số **tất cả** các vectơ khác $\vec{0}$ lập từ năm điểm $(5 \cdot 4)$, kể cả các vectơ nối một điểm của d với một điểm của d' – những vectơ này không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Trên lưới ô vuông ở hình bên, vectơ nào **ngược hướng** với $\vec{a}$?



A. $\vec{n}$ **B.** $\vec{m}$ **C.** $\vec{p}$ **D.** $\vec{q}$

Lời giải

Đọc trên lưới: $\vec{a}$ đi sang phải 3 ô, lên 1 ô; $\vec{m}$ sang phải 6 ô, lên 2 ô; $\vec{n}$ sang trái 3 ô, xuống 1 ô; $\vec{p}$ sang phải 3 ô, xuống 1 ô; $\vec{q}$ sang trái 1 ô, xuống 3 ô.

$\vec{m}$ và $\vec{n}$ có giá cùng độ dốc với giá của $\vec{a}$ nên cùng phương với $\vec{a}$; $\vec{m}$ cùng hướng, còn $\vec{n}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

$\vec{p}$ và $\vec{q}$ trông như "quay ngược lại" nhưng giá của chúng cắt giá của $\vec{a}$, nên không cùng phương với $\vec{a}$ – không thể nói cùng hướng hay ngược hướng. Vậy vectơ cần tìm là $\vec{n}$.

Chọn đáp án A.

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và có cùng độ dài. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương
B. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ có chung điểm đầu thì $\vec{a} = \vec{b}$
C. Nếu $\vec{a} \neq \vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng
D. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} = \vec{b}$

Lời giải

Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng hướng và cùng độ dài. Đã có $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, nên nếu thêm $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì $\vec{a} = \vec{b}$.

Các khẳng định còn lại sai. Với tam giác ABC cân tại A, hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có chung điểm đầu, cùng độ dài nhưng không cùng phương; vì vậy chúng không bằng nhau, cũng không ngược hướng.

Chọn đáp án D.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|\vec{0}| = 0$ **B.** $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ

C. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ **D.** $\overrightarrow{AA} \neq \overrightarrow{BB}$ **với hai điểm phân biệt** A, B

Lời giải

Theo quy ước, vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vectơ, nên ba khẳng định $|\vec{0}| = 0$, "$\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ", "$\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ" đều đúng.

Hai vectơ $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ đều là vectơ-không, mà mọi vectơ-không đều bằng nhau, nên $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

Vậy khẳng định "$\overrightarrow{AA} \neq \overrightarrow{BB}$" là khẳng định sai.

Chọn đáp án D.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{BA}$ **D.** $\overrightarrow{AD}$

Lời giải

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$, $AB = DC$ và hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng. Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Các vectơ $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$; vectơ $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ **B.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ **D.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Lời giải

M là trung điểm của AB nên M nằm giữa A, B và $AM = MB$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng (cùng có chiều từ A đến B) và cùng độ dài, nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Các đẳng thức còn lại sai: $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BM}$ ngược hướng; $AB = 2AM$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ không cùng độ dài.

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là

A. 2 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là độ dài đoạn thẳng BC: $|\overrightarrow{BC}| = BC = 2$ (cạnh của tam giác đều).

Giá trị $\sqrt{3}$ là độ dài đường cao của tam giác đều cạnh 2, không phải độ dài cạnh BC.

Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. a **B.** $2a$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$ (giá trị $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ là độ dài nửa đường chéo).

Chọn đáp án C.

Câu 10. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ **D.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng

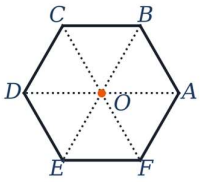
Lời giải

Nếu A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có cùng giá nên cùng phương. Ngược lại, nếu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì hai đường thẳng AB, AC song song hoặc trùng nhau; chúng có chung điểm A nên trùng nhau, tức là A, B, C thẳng hàng.

Các điều kiện khác không tương đương: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ kéo theo $B \equiv C$ (trái giả thiết); $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ không cho biết gì về phương; khi B nằm giữa A và C thì A, B, C thẳng hàng nhưng $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ lại cùng hướng.

Chọn đáp án B.

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{OB}$?



A. $\overrightarrow{EO}$ **B.** $\overrightarrow{BO}$ **C.** $\overrightarrow{OC}$ **D.** $\overrightarrow{EB}$

Lời giải

Tâm O của lục giác đều là trung điểm của đường chéo BE, nên E, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó và $EO = OB$. Do đó $\overrightarrow{EO}$ cùng hướng, cùng độ dài với $\overrightarrow{OB}$, tức là $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB}$.

Các vectơ còn lại không bằng $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{BO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$ không cùng phương với $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{EB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OB}$ nhưng $EB = 2OB$.

(Ngoài $\overrightarrow{EO}$, các vectơ $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DC}$ cũng bằng $\overrightarrow{OB}$.)

Chọn đáp án A.

Câu 12. Trên một bản đồ thời tiết, vận tốc gió tại một trạm quan trắc được biểu diễn bởi vectơ dài 2,5 cm, hướng về phía đông bắc, theo tỉ lệ 1 cm ứng với 8 km/h. Gió tại trạm đó

A. thổi về phía đông bắc với tốc độ 3,2 km/h

B. thổi về phía tây nam với tốc độ 20 km/h

C. thổi về phía đông bắc với tốc độ 20 km/h

D. thổi về phía đông bắc với tốc độ 10,5 km/h

Lời giải

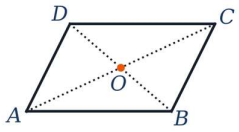
Hướng của vectơ là hướng của gió: gió thổi về phía đông bắc.

Độ dài vectơ tỉ lệ với tốc độ gió: $2{,}5 \cdot 8 = 20$ (km/h). Số 3,2 có được do chia nhầm 8: 2,5; số 10,5 do cộng nhầm $8 + 2{,}5$; còn "phía tây nam" là hướng ngược lại.

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, không phải là hình chữ nhật.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng.		✓
c)	$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$.	✓	
d)	$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.		✓

Lời giải

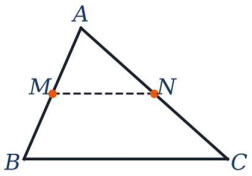
a) Đúng. $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$, $AB=DC$ và $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

b) Sai. $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; mà $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, nên $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng, không cùng hướng.

c) Đúng. O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{CO}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng (cùng có chiều từ phía C sang phía A) và $CO=OA$. Vậy $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$.

d) Sai. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật. Vì $ABCD$ không phải là hình chữ nhật nên $AC \neq BD$, tức là $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \neq \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.	✓	
b)	$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.	✓	
c)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.		✓

Lời giải

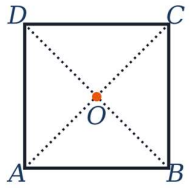
a) Đúng. MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$. Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng có chiều từ cạnh AB sang cạnh AC (với M, N thuộc các cạnh AB, AC) nên chúng cùng hướng.

b) Đúng. Theo tính chất đường trung bình của tam giác: $MN=\frac{1}{2}BC$, tức là $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

c) Đúng. M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng (cùng có chiều từ A đến B) và $AM=MB$. Vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

d) Sai. $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ (vì $MN \parallel BC$ và M, N thuộc các cạnh AB, AC), còn $\overrightarrow{NM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MN}$. Do đó $\overrightarrow{NM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 6, tâm O.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6\sqrt{2}$.	✓	
b)	$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 3$.		✓
c)	$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.		✓
d)	Có đúng 6 vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$, cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (kể cả $\overrightarrow{AC}$).	✓	

Lời giải

a) Đúng. AC là đường chéo của hình vuông cạnh 6: $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Vậy $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6\sqrt{2}$.

b) Sai. O là trung điểm của AC nên $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2} \neq 3$ (số 3 là nửa cạnh của hình vuông, bằng khoảng cách từ O đến AB).

c) Sai. $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng độ dài nhưng ngược hướng (O nằm giữa A và C), nên $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OC}$; đẳng thức đúng là $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$.

d) Đúng. Các đường thẳng nối hai trong năm điểm là AB, BC, CD, DA, AC, BD; chỉ có đường thẳng AC (chứa A, O, C) song song hoặc trùng với AC. Nó cho 6 vectơ: $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$. Vậy có đúng 6 vectơ.

Câu 4. Hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ cùng đặt tại điểm O của một vật, $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = 50$ N; hai lực cùng phương nhưng ngược hướng.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$.		✓
b)	Giá của $\overrightarrow{F_1}$ và giá của $\overrightarrow{F_2}$ trùng nhau.	✓	
c)	Nếu vẽ theo tỉ lệ 1 cm ứng với 10 N thì mỗi vectơ lực dài 5 cm.	✓	
d)	$\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ là hai lực cân bằng.	✓	

Lời giải

a) Sai. Hai lực có cùng độ lớn nhưng ngược hướng nên $\overrightarrow{F_1} \neq \overrightarrow{F_2}$.

b) Đúng. Hai vectơ lực cùng phương nên giá của chúng song song hoặc trùng nhau; hai giá cùng đi qua điểm đặt O nên chúng trùng nhau.

c) Đúng. Độ dài mỗi vectơ lực là $50 : 10 = 5$ (cm).

d) Đúng. Hai lực cùng đặt tại O, cùng giá, ngược hướng và có cùng độ lớn 50 N nên là hai lực cân bằng.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Từ n điểm phân biệt ($n \geq 2$) lập được đúng 56 vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong n điểm đó. Tìm n.

Lời giải

Điểm đầu có n cách chọn, điểm cuối có $n-1$ cách chọn, nên số vectơ khác $\vec{0}$ là $n(n-1)$.

Ta có $n(n-1) = 56 = 8 \cdot 7$. Vì $n(n-1)$ tăng khi n tăng ($n \geq 2$) nên $n = 8$ là nghiệm duy nhất.

Vậy $n = 8$.

Đáp số: 8

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 8$, $AC = 15$, M là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{AM}\right|$.

Lời giải

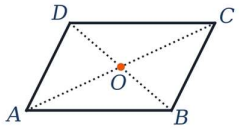
Tam giác ABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$.

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \frac{BC}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 8{,}5$.

Đáp số: 8,5

Câu 3. (**Vận dụng cao**) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Xét tất cả các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$; hai vectơ bằng nhau chỉ tính là một. Có bao nhiêu vectơ đôi một khác nhau?



Lời giải

Từ năm điểm lập được $5 \cdot 4 = 20$ vectơ khác $\vec{0}$. Ta tìm các cặp vectơ bằng nhau.

Cạnh của hình bình hành: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

Nửa đường chéo (O là trung điểm của AC, BD): $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

Bốn vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ không bằng vectơ nào khác: các vectơ cùng phương với chúng chỉ nằm trên hai đường chéo, mà trên mỗi đường chéo chỉ có hai vectơ (ngược hướng nhau) dài bằng đường chéo đó.

Có 8 cặp bằng nhau, mỗi cặp làm số vectơ giảm đi 1. Vậy có $20 - 8 = 12$ vectơ đôi một khác nhau.

Đáp số: 12

Câu 4. Cho tam giác đều ABC cạnh 6, G là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{AG}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều nên đường trung tuyến AM cũng là đường cao, $BM = 3$: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$.

G là trọng tâm nên $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$.

Làm tròn đến hàng phần mười: $\left|\overrightarrow{AG}\right| \approx 3{,}5$.

Đáp số: 3,5

1 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	D	A	C	B	C	A	C	A	B	D	B	D

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	Đ	Đ	Đ
2	Đ	Đ	Đ	S
3	S	Đ	S	S
4	S	Đ	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	10	13	3,46	2	8,66	7

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Vectơ là

A. một đoạn thẳng **B.** một đường thẳng

C. một tia **D. một đoạn thẳng có hướng**

Lời giải

Theo định nghĩa, vectơ là một đoạn thẳng có hướng, tức là trong hai điểm mút đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

Một đoạn thẳng thông thường chưa có hướng; đường thẳng và tia đều không phải là vectơ.

Chọn đáp án D.

Câu 2. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. khoảng cách giữa hai điểm A và B

B. số đo góc giữa đường thẳng AB và trục Ox

C. toạ độ của điểm B

D. luôn bằng 1

Lời giải

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là khoảng cách giữa điểm đầu A và điểm cuối B: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

Độ dài vectơ là một số không âm phụ thuộc vào vị trí hai điểm A, B; nó không phải là số đo góc hay toạ độ và không nhất thiết bằng 1.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình vuông và có độ dài bằng cạnh của hình vuông là

A. 4 **B.** 6 **C. 8** **D.** 12

Lời giải

Các đoạn thẳng nối hai đỉnh của hình vuông có độ dài bằng cạnh là bốn cạnh AB, BC, CD, DA (hai đường chéo dài hơn cạnh).

Mỗi cạnh cho 2 vectơ (chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$), nên có $4 \cdot 2 = 8$ vectơ.

Chọn đáp án C.

Câu 4. Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. đoạn thẳng AB **B. đường thẳng AB** **C.** tia AB **D.** điểm B

Lời giải

Giá của một vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Vậy giá của $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB (không phải đoạn thẳng hay tia AB).

Chọn đáp án B.

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{DA}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{CD}$

Lời giải

Hình thoi $ABCD$ là một hình bình hành nên $AD \parallel BC$, $AD = BC$ và $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ có cùng độ dài với $\overrightarrow{BC}$ (bốn cạnh của hình thoi bằng nhau) nhưng không cùng phương với $\overrightarrow{BC}$, nên không bằng $\overrightarrow{BC}$; còn $\overrightarrow{DA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, A nằm giữa B và C. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng **B.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng **D.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng

Lời giải

A nằm giữa B và C nên từ A, hai điểm B và C ở về hai phía: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng.

Các khẳng định còn lại sai: từ B, hai điểm A, C ở cùng một phía nên $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng; $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{AB}$ đều có chiều từ phía C sang phía B nên cùng hướng.

Chọn đáp án A.

Câu 7. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai vectơ có cùng độ dài thì bằng nhau

B. Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng

C. Hai vectơ bằng nhau thì có cùng độ dài

D. Hai vectơ ngược hướng thì không cùng phương

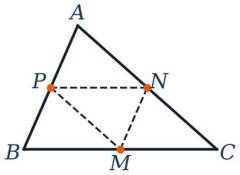
Lời giải

Hai vectơ bằng nhau thì cùng hướng và cùng độ dài, nên khẳng định "hai vectơ bằng nhau thì có cùng độ dài" là đúng.

Các khẳng định còn lại sai: hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ có cùng độ dài, cùng phương nhưng ngược hướng (nên không bằng nhau và không cùng hướng); hai vectơ ngược hướng thì luôn cùng phương.

Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{MN}$?



A. $\overrightarrow{PA}$ **B.** $\overrightarrow{AP}$ **C.** $\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{PB}$

Lời giải

M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA nên MN là đường trung bình của tam giác ABC: $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB = AP$.

Tứ giác $PMNA$ có $MN \parallel AP$ và $MN = AP$ nên là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ (cũng có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$).

Các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PB}$ đều ngược hướng với $\overrightarrow{MN}$ nên không bằng $\overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 4$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 4 **D.** $4\sqrt{2}$

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = AC$ và $AB^2 + AC^2 = BC^2$, tức là $2AB^2 = 16$, suy ra $AB = 2\sqrt{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{2}$ (giá trị 2 là độ dài đường trung tuyến kẻ từ A, không phải độ dài cạnh AB).

Chọn đáp án B.

Câu 10. Với điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, số điểm A thoả mãn $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ là

A. 0 **B.** vô số **C.** 2 **D.** 1

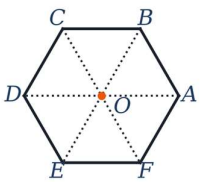
Lời giải

Qua O có duy nhất một đường thẳng song song hoặc trùng với giá của $\vec{a}$; trên đường thẳng đó có duy nhất một điểm A sao cho $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $OA = |\vec{a}|$ (khi $\vec{a} = \vec{0}$ thì $A \equiv O$).

Vậy có đúng 1 điểm A thoả mãn $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Chọn đáp án D.

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vectơ nào sau đây **ngược hướng** với $\overrightarrow{OA}$?



A. $\overrightarrow{CB}$ **B.** $\overrightarrow{FE}$ **C.** $\overrightarrow{EF}$ **D.** $\overrightarrow{OB}$

Lời giải

Các tứ giác $OABC$ và $OAFE$ là hình thoi (lục giác đều gồm 6 tam giác đều chung đỉnh O), nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OA}$.

Do đó $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$, còn $\overrightarrow{FE}$ (ngược chiều với $\overrightarrow{EF}$) ngược hướng với $\overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{OB}$ không cùng phương với $\overrightarrow{OA}$ (giá OB cắt giá OA tại O) nên không thể ngược hướng với nó.
Chọn đáp án B.

Câu 12. Thả một viên bi sắt vào cốc nước, viên bi chìm xuống đáy cốc. Khi viên bi đang chìm, trọng lực $\vec{P}$ và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ tác dụng lên viên bi

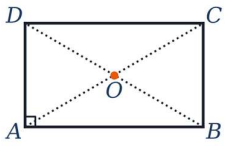
A. cùng hướng, $|\vec{P}| > |\vec{F}|$ **B.** không cùng phương

C. ngược hướng, $|\vec{P}| < |\vec{F}|$ **D. ngược hướng, $|\vec{P}| > |\vec{F}|$**

Lời giải
Trọng lực có phương thẳng đứng, hướng xuống dưới; lực đẩy Archimedes có phương thẳng đứng, hướng lên trên. Vậy $\vec{P}$, $\vec{F}$ cùng phương và ngược hướng.
Viên bi chìm xuống nên trọng lực lớn hơn lực đẩy Archimedes: $|\vec{P}| > |\vec{F}|$.
Chọn đáp án D.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 2$, tâm O.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4$.	✓	
b)	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.	✓	
c)	$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$.	✓	
d)	$\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương, ngược hướng.	✓	

Lời giải
a) Đúng. Tam giác ABC vuông tại B có $BC = AD = 2$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$.
Vậy $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4$.

b) Đúng. $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Vecto $\overrightarrow{BA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$, vecto $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{DC}$, nên $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng; lại có $BA = CD = 2\sqrt{3}$. Vậy $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

c) Đúng. $BD = AC = 4$ và O là trung điểm của BD nên $OB = 2$; lại có $AD = 2$. Vậy $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2$.

d) Đúng. $AD \parallel BC$ nên $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ cùng phương; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ mà $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, nên $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ thoả mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AB \parallel CD$ và $AB = CD$.	✓	
b)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.	✓	
c)	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên hai vectơ cùng phương và cùng độ dài: giá AB, CD song song hoặc trùng nhau, nhưng không thể trùng nhau vì A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ giác. Vậy $AB \parallel CD$ và $AB = CD$.

b) Đúng. Tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối AB, CD song song và bằng nhau nên là hình bình hành (đây là kết quả của Bài 4.3, SGK).

c) Đúng. $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$, $AD = BC$ và $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

d) Sai. Hai đường chéo AC, BD của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên giá của chúng không song song và không trùng nhau. Do đó $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương, càng không bằng nhau.

Câu 3. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Nếu $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.		✓
b)	Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ và $\vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$.	✓	
c)	Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương và $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert$ thì $\vec{a} = \vec{b}$.		✓
d)	Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì giá của $\vec{a}$ và giá của $\vec{b}$ trùng nhau.		✓

Lời giải

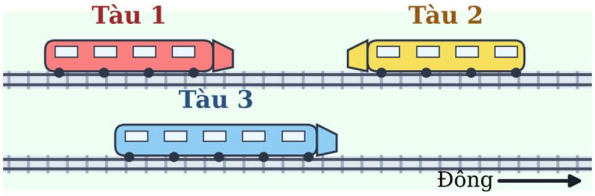
a) Sai. Hai vectơ chỉ được xét cùng hướng hay ngược hướng khi chúng cùng phương; vì vậy hai vectơ ngược hướng thì luôn cùng phương. Chẳng hạn, với M là trung điểm của đoạn thẳng AB, hai vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng và có cùng giá AB nên cùng phương. Khẳng định đã cho sai (nhầm lẫn giữa cùng phương và cùng hướng).

b) Đúng. $\vec{a} = \vec{b}$ nên $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng và $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert$; $\vec{b} = \vec{c}$ nên $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng hướng và $\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{c}\rvert$. Suy ra $\vec{a}$, $\vec{c}$ cùng hướng (cùng hướng với $\vec{b}$) và $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{c}\rvert$, nên $\vec{a} = \vec{c}$.

c) Sai. Phản ví dụ: với hai điểm phân biệt A, B, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ cùng phương, cùng độ dài nhưng ngược hướng nên không bằng nhau.

d) Sai. Phản ví dụ: với hình bình hành $ABCD$ ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, nhưng giá AB và giá DC là hai đường thẳng song song, không trùng nhau.

Câu 4. Trên hai đường ray thẳng, song song, chạy theo hướng đông – tây có ba đoàn tàu: tàu 1 chạy về phía đông với vận tốc 60 km/h; tàu 2 chạy về phía tây với vận tốc 60 km/h; tàu 3 chạy về phía đông với vận tốc 40 km/h. Gọi $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ lần lượt là vectơ vận tốc của ba tàu.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{v_1} = \vec{v_2}$.		✓
b)	$\vec{v_1}$ và $\vec{v_3}$ cùng hướng.	✓	
c)	Nếu vẽ theo tỉ lệ 1 cm ứng với 20 km/h thì vectơ $\vec{v_3}$ dài 2 cm.	✓	
d)	$\vec{v_2}$ và $\vec{v_3}$ cùng hướng.		✓

Lời giải

a) Sai. $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ có cùng độ dài 60 km/h nhưng một vectơ hướng đông, một vectơ hướng tây, nên chúng ngược hướng và $\vec{v_1} \neq \vec{v_2}$.

b) Đúng. Hai đường ray song song nên $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$ cùng phương; cả hai cùng hướng về phía đông, nên cùng hướng.

c) Đúng. Độ dài của $\vec{v_3}$ là $40 : 20 = 2$ (cm).

d) Sai. $\vec{v_2}$ hướng về phía tây, $\vec{v_3}$ hướng về phía đông; hai vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trên đường thẳng d lấy năm điểm phân biệt A, B, C, D, E theo thứ tự đó. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối là hai trong năm điểm đó, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ (kể cả $\overrightarrow{AB}$)?

Lời giải

Mọi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong năm điểm đều nằm trên d nên cùng phương với $\overrightarrow{AB}$. Vectơ $\overrightarrow{XY}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ khi và chỉ khi điểm đầu X đứng trước điểm cuối Y theo thứ tự A, B, C, D, E.

Điểm đầu A: 4 vectơ ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$); điểm đầu B: 3 vectơ; điểm đầu C: 2 vectơ; điểm đầu D: 1 vectơ ($\overrightarrow{DE}$).

Vậy có $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ vectơ.

Đáp số: 10

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5$, $BC = 12$. Tính $\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

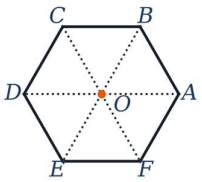
Lời giải

Tam giác BCD vuông tại C có $CD = AB = 5$, $BC = 12$ nên $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BD}\right| = 13$.

Đáp số: 13

Câu 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O có cạnh bằng 2. Tính $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

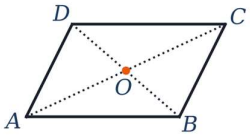
Tam giác ABC có $AB = BC = 2$ và $\widehat{ABC} = 120°$ (góc trong của lục giác đều).

Theo định lí côsin: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120° = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$.

Suy ra $AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$. Làm tròn đến hàng phần trăm: $\left|\overrightarrow{AC}\right| \approx 3{,}46$.

Đáp số: 3,46

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; O\}$, bằng $\overrightarrow{OB}$ (kể cả $\overrightarrow{OB}$)?



Lời giải

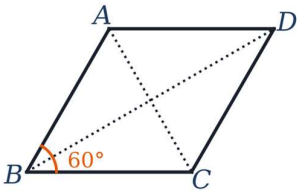
Vectơ bằng $\overrightarrow{OB}$ phải có giá song song hoặc trùng với BD. Trong năm điểm đã cho, chỉ có đường thẳng BD (chứa B, O, D) thoả mãn điều đó.

Trên đường thẳng BD, các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{OB}$ là $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DB}$; trong đó $DB = 2OB$, còn $DO = OB$ (vì O là trung điểm của BD).

Vậy có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{OB}$ là $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{DO}$.

Đáp số: 2

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 5 và $\widehat{ABC} = 60°$. Tính $\left|\overrightarrow{BD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Tam giác ABC có $BA = BC = 5$ và $\widehat{ABC} = 60°$ nên là tam giác đều, do đó $AC = 5$.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên tam giác ABO vuông tại O và $AO = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}$. Suy ra $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$BD = 2BO = 5\sqrt{3} \approx 8{,}660$. Làm tròn đến hàng phần trăm: $\left|\overrightarrow{BD}\right| \approx 8{,}66$.

Đáp số: 8,66

Câu 6. Trên một sơ đồ, lực 25 N được biểu diễn bởi vectơ dài 1 cm. Một lực có độ lớn 175 N được biểu diễn bởi vectơ dài bao nhiêu xentimét?

Lời giải

Độ dài vectơ tỉ lệ với độ lớn của lực: 1 cm ứng với 25 N.

Lực 175 N được biểu diễn bởi vectơ dài $175:25=7$ (cm).

Đáp số: 7

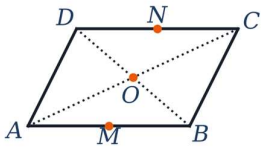
PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ và tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.

b) Tìm các vectơ (khác $\overrightarrow{OM}$) bằng $\overrightarrow{OM}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A;B;C;D;O;M;N\}$.

c) Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.



Lời giải

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, tức là $AB=DC$ và $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng.

M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC nên $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}DC=NC$; $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{DC}$, nên $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$ cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$.

Bốn điểm A, M, C, N không cùng nằm trên một đường thẳng và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ nên tứ giác $AMCN$ là hình bình hành (Bài 4.3).

b) O, M lần lượt là trung điểm của AC, AB nên OM là đường trung bình của tam giác ABC: $OM \parallel BC$, $OM=\frac{1}{2}BC$, và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{CB}$ (hai vectơ cùng có chiều từ cạnh AC sang cạnh AB).

Tương tự, N, O lần lượt là trung điểm của DC, DB nên NO là đường trung bình của tam giác DCB: $NO \parallel CB$, $NO=\frac{1}{2}BC$, và $\overrightarrow{NO}$ cùng hướng với $\overrightarrow{CB}$. Do đó $\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{OM}$.

Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{OM}$ nằm trên AD, BC hoặc trên đường thẳng qua O song song với BC (đường thẳng này chứa M và N). Các vectơ trên AD, BC và hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NM}$ có độ dài $BC=2OM$; trên đường thẳng MN, ngoài $\overrightarrow{OM}$ chỉ có $\overrightarrow{NO}$ cùng hướng với $\overrightarrow{CB}$ và có độ dài $\frac{1}{2}BC$.

Vậy vectơ bằng $\overrightarrow{OM}$ là $\overrightarrow{NO}$.

c) Theo câu b), $\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{OM}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{NO}$, $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng; chúng có chung điểm O nên ba điểm N, O, M thẳng hàng. Hơn nữa $NO=OM$ nên O là trung điểm của MN.

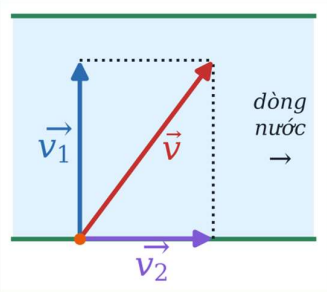
Bài 2. (**Vận dụng**) Một con thuyền vượt sông theo hướng vuông góc với bờ với vận tốc riêng 4 m/s; dòng nước chảy song song với bờ với vận tốc 3 m/s.

a) Vẽ (theo tỉ lệ 1 cm ứng với 1 m/s) vectơ vận tốc riêng $\vec{v_1}$ của thuyền và vectơ vận tốc dòng nước $\vec{v_2}$, có chung điểm đầu. Hai vectơ đó có cùng phương không?

b) Vectơ vận tốc thực $\vec{v}$ của thuyền được biểu diễn bởi đường chéo (xuất phát từ điểm đầu chung) của hình chữ nhật dựng trên hai vectơ $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$. Tính độ lớn vận tốc thực của thuyền.

Lời giải

a) $\overrightarrow{v_1}$ dài 4 cm, có giá vuông góc với bờ; $\overrightarrow{v_2}$ dài 3 cm, có giá song song với bờ và hướng theo dòng nước.



Giá của hai vectơ vuông góc với nhau nên không song song và không trùng nhau. Vậy $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ **không cùng phương**.

b) Hình chữ nhật dựng trên hai vectơ có hai cạnh dài 4 cm và 3 cm, nên đường chéo dài $\sqrt{4^2+3^2}=5$ (cm).

Theo tỉ lệ 1 cm ứng với 1 m/s, vận tốc thực của thuyền có độ lớn $|\vec{v}|=5$ m/s. (Ở Bài 8, ta sẽ biết $\vec{v}$ chính là tổng $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$.)

2 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	B	A	C	A	B	D	C	D	A	C	C

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	S	S	Đ
2	Đ	S	Đ	Đ
3	Đ	Đ	S	Đ
4	S	Đ	S	Đ

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	8	5	7,21	4	3,61	130

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Vectơ-không là vectơ

A. có độ dài bằng 1 **B.** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau

C. có giá song song với trục Ox **D.** không có hướng

Lời giải

Theo định nghĩa, vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Vectơ-không có độ dài bằng 0 (không phải 1), và theo quy ước nó cùng hướng với mọi vectơ, nên "không có hướng" là sai.

Chọn đáp án B.

Câu 2. Với hai điểm phân biệt A, B, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng **D.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ không cùng phương

Lời giải

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = AB$, nên khẳng định về độ dài là đúng.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ có cùng giá là đường thẳng AB nên cùng phương, nhưng chúng ngược hướng; do đó chúng không cùng hướng và không bằng nhau.

Chọn đáp án B.

Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng là giá của các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong bốn điểm đó là

A. 6 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 12

Lời giải

Giá của vectơ $\overrightarrow{XY}$ là đường thẳng XY; hai vectơ $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{YX}$ có chung giá.

Vì không có ba điểm nào thẳng hàng nên mỗi cặp hai điểm xác định một đường thẳng khác nhau: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Vậy có 6 đường thẳng (trong khi số vectơ khác $\vec{0}$ là $4 \cdot 3 = 12$).

Chọn đáp án A.

Câu 4. Hai vectơ cùng hướng thì

A. bằng nhau **B.** cùng độ dài

C. cùng phương **D.** có chung điểm đầu

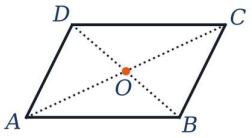
Lời giải

Chỉ khi hai vectơ cùng phương mới xét chúng cùng hướng hay ngược hướng, nên hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.

Hai vectơ cùng hướng không nhất thiết bằng nhau hay cùng độ dài (chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ với B là trung điểm của AC), và không nhất thiết có chung điểm đầu.

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{BO}$?



A. $\overrightarrow{OD}$ **B.** $\overrightarrow{DO}$ **C.** $\overrightarrow{OB}$ **D.** $\overrightarrow{CO}$

Lời giải

O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng (cùng có chiều từ B đến D) và $BO = OD$. Do đó $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.

Các vectơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BO}$; vectơ $\overrightarrow{CO}$ không cùng phương với $\overrightarrow{BO}$.

Chọn đáp án A.

Câu 6. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hai vectơ nào sau đây ngược hướng?

A. $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ **B. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$** **C.** $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ **D.** $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BA}$

Lời giải

M nằm giữa A và B nên từ M, hai điểm A, B ở về hai phía: $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Các cặp còn lại đều cùng hướng: $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng có chiều từ A đến B; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ cũng vậy; $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng có chiều từ B đến A.

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $2a$

Lời giải

Trong tam giác ABC vuông tại A: $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$, nên $BC = \frac{AB}{\cos 60°} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2a$. (Giá trị $a\sqrt{3}$ là độ dài cạnh $AC = AB \cdot \tan 60°$.)

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$?

A. 0 **B.** 2 **C. 1** **D.** vô số

Lời giải

Với điểm A và vecto $\overrightarrow{BC}$ cho trước, có duy nhất một điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Điểm D đó chính là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).
Chọn đáp án C.

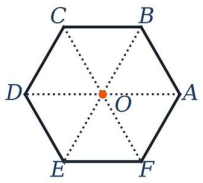
Câu 9. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Lời giải

Theo kết quả của Bài 4.3 (SGK), tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Với hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng; $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng; $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương. Vì vậy các đẳng thức còn lại đều sai.
Chọn đáp án D.

Câu 10. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vecto nào sau đây bằng $\overrightarrow{AF}$?

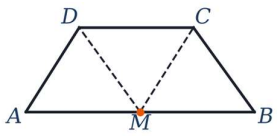


A. $\overrightarrow{BO}$ **B.** $\overrightarrow{BE}$ **C.** $\overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{FA}$

Lời giải

Các tam giác OAB, OAF đều nên tứ giác $ABOF$ có bốn cạnh bằng nhau, là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO}$.
Các vecto còn lại không bằng $\overrightarrow{AF}$: $\overrightarrow{BE}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AF}$ nhưng $BE = 2AF$; $\overrightarrow{DE}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{FA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AF}$.
(Ngoài $\overrightarrow{BO}$, các vecto $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OE}$ cũng bằng $\overrightarrow{AF}$.)
Chọn đáp án A.

Câu 11. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD với $AB = 2CD$; M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CM}$

Lời giải

M là trung điểm của AB nên $MB = \frac{AB}{2} = CD$. Hai vecto $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng phương ($AB \parallel CD$) và cùng có chiều từ cạnh bên AD sang cạnh bên BC, nên cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC}$.
Các khẳng định còn lại sai do nhầm chiều: $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MB}$; từ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $MBCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$, do đó $\overrightarrow{DM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$; tương tự $AMCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MC}$, còn $\overrightarrow{CM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án C.

Câu 12. Máy bay A bay về hướng bắc với vận tốc 700 km/h, máy bay B bay về hướng nam với vận tốc 700 km/h. Hai vectơ vận tốc của hai máy bay

A. bằng nhau **B.** cùng hướng

C. cùng độ dài, ngược hướng **D.** không cùng phương

Lời giải

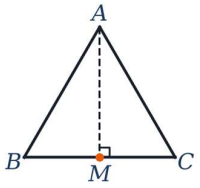
Hướng bắc và hướng nam ngược nhau nên hai vectơ vận tốc cùng phương và ngược hướng; hai vận tốc cùng bằng 700 km/h nên hai vectơ có cùng độ dài.

Vì ngược hướng nên hai vectơ đó không bằng nhau.

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$, M là trung điểm của BC.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.		✓
c)	$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.		✓
d)	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM}$.	✓	

Lời giải

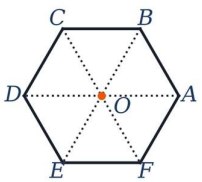
a) Đúng. Tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = 2a = BC = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

b) Sai. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có cùng độ dài nhưng không cùng phương (giá AB, AC cắt nhau tại A), nên chúng không bằng nhau.

c) Sai. Tam giác ABC đều nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao, $BM = a$. Tam giác ABM vuông tại M: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$. Vậy $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = a\sqrt{3} \neq \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (số $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ là độ dài đường cao của tam giác đều cạnh a, không phải cạnh $2a$).

d) Đúng. M là trung điểm của BC nên M nằm giữa B và C, $CM = MB = a$. Hai vectơ $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng có chiều từ C đến B nên cùng hướng, lại có cùng độ dài a. Vậy $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM}$.

Câu 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OE}$ cùng hướng.		✓
c)	$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.	✓	
d)	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}$.	✓	

Lời giải

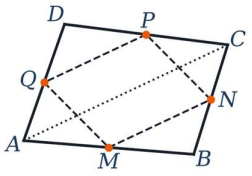
a) Đúng. Lục giác đều gồm 6 tam giác đều chung đỉnh O, nên các tứ giác $OABC$, $OAFE$ là hình thoi; suy ra $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}$, do đó $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EF}$. Đổi chiều cả hai vectơ, ta được $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FE}$ cùng hướng và cùng độ dài, tức là $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$.

b) Sai. O là trung điểm của BE nên từ O, hai điểm B, E ở về hai phía: $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OE}$ ngược hướng.

c) Đúng. Lục giác đều gồm 6 tam giác đều chung đỉnh O nên $OA=OD=AB$; O là trung điểm của AD nên $AD=2OA=2AB$. Vậy $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

d) Đúng. Tứ giác $ACDF$ có hai đường chéo AD, CF bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên là hình chữ nhật. Trong hình chữ nhật $ACDF$, hai cạnh đối AC, FD song song và bằng nhau, hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FD}$ cùng hướng. Vậy $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}$.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.	✓	
b)	$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.	✓	
c)	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$.		✓
d)	$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN\parallel AC$; hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng có chiều từ cạnh BA sang cạnh BC (với M, N thuộc các cạnh BA, BC) nên cùng hướng.

b) Đúng. Theo tính chất đường trung bình của tam giác ABC: $MN=\frac{1}{2}AC$, tức là $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.

c) Sai. QP là đường trung bình của tam giác ADC nên $\overrightarrow{QP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ và $QP=\frac{1}{2}AC$; do đó $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$. Vectơ $\overrightarrow{PQ}$ ngược hướng với $\overrightarrow{QP}$ nên $\overrightarrow{MN}\neq\overrightarrow{PQ}$.

d) Đúng. MQ là đường trung bình của tam giác ABD nên $MQ\parallel BD$, $MQ=\frac{1}{2}BD$; hai vectơ $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{BD}$ cùng có chiều từ cạnh AB sang cạnh AD nên cùng hướng. Tương tự, NP là đường trung bình của tam giác CBD nên $NP\parallel BD$, $NP=\frac{1}{2}BD$ và $\overrightarrow{NP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BD}$ (cùng có chiều từ cạnh CB sang cạnh CD). Do đó $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NP}$ cùng hướng và cùng độ dài $\frac{1}{2}BD$, tức là $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

Câu 4. Hai bạn An và Bình cùng làm cho một chiếc xe chuyển động thẳng trên đường: An kéo ở phía trước với lực 80 N, Bình đẩy ở phía sau với lực 60 N; cả hai lực đều theo hướng chuyển động của xe. Lực cản tác dụng lên xe có độ lớn 140 N và ngược hướng chuyển động.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Lực của An và lực của Bình ngược hướng.		✓
b)	Lực cản ngược hướng với lực của An.	✓	
c)	Vectơ lực cản bằng vectơ lực của Bình.		✓
d)	Nếu lực của An được biểu diễn bởi vectơ dài 4 cm thì, với cùng tỉ lệ, lực của Bình được biểu diễn bởi vectơ dài 3 cm.	✓	

Lời giải

a) Sai. An kéo ở phía trước, Bình đẩy ở phía sau, nhưng theo giả thiết cả hai lực đều theo hướng chuyển động của xe. Vậy lực của An và lực của Bình cùng hướng, không ngược hướng (một lực kéo và một lực đẩy vẫn có thể cùng hướng).

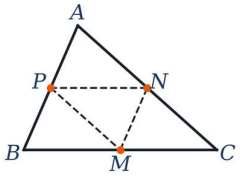
b) Đúng. Lực của An theo hướng chuyển động, còn lực cản ngược hướng chuyển động, nên hai lực ngược hướng.

c) Sai. Lực cản ngược hướng với lực của Bình và có độ lớn khác (140 N so với 60 N), nên hai vectơ lực không bằng nhau.

d) Đúng. Vectơ dài 4 cm biểu diễn lực 80 N nên tỉ lệ là 1 cm ứng với $80:4=20$ (N). Lực 60 N của Bình được biểu diễn bởi vectơ dài $60:20=3$ (cm).

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; M; N; P\}$, cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ (kể cả $\overrightarrow{BC}$)?



Lời giải

Vectơ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng BC.

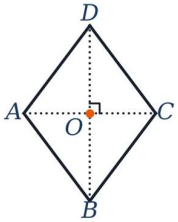
Đường thẳng BC chứa ba điểm B, M, C, cho $3\cdot 2=6$ vectơ: $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

NP là đường trung bình của tam giác ABC nên $NP \parallel BC$, cho thêm 2 vectơ $\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PN}$. Đường thẳng qua A song song với BC không chứa điểm nào khác của tập đã cho.

Vậy có $6+2=8$ vectơ.

Đáp số: 8

Câu 2. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=6, BD=8$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.



Lời giải

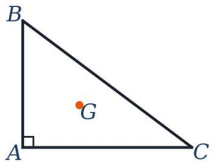
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên $OA = \frac{AC}{2} = 3$, $OB = \frac{BD}{2} = 4$.

Tam giác OAB vuông tại O: $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$.

Đáp số: 5

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9$, $AC = 12$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tính $\left|\overrightarrow{BG}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

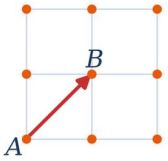
Gọi N là trung điểm của AC; khi đó $AN = \frac{AC}{2} = 6$ và G thuộc đường trung tuyến BN với $BG = \frac{2}{3}BN$.

Tam giác ABN vuông tại A: $BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$.

Suy ra $BG = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{13} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}211$. Làm tròn đến hàng phần trăm: $\left|\overrightarrow{BG}\right| \approx 7{,}21$.

Đáp số: 7,21

Câu 4. Cho chín điểm là các nút của một lưới ô vuông 2×2 như hình bên. Có bao nhiêu vectơ, có điểm đầu, điểm cuối là hai trong chín điểm đó, bằng $\overrightarrow{AB}$ (kể cả $\overrightarrow{AB}$)?



Lời giải

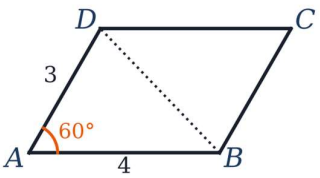
$\overrightarrow{AB}$ đi sang phải 1 ô và lên trên 1 ô (đường chéo của một ô vuông, hướng lên phải).

Một vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ phải cùng hướng, cùng độ dài, tức là cũng đi sang phải 1 ô, lên 1 ô. Điểm đầu của nó phải thuộc hai cột bên trái (để còn sang phải được 1 ô) và hai hàng bên dưới (để còn lên được 1 ô): có $2 \cdot 2 = 4$ cách chọn.

Mỗi điểm đầu như vậy cho đúng một vectơ (đường chéo của một ô vuông). Vậy có 4 vectơ.

Đáp số: 4

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 3$ và $\widehat{BAD} = 60°$. Tính $\left|\overrightarrow{BD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



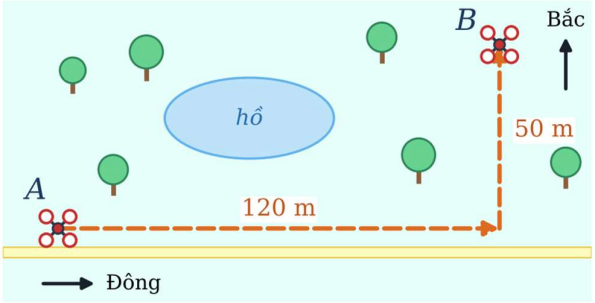
Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13$.

Suy ra $BD = \sqrt{13} \approx 3{,}606$. Làm tròn đến hàng phần trăm: $\left|\overrightarrow{BD}\right| \approx 3{,}61$.

Đáp số: 3,61

Câu 6. Một flycam cất cánh tại điểm A của công viên, bay theo hướng đông 120 m rồi bay theo hướng bắc 50 m thì đến điểm B (độ cao không đổi). Tính độ dài (theo mét) của vectơ dịch chuyển $\overrightarrow{AB}$.



Lời giải

Gọi K là điểm flycam đổi hướng. Hướng đông vuông góc với hướng bắc nên tam giác AKB vuông tại K, với $AK = 120$ m, $KB = 50$ m.

Theo định lí Pythagore: $AB = \sqrt{120^2 + 50^2} = \sqrt{14400 + 2500} = \sqrt{16900} = 130$ (m).

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 130$ m, ngắn hơn quãng đường bay thực tế $120 + 50 = 170$ (m).

Đáp số: 130

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC. Dựng các điểm D, E sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.

a) Chứng minh $ABCD$ và $AEBC$ là các hình bình hành.

b) Chứng minh A là trung điểm của DE.

c) Tìm các vectơ (khác $\overrightarrow{AB}$) bằng $\overrightarrow{AB}$, có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập $\{A; B; C; D; E\}$.

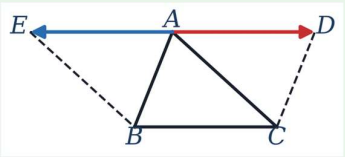
Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; đẳng thức này đúng theo cách dựng điểm D (và A không thuộc đường thẳng BC). Vậy $ABCD$ là hình bình hành.

Tương tự, tứ giác $AEBC$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$; đẳng thức này đúng theo cách dựng điểm E. Vậy $AEBC$ là hình bình hành.

b) Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$, mà hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng và cùng độ dài, nên $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ngược hướng và $AD = AE = BC$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ngược hướng và có chung điểm đầu A nên D, A, E thẳng hàng, A nằm giữa D và E. Kết hợp với $AD = AE$, ta có A là trung điểm của DE.



c) Từ hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ phải có giá song song hoặc trùng với AB. Các đường thẳng như vậy đi qua ít nhất hai điểm của tập chỉ có AB và DC: đường thẳng qua C (hoặc D) song song với AB là DC; đường thẳng qua E song song với AB không chứa điểm nào khác của tập, vì $EA \parallel BC$ (đường thẳng EA cũng đi qua D), $EB \parallel AC$ và EC cắt AB (hai đường chéo của hình bình hành $AEBC$).

Trên hai đường thẳng AB, DC chỉ có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$, và hai vectơ này cùng độ dài.

Vậy vectơ (khác $\overrightarrow{AB}$) bằng $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (mỗi đơn vị trên các trục ứng với 10 m), một robot giao hàng xuất phát từ điểm $M(1;0)$, mỗi phút dịch chuyển đúng bằng vectơ $\overrightarrow{OA}$ với $A(2;1)$.

a) Sau 1 phút, 2 phút, 3 phút, robot ở những điểm nào?

b) Robot có đi qua điểm $N(9;4)$ không? Nếu có thì sau bao nhiêu phút?

c) Gọi P là vị trí của robot sau 3 phút. Chứng minh $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$ và $\left|\overrightarrow{MP}\right| = 3\left|\overrightarrow{OA}\right|$.

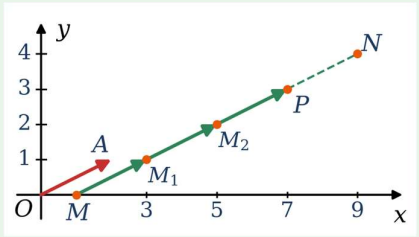
Lời giải

a) Mỗi phút robot dịch chuyển giống như đi từ $O(0;0)$ đến $A(2;1)$: hoành độ tăng 2, tung độ tăng 1. Xuất phát từ $M(1;0)$, sau 1 phút robot ở $M_1(3;1)$, sau 2 phút ở $M_2(5;2)$, sau 3 phút ở $P(7;3)$.

b) Sau t phút robot ở điểm $(1+2t;t)$. Robot tới $N(9;4)$ khi $1+2t=9$ và $t=4$; cả hai điều kiện đều cho $t=4$. Vậy robot đi qua N sau **4 phút**.

c) Theo cách dịch chuyển, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2P} = \overrightarrow{OA}$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng hướng và có chung điểm M_1 nên M, M_1, M_2 thẳng hàng; tương tự, M_1, M_2, P thẳng hàng. Vậy bốn điểm M, M_1, M_2, P nằm trên một đường thẳng theo đúng thứ tự đó.

Do đó $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MM_1}$, tức là cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$, và $MP = MM_1 + M_1M_2 + M_2P = 3OA$. Vậy $\left|\overrightarrow{MP}\right| = 3\left|\overrightarrow{OA}\right|$.



Kiểm tra bằng định lí Pythagore: $OA = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ và $MP = \sqrt{(7-1)^2+(3-0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 3 \cdot OA$.

BÀI 8

CHƯƠNG IV. VECTƠ

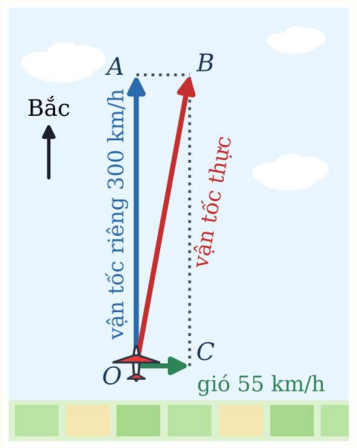
TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

◎ MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Thực hiện được phép cộng, phép trừ hai vectơ; vận dụng thành thạo quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc hiệu.
- Biểu thị được trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác bằng đẳng thức vectơ; xác định được điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ.
- Vận dụng tổng, hiệu của hai vectơ vào các bài toán tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc trong thực tế.

✦ CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU · Phi công và cơn gió ngang

Một máy bay huấn luyện giữ mũi hướng về phía **bắc** và bay với vận tốc 300 km/h so với không khí. Bỗng một luồng gió thổi từ tây sang **đông** với vận tốc 55 km/h. Máy bay thực sự bay theo hướng nào và nhanh bao nhiêu so với mặt đất?



Câu trả lời nằm ở **phép cộng hai vectơ**. Vận tốc thực của máy bay (so với mặt đất) là tổng của vận tốc riêng và vận tốc gió; nó được biểu diễn bởi đường chéo OB của hình chữ nhật $OABC$. Do đó máy bay bay với tốc độ $\sqrt{300^2 + 55^2} = 305$ (km/h), theo hướng lệch khỏi hướng bắc về phía đông khoảng 10°; sau một giờ, gió đã "đẩy" nó sang phía đông 55 km. Muốn bay đúng hướng bắc, phi công phải lái chếch về phía tây – chếch bao nhiêu, em sẽ tính được ở Dạng 5.

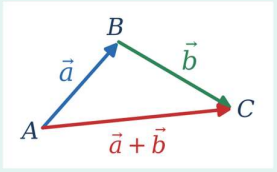
Năm 1586, nhà khoa học Simon Stevin (sinh ở Bruges, nay thuộc Bỉ) công bố quy tắc "tam giác lực", thực chất chính là quy tắc cộng vectơ. Bài học này biến trực giác vật lí ấy thành các **phép toán vectơ** chính xác.

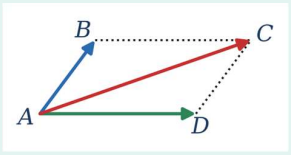
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng của hai vectơ

◆ ĐỊNH NGHĨA – QUY TẮC

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ**.





- **Quy tắc ba điểm:** với ba điểm bất kì A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- **Quy tắc hình bình hành:** nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

★ TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG VECTƠ

- Giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; tổng này được viết gọn là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
- Cộng với vectơ-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

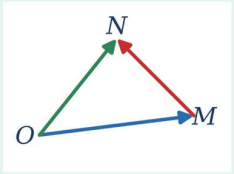
Quy tắc nối đuôi (mở rộng quy tắc ba điểm): $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

Chú ý: $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (bất đẳng thức tam giác), dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng hoặc một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$. Vì vậy, nói chung **không được cộng độ dài** khi cộng hai vectơ.

■ 2. Vectơ đối – Hiệu của hai vectơ

◆ ĐỊNH NGHĨA

- Vectơ có cùng độ dài và **ngược hướng** với $\vec{a}$ được gọi là **vectơ đối** của $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$. Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$. Với hai điểm A, B bất kì: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau $\Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.
- **Hiệu** của hai vectơ: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là **phép trừ vectơ**.



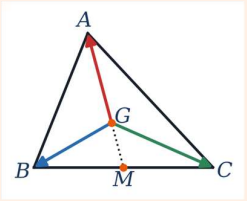
Quy tắc hiệu: với ba điểm O, M, N bất kì, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Chú ý: Nếu $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ thì $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$: có thể "chuyển vế, đổi dấu" như với đẳng thức số.

■ 3. Trung điểm, trọng tâm và ứng dụng vật lí

★ HAI KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

- I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.



✱ TỔNG HỢP LỰC, TỔNG HỢP VẬN TỐC

- Hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ cùng tác dụng vào một vật (chất điểm) có **hợp lực** là $\vec{F_1}+\vec{F_2}$, biểu diễn bởi đường chéo của hình bình hành dựng trên hai lực.
- Thuyền có vận tốc riêng $\vec{v_r}$, dòng nước có vận tốc $\vec{v_n}$ thì vận tốc thực của thuyền (so với bờ) là $\vec{v_r}+\vec{v_n}$.
- Vật đứng yên dưới tác dụng của các lực thì tổng các lực bằng $\vec{0}$; đặc biệt, hai lực **cân bằng** là hai vectơ đối nhau.

Công thức độ lớn hợp lực: nếu $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ hợp với nhau góc α thì $\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}\right|^2 = F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha$, với $F_1=\left|\vec{F_1}\right|$, $F_2=\left|\vec{F_2}\right|$. Công thức có được khi áp dụng định lí côsin cho tam giác tạo bởi hai cạnh kề và đường chéo của hình bình hành lực; góc xen giữa của tam giác đó bằng $180^\circ-\alpha$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tổng, hiệu – Rút gọn biểu thức vectơ

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- **Nối đuôi:** điểm cuối của vectơ trước trùng điểm đầu của vectơ sau thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Có thể đổi chỗ các vectơ (tính chất giao hoán) để chúng nối đuôi nhau.
- **Đổi dấu:** $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$; gặp hiệu thì đổi thành tổng, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
- **Quy tắc hiệu:** hai vectơ chung điểm đầu thì $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ (vectơ hiệu đi từ điểm cuối của vectơ trừ đến điểm cuối của vectơ bị trừ).
- **Quy tắc hình bình hành:** nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
- **Tìm vectơ $\vec{x}$:** chuyển vế, đổi dấu để đưa về $\vec{x}=$ (biểu thức đã biết), rồi rút gọn vế phải.

Sai lầm thường gặp: viết $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ (đúng là $\overrightarrow{CB}$); cộng độ dài thay cho cộng vectơ.

▶ **Ví dụ 1.** Cho bốn điểm A, B, C, D. Rút gọn: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

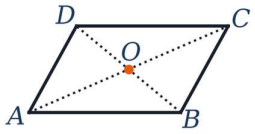
Lời giải

a) Đổi chỗ để các vectơ nối đuôi: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

b) Đổi dấu: $-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$, $-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}$. Do đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

c) Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$. Do đó $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$.

▶ **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tính: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.



Lời giải

a) Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

b) Hai vectơ có chung điểm đầu A; theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

c) O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

d) $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

▶ **Ví dụ 3.** (**Vận dụng**) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm vectơ $\vec{x}$ trong mỗi trường hợp sau: a) $\vec{x}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{OA}+\vec{x}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{AB}-\vec{x}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

a) Chuyển vế: $\vec{x}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}$. Hai vectơ có chung điểm đầu B nên theo quy tắc hiệu, $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$.

b) Rút gọn vế phải: $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$, mà $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, nên vế phải bằng $\vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{OA}+\vec{x}=\vec{0}$, tức $\vec{x}=-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}$.

Vì O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. Vậy $\vec{x}=\overrightarrow{OC}$.

c) Mấu chốt là thay $\overrightarrow{OC}$ bằng vectơ bằng nó để hai vectơ ở vế phải nối đuôi nhau: O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$. Khi đó $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$.

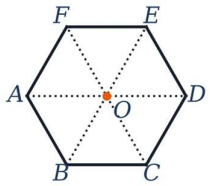
Đẳng thức trở thành $\overrightarrow{AB}-\vec{x}=\overrightarrow{AD}$, suy ra $\vec{x}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ (quy tắc hiệu).

Vậy: a) $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$; b) $\vec{x}=\overrightarrow{OC}$; c) $\vec{x}=\overrightarrow{DB}$.

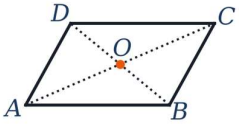
Bài tập luyện tập

Bài 1. Rút gọn: a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

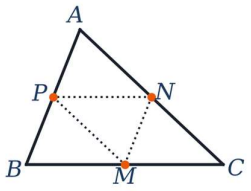
Bài 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O (hình vẽ). Tính: a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$; c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.



Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm vectơ bằng mỗi vectơ sau: a) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.



Bài 4. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC; M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB (hình vẽ).



a) Tìm vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai trong sáu điểm đã cho, bằng $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

c) Biết tam giác ABC đều cạnh 2, tính $\left|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB=8$, $AD=6$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$. Tính độ dài của các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Biến đổi vế này thành vế kia; hoặc biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đúng; hoặc chứng minh hiệu hai vế bằng $\vec{0}$.
- **Chèn điểm:** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$ hoặc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ với điểm M, O tuỳ ý. Nên chèn điểm "đặc biệt" của hình: trung điểm, trọng tâm, tâm hình bình hành.
- Dùng các đẳng thức đã biết: trung điểm ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$), trọng tâm ($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$), hình bình hành ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$).

Chú ý: Khi có nhiều hình bình hành, hãy viết đẳng thức của từng hình rồi cộng lại.

▶ **Ví dụ 4.** Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chèn điểm D vào vectơ $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. Ta có điều phải chứng minh.

▶ **Ví dụ 5.** Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tuỳ ý. Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

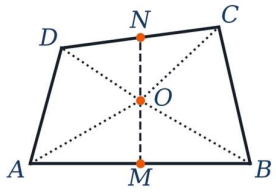
Lời giải

Biến đổi tương đương: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}$.

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$, nên đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

Đẳng thức này đúng vì $ABCD$ là hình bình hành. Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

▶ **Ví dụ 6.** (**Vận dụng**) Cho tứ giác $ABCD$; M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.



Lời giải

Chèn điểm M vào $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và chèn điểm N vào $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$:

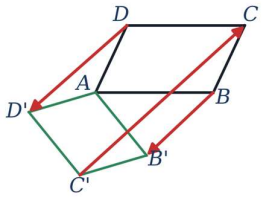
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ND}\right)$.

Nhóm lại: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)$.

Vì M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. *Điểm O như vậy gọi là trọng tâm của tứ giác $ABCD$.*

▶ **Ví dụ 7.** (**Vận dụng**) Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$.



Lời giải

Ý tưởng: mọi vectơ đều được "chèn" điểm chung A, sau đó dùng quy tắc hình bình hành cho từng hình.

Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AD}$.

Cộng lại và nhóm theo từng hình bình hành: $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{DD'}=\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AC'}\right)-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)$.

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AC'}$, nên mỗi biểu thức trong ngoặc bằng $\vec{0}$.

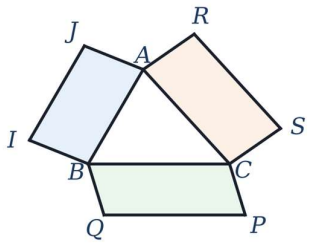
Vậy $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$.

✎ Bài tập luyện tập

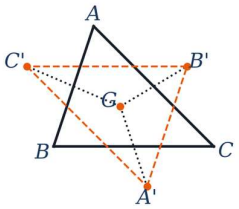
Bài 6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 7. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

Bài 8. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$ (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.



Bài 9. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với G qua trung điểm của BC, CA, AB (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$. Từ đó có nhận xét gì về điểm G đối với tam giác $A'B'C'$?



Dạng 3. Tính độ dài của vectơ tổng, vectơ hiệu

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

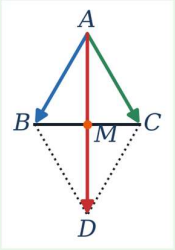
- Dùng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành hoặc quy tắc hiệu để đưa tổng (hiệu) về **một vectơ** $\overrightarrow{MN}$, rồi tính độ dài đoạn thẳng MN.
- Với tam giác ABC: gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành, nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=AD=2AM$; còn $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=BC$.
- Tính độ dài đoạn thẳng nhờ định lí Pythagore, tính chất của tam giác đều, hình vuông, hình thoi hoặc định lí côsin.

Sai lầm thường gặp: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ hay $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ – hai đẳng thức này chỉ đúng khi hai vectơ cùng hướng.

▶ **Ví dụ 8.** Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua M. Tứ giác $ABDC$ có hai đường chéo AD, BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.



AM là đường cao của tam giác đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AD = 2AM = a\sqrt{3}$.

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = CB = a$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}$ và $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = a$.

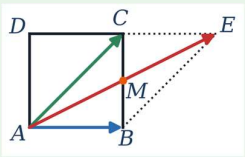
▶ **Ví dụ 9.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a).

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = DB = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của BC và E là điểm đối xứng với A qua M thì $ABEC$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

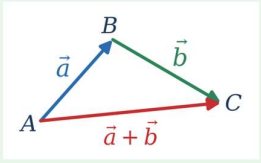


Tam giác ABM vuông tại B có $AB = a$, $BM = \frac{a}{2}$ nên $AM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AE = 2AM = a\sqrt{5}$.

▶ **Ví dụ 10.** (**Vận dụng**) Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 5$. a) Chứng minh $2 \le \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le 8$. b) Khi nào $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 8$? Khi nào $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2$? c) Tính $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ khi hai vectơ có giá vuông góc với nhau.

Lời giải

Lấy điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Theo quy tắc ba điểm, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, nên $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = AC$, với $AB = 3, BC = 5$.



a) Nếu A, B, C không thẳng hàng thì theo bất đẳng thức tam giác: $BC - AB < AC < AB + BC$, tức $2 < AC < 8$.

Nếu A, B, C thẳng hàng: khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì B nằm giữa A và C, $AC = 3 + 5 = 8$; khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng thì C nằm trên tia BA, $AC = 5 - 3 = 2$.

Trong mọi trường hợp, $2 \le \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le 8$.

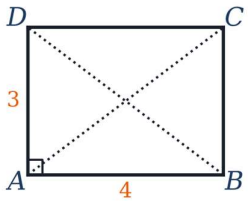
b) Từ lập luận trên: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 8$ khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng; $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2$ khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

c) Khi $\vec{a} \perp \vec{b}$, tam giác ABC vuông tại B nên $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = AC = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

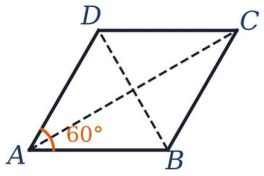
Nhận xét: độ dài của vectơ tổng chỉ bằng tổng các độ dài khi hai vectơ cùng hướng.

✎ Bài tập luyện tập

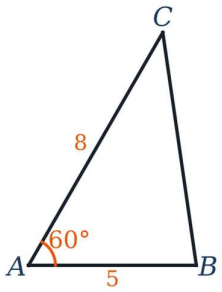
Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 3$ (hình vẽ). Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$.



Bài 11. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 2 có $\widehat{BAD} = 60°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$.

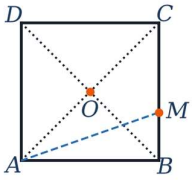


Bài 12. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{BAC} = 60°$ (hình vẽ). Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 13. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A.

Bài 14. (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2 có tâm O và điểm M thay đổi trên cạnh BC (hình vẽ).



a) Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$ và vị trí tương ứng của điểm M.

Dạng 4. Trung điểm, trọng tâm – Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

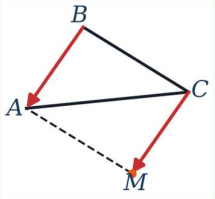
- Dùng quy tắc hiệu, quy tắc ba điểm để gom các vectơ, đưa đẳng thức đã cho về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{v}$, trong đó điểm A và vectơ $\vec{v}$ đã biết; khi đó điểm M được xác định duy nhất.
- Nhận dạng: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB; $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.
- Nếu biến đổi dẫn đến một đẳng thức luôn sai (chẳng hạn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ với $A\neq B$) thì không có điểm nào; nếu dẫn đến một đẳng thức luôn đúng thì mọi điểm đều thoả mãn.
- Tìm tập hợp điểm: đưa về $\left|\overrightarrow{IM}\right|=R$ (I cố định, $R>0$ không đổi) thì M thuộc đường tròn tâm I bán kính R; đưa về $\overrightarrow{IM}$ cùng phương với một vectơ cố định thì M thuộc một đường thẳng.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$. Do đó $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$.

Vậy M là điểm duy nhất thoả mãn $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$, tức là M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

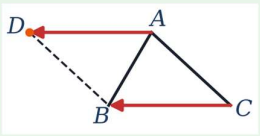


Ví dụ 12. Cho tam giác ABC. Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$. Do đó $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}$.

Vậy D là điểm duy nhất thoả mãn $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ (từ A dựng vectơ bằng $\overrightarrow{CB}$), tức là $ADBC$ là hình bình hành.



Ví dụ 13. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G và tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ thì G cũng là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Điều ngược lại có đúng không?

Lời giải

Chiều thuận. Chèn các điểm A, B, C: $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}\right)+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}\right)=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$.

Tổng thứ nhất bằng $\vec{0}$ vì G là trọng tâm tam giác ABC; tổng thứ hai bằng $\vec{0}$ theo giả thiết. Do đó $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$, tức G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Chiều ngược lại. Giả sử G là trọng tâm chung của hai tam giác. Chèn điểm G: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\right)$.

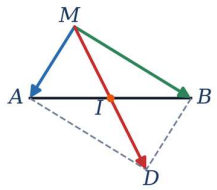
Ta có $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$ và $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$, nên $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Kết luận: hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$. Đây là công cụ hữu ích để chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Chứng minh C là trung điểm của DM.

Bài 16. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I và điểm M không thuộc đường thẳng AB. Gọi D là điểm đối xứng với M qua I (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$ và suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MI$.



Bài 17. Cho tam giác ABC. Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$.

Bài 18. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Tìm tất cả các điểm M thoả mãn: a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}$.

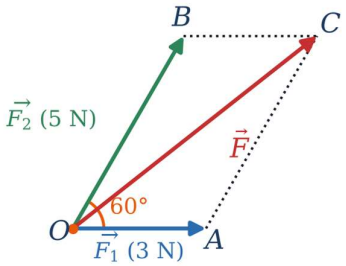
Bài 19. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC. a) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$. b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho vecto $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ cùng phương với vecto $\overrightarrow{BC}$.

Dạng 5. Tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Biểu diễn các lực (vận tốc) bằng các vectơ có chung điểm đặt; hợp lực (vận tốc tổng hợp) là vecto tổng, được biểu diễn bởi đường chéo của hình bình hành.
- Tính độ lớn: hai vectơ cùng hướng thì cộng độ lớn, ngược hướng thì trừ độ lớn; vuông góc thì dùng định lí Pythagore; tạo với nhau góc α thì dùng $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha$.
- Vật đứng yên (cân bằng): tổng các lực tác dụng lên vật bằng $\vec{0}$.
- Qua sông: dòng nước song song với bờ, nên thời gian sang sông chỉ phụ thuộc thành phần vận tốc vuông góc với bờ.
- Vận tốc của vật 1 **đối với** vật 2 (vận tốc tương đối) bằng $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$ – đây là ứng dụng của phép trừ vectơ.

▶ **Ví dụ 14.** Hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ cùng tác dụng vào điểm O, có độ lớn lần lượt là 3 N và 5 N và hợp với nhau góc 60°. Tính độ lớn của hợp lực.



Lời giải

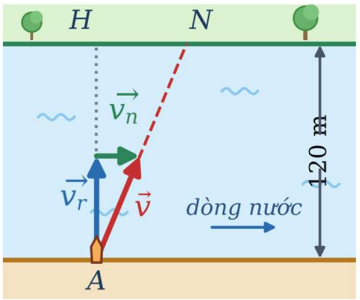
Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{F_1}, \overrightarrow{OB} = \vec{F_2}$ và dựng hình bình hành $OACB$. Theo quy tắc hình bình hành, hợp lực $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{OC}$.

Trong tam giác OAC: $OA = 3, AC = OB = 5, \widehat{OAC} = 180° - \widehat{AOB} = 120°$ (hai góc kề một cạnh của hình bình hành bù nhau).

Theo định lí côsin: $OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2 \cdot OA \cdot AC \cdot \cos 120° = 9 + 25 + 15 = 49$, suy ra $OC = 7$.

Vậy hợp lực có độ lớn **7 N**.

▶ **Ví dụ 15.** Một con thuyền xuất phát từ điểm A để sang bờ bên kia của một con sông rộng 120 m. Mũi thuyền luôn hướng vuông góc với bờ, vận tốc riêng của thuyền là 2,4 m/s, dòng nước chảy với vận tốc 1 m/s (hình vẽ). Tính độ lớn vận tốc thực của thuyền, thời gian sang sông và quãng đường thuyền bị trôi xuôi theo dòng nước.



Lời giải

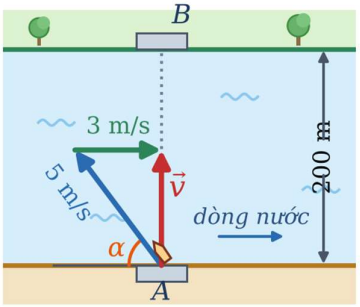
Vận tốc thực của thuyền là $\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_n}$. Vì $\vec{v_r}$ vuông góc với bờ còn $\vec{v_n}$ song song với bờ nên hai vectơ vuông góc, và $|\vec{v}| = \sqrt{2,4^2 + 1^2} = \sqrt{6,76} = 2,6$ (m/s).

Gọi H là điểm ở bờ bên kia đối diện với A (AH vuông góc với bờ) và N là điểm thuyền cập bờ. Sau t giây, thuyền đi được $2,4t$ (m) theo phương vuông góc với bờ và bị dòng nước đẩy t (m) dọc theo bờ.

Thuyền cập bờ khi $2,4t = 120$, tức là $t = 50$ (s). Khi đó thuyền bị trôi xuôi một đoạn $HN = 1 \cdot 50 = 50$ (m).

Vậy vận tốc thực có độ lớn 2,6 m/s, thời gian sang sông là 50 s và thuyền bị trôi xuôi 50 m.

▶ **Ví dụ 16.** (**Vận dụng**) Một chiếc đò máy cần chở khách từ bến A sang bến B ở ngay bên kia sông (AB vuông góc với bờ, sông rộng 200 m). Vận tốc riêng của đò là 5 m/s, dòng nước chảy với vận tốc 3 m/s (hình vẽ).



a) Người lái đò phải giữ mũi đò hợp với bờ (về phía thượng nguồn) một góc α bằng bao nhiêu để đò đi thẳng từ A đến B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)?

b) Khi đó đò sang sông hết bao nhiêu giây?

c) Nếu người lái đò giữ mũi đò vuông góc với bờ thì đò sang sông hết bao lâu và cập bờ cách bến B bao xa?

Lời giải

a) Vận tốc thực $\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_n}$ phải có hướng từ A đến B, tức là vuông góc với bờ. Ba vectơ $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_n}$, $\vec{v}$ tạo thành một tam giác vuông (vuông tại điểm cuối của $\vec{v}$) với cạnh huyền $|\overrightarrow{v_r}| = 5$ và một cạnh góc vuông $|\overrightarrow{v_n}| = 3$.

Góc α giữa $\overrightarrow{v_r}$ và bờ thoả mãn $\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$, suy ra $\alpha \approx 53{,}1^\circ$: đò phải chếch mũi về phía thượng nguồn để thành phần vận tốc dọc bờ triệt tiêu vận tốc dòng nước.

b) Độ lớn vận tốc thực: $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (m/s). Thời gian sang sông: $t = \frac{200}{4} = 50$ (s).

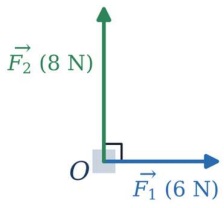
c) Nếu giữ mũi đò vuông góc với bờ thì thời gian sang sông là $\frac{200}{5} = 40$ (s), nhưng trong thời gian đó đò bị trôi xuôi $3 \cdot 40 = 120$ (m), tức là cập bờ cách bến B 120 m về phía hạ lưu.

Nhận xét: muốn sang sông **nhanh nhất** thì giữ mũi vuông góc với bờ; muốn sang **đúng bến đối diện** thì phải chếch mũi về phía thượng nguồn và chấp nhận đi chậm hơn.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 20. Hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có cùng độ lớn 10 N cùng tác dụng vào một vật. Tính độ lớn hợp lực khi góc giữa hai lực là: a) 0°; b) 90°; c) 60°; d) 120°.

Bài 21. Một vật chịu tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ và đứng yên. Biết $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với nhau và có độ lớn lần lượt là 6 N và 8 N (hình vẽ). Tính độ lớn và nêu hướng của $\overrightarrow{F_3}$.



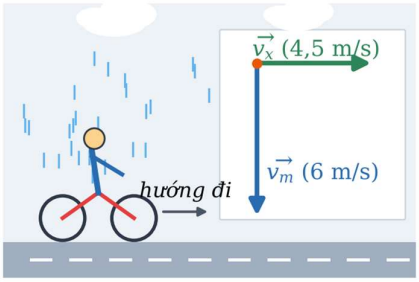
Bài 22. (**Vận dụng**) Trở lại câu chuyện mở đầu: máy bay có vận tốc riêng 300 km/h, gió thổi về hướng đông với vận tốc 55 km/h. Sân bay đích nằm cách điểm xuất phát 600 km về phía bắc.

a) Nếu phi công giữ mũi máy bay hướng bắc, tính độ lớn vận tốc thực của máy bay.

b) Vẫn giữ mũi hướng bắc, khi máy bay bay tới ngang sân bay đích (sân bay nằm ở phía tây của máy bay) thì máy bay cách sân bay bao xa?

c) Phi công phải giữ mũi máy bay theo hướng nào để máy bay bay thẳng tới sân bay đích? Khi đó chuyến bay mất bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 23. (**Vận dụng**) Trời lặng gió, mưa rơi thẳng đứng với vận tốc 6 m/s. Một bạn đi xe đạp trên đường nằm ngang với vận tốc 4,5 m/s (hình vẽ).



a) Tính độ lớn vận tốc của hạt mưa **đối với** người đi xe đạp.

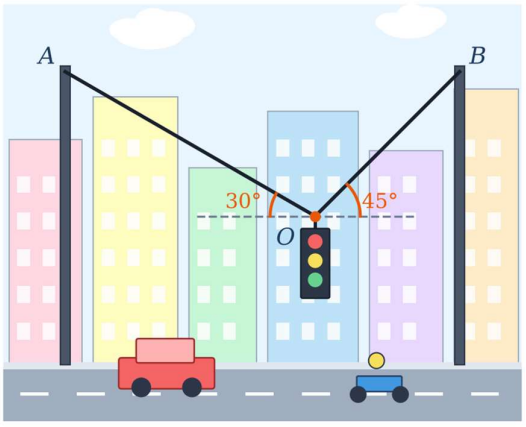
b) Người đi xe đạp thấy các hạt mưa rơi theo phương hợp với phương thẳng đứng một góc bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)? Mưa "hắt" vào người từ phía trước hay phía sau?

Bài 24. (**Vận dụng cao**) Một con sông rộng 120 m có dòng nước chảy với vận tốc 5 m/s; một chiếc xuồng có vận tốc riêng 3 m/s xuất phát từ điểm A ở một bờ. a) Giải thích vì sao dù giữ mũi theo hướng nào, xuồng cũng không thể cập bờ bên kia tại điểm đối diện với A. b) Người lái phải giữ mũi xuồng theo hướng nào để xuồng bị trôi xuôi ít nhất? Tính quãng đường trôi xuôi nhỏ nhất đó.

★ BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Những bài toán giàu ý tưởng, gắn với thực tiễn hoặc đòi hỏi tổng hợp nhiều kiến thức của bài. Hãy tự suy nghĩ trước khi xem lời giải ở phần Hướng dẫn giải.

Điểm nhấn 1. Cụm đèn tín hiệu giữa ngã tư. Một cụm đèn tín hiệu giao thông có trọng lượng 300 N được treo tại điểm O bằng hai sợi cáp OA, OB nối với đỉnh của hai cột đèn ở hai bên đường (hình vẽ). Cáp OA hợp với phương nằm ngang góc 30°, cáp OB hợp với phương nằm ngang góc 45°. Bỏ qua khối lượng của các sợi cáp. Gọi $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ lần lượt là lực căng của cáp OA, OB tác dụng lên điểm O và $\vec{P}$ là trọng lực của cụm đèn.



a) Giải thích vì sao khi đặt nối đuôi nhau, ba vecto $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$, $\vec{P}$ tạo thành một tam giác. Tính các góc của tam giác đó.

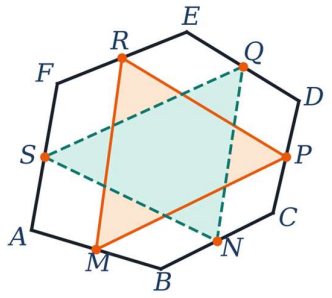
b) Tính độ lớn của hai lực căng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). Sợi cáp nào chịu lực lớn hơn?

c) Mỗi sợi cáp chỉ được phép chịu lực căng tối đa 250 N. Cách treo trên có an toàn không? Nếu thay đổi độ cao các điểm treo để hai sợi cáp đối xứng nhau qua phương thẳng đứng và cùng hợp với phương nằm ngang góc α, thì α phải lớn hơn hoặc bằng bao nhiêu độ để an toàn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Gợi ý

Cụm đèn đứng yên nên tổng ba lực tác dụng vào điểm O bằng $\vec{0}$ – đó chính là "tam giác lực" của Stevin. Hãy tính các góc của tam giác lực rồi áp dụng định lí sin.

Điểm nhấn 2. Lục giác và hai tam giác song sinh. Cho lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA (hình vẽ).



a) Chứng minh $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$.

b) Chứng minh hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

c) Cho $ABCDEF$ là lục giác đều cạnh 2. Chứng minh tam giác MPR đều và tính $\left|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MR}\right|$.

Gợi ý

Câu a): đặt $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}$ và viết $\vec{u}$ theo **hai cách** bằng quy tắc nối đuôi – một lần đi qua các đỉnh B, D, F, một lần đi qua các đỉnh A, C, E – rồi cộng hai kết quả. Câu b): dùng tiêu chuẩn hai tam giác có cùng trọng tâm đã chứng minh ở Ví dụ 13 (Dạng 4).

C LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(Mỗi câu chỉ chọn một phương án.)*

Câu 1. Với ba điểm bất kì A, B, C, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{CA}$ **D.** $\overrightarrow{DB}$

Câu 3. Với ba điểm O, M, N bất kì, $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $\overrightarrow{NM}$ **B.** $\overrightarrow{MN}$ **C.** $\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{OO}$

Câu 4. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\overrightarrow{BA}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AA}$ **D.** $-\overrightarrow{BA}$

Câu 5. Rút gọn $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$ ta được

A. $\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{CB}$

Câu 6. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$

Câu 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$ **C.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ **D.** $\overrightarrow{CD}$

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $2a$ **B.** $a\sqrt{3}-a$ **C.** $a+a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. 4 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 11. Hai lực có độ lớn 3 N và 4 N cùng tác dụng vào một vật và vuông góc với nhau. Độ lớn của hợp lực là

A. 7 N **B.** 1 N **C.** 12 N **D.** 5 N

Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Vectơ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{DA}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\vec{0}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai *(Ở mỗi ý a), b), c), d) chọn Đúng hoặc Sai.)*

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.	☐	☐

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh 2, M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$.	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=2\sqrt{3}$.	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|=2$.	☐	☐
d)	$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2$.	☐	☐

Câu 3. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$.	☐	☐

Câu 4. Hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ có độ lớn lần lượt là 6 N và 8 N cùng tác dụng vào điểm O và hợp với nhau góc α.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $\alpha=0°$, hợp lực có độ lớn 14 N.	☐	☐
b)	Khi $\alpha=180°$, hợp lực có độ lớn 2 N và cùng hướng với $\overrightarrow{F_1}$.	☐	☐
c)	Khi $\alpha=90°$, hợp lực có độ lớn 14 N.	☐	☐
d)	Khi $\alpha=120°$, hợp lực có độ lớn $2\sqrt{13}$ N.	☐	☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=6, AD=8$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh 4. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. Hai lực có độ lớn 7 N và 8 N cùng tác dụng vào một vật và hợp với nhau góc $60°$. Tính độ lớn của hợp lực (đơn vị: N).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Một con tàu chạy thẳng về hướng bắc với vận tốc 8 m/s so với mặt nước. Trên boong tàu, một hành khách đi ngang từ mạn trái sang mạn phải (hướng đông) với vận tốc 1,5 m/s so với tàu. Tính độ lớn vận tốc của hành khách so với mặt nước (đơn vị: m/s, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 8. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho ba điểm phân biệt M, N, P. Vectơ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$ bằng

A. $\overrightarrow{PM}$ **B.** $\overrightarrow{NM}$ **C.** $\overrightarrow{MP}$ **D.** $\vec{0}$

Câu 2. Cho hình bình hành $MNPQ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$ **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NQ}$ **C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$ **D.** $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CB}$ **C.** $\overrightarrow{AA}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ **B.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ với mọi $\vec{a}$

C. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ với mọi $\vec{a}$

Câu 5. Cho bốn điểm phân biệt M, N, P, Q. Rút gọn $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}$ ta được

A. $\overrightarrow{MQ}$ **B.** $\overrightarrow{QM}$ **C.** $\overrightarrow{NQ}$ **D.** $\vec{0}$

Câu 6. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB và O là một điểm bất kì. Vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $\overrightarrow{MB}$ **B.** $\overrightarrow{AM}$ **C.** $\overrightarrow{BM}$ **D.** $\overrightarrow{BA}$

Câu 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm của BC. Vectơ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ bằng

A. $\overrightarrow{AG}$ **B.** $\overrightarrow{GM}$ **C.** $\overrightarrow{GA}$ **D.** $\overrightarrow{AM}$

Câu 8. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$ bằng

A. $\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{BO}$ **C.** $\overrightarrow{CA}$ **D.** $\overrightarrow{AC}$

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. $\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right|$ bằng

A. 0 **B.** a **C.** $2a$ **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3$, $BC=4$. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 12

Câu 11. Hai lực có cùng độ lớn 20 N cùng tác dụng vào một vật và hợp với nhau góc 120°. Độ lớn của hợp lực là

A. 40 N **B.** $20\sqrt{3}$ N **C.** 0 N **D.** 20 N

Câu 12. Cho tam giác ABC. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. trung điểm của đoạn thẳng BC

B. trọng tâm của tam giác ABC

C. điểm M sao cho $ABCM$ là hình bình hành

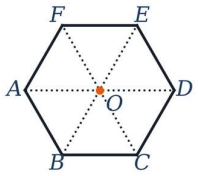
D. điểm M sao cho $ABMC$ là hình bình hành

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$, $AC=8$; M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|=10.$	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=10.$	☐	☐
c)	$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$	☐	☐
d)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|=14.$	☐	☐

Câu 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, cạnh bằng 1 (hình vẽ).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BF}.$	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}.$	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{3}.$	☐	☐
d)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right\|=2.$	☐	☐

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tuỳ ý.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$	☐	☐
b)	$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}.$	☐	☐
c)	$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}.$	☐	☐
d)	$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}.$	☐	☐

Câu 4. Một flycam cần bay từ điểm A đến điểm B cách A 1,2 km về phía đông. Gió thổi về hướng nam với vận tốc 6 m/s; vận tốc riêng của flycam (so với không khí) có độ lớn 10 m/s. Người điều khiển chọn hướng bay sao cho flycam di chuyển đúng theo đường thẳng AB.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Vectơ vận tốc riêng của flycam phải chếch về phía bắc so với hướng đông.	☐	☐
b)	Vận tốc thực của flycam (so với mặt đất) có độ lớn khoảng 11,7 m/s.	☐	☐
c)	Flycam bay từ A đến B hết 150 giây.	☐	☐
d)	Góc giữa hướng của vận tốc riêng và hướng đông lớn hơn $40°$.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 2$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 5 có $\widehat{BAD} = 120°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Hai lực có độ lớn 5 N và 8 N cùng tác dụng vào một vật; hợp lực của chúng có độ lớn 7 N. Tính góc giữa hai lực (đơn vị: độ).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 5. Một vật đứng yên dưới tác dụng của ba lực đồng quy; hai trong ba lực có độ lớn 5 N và 12 N và vuông góc với nhau. Tính độ lớn của lực thứ ba (đơn vị: N).

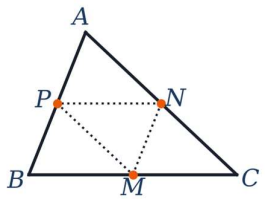
Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 6. Tại một ngã tư, ô tô thứ nhất chạy về hướng đông với vận tốc 15 m/s, ô tô thứ hai chạy về hướng bắc với vận tốc 20 m/s. Tính độ lớn vận tốc của ô tô thứ hai đối với ô tô thứ nhất (đơn vị: m/s).

Đáp số: ☐☐☐☐

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

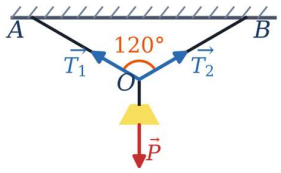


a) Chứng minh $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ (gợi ý: $APMN$ là hình bình hành).

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

c) Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}\right|$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một chiếc đèn được treo vào trần nhà bởi hai sợi dây OA, OB (hình vẽ). Lực căng của mỗi dây có độ lớn 50 N, hai dây hợp với nhau góc 120° và đối xứng nhau qua phương thẳng đứng.



a) Tính độ lớn hợp lực của hai lực căng dây và nêu hướng của hợp lực đó.

b) Biết đèn đứng yên. Tính trọng lượng của đèn.

c) Nếu treo chính chiếc đèn đó bằng hai dây hợp với nhau góc 60° (vẫn đối xứng qua phương thẳng đứng) thì lực căng của mỗi dây bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

— HẾT —

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 8. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Vecto $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AB}$

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vecto $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{DB}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Câu 3. Với bốn điểm phân biệt O, A, B, C, vecto $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{OC}$ **D.** $\overrightarrow{AC}$

Câu 4. Hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vecto đối nhau khi và chỉ khi

A. $\vec{a}=\vec{b}$ **B.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ **C.** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

Câu 5. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Rút gọn $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ ta được

A. $\overrightarrow{AC}$ **B.** $\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{BD}$

Câu 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Vecto $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$ bằng

A. $\overrightarrow{GC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{CG}$ **D.** $\vec{0}$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}$

Câu 8. Cho tam giác ABC. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. trung điểm của đoạn thẳng AB **B.** trung điểm của đoạn thẳng BC
C. trọng tâm của tam giác ABC **D.** điểm A

Câu 9. Cho tam giác đều ABC cạnh 2 và M là trung điểm của BC. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A. 3 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** 1

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=5$, $AD=12$. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. 7 **B.** 17 **C.** $\sqrt{119}$ **D.** 13

Câu 11. Hai lực có độ lớn 5 N và 12 N cùng hướng, cùng tác dụng vào một vật. Độ lớn của hợp lực là

A. 7 N **B.** 13 N **C.** 17 N **D.** 60 N

Câu 12. Một ca nô chạy ngược dòng trên một khúc sông thẳng; vận tốc thực của ca nô (so với bờ) là 18 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h. Vận tốc riêng của ca nô (khi nước đứng yên) có độ lớn là

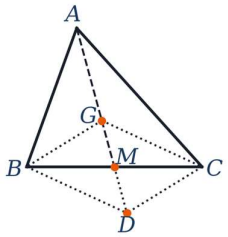
A. 21 km/h **B.** 15 km/h **C.** 18 km/h **D.** $\sqrt{333}$ km/h

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2, tâm O.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|=4.$	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right\|=2.$	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right\|=0.$	☐	☐
d)	$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right\|=2\sqrt{2}.$	☐	☐

Câu 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M (hình vẽ).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$GBDC$ là hình bình hành.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}.$	☐	☐
c)	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$	☐	☐
d)	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}.$	☐	☐

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$; I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}.$	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$	☐	☐
c)	$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}.$	☐	☐
d)	$\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right\|=2IJ.$	☐	☐

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có cùng độ lớn 30 N và hợp với nhau góc 60°.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hợp lực có độ lớn 60 N.	☐	☐
b)	Hợp lực nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi hai lực.	☐	☐
c)	Để vật đứng yên cần tác dụng thêm lực $\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right).$	☐	☐
d)	Nếu góc giữa hai lực tăng lên thành 90° thì độ lớn của hợp lực tăng lên.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9$, $AD = 12$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$.

Đáp số: | | | | |

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$, $AC = 12$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Đáp số: | | | | |

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8$, $BD = 6$. Tính $\left|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}\right|$.

Đáp số: | | | | |

Câu 4. Hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ có độ lớn lần lượt là 6 N và 10 N và hợp với nhau góc 60°. Tính $\left|\vec{F_1} - \vec{F_2}\right|$ (đơn vị: N, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: | | | | |

Câu 5. Một vận động viên bơi sang bờ bên kia của một con sông, luôn giữ hướng bơi vuông góc với bờ với vận tốc 1,5 m/s so với nước. Sau 40 giây, anh ấy tới bờ bên kia tại một điểm cách điểm đối diện với chỗ xuất phát 30 m về phía hạ lưu. Tính vận tốc của dòng nước (đơn vị: m/s).

Đáp số: | | | | |

Câu 6. Một vật đứng yên dưới tác dụng của ba lực đồng quy có độ lớn lần lượt là 10 N, 10 N và $10\sqrt{3}$ N. Tính góc giữa hai lực có cùng độ lớn 10 N (đơn vị: độ).

Đáp số: | | | | |

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

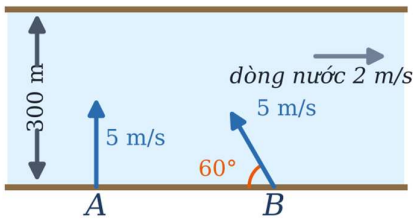
Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và M là điểm tuỳ ý.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và chứng minh N thuộc đoạn thẳng BO.

Bài 2. (**Vận dụng**) Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ cùng một bờ của một con sông thẳng rộng 300 m để sang bờ bên kia. Vận tốc riêng của hai tàu có cùng độ lớn 5 m/s; tàu A luôn giữ mũi vuông góc với bờ, tàu B luôn giữ mũi tạo với bờ góc 60° về phía thượng nguồn (hình vẽ). Vận tốc dòng nước là 2 m/s.



a) Tính thời gian sang sông của mỗi tàu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Tàu nào sang đến bờ bên kia trước? Vì sao?

c) Tính độ lớn vận tốc thực của tàu A (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BÀI 8. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ · Mỗi bài gồm đề và lời giải ngay bên dưới

B LỜI GIẢI BÀI TẬP CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tổng, hiệu – Rút gọn biểu thức vectơ

Bài 1. Rút gọn: a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

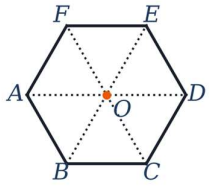
a) Đổi chỗ để các vectơ nối đuôi: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$.

b) Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Do đó biểu thức bằng $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

c) Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$; đổi dấu: $-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}$. Do đó biểu thức bằng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

d) Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Bài 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O (hình vẽ). Tính: a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$; c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.



Lời giải

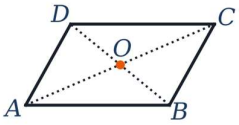
Các đoạn thẳng OA, OB, …, OF chia lục giác đều thành sáu tam giác đều bằng nhau có chung đỉnh O, nên $OA=OB=\cdots=OF$ và bằng cạnh của lục giác.

a) Tứ giác $OABC$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi, do đó là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.

b) Tương tự, $ABOF$ là hình thoi nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$.

c) O là trung điểm của ba đường chéo AD, BE, CF nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. Cộng ba đẳng thức, ta được tổng của sáu vectơ bằng $\vec{0}$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm vectơ bằng mỗi vectơ sau: a) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.



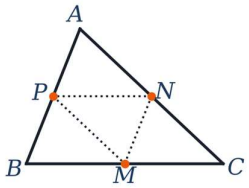
Lời giải

a) Hai vectơ chung điểm đầu O; theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$. Vectơ này cũng bằng $\overrightarrow{DA}$ vì $ABCD$ là hình bình hành.

b) Hai vectơ chung điểm đầu B; theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

c) Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$. Mặt khác $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành). Do đó $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

Bài 4. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC; M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB (hình vẽ).



a) Tìm vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai trong sáu điểm đã cho, bằng $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

c) Biết tam giác ABC đều cạnh 2, tính $\left|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Theo tính chất đường trung bình: $PN\parallel BC$, $PN=\frac{1}{2}BC$; $NM\parallel AB$, $NM=\frac{1}{2}AB$; $MP\parallel CA$, $MP=\frac{1}{2}CA$. Từ đó các tứ giác $APMN$, $PBMN$, $PMCN$ đều là hình bình hành.

a) $PMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PN}$. Do đó $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PN}$. Vì $PBMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PM}$. Vậy $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PM}$.

b) Từ các hình bình hành trên: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PM}$ (hình bình hành $APMN$), $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}$ (hình bình hành $PBMN$), $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NP}$ (hình bình hành $PMCN$).

Do đó $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ (quy tắc nối đuôi).

c) Theo câu a), $\left|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}\right|=PM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 2=1$.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB=8$, $AD=6$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$. Tính độ dài của các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Lời giải

Tính $|\vec{u}|$. O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DA}$ và $|\vec{u}|=DA=6$.

Tính $|\vec{v}|$. Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$. Mà $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật) nên $\vec{v}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, suy ra $|\vec{v}|=0$.

Tính $|\vec{w}|$. Ta có $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Lấy điểm E sao cho B là trung điểm của AE thì $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$, do đó $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$ và $|\vec{w}|=AE=2AB=16$.

Vậy $|\vec{u}|=6$, $|\vec{v}|=0$, $|\vec{w}|=16$. *Lưu ý:* $\vec{v}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$ và $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ chỉ khác nhau ở số hạng đầu ($\overrightarrow{BA}$ hay $\overrightarrow{AB}$) nhưng độ dài khác hẳn nhau: hai vectơ đối nhau triệt tiêu, hai vectơ bằng nhau thì "dồn" lại.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ

Bài 6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh: a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

a) Áp dụng liên tiếp quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

b) Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ (chung điểm đầu A) và $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$ (chung điểm đầu B). Hai vế cùng bằng $\overrightarrow{DC}$ nên đẳng thức được chứng minh.

Bài 7. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

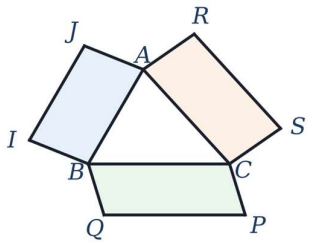
Xét hiệu hai vế, nhóm từng cặp vectơ có chung điểm đầu rồi dùng quy tắc hiệu:

$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}\right)-\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}\right)+\left(\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}$.

Mà $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FF}=\vec{0}$.

Hiệu hai vế bằng $\vec{0}$, do đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

Bài 8. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$ (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.



Lời giải

Chèn các đỉnh của tam giác: $\overrightarrow{RJ}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}$.

Cộng lại và nhóm theo từng hình bình hành: $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}\right)+\left(\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{RA}\right)$.

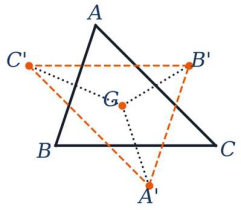
Trong hình bình hành $ABIJ$: $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{BI}$ nên $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Trong hình bình hành $BCPQ$: $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{CP}$ nên $\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

Trong hình bình hành $CARS$: $\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AR}$ nên $\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RA}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$. *Nhận xét:* kết quả không phụ thuộc hình dạng của tam giác và của ba hình bình hành.

Bài 9. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với G qua trung điểm của BC, CA, AB (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$. Từ đó có nhận xét gì về điểm G đối với tam giác $A'B'C'$?



Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC. Tứ giác $GBA'C$ có hai đường chéo GA' và BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

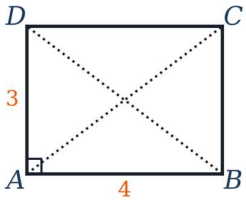
Tương tự: $\overrightarrow{GB'}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$.

Cộng ba đẳng thức: $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$, vì G là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$, tức là G cũng là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Dạng 3. Tính độ dài của vectơ tổng, vectơ hiệu

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4$, $AD=3$ (hình vẽ). Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.



Lời giải

Tam giác ABD vuông tại A nên $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{16+9}=5$; hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau nên $AC=BD=5$.

– $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành) nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=AC=5$.

– $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ (quy tắc hiệu) nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=DB=5$.

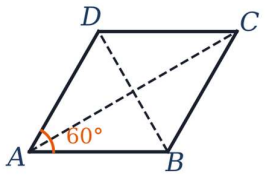
– $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc ba điểm) nên $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=CB=AD=3$.

– Chèn điểm: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Lấy điểm K sao cho D là trung điểm của AK thì $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Do đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}$ và $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=AK=2AD=6$.

Vậy bốn độ dài cần tìm lần lượt là 5; 5; 3; 6.

Bài 11. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 2 có $\widehat{BAD} = 60°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$.



Lời giải

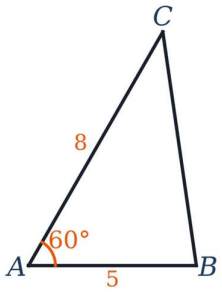
Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC$.

Tam giác ABD có $AB = AD = 2$ và $\widehat{BAD} = 60°$ nên là tam giác đều, suy ra $BD = 2$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo thì AO là đường cao của tam giác đều ABD: $AO = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, do đó $AC = 2AO = 2\sqrt{3}$.

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = DB = 2$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = 2\sqrt{3}$ và $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = 2$.

Bài 12. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\widehat{BAC} = 60°$ (hình vẽ). Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$**.** Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = BC$. Theo định lí côsin: $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 25 + 64 - 40 = 49$, nên $BC = 7$.

Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$**.** Dựng hình bình hành $ABDC$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Trong tam giác ABD: $AB = 5$, $BD = AC = 8$ và $\widehat{ABD} = 180° - \widehat{BAC} = 120°$ (hai góc kề một cạnh của hình bình hành bù nhau).

Theo định lí côsin: $AD^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 25 + 64 + 40 = 129$, nên $AD = \sqrt{129} \approx 11{,}36$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = 7$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{129} \approx 11{,}36$.

Bài 13. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A.

Lời giải

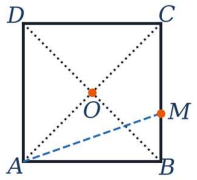
Gọi M là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành. Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow AD = BC$, tức là hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo bằng nhau.

Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi nó là hình chữ nhật, tức là $\widehat{BAC} = 90°$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A.

Bài 14. (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2 có tâm O và điểm M thay đổi trên cạnh BC (hình vẽ).



a) Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$ và vị trí tương ứng của điểm M.

Lời giải

a) Gọi M' là điểm đối xứng với M qua O. Khi M khác C, tứ giác $AMCM'$ có hai đường chéo AC, MM' cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên là hình bình hành, do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MM'}$. Khi M trùng C thì M' trùng A và đẳng thức này vẫn đúng.

Lập luận tương tự với hai đường chéo BD, MM' (cũng cắt nhau tại trung điểm O): $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MM'}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ (cùng bằng $\overrightarrow{MM'}$).

b) Từ câu a), $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right| = MM' = 2MO$. Gọi K là trung điểm của BC thì $OK \perp BC$ và $OK = \frac{AB}{2} = 1$.

Với mọi điểm M thuộc cạnh BC: $MO \geq OK = 1$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên), dấu bằng xảy ra khi M trùng K.

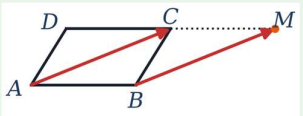
Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$ bằng 2, đạt được khi M là trung điểm của BC.

Dạng 4. Trung điểm, trọng tâm – Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Chứng minh C là trung điểm của DM.

Lời giải

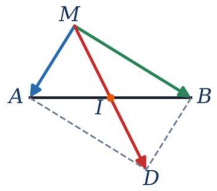
Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, nên $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$. Vậy M là điểm sao cho $ACMB$ là hình bình hành.



Khi đó $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ (hai cạnh đối của hình bình hành $ACMB$). Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành), nên $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DC}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CM}$ bằng nhau nên D, C, M thẳng hàng, C nằm giữa D, M và $DC = CM$. Vậy C là trung điểm của DM.

Bài 16. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I và điểm M không thuộc đường thẳng AB. Gọi D là điểm đối xứng với M qua I (hình vẽ). Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$ và suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MI$.



Lời giải

Tứ giác $MADB$ có hai đường chéo AB và MD cắt nhau tại I là trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh M: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=MD=2MI$ (vì I là trung điểm của MD).

Nhận xét: kết quả $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MI$ vẫn đúng khi M thuộc đường thẳng AB; đây là cách nhanh nhất để tính độ dài của tổng hai vectơ chung điểm đầu.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chuyển vế, đổi dấu: $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$ (quy tắc ba điểm).

Hai vectơ $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{BD}$ là hai vectơ đối nhau; chúng bằng nhau khi và chỉ khi cùng bằng $\vec{0}$, tức là D trùng B.

Thử lại: với $D\equiv B$ thì $\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}$, đúng. Vậy D là điểm B.

Sai lầm thường gặp: nhầm với đẳng thức $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ (khi đó D mới là trung điểm của BC).

Bài 18. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Tìm tất cả các điểm M thoả mãn: a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

a) Chuyển vế: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

Vế trái: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ (quy tắc hiệu). Vế phải: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Đẳng thức trở thành $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$. Vì $A\neq B$ nên $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ đối nhau khác $\vec{0}$, không thể bằng nhau. Vậy **không có điểm M nào** thoả mãn.

b) Chuyển vế: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

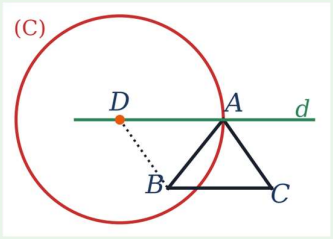
Theo quy tắc hiệu, cả hai vế đều bằng $\overrightarrow{CA}$. Đẳng thức đúng với mọi M, nên **mọi điểm M** trong mặt phẳng đều thoả mãn.

Bài học: không phải đẳng thức vectơ nào cũng xác định đúng một điểm; cần biến đổi đến cùng rồi mới kết luận.

Bài 19. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC. a) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$. b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Gọi D là điểm sao cho $ADBC$ là hình bình hành, tức là $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$. Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$, nên với mọi điểm M: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MD}$.



a) Đẳng thức đã cho tương đương với $MD=\left|\overrightarrow{CB}\right|=BC$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C) tâm D, bán kính BC (đường tròn này đi qua A, vì $DA=BC$).

b) $\overrightarrow{MD}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ khi và chỉ khi M trùng D hoặc đường thẳng MD song song (hoặc trùng) với BC, tức là M thuộc đường thẳng d đi qua D và song song với BC.

Vì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ nên $AD\parallel BC$ và d chính là đường thẳng đi qua A, song song với BC. Vậy tập hợp cần tìm là đường thẳng đi qua A và song song với BC.

Dạng 5. Tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc

Bài 20. Hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ có cùng độ lớn 10 N cùng tác dụng vào một vật. Tính độ lớn hợp lực khi góc giữa hai lực là: a) $0°$; b) $90°$; c) $60°$; d) $120°$.

Lời giải

Gọi F là độ lớn hợp lực. Áp dụng công thức $F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha$ với $F_1=F_2=10$, ta có $F^2=200+200\cos\alpha$.

a) $\alpha=0°$: hai lực cùng hướng nên $F=10+10=20$ (N).

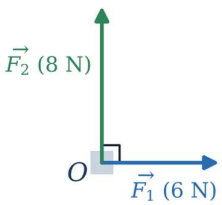
b) $\alpha=90°$: $F^2=200$ nên $F=10\sqrt{2}\approx 14{,}14$ (N).

c) $\alpha=60°$: $F^2=200+100=300$ nên $F=10\sqrt{3}\approx 17{,}32$ (N).

d) $\alpha=120°$: $F^2=200-100=100$ nên $F=10$ (N).

Nhận xét: góc giữa hai lực càng lớn thì hợp lực càng nhỏ.

Bài 21. Một vật chịu tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ và đứng yên. Biết $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với nhau và có độ lớn lần lượt là 6 N và 8 N (hình vẽ). Tính độ lớn và nêu hướng của $\overrightarrow{F_3}$.



Lời giải

Vật đứng yên nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)$.

Hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ được biểu diễn bởi đường chéo của hình chữ nhật dựng trên hai lực vuông góc, nên có độ lớn $\sqrt{6^2+8^2}=10$ (N).

Vậy $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn 10 N, cùng phương và ngược hướng với hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$.

Bài 22. (**Vận dụng**) Trở lại câu chuyện mở đầu: máy bay có vận tốc riêng 300 km/h, gió thổi về hướng đông với vận tốc 55 km/h. Sân bay đích nằm cách điểm xuất phát 600 km về phía bắc.

a) Nếu phi công giữ mũi máy bay hướng bắc, tính độ lớn vận tốc thực của máy bay.

b) Vẫn giữ mũi hướng bắc, khi máy bay bay tới ngang sân bay đích (sân bay nằm ở phía tây của máy bay) thì máy bay cách sân bay bao xa?

c) Phi công phải giữ mũi máy bay theo hướng nào để máy bay bay thẳng tới sân bay đích? Khi đó chuyến bay mất bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi $\overrightarrow{v_1}$ là vận tốc riêng (độ lớn 300 km/h), $\overrightarrow{v_2}$ là vận tốc gió (hướng đông, 55 km/h); vận tốc thực là $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$.

a) $\overrightarrow{v_1}$ hướng bắc, $\overrightarrow{v_2}$ hướng đông nên hai vectơ vuông góc: $|\vec{v}|=\sqrt{300^2+55^2}=\sqrt{93\,025}=305$ (km/h).

b) Chuyển động về phía bắc chỉ do vận tốc riêng (300 km/h), chuyển động về phía đông chỉ do gió (55 km/h). Máy bay tới ngang sân bay đích sau $\frac{600}{300}=2$ (giờ); trong thời gian đó gió đẩy nó sang phía đông $55\cdot 2=110$ (km). Vậy máy bay cách sân bay đích 110 km.

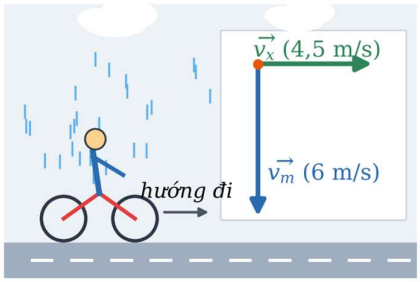
c) Để $\vec{v}$ hướng bắc, phi công phải lái lệch khỏi hướng bắc về phía **tây** một góc α sao cho thành phần hướng tây của vận tốc riêng triệt tiêu vận tốc gió: $300\sin\alpha=55$, suy ra $\sin\alpha=\frac{11}{60}$ và $\alpha\approx 10,6°$.

Khi đó tam giác vận tốc vuông có cạnh huyền $\left|\overrightarrow{v_1}\right|=300$ và một cạnh góc vuông $\left|\overrightarrow{v_2}\right|=55$, nên $|\vec{v}|=\sqrt{300^2-55^2}=\sqrt{86\,975}\approx 294{,}92$ (km/h).

Thời gian bay: $t=\frac{600}{294{,}92}\approx 2{,}0345$ (giờ) $\approx 122{,}07$ (phút) ≈ 122 phút.

Vậy phi công phải lái lệch về phía tây khoảng $10,6°$ so với hướng bắc, và chuyến bay mất khoảng 122 phút – chỉ hơn 2 phút so với khi trời lặng gió, nhưng máy bay hạ cánh đúng nơi.

Bài 23. (**Vận dụng**) Trời lặng gió, mưa rơi thẳng đứng với vận tốc 6 m/s. Một bạn đi xe đạp trên đường nằm ngang với vận tốc 4,5 m/s (hình vẽ).



a) Tính độ lớn vận tốc của hạt mưa **đối với** người đi xe đạp.

b) Người đi xe đạp thấy các hạt mưa rơi theo phương hợp với phương thẳng đứng một góc bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)? Mưa "hắt" vào người từ phía trước hay phía sau?

Lời giải

Gọi $\overrightarrow{v_m}$, $\overrightarrow{v_x}$ lần lượt là vận tốc của hạt mưa và của người đi xe đạp (so với mặt đất). Vận tốc của hạt mưa đối với người là $\vec{u} = \overrightarrow{v_m} - \overrightarrow{v_x} = \overrightarrow{v_m} + (-\overrightarrow{v_x})$.

a) $\overrightarrow{v_m}$ hướng thẳng đứng xuống dưới, $-\overrightarrow{v_x}$ nằm ngang, hướng ngược chiều đi; hai vectơ này vuông góc nên $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 4,5^2} = \sqrt{56,25} = 7,5$ (m/s).

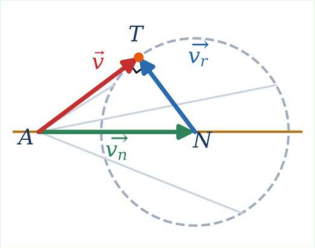
b) Gọi β là góc giữa $\vec{u}$ và phương thẳng đứng. Trong tam giác vận tốc vuông: $\tan\beta = \frac{4,5}{6} = 0,75$, suy ra $\beta \approx 36,9°$.

Vì $\vec{u}$ có thành phần nằm ngang hướng ngược chiều đi, nên đối với người, hạt mưa chuyển động từ phía trước, chếch xuống, về phía sau: mưa hắt vào người từ **phía trước**. Muốn che mưa tốt, bạn ấy nên nghiêng ô về phía trước một góc khoảng $36,9°$ so với phương thẳng đứng.

Bài 24. (**Vận dụng cao**) Một con sông rộng 120 m có dòng nước chảy với vận tốc 5 m/s; một chiếc xuồng có vận tốc riêng 3 m/s xuất phát từ điểm A ở một bờ. a) Giải thích vì sao dù giữ mũi theo hướng nào, xuồng cũng không thể cập bờ bên kia tại điểm đối diện với A. b) Người lái phải giữ mũi xuồng theo hướng nào để xuồng bị trôi xuôi ít nhất? Tính quãng đường trôi xuôi nhỏ nhất đó.

Lời giải

Vận tốc thực $\vec{v} = \overrightarrow{v_n} + \overrightarrow{v_r}$. Đặt $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{v_n}$ ($AN = 5$, hướng xuôi dòng) và $\overrightarrow{NT} = \overrightarrow{v_r}$ thì $\vec{v} = \overrightarrow{AT}$. Vì $NT = 3$ không đổi nên điểm T chạy trên đường tròn tâm N, bán kính 3 (hình vẽ).



a) Xuồng cập bờ tại điểm đối diện với A khi và chỉ khi $\vec{v}$ vuông góc với bờ. Hình chiếu của T lên đường thẳng AN (song song với bờ) cách N không quá 3, nên nằm trong đoạn từ 2 đến 8 tính từ A theo chiều dòng chảy, tức là không bao giờ trùng A. Do đó $\vec{v}$ luôn có thành phần xuôi dòng, xuồng không thể cập bờ tại điểm đối diện.

b) Gọi θ là góc giữa $\vec{v}$ và hướng xuôi dòng. Quãng đường trôi xuôi bằng $120 \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, nên càng nhỏ khi θ càng lớn. Góc $\theta = \widehat{NAT}$ lớn nhất khi AT tiếp xúc với đường tròn, tức $NT \perp AT$.

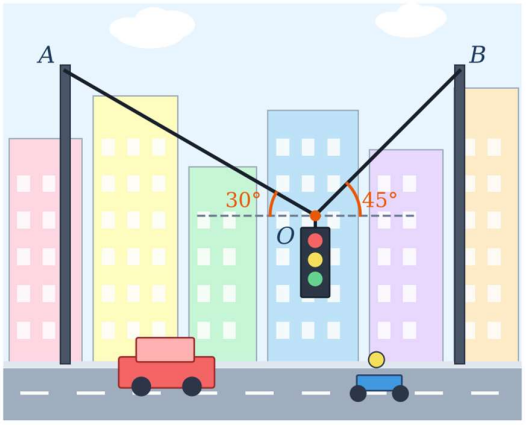
Khi đó tam giác ANT vuông tại T: $\sin\theta = \frac{NT}{AN} = \frac{3}{5}$, $AT = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, nên $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

Quãng đường trôi xuôi nhỏ nhất: $120 \cdot \frac{4/5}{3/5} = 160$ (m). Lúc đó $\overrightarrow{v_r} \perp \vec{v}$: mũi xuồng hợp với hướng ngược dòng một góc φ với $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\varphi \approx 53,1°$.

Vậy phải giữ mũi xuồng chếch về phía thượng nguồn, hợp với bờ góc khoảng $53,1°$; khi đó xuồng bị trôi xuôi ít nhất là 160 m.

★ LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Điểm nhấn 1. Cụm đèn tín hiệu giữa ngã tư. Một cụm đèn tín hiệu giao thông có trọng lượng 300 N được treo tại điểm O bằng hai sợi cáp OA, OB nối với đỉnh của hai cột đèn ở hai bên đường (hình vẽ). Cáp OA hợp với phương nằm ngang góc $30°$, cáp OB hợp với phương nằm ngang góc $45°$. Bỏ qua khối lượng của các sợi cáp. Gọi $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ lần lượt là lực căng của cáp OA, OB tác dụng lên điểm O và $\vec{P}$ là trọng lực của cụm đèn.



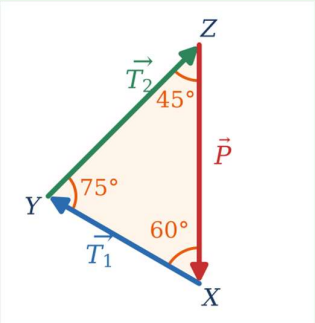
a) Giải thích vì sao khi đặt nối đuôi nhau, ba vecto $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$, $\vec{P}$ tạo thành một tam giác. Tính các góc của tam giác đó.

b) Tính độ lớn của hai lực căng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). Sợi cáp nào chịu lực lớn hơn?

c) Mỗi sợi cáp chỉ được phép chịu lực căng tối đa 250 N. Cách treo trên có an toàn không? Nếu thay đổi độ cao các điểm treo để hai sợi cáp đối xứng nhau qua phương thẳng đứng và cùng hợp với phương nằm ngang góc α, thì α phải lớn hơn hoặc bằng bao nhiêu độ để an toàn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Cụm đèn đứng yên nên $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$. Từ một điểm X, vẽ $\overrightarrow{XY} = \vec{T_1}$ và $\overrightarrow{YZ} = \vec{T_2}$. Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{XZ} = \vec{T_1} + \vec{T_2} = -\vec{P}$, tức là $\overrightarrow{ZX} = \vec{P}$. Ba lực đôi một không cùng phương nên X, Y, Z là ba đỉnh của một tam giác; ba cạnh $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{YZ}$, $\overrightarrow{ZX}$ biểu diễn đúng ba lực.



Vì $\vec{P}$ hướng thẳng đứng xuống dưới nên $\overrightarrow{XZ}$ hướng thẳng đứng lên trên.

– $\vec{T_1}$ hướng dọc theo cáp về phía A, hợp với phương nằm ngang góc $30°$, tức là hợp với phương thẳng đứng góc $60°$. Do đó $\widehat{YXZ} = 60°$.

– $\vec{T_2}$ hợp với phương thẳng đứng góc $90° - 45° = 45°$, nên góc giữa $\overrightarrow{ZY}$ (ngược hướng với $\vec{T_2}$) và $\overrightarrow{ZX}$ (hướng thẳng đứng xuống) là $\widehat{XZY} = 45°$.

– $\widehat{XYZ} = 180° - 60° - 45° = 75°$.

b) Đặt $T_1 = \left|\overrightarrow{T_1}\right| = XY$, $T_2 = \left|\overrightarrow{T_2}\right| = YZ$, $P = ZX = 300$. Theo định lí sin trong tam giác XYZ: $\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 60^\circ} = \frac{300}{\sin 75^\circ}$.

Với $\sin 75^\circ \approx 0{,}9659$: $T_1 = \frac{300\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 219{,}6$ (N) và $T_2 = \frac{300\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 269{,}0$ (N).

Kiểm tra lại: thành phần nằm ngang của hai lực căng triệt tiêu nhau ($219{,}6\cos 30^\circ \approx 190{,}2 \approx 269{,}0\cos 45^\circ$), còn tổng các thành phần thẳng đứng $219{,}6\sin 30^\circ + 269{,}0\sin 45^\circ \approx 109{,}8 + 190{,}2 = 300$ cân bằng với trọng lượng. Vậy cáp OB (dốc hơn) chịu lực lớn hơn.

c) Vì $T_2 \approx 269{,}0 > 250$ nên cáp OB bị quá tải: cách treo trên **không an toàn**.

Khi hai cáp đối xứng và cùng hợp với phương nằm ngang góc α, tam giác lực XYZ có hai góc ở X, Z cùng bằng $90^\circ - \alpha$ nên cân tại Y, với $XY = YZ = T$ và góc ở đỉnh $\widehat{XYZ} = 2\alpha$.

Gọi H là trung điểm của XZ thì $YH \perp XZ$ và $\widehat{XYH} = \alpha$. Trong tam giác vuông XHY: $XH = XY\sin\alpha$, tức $\frac{300}{2} = T\sin\alpha$, hay $T = \frac{150}{\sin}$.

Điều kiện an toàn: $T \le 250 \Leftrightarrow \sin\alpha \ge \frac{150}{250} = 0{,}6 \Leftrightarrow \alpha \ge 36{,}9^\circ$ (vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Vậy mỗi sợi cáp phải hợp với phương nằm ngang góc ít nhất khoảng $36{,}9^\circ$.

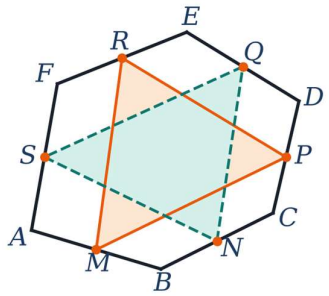
Nhận xét – Mở rộng

Vì sao dây điện luôn võng? Công thức $T = \frac{P}{2\sin\alpha}$ cho thấy cáp càng gần nằm ngang thì lực căng càng lớn, và khi α dần tới 0° thì T lớn không giới hạn. Không thể kéo một sợi dây có vật treo ở giữa "thẳng tắp", nên dây điện, cáp treo, dây phơi bao giờ cũng có độ võng.

Tổng quát hoá. Nếu hai cáp hợp với phương nằm ngang các góc α, β thì tam giác lực có các góc $90^\circ - \beta$, $90^\circ - \alpha$, $\alpha + \beta$ (đối diện lần lượt với T_1, T_2, P), nên $T_1 = \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $T_2 = \frac{P\cos}{\sin(\alpha+\beta)}$: sợi cáp dốc hơn luôn chịu lực lớn hơn.

Sai lầm thường gặp: cho rằng mỗi sợi cáp "gánh một nửa" trọng lượng (150 N). Thực tế cả hai lực căng đều lớn hơn 150 N vì một phần lực căng chỉ dùng để "kéo ngang" cân bằng lẫn nhau.

Điểm nhấn 2. Lục giác và hai tam giác song sinh. Cho lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA (hình vẽ).



a) Chứng minh $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$.

b) Chứng minh hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

c) Cho $ABCDEF$ là lục giác đều cạnh 2. Chứng minh tam giác MPR đều và tính $\left|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR}\right|$.

Lời giải

a) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$.

Cách viết thứ nhất (đi qua B, D, F): $\vec{u} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\right) + \left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}\right) + \left(\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FS}\right)$.

Cách viết thứ hai (đi qua A, C, E):
$\vec{u} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\right) + \left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EQ}\right) + \left(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AS}\right)$.
Cộng hai đẳng thức và nhóm các vectơ có chung một trung điểm:
$\vec{u} + \vec{u} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}\right) + \left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right) + \left(\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{EQ}\right) + \left(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RF}\right) + \left(\overrightarrow{FS} + \overrightarrow{AS}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\right)$.
Vì M, P, R là trung điểm của AB, CD, EF nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RF} = \vec{0}$. Vì N, Q, S là trung điểm của BC, DE, FA nên $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = -\left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right) = \vec{0}$, tương tự $\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{AS} = \vec{0}$. Cuối cùng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Do đó $\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$. Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ thì $\vec{u} + \vec{u}$ là vectơ cùng hướng với $\vec{u}$ và có độ dài $2|\vec{u}| > 0$, vô lí.
Vậy $\vec{u} = \vec{0}$, tức $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác MPR: $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$. Chèn các điểm M, P, R:
$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MN}\right) + \left(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PQ}\right) + \left(\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RS}\right) = \left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}\right) + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}\right) = \vec{0}$ (theo câu a).
Vậy G cũng là trọng tâm tam giác NQS: hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

c) Gọi O là tâm lục giác đều. Các tam giác OAB, OCD, OEF đều cạnh 2 nên các trung tuyến OM, OP, OR cũng là đường cao: $OM = OP = OR = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, và OM, OP, OR lần lượt vuông góc với AB, CD, EF.
Hai cạnh AB và CD cách nhau một cạnh BC nên $\widehat{MOP} = \widehat{MOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COP} = 30° + 60° + 30° = 120°$; tương tự $\widehat{POR} = \widehat{ROM} = 120°$.
Theo định lí côsin: $MP^2 = 3 + 3 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 9$, nên $MP = 3$; tương tự $PR = RM = 3$. Vậy tam giác MPR đều cạnh 3.
Gọi K là trung điểm của PR và M' là điểm đối xứng với M qua K. Tứ giác $MPM'R$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đường nên là hình bình hành, do đó $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MM'}$ và $\left|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR}\right| = MM' = 2MK$ (kết quả quen thuộc ở Dạng 4). Mà MK là đường cao của tam giác đều cạnh 3: $MK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR}\right| = 3\sqrt{3}$.

Nhận xét – Mở rộng
Ý tưởng then chốt là tính một vectơ theo hai con đường rồi cộng lại để mọi "phần thừa" triệt tiêu – kĩ thuật rất hiệu quả khi đề bài có nhiều trung điểm.
Kết quả a), b) đúng với **mọi** lục giác (không cần lồi, không cần đều). Với lục giác đều, hai tam giác MPR, NQS đều là tam giác đều cạnh 3 và tạo thành ngôi sao sáu cánh quen thuộc; trọng tâm chung của chúng chính là tâm O.
Nhìn trước Bài 9: khi đã có phép nhân vectơ với một số, tính chất đường trung bình cho ngay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, và câu a) chỉ còn một dòng. Lời giải ở đây cho thấy chỉ với phép cộng vectơ ta vẫn đi đến cùng một kết quả.

C LỜI GIẢI LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Với ba điểm bất kì A, B, C, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm, với ba điểm bất kì A, B, C ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (điểm cuối của $\overrightarrow{AB}$ trùng điểm đầu của $\overrightarrow{BC}$). Khẳng định với hiệu sai vì theo quy tắc hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{CA}$ **D.** $\overrightarrow{DB}$

Lời giải

Áp dụng quy tắc hình bình hành tại đỉnh C của hình bình hành $ABCD$ (hai cạnh CB, CD và đường chéo CA): $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là vectơ đối của kết quả nên không đúng.

Chọn đáp án C.

Câu 3. Với ba điểm O, M, N bất kì, $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $\overrightarrow{NM}$ **B.** $\overrightarrow{MN}$ **C.** $\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{OO}$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MN}$ (vectơ hiệu đi từ điểm cuối M của vectơ trừ đến điểm cuối N của vectơ bị trừ). Vectơ $\overrightarrow{NM}$ là vectơ đối của kết quả nên sai.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\overrightarrow{BA}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AA}$ **D.** $-\overrightarrow{BA}$

Lời giải

Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$, đó là $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Lưu ý $-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$ chính là $\overrightarrow{AB}$, còn $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Chọn đáp án A.

Câu 5. Rút gọn $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$ ta được

A. $\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đổi chỗ để các vectơ nối đuôi: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Sai lầm thường gặp là cộng hai vectơ đầu theo đúng thứ tự viết ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ không nối đuôi); cần đổi chỗ trước để các vectơ nối đuôi nhau.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$

Lời giải

I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài và ngược hướng, tức là hai vectơ đối nhau: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Hai vectơ này ngược hướng nên $\overrightarrow{IA}\neq\overrightarrow{IB}$; còn $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$.

Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$ **C.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Lời giải

Theo tính chất trọng tâm: G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Từ đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CG}$ (không phải $\overrightarrow{GC}$), và $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}\neq\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ **D.** $\overrightarrow{CD}$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$; các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ ngược hướng với kết quả nên sai.

Chọn đáp án D.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $2a$ **B.** $a\sqrt{3}-a$ **C.** $a+a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=BC$. Tam giác ABC vuông tại A: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

Lưu ý: độ dài của vectơ hiệu không bằng hiệu các độ dài $a\sqrt{3}-a$.

Chọn đáp án A.

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. 4 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=AC$. AC là đường chéo của hình vuông cạnh 2: $AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Kết quả 4 sai vì đã cộng hai độ dài $AB+AD$; hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ không cùng hướng nên không được cộng độ dài.

Chọn đáp án B.

Câu 11. Hai lực có độ lớn 3 N và 4 N cùng tác dụng vào một vật và vuông góc với nhau. Độ lớn của hợp lực là

A. 7 N **B.** 1 N **C.** 12 N **D.** 5 N

Lời giải

Hợp lực được biểu diễn bởi đường chéo của hình chữ nhật dựng trên hai lực vuông góc nên có độ lớn $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ (N). Không được cộng độ lớn $(3+4=7)$ vì hai lực không cùng hướng.

Chọn đáp án D.

Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Vectơ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{DA}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải

Đổi dấu: $-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.		✓
c)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh A: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

b) Sai. Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Vectơ $\overrightarrow{DB}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{BD}$ (khác $\vec{0}$) nên $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BD}$.

c) Đúng. O là trung điểm của AC và của BD nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Cộng lại, tổng của bốn vectơ bằng $\vec{0}$.

d) Đúng. $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$, do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh 2, M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$.		✓
b)	$\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\rvert=2\sqrt{3}$.	✓	
c)	$\left\lvert\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\rvert=2$.	✓	
d)	$\left\lvert\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\rvert=2$.		✓

Lời giải

a) Sai. Gọi D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$. Vectơ $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$ nhưng có độ dài $AD=2AM\neq AM$, nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AM}$.

b) Đúng. AM là đường cao của tam giác đều cạnh 2 nên $AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AD = 2AM = 2\sqrt{3}$.

c) Đúng. Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = CB = 2$.

d) Sai. M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, do đó $\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 0 \neq 2$.

Câu 3. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.	✓	
c)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.		✓
d)	$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. Chèn điểm D: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) Đúng. Chèn điểm: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

c) Sai. Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Vì $A \neq D$ nên $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ là hai vectơ đối nhau khác $\vec{0}$, không bằng nhau.

d) Đúng. Theo quy tắc hiệu (hai vectơ chung điểm đầu D): $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$.

Câu 4. Hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn lần lượt là 6 N và 8 N cùng tác dụng vào điểm O và hợp với nhau góc α.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $\alpha = 0°$, hợp lực có độ lớn 14 N.	✓	
b)	Khi $\alpha = 180°$, hợp lực có độ lớn 2 N và cùng hướng với $\overrightarrow{F_1}$.		✓
c)	Khi $\alpha = 90°$, hợp lực có độ lớn 14 N.		✓
d)	Khi $\alpha = 120°$, hợp lực có độ lớn $2\sqrt{13}$ N.	✓	

Lời giải

a) Đúng. Hai lực cùng hướng nên hợp lực cùng hướng với chúng và có độ lớn $6 + 8 = 14$ (N).

b) Sai. Hai lực ngược hướng nên hợp lực có độ lớn $8 - 6 = 2$ (N) và cùng hướng với lực có độ lớn lớn hơn, tức là cùng hướng với $\overrightarrow{F_2}$ (8 N), không phải $\overrightarrow{F_1}$.

c) Sai. Hai lực vuông góc nên hợp lực có độ lớn $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (N), không phải 14 N.

d) Đúng. $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right|^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 36 + 64 - 48 = 52$ nên $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (N).

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 8$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC$.

Tam giác ABC vuông tại B có $AB = 6$, $BC = AD = 8$ nên $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

Đáp số: 10

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh 4. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AD = 2AM$.

AM là đường cao của tam giác đều cạnh 4 nên $AM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$.

Làm tròn đến hàng phần trăm: 6,93.

Đáp số: 6,93

Câu 3. Hai lực có độ lớn 7 N và 8 N cùng tác dụng vào một vật và hợp với nhau góc $60°$. Tính độ lớn của hợp lực (đơn vị: N).

Lời giải

Gọi F là độ lớn của hợp lực. Áp dụng định lí côsin cho hình bình hành lực: $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60° = 49 + 64 + 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 169$.

Suy ra $F = \sqrt{169} = 13$ (N).

Đáp số: 13

Câu 4. Một con tàu chạy thẳng về hướng bắc với vận tốc 8 m/s so với mặt nước. Trên boong tàu, một hành khách đi ngang từ mạn trái sang mạn phải (hướng đông) với vận tốc 1,5 m/s so với tàu. Tính độ lớn vận tốc của hành khách so với mặt nước (đơn vị: m/s, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Vận tốc của hành khách so với mặt nước bằng tổng của vận tốc tàu so với mặt nước ($\vec{v_1}$, hướng bắc, 8 m/s) và vận tốc hành khách so với tàu ($\vec{v_2}$, hướng đông, 1,5 m/s): $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$.

Hai vectơ vuông góc nên $|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{66{,}25} \approx 8{,}139$ (m/s). Làm tròn đến hàng phần trăm: 8,14.

Đáp số: 8,14

1 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	A	B	C	A	C	A	D	D	B	D	B

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	Đ	Đ	S
2	S	S	Đ	Đ
3	Đ	S	Đ	Đ
4	Đ	S	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	8,25	8,66	8	120	13	25

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho ba điểm phân biệt M, N, P. Vectơ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$ bằng

A. $\overrightarrow{PM}$ **B.** $\overrightarrow{NM}$ **C.** $\overrightarrow{MP}$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm (điểm cuối của $\overrightarrow{MN}$ trùng điểm đầu của $\overrightarrow{NP}$): $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$. Vectơ $\overrightarrow{PM}$ là vectơ đối của kết quả nên sai.

Chọn đáp án C.

Câu 2. Cho hình bình hành $MNPQ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$ **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NQ}$ **C.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$ **D.** $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$

Lời giải

Áp dụng quy tắc hình bình hành tại đỉnh M của hình bình hành $MNPQ$ (hai cạnh MN, MQ và đường chéo MP): $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}$. Khẳng định có hiệu sai vì theo quy tắc hiệu $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{QN}$.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CB}$ **C.** $\overrightarrow{AA}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu (hai vectơ chung điểm đầu A): $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Vectơ $\overrightarrow{BC}$ là vectơ đối của kết quả nên sai.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ **B.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ với mọi $\vec{a}$

C. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ **với mọi** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ với mọi $\vec{a}$

Lời giải

Tính chất giao hoán, tính chất cộng với vectơ-không và đẳng thức $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ luôn đúng.

Đẳng thức $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ chỉ đúng khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng (hoặc một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$).

Chẳng hạn, với $\vec{b}=-\vec{a}\neq\vec{0}$ thì vế trái bằng 0, còn vế phải bằng $2|\vec{a}|>0$. Vậy khẳng định này sai.

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho bốn điểm phân biệt M, N, P, Q. Rút gọn $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}$ ta được

A. $\overrightarrow{MQ}$ **B.** $\overrightarrow{QM}$ **C.** $\overrightarrow{NQ}$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải

Đổi dấu: $-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP}$. Do đó $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$.

Chọn đáp án A.

Câu 6. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB và O là một điểm bất kì. Vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $\overrightarrow{MB}$ **B.** $\overrightarrow{AM}$ **C.** $\overrightarrow{BM}$ **D.** $\overrightarrow{BA}$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu (hai vectơ chung điểm đầu O): $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MA}$. Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}$ (cùng hướng, cùng độ dài).

Các vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ đều ngược hướng với $\overrightarrow{MA}$ nên không đúng; còn $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$ nhưng dài gấp đôi.

Chọn đáp án C.

Câu 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm của BC. Vectơ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ bằng

A. $\overrightarrow{AG}$ **B.** $\overrightarrow{GM}$ **C.** $\overrightarrow{GA}$ **D.** $\overrightarrow{AM}$

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$.

Vectơ $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AG}$ nhưng dài hơn ($AG=\frac{2}{3}AM$), còn $\overrightarrow{GM}$ chỉ dài bằng một nửa AG, nên đều sai.

Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$ bằng

A. $\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{BO}$ **C.** $\overrightarrow{CA}$ **D.** $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Các đoạn thẳng nối O với các đỉnh chia lục giác đều thành sáu tam giác đều bằng nhau, nên $AB=BC=CO=OA$, tức $ABCO$ là hình thoi.

Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh A của hình thoi $ABCO$ (hai cạnh AB, AO và đường chéo AC): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án D.

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. $\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right|$ bằng

A. 0 **B.** a **C.** $2a$ **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Đổi dấu: $-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$, nên $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right|=AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a).

Chọn đáp án D.

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3$, $BC=4$. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 12

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Tam giác ABC vuông tại B nên $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=5$ (không phải $3+4=7$, vì hai vectơ không cùng hướng).

Chọn đáp án B.

Câu 11. Hai lực có cùng độ lớn 20 N cùng tác dụng vào một vật và hợp với nhau góc $120°$. Độ lớn của hợp lực là

A. 40 N **B.** $20\sqrt{3}$ N **C.** 0 N **D. 20 N**

Lời giải

Gọi F là độ lớn hợp lực: $F^2=20^2+20^2+2\cdot 20\cdot 20\cdot\cos 120°=400+400-400=400$, nên $F=20$ N.

(Hình bình hành lực là hình thoi có góc $120°$ tại điểm đặt; đường chéo xuất phát từ điểm đặt chia hình thoi thành hai tam giác đều cạnh 20.)

Chọn đáp án D.

Câu 12. Cho tam giác ABC. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. trung điểm của đoạn thẳng BC

B. trọng tâm của tam giác ABC

C. điểm M sao cho $ABCM$ là hình bình hành

D. điểm M sao cho $ABMC$ là hình bình hành

Lời giải

Theo tính chất trọng tâm: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Nếu M là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, khi đó tổng bằng $\overrightarrow{MA}\neq\vec{0}$. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$ hay $ABMC$ nằm ngoài tam giác nên không trùng với trọng tâm, do đó cũng không thoả mãn đẳng thức.

Chọn đáp án B.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$, $AC=8$; M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|=10$.	✓	
b)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=10$.	✓	
c)	$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.	✓	
d)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|=14$.		✓

Lời giải

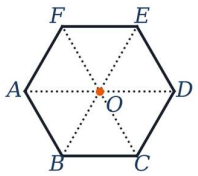
a) Đúng. Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=BC=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

b) Đúng. Gọi D là điểm đối xứng với A qua M thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$; hình bình hành $ABDC$ có góc A vuông nên là hình chữ nhật, do đó $AD=BC=10$.

c) Đúng. M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ là hai vectơ đối nhau, có tổng bằng $\vec{0}$.

d) Sai. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right|=CB=10\neq 14$.

Câu 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, cạnh bằng 1 (hình vẽ).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BF}$.		✓
b)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.		✓
c)	$\left\|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{3}$.	✓	
d)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right\|=2$.	✓	

Lời giải

a) Sai. $OB=BA=AF=FO=1$ nên $OBAF$ là hình thoi. Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh O: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}$. Còn $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}$ (quy tắc hiệu); hai đường chéo OA, BF của hình thoi vuông góc với nhau nên $\overrightarrow{BF}$ không cùng phương với $\overrightarrow{OA}$, do đó $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}\neq\overrightarrow{BF}$.

b) Sai. $OBCD$ và $OAFE$ là các hình thoi nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}$. Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, khác $\overrightarrow{AF}$ (ba vectơ đã cho không nối đuôi nhau nên không dùng quy tắc ba điểm để được $\overrightarrow{AF}$).

c) Đúng. Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$. Tam giác ABC có $AB=BC=1$, $\widehat{ABC}=120^\circ$ nên $CA^2=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos120^\circ=3$, $CA=\sqrt{3}$.

d) Đúng. Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. AD là đường chéo đi qua tâm O nên $AD=2OA=2$. Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right|=2$ (không được cộng độ dài ba cạnh $1+1+1=3$).

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tuỳ ý.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.		✓
c)	$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (quy tắc hiệu); đẳng thức cuối đúng vì $ABCD$ là hình bình hành.

b) Sai. Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$. Vì $A\neq B$ nên $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ đối nhau khác $\vec{0}$, không bằng nhau; khẳng định sai (đúng ra $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$).

c) Đúng. Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh D của hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$.

d) Đúng. Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh B : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$. Do đó $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

Câu 4. Một flycam cần bay từ điểm A đến điểm B cách A 1,2 km về phía đông. Gió thổi về hướng nam với vận tốc 6 m/s; vận tốc riêng của flycam (so với không khí) có độ lớn 10 m/s. Người điều khiển chọn hướng bay sao cho flycam di chuyển đúng theo đường thẳng AB.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Vectơ vận tốc riêng của flycam phải chếch về phía bắc so với hướng đông.	✓	
b)	Vận tốc thực của flycam (so với mặt đất) có độ lớn khoảng 11,7 m/s.		✓
c)	Flycam bay từ A đến B hết 150 giây.	✓	
d)	Góc giữa hướng của vận tốc riêng và hướng đông lớn hơn 40°.		✓

Lời giải

a) Đúng. Vận tốc thực $\vec{v}=\overrightarrow{v_r}+\overrightarrow{v_g}$ phải hướng đông, mà gió hướng nam, nên $\overrightarrow{v_r}=\vec{v}-\overrightarrow{v_g}$ có thành phần hướng bắc để triệt tiêu gió: flycam phải chếch về phía bắc.

b) Sai. $\overrightarrow{v_r}$ là cạnh huyền của tam giác vận tốc vuông có một cạnh góc vuông là $\left|\overrightarrow{v_g}\right|=6$, nên $|\vec{v}|=\sqrt{10^2-6^2}=8$ (m/s). Giá trị $\sqrt{10^2+6^2}\approx 11{,}7$ là sai lầm do cộng như hai vectơ vuông góc $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_g}$.

c) Đúng. Thời gian bay: $t=\frac{1200}{8}=150$ (s).

d) Sai. Gọi θ là góc giữa $\overrightarrow{v_r}$ và hướng đông thì $\sin\theta=\frac{6}{10}=0{,}6$, suy ra $\theta\approx 36{,}9°<40°$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4$, $AD=2$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, E là điểm đối xứng với A qua M thì $ABEC$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ và $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=AE=2AM$.

Tam giác ABM vuông tại B có $AB=4$, $BM=\frac{BC}{2}=1$ nên $AM=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{17}\approx 8{,}246$; làm tròn đến hàng phần trăm: 8,25.

Đáp số: 8,25

Câu 2. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 5 có $\widehat{BAD} = 120°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = BD$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 120° = 25 + 25 + 25 = 75$, nên $BD = 5\sqrt{3} \approx 8{,}660$.

Làm tròn đến hàng phần trăm: 8,66.

Đáp số: 8,66

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành, nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AD = 2AM$.

Tam giác ABC cân tại A nên trung tuyến AM cũng là đường cao, $BM = 3$. Theo định lí Pythagore: $AM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2 \cdot 4 = 8$.

Đáp số: 8

Câu 4. Hai lực có độ lớn 5 N và 8 N cùng tác dụng vào một vật; hợp lực của chúng có độ lớn 7 N. Tính góc giữa hai lực (đơn vị: độ).

Lời giải

Gọi α là góc giữa hai lực. Từ công thức $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$: $49 = 25 + 64 + 2 \cdot 5 \cdot 8\cos\alpha$, tức $80\cos\alpha = -40$.

Suy ra $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, nên $\alpha = 120°$. (Kiểm tra: khi hai lực vuông góc, hợp lực bằng $\sqrt{5^2 + 8^2} \approx 9{,}4$ N; ở đây hợp lực chỉ 7 N nên góc giữa hai lực phải là góc tù – phù hợp.)

Đáp số: 120

Câu 5. Một vật đứng yên dưới tác dụng của ba lực đồng quy; hai trong ba lực có độ lớn 5 N và 12 N và vuông góc với nhau. Tính độ lớn của lực thứ ba (đơn vị: N).

Lời giải

Vật đứng yên nên $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$, suy ra $\vec{F_3} = -\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)$ và $\left|\vec{F_3}\right| = \left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right|$.

Hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ vuông góc nên $\left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (N).

Đáp số: 13

Câu 6. Tại một ngã tư, ô tô thứ nhất chạy về hướng đông với vận tốc 15 m/s, ô tô thứ hai chạy về hướng bắc với vận tốc 20 m/s. Tính độ lớn vận tốc của ô tô thứ hai đối với ô tô thứ nhất (đơn vị: m/s).

Lời giải

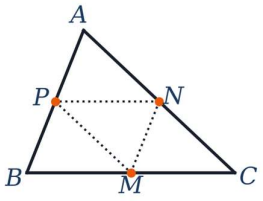
Vận tốc của ô tô thứ hai đối với ô tô thứ nhất là $\vec{u} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{v_2} + \left(-\vec{v_1}\right)$, trong đó $\vec{v_2}$ hướng bắc (20 m/s), $-\vec{v_1}$ hướng tây (15 m/s).

Hai vectơ này vuông góc nên $|\vec{u}| = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$ (m/s). (Người ngồi trên ô tô thứ nhất thấy ô tô thứ hai đi về phía bắc, chếch sang phía tây.)

Đáp số: 25

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.



a) Chứng minh $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$ (gợi ý: $APMN$ là hình bình hành).

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

c) Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}\right|$.

Lời giải

a) PM là đường trung bình của tam giác ABC nên $PM \parallel AC$ và $PM=\frac{1}{2}AC=AN$. Tứ giác $APMN$ có $PM \parallel AN$ và $PM=AN$ nên là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$.

b) Tương tự, $BPNM$ và $CNPM$ là các hình bình hành nên $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CM}$.

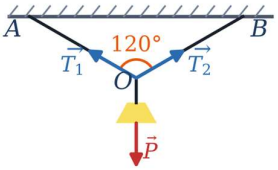
Cộng ba đẳng thức: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}\right)+\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CN}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right)$.

Vì P là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BP}$ là hai vectơ đối nhau, tổng bằng $\vec{0}$; tương tự cho hai cặp còn lại (do N, M là trung điểm của AC, BC). Vậy $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

c) Theo câu a), $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM$. Tam giác ABC đều cạnh a nên trung tuyến AM cũng là đường cao: $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một chiếc đèn được treo vào trần nhà bởi hai sợi dây OA, OB (hình vẽ). Lực căng của mỗi dây có độ lớn 50 N, hai dây hợp với nhau góc $120°$ và đối xứng nhau qua phương thẳng đứng.



a) Tính độ lớn hợp lực của hai lực căng dây và nêu hướng của hợp lực đó.

b) Biết đèn đứng yên. Tính trọng lượng của đèn.

c) Nếu treo chính chiếc đèn đó bằng hai dây hợp với nhau góc $60°$ (vẫn đối xứng qua phương thẳng đứng) thì lực căng của mỗi dây bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Gọi $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ là lực căng của hai dây (đặt tại O, hướng dọc theo dây về phía A, B). Hai lực có cùng độ lớn 50 N và hợp với nhau góc $120°$ nên $\left|\vec{T}_1+\vec{T}_2\right|^2=50^2+50^2+2\cdot 50\cdot 50\cdot\cos 120°=2500$, tức $\left|\vec{T}_1+\vec{T}_2\right|=50$ N.

Hình bình hành dựng trên hai lực là hình thoi nên hợp lực nằm trên đường phân giác của góc AOB; vì hai dây đối xứng qua phương thẳng đứng nên hợp lực có hướng thẳng đứng lên trên.

b) Đèn đứng yên nên $\vec{P}+\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{T_2}=\vec{0}$, suy ra $\vec{P}=-\left(\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{T_2}\right)$. Vậy trọng lượng của đèn là $P=50$ N.

c) Gọi T là độ lớn lực căng của mỗi dây. Hợp lực của hai lực căng vẫn phải cân bằng với trọng lực nên có độ lớn 50 N: $T^2+T^2+2T^2\cos 60^\circ=50^2$, tức $3T^2=2500$.

Suy ra $T=\frac{50}{\sqrt{3}}\approx 28{,}9$ (N). Nhận xét: góc giữa hai dây càng nhỏ thì lực căng của mỗi dây càng nhỏ.

2 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	D	D	B	C	C	B	B	D	C	A

Câu	a)	b)	c)	d)
1	S	Đ	S	Đ
2	Đ	Đ	Đ	S
3	S	Đ	Đ	Đ
4	S	Đ	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	30	13	5	8,72	0,75	60

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Vecto $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Đổi chỗ hai vecto để chúng nối đuôi nhau: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$ (quy tắc ba điểm). Vecto $\overrightarrow{AC}$ là vecto đối của kết quả nên sai.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vecto $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{DB}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Lời giải

Áp dụng quy tắc hình bình hành tại đỉnh B của hình bình hành $ABCD$ (hai cạnh BA, BC và đường chéo BD): $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$. Vecto $\overrightarrow{DB}$ là vecto đối của kết quả nên sai.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Với bốn điểm phân biệt O, A, B, C, vecto $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{OC}$ **D.** $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$. Do đó $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm).

Chọn đáp án D.

Câu 4. Hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vecto đối nhau khi và chỉ khi

A. $\vec{a}=\vec{b}$ **B.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ **C.** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

Lời giải

Ta có: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vecto đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

Điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ chưa đủ (còn cần hai vectơ ngược hướng); còn $\vec{a} = \vec{b}$ hay $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ là điều kiện để hai vectơ bằng nhau.
Chọn đáp án D.

Câu 5. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Rút gọn $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$ ta được

A. $\overrightarrow{AC}$ **B.** $\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{BD}$

Lời giải
Đổi dấu: $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$, $-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}$. Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Chọn đáp án B.

Câu 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Vectơ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ bằng

A. $\overrightarrow{GC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{CG}$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải
G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CG}$. Vectơ $\overrightarrow{GC}$ ngược hướng với kết quả nên sai.
Chọn đáp án C.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA}$

Lời giải
O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
Các khẳng định còn lại sai: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (ngược hướng với $\overrightarrow{DC}$); $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{OA}$ ngược hướng; $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ mới bằng $\overrightarrow{AB}$.
Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho tam giác ABC. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

A. trung điểm của đoạn thẳng AB **B. trung điểm của đoạn thẳng BC**
C. trọng tâm của tam giác ABC **D.** điểm A

Lời giải
$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nghĩa là $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ là hai vectơ đối nhau: M nằm giữa B, C và $MB = MC$. Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng BC.
Chọn đáp án B.

Câu 9. Cho tam giác đều ABC cạnh 2 và M là trung điểm của BC. $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A. 3 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** 1

Lời giải
M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM}$. Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.
AM là đường cao của tam giác đều cạnh 2 nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}\right| = AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (không phải tổng độ dài $2 + 1 = 3$).
Chọn đáp án B.

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5, AD = 12$. $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. 7 **B.** 17 **C.** $\sqrt{119}$ **D.** 13

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Lưu ý: không được tính hiệu độ dài $12 - 5 = 7$.

Chọn đáp án D.

Câu 11. Hai lực có độ lớn 5 N và 12 N cùng hướng, cùng tác dụng vào một vật. Độ lớn của hợp lực là

A. 7 N **B.** 13 N **C.** 17 N **D.** 60 N

Lời giải

Hai lực cùng hướng nên hợp lực cùng hướng với chúng và có độ lớn bằng tổng độ lớn: $5 + 12 = 17$ (N). (Kết quả 13 N chỉ đúng khi hai lực vuông góc.)

Chọn đáp án C.

Câu 12. Một ca nô chạy ngược dòng trên một khúc sông thẳng; vận tốc thực của ca nô (so với bờ) là 18 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h. Vận tốc riêng của ca nô (khi nước đứng yên) có độ lớn là

A. 21 km/h **B.** 15 km/h **C.** 18 km/h **D.** $\sqrt{333}$ km/h

Lời giải

Vận tốc thực bằng tổng của vận tốc riêng và vận tốc dòng nước. Ca nô chạy ngược dòng nên vận tốc riêng và vận tốc dòng nước là hai vectơ ngược hướng; vận tốc thực cùng hướng với vận tốc riêng và có độ lớn bằng hiệu hai độ lớn.

Do đó $v_r - 3 = 18$, suy ra $v_r = 21$ km/h. Kết quả 15 km/h sai vì đã trừ vận tốc dòng nước như khi xuôi dòng; $\sqrt{333}$ km/h chỉ đúng nếu hai vận tốc vuông góc.

Chọn đáp án A.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2, tâm O.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = 4$.		✓
b)	$\left\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = 2$.	✓	
c)	$\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right| = 0$.		✓
d)	$\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\right| = 2\sqrt{2}$.	✓	

Lời giải

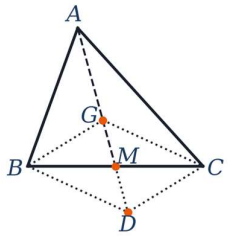
a) Sai. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành) nên độ dài bằng $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, không phải 4 (không được cộng hai độ dài $AB + AD = 4$).

b) Đúng. O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$. Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DA}$, có độ dài $DA = 2$.

c) Sai. $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ (chú ý: $\overrightarrow{CD}$ mới là vecto đối của $\overrightarrow{AB}$). Lấy điểm E sao cho B là trung điểm của AE thì $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$ và $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=AE=4\neq 0$.

d) Đúng. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right|=AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M (hình vẽ).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$GBDC$ là hình bình hành.	✓	
b)	$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.	✓	
c)	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.		✓

Lời giải

a) Đúng. Tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo GD và BC cắt nhau tại M là trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

b) Đúng. Theo quy tắc hình bình hành tại đỉnh G của hình bình hành $GBDC$: $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.

c) Đúng. G là trọng tâm nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; thay $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$ (hình bình hành $GBDC$) được $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. (Cũng thấy được từ $GA=2GM=GD$ và hai vecto ngược hướng.)

d) Sai. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, còn $\overrightarrow{GD}\neq\vec{0}$ (vì $D\neq G$), nên khẳng định sai.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$; I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.		✓
b)	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.	✓	
c)	$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$.	✓	
d)	$\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right\|=2IJ$.	✓	

Lời giải

a) Sai. I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài nhưng ngược hướng; chúng là hai vecto đối nhau ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$), không bằng nhau.

b) Đúng. $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, nên hai vế bằng nhau.

c) Đúng. Theo quy tắc nối đuôi: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{IJ}$.

d) Đúng. Ta có $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$ và $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}$. Cộng lại: $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{DJ}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, vì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$. Lấy K sao cho J là trung điểm của IK thì $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IJ}$, do đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IK}$ và $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=IK=2IJ$.

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có cùng độ lớn 30 N và hợp với nhau góc 60°.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hợp lực có độ lớn 60 N.		✓
b)	Hợp lực nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi hai lực.	✓	
c)	Để vật đứng yên cần tác dụng thêm lực $\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)$.	✓	
d)	Nếu góc giữa hai lực tăng lên thành 90° thì độ lớn của hợp lực tăng lên.		✓

Lời giải

a) Sai. $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|^2=30^2+30^2+2\cdot30\cdot30\cdot\cos60°=2700$ nên $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=30\sqrt{3}\approx52$ (N), không phải 60 N. Chỉ cộng được độ lớn $30+30=60$ khi hai lực cùng hướng.

b) Đúng. Hai lực cùng độ lớn nên hình bình hành dựng trên hai lực là hình thoi; đường chéo của hình thoi là đường phân giác của góc tại đỉnh, nên hợp lực nằm trên đường phân giác của góc giữa hai lực.

c) Đúng. Vật đứng yên khi tổng các lực bằng $\vec{0}$: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)$.

d) Sai. Khi góc bằng 90°: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\sqrt{30^2+30^2}=30\sqrt{2}$, nhỏ hơn giá trị $30\sqrt{3}$ khi góc bằng 60°. Góc giữa hai lực tăng thì hợp lực giảm, nên khẳng định sai.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=9$, $AD=12$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Lấy điểm K sao cho C là trung điểm của AK thì $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{AK}$ và $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=AK=2AC$.

Mà $AC=\sqrt{9^2+12^2}=15$ nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=30$.

Đáp số: 30

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=5$, $AC=12$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Gọi D là điểm sao cho $ABDC$ là hình bình hành; hình bình hành này có góc A vuông nên là hình chữ nhật, và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=AD=BC=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

Đáp số: 13

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 8$, $BD = 6$. Tính $\left|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}\right|$.

Lời giải

O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$. Do đó $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$.

Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên tam giác AOD vuông tại O có $OA = 4$, $OD = 3$: $AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}\right| = 5$.

Đáp số: 5

Câu 4. Hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ có độ lớn lần lượt là 6 N và 10 N và hợp với nhau góc 60°. Tính $\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right|$ (đơn vị: N, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_2}$ thì $OA = 6$, $OB = 10$, $\widehat{AOB} = 60°$ và theo quy tắc hiệu $\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Theo định lí côsin trong tam giác OAB: $AB^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 136 - 60 = 76$.

Do đó $\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right| = \sqrt{76} \approx 8{,}718$; làm tròn đến hàng phần trăm: 8,72. (Lưu ý: $\left|\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}\right|$ khác $10 - 6 = 4$.)

Đáp số: 8,72

Câu 5. Một vận động viên bơi sang bờ bên kia của một con sông, luôn giữ hướng bơi vuông góc với bờ với vận tốc 1,5 m/s so với nước. Sau 40 giây, anh ấy tới bờ bên kia tại một điểm cách điểm đối diện với chỗ xuất phát 30 m về phía hạ lưu. Tính vận tốc của dòng nước (đơn vị: m/s).

Lời giải

Vận tốc thực của vận động viên là tổng của vận tốc bơi (vuông góc với bờ) và vận tốc dòng nước (song song với bờ). Quãng đường bị trôi dọc theo bờ chỉ do dòng nước gây ra.

Trong 40 giây, dòng nước đẩy vận động viên trôi 30 m, nên vận tốc dòng nước là $\frac{30}{40} = 0{,}75$ (m/s).

(Sông rộng $1{,}5 \cdot 40 = 60$ m.)

Đáp số: 0,75

Câu 6. Một vật đứng yên dưới tác dụng của ba lực đồng quy có độ lớn lần lượt là 10 N, 10 N và $10\sqrt{3}$ N. Tính góc giữa hai lực có cùng độ lớn 10 N (đơn vị: độ).

Lời giải

Vật đứng yên nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$, suy ra $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 10\sqrt{3}$, trong đó $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = 10$.

Gọi α là góc giữa $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$: $300 = 100 + 100 + 200\cos\alpha$, nên $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ và $\alpha = 60°$.

Đáp số: 60

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và M là điểm tuỳ ý.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và chứng minh N thuộc đoạn thẳng BO.

Lời giải

a) Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

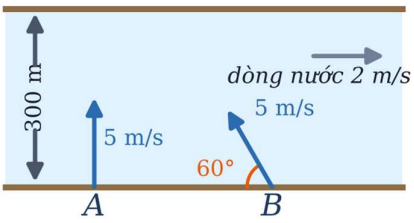
Do đó $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}$.

b) O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$; O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Cộng lại: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Theo tính chất trọng tâm, $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}\Leftrightarrow N$ là trọng tâm của tam giác ABC. Vậy N là trọng tâm tam giác ABC.

Trong tam giác ABC, O là trung điểm của AC nên BO là một đường trung tuyến. Trọng tâm N nằm trên trung tuyến BO và $BN=\frac{2}{3}BO$, do đó N thuộc đoạn thẳng BO (nằm giữa B và O).

Bài 2. (**Vận dụng**) Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ cùng một bờ của một con sông thẳng rộng 300 m để sang bờ bên kia. Vận tốc riêng của hai tàu có cùng độ lớn 5 m/s; tàu A luôn giữ mũi vuông góc với bờ, tàu B luôn giữ mũi tạo với bờ góc $60°$ về phía thượng nguồn (hình vẽ). Vận tốc dòng nước là 2 m/s.



a) Tính thời gian sang sông của mỗi tàu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Tàu nào sang đến bờ bên kia trước? Vì sao?

c) Tính độ lớn vận tốc thực của tàu A (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Dòng nước chảy song song với bờ nên không làm thay đổi chuyển động theo phương vuông góc với bờ; thời gian sang sông bằng chiều rộng của sông chia cho phần vận tốc riêng theo phương vuông góc với bờ.

Tàu A: vận tốc riêng vuông góc với bờ nên $t_A=\frac{300}{5}=60$ (s).

Tàu B: phần vận tốc riêng theo phương vuông góc với bờ là $5\sin 60°=\frac{5\sqrt{3}}{2}\approx 4{,}33$ (m/s), nên $t_B=\frac{300}{5\sin 60°}=40\sqrt{3}\approx 69{,}3$ (s).

b) $t_A<t_B$ nên tàu A sang bờ trước. Phần vận tốc vuông góc với bờ không vượt quá độ lớn vận tốc riêng 5 m/s và chỉ đạt 5 m/s khi giữ mũi vuông góc với bờ, nên đó là cách sang sông nhanh nhất.

c) Vận tốc thực của tàu A là $\overrightarrow{v_A}=\overrightarrow{v_r}+\overrightarrow{v_n}$ với $\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_n}$ nên $\left|\overrightarrow{v_A}\right|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}\approx 5{,}39$ (m/s).

BÀI 9

CHƯƠNG IV. VECTƠ

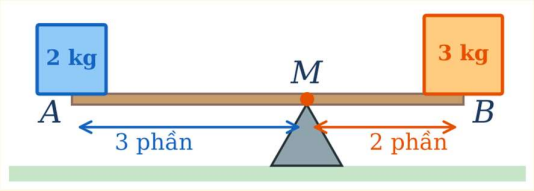
TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

◎ MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Thực hiện được phép nhân một vectơ với một số và vận dụng các tính chất của phép toán này.
- Dùng vectơ để diễn tả hai vectơ cùng phương, ba điểm thẳng hàng, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.
- Phân tích được một vectơ theo hai vectơ không cùng phương; xác định được điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ.
- Vận dụng vào các bài toán thực tế: đòn bẩy, khối tâm, cân bằng vật thể, chuyển động thẳng đều.

✦ CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU · "Hãy cho tôi một điểm tựa…"

Tương truyền Archimedes từng nói: *"Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng cả Trái Đất."* Ông là người đầu tiên phát biểu chính xác **nguyên lí đòn bẩy**: hai vật nặng m_1, m_2 treo ở hai đầu A, B của một thanh cứng nhẹ sẽ cân bằng khi điểm tựa M nằm trên đoạn AB và khoảng cách từ M đến mỗi vật **tỉ lệ nghịch** với khối lượng của vật đó: $\frac{MA}{MB} = \frac{m_2}{m_1}$.



Với quả nặng 2 kg ở A và 3 kg ở B, điểm tựa phải lệch về phía vật nặng hơn: $MA : MB = 3 : 2$. Bằng ngôn ngữ vectơ, điều kiện cân bằng chỉ gọn trong một dòng:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Để đọc và giải được đẳng thức này, ta cần một phép toán mới: **nhân một vectơ với một số**. Cũng nhờ phép toán ấy, các kĩ sư xác định được **khối tâm** của cần cẩu, máy bay hay tàu thuỷ – yếu tố quyết định chúng có giữ được thăng bằng hay không.

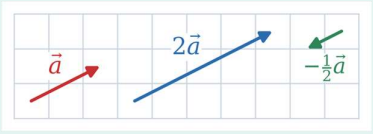
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích của một vectơ với một số

◆ ĐỊNH NGHĨA

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. **Tích** của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- $k\vec{a}$ **cùng hướng** với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, **ngược hướng** với $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- $k\vec{a}$ có **độ dài** $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.
- Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$ với mọi số thực k.



★ TÍNH CHẤT

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực k, t bất kì:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhờ các tính chất này, ta biến đổi các biểu thức vectơ giống như biến đổi đa thức: chẳng hạn $2\vec{a} + 3\vec{a} = 5\vec{a}$, $2(\vec{a}-\vec{b}) + \vec{b} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

■ 2. Điều kiện cùng phương – Ba điểm thẳng hàng

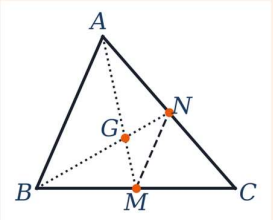
◆ ĐIỀU KIỆN CÙNG PHƯƠNG

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.
- Cho hai điểm phân biệt A, B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi có số t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$; khi đó M thuộc **đoạn** AB khi và chỉ khi $0 \le t \le 1$.
- Hệ quả: với điểm O bất kì, M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$ với một số t nào đó (tổng hai hệ số bằng 1).

■ 3. Trung điểm, trọng tâm

★ CÔNG THỨC CẦN NHỚ (O là điểm tuỳ ý)

- I là trung điểm của AB: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OI}$.
- G là trọng tâm tam giác ABC: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$.
- M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GM}$.



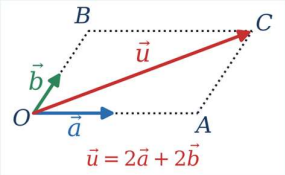
Trong hình: N là trung điểm AC; MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

◆ ĐỊNH LÍ

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ **không cùng phương**. Khi đó mọi vectơ $\vec{u}$ đều phân tích được **một cách duy nhất** dưới dạng $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Hệ quả: nếu $x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$ thì $x = x'$ và $y = y'$. Đặc biệt, $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $x = y = 0$. Đây là công cụ "so sánh hệ số" dùng rất nhiều trong bài.



✱ MỞ RỘNG: KHỐI TÂM CỦA HỆ CHẤT ĐIỂM

Khối tâm của hệ chất điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ có khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ là điểm M thoả mãn

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}.$$

Với điểm O bất kì: $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\overrightarrow{OM} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}$. Chọn O là một điểm đã biết (thường là một đỉnh) ta tính được $\overrightarrow{OM}$ rồi dựng M.

Ý nghĩa: một tấm ván nhẹ mang các vật nặng nằm cân bằng khi được đỡ đúng tại khối tâm của hệ vật – giống như điểm tựa của đòn bẩy. Trọng tâm tam giác là khối tâm của ba vật nặng bằng nhau đặt ở ba đỉnh.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vectơ k·a – Tính độ dài – Rút gọn biểu thức

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k > 0$, ngược hướng khi $k < 0$; độ dài $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.
- Tìm k trong đẳng thức $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{PQ}$: xét hướng của hai vectơ để biết dấu của k, so sánh độ dài để có $|k| = \frac{MN}{PQ}$.
- Rút gọn biểu thức: phá ngoặc, gom các vectơ giống nhau như với đa thức; kết hợp quy tắc ba điểm, quy tắc hiệu, quy tắc hình bình hành và các đẳng thức về trung điểm, trọng tâm.
- Tính độ dài: rút gọn biểu thức thành **một** vectơ $\overrightarrow{XY}$ rồi tính đoạn XY (định lí Pythagore, định lí côsin, tính chất hình đặc biệt).
- *Sai lầm thường gặp:* quên dấu khi hai vectơ ngược hướng (viết $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ thay cho $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$); viết độ dài bằng một số âm; cộng độ dài $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ khi hai vectơ không cùng hướng.

▶ **Ví dụ 1.** (**Nhận biết**) Cho đoạn thẳng AB dài 6 cm và điểm M thuộc đoạn AB với $AM = 2$ cm. Tìm số k trong mỗi đẳng thức: a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$; c) $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

M thuộc đoạn AB nên $MB = AB - AM = 6 - 2 = 4$ (cm).

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng, $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Vậy $k=\frac{1}{3}$.

b) M nằm giữa A và B nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng; $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Vậy $k=-\frac{1}{2}$.

c) $\overrightarrow{BM}$ hướng từ B về phía A, ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$; $\frac{BM}{AB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Vậy $k=-\frac{2}{3}$.

▶ **Ví dụ 2.** (**Thông hiểu**) Rút gọn $\vec{u}=2(\vec{a}-3\vec{b})-3(\vec{a}-2\vec{b})+\vec{a}$.

Lời giải

Phá ngoặc: $\vec{u}=2\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{a}+6\vec{b}+\vec{a}$.

Gom các vectơ giống nhau: $\vec{u}=(2-3+1)\vec{a}+(-6+6)\vec{b}=0\vec{a}+0\vec{b}$.

Vậy $\vec{u}=\vec{0}$.

▶ **Ví dụ 3.** (**Thông hiểu**) Cho tam giác đều ABC cạnh a có trọng tâm G. Tính $\left|\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}\right|$ theo a.

Lời giải

Ý tưởng: tách ra tổng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ càng nhiều lần càng tốt.

$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GC}$.

Vì G là trọng tâm nên tổng trong ngoặc thứ nhất bằng $\vec{0}$ và $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$. Do đó biểu thức bằng $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}\right|=AC=a$.

▶ **Ví dụ 4.** (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=6$. Tính:

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$;

b) $\left|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\right|$.

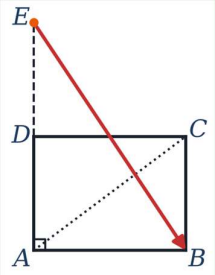
Lời giải

a) Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

Tam giác ABC vuông tại B: $AC=\sqrt{8^2+6^2}=10$. Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=2AC=20$.

b) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$, do đó $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$.

Lấy điểm E sao cho D là trung điểm của AE, khi đó $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$ (quy tắc hiệu).



Tam giác ABE vuông tại A có $AB=8$, $AE=12$ nên $EB=\sqrt{8^2+12^2}=\sqrt{208}=4\sqrt{13}$.

Vậy $\left|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\right|=4\sqrt{13}\approx 14{,}42$.

Chú ý: không được tính $\left|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\right|=AB-2AD$ hay $AB+2AD$: hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 1. (**Nhận biết**) Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB; G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm BC. Điền số thích hợp vào chỗ chấm: a) $\overrightarrow{AB} = \cdots \overrightarrow{IB}$; b) $\overrightarrow{IA} = \cdots \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AG} = \cdots \overrightarrow{AM}$; d) $\overrightarrow{GM} = \cdots \overrightarrow{AM}$; e) $\overrightarrow{MG} = \cdots \overrightarrow{GA}$.

Bài 2. (**Thông hiểu**) Rút gọn: a) $3\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) - 2\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$; b) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ (biểu thị theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$).

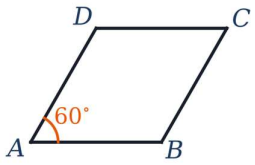
Bài 3. (**Thông hiểu**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\left|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CO}\right|$.

Bài 4. (**Vận dụng**)

a) Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm các số thực x, y thoả mãn $(x-1)\vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + (y-1)\vec{b}$.

b) Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thoả mãn $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{BAD} = 60°$. Tính $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right|$ theo a.

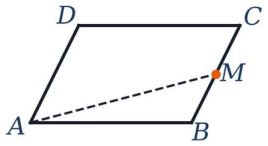


Dạng 2. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Dùng quy tắc ba điểm để "đi vòng" qua các điểm đã biết, chẳng hạn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$; dùng quy tắc hiệu $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}$.
- Trung tuyến, trọng tâm của tam giác ABC: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ (M là trung điểm BC), $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
- Điểm chia đoạn thẳng: nếu M thuộc đoạn BC và $BM = t \cdot BC$ thì $\overrightarrow{AM} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$.
- Giao điểm I của hai đường thẳng: viết $\overrightarrow{AI}$ theo hai cách (mỗi cách dùng một ẩn), rồi so sánh hệ số nhờ tính duy nhất của cách phân tích.
- *Chú ý:* điểm chia càng gần đầu nào thì hệ số của đầu ấy càng lớn; kiểm tra nhanh bằng cách xem tổng hai hệ số có bằng 1 không.

▶ **Ví dụ 5.** (**Nhận biết**) Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm BC. Biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ (SGK, Bài 4.11).



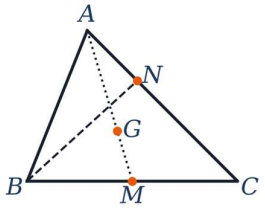
Lời giải

Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

▶ **Ví dụ 6.** (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G; N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}AC$. Biểu thị $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{BN}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.



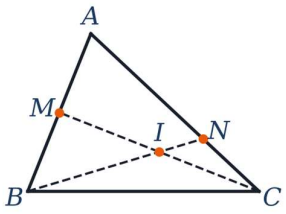
Lời giải

Gọi M là trung điểm BC: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

N thuộc cạnh AC, $AN = \frac{1}{3}AC$ nên $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\vec{b}$. Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ và $\overrightarrow{BN} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

▶ **Ví dụ 7.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = 2NC$, I là giao điểm của BN và CM. Biểu thị $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và chứng tỏ I là trung điểm của CM.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

I thuộc đường thẳng BN nên có số s để $\overrightarrow{AI} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AN} = (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{2s}{3}\overrightarrow{AC}$.

I thuộc đường thẳng CM nên có số t để $\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{AC} = \frac{t}{2}\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên các hệ số tương ứng bằng nhau: $1 - s = \frac{t}{2}$ và $\frac{2s}{3} = 1 - t$.

Từ phương trình đầu, $t = 2 - 2s$; thay vào phương trình sau: $\frac{2s}{3} = 2s - 1 \Leftrightarrow s = \frac{3}{4}$, suy ra $t = \frac{1}{2}$.

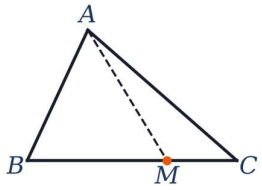
Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Hơn nữa $t = \frac{1}{2}$ cho $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\right)$, tức I là trung điểm của CM.

✎ Bài tập luyện tập

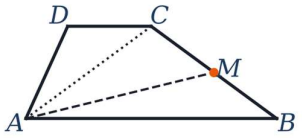
Bài 6. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, D là trung điểm AM. Biểu thị $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài 7. (**Thông hiểu**) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Biểu thị $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Bài 8. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Chứng minh $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Bài 9. (**Vận dụng**) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD với $AB=3CD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Biểu thị $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

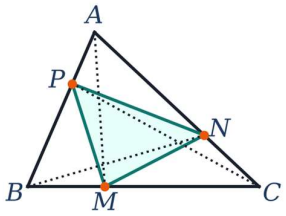


Bài 10. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=\frac{1}{3}BC$, $CN=\frac{1}{3}CA$, $AP=\frac{1}{3}AB$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

c) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.



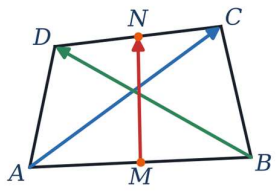
Dạng 3. Chứng minh đẳng thức vectơ có tích với số

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chèn điểm (quy tắc ba điểm) và dùng các đẳng thức trung điểm, trọng tâm: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\,\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OG}$.
- Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản; hoặc đưa cả hai vế về cùng hai vectơ không cùng phương rồi so sánh.
- Mẹo: viết cùng một vectơ theo hai "đường đi" khác nhau rồi cộng vế theo vế (xem Ví dụ 8).
- Để chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm: chứng minh trọng tâm G của tam giác này

thoả mãn đẳng thức trọng tâm của tam giác kia.

▶ **Ví dụ 8.** (**Thông hiểu**) Cho tứ giác $ABCD$; M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. Chứng minh $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{MN}$.



Lời giải

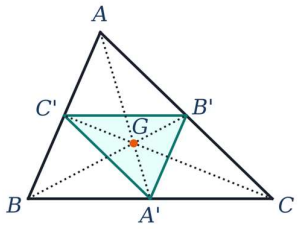
Đi từ M đến N theo hai đường: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$.

Cộng vế theo vế: $2\,\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\right)$.

M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; N là trung điểm CD nên $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}=-\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{MN}$.

▶ **Ví dụ 9.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G; A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ và hai tam giác ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.



Lời giải

Theo công thức trung tuyến: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$, $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Cộng vế theo vế, các vectơ đối nhau triệt tiêu từng cặp: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)\right]=\vec{0}$.

Tương tự, $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$, $\overrightarrow{GB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}\right)$, $\overrightarrow{GC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)$.

Cộng lại: $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Vậy G cũng là trọng tâm tam giác $A'B'C'$: hai tam giác có cùng trọng tâm.

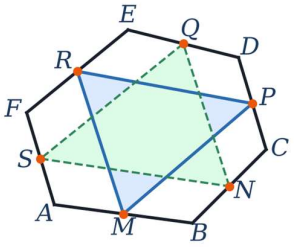
✎ Bài tập luyện tập

Bài 11. (**Nhận biết**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm O: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OG}$.

Bài 12. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC và I là trung điểm AB. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\,\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, và $\vec{v}=2\,\overrightarrow{CI}$.

Bài 13. (**Vận dụng**) Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G, G'. Chứng minh $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\,\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 14. (**Vận dụng cao**) Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

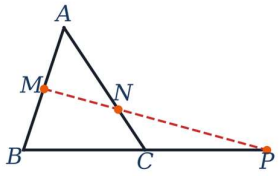


Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- A, B, C thẳng hàng: chỉ ra $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$. Thường phân tích cả hai vectơ theo cùng hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ rồi so sánh hệ số.
- Nếu $\overrightarrow{AB}=x\vec{a}+y\vec{b}$ và $\overrightarrow{AC}=x'\vec{a}+y'\vec{b}$ thì A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k để $x=kx'$ và $y=ky'$.
- Với điểm O cố định: M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\alpha\,\overrightarrow{OA}+\beta\,\overrightarrow{OB}$ với $\alpha+\beta=1$.
- $AB \parallel CD$: chỉ ra $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD}$ và điểm A không thuộc đường thẳng CD.
- *Sai lầm thường gặp:* chỉ ra $\overrightarrow{MN}=k\,\overrightarrow{PQ}$ với bốn điểm khác nhau rồi kết luận thẳng hàng – hai vectơ phải có **chung một điểm**.

▶ **Ví dụ 10.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ và điểm P sao cho C là trung điểm BP. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.



Lời giải

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ (hai vectơ không cùng phương). Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\vec{b}$.

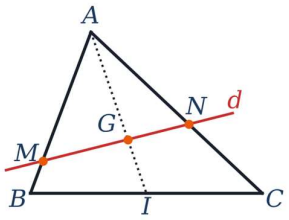
C là trung điểm BP nên $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$, do đó $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=-\vec{a}+2\vec{b}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ và $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$.

Các hệ số tỉ lệ: $-\frac{3}{2}=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ và $2=3\cdot\frac{2}{3}$, nên $\overrightarrow{MP}=3\,\overrightarrow{MN}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương và có chung điểm M, do đó M, N, P thẳng hàng.

▶ **Ví dụ 11.** (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Một đường thẳng d đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N (khác A). Chứng minh $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=y\,\overrightarrow{AC}$ với $0<x\le 1$, $0<y\le 1$. Khi đó $\frac{AB}{AM}=\frac{1}{x}$, $\frac{AC}{AN}=\frac{1}{y}$.

Gọi I là trung điểm BC: $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$.

G thuộc đường thẳng MN nên có số t để $\overrightarrow{AG}=(1-t)\,\overrightarrow{AM}+t\,\overrightarrow{AN}$ (áp dụng hệ quả ở mục 2 với điểm gốc A).

Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ không cùng phương nên so sánh hệ số: $\frac{1}{3x}=1-t$ và $\frac{1}{3y}=t$.

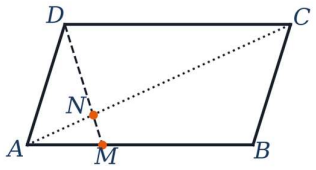
Cộng hai đẳng thức: $\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}=1$, tức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$.

Vậy $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$. *Kiểm tra:* khi $d\parallel BC$ thì $AM=\frac{2}{3}AB$, $AN=\frac{2}{3}AC$ và $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$.

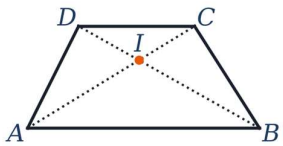
✎ Bài tập luyện tập

Bài 15. (**Nhận biết**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G, I là trung điểm BC. Chứng minh $\overrightarrow{AG}=2\,\overrightarrow{GI}$, từ đó suy ra ba điểm A, G, I thẳng hàng.

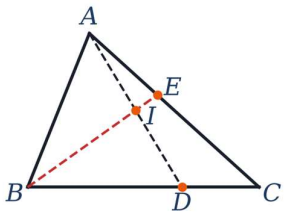
Bài 16. (**Thông hiểu**) Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB với $AM=\frac{1}{3}AB$ và điểm N trên đường chéo AC với $AN=\frac{1}{4}AC$. Chứng minh M, N, D thẳng hàng.



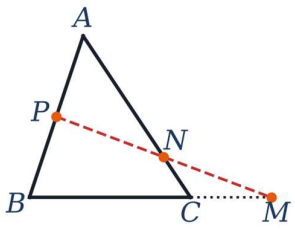
Bài 17. (**Thông hiểu**) Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{DC}$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang. Gọi I là giao điểm hai đường chéo; biểu thị $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AC}$.



Bài 18. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho $BD = 2DC$, I là trung điểm của AD, E là điểm trên cạnh AC sao cho $AE = \frac{2}{5}AC$. Chứng minh B, I, E thẳng hàng và tính tỉ số $\frac{IB}{IE}$.



Bài 19. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng và N là trung điểm của MP.



Dạng 5. Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ – Bài toán khối tâm

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chèn một điểm đã biết (thường là một đỉnh A) vào các vectơ để đưa đẳng thức về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, trong đó $\vec{v}$ biểu thị được qua các vectơ đã biết; từ đó dựng M.
- Với $m, n > 0$: $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ khi và chỉ khi M thuộc đoạn AB và $\frac{MA}{MB} = \frac{n}{m}$, tức $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$.
- Với ba, bốn điểm: "gộp" từng cặp điểm thành một điểm (trung điểm hoặc điểm chia đoạn thẳng) để đưa về đẳng thức chỉ còn hai điểm.
- *Chú ý:* nếu tổng các hệ số bằng 0 thì vế trái là một vectơ không đổi (không phụ thuộc M), nên đẳng thức hoặc đúng với mọi M, hoặc không có điểm M nào.

▶ **Ví dụ 12.** (**Thông hiểu**) Cho hai điểm phân biệt A, B. Xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ và chứng minh với mọi điểm O: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ (SGK, Bài 4.13).

Lời giải

Chèn điểm A vào $\overrightarrow{KB}$: $\overrightarrow{KA} + 2\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vậy K là điểm thuộc đoạn AB với $AK = \frac{2}{3}AB$.



Với mọi điểm O: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

▶ **Ví dụ 13.** (**Thông hiểu – Giải bài toán mở đầu**) Một thanh cứng AB dài 1,5 m (khối lượng không đáng kể) mang vật 2 kg ở A và vật 3 kg ở B. Điểm tựa M phải cách A bao nhiêu mét để thanh cân bằng?

Lời giải

Thanh cân bằng khi điểm tựa M là khối tâm của hai vật: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

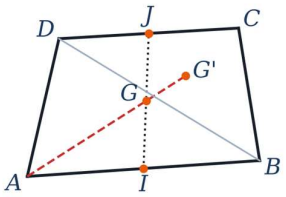
Chèn điểm A: $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $AM=\frac{3}{5}\cdot 1{,}5=0{,}9$ (m). Vậy điểm tựa cách A 0,9 m, cách B 0,6 m – gần vật nặng hơn, đúng như nguyên lí đòn bẩy.

▶ **Ví dụ 14.** (**Vận dụng**) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và G' là trọng tâm tam giác BCD.

a) Chứng minh có duy nhất điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, và G là trung điểm của IJ.

b) Chứng minh A, G, G' thẳng hàng và $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG'}$.



Lời giải

a) Vì I, J là trung điểm AB, CD nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$.

Do đó đẳng thức đã cho tương đương với $2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$, tức G là trung điểm của IJ. Trung điểm của IJ là duy nhất nên điểm G tồn tại và duy nhất.

b) G' là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GG'}$. Đẳng thức đã cho trở thành $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.

Chèn điểm A: $\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG'}$.

Vậy A, G, G' thẳng hàng và G chia đoạn AG' theo tỉ số $AG:GG'=3:1$. *Nhận xét:* G là khối tâm của bốn vật nặng bằng nhau đặt ở bốn đỉnh – gọi là trọng tâm của tứ giác.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 20. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và chứng minh với mọi điểm O: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$ (SGK, Bài 4.14).

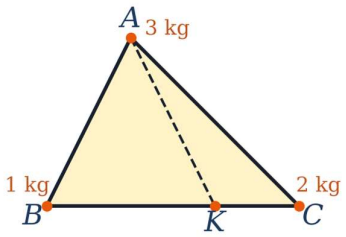
Bài 21. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC và điểm N thoả mãn $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Biểu thị $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, từ đó nêu cách dựng điểm N.

Bài 22. (**Vận dụng**) Ba quả nặng 3 kg, 1 kg, 2 kg lần lượt được đặt tại ba đỉnh A, B, C của một tấm ván mỏng hình tam giác (khối lượng tấm ván không đáng kể). Gọi K là điểm trên cạnh BC sao cho $BK=2KC$.

a) Chứng minh khối tâm M của hệ ba quả nặng là trung điểm của đoạn AK.

b) Biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Nếu ba quả nặng có khối lượng bằng nhau thì khối tâm là điểm đặc biệt nào của tam giác ABC?



Bài 23. (**Vận dụng**) Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực m, n không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng nếu $m+n\neq 0$ thì có duy nhất điểm M thoả mãn $m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, và $\overrightarrow{AM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng nếu $m+n=0$ thì không có điểm M nào thoả mãn đẳng thức trên.

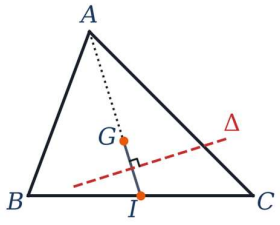
c) Áp dụng: xác định điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Dạng 6. Độ dài vectơ tổng – Tập hợp điểm – Giá trị nhỏ nhất

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Với các số $m_1,\ldots,m_n$ có tổng $k=m_1+\cdots+m_n\neq 0$: gọi I là điểm thoả mãn $m_1\overrightarrow{IA_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ (khối tâm). Khi đó với mọi điểm M: $m_1\overrightarrow{MA_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{MA_n}=k\overrightarrow{MI}$, nên độ dài của tổng bằng $|k|\cdot MI$.
- Nếu tổng các hệ số bằng 0 thì tổng vectơ không phụ thuộc M: rút gọn nó thành một vectơ cố định.
- Tập hợp điểm: $MI=R$ (không đổi) thì M chạy trên đường tròn tâm I bán kính R; $MI=MJ$ thì M chạy trên đường trung trực của đoạn IJ.
- Giá trị nhỏ nhất của MI khi M chạy trên đường thẳng d: đạt khi M là hình chiếu vuông góc H của I trên d, và bằng IH.

▶ **Ví dụ 15.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G, I là trung điểm BC. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.



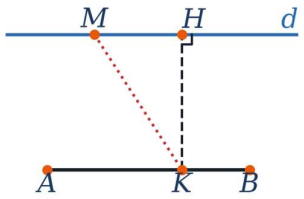
Lời giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$; vì I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$.

Đẳng thức đã cho trở thành $3MG=\frac{3}{2}\cdot 2MI\Leftrightarrow MG=MI$.

G và I là hai điểm phân biệt cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực Δ của đoạn thẳng GI.

▶ **Ví dụ 16.** (**Vận dụng cao**) Cho đoạn thẳng AB dài 6 cm và đường thẳng d song song với AB, cách AB một khoảng 4 cm. Tìm điểm M trên d để $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.



Lời giải

Gọi K là điểm thoả mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$. Theo Ví dụ 12, K thuộc đoạn AB với $AK=\frac{2}{3}AB=4$ (cm).

Chèn điểm K: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MK}+\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=3\overrightarrow{MK}$, nên $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|=3MK$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên d. Vì $d\parallel AB$ nên $KH=4$ cm, và với mọi $M\in d$ ta có $MK\geq KH=4$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|=3MK\geq 12$, dấu bằng xảy ra khi $M\equiv H$.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 12 cm, đạt khi M là hình chiếu vuông góc trên d của điểm K thuộc đoạn AB với $AK=4$ cm.

Sai lầm thường gặp: đánh giá $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|\leq MA+2MB$ rồi đi tìm giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ – đó là một bài toán khác và không cho kết quả đúng.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 24. (**Thông hiểu**) Cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2MA$.

Bài 25. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 26. (**Vận dụng**) Cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

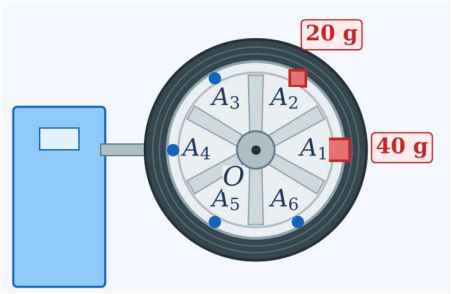
Bài 27. (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4. Điểm M thay đổi trên đường thẳng BC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\right|$ và chỉ ra vị trí của M khi đó.

★ BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Những bài toán giàu ý tưởng, gắn với thực tiễn hoặc đòi hỏi tổng hợp nhiều kiến thức của bài. Hãy tự suy nghĩ trước khi xem lời giải ở phần Hướng dẫn giải.

Điểm nhấn 1. Cân bằng bánh xe ô tô. Bánh xe ô tô bị "lệch tâm" (khối tâm không trùng với tâm trục O) sẽ làm xe rung lắc khi chạy nhanh. Thợ sửa xe khắc phục bằng cách kẹp thêm những quả chì nhỏ lên vành bánh sao cho khối tâm của phần khối lượng bị lệch cùng các quả chì trở về đúng điểm O.

Máy cân bằng cho biết phần lệch của một bánh xe tương đương với hai khối lượng nhỏ: 40 g tại điểm A_1 và 20 g tại điểm A_2 trên vành. Trên vành có sáu vị trí kẹp chì $A_1, A_2, \ldots, A_6$ chia vành thành sáu cung bằng nhau. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OA_3}$.



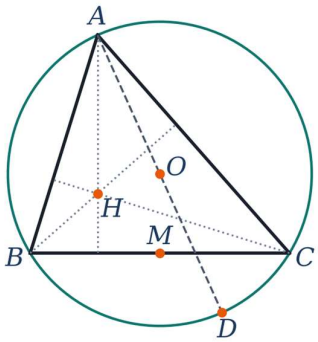
a) Chứng minh $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u} + \vec{v}$, rồi biểu thị $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$, $\overrightarrow{OA_6}$ theo $\vec{u}$, $\vec{v}$.

b) Thợ kẹp hai quả chì có khối lượng x (g) tại A_4 và y (g) tại A_6. Tìm x, y để bánh xe được cân bằng, tức là $40\,\overrightarrow{OA_1} + 20\,\overrightarrow{OA_2} + x\,\overrightarrow{OA_4} + y\,\overrightarrow{OA_6} = \vec{0}$.

c) Nếu kẹp chì tại A_4 và A_5 thì cần bao nhiêu gam chì ở mỗi vị trí? Phương án nào tốn ít chì hơn? Có thể cân bằng bánh xe chỉ với một quả chì kẹp tại một trong sáu vị trí trên không?

> ***Gợi ý***
> Mọi vectơ $\overrightarrow{OA_k}$ đều biểu thị được theo hai vectơ không cùng phương $\vec{u}$, $\vec{v}$; điều kiện cân bằng trở thành một đẳng thức $p\vec{u} + q\vec{v} = \vec{0}$, khi đó $p = q = 0$.

Điểm nhấn 2. Đường thẳng Euler. Cho tam giác nhọn ABC không đều, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm, G là trọng tâm của tam giác, M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua O.



a) Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành; từ đó suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\,\overrightarrow{HO}$.

c) Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$. Tính tỉ số $\frac{GH}{GO}$.

> ***Gợi ý***
> Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông, nên $DB \perp AB$, $DC \perp AC$. Ở các câu sau, hãy dùng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OM}$ và đẳng thức trọng tâm.

C LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(Mỗi câu chỉ chọn một phương án.)*

Câu 1. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$. Vectơ $-3\vec{a}$

A. ngược hướng với $\vec{a}$, có độ dài $3|\vec{a}|$ **B.** cùng hướng với $\vec{a}$, có độ dài $3|\vec{a}|$

C. ngược hướng với $\vec{a}$, có độ dài $-3|\vec{a}|$ **D.** cùng hướng với $\vec{a}$, có độ dài $|\vec{a}|$

Câu 2. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA}$ **C.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ **D.** $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ **C.** $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ **D.** $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$

Câu 4. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm O bất kì, ta có

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ **B.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}$ **C.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ **D.** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

Câu 5. Rút gọn $2(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b})$ ta được

A. $\vec{a} + \vec{b}$ **B.** $3\vec{a} + \vec{b}$ **C.** $\vec{a} + 3\vec{b}$ **D.** $\vec{a} - 3\vec{b}$

Câu 6. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi

A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ **B.** $\vec{a} = \vec{b}$

C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ **D.** có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Câu 7. Cho tam giác ABC và D là điểm đối xứng với B qua C. Vectơ $\overrightarrow{AD}$ bằng

A. $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ **C.** $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ **D.** $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Câu 8. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M thuộc đoạn AB và $MA = 2MB$ **B.** M là trung điểm AB

C. M nằm ngoài đoạn AB **D.** M thuộc đoạn AB và $MB = 2MA$

Câu 9. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Vectơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ **C.** $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

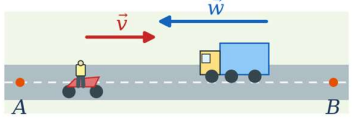
Câu 10. Cho $|\vec{a}| = 4$. Độ dài của vectơ $-\frac{3}{2}\vec{a}$ là

A. -6 **B.** 6 **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** 2

Câu 11. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{AK}$ bằng

A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ **B.** $3\overrightarrow{AB}$ **C.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Câu 12. Trên một con đường thẳng, một xe máy đi theo hướng từ A đến B với vận tốc $\vec{v}$; một xe tải đi theo chiều ngược lại với tốc độ gấp 1,5 lần tốc độ của xe máy. Vận tốc $\vec{w}$ của xe tải là



A. $\vec{w} = 1{,}5\vec{v}$ **B.** $\vec{w} = -1{,}5\vec{v}$ **C.** $\vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{v}$ **D.** $\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai *(Ở mỗi ý a), b), c), d) chọn Đúng hoặc Sai.)*

Câu 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC và G là trọng tâm.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{GA}=2\,\overrightarrow{GM}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.	☐	☐

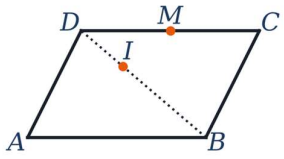
Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$.	☐	☐
d)	Nếu N là trung điểm CD thì $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.	☐	☐

Câu 3. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm M thoả mãn $2\,\overrightarrow{MA}-5\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	M thuộc đoạn thẳng AB.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.	☐	☐
c)	$MA:MB=2:5$.	☐	☐
d)	Với mọi điểm O: $\overrightarrow{OM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$.	☐	☐

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$; M là trung điểm CD và I là điểm thuộc đoạn BD sao cho $DI=\frac{1}{3}DB$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.	☐	☐
c)	Ba điểm A, I, M thẳng hàng và $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.	☐	☐
d)	I là trọng tâm của tam giác ABD.	☐	☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Điểm M thoả mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM (đơn vị: cm).

Đáp số: | | | | |

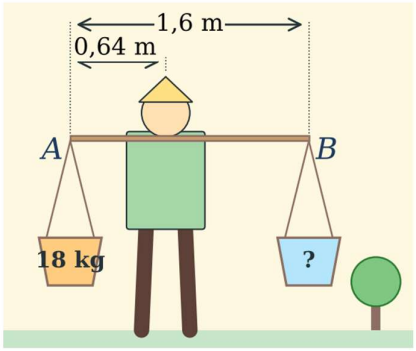
Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{v} = -4\vec{a} + m\vec{b}$. Tìm số m để $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Đáp số: | | | | |

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Tính $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: | | | | |

Câu 4. Một bác nông dân gánh hai thúng hàng bằng một chiếc đòn gánh AB dài 1,6 m (coi đòn gánh là thanh cứng có khối lượng không đáng kể). Thúng ở đầu A nặng 18 kg, vai bác đặt cách đầu A 0,64 m và đòn gánh nằm cân bằng. Hỏi thúng ở đầu B nặng bao nhiêu kilôgam?



Đáp số: | | | | |

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 9. TÍCH VECTƠ VỚI MỘT SỐ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho vectơ $\vec{a}$ có $|\vec{a}| = 3$. Vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ và có độ dài bằng 6. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{b} = -2\vec{a}$ **B.** $\vec{b} = 2\vec{a}$ **C.** $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ **D.** $\vec{b} = -6\vec{a}$

Câu 2. Với $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì và k là số thực bất kì, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + \vec{b}$ **B.** $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ **C.** $0\vec{a} = \vec{0}$ **D.** $1\vec{a} = \vec{a}$

Câu 3. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vectơ $\overrightarrow{MA}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **C.** $2\overrightarrow{AB}$ **D.** $-2\overrightarrow{AB}$

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Với điểm O bất kì, vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

A. $\overrightarrow{OG}$ **B.** $3\overrightarrow{OG}$ **C.** $2\overrightarrow{OG}$ **D.** $\vec{0}$

Câu 5. Rút gọn $3(\vec{a} - \vec{b}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b})$ ta được

A. $\vec{a} - 7\vec{b}$ **B.** $\vec{a} - \vec{b}$ **C.** $5\vec{a} - 7\vec{b}$ **D.** $\vec{a} + \vec{b}$

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây **không** suy ra được ba điểm A, B, C thẳng hàng?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{BC}$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Vectơ $\overrightarrow{OB}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ **C.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$

Câu 8. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD và $AB = 2CD$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

Câu 9. Cho vectơ $\vec{a}$ có $|\vec{a}| = 6$ và $\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{a}$. Độ dài của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. 10 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

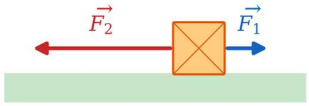
Câu 10. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$?

A. $-3\vec{a} + 6\vec{b}$ **B.** $2\vec{a} - \vec{b}$ **C.** $\vec{a} + 2\vec{b}$ **D.** $-\vec{a} - 2\vec{b}$

Câu 11. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A là trung điểm IB **B.** I là trung điểm AB
C. B là trung điểm AI **D.** I thuộc đoạn AB

Câu 12. Một thùng hàng chịu tác dụng của hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ với $\vec{F_2} = -3\vec{F_1}$ và $\left|\vec{F_1}\right| = 10$ N. Hợp lực $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$



A. có độ lớn 20 N và cùng hướng với $\vec{F_1}$

B. có độ lớn 40 N và cùng hướng với $\vec{F_2}$

C. có độ lớn 20 N và ngược hướng với $\vec{F_1}$

D. có độ lớn 30 N và ngược hướng với $\vec{F_1}$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G; M, N lần lượt là trung điểm AB, AC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.	☐	☐

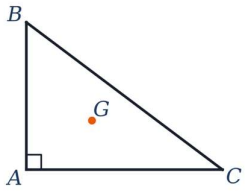
Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.	☐	☐
b)	$2\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b}$.	☐	☐
c)	$\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.	☐	☐
d)	Vectơ $\vec{w} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{u}$.	☐	☐

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thoả mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	M thuộc đoạn thẳng AB và $MB = 2MA$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.	☐	☐
d)	Ba điểm M, N, G thẳng hàng.	☐	☐

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9$, $AC = 12$ và G là trọng tâm của tam giác.



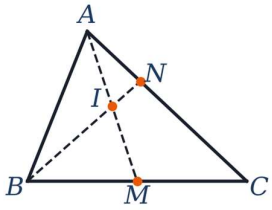
Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| = 15.$	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right\| = 6.$	☐	☐
c)	$\left\|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right\| = 5.$	☐	☐
d)	Nếu điểm E thoả mãn $\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ thì $BE = 3\sqrt{10}.$	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh BC thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, N là điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi I là giao điểm của AM và BN. Biết $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$. Tìm x.



Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh CD sao cho $DM=\frac{1}{3}DC$. Biết $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AB}$. Tính $x+y$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 5. Cho tam giác đều ABC cạnh 3 có trọng tâm G. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AG}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 6. Ba quả nặng, mỗi quả 2 kg, được đặt tại ba đỉnh của một tấm ván mỏng hình tam giác ABC (khối lượng tấm ván không đáng kể). Biết trung tuyến AM của tam giác dài 9 cm. Khối tâm của hệ ba quả nặng cách A bao nhiêu xentimét?

Đáp số: ☐☐☐☐

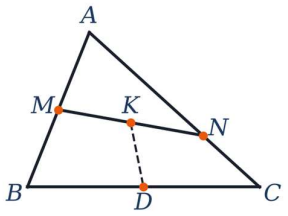
PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = 2NC$, K là trung điểm MN.

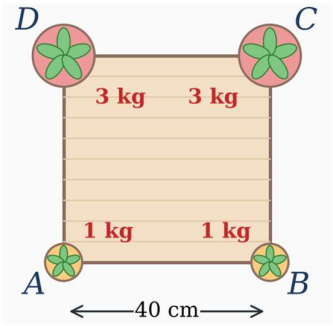
a) Biểu thị $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi D là trung điểm BC. Biểu thị $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh đường thẳng GK song song với đường thẳng AB.



Bài 2. (**Vận dụng**) Một tấm kệ gỗ hình vuông $ABCD$ cạnh 40 cm (khối lượng không đáng kể) được đỡ bởi một chân trụ duy nhất. Trên kệ đặt bốn chậu cây ở bốn góc: 1 kg tại A, 1 kg tại B, 3 kg tại C và 3 kg tại D. Kệ đứng vững khi chân trụ đặt đúng tại khối tâm M của hệ bốn chậu cây.



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh $\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MJ} = \vec{0}$, từ đó xác định vị trí điểm M.

b) Tính khoảng cách từ chân trụ đến góc A (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của xentimét).

c) Nếu thay chậu ở D bằng một chậu khác (các chậu còn lại giữ nguyên) thì chậu mới phải nặng bao nhiêu kilôgam để chân trụ nằm trên đường chéo AC?

— HẾT —

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 9. TÍCH VECTƠ VỚI MỘT SỐ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Với $k<0$ và $\vec{a}\neq\vec{0}$, vectơ $k\vec{a}$

A. cùng hướng với $\vec{a}$ **B.** vuông góc với $\vec{a}$
C. bằng $\vec{0}$ **D.** ngược hướng với $\vec{a}$

Câu 2. Với vectơ $\vec{a}$ và các số thực k, t, vectơ $(k+t)\vec{a}$ bằng

A. $k\vec{a}+t\vec{a}$ **B.** $kt\vec{a}$ **C.** $k\vec{a}+t$ **D.** $k+t\vec{a}$

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$
C. $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CO}$ **D.** $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

Câu 4. Cho hai điểm phân biệt A, B. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là

A. điểm A **B.** trung điểm AB **C.** điểm B **D.** không tồn tại

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Vectơ $\vec{x}$ thoả mãn $2(\vec{x}-\vec{a})=3\vec{b}-\vec{x}$ là

A. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$ **B.** $\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$ **C.** $\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$ **D.** $\vec{x}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi N là trung điểm của cạnh CD. Vectơ $\overrightarrow{BN}$ bằng

A. $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **C.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Câu 7. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và các số thực x, y thoả mãn $(x-2)\vec{a}+(y+1)\vec{b}=\vec{0}$. Giá trị của $x+y$ là

A. 0 **B.** 3 **C.** -1 **D.** 1

Câu 8. Cho hai điểm phân biệt A, B. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi có số t sao cho $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ với

A. $t<0$ **B.** $0\le t\le 1$ **C.** $t>1$ **D.** t tuỳ ý

Câu 9. Cho đoạn thẳng AB dài 6 cm và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Độ dài đoạn BM là

A. 12 cm **B.** 3 cm **C.** 6 cm **D.** 9 cm

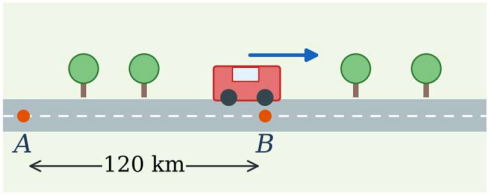
Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$; I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD. Vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $2\overrightarrow{JI}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}$ **C.** $2\overrightarrow{IJ}$ **D.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$

Câu 11. Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm của AB **B.** M là trọng tâm tam giác ABC
C. Tứ giác $ACBM$ là hình bình hành **D.** Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành

Câu 12. Một ô tô chuyển động thẳng đều, sau 2 giờ đi được từ A đến B với $AB = 120$ km. Xe tiếp tục đi thẳng với vận tốc không đổi; gọi C là vị trí của xe tại thời điểm 3,5 giờ kể từ lúc rời A. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{AC} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AC} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; M là trung điểm AB.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$.	☐	☐

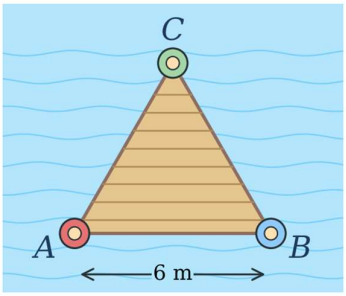
Câu 2. Cho tam giác ABC và điểm N thoả mãn $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BK = 3KC$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = 4\overrightarrow{NK}$.	☐	☐
b)	N là trung điểm của đoạn thẳng AK.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
d)	Với mọi điểm O: $6\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$.	☐	☐

Câu 3. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh BC sao cho $3MB = 2MC$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{MB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
d)	Gọi N là trung điểm AM. Khi đó $\overrightarrow{BN} = -\frac{7}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐

Câu 4. Ba bạn, mỗi bạn nặng 40 kg, đứng ở ba góc A, B, C của một chiếc bè hình tam giác đều cạnh 6 m (bỏ qua khối lượng của bè, coi mỗi bạn là một chất điểm).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khối tâm của hệ ba bạn là trọng tâm G của tam giác ABC.	☐	☐
b)	Khối tâm cách mỗi bạn $2\sqrt{3}$ m.	☐	☐
c)	Nếu bạn ở C di chuyển đến trung điểm I của cạnh AB thì khối tâm của hệ là điểm I.	☐	☐
d)	Nếu bạn ở C được thay bằng một bạn nặng 80 kg (hai bạn ở A, B giữ nguyên) thì khối tâm mới cách C một khoảng $2\sqrt{3}$ m.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB dài 12 cm và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Tính độ dài MB (đơn vị: cm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ và P là điểm thoả mãn $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{BC}$. Tìm số k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Đáp số: ☐☐☐☐

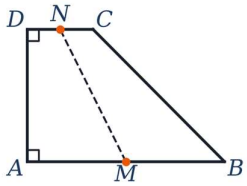
Câu 3. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có diện tích bằng 36 cm² và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Tính diện tích tam giác MBC (đơn vị: cm²).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 8$; O là giao điểm hai đường chéo. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{OB}\right|$.

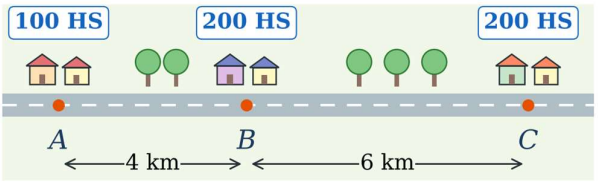
Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 5. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, có $AB = 6$, $CD = 2$, $AD = 4$. Tính $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 6. Ba thôn A, B, C nằm dọc một con đường thẳng, B nằm giữa A và C, $AB = 4$ km, $BC = 6$ km. Số học sinh tiểu học của ba thôn lần lượt là 100, 200, 200. Xã dự định xây trường tại điểm M trên đường là "khối tâm" của ba thôn với trọng số là số học sinh, tức là $100\overrightarrow{MA} + 200\overrightarrow{MB} + 200\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Trường cách thôn A bao nhiêu kilômét?



Đáp số: | | | | |

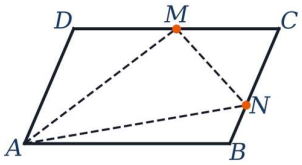
PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = \frac{1}{3}BC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

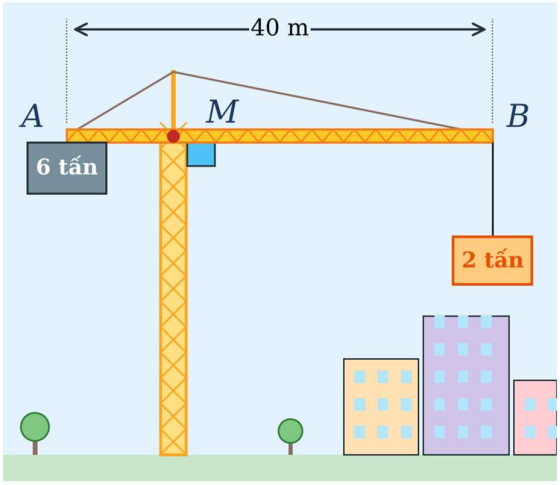
a) Biểu thị $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác AMN. Biểu thị $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

c) Chứng minh G không thuộc đường chéo AC.



Bài 2. (**Vận dụng**) Một cần cẩu tháp có cánh tay AB nằm ngang dài 40 m (coi khối lượng cánh tay không đáng kể). Đối trọng 6 tấn đặt ở đầu A, kiện hàng được treo vào cánh tay, còn trụ tháp đỡ cánh tay tại điểm M thuộc đoạn AB. Cánh tay cân bằng khi M là khối tâm của hệ gồm đối trọng và kiện hàng.



a) Khi treo kiện hàng 2 tấn ở đầu B, viết đẳng thức vectơ mà điểm M phải thoả mãn để cánh tay cân bằng và tính độ dài AM.

b) Giữ nguyên vị trí trụ tháp như ở câu a). Nếu kiện hàng được treo tại trung điểm P của đoạn MB thì kiện hàng phải nặng bao nhiêu tấn để cánh tay vẫn cân bằng?

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BÀI 9. TÍCH VECTƠ VỚI MỘT SỐ · Mỗi bài gồm đề và lời giải ngay bên dưới

B LỜI GIẢI BÀI TẬP CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vectơ k·a – Tính độ dài – Rút gọn biểu thức

Bài 1. (**Nhận biết**) Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB; G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm BC. Điền số thích hợp vào chỗ chấm: a) $\overrightarrow{AB} = \cdots \overrightarrow{IB}$; b) $\overrightarrow{IA} = \cdots \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AG} = \cdots \overrightarrow{AM}$; d) $\overrightarrow{GM} = \cdots \overrightarrow{AM}$; e) $\overrightarrow{MG} = \cdots \overrightarrow{GA}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IB}$ cùng hướng và $AB = 2IB$ nên $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$.

b) $\overrightarrow{IA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $IA = \frac{1}{2}AB$ nên $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) G thuộc đoạn AM, $AG = \frac{2}{3}AM$, hai vectơ cùng hướng nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

d) $\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng (đều hướng về M), $GM = \frac{1}{3}AM$ nên $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

e) $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{GA}$ cùng hướng (đều hướng về A); $MG = \frac{1}{3}AM$, $GA = \frac{2}{3}AM$ nên $MG = \frac{1}{2}GA$. Vậy $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Đáp số: a) 2; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{2}$.

Bài 2. (**Thông hiểu**) Rút gọn: a) $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{a} + \vec{b})$; b) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ (biểu thị theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$).

Lời giải

a) $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 6\vec{b} - 2\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{a} + 4\vec{b}$.

b) Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Do đó $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

Bài 3. (**Thông hiểu**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\left|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CO}\right|$.

Lời giải

O là trung điểm của AC nên $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA}$. Do đó $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, suy ra $\left|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right| = CB = a$.

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; lại có $2\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA}$. Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Vậy hai độ dài cần tìm lần lượt bằng a và 0.

Bài 4. (**Vận dụng**)

a) Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm các số thực x, y thoả mãn $(x-1)\vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + (y-1)\vec{b}$.

b) Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thoả mãn $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$.

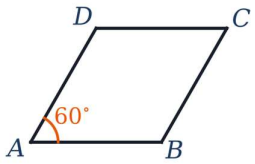
Lời giải

a) Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương nên cách phân tích theo $\vec{a}$, $\vec{b}$ là duy nhất. So sánh hệ số: $x - 1 = 2$ và $2 = y - 1$.
Vậy $x = 3, y = 3$.

b) Chuyển vế như với phương trình: $3\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lấy điểm E thuộc cạnh AC với $AE = \frac{1}{3}AC$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, nên M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABME$ (dựng từ B vectơ $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AE}$).

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{BAD} = 60°$. Tính $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right|$ theo a.



Lời giải

Tính độ dài thứ nhất. Lấy điểm F sao cho $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$ (B là trung điểm AF) và dựng hình bình hành $AFPD$. Khi đó $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP}$.
Trong tam giác AFP: $AF = 2a$, $FP = AD = a$, $\widehat{AFP} = 180° - \widehat{FAD} = 120°$. Theo định lí côsin: $AP^2 = 4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 120° = 5a^2 + 2a^2 = 7a^2$.
Vậy $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{7}$.

Tính độ dài thứ hai. Lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$. Khi đó $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$.
Trong tam giác ABE: $AB = a$, $AE = 2a$, $\widehat{BAE} = 60°$. Theo định lí côsin: $EB^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 60° = 3a^2$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{3}$. (Nhận xét: tam giác ABE vuông tại B vì $AE^2 = AB^2 + EB^2$.)

Dạng 2. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Bài 6. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, D là trung điểm AM. Biểu thị $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
D là trung điểm AM nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Bài 7. (**Thông hiểu**) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Biểu thị $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

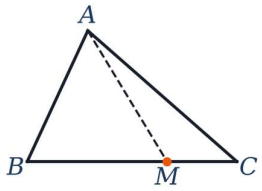
Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}$.

O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$, do đó $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

Bài 8. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Chứng minh $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

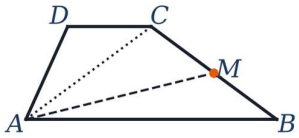


Lời giải

M thuộc cạnh BC và $MB=2MC$ nên $BM=\frac{2}{3}BC$; hai vectơ $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (điều phải chứng minh).

Bài 9. (**Vận dụng**) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD với $AB=3CD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Biểu thị $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.



Lời giải

$AB \parallel CD$, hai vectơ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $DC=\frac{1}{3}AB$ nên $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

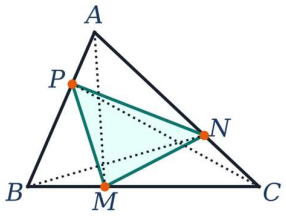
Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Bài 10. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=\frac{1}{3}BC$, $CN=\frac{1}{3}CA$, $AP=\frac{1}{3}AB$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

c) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.



Lời giải

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

b) Cộng ba đẳng thức: hệ số của $\overrightarrow{AB}$ là $\frac{2}{3}-1+\frac{1}{3}=0$, hệ số của $\overrightarrow{AC}$ là $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-1=0$. Vậy $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chèn điểm: $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

Vậy G cũng là trọng tâm tam giác MNP.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức vectơ có tích với số

Bài 11. (**Nhận biết**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm O: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chèn điểm G vào từng vectơ: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\right)=3\,\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên tổng trong ngoặc bằng $\vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OG}$.

Bài 12. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC và I là trung điểm AB. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\,\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, và $\vec{v}=2\,\overrightarrow{CI}$.

Lời giải

Chèn điểm C: $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}$.

Do đó $\vec{v}=2\,\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-2\,\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$: vectơ này không chứa M, tức là không phụ thuộc vào vị trí của M.

I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\,\overrightarrow{CI}$. Vậy $\vec{v}=2\,\overrightarrow{CI}$.

Nhận xét: tổng các hệ số $1+1-2=0$ là lí do $\vec{v}$ không phụ thuộc M.

Bài 13. (**Vận dụng**) Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G, G'. Chứng minh $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\,\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

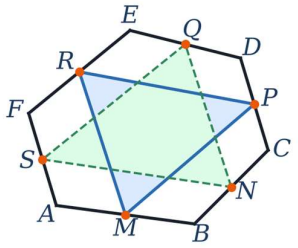
Lời giải

Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}$, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}$, $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$.

Cộng vế theo vế: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}$, vì hai tổng trong ngoặc đều bằng $\vec{0}$.

Do đó hai tam giác có cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Bài 14. (**Vận dụng cao**) Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.



Lời giải

Lấy điểm O tuỳ ý. Theo công thức trung điểm: $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $2\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

Cộng lại: $2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

Hoàn toàn tương tự: $2\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OS}\right)=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}$.

Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm hai tam giác MPR, NQS. Từ hai đẳng thức trên: $6\overrightarrow{OG_1}=6\overrightarrow{OG_2}$, suy ra $G_1\equiv G_2$.

Vậy hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm (đó cũng là "trọng tâm" của sáu đỉnh lục giác).

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song

Bài 15. (**Nhận biết**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G, I là trung điểm BC. Chứng minh $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GI}$, từ đó suy ra ba điểm A, G, I thẳng hàng.

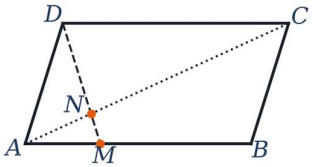
Lời giải

I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$.

Từ hai đẳng thức trên: $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GI}$. Hai vectơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{GI}$ cùng phương và có chung điểm G nên A, G, I thẳng hàng.

Bài 16. (**Thông hiểu**) Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB với $AM=\frac{1}{3}AB$ và điểm N trên đường chéo AC với $AN=\frac{1}{4}AC$. Chứng minh M, N, D thẳng hàng.



Lời giải

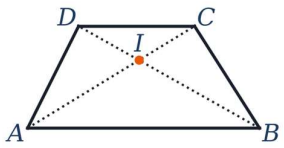
Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Khi đó $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{a}$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$.

Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

Ta thấy $\frac{3}{4}\overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = \overrightarrow{DN}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{DM}$ cùng phương, có chung điểm D nên M, N, D thẳng hàng.

Bài 17. (**Thông hiểu**) Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang. Gọi I là giao điểm hai đường chéo; biểu thị $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AC}$.



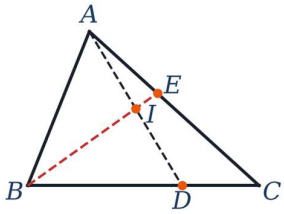
Lời giải

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng; hai đường thẳng AB, DC song song hoặc trùng nhau. Vì $ABCD$ là tứ giác nên A không thuộc đường thẳng DC, do đó $AB \parallel DC$: $ABCD$ là hình thang có $AB = 2CD$.

Vì $AB \parallel CD$ nên tam giác IAB đồng dạng với tam giác ICD, suy ra $\frac{IA}{IC} = \frac{AB}{CD} = 2$.

I nằm giữa A và C, $AI = \frac{2}{3}AC$ và $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$. Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 18. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho $BD = 2DC$, I là trung điểm của AD, E là điểm trên cạnh AC sao cho $AE = \frac{2}{5}AC$. Chứng minh B, I, E thẳng hàng và tính tỉ số $\frac{IB}{IE}$.



Lời giải

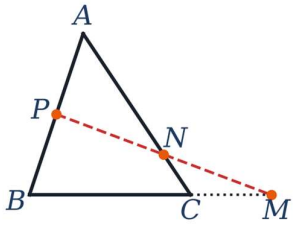
Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Vì $BD = \frac{2}{3}BC$ nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$, suy ra $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ và $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$.

Nhận thấy $\frac{5}{6}\overrightarrow{BE} = -\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \overrightarrow{BI}$. Hai vectơ $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BE}$ có chung điểm B nên B, I, E thẳng hàng.

Từ $\overrightarrow{BI} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BE}$: I thuộc đoạn BE, $BI = \frac{5}{6}BE$, $IE = \frac{1}{6}BE$. Vậy $\frac{IB}{IE} = 5$.

Bài 19. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng và N là trung điểm của MP.



Lời giải

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ và chèn điểm A vào từng đẳng thức.

$\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)-3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}=3\vec{b}-\vec{a}$, tức $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$.

$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}=3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}\right)\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=3\vec{b}$, tức $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\vec{b}$; P là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{a}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$ và $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}=2\overrightarrow{MN}$.

Vậy M, N, P thẳng hàng; hơn nữa $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}$ nên N là trung điểm của MP.

Dạng 5. Xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ – Bài toán khối tâm

Bài 20. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và chứng minh với mọi điểm O: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$ (SGK, Bài 4.14).

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Đẳng thức đã cho trở thành $2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$: M là trung điểm của đoạn IC.

Với mọi điểm O, chèn M: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=4\overrightarrow{OM}$.

Bài 21. (**Thông hiểu**) Cho tam giác ABC và điểm N thoả mãn $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Biểu thị $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, từ đó nêu cách dựng điểm N.

Lời giải

Chèn điểm A: $\overrightarrow{NA}+2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Suy ra $6\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$, tức $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

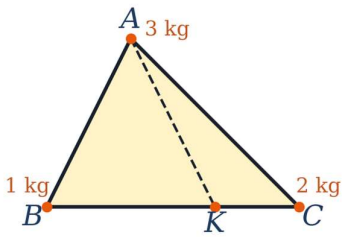
Cách dựng: lấy E thuộc cạnh AB với $AE=\frac{1}{3}AB$ và F là trung điểm AC. Khi đó $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$ nên N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AENF$.

Bài 22. (**Vận dụng**) Ba quả nặng 3 kg, 1 kg, 2 kg lần lượt được đặt tại ba đỉnh A, B, C của một tấm ván mỏng hình tam giác (khối lượng tấm ván không đáng kể). Gọi K là điểm trên cạnh BC sao cho $BK=2KC$.

a) Chứng minh khối tâm M của hệ ba quả nặng là trung điểm của đoạn AK.

b) Biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Nếu ba quả nặng có khối lượng bằng nhau thì khối tâm là điểm đặc biệt nào của tam giác ABC?



Lời giải

a) Khối tâm M thoả mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

K thuộc cạnh BC, $KB = 2KC$ và $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MK} + \left(\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC}\right) = 3\overrightarrow{MK}$.

Thay vào: $3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} = \vec{0}$. Vậy M là trung điểm của AK – như thể hai quả nặng ở B, C được thay bằng một quả 3 kg đặt tại K.

b) $BK = \frac{2}{3}BC$ nên $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, do đó $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c) Nếu ba quả nặng cùng có khối lượng m thì $m\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$: khối tâm là **trọng tâm** của tam giác ABC.

Bài 23. (**Vận dụng**) Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực m, n không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng nếu $m + n \neq 0$ thì có duy nhất điểm M thoả mãn $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, và $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng nếu $m + n = 0$ thì không có điểm M nào thoả mãn đẳng thức trên.

c) Áp dụng: xác định điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Chèn điểm A: $m\overrightarrow{MA} + n\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (m+n)\overrightarrow{MA} = -n\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$ (chia được vì $m + n \neq 0$).

Vectơ $\overrightarrow{AM}$ được xác định duy nhất nên điểm M tồn tại và duy nhất.

b) Nếu $m + n = 0$ thì $n = -m \neq 0$ và đẳng thức trở thành $m\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow m\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, vô lí vì $m \neq 0$ và $A \neq B$. Vậy không có điểm M nào.

c) Với $m = 3, n = -1$: $\overrightarrow{AM} = \frac{-1}{3-1}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Vậy M nằm trên đường thẳng AB, ngoài đoạn AB về phía A, với $AM = \frac{1}{2}AB$ (A nằm giữa M và B).

Dạng 6. Độ dài vectơ tổng – Tập hợp điểm – Giá trị nhỏ nhất

Bài 24. (**Thông hiểu**) Cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 2MA$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, nên đẳng thức trở thành $2MI = 2MA \Leftrightarrow MI = MA$.

A và I là hai điểm phân biệt cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AI (đường thẳng vuông góc với AB tại điểm E thuộc đoạn AB với $AE = \frac{1}{4}AB$).

Bài 25. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

G là trọng tâm nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$; theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$.

Đẳng thức trở thành $3MG = BC \Leftrightarrow MG = \frac{BC}{3}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $\frac{BC}{3}$.

Bài 26. (**Vận dụng**) Cho hai điểm phân biệt A, B. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

Lời giải

Gọi K, L là các điểm thoả mãn $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{LB}=\vec{0}$; khi đó $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Với mọi M: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MK}$ và $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{ML}$. Đẳng thức trở thành $3MK=3ML\Leftrightarrow MK=ML$.

Do đó M thuộc đường trung trực của KL. Vì $AK=\frac{1}{3}AB$ và $BL=\frac{1}{3}AB$ nên K, L đối xứng nhau qua trung điểm I của AB; trung điểm của KL chính là I.

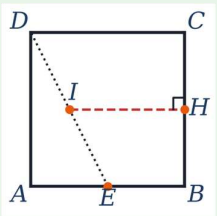
Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 27. (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4. Điểm M thay đổi trên đường thẳng BC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\right|$ và chỉ ra vị trí của M khi đó.

Lời giải

Gọi E là trung điểm AB và I là trung điểm ED. Khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IE}+2\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Chèn điểm I: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$, nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\right|=4MI$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên BC. Khoảng cách từ E đến BC bằng $EB=2$, từ D đến BC bằng $DC=4$; I là trung điểm ED nên $IH=\frac{2+4}{2}=3$ (đường trung bình của hình thang).

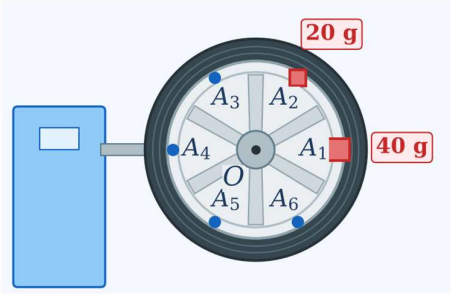
Với mọi M thuộc BC: $MI\geq IH=3$, suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\right|\geq 12$; dấu bằng khi $M\equiv H$. Vì E, D cách AB lần lượt 0 và 4 nên I cách AB một khoảng 2, do đó H là trung điểm của BC.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 12, đạt khi M là trung điểm của BC.

★ LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Điểm nhấn 1. Cân bằng bánh xe ô tô. Bánh xe ô tô bị "lệch tâm" (khối tâm không trùng với tâm trục O) sẽ làm xe rung lắc khi chạy nhanh. Thợ sửa xe khắc phục bằng cách kẹp thêm những quả chì nhỏ lên vành bánh sao cho khối tâm của phần khối lượng bị lệch cùng các quả chì trở về đúng điểm O.

Máy cân bằng cho biết phần lệch của một bánh xe tương đương với hai khối lượng nhỏ: 40 g tại điểm A_1 và 20 g tại điểm A_2 trên vành. Trên vành có sáu vị trí kẹp chì $A_1, A_2, \ldots, A_6$ chia vành thành sáu cung bằng nhau. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OA_3}$.



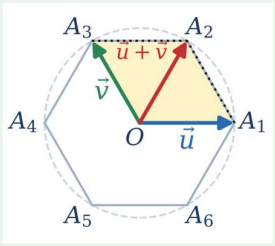
a) Chứng minh $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u} + \vec{v}$, rồi biểu thị $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$, $\overrightarrow{OA_6}$ theo $\vec{u}$, $\vec{v}$.

b) Thợ kẹp hai quả chì có khối lượng x (g) tại A_4 và y (g) tại A_6. Tìm x, y để bánh xe được cân bằng, tức là $40\,\overrightarrow{OA_1} + 20\,\overrightarrow{OA_2} + x\,\overrightarrow{OA_4} + y\,\overrightarrow{OA_6} = \vec{0}$.

c) Nếu kẹp chì tại A_4 và A_5 thì cần bao nhiêu gam chì ở mỗi vị trí? Phương án nào tốn ít chì hơn? Có thể cân bằng bánh xe chỉ với một quả chì kẹp tại một trong sáu vị trí trên không?

Lời giải

a) Sáu điểm chia vành thành sáu cung bằng nhau nên $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = 60^\circ$ và $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Các tam giác OA_1A_2, OA_2A_3 đều, nên tứ giác $OA_1A_2A_3$ có bốn cạnh bằng nhau: đó là hình thoi.



Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} = \vec{u} + \vec{v}$.

A_4, A_5, A_6 lần lượt đối xứng với A_1, A_2, A_3 qua O, nên $\overrightarrow{OA_4} = -\vec{u}$, $\overrightarrow{OA_5} = -\vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{OA_6} = -\vec{v}$.

b) Thay vào điều kiện cân bằng:
$40\vec{u} + 20(\vec{u} + \vec{v}) - x\vec{u} - y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (60 - x)\vec{u} + (20 - y)\vec{v} = \vec{0}$.
Vì $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương nên $60 - x = 0$ và $20 - y = 0$. Vậy cần kẹp 60 g chì tại A_4 và 20 g chì tại A_6 (tổng cộng 80 g).

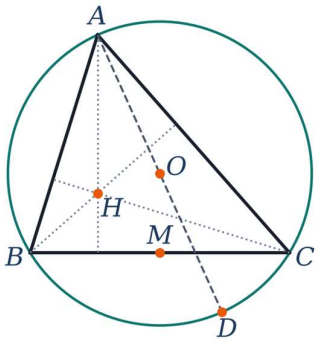
c) Với hai quả chì x (g) tại A_4, y (g) tại A_5:
$40\vec{u} + 20(\vec{u} + \vec{v}) - x\vec{u} - y(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow (60 - x - y)\vec{u} + (20 - y)\vec{v} = \vec{0}$.
Suy ra $y = 20$, $x = 40$: kẹp 40 g tại A_4 và 20 g tại A_5, tổng cộng 60 g – ít hơn phương án ở câu b) 20 g. (Đây chính là đặt mỗi khối lượng lệch một quả chì bằng nó ở vị trí đối xứng qua O.)

Phần lệch tương ứng với vectơ $40\vec{u}+20(\vec{u}+\vec{v})=60\vec{u}+20\vec{v}$. Một quả chì w (g) tại A_k cân bằng được khi $w\,\overrightarrow{OA_k}=-(60\vec{u}+20\vec{v})$. Nhưng mỗi vectơ $\overrightarrow{OA_k}$ là một trong $\pm\vec{u}$, $\pm\vec{v}$, $\pm(\vec{u}+\vec{v})$, có hai hệ số theo $\vec{u}$, $\vec{v}$ tỉ lệ $1:0$, $0:1$ hoặc $1:1$, không thể tỉ lệ $3:1$ như $60\vec{u}+20\vec{v}$.
Vậy không thể cân bằng bánh xe chỉ với một quả chì kẹp tại một trong sáu vị trí đã cho.

Nhận xét – Mở rộng

Bản chất của bài toán là điều kiện khối tâm: hệ các khối lượng m_i đặt tại P_i cân bằng quanh trục O khi và chỉ khi $\sum m_i\,\overrightarrow{OP_i}=\vec{0}$. Máy cân bằng thực chất "đo" vectơ mất cân bằng $\vec{w}=60\vec{u}+20\vec{v}$.
Nếu được kẹp chì ở **bất kì** điểm nào trên vành (bán kính R) thì chỉ cần một quả, đặt ở điểm đối diện với hướng của $\vec{w}$. Vectơ $\vec{w}$ là đường chéo của hình bình hành dựng trên $60\vec{u}$ và $20\vec{v}$; góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 120° nên góc của hình bình hành đối diện với đường chéo ấy bằng 60°. Theo định lí côsin: $|\vec{w}|^2=R^2(60^2+20^2-2\cdot60\cdot20\cdot\cos60^\circ)=2800R^2$, nên quả chì cần khoảng $20\sqrt{7}\approx52{,}9$ g – nhẹ hơn cả hai phương án trên.
Bài toán cũng minh hoạ sức mạnh của việc phân tích theo hai vectơ không cùng phương: một điều kiện "hình học" được đổi thành một hệ phương trình bậc nhất rất đơn giản.

Điểm nhấn 2. Đường thẳng Euler. Cho tam giác nhọn ABC không đều, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm, G là trọng tâm của tam giác, M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua O.



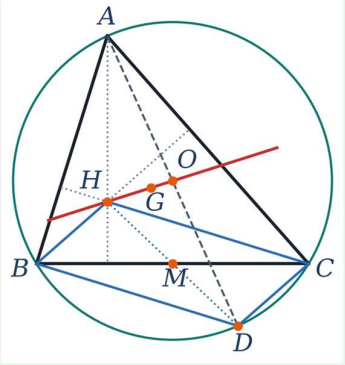
a) Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành; từ đó suy ra $\overrightarrow{AH}=2\,\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\,\overrightarrow{HO}$.

c) Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{OH}=3\,\overrightarrow{OG}$. Tính tỉ số $\frac{GH}{GO}$.

Lời giải

a) AD là đường kính nên $\widehat{ABD}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), tức $DB\perp AB$. Mặt khác $CH\perp AB$ (H là trực tâm). Do đó $CH\parallel DB$.
Tương tự, $\widehat{ACD}=90^\circ$ nên $DC\perp AC$, mà $BH\perp AC$, do đó $BH\parallel DC$.
Tứ giác $BHCD$ có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành. Hai đường chéo BC, HD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, nên M là trung điểm của HD.



O là trung điểm AD nên $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$; M là trung điểm HD nên $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AH}$. Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$. Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$.

Chèn điểm O: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO}$.

c) G là trọng tâm nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Kết hợp với câu b): $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG}$ cùng phương, có chung điểm O nên O, G, H thẳng hàng (đường màu đỏ trong hình).

Từ $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ suy ra $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OG}$, nên G nằm giữa O và H và $GH = 2GO$. Vậy $\frac{GH}{GO} = 2$.

Nhận xét – Mở rộng

Đường thẳng đi qua O, G, H được gọi là **đường thẳng Euler** của tam giác, do Leonhard Euler phát hiện năm 1765. Kết quả đúng cho mọi tam giác không đều (với tam giác vuông hay tam giác tù, chứng minh câu a) chỉ cần sửa lại một chút); tam giác đều có $O \equiv G \equiv H$.

Hệ quả thú vị: tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi trọng tâm trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp (vì khi đó $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$: trực tâm cũng trùng với hai điểm ấy, nên mỗi trung tuyến đồng thời là đường cao và tam giác có ba cạnh bằng nhau).

Đẳng thức $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (định lí Sylvester) còn cho một cách dựng nhanh trực tâm: từ O cộng ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

C LỜI GIẢI LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$. Vectơ $-3\vec{a}$

A. ngược hướng với $\vec{a}$, có độ dài $3|\vec{a}|$ **B.** cùng hướng với $\vec{a}$, có độ dài $3|\vec{a}|$

C. ngược hướng với $\vec{a}$, có độ dài $-3|\vec{a}|$ **D.** cùng hướng với $\vec{a}$, có độ dài $|\vec{a}|$

Lời giải

Vì $-3 < 0$ nên $-3\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$; độ dài $|-3\vec{a}| = |-3| \cdot |\vec{a}| = 3|\vec{a}|$.

Phương án "độ dài $-3|\vec{a}|$" sai vì độ dài của một vectơ không thể âm.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA}$ **C.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ **D.** $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$

Lời giải

$\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng, $AB = 2AI$, nên $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

Đẳng thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA}$ sai hướng ($\overrightarrow{IA}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$); $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ sai vì hai vectơ này ngược hướng.

Chọn đáp án C.

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ **C.** $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ **D.** $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$

Lời giải

G thuộc đoạn AM, $AG = \frac{2}{3}AM$ và hai vectơ cùng hướng, nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ sai về độ dài. Hai đẳng thức còn lại sai về hướng: đúng ra $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Chọn đáp án C.

Câu 4. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm O bất kì, ta có

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ **B.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}$ **C.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$ **D.** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

Lời giải

Chèn điểm I: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI}$, vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Còn $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (quy tắc hiệu), nói chung khác $2\overrightarrow{OI}$.

Chọn đáp án A.

Câu 5. Rút gọn $2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ ta được

A. $\vec{a} + \vec{b}$ **B.** $3\vec{a} + \vec{b}$ **C.** $\vec{a} + 3\vec{b}$ **D.** $\vec{a} - 3\vec{b}$

Lời giải

$2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

Kết quả $\vec{a} + \vec{b}$ có được khi quên đổi dấu $-\vec{b}$ lúc bỏ ngoặc.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi

A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ **B.** $\vec{a} = \vec{b}$

C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ **D.** có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Lời giải

Theo điều kiện cùng phương: với $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Hai đẳng thức $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ chỉ là các trường hợp riêng $k = 1$, $k = -1$; còn $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ không cho biết gì về phương.

Chọn đáp án D.

Câu 7. Cho tam giác ABC và D là điểm đối xứng với B qua C. Vectơ $\overrightarrow{AD}$ bằng

A. $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ **C.** $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ **D.** $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Lời giải

C là trung điểm BD nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Phương án $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$ (sai dấu khi chuyển vế).
Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M **thuộc đoạn** AB **và** $MA=2MB$ **B.** M là trung điểm AB
C. M nằm ngoài đoạn AB **D.** M thuộc đoạn AB và $MB=2MA$

Lời giải
$\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng: M nằm giữa A và B. So sánh độ dài: $MA=2MB$.
Do đó M không phải trung điểm AB; còn "$MB=2MA$" là nhầm vai trò của hai đoạn.
Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Vectơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ **C.** $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Lời giải
Gọi M là trung điểm BC: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Vì $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
Phương án $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ là lỗi quên hệ số $\frac{1}{2}$ của công thức trung tuyến.
Chọn đáp án B.

Câu 10. Cho $|\vec{a}|=4$. Độ dài của vectơ $-\frac{3}{2}\vec{a}$ là

A. -6 **B.** 6 **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** 2

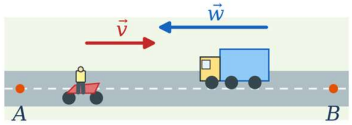
Lời giải
$\left|-\frac{3}{2}\vec{a}\right|=\left|-\frac{3}{2}\right|\cdot|\vec{a}|=\frac{3}{2}\cdot 4=6$. Độ dài không thể âm nên -6 bị loại; $\frac{8}{3}$ là lỗi chia thay vì nhân.
Chọn đáp án B.

Câu 11. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{AK}$ bằng

A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ **B.** $3\overrightarrow{AB}$ **C.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Lời giải
Chèn điểm A vào $\overrightarrow{KB}$: $\overrightarrow{KA}+3\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
K nằm gần B hơn (đầu có hệ số lớn hơn) nên $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ là đáp số sai.
Chọn đáp án D.

Câu 12. Trên một con đường thẳng, một xe máy đi theo hướng từ A đến B với vận tốc $\vec{v}$; một xe tải đi theo chiều ngược lại với tốc độ gấp 1,5 lần tốc độ của xe máy. Vận tốc $\vec{w}$ của xe tải là



A. $\vec{w}=1{,}5\vec{v}$ **B.** $\vec{w}=-1{,}5\vec{v}$ **C.** $\vec{w}=-\frac{2}{3}\vec{v}$ **D.** $\vec{w}=\frac{2}{3}\vec{v}$

Lời giải
Xe tải đi ngược chiều nên $\vec{w}$ ngược hướng với $\vec{v}$, hệ số âm; tốc độ gấp 1,5 lần nên $|\vec{w}|=1{,}5|\vec{v}|$.

Vậy $\vec{w}=-1{,}5\vec{v}$. Phương án $1{,}5\vec{v}$ sai hướng; $-\frac{2}{3}\vec{v}$ sai độ lớn (nhầm thành xe máy nhanh gấp 1,5 lần xe tải).

Chọn đáp án B.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC và G là trọng tâm.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$.		✓
b)	$\overrightarrow{GA}=2\,\overrightarrow{GM}$.		✓
c)	$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.		✓

Lời giải

a) Sai. Chèn điểm M: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AM}+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=2\,\overrightarrow{AM}$. Vì $\overrightarrow{AM}\neq\vec{0}$ nên khẳng định sai (thiếu hệ số 2).

b) Sai. G thuộc đoạn AM, $GA=2GM$, nhưng $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{GA}=-2\,\overrightarrow{GM}$. Khẳng định sai dấu.

c) Đúng. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Khẳng định đúng.

d) Sai. G không nằm trên đường thẳng BC nên $\overrightarrow{BG}$ không cùng phương với $\overrightarrow{BC}$; đúng ra $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Khẳng định sai.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.	✓	
c)	$\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$.		✓
d)	Nếu N là trung điểm CD thì $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$. Khẳng định đúng.

b) Đúng. O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Khẳng định đúng.

c) Sai. Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, là vectơ đối của $\vec{a}-\vec{b}$. Khẳng định sai.

d) Đúng. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$ (vì $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$). Khẳng định đúng.

Câu 3. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm M thoả mãn $2\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	M thuộc đoạn thẳng AB.		✓
b)	$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.	✓	
c)	$MA:MB=2:5$.		✓
d)	Với mọi điểm O: $\overrightarrow{OM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$.	✓	

Lời giải

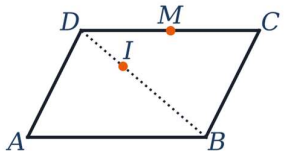
a) Sai. $2\overrightarrow{MA}=5\overrightarrow{MB}$ nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng: M nằm trên đường thẳng AB nhưng ở ngoài đoạn AB (về phía B, vì $MA>MB$). Khẳng định sai.

b) Đúng. Chèn điểm A: $2\overrightarrow{MA}-5\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow-3\overrightarrow{MA}=5\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định đúng.

c) Sai. Từ $2\overrightarrow{MA}=5\overrightarrow{MB}$ suy ra $2MA=5MB$, tức $MA:MB=5:2$ (khoảng cách tỉ lệ nghịch với độ lớn hệ số), không phải $2:5$. Khẳng định sai.

d) Đúng. Chèn điểm O: $2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)-5\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$, tức $\overrightarrow{OM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$ (tổng hai hệ số bằng 1). Khẳng định đúng.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$; M là trung điểm CD và I là điểm thuộc đoạn BD sao cho $DI=\frac{1}{3}DB$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.		✓
c)	Ba điểm A, I, M thẳng hàng và $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.	✓	
d)	I là trọng tâm của tam giác ABD.		✓

Lời giải

a) Đúng. I thuộc đoạn BD và $DI=\frac{1}{3}DB$ nên $BI=\frac{2}{3}BD$; hai vectơ $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Khẳng định đúng.

b) Sai. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. Khẳng định sai (đổi chỗ hai hệ số).

c) Đúng. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$, còn $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Khẳng định đúng.

d) Sai. Trọng tâm G của tam giác ABD thoả mãn $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, khác $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. Khẳng định sai ($I$ thực ra là trọng tâm của tam giác ACD).

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Điểm M thoả mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM (đơn vị: cm).

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$. Đẳng thức đã cho trở thành $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$, tức M là trung điểm của AI.

Tam giác ABC vuông tại A có $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; trung tuyến ứng với cạnh huyền $AI = \frac{BC}{2} = 5$.

Do đó $AM = \frac{AI}{2} = 2{,}5$ (cm).

Đáp số: 2,5

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{v} = -4\vec{a} + m\vec{b}$. Tìm số m để $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

$\vec{u} \neq \vec{0}$ nên $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{v} = k\vec{u}$, tức $-4\vec{a} + m\vec{b} = 2k\vec{a} - 3k\vec{b}$.

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương nên $2k = -4$ và $m = -3k$. Suy ra $k = -2$, $m = 6$.

Đáp số: 6

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Tính $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

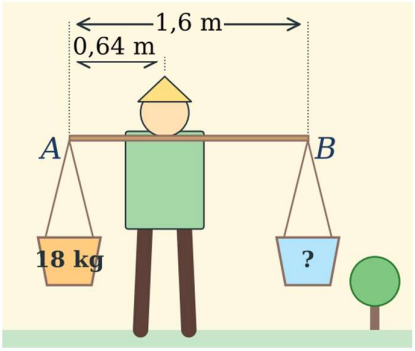
Lấy điểm O và dựng $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = 2\vec{b}$. Khi đó $OP = 3 \cdot 2 = 6$, $OQ = 2 \cdot 3 = 6$ và $\widehat{POQ} = 90°$.

Theo quy tắc hiệu, $3\vec{a} - 2\vec{b} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$. Tam giác OPQ vuông tại O nên $QP = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}485$.

Vậy $|3\vec{a} - 2\vec{b}| \approx 8{,}49$. (Chú ý: $|3\vec{a}| - |2\vec{b}| = 0$ không phải đáp số.)

Đáp số: 8,49

Câu 4. Một bác nông dân gánh hai thúng hàng bằng một chiếc đòn gánh AB dài 1,6 m (coi đòn gánh là thanh cứng có khối lượng không đáng kể). Thúng ở đầu A nặng 18 kg, vai bác đặt cách đầu A 0,64 m và đòn gánh nằm cân bằng. Hỏi thúng ở đầu B nặng bao nhiêu kilôgam?



Lời giải

Gọi M là điểm đặt vai, m (kg) là khối lượng thúng ở B. Đòn gánh cân bằng khi M là khối tâm của hai thúng: $18\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

M nằm giữa A và B nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng; đẳng thức tương đương với $18 \cdot MA = m \cdot MB$.
Với $MA = 0{,}64$ m, $MB = 1{,}6 - 0{,}64 = 0{,}96$ (m): $18 \cdot 0{,}64 = 0{,}96m \Leftrightarrow m = 12$.
Vậy thúng ở đầu B nặng 12 kg.
Đáp số: 12

1 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	B	B	D	D	D	C	B	A	C	C

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	Đ	S	Đ
2	Đ	S	S	Đ
3	Đ	S	Đ	S
4	Đ	S	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	1,5	0,5	1,67	4,47	8,66	6

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho vectơ $\vec{a}$ có $|\vec{a}| = 3$. Vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ và có độ dài bằng 6. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{b} = -2\vec{a}$ **B.** $\vec{b} = 2\vec{a}$ **C.** $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ **D.** $\vec{b} = -6\vec{a}$

Lời giải

$\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nên $\vec{b} = k\vec{a}$ với $k < 0$; so sánh độ dài: $|k| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{6}{3} = 2$. Vậy $k = -2$.

$-6\vec{a}$ có độ dài 18 (nhầm độ dài với hệ số); $-\frac{1}{2}\vec{a}$ là lấy nhầm tỉ số $\frac{3}{6}$.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Với $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì và k là số thực bất kì, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + \vec{b}$ **B.** $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ **C.** $0\vec{a} = \vec{0}$ **D.** $1\vec{a} = \vec{a}$

Lời giải

Theo tính chất phân phối, $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$. Đẳng thức $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + \vec{b}$ chỉ đúng khi $k = 1$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$, nên sai trong trường hợp tổng quát (chẳng hạn $k = 2$, $\vec{b} \neq \vec{0}$).

Ba đẳng thức còn lại là các tính chất và quy ước của phép nhân vectơ với một số.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vectơ $\overrightarrow{MA}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **C.** $2\overrightarrow{AB}$ **D.** $-2\overrightarrow{AB}$

Lời giải

$MA = \frac{1}{2}AB$; vectơ $\overrightarrow{MA}$ hướng về A, còn $\overrightarrow{AB}$ hướng về B, nên hai vectơ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Với điểm O bất kì, vecto $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ bằng

A. $\overrightarrow{OG}$ **B.** $3\overrightarrow{OG}$ **C.** $2\overrightarrow{OG}$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải

Chèn điểm G: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=3\overrightarrow{OG}$, vì G là trọng tâm nên tổng trong ngoặc bằng $\vec{0}$.

Tổng bằng $\vec{0}$ chỉ khi $O\equiv G$.

Chọn đáp án B.

Câu 5. Rút gọn $3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-2\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ ta được

A. $\vec{a}-7\vec{b}$ **B.** $\vec{a}-\vec{b}$ **C.** $5\vec{a}-7\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}$

Lời giải

$3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-2\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{a}+4\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$.

Kết quả $\vec{a}-7\vec{b}$ có được khi quên đổi dấu $-2\vec{b}$ trong ngoặc thứ hai.

Chọn đáp án D.

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây **không** suy ra được ba điểm A, B, C thẳng hàng?

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{BC}$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|$

Lời giải

Ba điểm phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi hai vecto có chung điểm đầu (chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) cùng phương. Các đẳng thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{BC}$ có dạng đó; $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ nghĩa là C là trung điểm AB.

Còn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|$ chỉ cho $AB=2AC$, không cho biết phương: tam giác có $AB=4$, $AC=2$, $BC=3$ thoả mãn mà ba đỉnh không thẳng hàng.

Chọn đáp án D.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Vecto $\overrightarrow{OB}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ **C.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; O là trung điểm BD nên $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$.

Lưu ý: $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{OD}$, còn $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AO}$.

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD và $AB=2CD$. Vecto $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

Lời giải

$AB\parallel CD$, hai vecto $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $DC=\frac{1}{2}AB$, nên $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Phương án có $2\overrightarrow{AB}$ là nhầm tỉ số hai đáy.

Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho vectơ $\vec{a}$ có $|\vec{a}| = 6$ và $\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{a}$. Độ dài của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. 10 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}$, nên $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

Đáp số 10 có được khi cộng hai độ dài $6 + 4$ – sai vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.

Chọn đáp án B.

Câu 10. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$?

A. $-3\vec{a} + 6\vec{b}$ **B.** $2\vec{a} - \vec{b}$ **C.** $\vec{a} + 2\vec{b}$ **D.** $-\vec{a} - 2\vec{b}$

Lời giải

$-3\vec{a} + 6\vec{b} = -3(\vec{a} - 2\vec{b}) = -3\vec{u}$ nên cùng phương với $\vec{u}$.

Mỗi vectơ cùng phương với $\vec{u}$ có dạng $k\vec{a} - 2k\vec{b}$: hệ số của $\vec{b}$ bằng -2 lần hệ số của $\vec{a}$. Ba vectơ còn lại không có tính chất này.

Chọn đáp án A.

Câu 11. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A là trung điểm IB **B.** I là trung điểm AB

C. B **là trung điểm** AI **D.** I thuộc đoạn AB

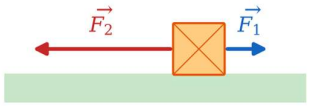
Lời giải

$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$: hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ cùng hướng và $IA = 2IB$.

Do đó B thuộc đoạn IA với $IB = \frac{1}{2}IA$, tức B là trung điểm của AI; điểm I nằm ngoài đoạn AB.

Chọn đáp án C.

Câu 12. Một thùng hàng chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_2} = -3\overrightarrow{F_1}$ và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 10$ N. Hợp lực $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$



A. có độ lớn 20 N và cùng hướng với $\overrightarrow{F_1}$

B. có độ lớn 40 N và cùng hướng với $\overrightarrow{F_2}$

C. **có độ lớn 20 N và ngược hướng với** $\overrightarrow{F_1}$

D. có độ lớn 30 N và ngược hướng với $\overrightarrow{F_1}$

Lời giải

$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} - 3\overrightarrow{F_1} = -2\overrightarrow{F_1}$. Vì $-2 < 0$ nên $\vec{F}$ ngược hướng với $\overrightarrow{F_1}$ (cùng hướng với $\overrightarrow{F_2}$), độ lớn $2 \cdot 10 = 20$ (N).

Đáp số 40 N là cộng nhầm hai độ lớn $10 + 30$, trong khi hai lực ngược hướng.

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G; M, N lần lượt là trung điểm AB, AC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.	✓	
b)	$\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.	✓	
c)	$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$.		✓
d)	$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (MN là đường trung bình). Khẳng định đúng.

b) Đúng. $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Khẳng định đúng.

c) Sai. BN là trung tuyến nên G thuộc đoạn BN với $BG=\frac{2}{3}BN$, hai vectơ cùng hướng: $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$, không phải $\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$. Khẳng định sai.

d) Đúng. M, N là trung điểm AB, AC nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{GA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. Khẳng định đúng.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{u}+\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{b}$.	✓	
b)	$2\vec{u}-\vec{v}=3\vec{a}-\vec{b}$.		✓
c)	$\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.		✓
d)	Vectơ $\vec{w}=4\vec{a}+2\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{u}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\vec{u}+\vec{v}=(2+1)\vec{a}+(1-3)\vec{b}=3\vec{a}-2\vec{b}$. Khẳng định đúng.

b) Sai. $2\vec{u}-\vec{v}=4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{a}+3\vec{b}=3\vec{a}+5\vec{b}$, khác $3\vec{a}-\vec{b}$ (kết quả sai này có được khi quên đổi dấu $-3\vec{b}$). Khẳng định sai.

c) Sai. Nếu $\vec{u}=k\vec{v}$ thì $2\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}-3k\vec{b}$, suy ra $k=2$ và $-3k=1$ – vô lí. Vậy $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương. Khẳng định sai.

d) Đúng. $\vec{w}=2\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{u}$ với $2>0$, nên $\vec{w}$ cùng hướng với $\vec{u}$. Khẳng định đúng.

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thoả mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	M thuộc đoạn thẳng AB và $MB=2MA$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.		✓
c)	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.	✓	
d)	Ba điểm M, N, G thẳng hàng.		✓

Lời giải

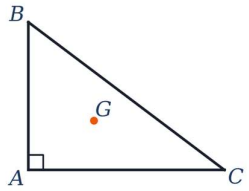
a) Đúng. $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MA}$: hai vectơ ngược hướng nên M nằm giữa A và B, đồng thời $MB=2MA$. Khẳng định đúng.

b) Sai. Chèn điểm A: $2\overrightarrow{NA}+\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, không phải $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Khẳng định sai.

c) Đúng. Chèn điểm A vào hai đẳng thức đã cho được $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Do đó $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Khẳng định đúng.

d) Sai. Từ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Nếu $\overrightarrow{MG}=k\overrightarrow{MN}$ thì $0=-\frac{k}{3}$ và $\frac{1}{3}=\frac{k}{3}$ – vô lí. Khẳng định sai.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=9$, $AC=12$ và G là trọng tâm của tam giác.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\rvert=15$.	✓	
b)	$\left\lvert\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right\rvert=6$.		✓
c)	$\left\lvert\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right\rvert=5$.	✓	
d)	Nếu điểm E thoả mãn $\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ thì $BE=3\sqrt{10}$.		✓

Lời giải

a) Đúng. Gọi M là trung điểm BC: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$. Tam giác ABC vuông tại A nên $BC=\sqrt{9^2+12^2}=15$ và trung tuyến $AM=\frac{BC}{2}$. Do đó $\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\rvert=2AM=BC=15$. Khẳng định đúng.

b) Sai. Lấy điểm F trên tia AB với $AF=2AB=18$, khi đó $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$. Tam giác AFC vuông tại A nên $FC=\sqrt{18^2+12^2}=6\sqrt{13}\approx 21{,}6$. Giá trị 6 là lỗi lấy hiệu hai độ dài $18-12$ trong khi hai vectơ không cùng phương. Khẳng định sai.

c) Đúng. G là trọng tâm nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$. Trung tuyến $AM=\frac{15}{2}=7{,}5$, $AG=\frac{2}{3}AM=5$. Vậy $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=5$. Khẳng định đúng.

d) Sai. Chèn điểm A: $\overrightarrow{EA}+3\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, nên E thuộc cạnh AC với $AE=9$. Tam giác ABE vuông tại A: $BE=\sqrt{9^2+9^2}=9\sqrt{2}$. Giá trị $3\sqrt{10}$ ứng với $AE=3$ (nhầm thành $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$). Khẳng định sai.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh BC thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.

Lời giải

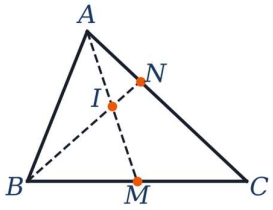
Theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $BM=\frac{3}{5}BC$ và $MC=BC-BM=\frac{2}{5}BC$.

Vậy $\frac{MB}{MC}=\frac{3}{2}=1{,}5$. (Hệ số của $\overrightarrow{AC}$ lớn hơn nên M gần C hơn.)

Đáp số: 1,5

Câu 2. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, N là điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi I là giao điểm của AM và BN. Biết $\overrightarrow{AI}=x\,\overrightarrow{AM}$. Tìm x.



Lời giải

$\overrightarrow{AI}=x\,\overrightarrow{AM}=\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}\overrightarrow{AC}$.

N thuộc cạnh AC và $NC=2NA$ nên $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. I thuộc đường thẳng BN nên có số s để $\overrightarrow{AI}=(1-s)\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{AN}=(1-s)\,\overrightarrow{AB}+\frac{s}{3}\overrightarrow{AC}$.

So sánh hệ số ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương): $\frac{x}{2}=1-s$ và $\frac{x}{2}=\frac{s}{3}$. Suy ra $1-s=\frac{s}{3}\Leftrightarrow s=\frac{3}{4}$, nên $x=\frac{2s}{3}=\frac{1}{2}$.

Vậy $x=0{,}5$, tức I là trung điểm của AM.

Đáp số: 0,5

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh CD sao cho $DM=\frac{1}{3}DC$. Biết $\overrightarrow{AC}=x\,\overrightarrow{AM}+y\,\overrightarrow{AB}$. Tính $x+y$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, suy ra $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Vì $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương nên $x=1$, $y=\frac{2}{3}$.

Do đó $x+y=\frac{5}{3}\approx 1{,}667\approx 1{,}67$.

Đáp số: 1,67

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi M là trung điểm BC. Vì $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ nên $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BM}$, do đó $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$.

Tam giác ABM vuông tại B, $AB=4$, $BM=2$ nên $AM=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}\approx 4{,}472$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|\approx 4{,}47$.

Đáp số: 4,47

Câu 5. Cho tam giác đều ABC cạnh 3 có trọng tâm G. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AG}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi M là trung điểm BC: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}$. Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AG}$.

Tam giác đều cạnh 3 có trung tuyến $AM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, nên $AG=\frac{2}{3}AM=\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AG}\right|=5\sqrt{3}\approx 8{,}660\approx 8{,}66$.

Đáp số: 8,66

Câu 6. Ba quả nặng, mỗi quả 2 kg, được đặt tại ba đỉnh của một tấm ván mỏng hình tam giác ABC (khối lượng tấm ván không đáng kể). Biết trung tuyến AM của tam giác dài 9 cm. Khối tâm của hệ ba quả nặng cách A bao nhiêu xentimét?

Lời giải

Ba quả nặng có khối lượng bằng nhau nên khối tâm G thoả mãn $2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$, tức G là trọng tâm tam giác ABC.

Trọng tâm nằm trên trung tuyến AM với $AG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot 9=6$ (cm).

Đáp số: 6

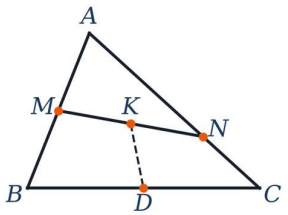
PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN=2NC$, K là trung điểm MN.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi D là trung điểm BC. Biểu thị $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh đường thẳng GK song song với đường thẳng AB.



Lời giải

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; N thuộc cạnh AC, $AN=\frac{2}{3}AC$ nên $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

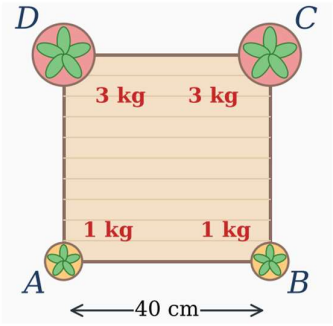
K là trung điểm MN nên $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, do đó $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AK}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AG}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}$: hai vectơ $\overrightarrow{GK}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Mặt khác K không thuộc đường thẳng AB: nếu có thì $\overrightarrow{AK}=t\,\overrightarrow{AB}$, mâu thuẫn với $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (cách phân tích là duy nhất). Vậy $GK\parallel AB$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một tấm kệ gỗ hình vuông $ABCD$ cạnh 40 cm (khối lượng không đáng kể) được đỡ bởi một chân trụ duy nhất. Trên kệ đặt bốn chậu cây ở bốn góc: 1 kg tại A, 1 kg tại B, 3 kg tại C và 3 kg tại D. Kệ đứng vững khi chân trụ đặt đúng tại khối tâm M của hệ bốn chậu cây.



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh $\overrightarrow{MI}+3\,\overrightarrow{MJ}=\vec{0}$, từ đó xác định vị trí điểm M.

b) Tính khoảng cách từ chân trụ đến góc A (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của xentimét).

c) Nếu thay chậu ở D bằng một chậu khác (các chậu còn lại giữ nguyên) thì chậu mới phải nặng bao nhiêu kilôgam để chân trụ nằm trên đường chéo AC?

Lời giải

a) Khối tâm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\,\overrightarrow{MC}+3\,\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Vì I, J là trung điểm AB, CD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\,\overrightarrow{MJ}$.

Thay vào: $2\,\overrightarrow{MI}+6\,\overrightarrow{MJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}+3\,\overrightarrow{MJ}=\vec{0}$. Chèn điểm I: $\overrightarrow{MI}+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$.

Vậy M thuộc đoạn IJ với $IM=\frac{3}{4}IJ=30$ cm (gần cạnh CD – phía có hai chậu nặng).

b) $IJ\perp AB$ (đường nối trung điểm hai cạnh đối của hình vuông) nên tam giác AIM vuông tại I, $AI=20$ cm, $IM=30$ cm.

$AM=\sqrt{20^2+30^2}=\sqrt{1300}\approx 36{,}06$. Vậy chân trụ cách góc A khoảng 36,1 cm.

c) Gọi khối lượng chậu mới ở D là m (kg) và M' là khối tâm mới. Chọn điểm gốc A: $(1+1+3+m)\,\overrightarrow{AM'}=1\cdot\overrightarrow{AB}+3\,\overrightarrow{AC}+m\,\overrightarrow{AD}=4\,\overrightarrow{AB}+(3+m)\,\overrightarrow{AD}$ (vì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$).

M' thuộc đường chéo AC khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, tức hai hệ số theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ bằng nhau: $4=3+m\Leftrightarrow m=1$.

Vậy chậu mới ở D phải nặng 1 kg.

2 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	D	A	C	B	B	A	D	B	D	C	C	A

Câu	a)	b)	c)	d)
1	S	Đ	Đ	Đ
2	Đ	S	Đ	Đ
3	S	S	Đ	Đ
4	Đ	Đ	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	6	0,6	6	12	8,94	5,6

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Với $k<0$ và $\vec{a}\neq\vec{0}$, vectơ $k\vec{a}$

A. cùng hướng với $\vec{a}$ **B.** vuông góc với $\vec{a}$

C. bằng $\vec{0}$ **D.** ngược hướng với $\vec{a}$

Lời giải

Theo định nghĩa, với $k<0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$, do đó cùng phương (không vuông góc) với $\vec{a}$; độ dài $|k|\cdot|\vec{a}|>0$ nên $k\vec{a}\neq\vec{0}$.

Chọn đáp án D.

Câu 2. Với vectơ $\vec{a}$ và các số thực k, t, vectơ $(k+t)\vec{a}$ bằng

A. $k\vec{a}+t\vec{a}$ **B.** $kt\vec{a}$ **C.** $k\vec{a}+t$ **D.** $k+t\vec{a}$

Lời giải

Theo tính chất phân phối đối với phép cộng các số: $(k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$.

Các biểu thức $k\vec{a}+t$ và $k+t\vec{a}$ cộng một vectơ với một số nên không có nghĩa; $kt\vec{a}$ nói chung khác $(k+t)\vec{a}$.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$

C. $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CO}$ **D.** $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

Lời giải

O là trung điểm AC nên $AC=2CO$, nhưng $\overrightarrow{AC}$ hướng từ A đến C còn $\overrightarrow{CO}$ hướng từ C về A: hai vectơ ngược hướng. Đúng ra $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{CO}=2\overrightarrow{OC}$.

Ba khẳng định còn lại đúng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$ vì O là trung điểm BD.

Chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hai điểm phân biệt A, B. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ là

A. điểm A **B.** trung điểm AB **C.** điểm B **D.** không tồn tại

Lời giải

$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$: hai vectơ ngược hướng và cùng độ dài, nên M nằm giữa A, B và $MA=MB$, tức M là trung điểm AB.

Chọn đáp án B.

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Vectơ $\vec{x}$ thoả mãn $2(\vec{x}-\vec{a})=3\vec{b}-\vec{x}$ là

A. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$ **B.** $\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$ **C.** $\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$ **D.** $\vec{x}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$

Lời giải

Phá ngoặc và chuyển vế như với phương trình: $2\vec{x}-2\vec{a}=3\vec{b}-\vec{x}\Leftrightarrow 3\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}\Leftrightarrow \vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$.

Phương án $2\vec{a}+3\vec{b}$ là quên chia cho 3.

Chọn đáp án B.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi N là trung điểm của cạnh CD. Vectơ $\overrightarrow{BN}$ bằng

A. $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **C.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Lời giải

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$; vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, và $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Vậy $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (Lưu ý: $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}$, còn $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{NB}$.)

Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và các số thực x, y thoả mãn $(x-2)\vec{a}+(y+1)\vec{b}=\vec{0}$. Giá trị của $x+y$ là

A. 0 **B.** 3 **C.** -1 **D.** 1

Lời giải

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương nên $p\vec{a}+q\vec{b}=\vec{0}$ chỉ khi $p=q=0$. Do đó $x-2=0$, $y+1=0$, tức $x=2$, $y=-1$.

Vậy $x+y=1$.

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho hai điểm phân biệt A, B. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi có số t sao cho $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ với

A. $t<0$ **B.** $0\le t\le 1$ **C.** $t>1$ **D.** t tuỳ ý

Lời giải

Nếu $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ thì M thuộc đường thẳng AB và $AM=|t|\cdot AB$. M thuộc đoạn AB khi $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ (hoặc $M\equiv A$) và $AM\le AB$, tức $0\le t\le 1$.

Với $t<0$, M nằm ngoài đoạn về phía A; với $t>1$, M nằm ngoài đoạn về phía B.

Chọn đáp án B.

Câu 9. Cho đoạn thẳng AB dài 6 cm và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Độ dài đoạn BM là

A. 12 cm **B.** 3 cm **C.** 6 cm **D.** 9 cm

Lời giải

$\overrightarrow{AM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$ nên M nằm trên đường thẳng AB, khác phía với B đối với A; $AM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (cm).

A nằm giữa M và B nên $BM = BA + AM = 6 + 3 = 9$ (cm). Đáp số 3 cm là nhầm M thuộc đoạn AB.

Chọn đáp án D.

Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$; I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD. Vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

A. $2\overrightarrow{JI}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}$ **C.** $2\overrightarrow{IJ}$ **D.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$

Lời giải

Đi từ I đến J theo hai đường: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}$.

Cộng vế theo vế, với $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$. Phương án $2\overrightarrow{JI}$ sai hướng.

Chọn đáp án C.

Câu 11. Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm của AB **B.** M là trọng tâm tam giác ABC

C. Tứ giác $ACBM$ là hình bình hành **D.** Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành

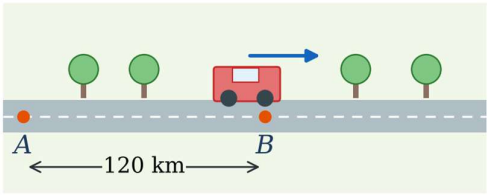
Lời giải

Theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$. Đẳng thức trở thành $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$.

Do đó tứ giác $ACBM$ có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$ nên là hình bình hành. Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành lại cần $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ – ngược hướng với kết quả trên.

Chọn đáp án C.

Câu 12. Một ô tô chuyển động thẳng đều, sau 2 giờ đi được từ A đến B với $AB = 120$ km. Xe tiếp tục đi thẳng với vận tốc không đổi; gọi C là vị trí của xe tại thời điểm 3,5 giờ kể từ lúc rời A. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{AC} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AC} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Gọi $\vec{v}$ là vận tốc của xe (km/h). Chuyển động thẳng đều nên vectơ dịch chuyển sau t giờ là $t\vec{v}$: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{v}$ và $\overrightarrow{AC} = 3{,}5\vec{v}$.

Do đó $\overrightarrow{AC} = \frac{3{,}5}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ (khi đó $AC = 210$ km). Phương án $\frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$ là quên chia cho thời gian 2 giờ.

Chọn đáp án A.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; M là trung điểm AB.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$.		✓
b)	$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.	✓	
c)	$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$.	✓	

Lời giải

a) Sai. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$; vectơ này không cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ nên khác $2\overrightarrow{AB}$ (kết quả sai có được khi viết nhầm $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$). Khẳng định sai.

b) Đúng. O, M lần lượt là trung điểm AC, AB nên OM là đường trung bình của tam giác ABC: $OM=\frac{1}{2}BC$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{CB}$. Khẳng định đúng.

c) Đúng. $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. Khẳng định đúng.

d) Đúng. Chèn điểm M: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{OM}$. Khẳng định đúng.

Câu 2. Cho tam giác ABC và điểm N thoả mãn $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BK=3KC$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=4\overrightarrow{NK}$.	✓	
b)	N là trung điểm của đoạn thẳng AK.		✓
c)	$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.	✓	
d)	Với mọi điểm O: $6\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. K thuộc cạnh BC, $KB=3KC$, hai vectơ $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=4\overrightarrow{NK}+\left(\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}\right)=4\overrightarrow{NK}$. Khẳng định đúng.

b) Sai. Vì $\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=4\overrightarrow{NK}$ nên đẳng thức đã cho trở thành $2\overrightarrow{NA}+4\overrightarrow{NK}=\vec{0}$, tức $\overrightarrow{NA}=-2\overrightarrow{NK}$: N thuộc đoạn AK với $NA=2NK$, không phải trung điểm. Khẳng định sai.

c) Đúng. Chèn điểm A: $2\overrightarrow{NA}+\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$, tức $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Khẳng định đúng.

d) Đúng. Chèn điểm N: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=6\overrightarrow{ON}+\left(2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}\right)=6\overrightarrow{ON}$. Khẳng định đúng.

Câu 3. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh BC sao cho $3MB = 2MC$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.		✓
b)	$\overrightarrow{MB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$.		✓
c)	$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.	✓	
d)	Gọi N là trung điểm AM. Khi đó $\overrightarrow{BN} = -\frac{7}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.	✓	

Lời giải

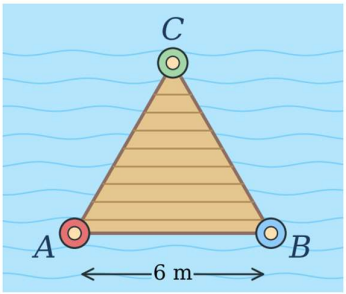
a) Sai. $3MB = 2MC$ nghĩa là $MB : MC = 2 : 3$, nên $BM = \frac{2}{5}BC$ và $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$; giá trị $\frac{3}{5}$ là nhầm tỉ số. Khẳng định sai.

b) Sai. $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng và $MB = \frac{2}{3}MC$ nên $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$, không phải $-\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$. Khẳng định sai.

c) Đúng. Vì $BM = \frac{2}{5}BC$: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Khẳng định đúng.

d) Đúng. Từ $BM = \frac{2}{5}BC$ có $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, nên $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = -\frac{7}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Khẳng định đúng.

Câu 4. Ba bạn, mỗi bạn nặng 40 kg, đứng ở ba góc A, B, C của một chiếc bè hình tam giác đều cạnh 6 m (bỏ qua khối lượng của bè, coi mỗi bạn là một chất điểm).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khối tâm của hệ ba bạn là trọng tâm G của tam giác ABC.	✓	
b)	Khối tâm cách mỗi bạn $2\sqrt{3}$ m.	✓	
c)	Nếu bạn ở C di chuyển đến trung điểm I của cạnh AB thì khối tâm của hệ là điểm I.	✓	
d)	Nếu bạn ở C được thay bằng một bạn nặng 80 kg (hai bạn ở A, B giữ nguyên) thì khối tâm mới cách C một khoảng $2\sqrt{3}$ m.		✓

Lời giải

a) Đúng. Ba bạn nặng bằng nhau nên khối tâm G thoả mãn $40\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \vec{0}$, tức G là trọng tâm tam giác ABC. Khẳng định đúng.

b) Đúng. Trung tuyến của tam giác đều cạnh 6 m dài $3\sqrt{3}$ m, nên $GA = GB = GC = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (m). Khẳng định đúng.

c) Đúng. Khối tâm M mới thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}$; vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ nên $3\overrightarrow{MI}=\vec{0}$, tức $M\equiv I$. Khẳng định đúng.

d) Sai. Gọi I là trung điểm AB. Khối tâm mới M thoả mãn $40\overrightarrow{MA}+40\overrightarrow{MB}+80\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, nên M là trung điểm CI và $MC=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}6$ (m), không phải $2\sqrt{3}$ m. Khẳng định sai.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB dài 12 cm và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Tính độ dài MB (đơn vị: cm).

Lời giải

$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$ nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng và $MA=3MB>MB$: M nằm trên đường thẳng AB, ngoài đoạn AB về phía B (B nằm giữa A và M).

Khi đó $MA=AB+MB$, tức $3MB=12+MB$, suy ra $MB=6$ (cm).

Đáp số: 6

Câu 2. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$ và P là điểm thoả mãn $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{BC}$. Tìm số k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=k\vec{b}$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{a}+3(\vec{b}-\vec{a})=-2\vec{a}+3\vec{b}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{b}$ và $\overrightarrow{MP}=-\frac{5}{2}\vec{a}+3\vec{b}$.

M, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có số t để $\overrightarrow{MN}=t\overrightarrow{MP}$ (vì $\overrightarrow{MP}\neq\vec{0}$) $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}t$ và $k=3t\Leftrightarrow t=\frac{1}{5}$, $k=\frac{3}{5}$.

Vậy $k=0{,}6$.

Đáp số: 0,6

Câu 3. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có diện tích bằng 36 cm² và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Tính diện tích tam giác MBC (đơn vị: cm²).

Lời giải

Tổng hai hệ số là $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, nên ta viết $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$.

Gọi K là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Khi đó $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$, nên K thuộc cạnh BC.

Từ $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AK}$ suy ra M thuộc đoạn AK và $MK=\frac{1}{6}AK$.

Hai tam giác MBC và ABC có chung đáy BC; vì A, M, K thẳng hàng và K thuộc BC nên tỉ số hai đường cao hạ từ M và từ A xuống BC bằng $\frac{KM}{KA}=\frac{1}{6}$ (định lí Thalès).

Vậy $S_{MBC}=\frac{1}{6}S_{ABC}=\frac{36}{6}=6$ (cm²).

Đáp số: 6

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 8$; O là giao điểm hai đường chéo. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{OB}\right|$.

Lời giải

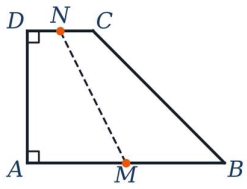
Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. O là trung điểm BD nên $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{AB}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{OB}\right| = 2AB = 12$.

Đáp số: 12

Câu 5. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, có $AB = 6$, $CD = 2$, $AD = 4$. Tính $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Đi từ M đến N theo hai đường: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

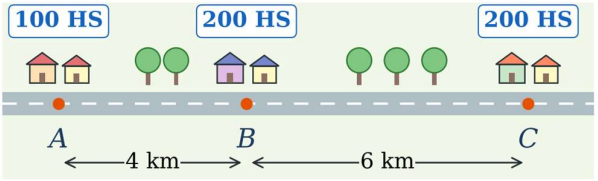
Cộng vế theo vế, với $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Gọi H là hình chiếu của N trên AB: $AH = DN = 1$, $HM = AM - AH = 3 - 1 = 2$, $NH = AD = 4$. Do đó $MN = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}944 \approx 8{,}94$.

Đáp số: 8,94

Câu 6. Ba thôn A, B, C nằm dọc một con đường thẳng, B nằm giữa A và C, $AB = 4$ km, $BC = 6$ km. Số học sinh tiểu học của ba thôn lần lượt là 100, 200, 200. Xã dự định xây trường tại điểm M trên đường là "khối tâm" của ba thôn với trọng số là số học sinh, tức là $100\overrightarrow{MA} + 200\overrightarrow{MB} + 200\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Trường cách thôn A bao nhiêu kilômét?



Lời giải

Chia hai vế cho 100: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Chèn điểm A: $5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

B nằm giữa A và C nên $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $AC = 10 = \frac{5}{2}AB$, tức $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{5} + 1\right)\overrightarrow{AB} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$, suy ra $AM = \frac{7}{5} \cdot 4 = 5{,}6$ (km).

Vậy trường cách thôn A 5,6 km (nằm giữa B và C, cách B 1,6 km).

Đáp số: 5,6

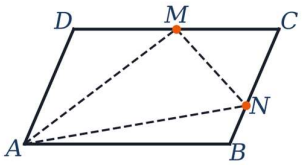
PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = \frac{1}{3}BC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác AMN. Biểu thị $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

c) Chứng minh G không thuộc đường chéo AC.



Lời giải

a) $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$ nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

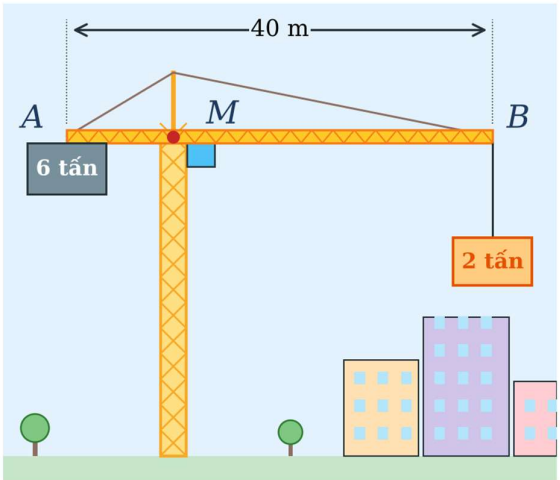
b) G là trọng tâm tam giác AMN nên (áp dụng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OG}$ với $O \equiv A$): $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$.

c) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Nếu G thuộc đường chéo AC thì $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AC} = t\vec{a} + t\vec{b}$ với số t nào đó.

Vì cách phân tích theo $\vec{a}$, $\vec{b}$ là duy nhất nên $t = \frac{1}{2}$ và $t = \frac{4}{9}$ – vô lí. Vậy G không thuộc đường chéo AC.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một cần cẩu tháp có cánh tay AB nằm ngang dài 40 m (coi khối lượng cánh tay không đáng kể). Đối trọng 6 tấn đặt ở đầu A, kiện hàng được treo vào cánh tay, còn trụ tháp đỡ cánh tay tại điểm M thuộc đoạn AB. Cánh tay cân bằng khi M là khối tâm của hệ gồm đối trọng và kiện hàng.



a) Khi treo kiện hàng 2 tấn ở đầu B, viết đẳng thức vectơ mà điểm M phải thoả mãn để cánh tay cân bằng và tính độ dài AM.

b) Giữ nguyên vị trí trụ tháp như ở câu a). Nếu kiện hàng được treo tại trung điểm P của đoạn MB thì kiện hàng phải nặng bao nhiêu tấn để cánh tay vẫn cân bằng?

Lời giải

a) Cánh tay cân bằng khi M là khối tâm của đối trọng (6 tấn tại A) và kiện hàng (2 tấn tại B): $6\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Chèn điểm A: $6\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 8\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Vậy $AM=\frac{1}{4}\cdot 40=10$ (m), khi đó $MB=30$ m.

b) P là trung điểm MB nên $MP=15$ m và $\overrightarrow{MP}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MA}$. Gọi khối lượng kiện hàng là m (tấn); cánh tay cân bằng khi $6\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MP}=\vec{0}$.

Vì $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MP}$ ngược hướng nên đẳng thức này tương đương với $6\cdot MA=m\cdot MP$, tức $6\cdot 10=15m$, suy ra $m=4$ (tấn).

Vậy kiện hàng phải nặng 4 tấn. *Nhận xét:* điểm treo càng gần trụ thì cần cẩu nâng được kiện hàng càng nặng; vì thế trên cánh tay cần cẩu tháp luôn ghi tải trọng cho phép giảm dần theo khoảng cách đến trụ.

BÀI 10

CHƯƠNG IV. VECTƠ

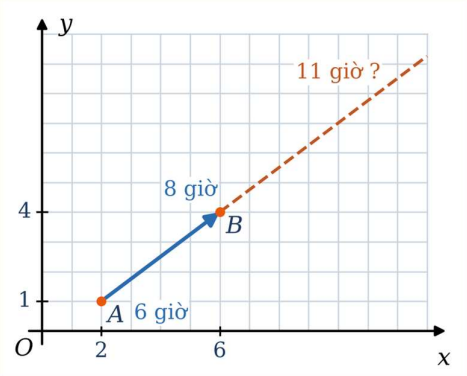
VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

◎ MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Nhận biết toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm đối với một hệ trục toạ độ.
- Thực hiện các phép toán vectơ bằng toạ độ: tổng, hiệu, tích của một số với một vectơ; tính độ dài vectơ và khoảng cách giữa hai điểm.
- Dùng toạ độ để xét hai vectơ cùng phương, ba điểm thẳng hàng; tìm toạ độ trung điểm, trọng tâm, đỉnh của hình bình hành.
- Vận dụng toạ độ vectơ vào các bài toán thực tế: chuyển động thẳng đều, hợp lực và cân bằng lực, chọn vị trí tối ưu.

✦ CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU · Đuổi theo con tàu trên màn hình radar

Tại Trung tâm phối hợp tìm kiếm cứu nạn hàng hải, màn hình radar được coi như một **mặt phẳng toạ độ**, mỗi cạnh ô vuông ứng với 10 km. Lúc 6 giờ, radar ghi nhận một tàu cá gặp nạn ở vị trí $A(2;1)$; lúc 8 giờ, tàu đã trôi tới $B(6;4)$. Coi tàu trôi thẳng đều, kíp trực cần trả lời ngay: *lúc 11 giờ tàu ở đâu và trôi với tốc độ bao nhiêu?*



Mỗi giờ tàu dịch chuyển theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Nếu viết được vectơ này dưới dạng một **cặp số**, chẳng hạn $(2;1{,}5)$, thì tìm vị trí lúc 11 giờ chỉ cần một phép cộng, còn tính tốc độ chỉ cần khai một căn bậc hai.

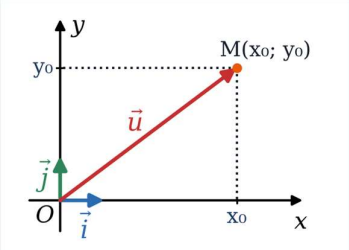
Bài học này gắn cho mỗi vectơ một **toạ độ** và biến các phép toán vectơ thành phép tính trên các con số. Lời giải đầy đủ ở Ví dụ 19.

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

■ 1. Toạ độ của vectơ, toạ độ của điểm

◆ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Hệ trục toạ độ Oxy gồm hai trục Ox (trục hoành) và Oy (trục tung) vuông góc với nhau tại gốc toạ độ O. Vectơ đơn vị trên Ox là $\vec{i}$, trên Oy là $\vec{j}$, với $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Mặt phẳng chứa hệ trục Oxy gọi là **mặt phẳng toạ độ** Oxy.



★ TOẠ ĐỘ VECTƠ – TOẠ ĐỘ ĐIỂM

- $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$; x là **hoành độ**, y là **tung độ** của $\vec{u}$.
- $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$, $\vec{0} = (0; 0)$.
- Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ: $(x; y) = (x'; y') \Leftrightarrow x = x'$ và $y = y'$.
- Toạ độ của điểm M là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$: $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y)$; khi đó $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

■ 2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

★ CÔNG THỨC

Cho $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$ và số thực k:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$; $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$; $k\vec{u} = (kx; ky)$.
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Với $\vec{u} \neq \vec{0}$: $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u} \Leftrightarrow$ có số k sao cho $x' = kx$, $y' = ky$. Khi $xy \neq 0$, điều kiện này tương đương với $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$.

Chú ý. Hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$ cùng phương khi và chỉ khi $xy' - x'y = 0$. Cách viết này không cần chia, nên dùng được cả khi có toạ độ bằng 0.

★ VECTƠ NỐI HAI ĐIỂM – TRUNG ĐIỂM – TRỌNG TÂM

Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ (**"ngọn trừ gốc"**); $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Trung điểm I của AB: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

✱ GHI NHỚ NHANH

- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (với A, B, C không thẳng hàng), tức là $x_D = x_A + x_C - x_B$, $y_D = y_A + y_C - y_B$.
- A' đối xứng với A qua $B \Leftrightarrow B$ là trung điểm của AA': $A'(2x_B - x_A; 2y_B - y_A)$.
- Vật chuyển động thẳng đều từ A với vectơ vận tốc $\vec{v}$: sau thời gian t, vật ở điểm M với $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}$; tốc độ của vật là $|\vec{v}|$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Toạ độ vectơ, toạ độ điểm và các phép toán

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Đọc toạ độ: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y)$; toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ là "ngọn trừ gốc": $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- Tính toán theo từng toạ độ: hoành độ với hoành độ, tung độ với tung độ.
- Phân tích $\vec{c}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$: đặt $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, cho các toạ độ tương ứng bằng nhau rồi giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn m, n.
- Tìm điểm $M(x; y)$ thoả mãn một đẳng thức vectơ: viết toạ độ từng vectơ theo x, y, thay vào đẳng thức rồi cho hai toạ độ của hai vế bằng nhau.

Sai lầm thường gặp: lấy "gốc trừ ngọn" khi tính $\overrightarrow{AB}$ (ra $\overrightarrow{BA}$); quên đổi dấu khi trừ một toạ độ âm.

▶ **Ví dụ 1.** Cho $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{b} = -3\vec{j}$. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

Lời giải

Theo định nghĩa toạ độ của vectơ: $\vec{a} = (2; -5)$; $\vec{b} = 0\vec{i} + (-3)\vec{j}$ nên $\vec{b} = (0; -3)$.

$2\vec{a} = (4; -10)$, do đó $\vec{u} = \big(4 - 0; -10 - (-3)\big) = (4; -7)$.

$3\vec{b} = (0; -9)$, do đó $\vec{v} = \big(2 + 0; -5 + (-9)\big) = (2; -14)$.

Vậy $\vec{a} = (2; -5)$, $\vec{b} = (0; -3)$, $\vec{u} = (4; -7)$, $\vec{v} = (2; -14)$.

▶ **Ví dụ 2.** Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$, $\vec{c} = (-7; 0)$. Phân tích $\vec{c}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Giả sử $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Vì $m\vec{a} + n\vec{b} = (m - 3n; 2m + n)$ nên $\begin{cases} m - 3n = -7 \\ 2m + n = 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai, $n = -2m$. Thay vào phương trình thứ nhất: $m + 6m = -7$, suy ra $m = -1$ và $n = 2$.

Thử lại: $-\vec{a} + 2\vec{b} = (-1 - 6; -2 + 2) = (-7; 0) = \vec{c}$.

Vậy $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

▶ **Ví dụ 3.** Tìm x, y để hai vectơ $\vec{u} = (2x - 1; 3)$ và $\vec{v} = (5; y + 1)$ bằng nhau.

Lời giải

Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi các toạ độ tương ứng bằng nhau:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 5 \\ 3 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $x = 3$, $y = 2$; khi đó $\vec{u} = \vec{v} = (5; 3)$.

▶ **Ví dụ 4.** (**Vận dụng**) Cho ba điểm $A(2; 1)$, $B(1; -2)$, $C(0; 3)$. Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{MA} = (2 - x; 1 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (1 - x; -2 - y)$, $\overrightarrow{MC} = (-x; 3 - y)$.

Hoành độ của vế trái: $(2-x)-2(1-x)+3(-x)=-2x$. Tung độ của vế trái: $(1-y)-2(-2-y)+3(3-y)=14-2y$.

Đẳng thức đã cho tương đương với $\begin{cases}-2x=0\\14-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=7\end{cases}$.

Thử lại với $M(0;7)$: $\overrightarrow{MA}=(2;-6)$, $\overrightarrow{MB}=(1;-9)$, $\overrightarrow{MC}=(0;-4)$ và $(2;-6)-2(1;-9)+3(0;-4)=(0;0)$.

Vậy $M(0;7)$.

Nhận xét. Tổng các hệ số là $1-2+3=2\neq 0$ nên điểm M luôn tồn tại và duy nhất; nếu tổng các hệ số bằng 0 thì x, y bị triệt tiêu và bài toán có thể vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho $\vec{a}=(3;-1)$, $\vec{b}=(-2;4)$. Tìm toạ độ các vectơ $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Bài 2. Tìm toạ độ các điểm M, N, biết $\overrightarrow{OM}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ và $\overrightarrow{ON}=-2\vec{\jmath}$. Từ đó tìm toạ độ của $\overrightarrow{MN}$ và tính độ dài MN.

Bài 3. Cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(-1;3)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$ thoả mãn $2\vec{x}-\vec{a}=3(\vec{b}+\vec{x})$.

Bài 4. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC với $A(2;1)$, $B(-1;3)$, $C(4;-2)$. Tìm toạ độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Chứng minh B là trung điểm của đoạn CD.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho $\vec{a}=(2;1)$ và $\vec{b}=(1;1)$.

a) Biểu diễn mỗi vectơ $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Chứng minh mọi vectơ $\vec{u}=(x;y)$ đều biểu diễn được theo $\vec{a}$, $\vec{b}$; viết biểu diễn đó.

c) Áp dụng: phân tích $\vec{c}=(5;-3)$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

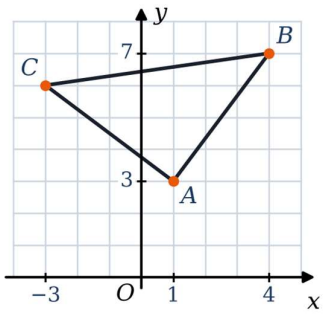
Dạng 2. Độ dài vectơ – Khoảng cách – Nhận dạng tam giác

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$; $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Nhận dạng tam giác: tính ba cạnh rồi so sánh. Tam giác cân, đều: so sánh độ dài; vuông: dùng định lí Pythagore đảo; tù hay nhọn: so sánh bình phương cạnh lớn nhất với tổng bình phương hai cạnh kia (hệ quả của định lí côsin).
- Điểm thuộc trục Ox có dạng $M(x;0)$, thuộc trục Oy có dạng $M(0;y)$. Điều kiện cách đều: $MA=MB\Leftrightarrow MA^2=MB^2$; tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm I với $IA^2=IB^2=IC^2$.

Chú ý: luôn bình phương để khử căn; khi khai triển $MA^2=MB^2$, các số hạng x^2 (hoặc y^2) triệt tiêu và còn lại phương trình bậc nhất.

▶ **Ví dụ 5.** Cho $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(-3;6)$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC, cho biết đó là tam giác gì và tính diện tích của nó.



Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (3;4)$ nên $AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $\overrightarrow{AC} = (-4;3)$ nên $AC = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$; $\overrightarrow{BC} = (-7;-1)$ nên $BC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Ta có $AB = AC$ và $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$. Theo định lí Pythagore đảo, tam giác ABC **vuông cân tại** A.

Diện tích: $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A và có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

▶ **Ví dụ 6.** Cho $A(-2;3)$, $B(4;1)$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho M cách đều A và B. Tam giác MAB có gì đặc biệt?

Lời giải

Vì M thuộc trục tung nên $M(0;y)$. Khi đó $MA^2 = (-2)^2 + (3-y)^2 = y^2 - 6y + 13$ và $MB^2 = 4^2 + (1-y)^2 = y^2 - 2y + 17$.

$MA = MB \Leftrightarrow y^2 - 6y + 13 = y^2 - 2y + 17 \Leftrightarrow -4y = 4 \Leftrightarrow y = -1$. Vậy $M(0;-1)$.

Khi đó $MA^2 = MB^2 = 20$ và $AB^2 = 6^2 + (-2)^2 = 40 = MA^2 + MB^2$.

Vậy $M(0;-1)$ và tam giác MAB vuông cân tại M.

▶ **Ví dụ 7.** (**Vận dụng**) Cho $A(1;1)$, $B(4;2)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải

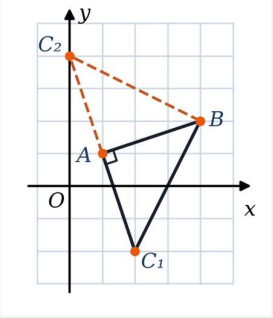
Gọi $C(x;y)$. Tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $AC = AB$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2$.

$AB^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, nên ta có hệ $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10\\(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20\end{cases}$.

Trừ vế theo vế hai phương trình: $[(x-1)^2 - (x-4)^2] + [(y-1)^2 - (y-2)^2] = -10$, tức là $(6x-15) + (2y-3) = -10$, hay $y = 4 - 3x$.

Thay vào phương trình đầu: $(x-1)^2 + (3-3x)^2 = 10 \Leftrightarrow 10(x-1)^2 = 10 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 0$.

Với $x = 2$ thì $y = -2$; với $x = 0$ thì $y = 4$. Kiểm tra: $C_1(2;-2)$ và $C_2(0;4)$ đều có $AC^2 = 10$, $BC^2 = 20$.



Vậy có hai điểm thoả mãn: $C(2;-2)$ hoặc $C(0;4)$. Hai điểm này đối xứng nhau qua A, đúng như hình vẽ gợi ý.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 6. Cho $\vec{u}=(-5;12)$ và $\vec{a}=(m;3)$. Tính $|\vec{u}|$, $|-2\vec{u}|$ và tìm m để $|\vec{a}|=5$.

Bài 7. Cho $A(-2;0)$, $B(4;0)$, $C(1;2)$. Chứng minh tam giác ABC cân. Tính $\cos C$ và cho biết tam giác ABC nhọn, vuông hay tù. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 8. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC với $A(5;5)$, $B(-2;4)$, $C(7;1)$. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 9. (**Vận dụng**) Cho $A(1;2)$, $B(4;4)$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Dạng 3. Hai vectơ cùng phương – Ba điểm thẳng hàng

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $\vec{v}=(x';y')$ cùng phương với $\vec{u}=(x;y)\neq\vec{0}\Leftrightarrow$ có số k sao cho $\vec{v}=k\vec{u}\Leftrightarrow xy'-x'y=0$. Khi $\vec{v}=k\vec{u}$: cùng hướng nếu $k>0$, ngược hướng nếu $k<0$.
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Nếu $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$ thì: $k<0$ khi A nằm giữa B và C; $0<k<1$ khi C nằm giữa A và B; $k>1$ khi B nằm giữa A và C.
- Giao điểm của hai đường thẳng AB và CD: gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AI}=t\,\overrightarrow{AB}$, rồi dùng điều kiện C, D, I thẳng hàng để tìm t.

Sai lầm thường gặp: viết $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}$ khi có toạ độ bằng 0; kết luận "cùng hướng" chỉ vì hai vectơ cùng phương.

▶ **Ví dụ 8.** Tìm m để $\vec{a}=(2;-3)$ và $\vec{b}=(m;6)$ cùng phương. Khi đó hai vectơ cùng hướng hay ngược hướng?

Lời giải

Vì $\vec{a}\neq\vec{0}$ nên $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b}=k\vec{a}$, tức là $m=2k$ và $6=-3k$.

Từ $6=-3k$ suy ra $k=-2$, do đó $m=-4$.

Khi đó $\vec{b}=(-4;6)=-2\vec{a}$; vì $-2<0$ nên $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

Vậy $m=-4$ và hai vectơ ngược hướng.

▶ **Ví dụ 9.** Chứng minh ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(7;4)$ thẳng hàng. Trong ba điểm đó, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{AC} = (6;3) = 3\overrightarrow{AB}$. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương và có chung điểm đầu A nên A, B, C thẳng hàng.

Vì $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ với $3 > 0$ nên B, C nằm cùng phía đối với A; lại có $AC = 3AB > AB$ nên B nằm giữa A và C.

Vậy A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A và C.

▶ **Ví dụ 10.** Cho $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(m;-4)$. Tìm m để A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (3;-2) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} = (m+1;-6)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có số k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, tức là $m+1 = 3k$ và $-6 = -2k$.

Từ $-6 = -2k$ suy ra $k = 3$, do đó $m + 1 = 9$, tức là $m = 8$.

Vậy $m = 8$.

▶ **Ví dụ 11.** (**Vận dụng**) Cho bốn điểm $A(-1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;5)$, $D(1;4)$. Tìm toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng AB và CD.

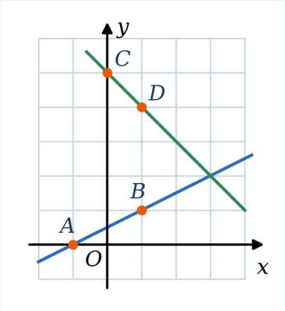
Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{CD} = (1;-1)$. Vì $2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$ nên hai vectơ này không cùng phương: hai đường thẳng AB, CD cắt nhau.

I thuộc đường thẳng AB nên $\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AB} = (2t;t)$ với một số t nào đó, tức là $I(-1+2t;t)$.

I thuộc đường thẳng CD nên $\overrightarrow{CI} = (-1+2t;t-5)$ cùng phương với $\overrightarrow{CD} = (1;-1)$: $(-1+2t)\cdot(-1) - (t-5)\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Do đó $I(3;2)$. Kiểm tra: $\overrightarrow{CI} = (3;-3) = 3\overrightarrow{CD}$.



Vậy $I(3;2)$. Vì $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ nên B là trung điểm của AI; giao điểm nằm ngoài cả hai đoạn AB và CD.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 10. Tìm m để $\vec{u} = (m;2)$ và $\vec{v} = (8;m)$ cùng phương. Với mỗi giá trị tìm được, cho biết hai vectơ cùng hướng hay ngược hướng.

Bài 11. Cho $A(1;-2)$, $B(3;2)$. Tìm điểm C trên trục tung sao cho A, B, C thẳng hàng.

Bài 12. (**Vận dụng**) Cho $A(1;1)$, $B(m;3)$, $C(9;m)$. Tìm m để A, B, C thẳng hàng. Với mỗi giá trị của m, cho biết điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại.

Bài 13. (**Vận dụng cao**) Cho $A(3;1)$, $B(5;2)$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Dạng 4. Trung điểm, trọng tâm, đỉnh hình bình hành

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Áp dụng công thức trung điểm, trọng tâm. Bài toán ngược: $x_B = 2x_I - x_A$, $x_C = 3x_G - x_A - x_B$ (tương tự cho tung độ).
- Hình bình hành $ABCD$: kiểm tra A, B, C không thẳng hàng rồi dùng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (chú ý **thứ tự** các đỉnh), hoặc dùng tính chất hai đường chéo AC, BD có chung trung điểm.
- Đề bài chỉ nói "bốn đỉnh của một hình bình hành" (không nêu thứ tự) thì phải xét **ba** trường hợp đường chéo.
- Biết ba trung điểm M, N, P của BC, CA, AB: $APMN$ là hình bình hành nên $x_A = x_N + x_P - x_M$, $y_A = y_N + y_P - y_M$ (tương tự cho B, C).

▶ **Ví dụ 12.** Cho $A(2;4)$, $B(-4;1)$, $C(5;-2)$. Tìm toạ độ trung điểm I của AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Trung điểm I của AB: $x_I = \frac{2+(-4)}{2} = -1$, $y_I = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$.

Trọng tâm G: $x_G = \frac{2+(-4)+5}{3} = 1$, $y_G = \frac{4+1+(-2)}{3} = 1$.

Vậy $I\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ và $G(1;1)$.

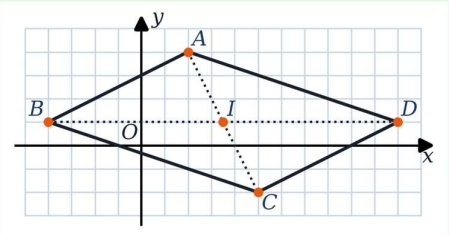
▶ **Ví dụ 13.** Với A, B, C như ở Ví dụ 12, tìm toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành và tìm tâm của hình bình hành đó.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (-6;-3)$ và $\overrightarrow{AC} = (3;-6)$ không cùng phương (vì $(-6)\cdot(-6) - 3\cdot(-3) = 45 \neq 0$) nên A, B, C không thẳng hàng.

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (9;-3) \Leftrightarrow x_D - 2 = 9$ và $y_D - 4 = -3 \Leftrightarrow D(11;1)$.

Tâm I của hình bình hành là trung điểm của đường chéo AC: $I\left(\frac{2+5}{2};\frac{4+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{7}{2};1\right)$; đây cũng là trung điểm của BD.



Vậy $D(11;1)$ và tâm hình bình hành là $I\left(\frac{7}{2};1\right)$.

▶ **Ví dụ 14.** Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với $A(2;4)$ qua điểm $B(-4;1)$.

Lời giải

A' đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của AA'.

Do đó $x_{A'} = 2x_B - x_A = 2\cdot(-4) - 2 = -10$ và $y_{A'} = 2y_B - y_A = 2\cdot 1 - 4 = -2$.

Vậy $A'(-10;-2)$.

▶ **Ví dụ 15.** (**Vận dụng**) Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(5;2)$, $C(2;4)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình bình hành.

Lời giải

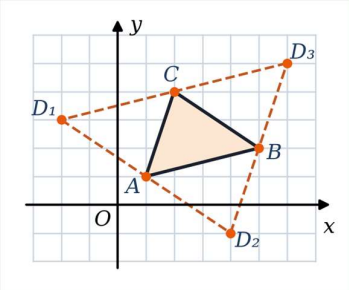
$\overrightarrow{AB} = (4;1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;3)$ và $4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 11 \neq 0$ nên A, B, C không thẳng hàng.

Vì đề bài không nêu thứ tự các đỉnh, ta xét xem đỉnh nào đối diện với D, tức là đoạn nào là đường chéo không chứa D.

– Đường chéo AC (hình bình hành $ABCD$): $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-3;2)$, suy ra $D_1(-2;3)$.

– Đường chéo AB (hình bình hành $ACBD$): $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} = (3;-2)$, suy ra $D_2(4;-1)$.

– Đường chéo BC (hình bình hành $ABDC$): $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} = (1;3)$, suy ra $D_3(6;5)$.



Vậy có ba điểm thoả mãn: $D(-2;3)$, $D(4;-1)$, $D(6;5)$.

Nhận xét. A, B, C lần lượt là trung điểm của D_1D_2, D_2D_3, D_3D_1: tam giác ABC là tam giác trung bình của tam giác $D_1D_2D_3$.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 14. Cho $A(3;-1)$, $B(-1;5)$, $C(4;2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của BC, trọng tâm G của tam giác ABC và đỉnh D của hình bình hành $ABCD$.

Bài 15. (**Vận dụng**) Tam giác ABC có $M(1;2)$, $N(3;-1)$, $P(-2;4)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Bài 16. (**Vận dụng**) Tam giác ABC có $A(1;5)$, trọng tâm $G(2;1)$; đỉnh B nằm trên trục hoành, đỉnh C nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm toạ độ B và C.

Bài 17. (**Vận dụng**) Hình bình hành $ABCD$ có $A(2;3)$, $C(4;-1)$; đỉnh B nằm trên trục hoành, đỉnh D nằm trên trục tung. Tìm toạ độ B, D và tính chu vi hình bình hành.

Dạng 5. Bài toán thực tế: chuyển động, lực, chia đoạn thẳng

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chuyển động thẳng đều xuất phát từ A với vectơ vận tốc $\vec{v}$: vị trí sau thời gian t là điểm M với $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}$; tốc độ bằng $|\vec{v}|$. Hai vật gặp nhau khi tại **cùng một thời điểm** chúng có cùng toạ độ.
- Hợp lực bằng tổng các lực (cộng theo toạ độ). Vật cân bằng khi tổng các lực bằng $\vec{0}$. Lực có hướng đã biết theo vectơ $\vec{u}$ được viết là $a\vec{u}$ với $a > 0$; độ lớn của lực là $a|\vec{u}|$.
- Điểm M thuộc đoạn AB với $AM = t \cdot AB$ $(0 \le t \le 1)$: $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Chú ý đơn vị: đổi đơn vị trên trục (km, hải lí, m) và đơn vị thời gian trước khi kết luận; tốc độ là **độ dài** của vectơ vận tốc, không phải tổng hai toạ độ.

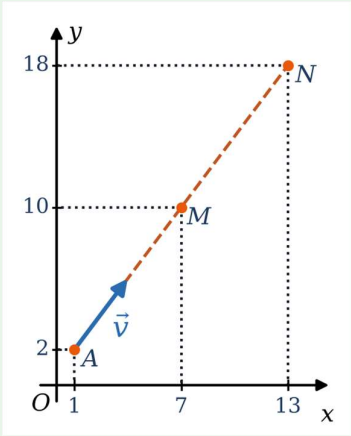
▶ **Ví dụ 16.** Một ca nô xuất phát từ $A(1;2)$, chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc $\vec{v}=(3;4)$ (đơn vị độ dài trên các trục: km; vận tốc: km/h).

a) Tìm vị trí của ca nô sau 2 giờ và tốc độ của ca nô.

b) Sau bao lâu ca nô tới điểm có hoành độ bằng 13?

Lời giải

Sau t giờ, ca nô ở điểm M với $\overrightarrow{AM}=t\vec{v}=(3t;4t)$, tức là $M(1+3t;2+4t)$.



a) Với $t=2$: $M(7;10)$. Tốc độ của ca nô: $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (km/h).

b) Hoành độ bằng 13 $\Leftrightarrow 1+3t=13\Leftrightarrow t=4$; khi đó tung độ là $2+4\cdot 4=18$. Vậy sau 4 giờ ca nô tới điểm $N(13;18)$.

▶ **Ví dụ 17.** Cho $A(-1;3)$, $B(5;-3)$. Tìm điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$.

Lời giải

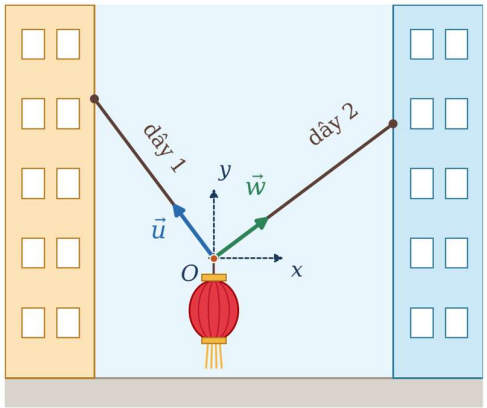
M thuộc đoạn AB nên $AB=MA+MB=3MB$, suy ra $AM=\frac{2}{3}AB$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=(6;-6)$ nên $\overrightarrow{AM}=(4;-4)$, suy ra $M(-1+4;3-4)=(3;-1)$.

Kiểm tra: $MA=|(-4;4)|=4\sqrt{2}$ và $MB=|(2;-2)|=2\sqrt{2}$, đúng là $MA=2MB$.

Vậy $M(3;-1)$.

▶ **Ví dụ 18.** (**Vận dụng**) Một chiếc đèn lồng trang trí nặng 60 N được treo tại điểm O nhờ hai sợi dây buộc vào tường của hai toà nhà (hình vẽ). Chọn hệ trục Oxy có Ox nằm ngang, Oy hướng thẳng đứng lên trên. Dây thứ nhất kéo điểm O theo hướng của vectơ $\vec{u}=(-3;4)$, dây thứ hai kéo theo hướng của vectơ $\vec{w}=(4;3)$. Tính lực căng của mỗi sợi dây, biết hệ đứng yên.



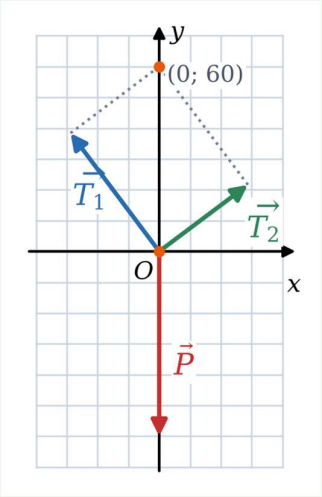
Lời giải

Trọng lực tác dụng lên đèn: $\vec{P} = (0; -60)$. Lực căng $\overrightarrow{T_1}$ cùng hướng với $\vec{u}$ nên $\overrightarrow{T_1} = a\vec{u} = (-3a; 4a)$ với $a > 0$; tương tự $\overrightarrow{T_2} = b\vec{w} = (4b; 3b)$ với $b > 0$.

Hệ đứng yên nên $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$, tức là $\begin{cases} -3a + 4b = 0 \\ 4a + 3b - 60 = 0 \end{cases}$.

Từ phương trình đầu, $a = \frac{4b}{3}$. Thay vào phương trình sau: $\frac{16}{3} + 3b = 60 \Leftrightarrow \frac{25b}{3} = 60 \Leftrightarrow b = 7{,}2$, suy ra $a = 9{,}6$.

Độ lớn lực căng: $\left|\overrightarrow{T_1}\right| = a|\vec{u}| = 9{,}6 \cdot 5 = 48$ (N) và $\left|\overrightarrow{T_2}\right| = b|\vec{w}| = 7{,}2 \cdot 5 = 36$ (N).



Vậy lực căng của dây thứ nhất là 48 N, của dây thứ hai là 36 N.

Nhận xét. $48 + 36 = 84 > 60$: tổng hai lực căng lớn hơn trọng lượng đèn. Dây càng gần phương nằm ngang thì lực căng càng lớn, vì thế không nên căng dây treo gần như nằm ngang.

▶ **Ví dụ 19.** (**Giải câu chuyện mở đầu**) Tàu trôi thẳng đều, lúc 6 giờ ở $A(2; 1)$, lúc 8 giờ ở $B(6; 4)$; mỗi đơn vị dài trên màn hình ứng với 10 km. Tàu ở đâu lúc 11 giờ và trôi với tốc độ bao nhiêu?

Lời giải

Trong 2 giờ (từ 6 giờ đến 8 giờ), tàu dịch chuyển theo $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$, nên mỗi giờ tàu dịch chuyển theo vectơ $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2; 1{,}5)$.

Lúc 11 giờ ($t = 5$ giờ kể từ 6 giờ), vị trí M của tàu thoả mãn $\overrightarrow{AM} = 5\vec{v} = (10; 7{,}5)$, nên $M(12; 8{,}5)$.

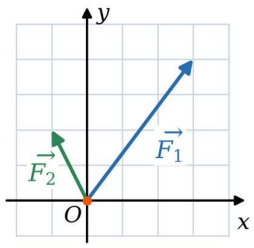
Tốc độ: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ (đơn vị dài mỗi giờ), tức là $2{,}5 \cdot 10 = 25$ (km/h).

Vậy lúc 11 giờ tàu ở vị trí $M(12; 8{,}5)$ và trôi với tốc độ **25 km/h**.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 18. Một tuyến cáp quang thẳng nối hai trạm $A(-2; 1)$ và $B(10; 7)$ (đơn vị trên các trục: km). Người ta đặt hai bộ khuếch đại tín hiệu M, N chia đoạn AB thành ba đoạn bằng nhau (M gần A hơn). Tìm toạ độ M, N và độ dài mỗi đoạn (làm tròn đến hàng phần trăm).

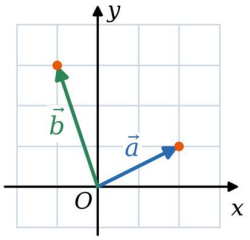
Bài 19. Một chất điểm O chịu tác dụng của hai lực $\overrightarrow{F_1} = (3;4)$ và $\overrightarrow{F_2} = (-1;2)$ (đơn vị: N). Tính độ lớn của hợp lực và tìm lực $\overrightarrow{F_3}$ cần thêm vào để chất điểm cân bằng.



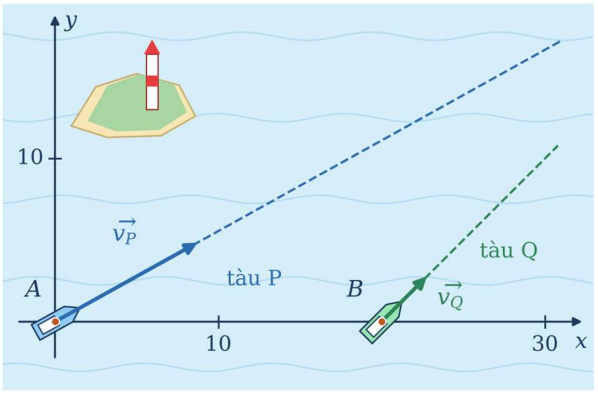
Bài 20. (**Vận dụng**) Một robot hút bụi xuất phát từ gốc O. Mỗi lệnh "A" đưa robot dịch chuyển theo vectơ $\vec{a} = (2;1)$, mỗi lệnh "B" đưa robot dịch chuyển theo vectơ $\vec{b} = (-1;3)$ (hình vẽ).

a) Sau 3 lệnh "A" và 2 lệnh "B", robot ở vị trí nào?

b) Cần bao nhiêu lệnh mỗi loại để robot tới điểm $(5;13)$?



Bài 21. (**Vận dụng cao**) Trên màn hình radar của một trạm kiểm soát hàng hải (đơn vị trên các trục: hải lí), lúc 6 giờ tàu P ở $A(0;0)$, tàu Q ở $B(20;0)$. Hai tàu chuyển động thẳng đều với các vectơ vận tốc $\overrightarrow{v_P} = (9;5)$ và $\overrightarrow{v_Q} = (3;3)$ (đơn vị: hải lí/giờ).



a) Viết toạ độ vị trí của mỗi tàu sau t giờ.

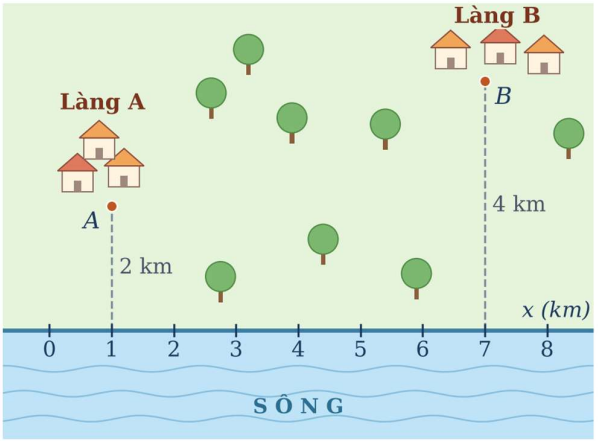
b) Tìm thời điểm hai tàu gần nhau nhất và khoảng cách nhỏ nhất đó (làm tròn đến hàng phần trăm).

c) Hệ thống phát cảnh báo khi hai tàu cách nhau dưới 5 hải lí. Hệ thống có phát cảnh báo không?

★ BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Những bài toán giàu ý tưởng, gắn với thực tiễn hoặc đòi hỏi tổng hợp nhiều kiến thức của bài. Hãy tự suy nghĩ trước khi xem lời giải ở phần Hướng dẫn giải.

Điểm nhấn 1. Trạm bơm bên bờ sông. Hai làng A và B nằm cùng phía một con sông thẳng. Chọn hệ trục Oxy có trục Ox là bờ sông, đơn vị trên các trục là kilômét; khi đó $A(1;2)$ và $B(7;4)$. Người ta xây một trạm bơm tại điểm M trên bờ sông rồi đặt hai đường ống thẳng MA, MB dẫn nước về hai làng.



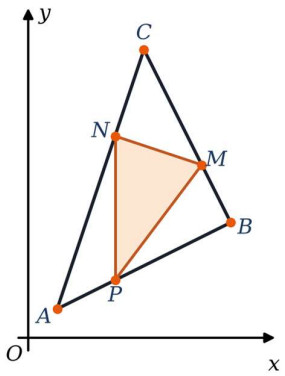
a) Nếu đặt trạm bơm tại điểm P trên bờ sông cách đều hai làng thì tổng chiều dài đường ống $PA + PB$ là bao nhiêu?

b) Tìm vị trí M trên bờ sông sao cho tổng chiều dài đường ống $MA + MB$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

c) Chi phí làm đường ống là 500 triệu đồng mỗi kilômét. Chọn vị trí ở câu b thay cho vị trí ở câu a thì tiết kiệm được khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

> ***Gợi ý***
> Câu b: lấy điểm A' đối xứng với A qua bờ sông thì $MA = MA'$ với mọi M trên bờ. Khi nào tổng $MA' + MB$ nhỏ nhất?

Điểm nhấn 2. Hai tam giác chung trọng tâm. Cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(7;4)$, $C(4;10)$. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



a) Tìm toạ độ các điểm M, N, P.

b) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

c) Thay số $\frac{1}{3}$ bởi số k tuỳ ý thuộc khoảng $(0;1)$: $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\,\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB}$. Chứng minh kết luận ở câu b vẫn đúng.

d) Với các điểm M, N ở câu c, tìm k để đường thẳng MN song song với AB.

Gợi ý

Câu c: hai tam giác có cùng trọng tâm khi và chỉ khi tổng toạ độ ba đỉnh của chúng bằng nhau.

Câu d: viết toạ độ $\overrightarrow{MN}$ theo k rồi dùng điều kiện cùng phương.

C LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(Mỗi câu chỉ chọn một phương án.)*

Câu 1. Toạ độ của vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ là

A. $(3;-4)$ **B.** $(-4;3)$ **C.** $(3;4)$ **D.** $(-3;4)$

Câu 2. Cho $\vec{a} = (2;-1)$, $\vec{b} = (-3;4)$. Toạ độ của $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(-1;5)$ **B.** $(5;-5)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(1;-3)$

Câu 3. Cho $\vec{a} = (1;-2)$. Toạ độ của $-3\vec{a}$ là

A. $(-3;6)$ **B.** $(3;6)$ **C.** $(-3;-6)$ **D.** $(3;-6)$

Câu 4. Cho $A(1;2)$, $B(-3;5)$. Toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(4;-3)$ **B.** $(-4;7)$ **C.** $(-2;7)$ **D.** $(-4;3)$

Câu 5. Độ dài của vectơ $\vec{u} = (-6;8)$ là

A. 14 **B.** 10 **C.** 2 **D.** 100

Câu 6. Cho $A(2;-3)$, $B(4;7)$. Trung điểm của AB là

A. $(-1;-5)$ **B.** $(6;4)$ **C.** $(1;5)$ **D.** $(3;2)$

Câu 7. Cho $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(4;-1)$. Trọng tâm tam giác ABC là

A. $(1;2)$ **B.** $(3;6)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(2;1)$

Câu 8. Hai vectơ $\vec{u} = (2;m)$ và $\vec{v} = (-4;6)$ cùng phương khi

A. $m = 3$ **B.** $m = -3$ **C.** $m = 12$ **D.** $m = -12$

Câu 9. Khoảng cách giữa hai điểm $A(-1;2)$ và $B(2;6)$ là

A. 7 **B.** 25 **C.** $\sqrt{7}$ **D.** 5

Câu 10. Cho $A(1;0)$, $B(3;2)$, $C(4;5)$. Toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(6;7)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(0;-3)$ **D.** $(2;-3)$

Câu 11. Cho $\vec{u} = (x+1;4)$, $\vec{v} = (3;2y)$. Nếu $\vec{u} = \vec{v}$ thì $x + y$ bằng

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Câu 12. Một vật xuất phát từ $A(0;1)$ chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc $\vec{v} = (2;3)$ (đơn vị độ dài: m; vận tốc: m/s). Sau 3 giây vật ở điểm

A. $(2;4)$ **B.** $(6;9)$ **C.** $(6;10)$ **D.** $(6;12)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai *(Ở mỗi ý a), b), c), d) chọn Đúng hoặc Sai.)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (1; 2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lvert\vec{a}\rvert = 7$.	☐	☐
b)	$\vec{a} + 2\vec{b} = (5; 0)$.	☐	☐
c)	$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.	☐	☐
d)	Vectơ $(-6; 8)$ ngược hướng với $\vec{a}$.	☐	☐

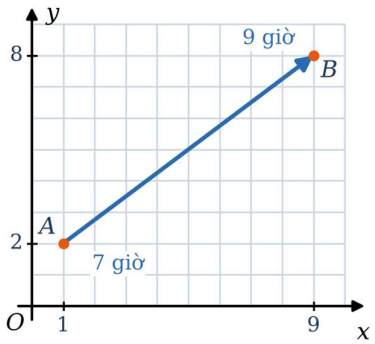
Câu 2. Cho $A(1; 2)$, $B(3; 6)$, $C(5; 2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BA} = (2; 4)$.	☐	☐
b)	Tam giác ABC cân tại B.	☐	☐
c)	Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(3; \frac{10}{3}\right)$.	☐	☐
d)	$ABCD$ là hình bình hành khi $D(7; 6)$.	☐	☐

Câu 3. Cho $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$ và $M(m; 7)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} = (3; 2)$.	☐	☐
b)	A, B, M thẳng hàng khi $m = 7$.	☐	☐
c)	Khi $m = 7$, B là trung điểm của AM.	☐	☐
d)	Khi $m = 7$, $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.	☐	☐

Câu 4. Một ca nô chuyển động thẳng đều, lúc 7 giờ ở $A(1; 2)$, lúc 9 giờ ở $B(9; 8)$ (đơn vị độ dài trên các trục: km).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Vectơ vận tốc (dịch chuyển mỗi giờ) của ca nô là $\vec{v} = (4; 3)$.	☐	☐
b)	Tốc độ của ca nô là 10 km/h.	☐	☐
c)	Lúc 10 giờ ca nô ở điểm $(13; 11)$.	☐	☐
d)	Ca nô đến điểm $C(17; 14)$ lúc 12 giờ.	☐	☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{a} = (1; -1)$, $\vec{b} = (2; 3)$, $\vec{c} = (7; 3)$. Biết $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, tính $m + n$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Tìm m để $\vec{a} = (m; -2)$ và $\vec{b} = (3; 6)$ cùng phương.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. Cho $A(2; 5)$, $B(-1; 1)$, $C(5; 0)$. Gọi $G(a; b)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tính $a + b$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Cho $A(2; 3)$, $B(-1; -1)$. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Tính độ dài đoạn thẳng AC.

Đáp số: ☐☐☐☐

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 10. VECTƠ TRONG MP TOẠ ĐỘ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, toạ độ của vectơ đơn vị $\vec{j}$ là

A. $(0;0)$ **B.** $(1;0)$ **C.** $(1;1)$ **D.** $(0;1)$

Câu 2. Vectơ $\vec{u}=(-2;5)$ được viết là

A. $5\vec{\imath}-2\vec{j}$ **B.** $-2\vec{\imath}+5\vec{j}$ **C.** $-2\vec{\imath}-5\vec{j}$ **D.** $2\vec{\imath}+5\vec{j}$

Câu 3. Cho điểm $M(3;-7)$. Toạ độ của $\overrightarrow{OM}$ là

A. $(3;-7)$ **B.** $(-3;7)$ **C.** $(7;-3)$ **D.** $(-7;3)$

Câu 4. Cho $\vec{a}=(4;-2)$, $\vec{b}=(1;3)$. Toạ độ của $2\vec{a}-\vec{b}$ là

A. $(7;-1)$ **B.** $(9;-1)$ **C.** $(7;-7)$ **D.** $(3;-5)$

Câu 5. Cho $A(2;-1)$, $B(-1;3)$. Độ dài AB bằng

A. 25 **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 5 **D.** 3

Câu 6. Vectơ nào cùng phương với $\vec{a}=(1;-3)$?

A. $(3;1)$ **B.** $(-2;6)$ **C.** $(2;6)$ **D.** $(-1;-3)$

Câu 7. Cho $A(5;3)$, $B(-1;-7)$. Trung điểm của đoạn AB là

A. $(6;10)$ **B.** $(3;5)$ **C.** $(4;-4)$ **D.** $(2;-2)$

Câu 8. Cho $A(0;2)$, $B(3;-1)$, $C(6;5)$. Trọng tâm tam giác ABC là

A. $(2;3)$ **B.** $(9;6)$ **C.** $(3;2)$ **D.** $(3;3)$

Câu 9. Cho $\vec{u}=(x-2;3)$, $\vec{v}=(1;y+4)$. Nếu $\vec{u}=\vec{v}$ thì $x+y$ bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 0

Câu 10. Cho $A(1;2)$, $B(3;-2)$. Điểm đối xứng với A qua B là

A. $(2;0)$ **B.** $(5;-6)$ **C.** $(-1;6)$ **D.** $(4;0)$

Câu 11. Cho $A(-1;4)$, $B(5;1)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM=2MB$ có toạ độ là

A. $(11;-2)$ **B.** $(1;3)$ **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$ **D.** $(3;2)$

Câu 12. Hai lực $\overrightarrow{F_1}=(2;3)$, $\overrightarrow{F_2}=(4;5)$ (đơn vị: N) cùng tác dụng vào một vật. Độ lớn của hợp lực là

A. 10 N **B.** 14 N **C.** 7 N **D.** 100 N

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (2;-1)$, $\vec{b} = (1;3)$, $\vec{c} = (7;0)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} + \vec{b} = (3;2)$.	☐	☐
b)	$\lvert\vec{b}\rvert = 10$.	☐	☐
c)	$\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$.	☐	☐
d)	Vectơ $\vec{u} = (-6;3)$ cùng hướng với $\vec{a}$.	☐	☐

Câu 2. Cho $A(-1;1)$, $B(2;5)$, $C(10;-1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AB = 5$.	☐	☐
b)	Tam giác ABC cân tại B.	☐	☐
c)	Tam giác ABC vuông tại B.	☐	☐
d)	Diện tích tam giác ABC bằng 25.	☐	☐

Câu 3. Cho $A(1;2)$, $B(-2;-4)$, $C(m;6)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} = (-3;-6)$.	☐	☐
b)	A, B, C thẳng hàng khi $m = 3$.	☐	☐
c)	Khi $m = 3$, A là trung điểm của BC.	☐	☐
d)	Khi $m = 3$, A nằm giữa B và C.	☐	☐

Câu 4. Trên mặt phẳng toạ độ (đơn vị độ dài: trăm mét), một drone giao hàng xuất phát từ $O(0;0)$, bay 2 phút với vận tốc $\overrightarrow{v_1} = (3;4)$ rồi đổi hướng, bay tiếp 3 phút với vận tốc $\overrightarrow{v_2} = (-4;3)$ (đơn vị vận tốc: trăm mét/phút). Gọi B là vị trí của drone khi kết thúc chuyến bay.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Sau 2 phút đầu, drone ở điểm $A(6;8)$.	☐	☐
b)	Quãng đường drone bay trong 2 phút đầu là 1000 m.	☐	☐
c)	$B(-6;17)$.	☐	☐
d)	Khoảng cách từ B đến O nhỏ hơn 1500 m.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3;-4)$. Tính $\lvert-2\vec{a}\rvert$.

Đáp số: | | | | |

Câu 2. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;5)$ và $B(3;-3)$ cắt trục hoành tại điểm $M(x;0)$. Tìm x.

Đáp số:

Câu 3. Cho $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(6;5)$. Điểm $M(x;y)$ thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính $x+y$.

Đáp số:

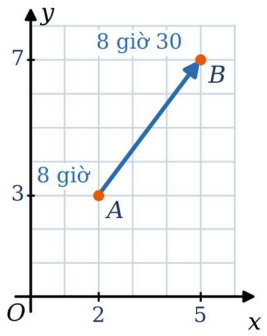
Câu 4. Tính chu vi tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(7;1)$.

Đáp số:

Câu 5. Cho $A(1;1)$, $B(4;5)$ và điểm $C(c;1)$ với $c>1$. Tìm c để tam giác ABC cân tại A.

Đáp số:

Câu 6. Trên màn hình radar (mỗi đơn vị dài ứng với 4 km), một tàu tuần tra chạy thẳng đều: lúc 8 giờ tàu ở $A(2;3)$, lúc 8 giờ 30 phút tàu ở $B(5;7)$. Tốc độ của tàu là bao nhiêu kilômét/giờ?



Đáp số:

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho $A(1;4)$, $B(-2;-2)$, $C(4;1)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm trọng tâm G của tam giác.

b) Tìm toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

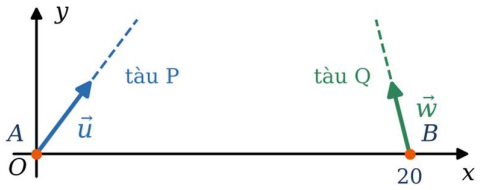
c) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

Bài 2. (**Vận dụng**) Lúc 7 giờ, tàu P rời cảng $A(0;0)$ với vận tốc $\vec{u}=(3;4)$; cùng lúc đó tàu Q rời cảng $B(20;0)$ với vận tốc $\vec{w}=(-1;4)$ (đơn vị độ dài: km; vận tốc: km/h). Cả hai tàu chuyển động thẳng đều.

a) Tìm vị trí hai tàu sau 2 giờ và khoảng cách giữa chúng khi đó.

b) Hai tàu có gặp nhau không? Nếu có, tìm thời điểm và vị trí gặp nhau.

c) Tàu nào chạy nhanh hơn?



— HẾT —

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 10. VECTƠ TRONG MP TOẠ ĐỘ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Toạ độ của vecto $\vec{a} = -4\vec{j}$ là

A. $(0;-4)$ **B.** $(-4;0)$ **C.** $(-4;-4)$ **D.** $(4;0)$

Câu 2. Hai vecto $\vec{u} = (x;y)$ và $\vec{v} = (x';y')$ bằng nhau khi và chỉ khi

A. $x = x'$ và $y = y'$ **B.** $x = y'$ và $y = x'$

C. $x + y = x' + y'$ **D.** $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$

Câu 3. Cho $\vec{a} = (-1;3)$, $\vec{b} = (2;-5)$. Toạ độ của $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(-3;8)$ **B.** $(1;-2)$ **C.** $(1;8)$ **D.** $(-1;2)$

Câu 4. Cho điểm $M(-4;3)$. Độ dài OM bằng

A. 1 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 25

Câu 5. Cho $A(3;-2)$, $B(-1;4)$. Toạ độ của $\overrightarrow{BA}$ là

A. $(-4;-6)$ **B.** $(-4;6)$ **C.** $(2;2)$ **D.** $(4;-6)$

Câu 6. Vectơ nào cùng hướng với $\vec{a} = (3;-2)$?

A. $(3;2)$ **B.** $(-6;4)$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(6;-4)$

Câu 7. Cho $A(4;1)$, $B(-2;5)$, $C(1;-3)$. Trọng tâm tam giác ABC là

A. $(3;3)$ **B.** $(1;1)$ **C.** $(-1;1)$ **D.** $(1;3)$

Câu 8. Cho $A(3;1)$ và trung điểm của AB là $I(1;-2)$. Toạ độ điểm B là

A. $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(5;4)$ **C.** $(-1;-5)$ **D.** $(-5;-1)$

Câu 9. Ba điểm $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(m;8)$ thẳng hàng khi

A. $m = 8$ **B.** $m = 6$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Câu 10. Hai vecto $\vec{u} = (m;-3)$ và $\vec{v} = (2;1)$ cùng phương khi

A. $m = -\frac{3}{2}$ **B.** $m = 6$ **C.** $m = -6$ **D.** $m = \frac{3}{2}$

Câu 11. Vectơ $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{a} = (3;-4)$ và có độ dài bằng 10 là

A. $(6;-8)$ **B.** $(-6;8)$ **C.** $(-3;4)$ **D.** $(8;-6)$

Câu 12. Một vật chuyển động thẳng đều trên mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên các trục: mét). Lúc bắt đầu quan sát, vật ở $A(1;2)$; sau 2 giây vật ở $B(7;10)$. Tốc độ của vật là

A. 5 m/s **B.** 10 m/s **C.** 7 m/s **D.** 14 m/s

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (3;-1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$2\vec{a} + \vec{b} = (5;3)$.	☐	☐
b)	$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\| = \sqrt{5}$.	☐	☐
c)	$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.	☐	☐
d)	Vecto $\vec{c} = (-1;5)$ phân tích được thành $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.	☐	☐

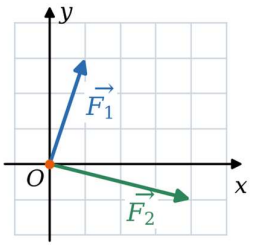
Câu 2. Cho $A(-3;2)$, $B(1;5)$, $C(4;1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AB = BC$.	☐	☐
b)	Tam giác ABC vuông tại B.	☐	☐
c)	Với $D(0;-2)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông.	☐	☐
d)	Với $D(0;-2)$, hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.	☐	☐

Câu 3. Cho $A(2;3)$, $B(-1;-3)$ và điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BA} = (-3;-6)$.	☐	☐
b)	$M(0;-1)$.	☐	☐
c)	M là giao điểm của đường thẳng AB với trục tung.	☐	☐
d)	Đường thẳng AB cắt trục hoành tại $N(1;0)$.	☐	☐

Câu 4. Một chất điểm O ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1} = (1;3)$, $\overrightarrow{F_2} = (4;-1)$ và $\overrightarrow{F_3}$ (đơn vị: N).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (5;2)$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{F_3} = (5;2)$.	☐	☐
c)	Độ lớn của $\overrightarrow{F_3}$ bằng 7 N.	☐	☐
d)	Độ lớn hợp lực của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ nhỏ hơn $\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2}\right\|$.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho $A(-2;3)$, $B(4;-5)$. Tính độ dài AB.

Đáp số: | | | | |

Câu 2. Cho $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4)$. Tính $\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp số: | | | | |

Câu 3. Hình bình hành $ABCD$ có $A(1;2)$, $B(5;3)$ và tâm $I(4;6)$. Biết $D(a;b)$, tính $a+b$.

Đáp số: | | | | |

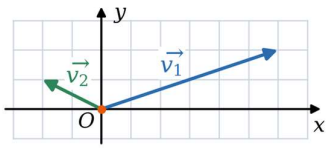
Câu 4. Tìm m để $\vec{u}=(m;4)$ và $\vec{v}=(9;m)$ cùng hướng.

Đáp số: | | | | |

Câu 5. Cho $A(1;1)$, $B(7;9)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc đoạn AB sao cho $AM=4$. Tính $x+y$.

Đáp số: | | | | |

Câu 6. Một thuyền máy xuất phát từ $O(0;0)$. Vận tốc riêng của thuyền (khi nước đứng yên) là $\overrightarrow{v_1}=(6;2)$, vận tốc của dòng nước là $\overrightarrow{v_2}=(-2;1)$ (đơn vị vận tốc: km/h; đơn vị độ dài trên các trục: km). Sau 2 giờ, thuyền cách O bao nhiêu kilômét?



Đáp số: | | | | |

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

Bài 1. Cho $A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(-1;4)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A và tính diện tích của nó.

b) Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

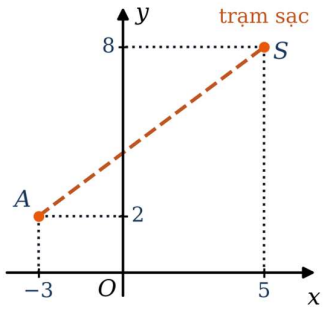
c) Tìm toạ độ điểm E sao cho A là trọng tâm của tam giác BCE.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một xe tự hành ở vị trí $A(-3;2)$ cần chạy thẳng về trạm sạc $S(5;8)$ với tốc độ không đổi 20 km/h (đơn vị độ dài trên các trục: km).

a) Tính quãng đường và thời gian xe chạy về tới trạm.

b) Tìm vị trí của xe sau 12 phút kể từ lúc xuất phát.

c) Trên đường đi, sau bao nhiêu phút kể từ lúc xuất phát thì xe đi qua điểm có tung độ bằng 5? Tìm toạ độ của điểm đó.



— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BÀI 10. VECTƠ TRONG MP TOẠ ĐỘ · Mỗi bài gồm đề và lời giải ngay bên dưới

B LỜI GIẢI BÀI TẬP CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Toạ độ vectơ, toạ độ điểm và các phép toán

Bài 1. Cho $\vec{a}=(3;-1)$, $\vec{b}=(-2;4)$. Tìm toạ độ các vectơ $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

$2\vec{a}=(6;-2)$ nên $2\vec{a}+\vec{b}=(6-2;-2+4)=(4;2)$.

$3\vec{b}=(-6;12)$ nên $\vec{a}-3\vec{b}=(3-(-6);-1-12)=(9;-13)$.

$-\frac{1}{2}\vec{b}=\left(-\frac{1}{2}\cdot(-2);-\frac{1}{2}\cdot 4\right)=(1;-2)$.

Vậy $2\vec{a}+\vec{b}=(4;2)$, $\vec{a}-3\vec{b}=(9;-13)$, $-\frac{1}{2}\vec{b}=(1;-2)$.

Bài 2. Tìm toạ độ các điểm M, N, biết $\overrightarrow{OM}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ và $\overrightarrow{ON}=-2\vec{\jmath}$. Từ đó tìm toạ độ của $\overrightarrow{MN}$ và tính độ dài MN.

Lời giải

Toạ độ của một điểm là toạ độ của vectơ nối gốc O với điểm đó.

$\overrightarrow{OM}=(3;-1)$ nên $M(3;-1)$; $\overrightarrow{ON}=0\vec{\imath}+(-2)\vec{\jmath}=(0;-2)$ nên $N(0;-2)$.

$\overrightarrow{MN}=\big(0-3;-2-(-1)\big)=(-3;-1)$, do đó $MN=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

Vậy $M(3;-1)$, $N(0;-2)$, $\overrightarrow{MN}=(-3;-1)$ và $MN=\sqrt{10}$.

Bài 3. Cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(-1;3)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{x}$ thoả mãn $2\vec{x}-\vec{a}=3\big(\vec{b}+\vec{x}\big)$.

Lời giải

Biến đổi như với đẳng thức số: $2\vec{x}-\vec{a}=3\vec{b}+3\vec{x}\Leftrightarrow\vec{x}=-\vec{a}-3\vec{b}$.

$3\vec{b}=(-3;9)$ nên $\vec{x}=(-2-(-3);-1-9)=(1;-10)$.

Thử lại: $2\vec{x}-\vec{a}=(2-2;-20-1)=(0;-21)$ và $3\big(\vec{b}+\vec{x}\big)=3(0;-7)=(0;-21)$.

Vậy $\vec{x}=(1;-10)$.

Bài 4. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC với $A(2;1)$, $B(-1;3)$, $C(4;-2)$. Tìm toạ độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Chứng minh B là trung điểm của đoạn CD.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(-3;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-3)$ nên $2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(-6-2;4+3)=(-8;7)$.

Gọi $D(x;y)$ thì $\overrightarrow{AD}=(x-2;y-1)$. Từ $x-2=-8$ và $y-1=7$ suy ra $D(-6;8)$.

Trung điểm của CD là $\left(\frac{4+(-6)}{2};\frac{-2+8}{2}\right)=(-1;3)$, chính là điểm B.

Cách khác (không cần toạ độ): $\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AB}$, đây chính là đẳng thức trung điểm: B là trung điểm của CD.

Vậy $D(-6;8)$ và B là trung điểm của CD.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho $\vec{a}=(2;1)$ và $\vec{b}=(1;1)$.

a) Biểu diễn mỗi vectơ $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Chứng minh mọi vectơ $\vec{u}=(x;y)$ đều biểu diễn được theo $\vec{a}$, $\vec{b}$; viết biểu diễn đó.

c) Áp dụng: phân tích $\vec{c}=(5;-3)$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Lời giải

a) Đặt $\vec{i}=m\vec{a}+n\vec{b}=(2m+n;m+n)$, ta có $2m+n=1$ và $m+n=0$, suy ra $m=1$, $n=-1$. Vậy $\vec{i}=\vec{a}-\vec{b}$.

Đặt $\vec{j}=p\vec{a}+q\vec{b}$, ta có $2p+q=0$ và $p+q=1$, suy ra $p=-1$, $q=2$. Vậy $\vec{j}=-\vec{a}+2\vec{b}$.

b) $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}=x(\vec{a}-\vec{b})+y(-\vec{a}+2\vec{b})=(x-y)\vec{a}+(2y-x)\vec{b}$.

c) Với $x=5$, $y=-3$: $\vec{c}=8\vec{a}-11\vec{b}$. Thử lại: $8(2;1)-11(1;1)=(16-11;8-11)=(5;-3)$.

Vậy $\vec{i}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{j}=-\vec{a}+2\vec{b}$ và $\vec{c}=8\vec{a}-11\vec{b}$. Ý nghĩa: hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ có thể thay cho $\vec{i}$, $\vec{j}$ để biểu diễn mọi vectơ của mặt phẳng.

Dạng 2. Độ dài vectơ – Khoảng cách – Nhận dạng tam giác

Bài 6. Cho $\vec{u}=(-5;12)$ và $\vec{a}=(m;3)$. Tính $|\vec{u}|$, $|-2\vec{u}|$ và tìm m để $|\vec{a}|=5$.

Lời giải

$|\vec{u}|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$.

$-2\vec{u}=(10;-24)$ nên $|-2\vec{u}|=\sqrt{10^2+(-24)^2}=\sqrt{676}=26$, đúng bằng $2|\vec{u}|$.

$|\vec{a}|=5\Leftrightarrow m^2+9=25\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow m=\pm 4$.

Vậy $|\vec{u}|=13$, $|-2\vec{u}|=26$ và $m=4$ hoặc $m=-4$.

Bài 7. Cho $A(-2;0)$, $B(4;0)$, $C(1;2)$. Chứng minh tam giác ABC cân. Tính $\cos C$ và cho biết tam giác ABC nhọn, vuông hay tù. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

$CA^2=(-3)^2+(-2)^2=13$, $CB^2=3^2+(-2)^2=13$, $AB^2=6^2=36$. Vì $CA=CB=\sqrt{13}$ nên tam giác ABC cân tại C.

Theo hệ quả của định lí côsin: $\cos C=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2\cdot CA\cdot CB}=\frac{13+13-36}{2\cdot 13}=-\frac{5}{13}<0$, nên góc C tù ($\hat{C}\approx 112,6°$).

Cạnh AB nằm trên trục hoành, $AB=6$, đường cao hạ từ C bằng $|y_C|=2$, nên $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$.

Vậy tam giác ABC cân tại C, tù (tại C) và có diện tích bằng 6.

Bài 8. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC với $A(5;5)$, $B(-2;4)$, $C(7;1)$. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

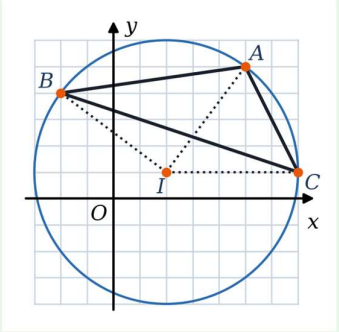
Lời giải

Gọi $I(x;y)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp cách đều ba đỉnh: $IA^2=IB^2=IC^2$.

$IA^2=IB^2\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-5)^2=(x+2)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow -14x-2y+30=0\Leftrightarrow 7x+y=15$.

$IA^2=IC^2\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-5)^2=(x-7)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow 4x-8y=0\Leftrightarrow x=2y$.

Thay $x=2y$ vào $7x+y=15$: $15y=15$, nên $y=1$, $x=2$. Do đó $I(2;1)$ và $R=IA=\sqrt{3^2+4^2}=5$.



Kiểm tra: $IB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$, $IC = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$. Vậy $I(2;1)$ và $R = 5$.

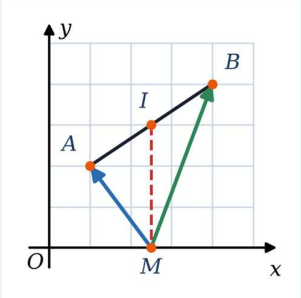
Bài 9. (**Vận dụng**) Cho $A(1;2)$, $B(4;4)$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Vì M thuộc trục hoành nên $M(x;0)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (1-x;2)$, $\overrightarrow{MB} = (4-x;4)$, suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (5-2x;6)$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(5-2x)^2 + 36} \geq \sqrt{36} = 6$; dấu "=" xảy ra khi $5 - 2x = 0$, tức là $x = \frac{5}{2}$.

Ý nghĩa hình học. Gọi $I\left(\frac{5}{2};3\right)$ là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Tổng nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức là khi M là hình chiếu vuông góc của I trên trục hoành.



Vậy $M\left(\frac{5}{2};0\right)$ và giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ bằng 6.

Dạng 3. Hai vectơ cùng phương – Ba điểm thẳng hàng

Bài 10. Tìm m để $\vec{u} = (m;2)$ và $\vec{v} = (8;m)$ cùng phương. Với mỗi giá trị tìm được, cho biết hai vectơ cùng hướng hay ngược hướng.

Lời giải

Hai vectơ cùng phương $\Leftrightarrow m \cdot m - 8 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = 4$ hoặc $m = -4$.

Với $m = 4$: $\vec{u} = (4;2)$, $\vec{v} = (8;4) = 2\vec{u}$; vì $2 > 0$ nên hai vectơ cùng hướng.

Với $m = -4$: $\vec{u} = (-4;2)$, $\vec{v} = (8;-4) = -2\vec{u}$; vì $-2 < 0$ nên hai vectơ ngược hướng.

Vậy $m = 4$ (cùng hướng) hoặc $m = -4$ (ngược hướng).

Bài 11. Cho $A(1;-2)$, $B(3;2)$. Tìm điểm C trên trục tung sao cho A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Vì C thuộc trục tung nên $C(0;y)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;y+2)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2k \\ y + 2 = 4k \end{cases}$. Từ phương trình đầu, $k = -\frac{1}{2}$; suy ra $y + 2 = -2$, tức là $y = -4$.

Vậy $C(0;-4)$.

Bài 12. (**Vận dụng**) Cho $A(1;1)$, $B(m;3)$, $C(9;m)$. Tìm m để A, B, C thẳng hàng. Với mỗi giá trị của m, cho biết điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(m-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(8;m-1)$. Ba điểm thẳng hàng $\Leftrightarrow (m-1)(m-1)-8\cdot 2=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=16 \Leftrightarrow m=5$ hoặc $m=-3$.

Với $m=5$: $B(5;3)$, $C(9;5)$, $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(8;4)=2\overrightarrow{AB}$. Vậy B là trung điểm của AC, nên B nằm giữa A và C.

Với $m=-3$: $B(-3;3)$, $C(9;-3)$, $\overrightarrow{AB}=(-4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(8;-4)=-2\overrightarrow{AB}$. Hai vectơ ngược hướng nên A nằm giữa B và C.

Vậy $m=5$ (B nằm giữa) hoặc $m=-3$ (A nằm giữa).

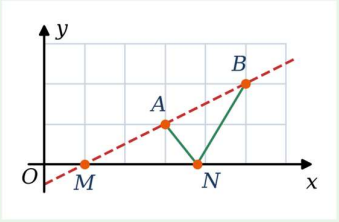
Bài 13. (**Vận dụng cao**) Cho $A(3;1)$, $B(5;2)$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Với mọi điểm M, theo bất đẳng thức tam giác: $|MA-MB|\le AB$; dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn AB.

A, B có tung độ dương nên nằm cùng phía đối với trục hoành; giao điểm của đường thẳng AB với trục hoành (nếu có) luôn nằm ngoài đoạn AB.

Gọi $M(x;0)$. $\overrightarrow{AB}=(2;1)$, $\overrightarrow{AM}=(x-3;-1)$. A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow (x-3)\cdot 1-2\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow x=1$. Vậy $M(1;0)$.



Khi đó $|MA-MB|=AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. Với điểm N khác M trên trục hoành, tam giác NAB không suy biến nên $|NA-NB|<AB$.

Vậy $M(1;0)$ và giá trị lớn nhất của $|MA-MB|$ là $\sqrt{5}$.

Dạng 4. Trung điểm, trọng tâm, đỉnh hình bình hành

Bài 14. Cho $A(3;-1)$, $B(-1;5)$, $C(4;2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của BC, trọng tâm G của tam giác ABC và đỉnh D của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Trung điểm M của BC: $M\left(\frac{-1+4}{2};\frac{5+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Trọng tâm G: $G\left(\frac{3+(-1)+4}{3};\frac{-1+5+2}{3}\right)=(2;2)$.

$\overrightarrow{AB}=(-4;6)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3)$ và $(-4)\cdot 3-6\cdot 1=-18\neq 0$ nên A, B, C không thẳng hàng.

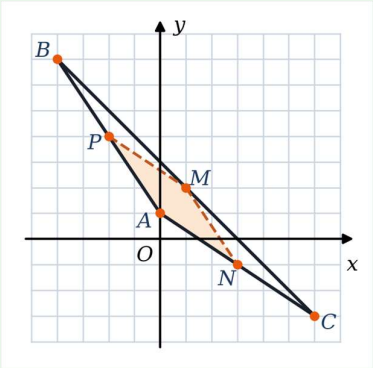
$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(5;-3) \Leftrightarrow x_D-3=5$ và $y_D+1=-3 \Leftrightarrow D(8;-4)$.

Vậy $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$, $G(2;2)$ và $D(8;-4)$.

Bài 15. (**Vận dụng**) Tam giác ABC có $M(1;2)$, $N(3;-1)$, $P(-2;4)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Lời giải

MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}$. Do đó $APMN$ là hình bình hành (hình vẽ).



Từ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{NM}$ suy ra $x_A=x_N+x_P-x_M=3+(-2)-1=0$ và $y_A=y_N+y_P-y_M=-1+4-2=1$, tức là $A(0;1)$.

P là trung điểm của AB nên $B(2x_P-x_A;2y_P-y_A)=(-4;7)$. N là trung điểm của AC nên $C(2x_N-x_A;2y_N-y_A)=(6;-3)$.

Thử lại: trung điểm của BC là $\left(\frac{-4+6}{2};\frac{7+(-3)}{2}\right)=(1;2)$, đúng là điểm M.

Vậy $A(0;1)$, $B(-4;7)$, $C(6;-3)$.

Bài 16. (**Vận dụng**) Tam giác ABC có $A(1;5)$, trọng tâm $G(2;1)$; đỉnh B nằm trên trục hoành, đỉnh C nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm toạ độ B và C.

Lời giải

Vì B thuộc trục hoành nên $B(b;0)$; vì C thuộc đường thẳng $y=x$ nên $C(c;c)$.

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}1+b+c=3\cdot 2\\5+0+c=3\cdot 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=5\\c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7\\c=-2\end{cases}$.

Kiểm tra A, B, C không thẳng hàng: $\overrightarrow{AB}=(6;-5)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;-7)$ và $6\cdot(-7)-(-5)\cdot(-3)=-57\neq 0$.

Vậy $B(7;0)$ và $C(-2;-2)$.

Bài 17. (**Vận dụng**) Hình bình hành $ABCD$ có $A(2;3)$, $C(4;-1)$; đỉnh B nằm trên trục hoành, đỉnh D nằm trên trục tung. Tìm toạ độ B, D và tính chu vi hình bình hành.

Lời giải

Hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Trung điểm của AC là $I(3;1)$.

$B(b;0)$, $D(0;d)$ và I là trung điểm của BD nên $\frac{b+0}{2}=3$, $\frac{0+d}{2}=1$, tức là $B(6;0)$, $D(0;2)$.

Kiểm tra A, B, C không thẳng hàng: $\overrightarrow{AB}=(4;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-4)$ và $4\cdot(-4)-(-3)\cdot 2=-10\neq 0$.

$AB=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, $AD=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$, nên chu vi bằng $2(AB+AD)=10+2\sqrt{5}\approx 14{,}47$.

Vậy $B(6;0)$, $D(0;2)$ và chu vi hình bình hành bằng $10+2\sqrt{5}$.

Dạng 5. Bài toán thực tế: chuyển động, lực, chia đoạn thẳng

Bài 18. Một tuyến cáp quang thẳng nối hai trạm $A(-2;1)$ và $B(10;7)$ (đơn vị trên các trục: km). Người ta đặt hai bộ khuếch đại tín hiệu M, N chia đoạn AB thành ba đoạn bằng nhau (M gần A hơn). Tìm toạ độ M, N và độ dài mỗi đoạn (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

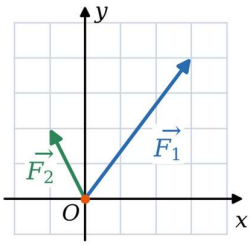
$\overrightarrow{AB} = (12;6)$. Vì $AM = MN = NB = \frac{1}{3}AB$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (4;2)$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (8;4)$.

Suy ra $M(-2+4;1+2) = (2;3)$ và $N(-2+8;1+4) = (6;5)$.

Độ dài mỗi đoạn: $AM = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ (km).

Vậy $M(2;3)$, $N(6;5)$ và mỗi đoạn dài khoảng 4,47 km.

Bài 19. Một chất điểm O chịu tác dụng của hai lực $\vec{F_1} = (3;4)$ và $\vec{F_2} = (-1;2)$ (đơn vị: N). Tính độ lớn của hợp lực và tìm lực $\vec{F_3}$ cần thêm vào để chất điểm cân bằng.



Lời giải

Hợp lực: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (3+(-1);4+2) = (2;6)$.

Độ lớn của hợp lực: $|\vec{F}| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$ (N).

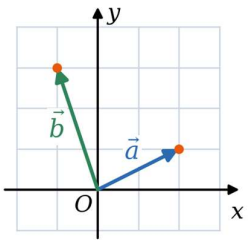
Chất điểm cân bằng khi $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$, tức là $\vec{F_3} = -\vec{F} = (-2;-6)$.

Vậy hợp lực có độ lớn $2\sqrt{10} \approx 6{,}32$ N và $\vec{F_3} = (-2;-6)$.

Bài 20. (**Vận dụng**) Một robot hút bụi xuất phát từ gốc O. Mỗi lệnh "A" đưa robot dịch chuyển theo vectơ $\vec{a} = (2;1)$, mỗi lệnh "B" đưa robot dịch chuyển theo vectơ $\vec{b} = (-1;3)$ (hình vẽ).

a) Sau 3 lệnh "A" và 2 lệnh "B", robot ở vị trí nào?

b) Cần bao nhiêu lệnh mỗi loại để robot tới điểm $(5;13)$?



Lời giải

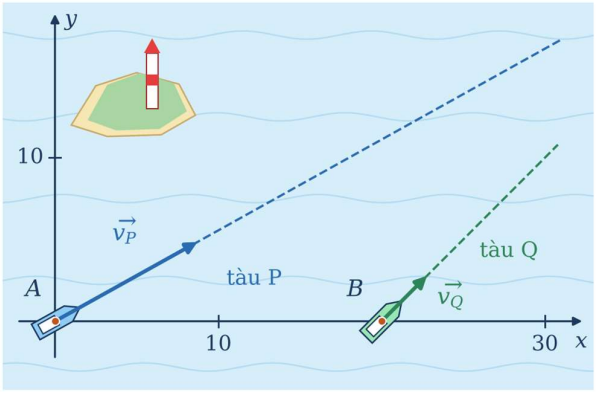
Sau nhiều lệnh, robot dịch chuyển theo tổng các vectơ tương ứng; thứ tự thực hiện các lệnh không ảnh hưởng đến vị trí cuối cùng.

a) $3\vec{a} + 2\vec{b} = (6;3) + (-2;6) = (4;9)$. Robot xuất phát từ O nên dừng ở điểm $(4;9)$.

b) Gọi m, n lần lượt là số lệnh "A" và số lệnh "B" (m, n là số tự nhiên). Cần có $m\vec{a} + n\vec{b} = (5;13)$, tức là $\begin{cases} 2m - n = 5 \\ m + 3n = 13 \end{cases}$.

Từ phương trình đầu, $n = 2m - 5$. Thay vào phương trình sau: $7m - 15 = 13 \Leftrightarrow m = 4$, suy ra $n = 3$.
Vậy cần 4 lệnh "A" và 3 lệnh "B".

Bài 21. (**Vận dụng cao**) Trên màn hình radar của một trạm kiểm soát hàng hải (đơn vị trên các trục: hải lí), lúc 6 giờ tàu P ở $A(0;0)$, tàu Q ở $B(20;0)$. Hai tàu chuyển động thẳng đều với các vectơ vận tốc $\overrightarrow{v_P} = (9;5)$ và $\overrightarrow{v_Q} = (3;3)$ (đơn vị: hải lí/giờ).



a) Viết toạ độ vị trí của mỗi tàu sau t giờ.

b) Tìm thời điểm hai tàu gần nhau nhất và khoảng cách nhỏ nhất đó (làm tròn đến hàng phần trăm).

c) Hệ thống phát cảnh báo khi hai tàu cách nhau dưới 5 hải lí. Hệ thống có phát cảnh báo không?

Lời giải

a) Sau t giờ ($t \geq 0$), tàu P ở P_t với $\overrightarrow{AP_t} = t\,\overrightarrow{v_P}$, tức là $P_t(9t;5t)$; tàu Q ở Q_t với $\overrightarrow{BQ_t} = t\,\overrightarrow{v_Q}$, tức là $Q_t(20+3t;3t)$.

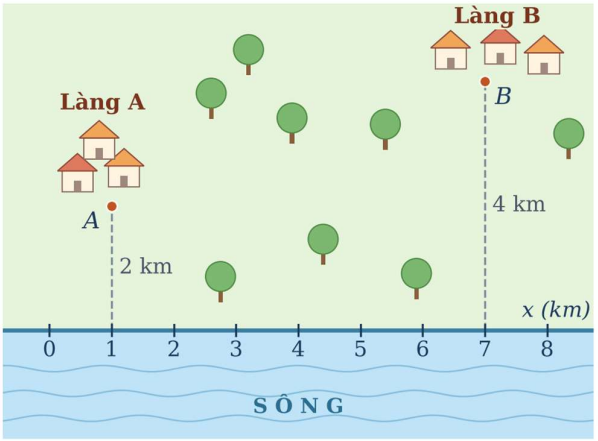
b) $\overrightarrow{P_tQ_t} = (20-6t;-2t)$, nên $P_tQ_t^2 = (20-6t)^2 + 4t^2 = 40t^2 - 240t + 400 = 40(t-3)^2 + 40 \geq 40$.
Dấu "=" xảy ra khi $t = 3$. Vậy hai tàu gần nhau nhất lúc $6 + 3 = 9$ (giờ), khi đó $P_3(27;15)$, $Q_3(29;9)$ và khoảng cách bằng $\sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$ (hải lí).

c) Khoảng cách giữa hai tàu luôn không nhỏ hơn 6,32 hải lí > 5 hải lí, nên hệ thống không phát cảnh báo.

Nhận xét. Khoảng cách ban đầu là 20 hải lí, giảm dần đến 6,32 hải lí lúc 9 giờ rồi tăng trở lại. Chỉ so sánh vị trí của hai tàu ở vài thời điểm rời rạc thì dễ bỏ sót thời điểm nguy hiểm nhất.

★ LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Điểm nhấn 1. Trạm bơm bên bờ sông. Hai làng A và B nằm cùng phía một con sông thẳng. Chọn hệ trục Oxy có trục Ox là bờ sông, đơn vị trên các trục là kilômét; khi đó $A(1;2)$ và $B(7;4)$. Người ta xây một trạm bơm tại điểm M trên bờ sông rồi đặt hai đường ống thẳng MA, MB dẫn nước về hai làng.



a) Nếu đặt trạm bơm tại điểm P trên bờ sông cách đều hai làng thì tổng chiều dài đường ống $PA + PB$ là bao nhiêu?

b) Tìm vị trí M trên bờ sông sao cho tổng chiều dài đường ống $MA + MB$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

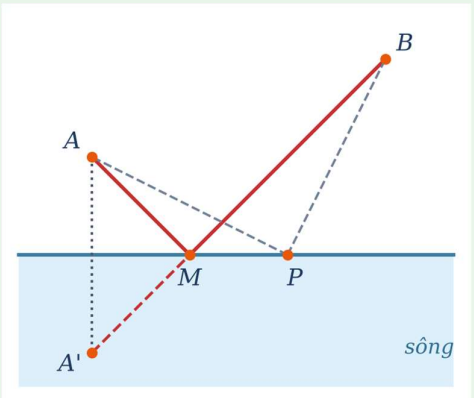
c) Chi phí làm đường ống là 500 triệu đồng mỗi kilômét. Chọn vị trí ở câu b thay cho vị trí ở câu a thì tiết kiệm được khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) $P(x;0)$ cách đều A và B: $(x-1)^2+4=(x-7)^2+16 \Leftrightarrow 12x=60 \Leftrightarrow x=5$, nên $P(5;0)$. Khi đó $PA=PB=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$, nên $PA+PB=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}\approx 8{,}944$ (km).

b) Gọi $A'(1;-2)$ là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Với mọi M trên trục Ox, trục Ox là đường trung trực của AA' nên $MA=MA'$. Do đó $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Dấu "=" xảy ra khi M nằm trên đoạn $A'B$ (điều này thực hiện được vì A' và B nằm khác phía đối với Ox). Gọi $M(x;0)$: $\overrightarrow{A'B}=(6;6)$, $\overrightarrow{A'M}=(x-1;2)$ cùng phương với $\overrightarrow{A'B}$ $\Leftrightarrow 6(x-1)-6\cdot 2=0 \Leftrightarrow x=3$.



Vậy $M(3;0)$ và giá trị nhỏ nhất là $A'B=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}\approx 8{,}485$ (km). Kiểm tra: $MA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $MB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$, tổng bằng $6\sqrt{2}$.

c) Đường ống ngắn hơn $4\sqrt{5}-6\sqrt{2}\approx 0{,}459$ (km). Số tiền tiết kiệm được là $500\left(4\sqrt{5}-6\sqrt{2}\right)\approx 229{,}495$ (triệu đồng), làm tròn đến hàng đơn vị được **229 triệu đồng**.

Vậy nên đặt trạm bơm tại $M(3;0)$, cách chân đường vuông góc hạ từ làng A xuống bờ sông 2 km về phía làng B.

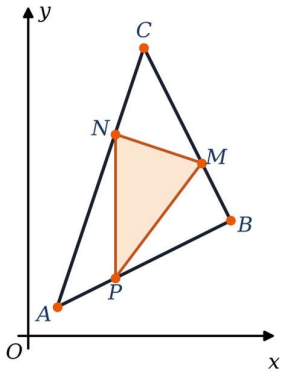
Nhận xét – Mở rộng

Định luật phản xạ ánh sáng. Tại $M(3;0)$, hai ống MA, MB cùng tạo với bờ sông góc $45°$ (vì $\overrightarrow{MA}=(-2;2)$, $\overrightarrow{MB}=(4;4)$). Đây chính là đường đi của tia sáng từ A phản xạ trên gương Ox tới B: ánh sáng luôn "chọn" đường ngắn nhất (nguyên lí Fermat).

Sai lầm thường gặp: cho rằng điểm cách đều hai làng là điểm tốt nhất. Điểm cách đều chỉ làm hai ống dài bằng nhau; câu c cho thấy nó tốn hơn khoảng 459 m ống.

Mở rộng. Nếu hai làng ở **hai bên** bờ sông (chẳng hạn ống dẫn khí đi ngầm dưới lòng sông) thì không cần lấy đối xứng: M là giao điểm của đoạn AB với bờ. Còn khi muốn $|MA-MB|$ lớn nhất, ta lại tìm giao điểm của đường thẳng AB với trục, như ở bài tập Vận dụng cao của Dạng 3.

Điểm nhấn 2. Hai tam giác chung trọng tâm. Cho tam giác ABC với $A(1;1)$, $B(7;4)$, $C(4;10)$. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



a) Tìm toạ độ các điểm M, N, P.

b) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

c) Thay số $\frac{1}{3}$ bởi số k tuỳ ý thuộc khoảng $(0;1)$: $\overrightarrow{BM}=k\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=k\,\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AB}$. Chứng minh kết luận ở câu b vẫn đúng.

d) Với các điểm M, N ở câu c, tìm k để đường thẳng MN song song với AB.

Lời giải

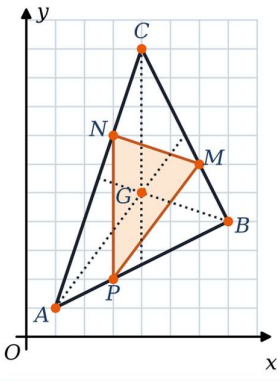
a) $\overrightarrow{BC}=(-3;6)$, $\overrightarrow{CA}=(-3;-9)$, $\overrightarrow{AB}=(6;3)$. Do đó:

– $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=(-1;2)$, suy ra $M(6;6)$;

– $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=(-1;-3)$, suy ra $N(3;7)$;

– $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(2;1)$, suy ra $P(3;2)$.

b) Trọng tâm tam giác ABC: $G\left(\frac{1+7+4}{3};\frac{1+4+1}{3}\right)=(4;5)$. Trọng tâm tam giác MNP: $\left(\frac{6+3+3}{3};\frac{6+7+2}{3}\right)=(4;5)$. Hai trọng tâm trùng nhau.



c) Ta có $x_M = x_B + k(x_C - x_B)$, $x_N = x_C + k(x_A - x_C)$, $x_P = x_A + k(x_B - x_A)$. Cộng lại:

$x_M + x_N + x_P = x_A + x_B + x_C + k[(x_C - x_B) + (x_A - x_C) + (x_B - x_A)] = x_A + x_B + x_C$.

Tương tự $y_M + y_N + y_P = y_A + y_B + y_C$. Vậy với mọi k, tam giác MNP có cùng trọng tâm $G(4;5)$ với tam giác ABC (kết quả đúng với mọi tam giác, không phụ thuộc toạ độ cụ thể).

d) $M(7-3k;4+6k)$, $N(4-3k;10-9k)$, nên $\overrightarrow{MN} = (-3;6-15k)$. Đường thẳng MN song song với AB thì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} = (6;3)$: $(-3)\cdot 3 - 6(6-15k) = 0 \Leftrightarrow 90k = 45 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

Với $k = \frac{1}{2}$: $M\left(\frac{11}{2};7\right)$, $N\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$ là trung điểm của BC, CA, và MN là đường trung bình nên không trùng với AB.

Vậy $k = \frac{1}{2}$; khi đó MNP là tam giác trung bình của tam giác ABC.

Nhận xét – Mở rộng

Lời giải bằng vectơ (không cần toạ độ). Với G là trọng tâm tam giác ABC : $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + k\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} + k\cdot\vec{0} = \vec{0}$, nên G cũng là trọng tâm tam giác MNP.

Mở rộng. Khi k thay đổi, tam giác MNP "xoay" bên trong tam giác ABC nhưng trọng tâm luôn đứng yên. Diện tích của nó thì thay đổi: gọi S là diện tích tam giác ABC. Vì $AP = k\cdot AB$ và $AN = (1-k)\cdot AC$ nên $S_{APN} = \frac{1}{2}AP\cdot AN\cdot \sin A = k(1-k)\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A = k(1-k)S$.

Tương tự $S_{BMP} = S_{CNM} = k(1-k)S$. Ba tam giác này cùng với tam giác MNP ghép thành tam giác ABC, nên $S_{MNP} = S - 3k(1-k)S = (1-3k+3k^2)S = \left[3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]S$.

Với $k = \frac{1}{3}$ được $S_{MNP} = \frac{1}{3}S$ (với số liệu của bài: $S = 22{,}5$ và $S_{MNP} = 7{,}5$). Diện tích tam giác MNP nhỏ nhất, bằng $\frac{1}{4}S$, khi $k = \frac{1}{2}$: đúng là trường hợp tam giác trung bình ở câu d.

C LỜI GIẢI LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Toạ độ của vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ là

A. $(3;-4)$ **B.** $(-4;3)$ **C.** $(3;4)$ **D.** $(-3;4)$

Lời giải

Theo định nghĩa, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (x;y)$: hoành độ là hệ số của $\vec{i}$, tung độ là hệ số của $\vec{j}$. Với $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ta có $\vec{u} = (3;-4)$.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Cho $\vec{a}=(2;-1)$, $\vec{b}=(-3;4)$. Toạ độ của $\vec{a}+\vec{b}$ là

A. $(-1;5)$ **B.** $(5;-5)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(1;-3)$

Lời giải

Cộng các toạ độ tương ứng: $\vec{a}+\vec{b}=(2+(-3);-1+4)=(-1;3)$. (Vectơ $(5;-5)$ là $\vec{a}-\vec{b}$.)

Chọn đáp án C.

Câu 3. Cho $\vec{a}=(1;-2)$. Toạ độ của $-3\vec{a}$ là

A. $(-3;6)$ **B.** $(3;6)$ **C.** $(-3;-6)$ **D.** $(3;-6)$

Lời giải

Nhân số -3 với từng toạ độ của $\vec{a}$: $-3\vec{a}=\big(-3\cdot 1;-3\cdot(-2)\big)=(-3;6)$.

Chọn đáp án A.

Câu 4. Cho $A(1;2)$, $B(-3;5)$. Toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(4;-3)$ **B.** $(-4;7)$ **C.** $(-2;7)$ **D.** $(-4;3)$

Lời giải

Toạ độ của vectơ bằng toạ độ điểm cuối trừ toạ độ điểm đầu ("ngọn trừ gốc"): $\overrightarrow{AB}=(-3-1;5-2)=(-4;3)$. Vectơ $(4;-3)$ là $\overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án D.

Câu 5. Độ dài của vectơ $\vec{u}=(-6;8)$ là

A. 14 **B.** 10 **C.** 2 **D.** 100

Lời giải

$|\vec{u}|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Chọn đáp án B.

Câu 6. Cho $A(2;-3)$, $B(4;7)$. Trung điểm của AB là

A. $(-1;-5)$ **B.** $(6;4)$ **C.** $(1;5)$ **D.** $(3;2)$

Lời giải

Trung điểm I của AB có $x_I=\frac{2+4}{2}=3$, $y_I=\frac{-3+7}{2}=2$. Vậy $I(3;2)$.

Chọn đáp án D.

Câu 7. Cho $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(4;-1)$. Trọng tâm tam giác ABC là

A. $(1;2)$ **B.** $(3;6)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(2;1)$

Lời giải

$x_G=\frac{1+(-2)+4}{3}=1$, $y_G=\frac{3+4+(-1)}{3}=2$. Vậy trọng tâm là $G(1;2)$.

Chọn đáp án A.

Câu 8. Hai vectơ $\vec{u}=(2;m)$ và $\vec{v}=(-4;6)$ cùng phương khi

A. $m=3$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=12$ **D.** $m=-12$

Lời giải

Vì $\vec{v}\neq\vec{0}$ nên $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{u}=k\vec{v}$, tức là $2=-4k$ và $m=6k$; suy ra $k=-\frac{1}{2}$, $m=-3$. Khi đó $\vec{v}=(-4;6)=-2\vec{u}$.

Chọn đáp án B.

Câu 9. Khoảng cách giữa hai điểm $A(-1;2)$ và $B(2;6)$ là

A. 7 **B.** 25 **C.** $\sqrt{7}$ **D.** 5

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (3;4)$ nên $AB = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Chọn đáp án D.

Câu 10. Cho $A(1;0)$, $B(3;2)$, $C(4;5)$. Toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(6;7)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(0;-3)$ **D.** $(2;-3)$

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (2;2)$ và $\overrightarrow{AC} = (3;5)$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng.

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (1;3) \Leftrightarrow x_D - 1 = 1$ và $y_D - 0 = 3 \Leftrightarrow D(2;3)$. (Điểm $(6;7)$ ứng với hình bình hành $ABDC$, không phải $ABCD$.)

Chọn đáp án B.

Câu 11. Cho $\vec{u} = (x+1;4)$, $\vec{v} = (3;2y)$. Nếu $\vec{u} = \vec{v}$ thì $x+y$ bằng

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x+1 = 3$ và $4 = 2y \Leftrightarrow x = 2$ và $y = 2$. Do đó $x+y = 4$.

Chọn đáp án C.

Câu 12. Một vật xuất phát từ $A(0;1)$ chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc $\vec{v} = (2;3)$ (đơn vị độ dài: m; vận tốc: m/s). Sau 3 giây vật ở điểm

A. $(2;4)$ **B.** $(6;9)$ **C.** $(6;10)$ **D.** $(6;12)$

Lời giải

Sau t giây vật ở điểm M với $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}$. Với $t = 3$: $\overrightarrow{AM} = 3\vec{v} = (6;9)$, nên $M(0+6;1+9) = (6;10)$. (Điểm $(6;9)$ là kết quả khi quên cộng toạ độ của điểm xuất phát.)

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3;-4)$, $\vec{b} = (1;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lvert\vec{a}\rvert = 7$.		✓
b)	$\vec{a} + 2\vec{b} = (5;0)$.	✓	
c)	$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.		✓
d)	Vectơ $(-6;8)$ ngược hướng với $\vec{a}$.	✓	

Lời giải

a) Sai. $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$. Số 7 là kết quả của phép cộng nhầm $3+4$ thay cho công thức tính độ dài.

b) Đúng. $2\vec{b} = (2;4)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} = (3+2;-4+4) = (5;0)$.

c) Sai. Nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ thì $1 = 3k$ và $2 = -4k$, tức là $k = \frac{1}{3}$ và $k = -\frac{1}{2}$: vô lí. Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

d) Đúng. $(-6;8) = -2(3;-4) = -2\vec{a}$ với $-2 < 0$ nên vectơ $(-6;8)$ ngược hướng với $\vec{a}$.

Câu 2. Cho $A(1;2)$, $B(3;6)$, $C(5;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BA}=(2;4)$.		✓
b)	Tam giác ABC cân tại B.	✓	
c)	Trọng tâm tam giác ABC là $G\left(3;\frac{10}{3}\right)$.	✓	
d)	$ABCD$ là hình bình hành khi $D(7;6)$.		✓

Lời giải

a) Sai. $\overrightarrow{BA}=(1-3;2-6)=(-2;-4)$; vectơ $(2;4)$ là $\overrightarrow{AB}$.

b) Đúng. $BA=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$, $BC=\sqrt{(5-3)^2+(2-6)^2}=\sqrt{20}$. Vì $BA=BC$ nên tam giác ABC cân tại B.

c) Đúng. $x_G=\frac{1+3+5}{3}=3$, $y_G=\frac{2+6+2}{3}=\frac{10}{3}$. Vậy $G\left(3;\frac{10}{3}\right)$.

d) Sai. $\overrightarrow{AB}=(2;4)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0)$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng. $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(2;-4)\Leftrightarrow D(1+2;2-4)=(3;-2)$. Điểm $(7;6)$ ứng với hình bình hành $ABDC$, không phải $ABCD$.

Câu 3. Cho $A(-2;1)$, $B(1;3)$ và $M(m;7)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}=(3;2)$.	✓	
b)	A, B, M thẳng hàng khi $m=7$.	✓	
c)	Khi $m=7$, B là trung điểm của AM.		✓
d)	Khi $m=7$, $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.	✓	

Lời giải

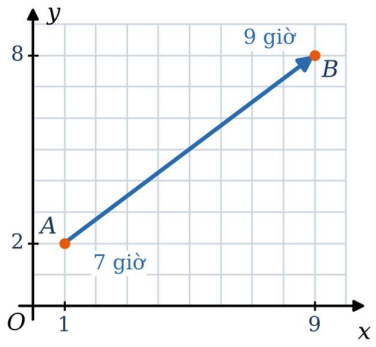
a) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(1-(-2);3-1)=(3;2)$.

b) Đúng. $\overrightarrow{AM}=(m+2;6)$. A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow m+2=3k$ và $6=2k$ $\Rightarrow k=3, m=7$.

c) Sai. Với $m=7$: $M(7;7)$, trung điểm của AM là $\left(\frac{-2+7}{2};\frac{1+7}{2}\right)=\left(\frac{5}{2};4\right)\neq B(1;3)$. Vậy B không phải trung điểm của AM.

d) Đúng. Với $m=7$: $\overrightarrow{AM}=(9;6)=3(3;2)=3\overrightarrow{AB}$.

Câu 4. Một ca nô chuyển động thẳng đều, lúc 7 giờ ở $A(1;2)$, lúc 9 giờ ở $B(9;8)$ (đơn vị độ dài trên các trục: km).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Vectơ vận tốc (dịch chuyển mỗi giờ) của ca nô là $\vec{v}=(4;3)$.	✓	
b)	Tốc độ của ca nô là 10 km/h.		✓
c)	Lúc 10 giờ ca nô ở điểm $(13;11)$.	✓	
d)	Ca nô đến điểm $C(17;14)$ lúc 12 giờ.		✓

Lời giải

a) Đúng. Trong 2 giờ (từ 7 giờ đến 9 giờ), ca nô dịch chuyển theo $\overrightarrow{AB}=(8;6)$, nên mỗi giờ dịch chuyển theo $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(4;3)$.

b) Sai. $\overrightarrow{AB}=(8;6)$ nên trong 2 giờ (từ 7 giờ đến 9 giờ) ca nô đi được quãng đường $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$ (km). Tốc độ của ca nô là $10:2=5$ (km/h), không phải 10 km/h: 10 km là quãng đường đi trong 2 giờ.

c) Đúng. Lúc 10 giờ, ca nô đã chạy 3 giờ kể từ A: vị trí M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=3\vec{v}=(12;9)$, nên $M(1+12;2+9)=(13;11)$.

d) Sai. $\overrightarrow{AC}=(16;12)=4\vec{v}$ nên ca nô đến C sau 4 giờ kể từ 7 giờ, tức là lúc 11 giờ (không phải 12 giờ).

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{a}=(1;-1)$, $\vec{b}=(2;3)$, $\vec{c}=(7;3)$. Biết $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, tính $m+n$.

Lời giải

$m\vec{a}+n\vec{b}=(m+2n;-m+3n)$, nên $\begin{cases}m+2n=7\\-m+3n=3\end{cases}$.

Cộng vế theo vế hai phương trình: $5n=10$, suy ra $n=2$ và $m=7-2n=3$.

Thử lại: $3\vec{a}+2\vec{b}=(3+4;-3+6)=(7;3)=\vec{c}$. Do đó $m+n=5$.

Đáp số: 5

Câu 2. Tìm m để $\vec{a}=(m;-2)$ và $\vec{b}=(3;6)$ cùng phương.

Lời giải

Vì $\vec{b}=(3;6)\neq\vec{0}$ nên $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$, tức là $m=3k$ và $-2=6k$.

Từ $-2=6k$ suy ra $k=-\frac{1}{3}$, do đó $m=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$.

Kiểm tra: $\vec{a} = (-1;-2) = -\frac{1}{3}\vec{b}$.

Đáp số: −1

Câu 3. Cho $A(2;5)$, $B(-1;1)$, $C(5;0)$. Gọi $G(a;b)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tính $a+b$.

Lời giải

$a = x_G = \frac{2+(-1)+5}{3} = 2$, $b = y_G = \frac{5+1+0}{3} = 2$.

Do đó $G(2;2)$ và $a+b=4$.

Đáp số: 4

Câu 4. Cho $A(2;3)$, $B(-1;-1)$. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Tính độ dài đoạn thẳng AC.

Lời giải

B là trung điểm của AC nên $C(2x_B - x_A; 2y_B - y_A) = (-4;-5)$.

$\overrightarrow{AC} = (-6;-8)$, do đó $AC = \sqrt{(-6)^2+(-8)^2} = 10$.

Cách khác: $AC = 2AB = 2\sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 10$.

Đáp số: 10

1 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	D	B	A	C	C	B	D	C	A	B	D	A

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	S	Đ	S
2	Đ	S	Đ	Đ
3	Đ	Đ	S	Đ
4	Đ	Đ	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	10	1,5	-3	16	6	40

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, toạ độ của vectơ đơn vị $\vec{j}$ là

A. $(0;0)$ **B.** $(1;0)$ **C.** $(1;1)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

$\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$ nên $\vec{j} = (0;1)$; còn $(1;0)$ là toạ độ của $\vec{i}$ và $(0;0)$ là toạ độ của $\vec{0}$.

Chọn đáp án D.

Câu 2. Vectơ $\vec{u} = (-2;5)$ được viết là

A. $5\vec{i} - 2\vec{j}$ **B.** $-2\vec{i} + 5\vec{j}$ **C.** $-2\vec{i} - 5\vec{j}$ **D.** $2\vec{i} + 5\vec{j}$

Lời giải

Theo định nghĩa toạ độ của vectơ: $\vec{u} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Với $\vec{u} = (-2;5)$ ta có $\vec{u} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

Chọn đáp án B.

Câu 3. Cho điểm $M(3;-7)$. Toạ độ của $\overrightarrow{OM}$ là

A. $(3;-7)$ **B.** $(-3;7)$ **C.** $(7;-3)$ **D.** $(-7;3)$

Lời giải

Toạ độ của điểm M chính là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = (3-0;-7-0) = (3;-7)$.

Chọn đáp án A.

Câu 4. Cho $\vec{a} = (4;-2)$, $\vec{b} = (1;3)$. Toạ độ của $2\vec{a} - \vec{b}$ là

A. $(7;-1)$ **B.** $(9;-1)$ **C.** $(7;-7)$ **D.** $(3;-5)$

Lời giải

$2\vec{a} = (8;-4)$ nên $2\vec{a} - \vec{b} = (8-1;-4-3) = (7;-7)$. (Vectơ $(9;-1)$ là $2\vec{a} + \vec{b}$.)

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho $A(2;-1)$, $B(-1;3)$. Độ dài AB bằng

A. 25 **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = \big(-1-2; 3-(-1)\big) = (-3; 4)$ nên $AB = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Vectơ nào cùng phương với $\vec{a} = (1; -3)$?

A. $(3; 1)$ **B.** $(-2; 6)$ **C.** $(2; 6)$ **D.** $(-1; -3)$

Lời giải

Ta có $\frac{-2}{1} = \frac{6}{-3} = -2$ nên $(-2; 6) = -2\vec{a}$, tức là vectơ $(-2; 6)$ cùng phương với $\vec{a}$.

Ba vectơ còn lại không cùng phương với $\vec{a}$ vì tỉ số các toạ độ không bằng nhau: $\frac{3}{1} \neq \frac{1}{-3}$; $\frac{2}{1} \neq \frac{6}{-3}$; $\frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{-3}$.

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho $A(5; 3)$, $B(-1; -7)$. Trung điểm của đoạn AB là

A. $(6; 10)$ **B.** $(3; 5)$ **C.** $(4; -4)$ **D.** $(2; -2)$

Lời giải

Trung điểm I của AB: $x_I = \frac{5+(-1)}{2} = 2$, $y_I = \frac{3+(-7)}{2} = -2$. Vậy $I(2; -2)$.

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho $A(0; 2)$, $B(3; -1)$, $C(6; 5)$. Trọng tâm tam giác ABC là

A. $(2; 3)$ **B.** $(9; 6)$ **C.** $(3; 2)$ **D.** $(3; 3)$

Lời giải

$x_G = \frac{0+3+6}{3} = 3$, $y_G = \frac{2+(-1)+5}{3} = 2$. Vậy trọng tâm là $G(3; 2)$.

Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho $\vec{u} = (x-2; 3)$, $\vec{v} = (1; y+4)$. Nếu $\vec{u} = \vec{v}$ thì $x + y$ bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 0

Lời giải

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x - 2 = 1$ và $3 = y + 4 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = -1$. Do đó $x + y = 2$.

Chọn đáp án A.

Câu 10. Cho $A(1; 2)$, $B(3; -2)$. Điểm đối xứng với A qua B là

A. $(2; 0)$ **B.** $(5; -6)$ **C.** $(-1; 6)$ **D.** $(4; 0)$

Lời giải

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B thì B là trung điểm của AA': $x_{A'} = 2x_B - x_A = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $y_{A'} = 2y_B - y_A = 2 \cdot (-2) - 2 = -6$. Vậy $A'(5; -6)$. (Điểm $(2; 0)$ là trung điểm của AB.)

Chọn đáp án B.

Câu 11. Cho $A(-1; 4)$, $B(5; 1)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = 2MB$ có toạ độ là

A. $(11; -2)$ **B.** $(1; 3)$ **C.** $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ **D.** $(3; 2)$

Lời giải

M thuộc đoạn AB và $AM = 2MB$ nên $AM = \frac{2}{3}AB$. Do đó $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(6; -3) = (4; -2)$ và $M(-1+4; 4-2) = (3; 2)$.

Điểm $(1;3)$ ứng với $AM=\frac{1}{3}AB$ (nhầm vai trò của hai đầu mút); điểm $(11;-2)$ có $MA=2MB$ nhưng nằm ngoài đoạn AB; điểm $\left(2;\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của AB.

Chọn đáp án D.

Câu 12. Hai lực $\overrightarrow{F_1}=(2;3)$, $\overrightarrow{F_2}=(4;5)$ (đơn vị: N) cùng tác dụng vào một vật. Độ lớn của hợp lực là

A. 10 N **B.** 14 N **C.** 7 N **D.** 100 N

Lời giải

Hợp lực $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=(2+4;3+5)=(6;8)$, có độ lớn $\left|\vec{F}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (N). (Không được cộng hai toạ độ: $6+8=14$ không phải độ lớn của hợp lực.)

Chọn đáp án A.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\vec{a}=(2;-1)$, $\vec{b}=(1;3)$, $\vec{c}=(7;0)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}+\vec{b}=(3;2)$.	✓	
b)	$\left\|\vec{b}\right\|=10$.		✓
c)	$\vec{c}=3\vec{a}+\vec{b}$.	✓	
d)	Vectơ $\vec{u}=(-6;3)$ cùng hướng với $\vec{a}$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $\vec{a}+\vec{b}=(2+1;-1+3)=(3;2)$.

b) Sai. $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\neq 10$.

c) Đúng. $3\vec{a}=(6;-3)$ nên $3\vec{a}+\vec{b}=(6+1;-3+3)=(7;0)=\vec{c}$.

d) Sai. $\vec{u}=(-6;3)=-3(2;-1)=-3\vec{a}$ với $-3<0$ nên $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{a}$ (hai vectơ cùng phương nhưng không cùng hướng).

Câu 2. Cho $A(-1;1)$, $B(2;5)$, $C(10;-1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AB=5$.	✓	
b)	Tam giác ABC cân tại B.		✓
c)	Tam giác ABC vuông tại B.	✓	
d)	Diện tích tam giác ABC bằng 25.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(3;4)$ nên $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

b) Sai. $\overrightarrow{BC}=(8;-6)$ nên $BC=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$, khác $BA=5$; do đó tam giác ABC không cân tại B.

c) Đúng. $\overrightarrow{AC}=(11;-2)$ nên $AC^2=121+4=125$; $AB^2+BC^2=25+100=125=AC^2$. Theo định lí Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại B.

d) Đúng. Vì $AB^2+BC^2=125=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B, do đó $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$.

Câu 3. Cho $A(1;2)$, $B(-2;-4)$, $C(m;6)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}=(-3;-6)$.	✓	
b)	A, B, C thẳng hàng khi $m=3$.	✓	
c)	Khi $m=3$, A là trung điểm của BC.		✓
d)	Khi $m=3$, A nằm giữa B và C.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(-2-1;-4-2)=(-3;-6)$.

b) Đúng. $\overrightarrow{AC}=(m-1;4)$. A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow m-1=-3k$ và $4=-6k$ $\Rightarrow k=-\frac{2}{3}$, $m-1=2$, $m=3$.

c) Sai. Với $m=3$: $C(3;6)$, trung điểm của BC là $\left(\frac{-2+3}{2};\frac{-4+6}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1\right)\neq A(1;2)$. Vậy A không phải trung điểm của BC.

d) Đúng. Với $m=3$: $\overrightarrow{AC}=(2;4)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng nên A nằm giữa B và C.

Câu 4. Trên mặt phẳng toạ độ (đơn vị độ dài: trăm mét), một drone giao hàng xuất phát từ $O(0;0)$, bay 2 phút với vận tốc $\vec{v_1}=(3;4)$ rồi đổi hướng, bay tiếp 3 phút với vận tốc $\vec{v_2}=(-4;3)$ (đơn vị vận tốc: trăm mét/phút). Gọi B là vị trí của drone khi kết thúc chuyến bay.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Sau 2 phút đầu, drone ở điểm $A(6;8)$.	✓	
b)	Quãng đường drone bay trong 2 phút đầu là 1000 m.	✓	
c)	$B(-6;17)$.	✓	
d)	Khoảng cách từ B đến O nhỏ hơn 1500 m.		✓

Lời giải

a) Đúng. Sau 2 phút đầu, drone ở điểm A với $\overrightarrow{OA}=2\,\vec{v_1}=(6;8)$, tức là $A(6;8)$.

b) Đúng. Quãng đường bay trong 2 phút đầu: $OA=2\left|\vec{v_1}\right|=2\sqrt{3^2+4^2}=10$ (trăm mét), tức là 1000 m.

c) Đúng. Trong 3 phút sau, drone dịch chuyển theo vectơ $3\,\vec{v_2}=(-12;9)$ kể từ điểm $(6;8)$, nên $B(6-12;8+9)=(-6;17)$.

d) Sai. $OB=\sqrt{(-6)^2+17^2}=\sqrt{325}\approx 18{,}03$ (trăm mét), tức là khoảng 1803 m, lớn hơn 1500 m.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3; -4)$. Tính $|-2\vec{a}|$.

Lời giải

$-2\vec{a} = (-6; 8)$ nên $|-2\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

(Cách khác: $|-2\vec{a}| = |-2| \cdot |\vec{a}| = 2 \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 2 \cdot 5 = 10$.)

Đáp số: 10

Câu 2. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 5)$ và $B(3; -3)$ cắt trục hoành tại điểm $M(x; 0)$. Tìm x.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (4; -8)$, $\overrightarrow{AM} = (x + 1; -5)$.

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow (x + 1) \cdot (-8) - 4 \cdot (-5) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 2{,}5 \Leftrightarrow x = 1{,}5$.

Đáp số: 1,5

Câu 3. Cho $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $C(6; 5)$. Điểm $M(x; y)$ thoả mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính $x + y$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \big((1 - x) + (4 - x) - (6 - x); (1 - y) + (2 - y) - (5 - y)\big) = (-1 - x; -2 - y)$.

Vectơ này bằng $\vec{0}$ khi và chỉ khi $x = -1$, $y = -2$. Do đó $M(-1; -2)$ và $x + y = -3$.

Đáp số: −3

Câu 4. Tính chu vi tam giác ABC với $A(1; 1)$, $B(4; 5)$, $C(7; 1)$.

Lời giải

$AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = 5$, $BC = \sqrt{(7 - 4)^2 + (1 - 5)^2} = 5$,

$AC = \sqrt{(7 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = 6$.

Chu vi tam giác ABC: $AB + BC + CA = 5 + 5 + 6 = 16$.

Đáp số: 16

Câu 5. Cho $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ và điểm $C(c; 1)$ với $c > 1$. Tìm c để tam giác ABC cân tại A.

Lời giải

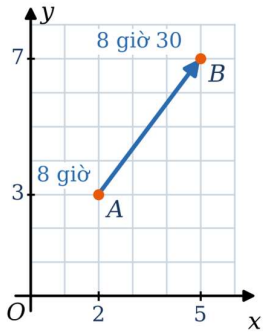
$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $AC = \sqrt{(c - 1)^2 + 0^2} = c - 1$ (vì $c > 1$).

Tam giác ABC cân tại $A \Leftrightarrow AC = AB \Leftrightarrow c - 1 = 5 \Leftrightarrow c = 6$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (3; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 0)$ không cùng phương, nên A, B, C đúng là ba đỉnh của một tam giác.

Đáp số: 6

Câu 6. Trên màn hình radar (mỗi đơn vị dài ứng với 4 km), một tàu tuần tra chạy thẳng đều: lúc 8 giờ tàu ở $A(2;3)$, lúc 8 giờ 30 phút tàu ở $B(5;7)$. Tốc độ của tàu là bao nhiêu kilômét/giờ?



Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (3;4)$ nên $AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ (đơn vị dài), tức là $5 \cdot 4 = 20$ (km).

Tàu đi quãng đường đó trong 30 phút $= 0{,}5$ giờ, nên tốc độ của tàu là $\frac{20}{0{,}5} = 40$ (km/h).

Đáp số: 40

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho $A(1;4)$, $B(-2;-2)$, $C(4;1)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm trọng tâm G của tam giác.

b) Tìm toạ độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} = (-3;-6)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-3)$. Vì $\frac{3}{-3} \neq \frac{-3}{-6}$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, do đó A, B, C không thẳng hàng, tức là A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Trọng tâm G: $x_G = \frac{1+(-2)+4}{3} = 1$, $y_G = \frac{4+(-2)+1}{3} = 1$. Vậy $G(1;1)$.

b) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ta có $\overrightarrow{BC} = (6;3)$ nên $x_D - 1 = 6$ và $y_D - 4 = 3$, tức là $D(7;7)$.

c) M thuộc trục hoành nên $M(x;0)$, $\overrightarrow{AM} = (x-1;-4)$. A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow x - 1 = -3k$ và $-4 = -6k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$, $x - 1 = -2$, $x = -1$.

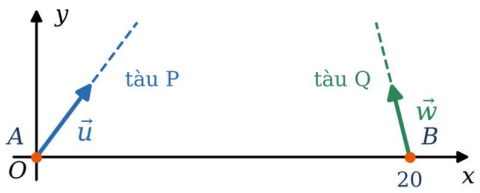
Vậy $M(-1;0)$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Lúc 7 giờ, tàu P rời cảng $A(0;0)$ với vận tốc $\vec{u} = (3;4)$; cùng lúc đó tàu Q rời cảng $B(20;0)$ với vận tốc $\vec{w} = (-1;4)$ (đơn vị độ dài: km; vận tốc: km/h). Cả hai tàu chuyển động thẳng đều.

a) Tìm vị trí hai tàu sau 2 giờ và khoảng cách giữa chúng khi đó.

b) Hai tàu có gặp nhau không? Nếu có, tìm thời điểm và vị trí gặp nhau.

c) Tàu nào chạy nhanh hơn?

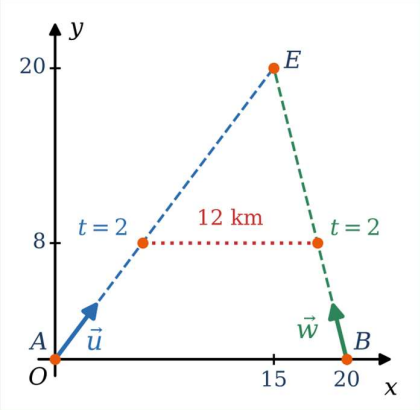


Lời giải

Sau t giờ (kể từ 7 giờ), tàu P ở điểm P_t với $\overrightarrow{AP_t} = t\vec{u}$, tức là $P_t(3t;4t)$; tàu Q ở điểm Q_t với $\overrightarrow{BQ_t} = t\vec{w}$, tức là $Q_t(20-t;4t)$.

a) Với $t=2$: $P_2(6;8)$, $Q_2(18;8)$. Khoảng cách giữa hai tàu: $P_2Q_2 = \sqrt{(18-6)^2+(8-8)^2} = 12$ (km).

b) Hai tàu gặp nhau khi tại cùng một thời điểm t chúng có cùng toạ độ: $3t = 20-t$ và $4t = 4t$ $\Leftrightarrow t = 5$. Vậy hai tàu gặp nhau sau 5 giờ, tức là lúc 12 giờ, tại điểm $E(15;20)$.



c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ (km/h), $|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$ (km/h). Vậy tàu P chạy nhanh hơn.

2 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	B	C	D	D	B	C	D	C	B	A

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	S	S	Đ
2	Đ	Đ	Đ	Đ
3	S	Đ	Đ	S
4	Đ	S	S	Đ

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	10	4,12	12	6	7,6	10

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Toạ độ của vectơ $\vec{a} = -4\vec{j}$ là

A. $(0;-4)$ **B.** $(-4;0)$ **C.** $(-4;-4)$ **D.** $(4;0)$

Lời giải

$\vec{a} = -4\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + (-4)\vec{j}$ nên $\vec{a} = (0;-4)$: hoành độ bằng 0, tung độ bằng -4.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Hai vectơ $\vec{u} = (x;y)$ và $\vec{v} = (x';y')$ bằng nhau khi và chỉ khi

A. $x = x'$ và $y = y'$ **B.** $x = y'$ và $y = x'$

C. $x + y = x' + y'$ **D.** $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$

Lời giải

Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ: $x = x'$ và $y = y'$.

Điều kiện $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ chỉ cho biết hai vectơ có cùng độ dài; chẳng hạn $(1;0)$ và $(0;1)$ có cùng độ dài nhưng không bằng nhau.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho $\vec{a} = (-1;3)$, $\vec{b} = (2;-5)$. Toạ độ của $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(-3;8)$ **B.** $(1;-2)$ **C.** $(1;8)$ **D.** $(-1;2)$

Lời giải

Cộng các toạ độ tương ứng: $\vec{a} + \vec{b} = \big(-1+2;3+(-5)\big) = (1;-2)$. (Vectơ $(-3;8)$ là $\vec{a} - \vec{b}$.)

Chọn đáp án B.

Câu 4. Cho điểm $M(-4;3)$. Độ dài OM bằng

A. 1 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 25

Lời giải

$\overrightarrow{OM} = (-4;3)$ nên $OM = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho $A(3;-2)$, $B(-1;4)$. Toạ độ của $\overrightarrow{BA}$ là

A. $(-4;-6)$ **B.** $(-4;6)$ **C.** $(2;2)$ **D.** $(4;-6)$

Lời giải

"Ngọn trừ gốc": $\overrightarrow{BA}=(x_A-x_B;y_A-y_B)=(3-(-1);-2-4)=(4;-6)$. Vectơ $(-4;6)$ là $\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án D.

Câu 6. Vectơ nào cùng hướng với $\vec{a}=(3;-2)$?

A. $(3;2)$ **B.** $(-6;4)$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(6;-4)$

Lời giải

$(6;-4)=2(3;-2)=2\vec{a}$ với $2>0$ nên vectơ $(6;-4)$ cùng hướng với $\vec{a}$.

Vectơ $(-6;4)=-2\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$; hai vectơ $(2;3)$, $(3;2)$ không cùng phương với $\vec{a}$ (vì $\frac{2}{3}\neq\frac{3}{-2}$ và $\frac{3}{3}\neq\frac{2}{-2}$).

Chọn đáp án D.

Câu 7. Cho $A(4;1)$, $B(-2;5)$, $C(1;-3)$. Trọng tâm tam giác ABC là

A. $(3;3)$ **B.** $(1;1)$ **C.** $(-1;1)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

$x_G=\frac{4+(-2)+1}{3}=1$, $y_G=\frac{1+5+(-3)}{3}=1$. Vậy trọng tâm là $G(1;1)$.

Chọn đáp án B.

Câu 8. Cho $A(3;1)$ và trung điểm của AB là $I(1;-2)$. Toạ độ điểm B là

A. $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(5;4)$ **C.** $(-1;-5)$ **D.** $(-5;-1)$

Lời giải

I là trung điểm của AB nên $x_B=2x_I-x_A=2\cdot 1-3=-1$, $y_B=2y_I-y_A=2\cdot(-2)-1=-5$. Vậy $B(-1;-5)$.

Chọn đáp án C.

Câu 9. Ba điểm $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(m;8)$ thẳng hàng khi

A. $m=8$ **B.** $m=6$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(1;2)\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}=(m-1;6)$. Ba điểm thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow m-1=k$ và $6=2k\Rightarrow k=3, m=4$.

Chọn đáp án D.

Câu 10. Hai vectơ $\vec{u}=(m;-3)$ và $\vec{v}=(2;1)$ cùng phương khi

A. $m=-\frac{3}{2}$ **B.** $m=6$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=\frac{3}{2}$

Lời giải

Vì $\vec{v}\neq\vec{0}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{u}=k\vec{v}$, tức là $m=2k$ và $-3=k$; suy ra $m=-6$. Khi đó $\vec{u}=(-6;-3)=-3\vec{v}$.

Chọn đáp án C.

Câu 11. Vectơ $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{a}=(3;-4)$ và có độ dài bằng 10 là

A. $(6;-8)$ **B.** $(-6;8)$ **C.** $(-3;4)$ **D.** $(8;-6)$

Lời giải

$\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nên $\vec{u} = k\vec{a}$ với $k < 0$. Vì $|\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{a}| = 5|k| = 10$ nên $k = -2$, tức là $\vec{u} = (-6; 8)$.

Vecto $(6; -8) = 2\vec{a}$ dài 10 nhưng cùng hướng với $\vec{a}$; vecto $(-3; 4)$ ngược hướng nhưng chỉ dài 5; vecto $(8; -6)$ dài 10 nhưng không cùng phương với $\vec{a}$.

Chọn đáp án B.

Câu 12. Một vật chuyển động thẳng đều trên mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên các trục: mét). Lúc bắt đầu quan sát, vật ở $A(1; 2)$; sau 2 giây vật ở $B(7; 10)$. Tốc độ của vật là

A. 5 m/s **B.** 10 m/s **C.** 7 m/s **D.** 14 m/s

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (6; 8)$ nên trong 2 giây vật đi được $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (m). Tốc độ của vật là $10 : 2 = 5$ (m/s). Giá trị 10 m/s là quãng đường chưa chia cho thời gian; giá trị 7 m/s là $\frac{6+8}{2}$, không phải độ dài vecto.

Chọn đáp án A.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$2\vec{a} + \vec{b} = (5; 3)$.	✓	
b)	$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\| = \sqrt{5}$.		✓
c)	$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.		✓
d)	Vecto $\vec{c} = (-1; 5)$ phân tích được thành $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $2\vec{a} = (2; 4)$ nên $2\vec{a} + \vec{b} = \big(2 + 3; 4 + (-1)\big) = (5; 3)$.

b) Sai. $\vec{a} - \vec{b} = \big(1 - 3; 2 - (-1)\big) = (-2; 3)$ nên $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \neq \sqrt{5}$. Giá trị $\sqrt{5}$ xuất hiện khi tính nhầm $2 - (-1) = 1$.

c) Sai. Nếu $\vec{b} = k\vec{a}$ thì $3 = k$ và $-1 = 2k$, tức là $k = 3$ và $k = -\frac{1}{2}$: vô lí. Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

d) Đúng. $2\vec{a} - \vec{b} = \big(2 - 3; 4 - (-1)\big) = (-1; 5) = \vec{c}$.

Câu 2. Cho $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$, $C(4; 1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AB = BC$.	✓	
b)	Tam giác ABC vuông tại B.	✓	
c)	Với $D(0; -2)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông.	✓	
d)	Với $D(0; -2)$, hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ nên $AB = 5$; $\overrightarrow{BC} = (3; -4)$ nên $BC = 5$. Vậy $AB = BC$.

b) Đúng. $\overrightarrow{AC} = (7;-1)$ nên $AC^2 = 50$; $AB^2 + BC^2 = 25 + 25 = 50 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B (định lí Pythagore đảo).

c) Đúng. $\overrightarrow{AD} = (0-(-3);-2-2) = (3;-4) = \overrightarrow{BC}$ nên $ABCD$ là hình bình hành. Hình bình hành này có $\widehat{ABC} = 90°$ (vì $AB^2 + BC^2 = AC^2$) và hai cạnh kề $AB = BC = 5$ nên là hình vuông.

d) Đúng. $\overrightarrow{AD} = (0-(-3);-2-2) = (3;-4) = \overrightarrow{BC}$ nên $ABCD$ là hình bình hành; hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Trung điểm của AC là $\left(\frac{-3+4}{2};\frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, trùng với trung điểm $\left(\frac{1+0}{2};\frac{5+(-2)}{2}\right)$ của BD. Vậy hai đường chéo cắt nhau tại $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 3. Cho $A(2;3)$, $B(-1;-3)$ và điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BA} = (-3;-6)$.		✓
b)	$M(0;-1)$.	✓	
c)	M là giao điểm của đường thẳng AB với trục tung.	✓	
d)	Đường thẳng AB cắt trục hoành tại $N(1;0)$.		✓

Lời giải

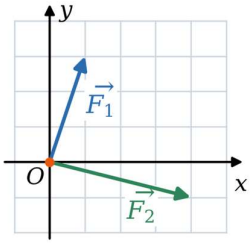
a) Sai. $\overrightarrow{BA} = \big(2-(-1);3-(-3)\big) = (3;6)$; vectơ $(-3;-6)$ là $\overrightarrow{AB}$.

b) Đúng. M thuộc đoạn AB và $MA = 2MB$ nên $AM = \frac{2}{3}AB$ và $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(-3;-6) = (-2;-4)$, suy ra $M(2-2;3-4) = (0;-1)$.

c) Đúng. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-2;-4)$ nên $M(0;-1)$ có hoành độ bằng 0, tức là M thuộc trục tung; M cũng thuộc đường thẳng AB, và đường thẳng AB không trùng với trục tung (vì $x_A = 2 \neq 0$) nên cắt trục tung tại đúng một điểm. Vậy M là giao điểm của AB với trục tung.

d) Sai. Gọi $N(x;0)$ là giao điểm của AB với trục hoành: $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow (x-2;-3) = k(-3;-6) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$, $x - 2 = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}$. Vậy AB cắt trục hoành tại $\left(\frac{1}{2};0\right)$, không phải $(1;0)$.

Câu 4. Một chất điểm O ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1} = (1;3)$, $\overrightarrow{F_2} = (4;-1)$ và $\overrightarrow{F_3}$ (đơn vị: N).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=(5;2)$.	✓	
b)	$\overrightarrow{F_3}=(5;2)$.		✓
c)	Độ lớn của $\overrightarrow{F_3}$ bằng 7 N.		✓
d)	Độ lớn hợp lực của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ nhỏ hơn $\left\|\overrightarrow{F_1}\right\|+\left\|\overrightarrow{F_2}\right\|$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\left(1+4;3+(-1)\right)=(5;2)$.

b) Sai. Chất điểm cân bằng nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)=(-5;-2)\neq(5;2)$; vectơ $(5;2)$ là hợp lực của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.

c) Sai. $\overrightarrow{F_3}=-\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)=(-5;-2)$ nên $\left|\overrightarrow{F_3}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{29}\approx 5{,}39$ (N), không phải 7 N.

d) Đúng. $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}\approx 5{,}39$; $\left|\overrightarrow{F_1}\right|+\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\sqrt{10}+\sqrt{17}\approx 7{,}29$. Vậy $5{,}39<7{,}29$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $A(-2;3)$, $B(4;-5)$. Tính độ dài AB.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(4-(-2);-5-3)=(6;-8)$.

Do đó $AB=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10$.

Đáp số: 10

Câu 2. Cho $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4)$. Tính $\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

$3\vec{a}=(6;-9)$, $2\vec{b}=(-2;8)$ nên $3\vec{a}+2\vec{b}=(4;-1)$.

$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}\approx 4{,}1231$. Làm tròn đến hàng phần trăm ta được 4,12.

Đáp số: 4,12

Câu 3. Hình bình hành $ABCD$ có $A(1;2)$, $B(5;3)$ và tâm $I(4;6)$. Biết $D(a;b)$, tính $a+b$.

Lời giải

Tâm I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD.

I là trung điểm của BD nên $a=2x_I-x_B=8-5=3$ và $b=2y_I-y_B=12-3=9$.

Vậy $D(3;9)$ và $a+b=12$. (Khi đó $C(7;10)$; $\overrightarrow{AB}=(4;1)$ và $\overrightarrow{AD}=(2;7)$ không cùng phương nên $ABCD$ đúng là hình bình hành.)

Đáp số: 12

Câu 4. Tìm m để $\vec{u}=(m;4)$ và $\vec{v}=(9;m)$ cùng hướng.

Lời giải

$\vec{u}=(m;4)\neq\vec{0}$. Hai vectơ cùng hướng $\Leftrightarrow$ có số $k>0$ sao cho $\vec{v}=k\vec{u}$, tức là $9=km$ và $m=4k$.

Thay $m=4k$: $4k^2=9\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$ hoặc $k=-\frac{3}{2}$; vì $k>0$ nên $k=\frac{3}{2}$, suy ra $m=6$.

Kiểm tra: $\vec{u}=(6;4)$, $\vec{v}=(9;6)=\frac{3}{2}\vec{u}$. (Với $m=-6$ hai vectơ ngược hướng.)

Đáp số: 6

Câu 5. Cho $A(1;1)$, $B(7;9)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc đoạn AB sao cho $AM=4$. Tính $x+y$.

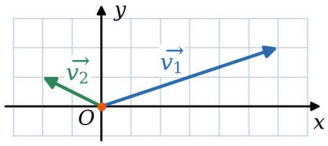
Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(6;8)$ nên $AB=10$. Vì M thuộc đoạn AB và $AM=4=\frac{4}{10}AB$ nên $\overrightarrow{AM}=0{,}4\,\overrightarrow{AB}=(2{,}4;3{,}2)$.

Suy ra $M(1+2{,}4;1+3{,}2)=(3{,}4;4{,}2)$, do đó $x+y=7{,}6$.

Đáp số: 7,6

Câu 6. Một thuyền máy xuất phát từ $O(0;0)$. Vận tốc riêng của thuyền (khi nước đứng yên) là $\vec{v_1}=(6;2)$, vận tốc của dòng nước là $\vec{v_2}=(-2;1)$ (đơn vị vận tốc: km/h; đơn vị độ dài trên các trục: km). Sau 2 giờ, thuyền cách O bao nhiêu kilômét?



Lời giải

Vận tốc thực của thuyền bằng tổng vận tốc riêng và vận tốc dòng nước: $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}=(6+(-2);2+1)=(4;3)$ (km/h).

Sau 2 giờ thuyền ở điểm M với $\overrightarrow{OM}=2\vec{v}=(8;6)$, nên $OM=\sqrt{8^2+6^2}=10$ (km).

Đáp số: 10

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho $A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(-1;4)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A và tính diện tích của nó.

b) Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm E sao cho A là trọng tâm của tam giác BCE.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}=(3;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;3)$, $\overrightarrow{BC}=(-5;1)$, nên $AB=AC=\sqrt{13}$ và $BC=\sqrt{26}$.

Vì $AB^2+AC^2=13+13=26=BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A (định lí Pythagore đảo); lại có $AB=AC$ nên tam giác ABC vuông cân tại A. Diện tích: $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{13}{2}$.

b) Tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của cạnh huyền BC: $I\left(\frac{4+(-1)}{2};\frac{3+4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$, và $R=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$.

c) A là trọng tâm tam giác BCE $\Leftrightarrow x_E=3x_A-x_B-x_C=3-4+1=0$ và $y_E=3y_A-y_B-y_C=3-3-4=-4$.

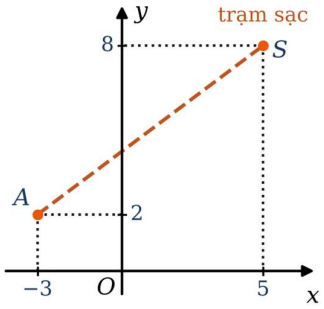
Kiểm tra B, C, E không thẳng hàng: $\overrightarrow{BC}=(-5;1)$, $\overrightarrow{BE}=(-4;-7)$ và $(-5)\cdot(-7)-1\cdot(-4)=39\neq 0$. Vậy $E(0;-4)$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một xe tự hành ở vị trí $A(-3;2)$ cần chạy thẳng về trạm sạc $S(5;8)$ với tốc độ không đổi 20 km/h (đơn vị độ dài trên các trục: km).

a) Tính quãng đường và thời gian xe chạy về tới trạm.

b) Tìm vị trí của xe sau 12 phút kể từ lúc xuất phát.

c) Trên đường đi, sau bao nhiêu phút kể từ lúc xuất phát thì xe đi qua điểm có tung độ bằng 5? Tìm toạ độ của điểm đó.



Lời giải

a) $\overrightarrow{AS} = (5-(-3); 8-2) = (8; 6)$, quãng đường $AS = \sqrt{8^2+6^2} = 10$ (km). Thời gian: $\frac{10}{20} = 0{,}5$ (giờ), tức là 30 phút.

b) 12 phút $= \frac{1}{5}$ giờ, xe đi được $20 \cdot \frac{1}{5} = 4$ (km). Gọi M là vị trí của xe khi đó thì M thuộc đoạn AS và $AM = 4 = 0{,}4\,AS$, nên $\overrightarrow{AM} = 0{,}4\,\overrightarrow{AS} = (3{,}2; 2{,}4)$, suy ra $M(-3+3{,}2; 2+2{,}4) = (0{,}2; 4{,}4)$.

c) Điểm N trên đoạn AS thoả mãn $\overrightarrow{AN} = s\,\overrightarrow{AS} = (8s; 6s)$ với $0 \le s \le 1$, nên $N(-3+8s; 2+6s)$. Tung độ bằng $5 \Leftrightarrow 2+6s = 5 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}$; khi đó $N(1; 5)$ là trung điểm của AS.

Xe đi được $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (km), mất $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ giờ, tức là 15 phút. Vậy sau 15 phút kể từ lúc xuất phát, xe đi qua điểm $N(1; 5)$.

BÀI 11

CHƯƠNG IV. VECTƠ

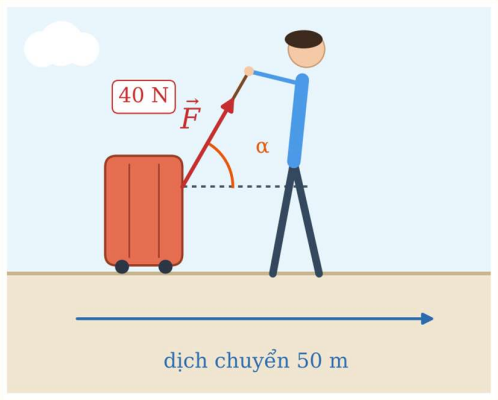
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

◎ MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Xác định được góc giữa hai vectơ; tính được tích vô hướng theo định nghĩa và theo toạ độ.
- Vận dụng các tính chất của tích vô hướng để tính độ dài, tính góc, chứng minh đẳng thức và chứng minh hai đường thẳng vuông góc.
- Giải các bài toán toạ độ: tam giác vuông, trực tâm, hình chiếu vuông góc, điểm nhìn một đoạn thẳng dưới góc vuông.
- Vận dụng tích vô hướng vào thực tiễn: công của lực, phân tích lực, công suất của tấm pin mặt trời.

✦ CÂU CHUYỆN MỞ ĐẦU · Kéo vali – sức lực đi đâu?

Ở sân bay, An kéo chiếc vali bằng tay kéo chếch lên, còn Bình đẩy vali theo phương ngang. Cả hai đều dùng lực 40 N và cùng đưa vali đi được 50 m. Theo nghĩa Vật lí, ai **sinh công** lớn hơn?



Vật lí cho biết: nếu lực $\vec{F}$ làm vật dịch chuyển từ M đến N thì công của lực là $A = |\vec{F}| \cdot MN \cdot \cos\alpha$, với α là góc giữa lực và hướng dịch chuyển. Bình đẩy theo phương ngang nên $\alpha = 0^\circ$ và $A = 2000$ J. An kéo tay kéo hợp với phương ngang góc 60° nên công chỉ còn 1000 J: phần lực hướng lên trên, vuông góc với hướng đi, không sinh công.

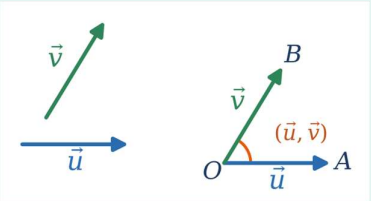
Biểu thức "độ dài nhân độ dài nhân côsin của góc xen giữa" xuất hiện rất nhiều trong Toán học và Vật lí. Người ta gọi nó là **tích vô hướng** của hai vectơ. Lời giải đầy đủ ở Ví dụ 21.

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai vectơ

◆ ĐỊNH NGHĨA

Cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm O tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Số đo của góc AOB gọi là **góc giữa hai vectơ** $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



- $0° \le (\vec{u},\vec{v}) \le 180°$ và $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})$.
- Nếu $(\vec{u},\vec{v}) = 90°$ thì ta nói $\vec{u}$ **vuông góc** với $\vec{v}$, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- $(\vec{u},\vec{v}) = 0°$ khi và chỉ khi hai vectơ cùng hướng; $(\vec{u},\vec{v}) = 180°$ khi và chỉ khi hai vectơ ngược hướng.
- Quy ước: góc giữa $\vec{0}$ và một vectơ bất kì có thể nhận giá trị tuỳ ý từ $0°$ đến $180°$; vectơ $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

Chú ý: để tìm góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, phải **đưa hai vectơ về chung gốc**, chẳng hạn vẽ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \widehat{DBC} = 180° - \widehat{ABC}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

★ ĐỊNH NGHĨA

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$ là một **số**, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, xác định bởi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u},\vec{v}).$$

- Quy ước: nếu $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Bình phương vô hướng:** $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.
- Với $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 0° \le (\vec{u},\vec{v}) < 90°$; $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow 90° < (\vec{u},\vec{v}) \le 180°$.

3. Biểu thức toạ độ và tính chất

★ BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Với $\vec{u} = (x;y)$, $\vec{v} = (x';y')$:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$; $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$;
- $|\vec{u}|^2 = x^2 + y^2$, tức là $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$ với $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

◆ TÍNH CHẤT

Với mọi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ và mọi số thực k:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (giao hoán); $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (phân phối);
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$;
- $(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.
- Hệ quả: với mọi tam giác ABC, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ (bình phương hai vế của $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$).

✱ ỨNG DỤNG

- Công của lực $\vec{F}$ làm vật dịch chuyển từ M đến N: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = \left|\vec{F}\right| \cdot MN \cdot \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{MN}\right)$.
- Tính độ dài: bình phương vô hướng $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2$ rồi lấy căn bậc hai. Tính góc: dùng công thức $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- Chứng minh vuông góc, tìm trực tâm, chân đường cao: dùng điều kiện $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Góc giữa hai vectơ – Tích vô hướng theo định nghĩa

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

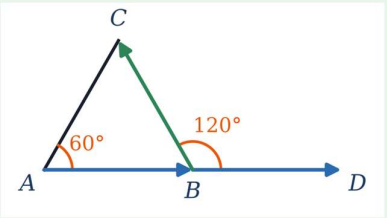
- Đưa hai vectơ về **chung gốc** (dùng vectơ bằng nhau hoặc vectơ đối) rồi đọc góc trên hình.
- Tính $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ và góc $(\vec{u}, \vec{v})$, rồi áp dụng $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- Đổi hướng một vectơ thì tích vô hướng đổi dấu: $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$; chẳng hạn $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Khi khó xác định góc: phân tích các vectơ theo hai vectơ đã biết độ dài và tích vô hướng của chúng, rồi khai triển như nhân đa thức.
- *Sai lầm thường gặp:* coi $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$ là góc $\widehat{ABC}$. Hai vectơ này không chung gốc; thực ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \widehat{ABC}$.

▶ **Ví dụ 1.** Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$ và các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ chung gốc A nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 60^\circ$. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

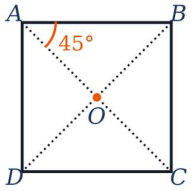
Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ chưa chung gốc. Lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$, khi đó D nằm trên tia đối của tia BA và $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{DBC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 60^\circ$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 120^\circ$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

▶ **Ví dụ 2.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$.



Lời giải

Hình vuông cạnh a có hai đường chéo $AC=BD=a\sqrt{2}$, vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường, và $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=45°$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos45°=a^2$.

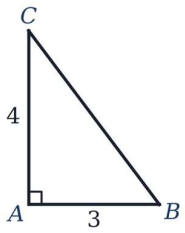
$AC\perp BD$ nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}^2=-a^2$.

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, nên $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos45°=\frac{a^2}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-a^2$ và $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$.

▶ **Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3$, $AC=4$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.



Lời giải

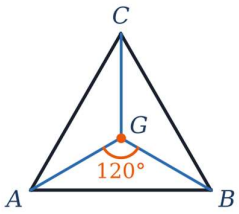
Theo định lí Pythagore, $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$, nên $\cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ chung gốc B nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\cdot BC\cdot\cos B=3\cdot5\cdot\frac{3}{5}=9$.

Vì $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-9$.

Vậy $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-9$.

▶ **Ví dụ 4.** (**Vận dụng**) Cho tam giác đều ABC cạnh a có trọng tâm G. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ và $T=\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$.



Lời giải

Trong tam giác đều, trọng tâm G cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp và AG là tia phân giác của góc A. Đường trung tuyến có độ dài $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên $GA=GB=GC=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=\widehat{BAG}=30°$, nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Cách 1 (tính từng tích): mỗi góc $\widehat{AGB}$, $\widehat{BGC}$, $\widehat{CGA}$ bằng $120°$, nên mỗi tích trong T bằng $\frac{a^2}{3}\cdot\cos 120° = -\frac{a^2}{6}$. Do đó $T = 3\cdot\left(-\frac{a^2}{6}\right) = -\frac{a^2}{2}$.

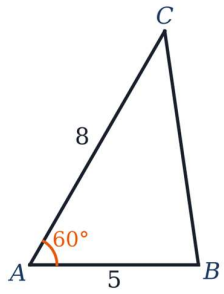
Cách 2 (không cần góc): G là trọng tâm nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Bình phương vô hướng hai vế: $GA^2+GB^2+GC^2+2T=0$, tức là $3\cdot\frac{a^2}{3}+2T=0$, suy ra $T=-\frac{a^2}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\frac{a^2}{2}$ và $T=-\frac{a^2}{2}$. Cách 2 dùng được cho mọi tam giác: $T=-\frac{1}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$.

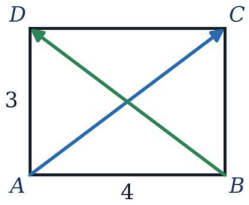
✎ Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

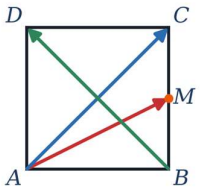
Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $\hat{A}=60°$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, rồi dùng đẳng thức $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ để tính BC.



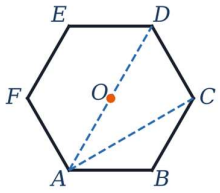
Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4$, $AD=3$. Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.



Bài 4. (**Vận dụng**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$.



Bài 5. (**Vận dụng**) Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a, tâm O. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$.



Bài 6. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Dạng 2. Tích vô hướng theo toạ độ – Góc – Điều kiện vuông góc

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$; $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{xx'+yy'}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, rồi suy ra góc.
- Nhận ra góc đặc biệt qua giá trị côsin: 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; nếu không phải giá trị đặc biệt thì dùng máy tính cầm tay và làm tròn theo yêu cầu.
- Tìm tham số để hai vectơ vuông góc: giải phương trình $xx'+yy'=0$.
- Góc giữa hai vectơ khác $\vec{0}$ là góc nhọn khi và chỉ khi $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ **và** hai vectơ không cùng hướng; là góc tù khi và chỉ khi $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ **và** hai vectơ không ngược hướng.
- *Chú ý:* $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (bình phương hai vế rồi rút gọn).

▶ **Ví dụ 5.** Cho $\vec{u}=(1;2)$, $\vec{v}=(-1;3)$. Tính $\vec{u}\cdot\vec{v}$ và góc giữa hai vectơ.

Lời giải

$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot(-1)+2\cdot3=5$; $|\vec{u}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$ và $(\vec{u},\vec{v})=45^\circ$.

▶ **Ví dụ 6.** Tìm m để $\vec{u}=(m;2)$ vuông góc với $\vec{v}=(3;-6)$.

Lời giải

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow3m+2\cdot(-6)=0\Leftrightarrow3m=12\Leftrightarrow m=4$.

Vậy $m=4$; khi đó $\vec{u}=(4;2)$ và $\vec{u}\cdot\vec{v}=12-12=0$.

▶ **Ví dụ 7.** (**Vận dụng**) Cho $\vec{a}=(2;1)$ và $\vec{b}=(m;3)$. Tìm m để góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn.

Lời giải

Hai vectơ đều khác $\vec{0}$. Góc giữa chúng là góc nhọn khi và chỉ khi $\cos(\vec{a},\vec{b})>0$ và $(\vec{a},\vec{b})\neq0^\circ$, tức là $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng hướng.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2m+3>0\Leftrightarrow m>-\frac{3}{2}$.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng khi $\vec{b}=k\vec{a}$ với $k>0$: từ tung độ, $3=k\cdot1$ nên $k=3$; từ hoành độ, $m=2k=6$. Vậy hai vectơ cùng hướng khi và chỉ khi $m=6$.

Vậy góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn khi và chỉ khi $m>-\frac{3}{2}$ và $m\neq6$.

Sai lầm thường gặp: chỉ giải $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ và quên loại trường hợp góc bằng 0°.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 7. Cho $\vec{a}=(3;4)$, $\vec{b}=(-1;2)$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ và góc giữa $\vec{a}$, $\vec{b}$ (làm tròn đến độ).

Bài 8. Tìm m để $\vec{a}=(m;1)$ vuông góc với $\vec{b}=(2;m-3)$.

Bài 9. Tìm các vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}=(1;-2)$ và có độ dài bằng $2\sqrt{5}$.

Bài 10. (**Vận dụng**) Cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(3;-1)$. Tìm số thực k để vectơ $k\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

Bài 11. (**Vận dụng**) Cho $\vec{u}=(m;1)$ và $\vec{v}=(1;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ bằng $60°$.

Bài 12. (**Vận dụng cao**) Cho $\vec{u}=(m;2)$ và $\vec{v}=(m+1;-3)$. Tìm m để $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$.

Dạng 3. Vận dụng tính chất – Độ dài, góc, đẳng thức, cực trị

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Độ dài: $|\vec{u}\pm\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\pm2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$, rồi lấy căn bậc hai.
- Ngược lại, từ độ dài suy ra tích vô hướng: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2)$.
- Độ dài trung tuyến: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ nên $AM^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2\right)$.
- Chứng minh đẳng thức: chèn điểm (trung điểm, trọng tâm, tâm) theo quy tắc ba điểm để xuất hiện các vectơ đối nhau hoặc có tổng bằng $\vec{0}$.
- Kết quả hay dùng: nếu I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$ với mọi điểm M.

▶ **Ví dụ 8.** Cho $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\vec{b})=120°$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $|2\vec{a}-\vec{b}|$.

Lời giải

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos120°=-6$.

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=9-12+16=13$, nên $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$.

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=36+24+16=76$, nên $|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{19}$.

Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ và $|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{19}$.

▶ **Ví dụ 9.** Cho $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=4$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

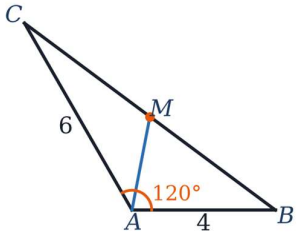
Lời giải

Từ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$ ta có $16=4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9$, suy ra $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$.

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3}{2}:6=\frac{1}{4}$.

Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$ và $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{4}$.

▶ **Ví dụ 10.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, \widehat{BAC} = 120°$; M là trung điểm của BC. Tính độ dài trung tuyến AM và côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}$.



Lời giải

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 120° = -12.$

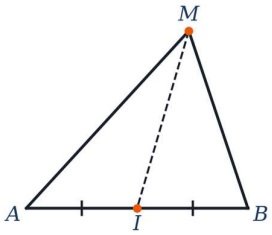
M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Do đó $AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2\right) = \frac{1}{4}(16 - 24 + 36) = 7$, suy ra $AM = \sqrt{7}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, nên $BC^2 = 36 + 24 + 16 = 76$, $BC = 2\sqrt{19}$; và $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}(36 - 16) = 10.$

$\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{10}{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{133}} \approx 0{,}434.$

Vậy $AM = \sqrt{7}$ và $\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{5}{\sqrt{133}}$.

▶ **Ví dụ 11.** (**Vận dụng**) Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Chứng minh rằng với mọi điểm M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$. Áp dụng: tính $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ khi $AB = 6, MI = 5$.



Lời giải

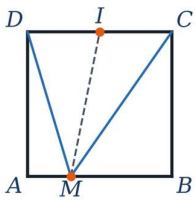
Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

Do đó $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - IA^2$ (đpcm).

Áp dụng: $IA = 3$ nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 25 - 9 = 16$.

▶ **Ví dụ 12.** (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 1. Điểm M thay đổi trên cạnh AB. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.



Lời giải

Gọi I là trung điểm của CD. Theo Ví dụ 11 (áp dụng cho đoạn CD): $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2-IC^2=MI^2-\frac{1}{4}$.

Do đó bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của MI khi M chạy trên cạnh AB.

Gọi K là trung điểm của AB thì $IK\perp AB$ và $IK=1$; $MI^2=IK^2+KM^2=1+KM^2$ với $0\le KM\le\frac{1}{2}$.

Do đó $1\le MI^2\le\frac{5}{4}$, suy ra $\frac{3}{4}\le\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}\le 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$, đạt khi M là trung điểm của AB; giá trị lớn nhất bằng 1, đạt khi M trùng A hoặc B. (Kiểm tra: khi $M\equiv A$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=1$.)

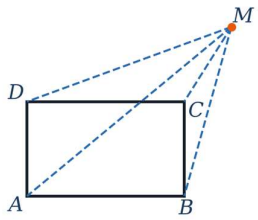
✎ Bài tập luyện tập

Bài 13. Cho $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$. Tính góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 14. Cho $\vec{a}\perp\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=7$, $BC=8$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, số đo góc A và độ dài đường trung tuyến AM.

Bài 16. (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm M tuỳ ý. Chứng minh $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.



Bài 17. (**Vận dụng**) Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả mãn $\vec{a}+2\vec{b}$ vuông góc với $5\vec{a}-4\vec{b}$. Tính góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 18. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác đều ABC cạnh 3, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=3MG^2-\frac{9}{2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của vế trái.

Bài 19. (**Vận dụng cao**) Chứng minh rằng với bốn điểm A, B, C, D bất kì: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (hệ thức Euler). Từ đó chứng minh ba đường cao của một tam giác đồng quy.

Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc – Tính góc trong hình học

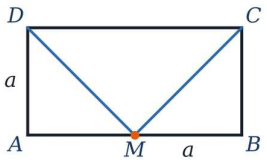
⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chọn hai vectơ "cơ sở" chung gốc đã biết độ dài và tích vô hướng (chẳng hạn hai cạnh kề của hình vuông, hình chữ nhật, tam giác).
- Phân tích các vectơ cần xét theo hai vectơ cơ sở (quy tắc ba điểm, trung điểm, trọng tâm).
- Khai triển tích vô hướng: bằng 0 thì hai đường thẳng vuông góc; khác 0 thì dùng công thức

côsin để tính góc giữa hai vectơ.

- *Chú ý:* với hình vuông, hình chữ nhật có thể chọn hệ trục toạ độ rồi tính như Dạng 2; hai cách cho cùng kết quả.

▶ **Ví dụ 13.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = a$; M là trung điểm của AB. Chứng minh $MC \perp MD$.



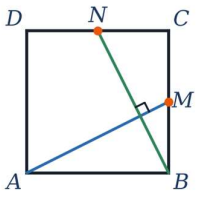
Lời giải

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$, với $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MB}\right) = BC^2 - MB^2 = a^2 - a^2 = 0$.

Vậy $MC \perp MD$, tức là $\widehat{CMD} = 90°$.

▶ **Ví dụ 14.** (**Vận dụng**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a; M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Chứng minh $AM \perp BN$ và tính $\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right)$.



Lời giải

Chọn hai vectơ cơ sở $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$: $AB = AD = a$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

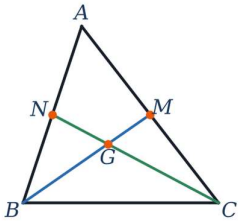
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$, nên $AM \perp BN$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$; $AM^2 = AN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$.

Vậy $AM \perp BN$ và $\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right) = \frac{a^2}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{4}{5}$.

▶ **Ví dụ 15.** (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; M, N lần lượt là trung điểm của CA, AB. Chứng minh hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau khi và chỉ khi $b^2 + c^2 = 5a^2$.



Lời giải

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Theo Dạng 1, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}$; $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$.

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \frac{1}{2}\vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{5}{4}\vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{1}{2}(b^2+c^2)$.

Thay $\vec{u}\cdot\vec{v}$: $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CN} = \frac{5(b^2+c^2-a^2)}{8} - \frac{4(b^2+c^2)}{8} = \frac{b^2+c^2-5a^2}{8}$.

Vậy $BM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 = 5a^2$ (đpcm).

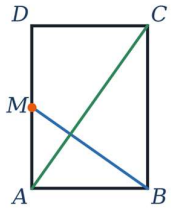
Chẳng hạn tam giác có $a = 2$, $b = c = \sqrt{10}$ có hai trung tuyến BM, CN vuông góc.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 20. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Dùng tích vô hướng, chứng minh $AM \perp BC$.

Bài 21. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi nó là hình thoi.

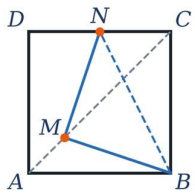
Bài 22. (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$; M là trung điểm của AD. Chứng minh $BM \perp AC$.



Bài 23. (**Vận dụng**) Cho tam giác đều ABC cạnh a, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Tính độ dài AM và côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}$.

Bài 24. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$, $\hat{A} = 60°$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{BC}$. Tìm k để $AM \perp BC$, rồi tính BM.

Bài 25. (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Điểm M thuộc đường chéo AC sao cho $AM = \frac{1}{4}AC$, N là trung điểm của CD. Chứng minh tam giác BMN vuông cân.



Dạng 5. Ứng dụng trong mặt phẳng toạ độ

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$; góc A: $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}$.
- Trực tâm $H(x;y)$: giải hệ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.
- Hình chiếu vuông góc H của điểm A trên đường thẳng BC (chân đường cao): $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$ và

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$; điểm đối xứng của A qua BC là A' với H là trung điểm của AA'.

- Điểm M (khác A, B) nhìn đoạn AB dưới góc vuông: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
- Cực trị của $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ khi M chạy trên một đường: viết thành hàm bậc hai theo toạ độ của M, hoặc dùng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$ (I là trung điểm AB).

▶ Ví dụ 16. Cho $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(5;-1)$. Chứng minh tam giác ABC vuông cân. Tính diện tích tam giác và số đo góc B.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(2;4)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-2)$, nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8-8=0$, tức là $AB\perp AC$.

$AB=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$ và $AC=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$, nên tam giác ABC vuông cân tại A.

Diện tích: $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=10$. Tam giác vuông cân tại A nên $\hat{B}=45°$.

Kiểm tra bằng tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}=(-2;-4)$, $\overrightarrow{BC}=(2;-6)$, $\cos B=\frac{-4+24}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A, có diện tích bằng 10 và $\hat{B}=45°$.

▶ Ví dụ 17. Tìm trực tâm H của tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;-2)$, $C(4;1)$.

Lời giải

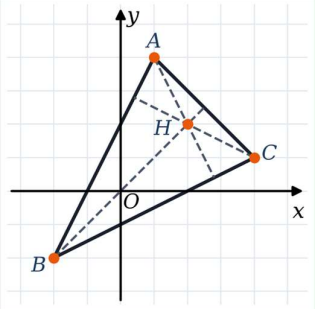
Gọi $H(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{BC}=(6;3)$, $\overrightarrow{AC}=(3;-3)$, $\overrightarrow{AH}=(x-1;y-4)$, $\overrightarrow{BH}=(x+2;y+2)$.

– $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 6(x-1)+3(y-4)=0\Leftrightarrow 2x+y=6$;

– $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 3(x+2)-3(y+2)=0\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào $2x+y=6$ được $x=y=2$.

Kiểm tra: $\overrightarrow{CH}=(-2;1)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;-6)$, $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=6-6=0$. Vậy trực tâm là $H(2;2)$.



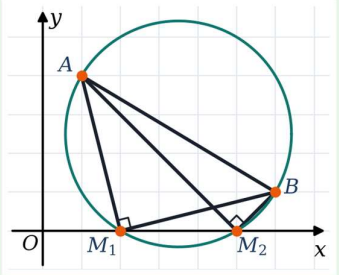
▶ Ví dụ 18. Cho $A(1;4)$, $B(6;1)$. Tìm các điểm M trên trục hoành sao cho $\widehat{AMB}=90°$.

Lời giải

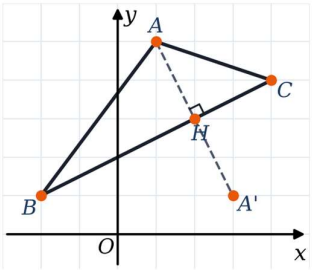
M thuộc trục hoành nên $M(x;0)$; $\overrightarrow{MA}=(1-x;4)$, $\overrightarrow{MB}=(6-x;1)$.

$\widehat{AMB}=90°\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow(1-x)(6-x)+4=0\Leftrightarrow x^2-7x+10=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=5$.

Vậy có hai điểm thoả mãn là $M_1(2;0)$ và $M_2(5;0)$. Đó là giao điểm của trục hoành với đường tròn đường kính AB.



▶ **Ví dụ 19.** (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC với $A(1;5), B(-2;1), C(4;4)$. Tìm toạ độ chân đường cao H kẻ từ A, toạ độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng BC, và tính diện tích tam giác ABC.



Lời giải

H thuộc đường thẳng BC nên $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC} = t(6;3)$, suy ra $H(-2+6t; 1+3t)$ và $\overrightarrow{AH} = (6t-3; 3t-4)$.

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 6(6t-3) + 3(3t-4) = 0 \Leftrightarrow 45t - 30 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$. Vậy $H(2;3)$.

H là trung điểm của AA' nên $A'(2\cdot 2 - 1; 2\cdot 3 - 5) = (3;1)$.

$\overrightarrow{AH} = (1;-2)$, $AH = \sqrt{5}$; $BC = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$. Diện tích $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{15}{2}$.

Vậy $H(2;3)$, $A'(3;1)$ và $S_{ABC} = \frac{15}{2}$.

▶ **Ví dụ 20.** (**Vận dụng cao**) Cho $A(1;2), B(5;4)$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $M(x;0)$: $\overrightarrow{MA} = (1-x;2)$, $\overrightarrow{MB} = (5-x;4)$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1-x)(5-x) + 8 = x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$, dấu bằng xảy ra khi $x = 3$.

Vậy $M(3;0)$ và giá trị nhỏ nhất bằng 4.

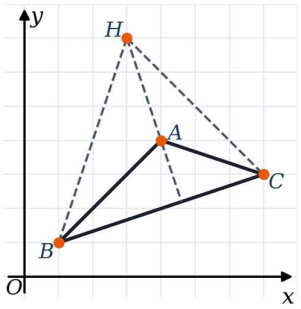
Cách nhìn hình học: gọi $I(3;3)$ là trung điểm của AB, ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 5$. Giá trị nhỏ nhất ứng với MI nhỏ nhất, tức là M là hình chiếu của I trên trục hoành; khi đó $MI = 3$ và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9 - 5 = 4$.

✎ Bài tập luyện tập

Bài 26. Cho $A(1;1), B(5;3), C(4;5)$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại B. Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật và tính diện tích hình chữ nhật đó.

Bài 27. Giải tam giác ABC (tính các cạnh và các góc, số đo góc làm tròn đến độ) với $A(1;2)$, $B(5;3)$, $C(2;6)$.

Bài 28. (**Vận dụng**) Tìm trực tâm H của tam giác ABC với $A(4;4)$, $B(1;1)$, $C(7;3)$. Nhận xét vị trí của H so với tam giác.



Bài 29. (**Vận dụng**) Cho $A(2;1)$, $B(6;3)$. Tìm điểm C trên trục tung sao cho tam giác ABC vuông.

Bài 30. (**Vận dụng**) Cho $A(0;2)$, $B(4;0)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 31. (**Vận dụng cao**) Cho $A(1;1)$, $B(6;2)$. Có bao nhiêu điểm C trên trục hoành, có hoành độ là số nguyên, sao cho góc $\widehat{ACB}$ là góc tù?

Dạng 6. Bài toán thực tế – Công của lực

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Công của lực không đổi $\vec{F}$ làm vật dịch chuyển từ M đến N: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = \left|\vec{F}\right| \cdot MN \cdot \cos\alpha$, với α là góc giữa lực và hướng dịch chuyển. Nếu $\vec{F} = (x;y)$, $\overrightarrow{MN} = (x';y')$ thì $A = xx' + yy'$.
- Lực đo bằng N, quãng đường đo bằng m thì công đo bằng J. Khi $0° \le \alpha < 90°$: $A > 0$; khi $\alpha = 90°$: $A = 0$; khi $90° < \alpha \le 180°$: $A < 0$ (công cản).
- Phân tích $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1}$ cùng phương, $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với hướng dịch chuyển: $\overrightarrow{F_2}$ không sinh công, công của $\vec{F}$ bằng công của $\overrightarrow{F_1}$.
- Nhiều lực cùng tác dụng: tổng công bằng công của hợp lực, $\overrightarrow{F_1} \cdot \vec{d} + \overrightarrow{F_2} \cdot \vec{d} = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right) \cdot \vec{d}$.
- *Sai lầm thường gặp:* dùng góc giữa lực và phương ngang trong khi vật chuyển động trên mặt dốc. Phải dùng góc giữa lực và **hướng dịch chuyển**.

▶ **Ví dụ 21.** (**Giải câu chuyện mở đầu**) An kéo vali bằng lực 40 N theo tay kéo hợp với phương ngang góc 60°, đi được 50 m; Bình đẩy vali bằng lực 40 N theo phương ngang, cũng đi được 50 m. Tính công mỗi bạn sinh ra.

Lời giải

Áp dụng $A = \left|\vec{F}\right| \cdot MN \cdot \cos\alpha$ với $\left|\vec{F}\right| = 40$ N, $MN = 50$ m.

An: $\alpha = 60°$, $A_1 = 40 \cdot 50 \cdot \cos 60° = 1000$ (J). Bình: $\alpha = 0°$, $A_2 = 40 \cdot 50 \cdot \cos 0° = 2000$ (J).

Lực của An gồm thành phần nằm ngang $40\cos 60° = 20$ (N) và thành phần thẳng đứng $40\sin 60° \approx 34{,}6$ (N). Thành phần thẳng đứng vuông góc với hướng dịch chuyển nên không sinh công.

Vậy Bình sinh công gấp đôi An.

▶ **Ví dụ 22.** Lực $\vec{F} = (3; 4)$ (N) làm vật dịch chuyển từ $M(1; 1)$ đến $N(5; 2)$ (đơn vị trên các trục là mét). Tính công của lực và góc giữa lực với hướng dịch chuyển (làm tròn đến độ).

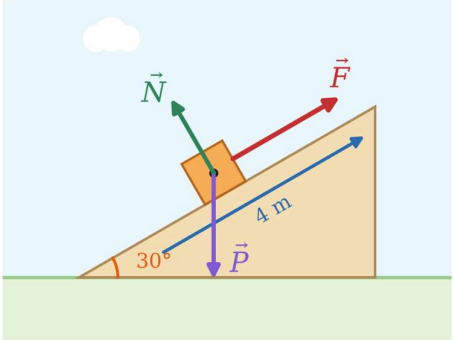
Lời giải

$\overrightarrow{MN} = (4; 1)$, nên công của lực là $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 16$ (J).

$|\vec{F}| = 5$, $MN = \sqrt{17}$, nên $\cos\alpha = \frac{16}{5\sqrt{17}} \approx 0{,}776$, suy ra $\alpha \approx 39°$.

Vậy công của lực bằng 16 J và góc giữa lực với hướng dịch chuyển xấp xỉ 39°.

▶ **Ví dụ 23.** (**Vận dụng**) Một công nhân kéo thùng hàng có trọng lượng $|\vec{P}| = 300$ N lên một mặt phẳng nghiêng góc 30° so với phương ngang, bằng lực $|\vec{F}| = 200$ N song song với mặt dốc; thùng đi được 4 m dọc theo mặt dốc. Tính công của lực kéo $\vec{F}$, của trọng lực $\vec{P}$ và của phản lực $\vec{N}$ (vuông góc với mặt dốc) trên quãng đường đó.



Lời giải

Hướng dịch chuyển là hướng đi lên dọc mặt dốc, hợp với phương ngang góc 30°.

Lực kéo cùng hướng với dịch chuyển: $A_F = 200 \cdot 4 \cdot \cos 0° = 800$ (J).

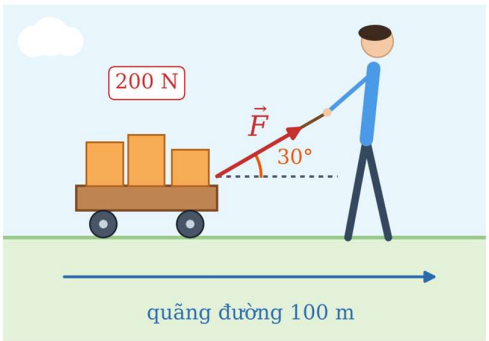
Trọng lực hướng thẳng xuống, còn hướng dịch chuyển chếch lên trên phương ngang 30°, nên góc giữa chúng bằng $90° + 30° = 120°$. Do đó $A_P = 300 \cdot 4 \cdot \cos 120° = -600$ (J).

Phản lực vuông góc với mặt dốc, tức là vuông góc với hướng dịch chuyển: $A_N = 0$.

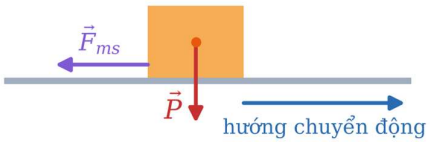
Vậy $A_F = 800$ J, $A_P = -600$ J (công cản), $A_N = 0$; tổng công bằng 200 J. *Nhận xét:* $|A_P| = 300 \cdot 2 = 600$ đúng bằng trọng lượng nhân độ cao thùng được nâng lên ($4\sin 30° = 2$ m).

✎ Bài tập luyện tập

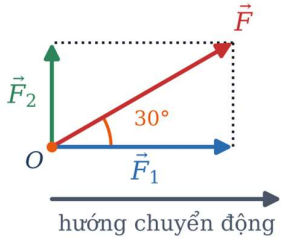
Bài 32. Một người kéo xe chở hàng với lực 200 N theo sợi dây hợp với phương ngang góc 30°; xe đi được 100 m trên đường nằm ngang. Tính công của lực kéo (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 33. Một hộp trượt 4 m trên mặt bàn nằm ngang. Tính công của trọng lực $\vec{P}$ và công của lực ma sát có độ lớn 15 N (ngược hướng chuyển động) trên quãng đường đó.

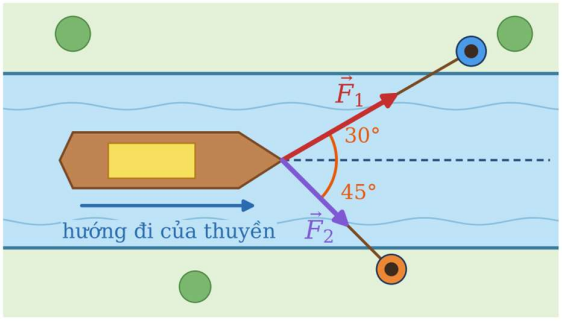


Bài 34. Lực $\vec{F}$ có độ lớn 50 N hợp với hướng chuyển động góc 30°. Phân tích $\vec{F}$ thành $\overrightarrow{F_1}$ cùng phương chuyển động và $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với phương chuyển động. Tính độ lớn mỗi lực thành phần và công của $\vec{F}$ trên quãng đường 10 m.



Bài 35. (**Vận dụng**) Một người kéo thùng gỗ đi 20 m trên sàn nằm ngang bằng sợi dây hợp với phương ngang góc 37°; yêu cầu lực kéo phải sinh công ít nhất 3000 J. Lực kéo phải có độ lớn tối thiểu bao nhiêu niutơn (làm tròn đến hàng đơn vị)? Nếu hạ dây xuống còn hợp với phương ngang góc 20° thì lực tối thiểu giảm bao nhiêu niutơn?

Bài 36. (**Vận dụng cao**) Hai người đứng trên hai bờ một con kênh thẳng, dùng hai sợi dây kéo một chiếc thuyền đi dọc theo kênh. Dây thứ nhất có lực kéo $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 400$ N và hợp với hướng đi của thuyền góc 30°; dây thứ hai hợp với hướng đi của thuyền góc 45° (về phía bờ bên kia).



a) Để thuyền không bị kéo lệch về phía bờ nào, các thành phần vuông góc với hướng đi của hai lực phải triệt tiêu nhau. Tính $\left|\overrightarrow{F_2}\right|$.

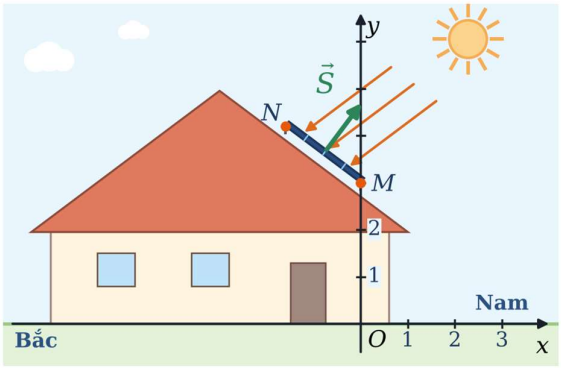
b) Tính tổng công của hai lực khi thuyền đi được 100 m (làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Nếu người thứ hai cũng kéo với lực 400 N (vẫn giữ góc 45°) thì thành phần lực đẩy thuyền lệch sang ngang có độ lớn bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)?

★ BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Những bài toán giàu ý tưởng, gắn với thực tiễn hoặc đòi hỏi tổng hợp nhiều kiến thức của bài. Hãy tự suy nghĩ trước khi xem lời giải ở phần Hướng dẫn giải.

Điểm nhấn 1. Tấm pin mặt trời trên mái nhà. Nhà bạn Minh ở Hà Nội lắp một tấm pin mặt trời hình chữ nhật trên mái nhà dốc về phía nam. Xét mặt cắt thẳng đứng theo hướng Bắc – Nam đi qua tấm pin và chọn hệ trục Oxy như hình: trục Ox nằm ngang, hướng về phía nam; trục Oy thẳng đứng, hướng lên trên; đơn vị trên mỗi trục là mét. Trong mặt cắt này, tấm pin là đoạn thẳng MN với $M(0;3)$, $N(-1{,}6;4{,}2)$; diện tích của tấm pin là 2 m².



Để tính lượng nắng tấm pin hứng được, các kĩ sư dùng hai vectơ nằm trong mặt cắt trên (toạ độ của chúng lấy theo hai trục Ox, Oy nhưng tính bằng đơn vị riêng):

• **Vectơ ánh nắng** $\vec{E}$: hướng từ tấm pin về phía Mặt Trời (ngược chiều tia nắng), có độ dài bằng cường độ bức xạ, tính bằng W/m².

• **Vectơ diện tích** $\vec{S}$ của tấm pin: vuông góc với đoạn MN, hướng về phía mặt hứng nắng (phía trên) của tấm pin, có độ dài bằng số đo diện tích tấm pin tính bằng m² (ở đây $|\vec{S}| = 2$).

Khi $\vec{E} \cdot \vec{S} > 0$, công suất bức xạ mà tấm pin nhận được (tính bằng W) là $P = \vec{E} \cdot \vec{S}$. (Lúc Mặt Trời lệch về phía đông hay phía tây, vectơ $\vec{E}$ cho dưới đây là phần ánh nắng đã được các kĩ sư quy về mặt cắt; công thức trên vẫn đúng.)

a) Tìm toạ độ của $\vec{S}$ và góc nghiêng của tấm pin so với phương ngang (làm tròn đến độ).

b) Lúc 9 giờ sáng một ngày mùa đông, $\overrightarrow{E_1} = (600;450)$. Tính công suất tấm pin nhận được và góc giữa $\overrightarrow{E_1}$ với $\vec{S}$ (làm tròn đến độ).

c) Giữa trưa một ngày mùa hè, Mặt Trời gần như ở đỉnh đầu và $\overrightarrow{E_2} = (0;1000)$. Tính công suất tấm pin nhận được. Công suất đó bằng bao nhiêu phần trăm công suất tấm pin nhận được nếu được đặt vuông góc với tia nắng?

d) Giữ nguyên điểm M và độ dài MN, người ta có thể xoay tấm pin đến vị trí MN_1 (N_1 ở phía bắc và cao hơn M). Tìm toạ độ của N_1 để lúc 9 giờ sáng ngày mùa đông nói ở câu b, tấm pin nhận được công suất lớn nhất. Tính công suất lớn nhất đó.

> ***Gợi ý***
> a) Gọi $\vec{S} = (x;y)$: điều kiện là $\vec{S} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $|\vec{S}| = 2$ và $y > 0$ ($\vec{S}$ hướng lên trên). b), c) Tính tích vô hướng theo toạ độ. d) Viết $P = \left|\overrightarrow{E_1}\right| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\left(\overrightarrow{E_1}, \vec{S}\right)$: khi nào côsin lớn nhất?

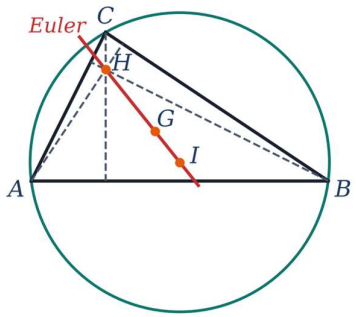
Điểm nhấn 2. Đường thẳng Euler. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, nội tiếp đường tròn tâm I bán kính R; G là trọng tâm của tam giác. Gọi H là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Từ đó suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh $\overrightarrow{IH} = 3\,\overrightarrow{IG}$, từ đó suy ra ba điểm I, G, H thẳng hàng.

c) Chứng minh $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=R^2-\frac{c^2}{2}$, rồi suy ra $IH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

d) Áp dụng cho $A(-1;1)$, $B(7;1)$, $C(1;7)$: tìm toạ độ của I, H và kiểm tra lại công thức ở câu c.



Gợi ý

a) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{IH}-\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}$; nhớ rằng $IB=IC=R$. c) Bình phương vô hướng hai vế của $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}$ và của $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.

C LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(Mỗi câu chỉ chọn một phương án.)*

Câu 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=70^\circ$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

A. 35° **B.** 70° **C.** 110° **D.** 145°

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin(\vec{u},\vec{v})$ **B.** $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

C. $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ **D.** $|\vec{u}+\vec{v}|$

Câu 3. Cho $\vec{a}=(2;-1)$, $\vec{b}=(3;4)$. Tích $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. 5 **B.** 10 **C.** -2 **D.** 2

Câu 4. Hai vectơ $\vec{u}=(4;m)$ và $\vec{v}=(2;-1)$ vuông góc khi

A. $m=-8$ **B.** $m=8$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-2$

Câu 5. Cho $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Tích $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. 5 **B.** 10 **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** -5

Câu 6. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$. Khẳng định nào sau đây đúng về góc giữa hai vectơ đó?

A. Góc đó là góc nhọn **B.** Góc đó là góc tù hoặc bằng 180°

C. Góc đó bằng 90° **D.** Góc đó bằng 0°

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2. Tích $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ bằng

A. 0 **B.** 4 **C.** -4 **D.** $-2\sqrt{2}$

Câu 8. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$ và $\vec{b}=\left(\sqrt{3};-1\right)$ bằng

A. 120° **B.** 60° **C.** 150° **D.** 30°

Câu 9. Cho $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$. Tam giác ABC

A. vuông tại C **B.** vuông tại B **C.** vuông tại A **D.** đều

Câu 10. Cho $\vec{u} = (3;4)$. Bình phương vô hướng $\vec{u}^2$ bằng

A. 25 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 49

Câu 11. Cho $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 12. Lực $\vec{F} = (2;3)$ (N) làm vật dịch chuyển theo vectơ $\vec{d} = (4;0)$ (m). Công của lực là

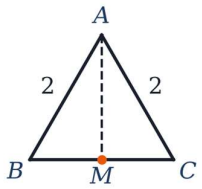
A. 8 J **B.** 12 J **C.** 20 J **D.** 0 J

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai *(Ở mỗi ý a), b), c), d) chọn Đúng hoặc Sai.)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-4;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4;4)$.	☐	☐
b)	$\|\vec{b}\| = 20$.	☐	☐
c)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 5$.	☐	☐
d)	$\cos(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.	☐	☐

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh 2 và M là trung điểm của cạnh BC.

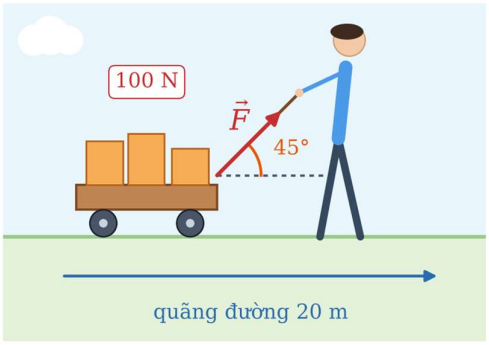


Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3$.	☐	☐

Câu 3. Cho $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(4;-1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$.	☐	☐
b)	Tam giác ABC vuông cân tại A.	☐	☐
c)	$\widehat{ABC} = 45°$.	☐	☐
d)	Điểm $M(3;0)$ thoả mãn $\widehat{AMB} = 90°$.	☐	☐

Câu 4. Một người kéo xe chở hàng bằng sợi dây hợp với phương ngang góc 45°, lực kéo có độ lớn 100 N; xe đi được 20 m trên đường nằm ngang.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Công của lực kéo bằng $1000\sqrt{2}$ J.	☐	☐
b)	Nếu kéo theo phương ngang với lực có cùng độ lớn thì công của lực kéo lớn hơn.	☐	☐
c)	Thành phần của lực kéo vuông góc với mặt đường sinh công dương.	☐	☐
d)	Muốn công của lực kéo chỉ bằng 1000 J (cùng độ lớn lực, cùng quãng đường) thì dây phải hợp với phương ngang góc 60°.	☐	☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (4; 5)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Tìm số thực m để vectơ $\vec{u} = (m; 3)$ vuông góc với vectơ $\vec{v} = (6; -4)$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với $\vec{a} + 2\vec{b}$. Tính số đo góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Một vật chịu tác dụng đồng thời của hai lực không đổi $\overrightarrow{F_1} = (2; 3)$ và $\overrightarrow{F_2} = (4; -1)$ (đơn vị N), dịch chuyển từ $M(1; 2)$ đến $N(6; 4)$ (đơn vị trên các trục là mét). Tính tổng công của hai lực (theo đơn vị J).

Đáp số: ☐☐☐☐

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Góc $(\vec{a}, \vec{b})$ bằng

A. $0°$ **B.** $90°$ **C.** $180°$ **D.** $60°$

Câu 2. Với $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ khi và chỉ khi

A. $\vec{a} \perp \vec{b}$ **B.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng

C. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng **D.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Câu 3. Cho $\vec{u} = (-1; 3)$, $\vec{v} = (2; 1)$. Tích $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** -5 **D.** 1

Câu 4. Cho tam giác đều ABC cạnh 4. Tích $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 16 **B.** 8 **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** -8

Câu 5. Góc giữa $\vec{a} = (1; -1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$ bằng

A. $45°$ **B.** $135°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Câu 6. Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -5$. Góc giữa $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng

A. $150°$ **B.** $60°$ **C.** $120°$ **D.** $30°$

Câu 7. Vectơ nào sau đây vuông góc với $\vec{u} = (2; 3)$?

A. $(3; 2)$ **B.** $(-3; 2)$ **C.** $(2; -3)$ **D.** $(-2; -3)$

Câu 8. Cho vectơ $\vec{u}$ có $|\vec{u}| = 3$. Bình phương vô hướng $\vec{u}^2$ bằng

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tích $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ bằng

A. $-a^2$ **B.** $\frac{a^2}{2}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{a^2}{2}$

Câu 10. Cho $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(m; 0)$. Tam giác ABC vuông tại A khi

A. $m = 2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 3$

Câu 11. Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$ bằng

A. $\vec{a}^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$ **B.** $\vec{a}^2 + \vec{b}^2$ **C.** $\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$ **D.** $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

Câu 12. Một vật có trọng lượng 10 N trượt từ đỉnh xuống chân một mặt phẳng nghiêng dài 2 m, nghiêng góc $30°$ so với phương ngang. Công của trọng lực trên quãng đường đó bằng

A. $10\sqrt{3}$ J **B.** 10 J **C.** 20 J **D.** 0 J

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{a}=(2;-1)$, $\vec{b}=(1;2)$, $\vec{c}=(3;1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}\perp\vec{b}$.	☐	☐
b)	$\vec{a}\cdot\vec{c}=5$.	☐	☐
c)	Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{c}$ bằng $45°$.	☐	☐
d)	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=8$.	☐	☐

Câu 2. Cho $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\vec{b})=60°$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sqrt{3}$.	☐	☐
b)	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=5$.	☐	☐
c)	$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=\sqrt{7}$.	☐	☐
d)	$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-11$.	☐	☐

Câu 3. Cho $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác ABC vuông tại A.	☐	☐
b)	Diện tích tam giác ABC bằng 25.	☐	☐
c)	$\cos\widehat{ABC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.	☐	☐
d)	Trực tâm của tam giác ABC là điểm $H(-2;6)$.	☐	☐

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của lực không đổi $\vec{F}=(30;40)$ (đơn vị N) và dịch chuyển thẳng từ $M(0;0)$ đến $N(10;0)$ (đơn vị trên các trục là mét).

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lvert\vec{F}\rvert=70$ N.	☐	☐
b)	Công của lực $\vec{F}$ bằng 500 J.	☐	☐
c)	Côsin của góc giữa $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$ bằng 0,6.	☐	☐
d)	Trên cùng quãng dịch chuyển đó, lực $(0;80)$ (N) sinh công lớn hơn lực $\vec{F}$.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{u}=(3;4)$, $\vec{v}=(-2;1)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}\cdot(\vec{u}+2\vec{v})$.

Đáp số: | | | | |

Câu 2. Tính số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1; \sqrt{3})$ và $\vec{b} = (-2; 0)$ (theo đơn vị độ).

Đáp số: | | | | |

Câu 3. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Đáp số: | | | | |

Câu 4. Cho $A(0; 1)$, $B(4; 5)$, $C(6; -1)$. Trực tâm của tam giác ABC là $H(a; b)$. Tính $a + b$.

Đáp số: | | | | |

Câu 5. Cho $A(-1; 3)$, $B(3; 1)$. Điểm M thay đổi trên trục tung. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Đáp số: | | | | |

Câu 6. Một người kéo kiện hàng đi 20 m trên sàn nằm ngang bằng sợi dây căng thẳng, lực kéo có độ lớn 250 N và sinh công 4 kJ. Tính góc giữa dây kéo và phương ngang (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp số: | | | | |

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

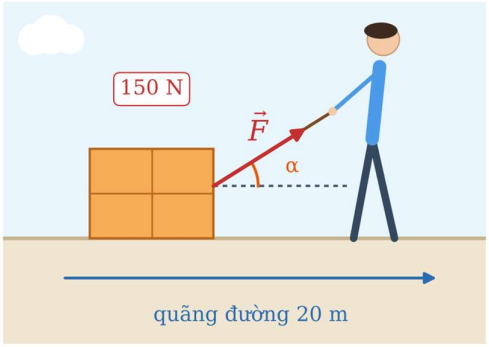
Bài 1. Cho tam giác ABC với $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(2; 4)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và số đo góc A.

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ chân đường cao D kẻ từ C và tính diện tích tam giác ABC.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một người kéo thùng hàng trên mặt sàn nằm ngang bằng sợi dây hợp với phương ngang góc α ($0° \le \alpha < 90°$); lực kéo có độ lớn 150 N, thùng đi được 20 m.



a) Tính công của lực kéo khi $\alpha = 30°$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

b) Khi $\alpha = 30°$, phân tích lực kéo thành hai lực thành phần: một lực cùng phương và một lực vuông góc với phương chuyển động. Tính độ lớn mỗi lực thành phần.

c) Để công của lực kéo không nhỏ hơn 2000 J thì góc α lớn nhất bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?

— HẾT —

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ
Thời gian làm bài: 60 phút

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\vec{a} = -3\vec{b}$. Góc $(\vec{a}, \vec{b})$ bằng

A. $180°$ **B.** $0°$ **C.** $90°$ **D.** $120°$

Câu 2. Với mọi vectơ $\vec{u}$, tích $\vec{u} \cdot \vec{u}$ bằng

A. $|\vec{u}|^2$ **B.** $|\vec{u}|$ **C.** 0 **D.** $2|\vec{u}|$

Câu 3. Cho $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (1; 2)$. Tích $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. -10 **B.** 10 **C.** 2 **D.** -2

Câu 4. Cho $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Tích $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. 6 **B.** -6 **C.** $-6\sqrt{3}$ **D.** 12

Câu 5. Góc giữa $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; -3)$ bằng

A. $90°$ **B.** $45°$ **C.** $135°$ **D.** $120°$

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $\hat{B} = 60°$. Tích $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. $2a^2$ **B.** a^2 **C.** $\frac{a^2}{2}$ **D.** $a^2\sqrt{3}$

Câu 7. Tất cả các giá trị của m để hai vectơ $\vec{u} = (m; -2)$ và $\vec{v} = (m; 8)$ vuông góc là

A. $m = -2$ hoặc $m = 2$ **B.** $m = 4$
C. $m = 16$ **D.** $m = -4$ hoặc $m = 4$

Câu 8. Cho $A(0; 0)$, $B(3; 4)$, $C(4; 3)$. Giá trị $\cos\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{12}{25}$ **B.** $\frac{7}{25}$ **C.** $\frac{24}{25}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Câu 9. Cho $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. Độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

A. $\sqrt{7}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{5}$ **D.** 7

Câu 10. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có cùng độ dài. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b}$ **B.** $\vec{a} \perp \vec{b}$
C. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ **D.** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2$

Câu 11. Cho $A(1; 2)$, $B(3; 4)$. Số điểm M trên trục tung sao cho $\widehat{AMB} = 90°$ là

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 12. Một người xách túi hàng đi 4 m trên đường nằm ngang, tay giữ túi bằng lực 50 N hướng thẳng đứng lên trên. Công của lực mà tay tác dụng lên túi trên quãng đường đó bằng

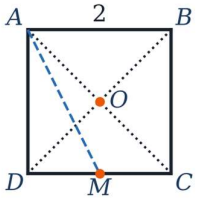
A. 50 J **B.** 200 J **C.** 100 J **D.** 0 J

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (-1;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.	☐	☐
b)	$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert = 5\sqrt{2}$.	☐	☐
c)	Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù.	☐	☐
d)	Vectơ $(1;-3)$ vuông góc với $\vec{a}$.	☐	☐

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2, tâm O; M là trung điểm của CD.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.	☐	☐

Câu 3. Cho $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C\left(0;2\sqrt{3}\right)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác ABC đều.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$.	☐	☐
d)	Trực tâm tam giác ABC là $H(0;2)$.	☐	☐

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của lực không đổi $\vec{F} = (6;8)$ (đơn vị N), dịch chuyển thẳng từ $A(0;0)$ đến $B(3;4)$ rồi từ B đến $C(3;10)$ (đơn vị trên các trục là mét).

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Công của lực $\vec{F}$ trên đoạn AB bằng 50 J.	☐	☐
b)	Công của lực $\vec{F}$ trên đoạn BC bằng 60 J.	☐	☐
c)	Tổng công của lực $\vec{F}$ trên cả hai đoạn lớn hơn 100 J.	☐	☐
d)	Côsin của góc giữa $\vec{F}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 0,8.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho $\vec{a} = (-2;5)$, $\vec{b} = (3;1)$. Tính $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

Đáp số: | | | | |

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 7$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Đáp số: | | | | |

Câu 3. Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Tìm số thực k để vecto $\vec{a} + k\vec{b}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Đáp số: | | | | |

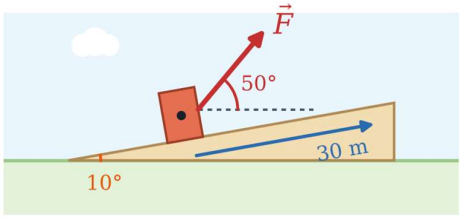
Câu 4. Tìm số thực m để vecto $\vec{u} = (2m - 1; 3)$ vuông góc với vecto $\vec{v} = (4; -2)$ (viết kết quả dưới dạng số thập phân).

Đáp số: | | | | |

Câu 5. Cho $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(2;5)$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$ (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp số: | | | | |

Câu 6. Một du khách kéo vali lên một con dốc thẳng nghiêng $10°$ so với phương ngang, đi được 30 m dọc theo mặt dốc. Tay kéo hợp với phương ngang góc $50°$, lực kéo có độ lớn 60 N. Tính công của lực kéo (theo đơn vị J, làm tròn đến hàng đơn vị).



Đáp số: | | | | |

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

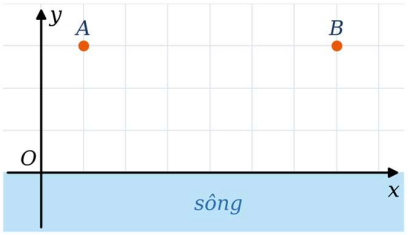
Bài 1. Cho ba điểm $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(4;-1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại B và tính $\cos\widehat{BAC}$ bằng tích vô hướng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông.

c) Tìm các điểm M trên trục tung sao cho $\widehat{AMC} = 90°$.

Bài 2. (**Vận dụng**) Trên bãi đất cạnh một bờ sông thẳng có hai cột mốc A, B. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho bờ sông nằm trên trục Ox và đơn vị trên mỗi trục là 10 m; khi đó $A(1;3)$, $B(7;3)$. Một người muốn đứng tại điểm M trên bờ sông sao cho nhìn hai cột mốc dưới một góc vuông, tức là $\widehat{AMB} = 90°$.



a) Tìm toạ độ điểm M.

b) Tính khoảng cách từ M đến mỗi cột mốc (theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần mười).

c) Nếu người đó đứng tại gốc toạ độ O thì góc $\widehat{AOB}$ là góc nhọn hay góc tù? Vì sao?

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ · Mỗi bài gồm đề và lời giải ngay bên dưới

B LỜI GIẢI BÀI TẬP CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Góc giữa hai vectơ – Tích vô hướng theo định nghĩa

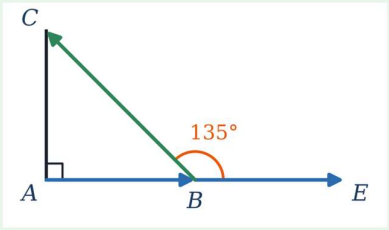
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Vì $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Tam giác vuông cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C} = 45°$ và $BC = a\sqrt{2}$.

Lấy E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ để đưa về chung gốc B: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{EBC} = 180° - 45° = 135°$.

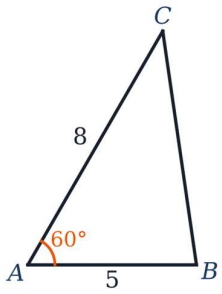


Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135° = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2$.

Hai vectơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ chung gốc C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45° = a^2$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ và $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 60°$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi dùng đẳng thức $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ để tính BC.



Lời giải

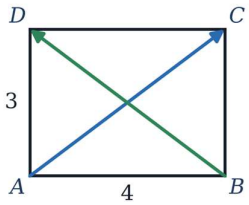
Theo định nghĩa, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 20$.

Bình phương vô hướng hai vế của $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$:

$BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2 = 64 - 40 + 25 = 49$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$ và $BC = 7$.

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 3$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.



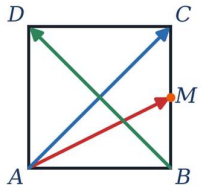
Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$; theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = AD^2 - AB^2 = 9 - 16 = -7$.

Vậy $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -7$. (Kết quả âm cho biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ là góc tù.)

Bài 4. (**Vận dụng**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ làm hai vectơ "cơ sở": $AB = AD = a$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

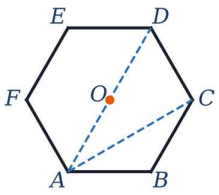
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$ (các tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng 0).

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = -AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 = -a^2 + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{a^2}{2}$.

Bài 5. (**Vận dụng**) Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a, tâm O. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$.



Lời giải

Lục giác đều được chia thành sáu tam giác đều cạnh a có chung đỉnh O. Do đó $AD = 2a$, $\widehat{BAD} = 60°$; tam giác ABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 120°$ nên $\widehat{BAC} = 30°$ và $AC = a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 30° = \frac{3a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot 2a \cdot \cos 60° = a^2$.

Tứ giác $BCDO$ có bốn cạnh bằng a nên là hình thoi, do đó $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO}$. Mặt khác $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$ với $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (O là trung điểm của AD).

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-AB^2=\frac{a^2}{2}-a^2=-\frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}$ (hai cạnh đối song song, bằng nhau, ngược hướng), nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-a^2$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3a^2}{2}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a^2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-a^2$.

Bài 6. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Lời giải

Từ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, bình phương vô hướng hai vế: $a^2=b^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+c^2$, suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Bình phương vô hướng hai vế:

$$AB^2+BC^2+CA^2+2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=0.$$

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ (đpcm).

Nhận xét: đẳng thức thứ nhất chính là định lí côsin $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ viết dưới dạng tích vô hướng.

Dạng 2. Tích vô hướng theo toạ độ – Góc – Điều kiện vuông góc

Bài 7. Cho $\vec{a}=(3;4)$, $\vec{b}=(-1;2)$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ và góc giữa $\vec{a}$, $\vec{b}$ (làm tròn đến độ).

Lời giải

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-1)+4\cdot2=5$.

$|\vec{a}|^2=25$, $\left|\vec{b}\right|^2=5$, nên $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=20$. Kiểm tra bằng toạ độ: $\vec{a}+\vec{b}=(2;6)$, $\vec{a}-\vec{b}=(4;2)$ và $2\cdot4+6\cdot2=20$.

$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{5}{5\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx0{,}447$, suy ra $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\approx63{,}43°$.

Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=20$ và góc giữa $\vec{a}$, $\vec{b}$ xấp xỉ $63°$.

Bài 8. Tìm m để $\vec{a}=(m;1)$ vuông góc với $\vec{b}=(2;m-3)$.

Lời giải

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow2m+(m-3)=0\Leftrightarrow3m=3\Leftrightarrow m=1$.

Thử lại: với $m=1$ thì $\vec{a}=(1;1)$, $\vec{b}=(2;-2)$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=2-2=0$. Vậy $m=1$.

Bài 9. Tìm các vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}=(1;-2)$ và có độ dài bằng $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi $\vec{u}=(x;y)$. Điều kiện $\vec{u}\perp\vec{v}$: $x-2y=0$, tức là $x=2y$; khi đó $\vec{u}=(2y;y)$.

$|\vec{u}|=\sqrt{4y^2+y^2}=\sqrt{5}\,|y|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|y|=2\Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=-2$.

Vậy có hai vectơ thoả mãn: $\vec{u}=(4;2)$ và $\vec{u}=(-4;-2)$.

Bài 10. (**Vận dụng**) Cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(3;-1)$. Tìm số thực k để vectơ $k\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải

$k\vec{a}+\vec{b}=(k+3;2k-1)$ và $\vec{a}-\vec{b}=(-2;3)$.

$(k\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b}) \Leftrightarrow -2(k+3)+3(2k-1)=0 \Leftrightarrow 4k-9=0 \Leftrightarrow k=\frac{9}{4}$.

Cách khác: $(k\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = k\vec{a}^2+(1-k)\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2 = 5k+(1-k)\cdot 1-10 = 4k-9$.

Vậy $k=\frac{9}{4}$.

Bài 11. (**Vận dụng**) Cho $\vec{u}=(m;1)$ và $\vec{v}=(1;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ bằng $60°$.

Lời giải

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2m$, $|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{m^2+1}$, nên $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{2m}{m^2+1}$.

$(\vec{u},\vec{v})=60° \Leftrightarrow \frac{2m}{m^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2-4m+1=0 \Leftrightarrow m=2+\sqrt{3}$ hoặc $m=2-\sqrt{3}$.

Cả hai giá trị đều dương nên $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{2}>0$ thoả mãn. Vậy $m=2\pm\sqrt{3}$.

Bài 12. (**Vận dụng cao**) Cho $\vec{u}=(m;2)$ và $\vec{v}=(m+1;-3)$. Tìm m để $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$.

Lời giải

Hai vế đều không âm nên $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}| \Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}-\vec{v})^2 \Leftrightarrow 4\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=m(m+1)-6=m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-3$.

Kiểm tra với $m=2$: $\vec{u}+\vec{v}=(5;-1)$, $\vec{u}-\vec{v}=(-1;5)$, hai vectơ cùng có độ dài $\sqrt{26}$.

Vậy $m=2$ hoặc $m=-3$. *Ý nghĩa hình học:* hình bình hành dựng trên $\vec{u},\vec{v}$ có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi nó là hình chữ nhật.

Dạng 3. Vận dụng tính chất – Độ dài, góc, đẳng thức, cực trị

Bài 13. Cho $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$. Tính góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$, nên $3=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1$, suy ra $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$.

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\frac{1}{2}$. Vậy góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

Bài 14. Cho $\vec{a}\perp\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$.

Lời giải

Vì $\vec{a}\perp\vec{b}$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; do đó $|\vec{a}+\vec{b}|^2=9+0+16=25$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=5$.

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=18+0-16=2$.

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}|=5$ và $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2$.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=7$, $BC=8$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, số đo góc A và độ dài đường trung tuyến AM.

Lời giải

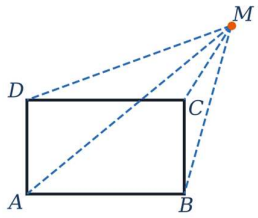
Từ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\frac{25+49-64}{2}=5$.

$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$, suy ra $\hat{A}\approx 81,79°$.

$AM^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2\right)=\frac{1}{4}(25+10+49)=21$, nên $AM=\sqrt{21}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$, $\hat{A}\approx 82°$ và $AM=\sqrt{21}$.

Bài 16. (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm M tuỳ ý. Chứng minh $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.



Lời giải

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ và $OA=OB=OC=OD$ (hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

$MA^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=2MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+OA^2+OC^2=2MO^2+OA^2$

.

Tương tự, $MB^2+MD^2=2MO^2+OB^2+OD^2$.

Vì $OA=OB=OC=OD$ nên $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ (đpcm).

Bài 17. (**Vận dụng**) Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả mãn $\vec{a}+2\vec{b}$ vuông góc với $5\vec{a}-4\vec{b}$. Tính góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)=5\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+10\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}^2=5+6\vec{a}\cdot\vec{b}-8=6\vec{a}\cdot\vec{b}-3$.

Hai vectơ vuông góc nên $6\vec{a}\cdot\vec{b}-3=0$, tức là $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$.

$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{1\cdot1}=\frac{1}{2}$. Vậy góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $60°$.

Bài 18. (**Vận dụng cao**) Cho tam giác đều ABC cạnh 3, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=3MG^2-\frac{9}{2}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của vế trái.

Lời giải

Chèn điểm G: $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MG^2+\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$; viết tương tự cho hai tích còn lại rồi cộng lại:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=3MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+T,$$

trong đó $T=\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$. Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và theo Ví dụ 4, $T=-\frac{a^2}{2}=-\frac{9}{2}$, ta được vế trái bằng $3MG^2-\frac{9}{2}$ (đpcm).

Vì $MG^2\geq0$ nên vế trái không nhỏ hơn $-\frac{9}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G$.

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{9}{2}$, đạt khi M trùng trọng tâm G.

Bài 19. (**Vận dụng cao**) Chứng minh rằng với bốn điểm A, B, C, D bất kì: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (hệ thức Euler). Từ đó chứng minh ba đường cao của một tam giác đồng quy.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khi đó $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$.

Vế trái bằng $\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})+\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{d})+\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b}=0$ (đpcm).

Áp dụng: cho tam giác ABC, gọi H là giao điểm của hai đường cao kẻ từ B và C, tức là $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ và $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Áp dụng hệ thức cho bốn điểm H, A, B, C: $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, suy ra $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, tức là $HA\perp BC$ (hoặc $H\equiv A$).

Vậy H cũng thuộc đường cao kẻ từ A: ba đường cao của tam giác đồng quy.

Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc – Tính góc trong hình học

Bài 20. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Dùng tích vô hướng, chứng minh $AM\perp BC$.

Lời giải

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)=0$ vì $AB=AC$.

Vậy $AM\perp BC$.

Bài 21. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi nó là hình thoi.

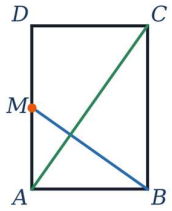
Lời giải

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2-AB^2$.

Do đó $AC\perp BD\Leftrightarrow AD^2=AB^2\Leftrightarrow AD=AB$, tức là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

Vậy hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

Bài 22. (**Vận dụng**) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$; M là trung điểm của AD. Chứng minh $BM\perp AC$.



Lời giải

Chọn hai vectơ cơ sở $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ với $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AD^2-AB^2=\frac{1}{2}\cdot 2a^2-a^2=0$.

Vậy $BM\perp AC$. (Nếu $AD\neq a\sqrt{2}$ thì kết luận không còn đúng: điều kiện cần và đủ là $AD^2=2AB^2$.)

Bài 23. (**Vận dụng**) Cho tam giác đều ABC cạnh a, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM=\frac{1}{3}BC$. Tính độ dài AM và côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$: $|\vec{u}|=|\vec{v}|=a$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

$AM^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{9}a^2 = \frac{7a^2}{9}$, nên $AM = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right)\cdot(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u}\cdot\vec{v} - \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{3} = -\frac{a^2}{6}$.

$\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\frac{a^2}{6}}{\frac{a\sqrt{7}}{3}\cdot a} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Vậy $AM = \frac{a\sqrt{7}}{3}$ và $\cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Bài 24. (**Vận dụng**) Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$, $\hat{A} = 60°$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{BC}$. Tìm k để $AM \perp BC$, rồi tính BM.

Lời giải

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: $\vec{u}^2 = 16$, $\vec{v}^2 = 36$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\cdot 6\cdot\cos 60° = 12$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{BC} = (1-k)\vec{u} + k\vec{v}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$.

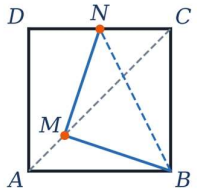
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = (1-k)(\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}^2) + k(\vec{v}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v}) = -4(1-k) + 24k = 28k - 4$.

$AM \perp BC \Leftrightarrow 28k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{7}$.

$BC^2 = 16 + 36 - 24 = 28$, nên $BC = 2\sqrt{7}$ và $BM = \frac{1}{7}\cdot 2\sqrt{7} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $k = \frac{1}{7}$ và $BM = \frac{2\sqrt{7}}{7}$; M chính là chân đường cao kẻ từ A.

Bài 25. (**Vận dụng cao**) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Điểm M thuộc đường chéo AC sao cho $AM = \frac{1}{4}AC$, N là trung điểm của CD. Chứng minh tam giác BMN vuông cân.



Lời giải

Chọn hai vectơ cơ sở $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ($AB = AD = a$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$). Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$ và $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN} = \frac{3}{16}a^2 - \frac{3}{16}a^2 = 0$, nên $MB \perp MN$.

$MB^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2 = \frac{10}{16}a^2$ và $MN^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 = \frac{10}{16}a^2$, nên $MB = MN$.

Vậy tam giác BMN vuông cân tại M.

Dạng 5. Ứng dụng trong mặt phẳng toạ độ

Bài 26. Cho $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(4;5)$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại B. Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật và tính diện tích hình chữ nhật đó.

Lời giải

$\overrightarrow{BA} = (-4;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;2)$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 4 - 4 = 0$, nên tam giác ABC vuông tại B.

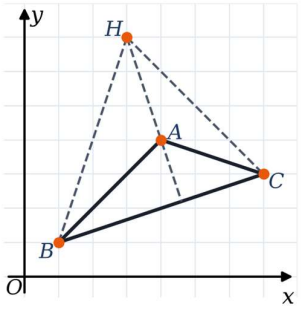
$ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $ABCD$ là hình bình hành (vì đã có góc B vuông), tức là $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $D(1-1;1+2) = (0;3)$.
$AB = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, nên diện tích bằng $AB \cdot BC = 10$.
Vậy $D(0;3)$ và diện tích hình chữ nhật bằng 10.

Bài 27. Giải tam giác ABC (tính các cạnh và các góc, số đo góc làm tròn đến độ) với $A(1;2)$, $B(5;3)$, $C(2;6)$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (4;1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;4)$, $\overrightarrow{BC} = (-3;3)$, nên $AB = AC = \sqrt{17}$ và $BC = 3\sqrt{2}$.
$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC} = \frac{4+4}{17} = \frac{8}{17}$, suy ra $\hat{A} \approx 61,93°$.
Tam giác cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C} \approx \frac{180°-6\ ,93°}{2} \approx 59,04°$. Kiểm tra: $\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\cdot BC} = \frac{12-3}{\sqrt{17}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0{,}514$.
Vậy $AB = AC = \sqrt{17}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\hat{A} \approx 62°$, $\hat{B} = \hat{C} \approx 59°$.

Bài 28. (**Vận dụng**) Tìm trực tâm H của tam giác ABC với $A(4;4)$, $B(1;1)$, $C(7;3)$. Nhận xét vị trí của H so với tam giác.



Lời giải

Gọi $H(x;y)$. $\overrightarrow{BC} = (6;2)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-1)$, $\overrightarrow{AH} = (x-4;y-4)$, $\overrightarrow{BH} = (x-1;y-1)$.
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 6(x-4)+2(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x+y = 16$.
$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)-(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x-y = 2$.
Cộng hai phương trình: $6x = 18$, nên $x = 3$, $y = 7$. Kiểm tra: $\overrightarrow{CH} = (-4;4)$, $\overrightarrow{AB} = (-3;-3)$, $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 12-12 = 0$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-3)\cdot 3+(-3)\cdot(-1) = -6 < 0$ nên góc A tù; vì vậy trực tâm $H(3;7)$ nằm ngoài tam giác.

Bài 29. (**Vận dụng**) Cho $A(2;1)$, $B(6;3)$. Tìm điểm C trên trục tung sao cho tam giác ABC vuông.

Lời giải

Gọi $C(0;y)$. Xét ba trường hợp theo đỉnh góc vuông.
Vuông tại A: $\overrightarrow{AB} = (4;2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;y-1)$, $-8+2(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 5$.
Vuông tại B: $\overrightarrow{BA} = (-4;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-6;y-3)$, $24-2(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = 15$.
Vuông tại C: $\overrightarrow{CA} = (2;1-y)$, $\overrightarrow{CB} = (6;3-y)$, $12+(1-y)(3-y) = 0 \Leftrightarrow y^2-4y+15 = 0$, phương trình vô nghiệm (biệt thức $16-60 < 0$).
Vậy có hai điểm thoả mãn: $C(0;5)$ và $C(0;15)$.

Bài 30. (**Vận dụng**) Cho $A(0;2)$, $B(4;0)$. Tìm toạ độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$ và $AC = AB$.

$\overrightarrow{AB} = (4;-2)$. Gọi $\overrightarrow{AC} = (x;y)$: $4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$;
$x^2 + y^2 = 20 \Leftrightarrow 5x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với $x = 2$: $\overrightarrow{AC} = (2;4)$, $C(2;6)$. Với $x = -2$: $\overrightarrow{AC} = (-2;-4)$, $C(-2;-2)$.

Vậy $C(2;6)$ hoặc $C(-2;-2)$.

Bài 31. (**Vận dụng cao**) Cho $A(1;1)$, $B(6;2)$. Có bao nhiêu điểm C trên trục hoành, có hoành độ là số nguyên, sao cho góc $\widehat{ACB}$ là góc tù?

Lời giải

Gọi $C(x;0)$: $\overrightarrow{CA} = (1-x;1)$, $\overrightarrow{CB} = (6-x;2)$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (1-x)(6-x) + 2 = x^2 - 7x + 8$.

Góc $\widehat{ACB}$ tù khi và chỉ khi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$ và A, B, C không thẳng hàng (góc khác $180°$).

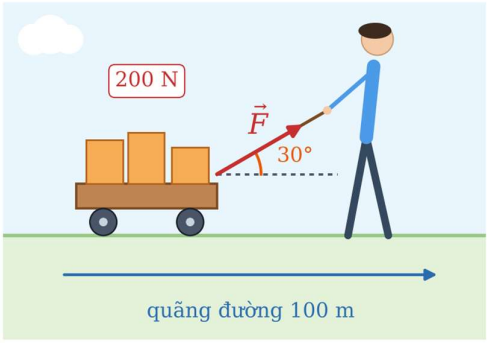
$x^2 - 7x + 8 < 0 \Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{7+\sqrt{17}}{2}$, tức là khoảng $1{,}44 < x < 5{,}56$; các số nguyên là $2;\ 3;\ 4;\ 5$.

Đường thẳng AB cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -4, nằm ngoài khoảng trên, nên không có trường hợp thẳng hàng.

Vậy có 4 điểm C thoả mãn.

Dạng 6. Bài toán thực tế – Công của lực

Bài 32. Một người kéo xe chở hàng với lực 200 N theo sợi dây hợp với phương ngang góc $30°$; xe đi được 100 m trên đường nằm ngang. Tính công của lực kéo (làm tròn đến hàng đơn vị).



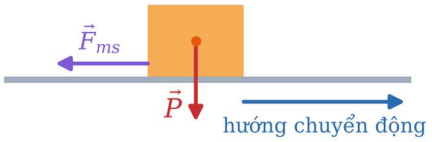
Lời giải

Xe chuyển động theo phương ngang nên góc giữa lực kéo và hướng dịch chuyển là $\alpha = 30°$.

Công của lực kéo: $A = 200 \cdot 100 \cdot \cos 30° = 10000\sqrt{3} \approx 17320{,}5$ (J).

Vậy công của lực kéo xấp xỉ 17321 J.

Bài 33. Một hộp trượt 4 m trên mặt bàn nằm ngang. Tính công của trọng lực $\vec{P}$ và công của lực ma sát có độ lớn 15 N (ngược hướng chuyển động) trên quãng đường đó.



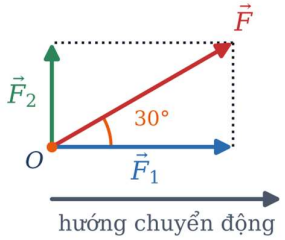
Lời giải

Trọng lực có phương thẳng đứng, vuông góc với hướng dịch chuyển nằm ngang, nên công của trọng lực bằng $\left|\vec{P}\right| \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Lực ma sát ngược hướng chuyển động nên hợp với hướng dịch chuyển góc 180°; công của lực ma sát là $15 \cdot 4 \cdot \cos 180^\circ = -60$ (J).

Vậy công của trọng lực bằng 0 và công của lực ma sát bằng -60 J (công cản).

Bài 34. Lực $\vec{F}$ có độ lớn 50 N hợp với hướng chuyển động góc 30°. Phân tích $\vec{F}$ thành $\overrightarrow{F_1}$ cùng phương chuyển động và $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với phương chuyển động. Tính độ lớn mỗi lực thành phần và công của $\vec{F}$ trên quãng đường 10 m.



Lời giải

Vì $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1} \perp \overrightarrow{F_2}$ nên $\vec{F}$ là đường chéo của hình chữ nhật có hai cạnh biểu diễn $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$; góc giữa $\vec{F}$ và $\overrightarrow{F_1}$ bằng 30°.

$\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 50\cos 30^\circ = 25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ (N); $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = 50\sin 30^\circ = 25$ (N).

$\overrightarrow{F_2}$ không sinh công, nên công của $\vec{F}$ bằng công của $\overrightarrow{F_1}$: $A = 25\sqrt{3} \cdot 10 = 250\sqrt{3} \approx 433$ (J).

Kiểm tra trực tiếp: $50 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ = 250\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}\right| \approx 43{,}3$ N, $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = 25$ N và công của $\vec{F}$ xấp xỉ 433 J.

Bài 35. (**Vận dụng**) Một người kéo thùng gỗ đi 20 m trên sàn nằm ngang bằng sợi dây hợp với phương ngang góc 37°; yêu cầu lực kéo phải sinh công ít nhất 3000 J. Lực kéo phải có độ lớn tối thiểu bao nhiêu niutơn (làm tròn đến hàng đơn vị)? Nếu hạ dây xuống còn hợp với phương ngang góc 20° thì lực tối thiểu giảm bao nhiêu niutơn?

Lời giải

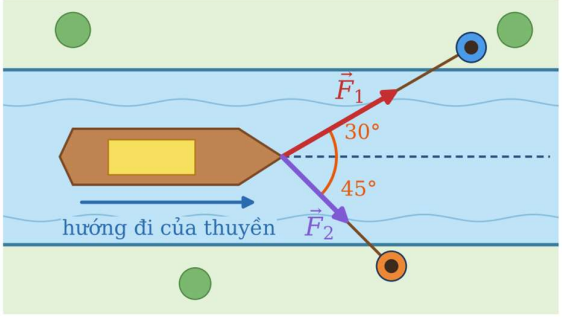
Công của lực kéo F là $A = F \cdot 20 \cdot \cos\alpha$. Điều kiện $A \geq 3000$ tương đương với $F \geq \frac{3000}{20\cos\alpha} = \frac{150}{\cos\alpha}$.

Với $\alpha = 37^\circ$: $F \geq \frac{150}{\cos 37^\circ} \approx \frac{150}{0{,}7986} \approx 187{,}8$ (N), tức là lực tối thiểu khoảng 188 N.

Với $\alpha = 20^\circ$: $F \geq \frac{150}{\cos 20^\circ} \approx \frac{150}{0{,}9397} \approx 159{,}6$ (N).

Vậy lực tối thiểu khoảng 188 N; khi hạ dây xuống 20°, lực tối thiểu giảm khoảng $187{,}8 - 159{,}6 \approx 28$ (N). (Ở đây chỉ xét yêu cầu về công, không xét ma sát.)

Bài 36. (**Vận dụng cao**) Hai người đứng trên hai bờ một con kênh thẳng, dùng hai sợi dây kéo một chiếc thuyền đi dọc theo kênh. Dây thứ nhất có lực kéo $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 400$ N và hợp với hướng đi của thuyền góc 30°; dây thứ hai hợp với hướng đi của thuyền góc 45° (về phía bờ bên kia).



a) Để thuyền không bị kéo lệch về phía bờ nào, các thành phần vuông góc với hướng đi của hai lực phải triệt tiêu nhau. Tính $\left|\overrightarrow{F_2}\right|$.

b) Tính tổng công của hai lực khi thuyền đi được 100 m (làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Nếu người thứ hai cũng kéo với lực 400 N (vẫn giữ góc 45°) thì thành phần lực đẩy thuyền lệch sang ngang có độ lớn bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Thành phần vuông góc với hướng đi của $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn $400\sin 30° = 200$ (N), của $\overrightarrow{F_2}$ là $\left|\overrightarrow{F_2}\right|\sin 45°$. Hai thành phần triệt tiêu nhau khi $\left|\overrightarrow{F_2}\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 200$, suy ra $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = 200\sqrt{2} \approx 282{,}8$ (N).

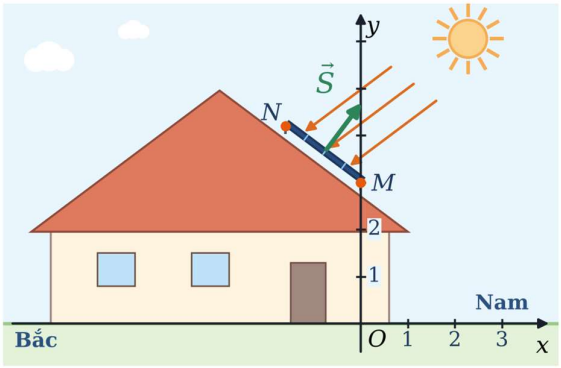
b) Tổng công bằng tổng công của từng lực: $A = 400 \cdot 100 \cdot \cos 30° + 200\sqrt{2} \cdot 100 \cdot \cos 45° = 20000\sqrt{3} + 20000 \approx 54641$ (J).

c) Khi $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = 400$ N, thành phần ngang của $\overrightarrow{F_2}$ là $400\sin 45° = 200\sqrt{2} \approx 282{,}8$ (N), lớn hơn 200 N của $\overrightarrow{F_1}$. Thành phần lệch còn lại có độ lớn $200\sqrt{2} - 200 \approx 82{,}8$ (N), hướng về phía bờ của người thứ hai.

Vậy $\left|\overrightarrow{F_2}\right| \approx 282{,}8$ N, tổng công khoảng 54641 J, và lực lệch khoảng 82,8 N.

★ LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐIỂM NHẤN

Điểm nhấn 1. **Tấm pin mặt trời trên mái nhà.** Nhà bạn Minh ở Hà Nội lắp một tấm pin mặt trời hình chữ nhật trên mái nhà dốc về phía nam. Xét mặt cắt thẳng đứng theo hướng Bắc – Nam đi qua tấm pin và chọn hệ trục Oxy như hình: trục Ox nằm ngang, hướng về phía nam; trục Oy thẳng đứng, hướng lên trên; đơn vị trên mỗi trục là mét. Trong mặt cắt này, tấm pin là đoạn thẳng MN với $M(0;3)$, $N(-1{,}6;4{,}2)$; diện tích của tấm pin là 2 m².



Để tính lượng nắng tấm pin hứng được, các kĩ sư dùng hai vectơ nằm trong mặt cắt trên (toạ độ của chúng lấy theo hai trục Ox, Oy nhưng tính bằng đơn vị riêng):

• **Vectơ ánh nắng** $\vec{E}$: hướng từ tấm pin về phía Mặt Trời (ngược chiều tia nắng), có độ dài bằng cường độ bức xạ, tính bằng W/m².

• **Vectơ diện tích** $\vec{S}$ của tấm pin: vuông góc với đoạn MN, hướng về phía mặt hứng nắng (phía trên) của tấm pin, có độ dài bằng số đo diện tích tấm pin tính bằng m² (ở đây $|\vec{S}| = 2$).

Khi $\vec{E} \cdot \vec{S} > 0$, công suất bức xạ mà tấm pin nhận được (tính bằng W) là $P = \vec{E} \cdot \vec{S}$. (Lúc Mặt Trời lệch về phía đông hay phía tây, vectơ $\vec{E}$ cho dưới đây là phần ánh nắng đã được các kĩ sư quy về mặt cắt; công thức trên vẫn đúng.)

a) Tìm toạ độ của $\vec{S}$ và góc nghiêng của tấm pin so với phương ngang (làm tròn đến độ).

b) Lúc 9 giờ sáng một ngày mùa đông, $\overrightarrow{E_1} = (600; 450)$. Tính công suất tấm pin nhận được và góc giữa $\overrightarrow{E_1}$ với $\vec{S}$ (làm tròn đến độ).

c) Giữa trưa một ngày mùa hè, Mặt Trời gần như ở đỉnh đầu và $\overrightarrow{E_2} = (0; 1000)$. Tính công suất tấm pin nhận được. Công suất đó bằng bao nhiêu phần trăm công suất tấm pin nhận được nếu được đặt vuông góc với tia nắng?

d) Giữ nguyên điểm M và độ dài MN, người ta có thể xoay tấm pin đến vị trí MN_1 (N_1 ở phía bắc và cao hơn M). Tìm toạ độ của N_1 để lúc 9 giờ sáng ngày mùa đông nói ở câu b, tấm pin nhận được công suất lớn nhất. Tính công suất lớn nhất đó.

Lời giải

a) $\overrightarrow{MN} = (-1{,}6; 1{,}2)$, $MN = \sqrt{2{,}56 + 1{,}44} = 2$. Gọi $\vec{S} = (x; y)$ với $y > 0$: $\vec{S} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow -1{,}6x + 1{,}2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x$.

$|\vec{S}| = 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}44$; vì $y > 0$ nên $x > 0$, $x = 1{,}2$, $y = 1{,}6$. Vậy $\vec{S} = (1{,}2; 1{,}6)$.

Góc nghiêng β của tấm pin là góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và vectơ $(-1; 0)$ chỉ hướng bắc: $\cos\beta = \frac{1{,}6}{2 \cdot 1} = 0{,}8$, nên $\beta \approx 36{,}87° \approx 37°$.

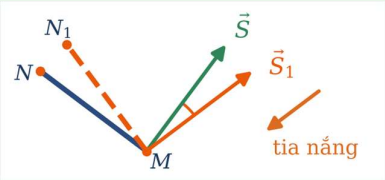
b) $P_1 = \overrightarrow{E_1} \cdot \vec{S} = 600 \cdot 1{,}2 + 450 \cdot 1{,}6 = 720 + 720 = 1440$ (W).

$|\overrightarrow{E_1}| = \sqrt{600^2 + 450^2} = 750$, nên $\cos\left(\overrightarrow{E_1}, \vec{S}\right) = \frac{1440}{750 \cdot 2} = 0{,}96$, suy ra $\left(\overrightarrow{E_1}, \vec{S}\right) \approx 16{,}26° \approx 16°$.

c) $P_2 = \overrightarrow{E_2} \cdot \vec{S} = 0 \cdot 1{,}2 + 1000 \cdot 1{,}6 = 1600$ (W). Nếu đặt vuông góc với tia nắng thì $\vec{S}$ cùng hướng với $\overrightarrow{E_2}$ và công suất bằng $|\overrightarrow{E_2}| \cdot |\vec{S}| = 2000$ (W). Tỉ lệ là $\frac{1600}{2000} = 80\%$.

d) Với mọi vị trí của tấm pin, $P = |\overrightarrow{E_1}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\left(\overrightarrow{E_1}, \vec{S}\right) \le 750 \cdot 2 = 1500$ (W); dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{S}$ cùng hướng với $\overrightarrow{E_1}$, tức là $\overrightarrow{S_1} = \frac{2}{750}\overrightarrow{E_1} = (1{,}6; 1{,}2)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN_1} \perp \overrightarrow{S_1}$, $MN_1 = 2$, N_1 ở phía bắc ($x < 0$) và cao hơn M: $\overrightarrow{MN_1} = (-1{,}2; 1{,}6)$ (kiểm tra: $(-1{,}2) \cdot 1{,}6 + 1{,}6 \cdot 1{,}2 = 0$). Vậy $N_1(-1{,}2; 4{,}6)$.



Vậy $N_1(-1{,}2; 4{,}6)$ (tấm pin nghiêng khoảng 53°) và công suất lớn nhất là 1500 W.

Nhận xét – Mở rộng

Bất đẳng thức $\vec{E}\cdot\vec{S}\le|\vec{E}|\cdot|\vec{S}|$ (dấu bằng khi hai vectơ cùng hướng) là chìa khoá của câu d: tấm pin "hứng" nhiều nắng nhất khi nó vuông góc với tia nắng.

Thú vị là ở câu d, xoay tấm pin chỉ tăng thêm 60 W (khoảng 4%), vì côsin của góc nhỏ thay đổi rất chậm. Nhưng tấm pin dốc 53° đó vào trưa mùa hè chỉ nhận $\overrightarrow{E_2}\cdot\overrightarrow{S_1}=1000\cdot 1{,}2=1200$ W, ít hơn hẳn 1600 W. Vì phải dung hoà giữa mùa đông và mùa hè, ở Việt Nam người ta thường lắp tấm pin cố định với góc nghiêng xấp xỉ vĩ độ nơi lắp đặt (Hà Nội khoảng 21°).

Mô hình "công suất bằng tích vô hướng" còn dùng cho lưu lượng gió qua cánh quạt, lượng mưa rơi vào mái nghiêng, ánh sáng chiếu lên mặt bàn…

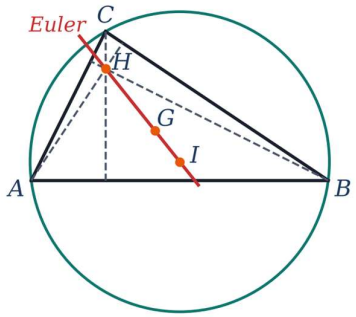
Điểm nhấn 2. Đường thẳng Euler. Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, nội tiếp đường tròn tâm I bán kính R; G là trọng tâm của tam giác. Gọi H là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ và $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. Từ đó suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh $\overrightarrow{IH}=3\,\overrightarrow{IG}$, từ đó suy ra ba điểm I, G, H thẳng hàng.

c) Chứng minh $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=R^2-\frac{c^2}{2}$, rồi suy ra $IH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

d) Áp dụng cho $A(-1;1)$, $B(7;1)$, $C(1;7)$: tìm toạ độ của I, H và kiểm tra lại công thức ở câu c.



Lời giải

a) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{IH}-\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}$, nên $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}\right)=IC^2-IB^2=R^2-R^2=0$.

Tương tự, $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=IA^2-IC^2=0$.

Như vậy H nằm trên đường thẳng qua A vuông góc với BC và trên đường thẳng qua B vuông góc với CA, tức là H là giao điểm của hai đường cao: H là trực tâm của tam giác ABC.

b) G là trọng tâm nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\,\overrightarrow{IG}$. Do đó $\overrightarrow{IH}=3\,\overrightarrow{IG}$: hai vectơ $\overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{IG}$ cùng phương nên I, G, H thẳng hàng, và G nằm giữa I, H với $GH=2GI$ (khi tam giác không đều).

c) Từ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}$: $c^2=IB^2-2\,\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}+IA^2=2R^2-2\,\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$, suy ra $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=R^2-\frac{c^2}{2}$.

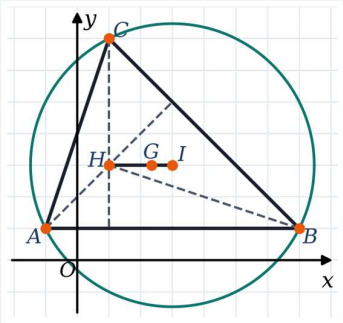
Tương tự, $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=R^2-\frac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA}=R^2-\frac{b^2}{2}$.

$IH^2=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)^2=3R^2+2\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA}\right)=3R^2+2\left(3R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

d) Gọi $I(x;y)$. $IA=IB$ cho $(x+1)^2=(x-7)^2$, tức là $x=3$. $IA=IC$ cho $16+(y-1)^2=4+(y-7)^2\Leftrightarrow 12y=36\Leftrightarrow y=3$. Vậy $I(3;3)$ và $R^2=IA^2=16+4=20$.

$\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=(-4;-2)+(4;-2)+(-2;4)=(-2;0)$, nên $H(1;3)$. Kiểm tra: $\overrightarrow{AH}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(-6;6)$, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$; $\overrightarrow{BH}=(-6;2)$, $\overrightarrow{CA}=(-2;-6)$, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=12-12=0$.

$G\left(\frac{7}{3};3\right)$, $\overrightarrow{IG}=\left(-\frac{2}{3};0\right)$ và $3\overrightarrow{IG}=(-2;0)=\overrightarrow{IH}$.



$a^2=BC^2=72$, $b^2=CA^2=40$, $c^2=AB^2=64$; công thức cho $IH^2=9\cdot 20-176=4$, đúng bằng $IH^2=(-2)^2+0^2=4$.

Vậy $I(3;3)$, $H(1;3)$, $IH=2$ và công thức ở câu c được nghiệm đúng.

Nhận xét – Mở rộng

Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm gọi là **đường thẳng Euler** của tam giác (Leonhard Euler phát hiện năm 1765). Tích vô hướng cho một chứng minh chỉ vài dòng.

Từ $IH^2\geq 0$ suy ra bất đẳng thức đẹp $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv I$, tức là tam giác đều.

Với tam giác vuông tại A: I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}$, tức là $H\equiv A$, đúng như ta đã biết.

C LỜI GIẢI LUYỆN TẬP THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=70^\circ$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

A. 35° **B.** 70° **C.** 110° **D.** 145°

Lời giải

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$. Lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DA}$ thì E nằm trên tia đối của tia AD.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\widehat{BAE}=180^\circ-\widehat{BAD}=110^\circ$.

Đáp số 70° là góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$; nhầm như vậy là do quên rằng $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án C.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin(\vec{u},\vec{v})$ **B.** $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

C. $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ **D.** $|\vec{u}+\vec{v}|$

Lời giải

Theo định nghĩa, $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$; đây là một số thực, có thể dương, âm hoặc bằng 0.

Các biểu thức còn lại không đúng: chẳng hạn khi $\vec{u}\perp\vec{v}$ thì $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, trong khi $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin 90^\circ=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\neq 0$.

Chọn đáp án B.

Câu 3. Cho $\vec{a}=(2;-1)$, $\vec{b}=(3;4)$. Tích $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. 5 **B.** 10 **C.** -2 **D.** 2

Lời giải

Theo biểu thức toạ độ, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3+(-1)\cdot 4=6-4=2$.

Kết quả 10 là do bỏ sót dấu trừ, tính $(-1)\cdot 4=4$; kết quả -2 là do đổi dấu nhầm cả hai tích.

Chọn đáp án D.

Câu 4. Hai vectơ $\vec{u}=(4;m)$ và $\vec{v}=(2;-1)$ vuông góc khi

A. $m=-8$ **B.** $m=8$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-2$

Lời giải

Hai vectơ vuông góc khi và chỉ khi tích vô hướng của chúng bằng 0: $\vec{u}\cdot\vec{v}=4\cdot 2+m\cdot(-1)=8-m=0\Leftrightarrow m=8$.

Thử lại: với $m=8$ thì $\vec{u}=(4;8)=4(1;2)$ và $\vec{u}\cdot\vec{v}=8-8=0$. Giá trị $m=-8$ là do chuyển vế sai dấu.

Chọn đáp án B.

Câu 5. Cho $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Tích $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. 5 **B.** 10 **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** -5

Lời giải

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=5\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=5$.

Kết quả $5\sqrt{3}$ sai do dùng nhầm $\sin 60^\circ$; kết quả 10 sai do quên nhân với $\cos 60^\circ$.

Chọn đáp án A.

Câu 6. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$. Khẳng định nào sau đây đúng về góc giữa hai vectơ đó?

A. Góc đó là góc nhọn **B.** **Góc đó là góc tù hoặc bằng** 180°

C. Góc đó bằng 90° **D.** Góc đó bằng 0°

Lời giải

Vì $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|>0$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})<0\Leftrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})<0\Leftrightarrow 90^\circ<(\vec{a},\vec{b})\le 180^\circ$.

Lưu ý trường hợp $(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$ (hai vectơ ngược hướng) cũng cho tích vô hướng âm, nên không thể nói góc đó luôn là góc tù. Góc nhọn hoặc 0° cho tích dương, góc 90° cho tích bằng 0.

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2. Tích $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ bằng

A. 0 **B.** 4 **C.** -4 **D.** $-2\sqrt{2}$

Lời giải

$BD=2\sqrt{2}$ và $\widehat{ABD}=45^\circ$. Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$ thì $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}\right)=\widehat{EBD}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4$.

Cách khác: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2=0-4=-4$.

Chọn đáp án C.

Câu 8. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}=\left(1;-\sqrt{3}\right)$ và $\vec{b}=\left(\sqrt{3};-1\right)$ bằng

A. 120° **B.** 60° **C.** 150° **D.** 30°

Lời giải

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$; $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+3}=2$.

$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^\circ$. Đáp số 150° sai do nhầm dấu khi nhân $\left(-\sqrt{3}\right)\cdot(-1)$.

Chọn đáp án D.

Câu 9. Cho $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$. Tam giác ABC

A. vuông tại C **B.** vuông tại B **C. vuông tại A** **D.** đều

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot 1+(-1)\cdot 2=0$ nên $AB\perp AC$: tam giác vuông tại A.

Ở hai đỉnh còn lại: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-2;1)\cdot(-1;3)=5\neq 0$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-1;-2)\cdot(1;-3)=5\neq 0$; tam giác không đều vì $AB=\sqrt{5}$ còn $BC=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án C.

Câu 10. Cho $\vec{u}=(3;4)$. Bình phương vô hướng $\vec{u}^2$ bằng

A. 25 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 49

Lời giải

Bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài: $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2=3^2+4^2=25$.

Đáp số 5 là độ dài $|\vec{u}|$, chưa bình phương; đáp số 7 là do cộng nhầm $3+4$.

Chọn đáp án A.

Câu 11. Cho $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ và $\vec{a}\perp\vec{b}$. Độ dài $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

Vì $\vec{a}\perp\vec{b}$ nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; do đó $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+0+1=2$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2}$.

Đáp số 2 là do nhầm $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$, đẳng thức chỉ đúng khi hai vectơ cùng hướng. Về hình học, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ là độ dài đường chéo của hình vuông cạnh 1.

Chọn đáp án D.

Câu 12. Lực $\vec{F}=(2;3)$ (N) làm vật dịch chuyển theo vectơ $\vec{d}=(4;0)$ (m). Công của lực là

A. 8 J **B.** 12 J **C.** 20 J **D.** 0 J

Lời giải

Công của lực bằng tích vô hướng của lực và vectơ dịch chuyển: $A=\vec{F}\cdot\vec{d}=2\cdot 4+3\cdot 0=8$ (J).

Viết $\vec{F}=(2;0)+(0;3)$: thành phần $(0;3)$ vuông góc với hướng dịch chuyển nên không sinh công. Đáp số 20 J là do lấy nhầm $(2+3)\cdot 4$.

Chọn đáp án A.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(-4;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-4;4)$.		✓
b)	$\left\|\vec{b}\right\|=20$.		✓
c)	$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=5$.	✓	
d)	$\cos\left(\vec{a},\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$.	✓	

Lời giải

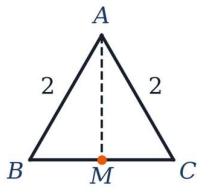
a) Sai. Tích vô hướng của hai vectơ là một số: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-4)+2\cdot 2=-4+4=0$, không phải vectơ $(-4;4)$ (đó chỉ là các tích hoành độ, tung độ tương ứng, chưa cộng lại).

b) Sai. $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, không phải 20 (20 là $\left|\vec{b}\right|^2$; quên lấy căn bậc hai).

c) Đúng. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}=(1^2+2^2)+0=5$ (hoặc tính trực tiếp: $\vec{a}+\vec{b}=(-3;4)$ và $(-3)\cdot 1+4\cdot 2=5$).

d) Đúng. $\vec{a}+\vec{b}=(-3;4)$ có độ dài $\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$, $|\vec{a}|=\sqrt{5}$ và $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=1\cdot(-3)+2\cdot 4=5$, nên $\cos\left(\vec{a},\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh 2 và M là trung điểm của cạnh BC.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.	✓	
c)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$.		✓
d)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=3$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$.

b) Đúng. Tam giác đều nên trung tuyến AM cũng là đường cao: $AM\perp BC$, do đó $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

c) Sai. Đưa về chung gốc: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\widehat{ABC}=120^\circ$, nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=-2\neq 2$.

d) Đúng. $AM=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ và AM cũng là đường phân giác nên $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\widehat{MAB}=30^\circ$; do đó $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

Câu 3. Cho $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(4;-1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$.		✓
b)	Tam giác ABC vuông cân tại A.	✓	
c)	$\widehat{ABC}=45°$.	✓	
d)	Điểm $M(3;0)$ thoả mãn $\widehat{AMB}=90°$.		✓

Lời giải

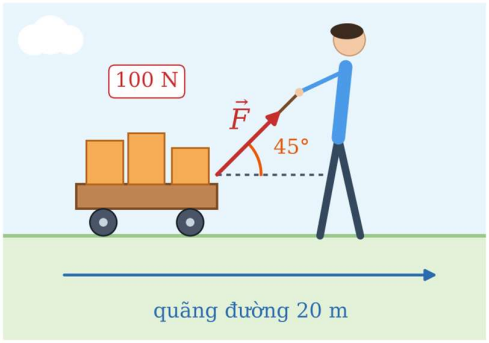
a) Sai. $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$, nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot2+2\cdot(-2)=0$, không phải 8 (8 là tích hai độ dài $AB\cdot AC=2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}$, chỉ bằng tích vô hướng khi hai vectơ cùng hướng).

b) Đúng. $AB\perp AC$ và $AB=AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, nên tam giác ABC vuông cân tại A.

c) Đúng. $\overrightarrow{BA}=(-2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$: $\cos\widehat{ABC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\cdot BC}=\frac{0+8}{2\sqrt{2}\cdot4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, nên $\widehat{ABC}=45°$ (phù hợp với tam giác vuông cân tại A).

d) Sai. $\overrightarrow{MA}=(-1;1)$, $\overrightarrow{MB}=(1;3)$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-1+3=2\neq0$, nên $\widehat{AMB}\neq90°$.

Câu 4. Một người kéo xe chở hàng bằng sợi dây hợp với phương ngang góc $45°$, lực kéo có độ lớn 100 N; xe đi được 20 m trên đường nằm ngang.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Công của lực kéo bằng $1000\sqrt{2}$ J.	✓	
b)	Nếu kéo theo phương ngang với lực có cùng độ lớn thì công của lực kéo lớn hơn.	✓	
c)	Thành phần của lực kéo vuông góc với mặt đường sinh công dương.		✓
d)	Muốn công của lực kéo chỉ bằng 1000 J (cùng độ lớn lực, cùng quãng đường) thì dây phải hợp với phương ngang góc $60°$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $A=100\cdot20\cdot\cos45°=2000\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1000\sqrt{2}\approx1414$ (J).

b) Đúng. Kéo theo phương ngang thì góc giữa lực và hướng dịch chuyển bằng $0°$, công bằng $100\cdot20\cdot\cos0°=2000$ (J), lớn hơn $1000\sqrt{2}\approx1414$ (J).

c) Sai. Thành phần vuông góc với mặt đường cũng vuông góc với hướng dịch chuyển, nên công của nó bằng 0 chứ không dương.

d) Đúng. Gọi α là góc giữa dây và phương ngang ($0°\le\alpha<90°$): $100\cdot20\cdot\cos\alpha=1000\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=60°$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (4; 5)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Lời giải

Với $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy'$.

Do đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 12 - 10 = 2$.

Đáp số: 2

Câu 2. Tìm số thực m để vectơ $\vec{u} = (m; 3)$ vuông góc với vectơ $\vec{v} = (6; -4)$.

Lời giải

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow m \cdot 6 + 3 \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow 6m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Thử lại: với $m = 2$ thì $\vec{u} = (2; 3)$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 - 12 = 0$. Vậy $m = 2$.

Đáp số: 2

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với $\vec{a} + 2\vec{b}$. Tính số đo góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 9 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = \vec{a} \cdot \vec{b} + 1$.

Hai vectơ vuông góc nên $\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = 0$, tức là $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$, suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 99,59°$; làm tròn đến hàng đơn vị được 100.

Đáp số: 100

Câu 4. Một vật chịu tác dụng đồng thời của hai lực không đổi $\overrightarrow{F_1} = (2; 3)$ và $\overrightarrow{F_2} = (4; -1)$ (đơn vị N), dịch chuyển từ $M(1; 2)$ đến $N(6; 4)$ (đơn vị trên các trục là mét). Tính tổng công của hai lực (theo đơn vị J).

Lời giải

$\overrightarrow{MN} = (5; 2)$. Tổng công của hai lực bằng công của hợp lực $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (6; 2)$.

$A = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) \cdot \overrightarrow{MN} = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 34$ (J). Kiểm tra: $\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$, $\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{MN} = 18$, tổng bằng 34.

Đáp số: 34

1 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1

Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	D	B	A	C	B	C	D	D	C	B

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	Đ	Đ	S
2	S	S	Đ	Đ
3	Đ	Đ	S	S
4	S	S	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	21	120	5,5	5	−4	37

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Góc $(\vec{a}, \vec{b})$ bằng

A. $0°$ **B.** $90°$ **C.** $180°$ **D.** $60°$

Lời giải

Bình phương hai vế (đều không âm): $\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| + |\vec{b}|^2$, suy ra $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, tức là $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 1$ và $(\vec{a},\vec{b}) = 0°$.

Góc $90°$ ứng với đẳng thức $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, không phải đẳng thức đã cho.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Với $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ khi và chỉ khi

A. $\vec{a} \perp \vec{b}$ **B.** $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

C. $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng **D.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Lời giải

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ nên $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| > 0$; do đó $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90°$, tức là $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Nếu hai vectơ cùng hướng thì $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| > 0$; nếu ngược hướng thì $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| < 0$; còn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ không cho biết gì về góc giữa hai vectơ.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho $\vec{u} = (-1;3)$, $\vec{v} = (2;1)$. Tích $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. 7 **B.** 5 **C.** -5 **D.** 1

Lời giải

Theo biểu thức toạ độ: $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\cdot 2 + 3\cdot 1 = -2 + 3 = 1$.

Đáp số 5 là do nhân chéo hoành độ với tung độ: $(-1)\cdot 1 + 3\cdot 2 = 5$, sai quy tắc nhân hoành độ với hoành độ, tung độ với tung độ.

Chọn đáp án D.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC cạnh 4. Tích $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 16 **B.** 8 **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** -8

Lời giải

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ chung gốc A nên góc giữa chúng là $\widehat{BAC}=60°$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 60°=4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=8.$

Chọn đáp án B.

Câu 5. Góc giữa $\vec{a}=(1;-1)$ và $\vec{b}=(2;0)$ bằng

A. 45° **B.** 135° **C.** 90° **D.** 30°

Lời giải

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+(-1)\cdot 0=2, |\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=2.$

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, nên $(\vec{a},\vec{b})=45°$.

Chọn đáp án A.

Câu 6. Cho $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, \vec{a}\cdot\vec{b}=-5$. Góc giữa $\vec{a}, \vec{b}$ bằng

A. 150° **B.** 60° **C.** 120° **D.** 30°

Lời giải

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-5}{2\cdot 5}=-\frac{1}{2}$, nên $(\vec{a},\vec{b})=120°$.

Tích vô hướng âm nên góc phải lớn hơn 90°; đáp số 60° là do bỏ quên dấu trừ, còn 150° ứng với côsin bằng $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C.

Câu 7. Vectơ nào sau đây vuông góc với $\vec{u}=(2;3)$?

A. $(3;2)$ **B.** $(-3;2)$ **C.** $(2;-3)$ **D.** $(-2;-3)$

Lời giải

Vectơ $(x;y)$ vuông góc với $\vec{u}=(2;3)$ khi và chỉ khi $2x+3y=0$.

Với $(-3;2)$: $2\cdot(-3)+3\cdot 2=0$, thoả mãn. Với $(3;2)$: $6+6=12\neq 0$; với $(2;-3)$: $4-9=-5\neq 0$; với $(-2;-3)$: $-4-9=-13\neq 0$.

Chọn đáp án B.

Câu 8. Cho vectơ $\vec{u}$ có $|\vec{u}|=3$. Bình phương vô hướng $\vec{u}^2$ bằng

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** 9 **D.** 6

Lời giải

Theo định nghĩa, $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0°=|\vec{u}|^2=3^2=9$.

Đáp số 6 là do nhầm 3^2 với $2\cdot 3$; đáp số 3 là độ dài của vectơ, chưa bình phương.

Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tích $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ bằng

A. $-a^2$ **B.** $\frac{a^2}{2}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{a^2}{2}$

Lời giải

O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=180°$, và $OA=OC=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 180^\circ=\frac{a^2}{2}\cdot(-1)=-\frac{a^2}{2}$.

Lưu ý: 0 là giá trị của $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ (hai đường chéo vuông góc), không phải của $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

Chọn đáp án D.

Câu 10. Cho $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(m;0)$. Tam giác ABC vuông tại A khi

A. $m=2$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=1$ **D.** $m=3$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(m-1;-1)$.

Tam giác vuông tại $A\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 1\cdot(m-1)+2\cdot(-1)=0\Leftrightarrow m-3=0\Leftrightarrow m=3$.

Với $m=3$: $C(3;0)$, ba điểm không thẳng hàng và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2-2=0$. Giá trị $m=1$ là do tính sai $\overrightarrow{AC}=(m+1;-1)$.

Chọn đáp án D.

Câu 11. Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$ bằng

A. $\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$ **B.** $\vec{a}^2+\vec{b}^2$ **C.** $\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$ **D.** $\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2$

Lời giải

Theo tính chất phân phối và giao hoán: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Biểu thức $\vec{a}^2+\vec{b}^2$ chỉ đúng khi $\vec{a}\perp\vec{b}$; biểu thức $\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2$ chỉ đúng khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng (hoặc một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$).

Chọn đáp án C.

Câu 12. Một vật có trọng lượng 10 N trượt từ đỉnh xuống chân một mặt phẳng nghiêng dài 2 m, nghiêng góc 30° so với phương ngang. Công của trọng lực trên quãng đường đó bằng

A. $10\sqrt{3}$ J **B.** 10 J **C.** 20 J **D.** 0 J

Lời giải

Trọng lực hướng thẳng xuống; hướng dịch chuyển đi xuống dọc mặt dốc, hợp với phương ngang góc 30° nên hợp với phương thẳng đứng góc $90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

Công của trọng lực: $A=10\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=10$ (J). Đáp số $10\sqrt{3}$ J sai do dùng nhầm góc nghiêng 30° làm góc giữa lực và hướng dịch chuyển.

Chọn đáp án B.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\vec{a}=(2;-1)$, $\vec{b}=(1;2)$, $\vec{c}=(3;1)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}\perp\vec{b}$.	✓	
b)	$\vec{a}\cdot\vec{c}=5$.	✓	
c)	Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{c}$ bằng 45°.	✓	
d)	$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=8$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1+(-1)\cdot 2=0$, nên $\vec{a}\perp\vec{b}$.

b) Đúng. $\vec{a}\cdot\vec{c}=2\cdot 3+(-1)\cdot 1=6-1=5$.

c) Đúng. $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{c}|=\sqrt{10}$, $\cos(\vec{a},\vec{c})=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, nên góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{c}$ bằng $45°$.

d) Sai. $\vec{a}+\vec{b}=(3;1)$, nên $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=3\cdot 3+1\cdot 1=10\neq 8$.

Câu 2. Cho $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\vec{b})=60°$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sqrt{3}$.		✓
b)	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=5$.		✓
c)	$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=\sqrt{7}$.	✓	
d)	$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-11$.	✓	

Lời giải

a) Sai. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60°=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3$, không phải $3\sqrt{3}$ (giá trị $3\sqrt{3}$ có được khi dùng nhầm $\sin 60°$ thay cho $\cos 60°$).

b) Sai. Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3\cdot\cos 60°=3$ nên $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4+6+9=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}\approx 4{,}36$, không phải 5 ($5=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ chỉ đúng khi hai vectơ cùng hướng).

c) Đúng. Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3\cdot\cos 60°=3$ nên $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4-6+9=7$, do đó $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$.

d) Đúng.

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}^2=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=4+3-18=-11$.

Câu 3. Cho $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác ABC vuông tại A.	✓	
b)	Diện tích tam giác ABC bằng 25.	✓	
c)	$\cos\widehat{ABC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.		✓
d)	Trực tâm của tam giác ABC là điểm $H(-2;6)$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}=(8;6)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-24+24=0$, nên tam giác ABC vuông tại A.

b) Đúng. $AB=\sqrt{9+16}=5$, $AC=\sqrt{64+36}=10$, nên $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$.

c) Sai. $\overrightarrow{BA}=(3;-4)$, $\overrightarrow{BC}=(11;2)$, $BC=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$; $\cos\widehat{ABC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\cdot BC}=\frac{33-8}{5\cdot 5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\neq\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(Giá trị $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{AC}{BC}$ là côsin của góc C.)

d) Sai. Tam giác vuông tại A thì hai cạnh góc vuông AB, AC cũng là hai đường cao, chúng cắt nhau tại A; vậy trực tâm là $A(1;2)$, không phải điểm $(-2;6)$ (đó là đỉnh B).

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của lực không đổi $\vec{F} = (30; 40)$ (đơn vị N) và dịch chuyển thẳng từ $M(0; 0)$ đến $N(10; 0)$ (đơn vị trên các trục là mét).

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\vec{F}\right\| = 70$ N.		✓
b)	Công của lực $\vec{F}$ bằng 500 J.		✓
c)	Côsin của góc giữa $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$ bằng 0,6.	✓	
d)	Trên cùng quãng dịch chuyển đó, lực $(0; 80)$ (N) sinh công lớn hơn lực $\vec{F}$.		✓

Lời giải

a) Sai. $\left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50$ (N), không phải 70 N (không được cộng hai toạ độ $30 + 40$).

b) Sai. $\overrightarrow{MN} = (10; 0)$, công của lực: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = 30 \cdot 10 + 40 \cdot 0 = 300$ (J), không phải 500 J ($500 = \left|\vec{F}\right| \cdot MN = 50 \cdot 10$ là kết quả khi bỏ quên góc giữa lực và hướng dịch chuyển).

c) Đúng. $\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{MN}\right) = \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}}{\left|\vec{F}\right| \cdot MN} = \frac{300}{50 \cdot 10} = 0{,}6$.

d) Sai. $(0; 80) \cdot (10; 0) = 0$: lực $(0; 80)$ vuông góc với $\overrightarrow{MN}$ nên công của nó bằng $0 < 300$ (J).

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{u} = (3; 4)$, $\vec{v} = (-2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$.

Lời giải

Cách 1: $\vec{u} + 2\vec{v} = (3 - 4; 4 + 2) = (-1; 6)$, nên $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 6 = -3 + 24 = 21$.

Cách 2: $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, với $\vec{u}^2 = 9 + 16 = 25$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -2$; do đó kết quả bằng $25 - 4 = 21$.

Đáp số: 21

Câu 2. Tính số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a} = \left(1; \sqrt{3}\right)$ và $\vec{b} = (-2; 0)$ (theo đơn vị độ).

Lời giải

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + \sqrt{3} \cdot 0 = -2$; $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4 + 0} = 2$.

$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$, nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

Đáp số: 120

Câu 3. Cho $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 6$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Lời giải

Bình phương vô hướng: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, tức là $36 = 9 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 16$.

Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{36 - 9 - 16}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$.

Đáp số: 5,5

Câu 4. Cho $A(0; 1)$, $B(4; 5)$, $C(6; -1)$. Trực tâm của tam giác ABC là $H(a; b)$. Tính $a + b$.

Lời giải

Gọi $H(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -2)$, $\overrightarrow{AH} = (x; y - 1)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 4; y - 5)$.

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 2x-6(y-1)=0\Leftrightarrow x-3y=-3$.
$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 6(x-4)-2(y-5)=0\Leftrightarrow 3x-y=7$.
Từ phương trình thứ nhất, $x=3y-3$; thay vào phương trình thứ hai: $9y-9-y=7\Leftrightarrow y=2$, suy ra $x=3$.
Vậy $H(3;2)$ và $a+b=3+2=5$. (Kiểm tra: $\overrightarrow{CH}=(-3;3)$, $\overrightarrow{AB}=(4;4)$, $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=-12+12=0$.)
Đáp số: 5

Câu 5. Cho $A(-1;3)$, $B(3;1)$. Điểm M thay đổi trên trục tung. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

M thuộc trục tung nên $M(0;y)$; $\overrightarrow{MA}=(-1;3-y)$, $\overrightarrow{MB}=(3;1-y)$.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-3+(3-y)(1-y)=y^2-4y=(y-2)^2-4\geq -4$, dấu bằng xảy ra khi $y=2$.
Vậy giá trị nhỏ nhất bằng -4, đạt tại $M(0;2)$ (hình chiếu của trung điểm $I(1;2)$ của AB trên trục tung).
Đáp số: −4

Câu 6. Một người kéo kiện hàng đi 20 m trên sàn nằm ngang bằng sợi dây căng thẳng, lực kéo có độ lớn 250 N và sinh công 4 kJ. Tính góc giữa dây kéo và phương ngang (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Kiện hàng chuyển động theo phương ngang nên góc α giữa lực kéo và hướng dịch chuyển chính là góc giữa dây và phương ngang.
Đổi 4 kJ $=4000$ J. Từ $A=\left|\vec{F}\right|\cdot d\cdot\cos\alpha$ ta có $\cos\alpha=\frac{4000}{250\cdot 20}=0{,}8$.
Suy ra $\alpha\approx 36{,}87°$; làm tròn đến hàng đơn vị được 37.
Đáp số: 37

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC với $A(-1;1)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$.

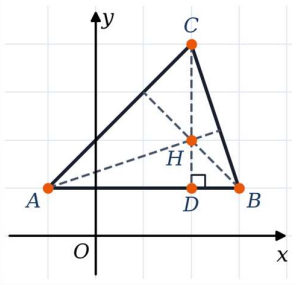
a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và số đo góc A.

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ chân đường cao D kẻ từ C và tính diện tích tam giác ABC.

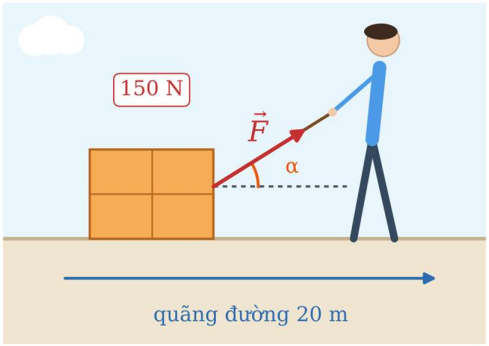
Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}=(4;0)$, $\overrightarrow{AC}=(3;3)$, nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 3+0\cdot 3=12$.
$AB=4$, $AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$, nên $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\frac{12}{4\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\hat{A}=45°$.
b) Gọi $H(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AH}=(x+1;y-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;3)$, $\overrightarrow{BH}=(x-3;y-1)$, $\overrightarrow{AC}=(3;3)$.
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow -(x+1)+3(y-1)=0\Leftrightarrow -x+3y=4$;
$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 3(x-3)+3(y-1)=0\Leftrightarrow x+y=4$.
Cộng vế theo vế hai phương trình: $4y=8$, nên $y=2$ và $x=2$. Vậy $H(2;2)$.
c) Vì A, B có cùng tung độ 1 nên AB song song với trục Ox; chân đường cao kẻ từ $C(2;4)$ là $D(2;1)$. Kiểm tra: $\overrightarrow{CD}=(0;-3)$ và $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\cdot 4+(-3)\cdot 0=0$.
$CD=3$, nên $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$.



Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$, $\hat{A}=45°$, $H(2;2)$, $D(2;1)$ và diện tích tam giác ABC bằng 6.

Bài 2. (**Vận dụng**) Một người kéo thùng hàng trên mặt sàn nằm ngang bằng sợi dây hợp với phương ngang góc α ($0°\le\alpha<90°$); lực kéo có độ lớn 150 N, thùng đi được 20 m.



a) Tính công của lực kéo khi $\alpha=30°$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

b) Khi $\alpha=30°$, phân tích lực kéo thành hai lực thành phần: một lực cùng phương và một lực vuông góc với phương chuyển động. Tính độ lớn mỗi lực thành phần.

c) Để công của lực kéo không nhỏ hơn 2000 J thì góc α lớn nhất bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Thùng chuyển động theo phương ngang nên góc giữa lực kéo và hướng dịch chuyển bằng α.

Với $\alpha=30°$: $A=150\cdot 20\cdot\cos 30°=3000\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1500\sqrt{3}\approx 2598$ (J).

b) Gọi $\vec{F}$ là lực kéo, viết $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1}$ cùng phương chuyển động, $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với phương chuyển động. Khi $\alpha=30°$: $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=150\cos 30°=75\sqrt{3}\approx 129{,}9$ (N), $\left|\overrightarrow{F_2}\right|=150\sin 30°=75$ (N).

Chỉ $\overrightarrow{F_1}$ sinh công; $\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với hướng dịch chuyển nên có công bằng 0.

c) Công của lực kéo là $A=150\cdot 20\cdot\cos\alpha=3000\cos\alpha$. Ta cần $3000\cos\alpha\ge 2000\Leftrightarrow\cos\alpha\ge\frac{2}{3}$.

Khi α tăng từ $0°$ đến $90°$ thì $\cos\alpha$ giảm, nên $\cos\alpha\ge\frac{2}{3}\Leftrightarrow\alpha\le\alpha_0$, trong đó $\cos\alpha_0=\frac{2}{3}$, $\alpha_0\approx 48{,}19°$.

Vậy góc α lớn nhất xấp xỉ $48°$.

2 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2

Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	A	D	B	C	B	D	C	A	C	B	D

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	Đ	Đ	Đ
2	Đ	Đ	S	Đ
3	Đ	Đ	Đ	S
4	Đ	S	S	Đ

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	8	6	0,25	1,25	58	1379

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\vec{a} = -3\vec{b}$. Góc $(\vec{a}, \vec{b})$ bằng

A. $180°$ **B.** $0°$ **C.** $90°$ **D.** $120°$

Lời giải

Vì $\vec{a} = -3\vec{b}$ với $-3 < 0$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng; do đó $(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.

Kiểm tra bằng tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3\vec{b}^2 = -3|\vec{b}|^2$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3|\vec{b}|^2$, nên $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Với mọi vectơ $\vec{u}$, tích $\vec{u} \cdot \vec{u}$ bằng

A. $|\vec{u}|^2$ **B.** $|\vec{u}|$ **C.** 0 **D.** $2|\vec{u}|$

Lời giải

Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ thì $(\vec{u}, \vec{u}) = 0°$ nên $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0° = |\vec{u}|^2$; nếu $\vec{u} = \vec{0}$ thì cả hai vế đều bằng 0.

Đây chính là bình phương vô hướng: $\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$.

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (1; 2)$. Tích $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. -10 **B.** 10 **C.** 2 **D.** -2

Lời giải

Theo biểu thức toạ độ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 4 - 6 = -2$.

Đáp số 10 là do bỏ dấu trừ của -3; đáp số 2 là do nhầm dấu kết quả.

Chọn đáp án D.

Câu 4. Cho $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Tích $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. 6 **B.** -6 **C.** $-6\sqrt{3}$ **D.** 12

Lời giải

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 120° = 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$.

Góc tù nên tích vô hướng âm; đáp số 6 là do lấy nhầm $\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B.

Câu 5. Góc giữa $\vec{a} = (2;1)$ và $\vec{b} = (-1;-3)$ bằng

A. 90° **B.** 45° **C.** 135° **D.** 120°

Lời giải

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) = -5$, $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.

$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $\hat{B} = 60^\circ$. Tích $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. $2a^2$ **B.** a^2 **C.** $\frac{a^2}{2}$ **D.** $a^2\sqrt{3}$

Lời giải

Trong tam giác ABC vuông tại A: $\cos B = \frac{AB}{BC}$, nên $BC = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2a$.

Hai vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ chung gốc B, nên $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos B = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.

Chọn đáp án B.

Câu 7. Tất cả các giá trị của m để hai vectơ $\vec{u} = (m;-2)$ và $\vec{v} = (m;8)$ vuông góc là

A. $m = -2$ hoặc $m = 2$ **B.** $m = 4$

C. $m = 16$ **D.** $m = -4$ **hoặc** $m = 4$

Lời giải

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow m \cdot m + (-2) \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = -4$ hoặc $m = 4$.

Chỉ nêu $m = 4$ là thiếu giá trị $m = -4$ (với $m = -4$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 16 - 16 = 0$).

Chọn đáp án D.

Câu 8. Cho $A(0;0)$, $B(3;4)$, $C(4;3)$. Giá trị $\cos\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{12}{25}$ **B.** $\frac{7}{25}$ **C.** $\frac{24}{25}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (3;4)$, $\overrightarrow{AC} = (4;3)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$, $AB = AC = 5$.

$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25}$. Đáp số $\frac{12}{25}$ là do bỏ sót một trong hai tích $3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$; đáp số $\frac{3}{5}$ là côsin của góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và trục Ox.

Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. Độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

A. $\sqrt{7}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{5}$ **D.** 7

Lời giải

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot 1 + 4 = 7$, nên $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$.

Đáp số 7 là do quên lấy căn bậc hai; đáp số $\sqrt{5}$ là do bỏ sót số hạng $2\vec{a} \cdot \vec{b}$; đáp số $3 = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ chỉ đúng khi hai vectơ cùng hướng.

Chọn đáp án A.

Câu 10. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có cùng độ dài. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b}$ **B.** $\vec{a} \perp \vec{b}$

C. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ **D.** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2$

Lời giải

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, nên $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$: hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau.

Các khẳng định khác không luôn đúng: hai vectơ $(1;0)$ và $(-1;0)$ có cùng độ dài nhưng không vuông góc, cũng không bằng nhau; còn $2\vec{a}^2$ là kết quả của việc khai triển sai dấu ($\vec{a}^2 + \vec{b}^2$ thay cho $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$).

Chọn đáp án C.

Câu 11. Cho $A(1;2)$, $B(3;4)$. Số điểm M trên trục tung sao cho $\widehat{AMB} = 90°$ là

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Gọi $M(0;y)$: $\overrightarrow{MA} = (1;2-y)$, $\overrightarrow{MB} = (3;4-y)$,

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3 + (2-y)(4-y) = y^2 - 6y + 11$.

Phương trình $y^2 - 6y + 11 = 0$ có biệt thức $36 - 44 < 0$ nên vô nghiệm: không có điểm nào.

(Đường tròn đường kính AB có tâm $(2;3)$, bán kính $\sqrt{2} < 2$ nên không cắt trục tung.)

Chọn đáp án B.

Câu 12. Một người xách túi hàng đi 4 m trên đường nằm ngang, tay giữ túi bằng lực 50 N hướng thẳng đứng lên trên. Công của lực mà tay tác dụng lên túi trên quãng đường đó bằng

A. 50 J **B.** 200 J **C.** 100 J **D.** 0 J

Lời giải

Lực của tay hướng thẳng đứng, còn túi dịch chuyển theo phương ngang, nên góc giữa lực và hướng dịch chuyển bằng $90°$.

Công của lực là $50 \cdot 4 \cdot \cos 90° = 0$ (J). Đáp số 200 J là do quên nhân với $\cos 90°$: theo nghĩa Vật lí, lực vuông góc với hướng dịch chuyển không sinh công.

Chọn đáp án D.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (-1;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.	✓	
b)	$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert = 5\sqrt{2}$.	✓	
c)	Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù.	✓	
d)	Vectơ $(1;-3)$ vuông góc với $\vec{a}$.	✓	

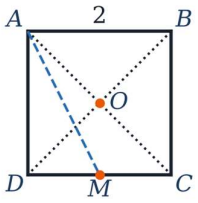
Lời giải

a) Đúng. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -3 + 2 = -1$.

b) Đúng. $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, nên $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

c) Đúng. $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{-1}{5\sqrt{2}} < 0$ và $\cos(\vec{a},\vec{b}) \neq -1$ (hai vectơ không cùng phương), nên góc giữa chúng là góc tù (xấp xỉ $98°$).
d) Đúng. $(1;-3)\cdot\vec{a} = 1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 = 0$, nên vectơ $(1;-3)$ vuông góc với $\vec{a}$.

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 2, tâm O; M là trung điểm của CD.



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.	✓	
b)	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 4$.	✓	
c)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.		✓
d)	$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp AD$, do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.
b) Đúng. $AC = 2\sqrt{2}$ và $\widehat{CAB} = 45°$, nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4$.
c) Sai. Chọn hệ trục toạ độ sao cho $D(0;0)$, $C(2;0)$, $B(2;2)$, $A(0;2)$; khi đó $M(1;0)$, $\overrightarrow{AM} = (1;-2)$, $\overrightarrow{BD} = (-2;-2)$ và $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD} = -2+4 = 2 \neq 0$.
d) Đúng. Hai đường chéo của hình vuông vuông góc với nhau tại O, nên $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

Câu 3. Cho $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C\left(0;2\sqrt{3}\right)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác ABC đều.	✓	
b)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8$.	✓	
c)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -8$.	✓	
d)	Trực tâm tam giác ABC là $H(0;2)$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $AB = 4$, $AC = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$, $BC = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$, nên tam giác ABC đều.
b) Đúng. $\overrightarrow{AB} = (4;0)$, $\overrightarrow{AC} = \left(2;2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 2 + 0\cdot 2\sqrt{3} = 8$.
c) Đúng. $\overrightarrow{BC} = \left(-2;2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 4\cdot(-2) + 0\cdot 2\sqrt{3} = -8$ (phù hợp với $4\cdot 4\cdot\cos 120° = -8$).
d) Sai. Trong tam giác đều, trực tâm trùng với trọng tâm $G\left(\frac{-2+2+0}{3};\frac{0+0+2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; vì $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15 \neq 2$ nên $H(0;2)$ không phải trực tâm.

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của lực không đổi $\vec{F} = (6;8)$ (đơn vị N), dịch chuyển thẳng từ $A(0;0)$ đến $B(3;4)$ rồi từ B đến $C(3;10)$ (đơn vị trên các trục là mét).

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Công của lực $\vec{F}$ trên đoạn AB bằng 50 J.	✓	
b)	Công của lực $\vec{F}$ trên đoạn BC bằng 60 J.		✓
c)	Tổng công của lực $\vec{F}$ trên cả hai đoạn lớn hơn 100 J.		✓
d)	Côsin của góc giữa $\vec{F}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 0,8.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB} = (3;4)$, công trên đoạn AB: $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 18 + 32 = 50$ (J).

b) Sai. $\overrightarrow{BC} = (0;6)$, công trên đoạn BC: $\vec{F} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 6 = 48$ (J), không phải 60 J ($60 = |\vec{F}| \cdot BC = 10 \cdot 6$ là kết quả khi bỏ quên góc giữa lực và hướng dịch chuyển).

c) Sai. Tổng công: $50 + 48 = 98$ (J), nhỏ hơn 100 J (cũng bằng $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 10 = 98$).

d) Đúng. $|\vec{F}| = \sqrt{36+64} = 10$, $BC = 6$, nên $\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\vec{F}| \cdot BC} = \frac{48}{10 \cdot 6} = 0{,}8$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho $\vec{a} = (-2;5)$, $\vec{b} = (3;1)$. Tính $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{b}$.

Lời giải

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -1$ và $\vec{b}^2 = 3^2 + 1^2 = 10$.

Do đó $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = -2 + 10 = 8$. Kiểm tra bằng toạ độ: $2\vec{a} + \vec{b} = (-1;11)$ và $(-1) \cdot 3 + 11 \cdot 1 = 8$.

Đáp số: 8

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 7$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Bình phương vô hướng hai vế của $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$: $BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{36 + 25 - 49}{2} = 6$.

Đáp số: 6

Câu 3. Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120°$. Tìm số thực k để vecto $\vec{a} + k\vec{b}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Lời giải

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 \cdot \cos 120° = -4$ và $\vec{b}^2 = 16$.

$\left(\vec{a} + k\vec{b}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + k\vec{b}^2 = -4 + 16k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Đáp số: 0,25

Câu 4. Tìm số thực m để vecto $\vec{u} = (2m - 1;3)$ vuông góc với vecto $\vec{v} = (4;-2)$ (viết kết quả dưới dạng số thập phân).

Lời giải

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4(2m - 1) + 3 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

Thử lại: với $m = 1{,}25$ thì $\vec{u} = (1{,}5;3)$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 6 = 0$.

Đáp số: 1,25

Câu 5. Cho $A(1;1), B(4;2), C(2;5)$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$ (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

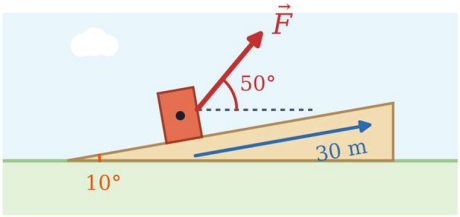
$\overrightarrow{AB} = (3;1), \overrightarrow{AC} = (1;4), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7, AB = \sqrt{10}, AC = \sqrt{17}$.

$\cos\widehat{BAC} = \frac{7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{170}} \approx 0{,}5369$, suy ra $\widehat{BAC} \approx 57{,}53°$.

Làm tròn đến hàng đơn vị: 58.

Đáp số: 58

Câu 6. Một du khách kéo vali lên một con dốc thẳng nghiêng $10°$ so với phương ngang, đi được 30 m dọc theo mặt dốc. Tay kéo hợp với phương ngang góc $50°$, lực kéo có độ lớn 60 N. Tính công của lực kéo (theo đơn vị J, làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Hướng dịch chuyển hợp với phương ngang góc $10°$, lực kéo hợp với phương ngang góc $50°$ (cùng phía), nên góc giữa lực và hướng dịch chuyển là $50° - 10° = 40°$.

$A = 60 \cdot 30 \cdot \cos 40° \approx 1800 \cdot 0{,}7660 \approx 1378{,}9$ (J); làm tròn đến hàng đơn vị được 1379.

Đáp số: 1379

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho ba điểm $A(-2;1), B(2;3), C(4;-1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại B và tính $\cos\widehat{BAC}$ bằng tích vô hướng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông.

c) Tìm các điểm M trên trục tung sao cho $\widehat{AMC} = 90°$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{BA} = (-4;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-4)$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 + 8 = 0$ nên $BA \perp BC$; $BA = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

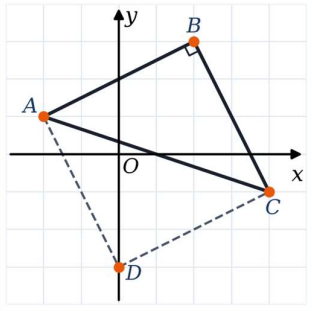
$\overrightarrow{AB} = (4;2)$, $\overrightarrow{AC} = (6;-2)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 - 4 = 20$, $AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$;

$\cos\widehat{BAC} = \frac{20}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, phù hợp với $\widehat{BAC} = 45°$.

b) Tam giác ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $D(-2+2; 1-4) = (0;-3)$.

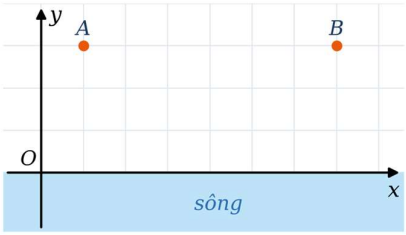
c) Gọi $M(0;y)$: $\overrightarrow{MA} = (-2; 1-y)$, $\overrightarrow{MC} = (4; -1-y)$.

$\widehat{AMC} = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow -8 + (1-y)(-1-y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 3$.



Vậy $\cos\widehat{BAC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $D(0;-3)$ và có hai điểm $M(0;3)$, $M(0;-3)$. (Các điểm M này cùng với B, D nằm trên đường tròn đường kính AC.)

Bài 2. (**Vận dụng**) Trên bãi đất cạnh một bờ sông thẳng có hai cột mốc A, B. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho bờ sông nằm trên trục Ox và đơn vị trên mỗi trục là 10 m; khi đó $A(1;3)$, $B(7;3)$. Một người muốn đứng tại điểm M trên bờ sông sao cho nhìn hai cột mốc dưới một góc vuông, tức là $\widehat{AMB}=90°$.



a) Tìm toạ độ điểm M.

b) Tính khoảng cách từ M đến mỗi cột mốc (theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần mười).

c) Nếu người đó đứng tại gốc toạ độ O thì góc $\widehat{AOB}$ là góc nhọn hay góc tù? Vì sao?

Lời giải

a) M thuộc trục Ox nên $M(x;0)$; $\overrightarrow{MA}=(1-x;3)$, $\overrightarrow{MB}=(7-x;3)$.

$\widehat{AMB}=90°\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow(1-x)(7-x)+9=0\Leftrightarrow x^2-8x+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4$.

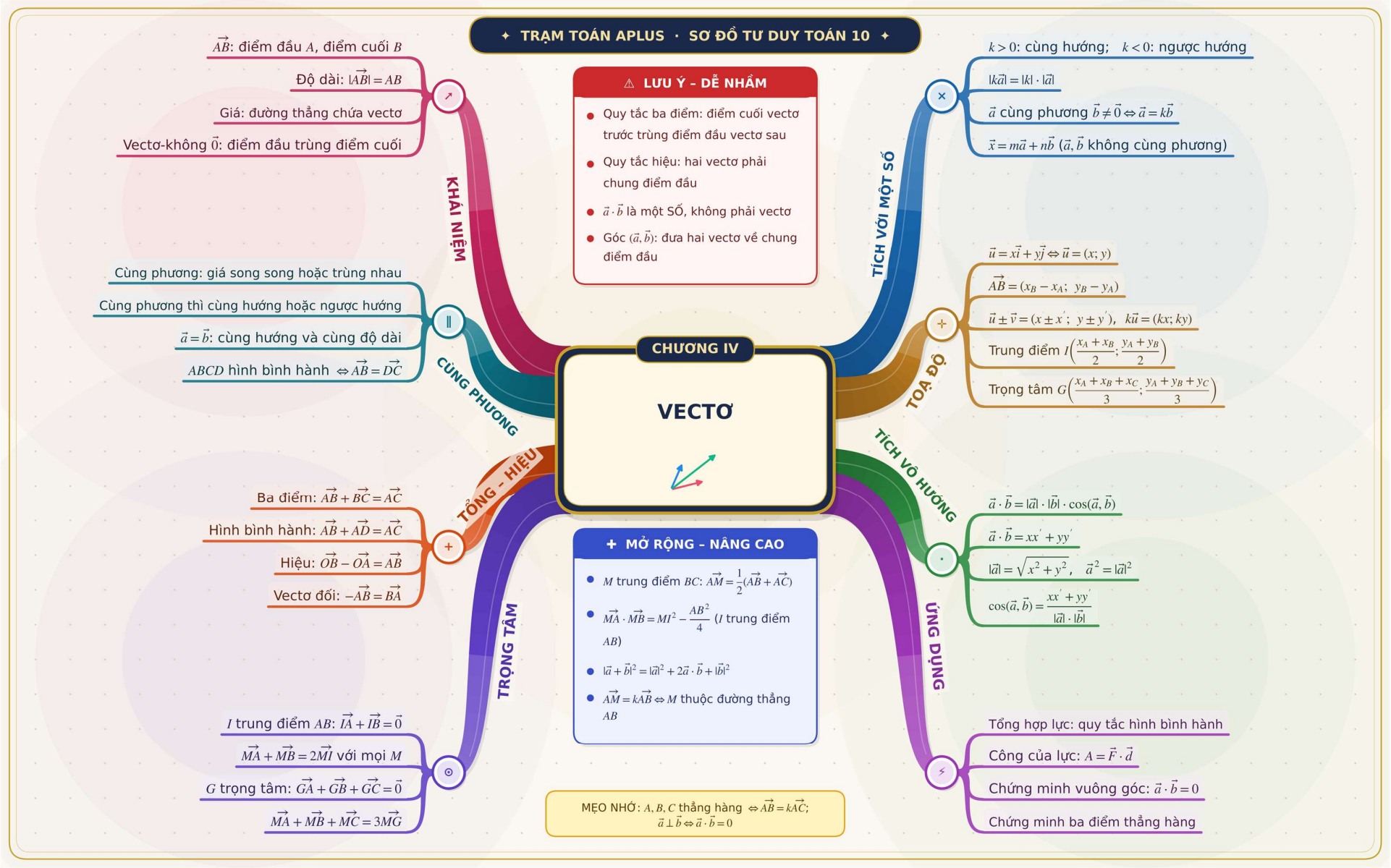
Vậy chỉ có một điểm thoả mãn là $M(4;0)$.

b) $\overrightarrow{MA}=(-3;3)$, $\overrightarrow{MB}=(3;3)$, nên $MA=MB=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ (đơn vị độ dài trên trục).

Mỗi đơn vị ứng với 10 m, nên $MA=MB=30\sqrt{2}\approx 42{,}43$ (m), làm tròn đến hàng phần mười được 42,4 m.

c) $\overrightarrow{OA}=(1;3)$, $\overrightarrow{OB}=(7;3)$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot 7+3\cdot 3=16>0$, nên $\cos\widehat{AOB}>0$; hơn nữa $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ không cùng hướng.

Vậy góc $\widehat{AOB}$ là góc nhọn. (Điều này phù hợp với câu a: trên trục Ox chỉ tại $M(4;0)$ góc nhìn mới bằng 90°; các điểm khác đều nằm ngoài đường tròn đường kính AB nên nhìn AB dưới góc nhọn.)


TRẠM TOÁN APLUS · SƠ ĐỒ TƯ DUY TOÁN 10
CHƯƠNG IV
VECTƠ
KHÁI NIỆM
$\overrightarrow{AB}$: điểm đầu A, điểm cuối B
Độ dài: $|\overrightarrow{AB}| = AB$
Giá: đường thẳng chứa vectơ
Vectơ-không $\vec{0}$: điểm đầu trùng điểm cuối
CÙNG PHƯƠNG
Cùng phương: giá song song hoặc trùng nhau
Cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng
$\vec{a} = \vec{b}$: cùng hướng và cùng độ dài
$ABCD$ hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
TỔNG - HIỆU
Ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
Hiệu: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$
Vectơ đối: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
TRỌNG TÂM
I trung điểm AB: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với mọi M
G trọng tâm: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$
LƯU Ý - DỄ NHẦM
Quy tắc ba điểm: điểm cuối vectơ trước trùng điểm đầu vectơ sau
Quy tắc hiệu: hai vectơ phải chung điểm đầu
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ là một SỐ, không phải vectơ
Góc $(\vec{a}, \vec{b})$: đưa hai vectơ về chung điểm đầu
MỞ RỘNG - NÂNG CAO
M trung điểm BC: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (I trung điểm AB)
$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng AB
MẸO NHỚ: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
TÍCH VỚI MỘT SỐ
$k > 0$: cùng hướng; $k < 0$: ngược hướng
$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$
$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$
$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương)
TOẠ ĐỘ
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y)$
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$
$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x';\ y \pm y')$, $k\vec{u} = (kx; ky)$
Trung điểm $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
Trọng tâm $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$
TÍCH VÔ HƯỚNG
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy'$
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{xx' + yy'}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
ỨNG DỤNG
Tổng hợp lực: quy tắc hình bình hành
Công của lực: $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$
Chứng minh vuông góc: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Chứng minh ba điểm thẳng hàng

ÔN TẬP IV

TOÁN 10 · TẬP MỘT

VECTƠ

◎ PHẠM VI KIẾN THỨC

- **Bài 7. Các khái niệm mở đầu:** vectơ, vectơ-không, độ dài của vectơ; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng; hai vectơ bằng nhau.
- **Bài 8. Tổng và hiệu của hai vectơ:** quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hiệu; vectơ đối; tính chất trung điểm, trọng tâm ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$); tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc.
- **Bài 9. Tích của một vectơ với một số:** định nghĩa, tính chất; điều kiện để hai vectơ cùng phương, ba điểm thẳng hàng; phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.
- **Bài 10. Vectơ trong mặt phẳng toạ độ:** toạ độ của vectơ, toạ độ của điểm; biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ; độ dài vectơ, khoảng cách giữa hai điểm; toạ độ trung điểm, trọng tâm.
- **Bài 11. Tích vô hướng của hai vectơ:** góc giữa hai vectơ; định nghĩa, tính chất và biểu thức toạ độ của tích vô hướng; điều kiện vuông góc; ứng dụng tính độ dài, góc và công của lực.

▦ CẤU TRÚC MỖI ĐỀ (90 phút – 10 điểm)

Nội dung	Phần I	Phần II	Phần III	Phần IV
Khái niệm, tổng – hiệu vectơ (Bài 7, 8)	4 câu	1 câu	1 câu	–
Tích vectơ với một số (Bài 9)	2 câu	1 câu	1 câu	1 bài
Toạ độ của vectơ (Bài 10)	3 câu	1 câu	2 câu	(lồng ghép)
Tích vô hướng, ứng dụng (Bài 11)	3 câu	1 câu	2 câu	1 bài

⚠ NHỮNG LỖI THƯỜNG GẶP – ĐỌC TRƯỚC KHI LÀM ĐỀ

- Hai vectơ **bằng nhau** phải cùng hướng và cùng độ dài; chỉ "cùng phương" hoặc chỉ "cùng độ dài" thì chưa đủ.
- Quy tắc ba điểm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ cần **điểm cuối vectơ trước trùng điểm đầu vectơ sau**; quy tắc hiệu $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ cần **cùng điểm đầu**.
- Độ dài của tổng **không** bằng tổng các độ dài: $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$; muốn tính $|\vec{a}+\vec{b}|$ hãy dựng hình hoặc dùng $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.
- Góc giữa hai vectơ phải xác định khi hai vectơ **chung điểm đầu**: trong tam giác ABC, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\hat{B}$ chứ không phải $\hat{B}$.
- Tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$ là một **số** (không phải vectơ); nó âm khi góc giữa hai vectơ là góc tù.

- Toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ bằng toạ độ điểm cuối trừ toạ độ điểm đầu ("**ngọn trừ gốc**"); hình bình hành $ABCD$ ứng với $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (đúng thứ tự đỉnh).
- Với $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$, vectơ $k\vec{a}$ **ngược hướng** với $\vec{a}$ và có độ dài $|k| \cdot |\vec{a}|$.

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
ÔN TẬP CHƯƠNG IV. VECTƠ
Thời gian làm bài: 90 phút

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG – SỐ 1

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$, $AC=6$. Gọi M là trung điểm của AC. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BM}$ bằng

A. $\sqrt{13}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** 5 **D.** 7

Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{AC}$

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=15$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}$ bằng

A. $\frac{17}{2}$ **B.** 17 **C.** $\frac{33}{2}$ **D.** 15

Câu 5. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD, trong đó $AB=3CD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=3\,\overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=-3\,\overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{CD}=-3\,\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Với mọi điểm M, vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng

A. $2\,\overrightarrow{MO}$ **B.** $4\,\overrightarrow{MO}$ **C.** $\overrightarrow{MO}$ **D.** $\vec{0}$

Câu 7. Cho $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4)$. Toạ độ của vectơ $3\vec{a}-\vec{b}$ là

A. $(7;-5)$ **B.** $(5;-5)$ **C.** $(7;-13)$ **D.** $(-7;13)$

Câu 8. Cho hai điểm $A(1;3)$, $B(5;-1)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $(4;-4)$ **B.** $(2;-2)$ **C.** $(6;2)$ **D.** $(3;1)$

Câu 9. Hai vectơ $\vec{u}=(m-1;2)$ và $\vec{v}=(6;-4)$ cùng phương khi và chỉ khi

A. $m=-2$ **B.** $m=4$ **C.** $m=-3$ **D.** $m=2$

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^\circ$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 150° **B.** 30° **C.** 60° **D.** 120°

Câu 11. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=1$ và $(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$ bằng

A. 60° **B.** 30° **C.** 120° **D.** 150°

Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, có đáy lớn $AB=2a$ và $AD=DC=a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-3a^2$ **B.** 0 **C.** a^2 **D.** $-a^2$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác ABC và điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Gọi M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.	☐	☐
b)	M là trung điểm của đoạn thẳng AD.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.	☐	☐

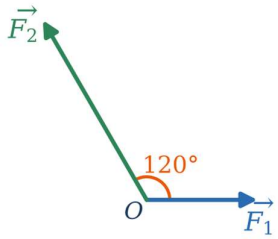
Câu 2. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm và N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = 2NC$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
d)	Ba điểm B, G, N không thẳng hàng.	☐	☐

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(3;4)$, $C(5;-2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} = (4;2)$.	☐	☐
b)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(9;0)$.	☐	☐
c)	Điểm $E(-5;0)$ thuộc đường thẳng AB.	☐	☐
d)	$BC = 2\sqrt{10}$.	☐	☐

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của ba lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ và đứng yên. Biết $\left|\vec{F_1}\right| = 80$ N, $\left|\vec{F_2}\right| = 150$ N và góc giữa hai lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ bằng 120° (hình vẽ).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = -6000$.	☐	☐
b)	$\left\|\vec{F_3}\right\| = 230$ N.	☐	☐
c)	$\cos\left(\vec{F_3}, \vec{F_2}\right) = -\frac{11}{13}$.	☐	☐
d)	Lực $\vec{F_3}$ vuông góc với lực $\vec{F_1}$.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo $AC = 12$ và $BD = 16$. Tính $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 2. Cho đoạn thẳng AB dài 12 cm. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ và điểm N thoả mãn $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN (đơn vị: cm).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 3. (**Vận dụng**) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;5)$, $B(-1;-1)$, $C(8;2)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc cạnh BC sao cho diện tích tam giác ABM gấp đôi diện tích tam giác ACM. Tính $x + y$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 4. Trên một bản đồ (đơn vị trên mỗi trục là 1 km), ba trạm quan trắc đặt tại $A(1;5)$, $B(-3;1)$, $C(8;3)$. Một trạm thu dữ liệu được đặt tại điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Tính khoảng cách từ G đến trạm A (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 5. Cho đường tròn tâm O bán kính 5 và một dây cung AB có độ dài 8. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Đáp số: ☐☐☐☐

Câu 6. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 2 có $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Đáp số: ☐☐☐☐

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

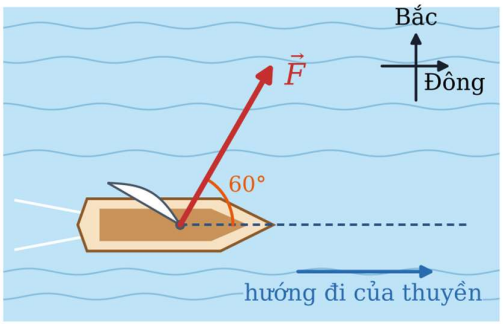
Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của BC, E là điểm trên cạnh AC sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$ và F là điểm đối xứng với B qua A. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng và tính tỉ số $\frac{EF}{ED}$.

c) Cho $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;6)$. Tìm toạ độ của D, E, F và kiểm tra lại kết quả câu b).

Bài 2. (**Vận dụng**) Một thuyền buồm chạy thẳng theo hướng đông. Gió tác dụng lên cánh buồm một lực $\vec{F}$ có độ lớn 600 N, chếch về phía bắc và hợp với hướng đông một góc $60°$ (hình vẽ nhìn từ trên xuống). Nhờ sống thuyền cản nước, thuyền không bị đẩy ngang mà chỉ chạy theo hướng đông.



a) Phân tích $\vec{F}$ thành tổng của lực $\overrightarrow{F_1}$ hướng đông và lực $\overrightarrow{F_2}$ hướng bắc. Tính độ lớn của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Tính công của lực $\vec{F}$ khi thuyền đi được 2 km. Lực $\overrightarrow{F_2}$ sinh công bằng bao nhiêu?

c) Chọn hệ trục Oxy có $\vec{\imath}$ hướng đông, $\vec{\jmath}$ hướng bắc (lực tính bằng niutơn, độ dời tính bằng mét). Viết toạ độ của $\vec{F}$. Nếu thuyền đổi sang hướng đông bắc mà lực gió không đổi thì trên quãng đường 2 km, công của $\vec{F}$ bằng bao nhiêu kilôjun (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

— HẾT —

TOÁN 10 · TRẠM TOÁN APLUS
ÔN TẬP CHƯƠNG IV. VECTƠ
Thời gian làm bài: 90 phút

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG – SỐ 2

Cấu trúc theo định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025

Họ và tên: ..... Lớp: .....

Phần I: 0,25 điểm/câu · Phần II: đúng 1 ý 0,1 đ; 2 ý 0,25 đ; 3 ý 0,5 đ; 4 ý 1 đ · Phần III: 0,25 điểm/câu · Phần IV: 0,75 điểm/bài.

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn *(12 câu – 3,0 điểm)*

Câu 1. Cho hai điểm phân biệt A và B. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$?

A. 1 **B.** vô số **C.** 2 **D.** 0

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a và H là trung điểm của BC. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** a

Câu 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{DB}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **C.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thoả mãn $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. C nằm giữa A và B **B.** B nằm giữa A và C

C. A nằm giữa B và C **D.** A, B, C không thẳng hàng

Câu 7. Cho $\vec{a} = (-4; 5)$. Toạ độ của vectơ $-2\vec{a}$ là

A. $(8; -10)$ **B.** $(-8; 10)$ **C.** $(8; 10)$ **D.** $(-6; 3)$

Câu 8. Cho hai điểm $A(-1; 4)$, $B(4; -8)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 169 **B.** $\sqrt{119}$ **C.** 17 **D.** 13

Câu 9. Ba điểm $A(-3; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(3; m)$ thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $m = 8$ **B.** $m = 9$ **C.** $m = 10$ **D.** $m = 13$

Câu 10. Cho $\vec{u} = (4; -1)$, $\vec{v} = (2; 3)$. Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

A. $(8; -3)$ **B.** 11 **C.** -5 **D.** 5

Câu 11. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{BAD} = 60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$ **B.** $-\frac{a^2}{2}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Câu 12. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng **B.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

C. $\vec{a} \perp \vec{b}$ **D.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai *(4 câu – 4,0 điểm)*

Câu 1. Cho tam giác đều ABC cạnh 3 và M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=0$.	☐	☐
b)	$\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|=0$.	☐	☐
c)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{9}{2}$.	☐	☐
d)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=3$.	☐	☐

Câu 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Điểm I thoả mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và điểm E thoả mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
b)	$\overrightarrow{GI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.	☐	☐
c)	Với mọi điểm M, ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MI}$.	☐	☐
d)	Ba điểm C, I, E thẳng hàng và $IC=2IE$.	☐	☐

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-2;4)$, $B(-1;-3)$, $C(6;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}=(1;-7)$.	☐	☐
b)	$AB=\sqrt{58}$.	☐	☐
c)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(5;9)$.	☐	☐
d)	Điểm đối xứng với A qua B là $A'\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.	☐	☐

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.	☐	☐
b)	Tam giác ABC cân tại A.	☐	☐
c)	$\cos\widehat{BAC}=0{,}6$.	☐	☐
d)	Diện tích tam giác ABC bằng 6.	☐	☐

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn *(6 câu – 1,5 điểm)*

Câu 1. Trên vịnh Hạ Long, một thuyền kayak xuất phát từ bến A, chèo 6 km theo hướng đông đến điểm B, rồi 5 km theo hướng bắc đến điểm C, sau đó 2 km theo hướng tây đến điểm D. Tính khoảng cách từ D đến bến A (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp số: | | | | |

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 7$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A (D thuộc cạnh BC). Biết $\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$, tính $x - y$.

Đáp số: | | | | |

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a} = (3;1)$ và $\vec{b} = (1;-2)$. Tìm số thực k để vectơ $\vec{a} + k\vec{b}$ có độ dài nhỏ nhất (viết kết quả dưới dạng số thập phân).

Đáp số: | | | | |

Câu 4. Cho tam giác ABC có $A(-1;3)$, $B(5;5)$, $C(3;-3)$. Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp số: | | | | |

Câu 5. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Đáp số: | | | | |

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và AB. Tính số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{CN}$ (đơn vị: độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp số: | | | | |

PHẦN IV. Tự luận *(2 bài – 1,5 điểm)*

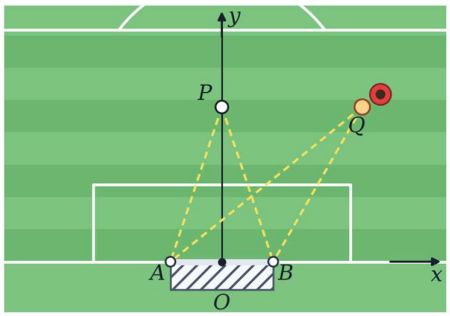
Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm thuộc đường chéo BD sao cho $BN = \frac{1}{3}BD$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Chứng minh ba điểm C, N, M thẳng hàng và N là trọng tâm của tam giác ABC.

c) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(0;0)$, $B(6;0)$, $D(2;4)$. Tìm toạ độ các điểm C, M, N và kiểm tra lại kết quả câu b).

Bài 2. (**Vận dụng**) Trên sân bóng đá, khung thành rộng 7,32 m. Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên mỗi trục là 1 m) có trục Ox là vạch cầu môn, gốc O là trung điểm của khung thành; hai cột dọc ở $A(-3{,}66;0)$ và $B(3{,}66;0)$. Chấm phạt đền là $P(0;11)$; một cầu thủ đang giữ bóng tại $Q(10;11)$ (hình vẽ). Góc nhìn khung thành AB từ vị trí đặt bóng gọi là *góc sút*.



a) Tính khoảng cách từ chấm phạt đền đến mỗi cột dọc và tính góc sút $\widehat{APB}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

b) Tính góc sút $\widehat{AQB}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ). Từ vị trí nào sút bóng thuận lợi hơn?

c) Từ Q, cầu thủ sút bóng lăn thẳng theo hướng của vectơ $\vec{u} = (-1; -2)$. Bóng có đi vào khung thành không? Nếu không, bóng cắt vạch cầu môn tại điểm cách cột dọc gần nhất bao nhiêu mét?

— HẾT —

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ÔN TẬP CHƯƠNG IV. VECTƠ · Mỗi câu gồm đề và lời giải ngay bên dưới

1 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

✎ Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	C	D	A	B	B	C	D	A	A	B	D

Câu	a)	b)	c)	d)
1	Đ	Đ	S	Đ
2	S	S	Đ	Đ
3	Đ	S	Đ	Đ
4	Đ	S	Đ	S

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	20	16	6	2,2	−32	1

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Lời giải

Hình thoi có bốn cạnh bằng nhau nên $AB=AD$, tức là $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$: khẳng định này đúng.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ có giá là hai đường thẳng cắt nhau nên không cùng phương, do đó không bằng nhau (dù có cùng độ dài).

O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$ ngược hướng; $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng. Vì vậy hai đẳng thức $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ đều sai.

Chọn đáp án C.

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$, $AC=6$. Gọi M là trung điểm của AC. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BM}$ bằng

A. $\sqrt{13}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

$\left|\overrightarrow{BM}\right|=BM$. Vì M là trung điểm của AC nên $AM=\frac{AC}{2}=3$.

Tam giác ABM vuông tại A nên $BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{16+9}=5$.

Lưu ý: $2\sqrt{13}$ là độ dài cạnh BC; còn $7=AB+AM$ là tổng hai độ dài, không phải độ dài của $\overrightarrow{BM}$.

Chọn đáp án C.

Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Trừ một vectơ là cộng với vectơ đối của nó: $-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}$, $-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ (áp dụng quy tắc ba điểm hai lần).

Chọn đáp án D.

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=15$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}$ bằng

A. $\frac{17}{2}$ **B.** 17 **C.** $\frac{33}{2}$ **D.** 15

Lời giải

O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}$.

Đường chéo $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{64+225}=17$, nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|=AO=\frac{AC}{2}=\frac{17}{2}$.

Kết quả $\frac{33}{2}=AB+OD$ là sai lầm do cộng các độ dài: độ dài của vectơ tổng nói chung không bằng tổng các độ dài.

Chọn đáp án A.

Câu 5. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD, trong đó $AB=3CD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{CD}=-3\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Lời giải

Vì $AB\parallel CD$ và các đỉnh được lấy theo thứ tự A, B, C, D nên $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{DC}$, tức là ngược hướng với $\overrightarrow{CD}$.

Vectơ $-3\overrightarrow{CD}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CD}$ và có độ dài $3CD=AB$, nên $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$.

Đẳng thức $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$ sai về hướng; hai đẳng thức $\overrightarrow{CD}=-3\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ sai về tỉ số độ dài (đúng phải là $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$).

Chọn đáp án B.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Với mọi điểm M, vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng

A. $2\overrightarrow{MO}$ **B.** $4\overrightarrow{MO}$ **C.** $\overrightarrow{MO}$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải

O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$; O cũng là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

Cộng vế theo vế: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$. Tổng này chỉ bằng $\vec{0}$ khi M trùng O, nên đáp số $\vec{0}$ không đúng với mọi điểm M.

Chọn đáp án B.

Câu 7. Cho $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4)$. Toạ độ của vectơ $3\vec{a}-\vec{b}$ là

A. $(7;-5)$ **B.** $(5;-5)$ **C.** $(7;-13)$ **D.** $(-7;13)$

Lời giải

$3\vec{a}=\big(3\cdot 2;3\cdot(-3)\big)=(6;-9)$.

$3\vec{a}-\vec{b}=(6-(-1);-9-4)=(7;-13)$. (Toạ độ $(5;-5)$ là của vectơ $3\vec{a}+\vec{b}$.)

Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho hai điểm $A(1;3)$, $B(5;-1)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $(4;-4)$ **B.** $(2;-2)$ **C.** $(6;2)$ **D.** $(3;1)$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB: $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$, $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$. Vậy $I(3;1)$.

Lưu ý: $(6;2)$ là tổng các toạ độ chưa chia đôi, còn $(4;-4)$ là toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án D.

Câu 9. Hai vectơ $\vec{u} = (m-1;2)$ và $\vec{v} = (6;-4)$ cùng phương khi và chỉ khi

A. $m = -2$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = -3$ **D.** $m = 2$

Lời giải

Vì $\vec{v} \neq \vec{0}$ nên $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{u} = k\vec{v}$, tức là $m-1 = 6k$ và $2 = -4k$.

Từ $2 = -4k$ ta được $k = -\frac{1}{2}$, suy ra $m - 1 = -3 \Leftrightarrow m = -2$. Thử lại: $\vec{u} = (-3;2) = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

Chọn đáp án A.

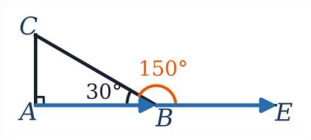
Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30°$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $150°$ **B.** $30°$ **C.** $60°$ **D.** $120°$

Lời giải

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ chưa chung điểm đầu. Lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ (B là trung điểm của AE), khi đó $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{EBC}$.

Góc $\widehat{EBC}$ kề bù với góc $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{EBC} = 180° - 30° = 150°$.



Đáp số $30°$ là sai lầm thường gặp do lấy luôn góc $\widehat{ABC}$ khi hai vectơ chưa chung điểm đầu.

Chọn đáp án A.

Câu 11. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $120°$ **D.** $150°$

Lời giải

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = -1$, do đó $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 2 = 6$.

$\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 4 + 4 + 4 = 12$, nên $\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right| = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $\cos\left(\vec{a}, \vec{a} - 2\vec{b}\right) = \frac{6}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tức là góc cần tìm bằng $30°$.

Nếu bỏ sót dấu trừ (lấy $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$) thì tử số bằng 2, $\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right| = 2$ và sẽ ra nhầm $60°$.

Chọn đáp án B.

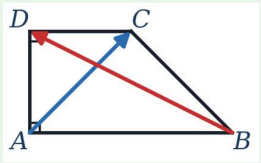
Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, có đáy lớn $AB = 2a$ và $AD = DC = a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-3a^2$ **B.** 0 **C.** a^2 **D.** $-a^2$

Lời giải

Phân tích theo hai vectơ vuông góc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$: vì $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $DC = \frac{1}{2}AB$ nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; còn $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, AB^2 = 4a^2, AD^2 = a^2$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - \frac{1}{2}AB^2 = a^2 - 2a^2 = -a^2$.



Tích vô hướng khác 0 nên hai đường chéo không vuông góc. Kết quả $-3a^2$ là do quên hệ số $\frac{1}{2}$, viết nhầm $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án D.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho tam giác ABC và điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Gọi M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.	✓	
b)	M là trung điểm của đoạn thẳng AD.	✓	
c)	$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$.		✓
d)	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.	✓	

Lời giải

a) Đúng. Từ giả thiết, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, tức là $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Vì A, B, C không thẳng hàng nên $BD \parallel AC$ và $BD = AC$, do đó tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

b) Đúng. Vì $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ nên $ABDC$ là hình bình hành với hai đường chéo AD và BC. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, nên trung điểm M của BC cũng là trung điểm của AD.

c) Sai. $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - 2\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD}$. Vì $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$ nên $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{AD}$.

d) Đúng. Từ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ suy ra $ABDC$ là hình bình hành, nên M là trung điểm chung của hai đường chéo AD và BC. Do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$; cộng vế theo vế, tổng bốn vectơ bằng $\vec{0}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm và N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = 2NC$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.		✓
b)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.		✓
c)	$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.	✓	
d)	Ba điểm B, G, N không thẳng hàng.	✓	

Lời giải

a) Sai. M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Trọng tâm G thuộc đoạn AM, $GM = \frac{1}{3}AM$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$, nên $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, không phải $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (đó là $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$).

b) Sai. N thuộc cạnh AC và $AN = 2NC$ nên $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, không phải $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ (đó là $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$, lấy hiệu theo thứ tự ngược).

c) Đúng. N thuộc cạnh AC và $AN = 2NC$ nên $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, do đó $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

d) Đúng. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Giả sử $\overrightarrow{BG} = k\,\overrightarrow{BN}$. Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên hệ số tương ứng phải bằng nhau: $-\frac{2}{3} = -k$ và $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}k$, tức là đồng thời $k = \frac{2}{3}$ và $k = \frac{1}{2}$: vô lí. Vậy B, G, N không thẳng hàng.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(3;4)$, $C(5;-2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} = (4;2)$.	✓	
b)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(9;0)$.		✓
c)	Điểm $E(-5;0)$ thuộc đường thẳng AB.	✓	
d)	$BC = 2\sqrt{10}$.	✓	

Lời giải

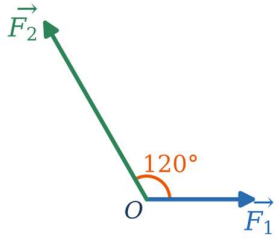
a) Đúng. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (3-(-1); 4-2) = (4;2)$.

b) Sai. $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Vì $\overrightarrow{BC} = (2;-6)$ nên $D(-1+2; 2-6) = (1;-4)$, không phải $D(9;0)$. Với $D(9;0)$ ta có $\overrightarrow{CD} = (4;2) = \overrightarrow{AB}$, tức là tứ giác $ABDC$ mới là hình bình hành (sai thứ tự đỉnh).

c) Đúng. $\overrightarrow{AE} = (-5-(-1); 0-2) = (-4;-2) = -\overrightarrow{AB}$, nên $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương. Do đó A, B, E thẳng hàng, tức E thuộc đường thẳng AB (hơn nữa A là trung điểm của BE).

d) Đúng. $\overrightarrow{BC} = (5-3; -2-4) = (2;-6)$, nên $BC = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Câu 4. Một vật chịu tác dụng của ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ và đứng yên. Biết $\left|\vec{F_1}\right| = 80$ N, $\left|\vec{F_2}\right| = 150$ N và góc giữa hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ bằng $120°$ (hình vẽ).



Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = -6000$.	✓	
b)	$\left\|\vec{F_3}\right\| = 230$ N.		✓
c)	$\cos\left(\vec{F_3}, \vec{F_2}\right) = -\frac{11}{13}$.	✓	
d)	Lực $\vec{F_3}$ vuông góc với lực $\vec{F_1}$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = \left|\vec{F_1}\right| \cdot \left|\vec{F_2}\right| \cdot \cos 120° = 80 \cdot 150 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6000$.

b) Sai. Vật đứng yên nên $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$, tức $\vec{F_3} = -\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)$. Do đó $\left|\vec{F_3}\right|^2 = \vec{F_1}^2 + 2\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} + \vec{F_2}^2 = 6400 - 12\,000 + 22\,500 = 16\,900$, suy ra $\left|\vec{F_3}\right| = 130$ N.
Con số 230 N là tổng hai độ lớn $80 + 150$, chỉ đúng khi hai lực cùng hướng.

c) Đúng. Vật đứng yên nên $\vec{F_3} = -\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)$ và $\left|\vec{F_3}\right|^2 = 6400 - 12\,000 + 22\,500 = 16\,900$, tức $\left|\vec{F_3}\right| = 130$ N. Ta có $\vec{F_3} \cdot \vec{F_2} = -\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} - \vec{F_2}^2 = 6000 - 22\,500 = -16\,500$, nên $\cos\left(\vec{F_3}, \vec{F_2}\right) = \frac{-16\,500}{130 \cdot 150} = -\frac{11}{13}$.

d) Sai. Vật đứng yên nên $\vec{F_3} = -\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)$, do đó $\vec{F_3} \cdot \vec{F_1} = -\vec{F_1}^2 - \vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = -6400 + 6000 = -400 \neq 0$. Vậy $\vec{F_3}$ không vuông góc với $\vec{F_1}$; góc giữa hai lực này lớn hơn $90°$ một chút (vì $\left|\vec{F_3}\right| = 130$ N nên $\cos\left(\vec{F_3}, \vec{F_1}\right) = \frac{-400}{130 \cdot 80} = -\frac{1}{26}$).

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo $AC = 12$ và $BD = 16$. Tính $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, do đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = 2\overrightarrow{BC}$.
Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên $OB = 8$, $OC = 6$ và $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = 2BC = 20$. (Cách khác: dựng $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BD}$ thì $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$; tam giác ACE vuông tại C nên $AE = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.)
Đáp số: 20

Câu 2. Cho đoạn thẳng AB dài 12 cm. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ và điểm N thoả mãn $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN (đơn vị: cm).

Lời giải

Biểu thị theo điểm đầu A:

$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AM} = -2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AN} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, suy ra $MN = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$ (cm).

Nhận xét: M nằm giữa A và B ($AM = 8$ cm), còn N nằm trên tia đối của tia BA ($AN = 24$ cm). Hai đẳng thức chỉ khác nhau một dấu trừ nhưng cho hai vị trí rất khác nhau.

Đáp số: 16

Câu 3. (**Vận dụng**) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;5)$, $B(-1;-1)$, $C(8;2)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc cạnh BC sao cho diện tích tam giác ABM gấp đôi diện tích tam giác ACM. Tính $x + y$.

Lời giải

Hai tam giác ABM và ACM có chung đường cao kẻ từ A xuống đường thẳng BC, nên tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy: $BM = 2MC$.

M thuộc cạnh BC và $BM = \frac{2}{3}BC$ nên $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Ta có $\overrightarrow{BC} = (9;3)$, suy ra $\overrightarrow{BM} = (6;2)$ và $M(-1+6;-1+2) = (5;1)$.

Vậy $x + y = 5 + 1 = 6$.

Đáp số: 6

Câu 4. Trên một bản đồ (đơn vị trên mỗi trục là 1 km), ba trạm quan trắc đặt tại $A(1;5)$, $B(-3;1)$, $C(8;3)$. Một trạm thu dữ liệu được đặt tại điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Tính khoảng cách từ G đến trạm A (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Đẳng thức $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ chứng tỏ G là trọng tâm của tam giác ABC: $x_G = \frac{1+(-3)+8}{3} = 2$, $y_G = \frac{5+1+3}{3} = 3$, tức $G(2;3)$.

$\overrightarrow{GA} = (1-2;5-3) = (-1;2)$, nên $GA = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots \approx 2{,}2$ (km) (làm tròn đến hàng phần mười).

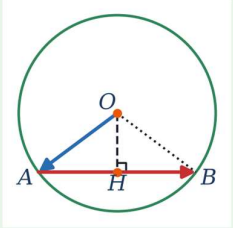
Đáp số: 2,2

Câu 5. Cho đường tròn tâm O bán kính 5 và một dây cung AB có độ dài 8. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB. Tam giác OAB cân tại O nên $OH \perp AB$, tức là $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HO}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \cdot AB = 4 \cdot 8 = 32$ (hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng).



Vậy $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=-32$. Bán kính chỉ bảo đảm dây AB tồn tại: kết quả không phụ thuộc vào bán kính.

Đáp số: −32

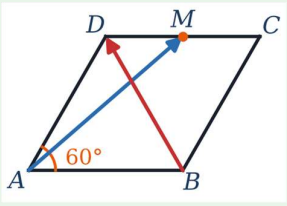
Câu 6. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 2 có $\widehat{BAD}=60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ làm cơ sở: $AB=AD=2$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\cdot2\cdot\cos60°=2$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}AB^2=4-2+1-2=1$.



Vậy $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=1$.

Đáp số: 1

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của BC, E là điểm trên cạnh AC sao cho $AE=\frac{1}{3}AC$ và F là điểm đối xứng với B qua A. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng và tính tỉ số $\frac{EF}{ED}$.

c) Cho $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;6)$. Tìm toạ độ của D, E, F và kiểm tra lại kết quả câu b).

Lời giải

a) D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

E thuộc cạnh AC và $AE=\frac{1}{3}AC$ nên $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{b}$; F đối xứng với B qua A nên A là trung điểm của BF, do đó $\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$.

b) $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$; $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

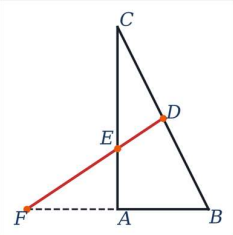
Ta thấy $\overrightarrow{EF}=-2\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)=-2\,\overrightarrow{ED}$: hai vectơ $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$ cùng phương và có chung điểm đầu E, nên ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Hệ số $-2<0$ nên $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{ED}$ ngược hướng, tức E nằm giữa D và F; đồng thời $EF=2ED$.

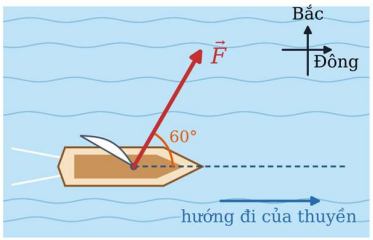
Vậy $\frac{EF}{ED}=2$.

c) $D\left(\frac{3+0}{2};\frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};3\right)$; $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=(0;2)$ nên $E(0;2)$; A là trung điểm của BF nên $F(2\cdot 0-3;2\cdot 0-0)=(-3;0)$.

$\overrightarrow{ED}=\left(\frac{3}{2};1\right)$, $\overrightarrow{EF}=(-3;-2)=-2\overrightarrow{ED}$: đúng như kết quả câu b) (D, E, F thẳng hàng, E nằm giữa D và F, $EF=2ED$).



Bài 2. (**Vận dụng**) Một thuyền buồm chạy thẳng theo hướng đông. Gió tác dụng lên cánh buồm một lực $\vec{F}$ có độ lớn 600 N, chếch về phía bắc và hợp với hướng đông một góc 60° (hình vẽ nhìn từ trên xuống). Nhờ sống thuyền cản nước, thuyền không bị đẩy ngang mà chỉ chạy theo hướng đông.



a) Phân tích $\vec{F}$ thành tổng của lực $\overrightarrow{F_1}$ hướng đông và lực $\overrightarrow{F_2}$ hướng bắc. Tính độ lớn của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Tính công của lực $\vec{F}$ khi thuyền đi được 2 km. Lực $\overrightarrow{F_2}$ sinh công bằng bao nhiêu?

c) Chọn hệ trục Oxy có $\vec{\imath}$ hướng đông, $\vec{\jmath}$ hướng bắc (lực tính bằng niutơn, độ dời tính bằng mét). Viết toạ độ của $\vec{F}$. Nếu thuyền đổi sang hướng đông bắc mà lực gió không đổi thì trên quãng đường 2 km, công của $\vec{F}$ bằng bao nhiêu kilôjun (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Dựng hình chữ nhật nhận vectơ biểu diễn $\vec{F}$ làm đường chéo, hai cạnh theo hướng đông và hướng bắc. Khi đó $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ với $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=600\cos 60^\circ=300$ (N) và

$\left|\overrightarrow{F_2}\right|=600\sin 60^\circ=300\sqrt{3}\approx 519{,}6$ (N).

b) Độ dời $\vec{d}$ của thuyền hướng đông, $\left|\vec{d}\right|=2000$ m và $\left(\vec{F},\vec{d}\right)=60^\circ$. Công của lực $\vec{F}$ là

$\vec{F}\cdot\vec{d}=600\cdot 2000\cdot\cos 60^\circ=600\,000$ (J), tức 600 kJ.

$\overrightarrow{F_2}$ vuông góc với $\vec{d}$ nên $\overrightarrow{F_2}\cdot\vec{d}=0$: lực này không sinh công. Toàn bộ công do $\overrightarrow{F_1}$ sinh ra: $300\cdot 2000=600\,000$ (J), khớp với kết quả trên.

c) $\vec{F}=(600\cos 60^\circ;600\sin 60^\circ)=\left(300;300\sqrt{3}\right)$.

Hướng đông bắc hợp với hướng đông góc 45°, nên độ dời mới là

$\vec{d'}=(2000\cos 45^\circ;2000\sin 45^\circ)=\left(1000\sqrt{2};1000\sqrt{2}\right)$.

Công của lực $\vec{F}$ là

$\vec{F}\cdot\vec{d'}=300\cdot 1000\sqrt{2}+300\sqrt{3}\cdot 1000\sqrt{2}=300\,000\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\approx 1\,159\,111$ (J).

Vậy công khoảng 1159 kJ, gần gấp đôi so với khi chạy theo hướng đông, vì góc giữa lực gió và hướng đi giảm từ 60° xuống 15° (kiểm tra: $600\cdot 2000\cdot\cos 15^\circ\approx 1\,159\,111$ J).

2 ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

Bảng đáp án nhanh

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	A	B	D	A	C	A	D	C	D	B	C

Câu	a)	b)	c)	d)
1	S	S	Đ	S
2	S	Đ	Đ	S
3	Đ	S	Đ	S
4	Đ	Đ	S	Đ

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	6,4	0,4	−0,2	5,39	8	143

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hai điểm phân biệt A và B. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$?

A. 1 **B.** vô số **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

$\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB. Đường trung trực có vô số điểm nên có vô số điểm M thoả mãn.

Lưu ý: nếu yêu cầu hai **vectơ** bằng nhau, chẳng hạn $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, thì chỉ có đúng một điểm M (trung điểm của AB).

Chọn đáp án B.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a và H là trung điểm của BC. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}$ bằng

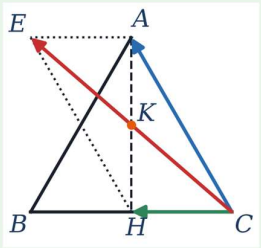
A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** a

Lời giải

Vì $-\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CH}$ nên $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}$.

Gọi K là trung điểm của AH. Theo tính chất trung điểm, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{CK}$ (đó cũng là vectơ $\overrightarrow{CE}$ với $CAEH$ là hình bình hành).

Tam giác CHK vuông tại H có $CH = \frac{a}{2}$, $HK = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, nên $CK = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.



Vậy $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = 2CK = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. (Nếu viết nhầm thành $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HA}$ sẽ ra kết quả sai $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.)

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Hai đẳng thức này đúng.

Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=AC=DB=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$: đẳng thức về độ dài này cũng đúng.

Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ có cùng độ dài nhưng giá AC và BD cắt nhau nên chúng không cùng phương, do đó không bằng nhau. Vậy khẳng định sai là $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{DB}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Lời giải

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$.

Do đó tổng đã cho bằng $2\overrightarrow{OA}$. Vì O là trung điểm của AC nên $2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}$.

Lưu ý: $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ là vectơ ngược hướng với kết quả, nên không phải đáp số.

Chọn đáp án D.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **C.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

N thuộc cạnh AC và $NC=2NA$ nên $AN=\frac{1}{3}AC$, tức $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án A.

Câu 6. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thoả mãn $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. C nằm giữa A và B **B.** B nằm giữa A và C

C. A **nằm giữa** B **và** C **D.** A, B, C không thẳng hàng

Lời giải

Từ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$: hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương và có chung điểm đầu A nên A, B, C thẳng hàng.

Hệ số $-3<0$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng: hai điểm B, C nằm về hai phía của điểm A. Vậy A nằm giữa B và C (và $AB=3AC$).

Chọn đáp án C.

Câu 7. Cho $\vec{a} = (-4; 5)$. Toạ độ của vectơ $-2\vec{a}$ là

A. $(8; -10)$ **B.** $(-8; 10)$ **C.** $(8; 10)$ **D.** $(-6; 3)$

Lời giải

Nhân từng toạ độ của $\vec{a}$ với -2: $-2\vec{a} = \big((-2)\cdot(-4); (-2)\cdot 5\big) = (8; -10)$.

Lưu ý: $(-8; 10)$ là toạ độ của $2\vec{a}$ (quên dấu trừ), còn $(-6; 3)$ là kết quả sai do lấy mỗi toạ độ trừ đi 2.

Chọn đáp án A.

Câu 8. Cho hai điểm $A(-1; 4)$, $B(4; -8)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 169 **B.** $\sqrt{119}$ **C.** 17 **D.** 13

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (4-(-1); -8-4) = (5; -12)$.

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$. (Kết quả 169 là AB^2, chưa lấy căn bậc hai.)

Chọn đáp án D.

Câu 9. Ba điểm $A(-3; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(3; m)$ thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $m = 8$ **B.** $m = 9$ **C.** $m = 10$ **D.** $m = 13$

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (2; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (6; m-1)$. Vì $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ nên A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ với số k nào đó.

So sánh hoành độ: $6 = 2k \Leftrightarrow k = 3$; so sánh tung độ: $m - 1 = 3\cdot 3 = 9 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án C.

Câu 10. Cho $\vec{u} = (4; -1)$, $\vec{v} = (2; 3)$. Tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. $(8; -3)$ **B.** 11 **C.** -5 **D.** 5

Lời giải

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 8 - 3 = 5$.

Tích vô hướng của hai vectơ là một **số**, không phải một vectơ, nên $(8; -3)$ không thể là kết quả; còn 11 là do bỏ sót dấu trừ $(8 + 3)$.

Chọn đáp án D.

Câu 11. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a có $\widehat{BAD} = 60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$ **B.** $-\frac{a^2}{2}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Hai góc kề một cạnh của hình thoi bù nhau nên $\widehat{ABC} = 180° - 60° = 120°$. Hai vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ chung điểm đầu B nên $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{ABC} = 120°$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = a\cdot a\cdot\cos 120° = -\frac{a^2}{2}$. (Nếu nhầm góc thành 60° sẽ ra $\frac{a^2}{2}$.)

Chọn đáp án B.

Câu 12. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng **B.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

C. $\vec{a} \perp \vec{b}$ **D.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng

Lời giải

Hai vế đều không âm nên có thể bình phương:

$\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 \Leftrightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Ý nghĩa hình học: hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có hai đường chéo bằng nhau, nên đó là hình chữ nhật.

Điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ không suy ra được: chẳng hạn $\vec{a} = (1;0)$, $\vec{b} = (0;2)$ thoả mãn giả thiết nhưng $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. (Điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ tương đương với $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$.)

Chọn đáp án C.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho tam giác đều ABC cạnh 3 và M là trung điểm của BC.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 0$.		✓
b)	$\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\| = 0$.		✓
c)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}$.	✓	
d)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 3$.		✓

Lời giải

a) Sai. M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, do đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}$. AM là đường cao của tam giác đều cạnh 3 nên $\left|\overrightarrow{MA}\right| = AM = \frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0$ (tổng ba vectơ bằng $\vec{0}$ khi M là trọng tâm, còn ở đây M là trung điểm của BC).

b) Sai. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (quy tắc hiệu), nên $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = CB = 3 \neq 0$ (không được lấy hiệu hai độ dài $AB - AC = 0$).

c) Đúng. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos 60° = 3\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

d) Sai. Trong tam giác đều, trung tuyến AM đồng thời là đường cao nên $AM \perp BC$, do đó $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, không phải 3.

Câu 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Điểm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và điểm E thoả mãn $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.		✓
b)	$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.	✓	
c)	Với mọi điểm M, ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MI}$.	✓	
d)	Ba điểm C, I, E thẳng hàng và $IC = 2IE$.		✓

Lời giải

a) Sai. Biểu thị theo điểm đầu A:
$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{AI}+2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)+3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI}\right)=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AI}$. Vậy đẳng thức đã cho tương đương với $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, không phải $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (hai hệ số bị đổi chỗ).

b) Đúng. Biểu thị theo điểm đầu A, đẳng thức xác định I cho $6\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$, tức $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; lại có $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Do đó $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

c) Đúng. Chèn điểm I vào mỗi vectơ:
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=(1+2+3)\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)=6\overrightarrow{MI}$.

d) Sai. Từ $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ suy ra $3\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$, tức $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Từ đẳng thức xác định I suy ra $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\right)$. Vậy I là trung điểm của CE: ba điểm C, I, E thẳng hàng nhưng $IC=IE$, không phải $IC=2IE$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-2;4)$, $B(-1;-3)$, $C(6;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}=(1;-7)$.	✓	
b)	$AB=\sqrt{58}$.		✓
c)	Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $D(5;9)$.	✓	
d)	Điểm đối xứng với A qua B là $A'\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.		✓

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)=(-1-(-2);-3-4)=(1;-7)$.

b) Sai. $\overrightarrow{AB}=(-1-(-2);-3-4)=(1;-7)$ nên $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, không phải $\sqrt{58}$ (giá trị $\sqrt{58}$ có được khi tính sai dấu $x_B-x_A=-1-2=-3$).

c) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(1;-7)$ và $\overrightarrow{AC}=(8;-2)$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng. $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(7;5)\Leftrightarrow D(-2+7;4+5)=(5;9)$. Vậy với $D(5;9)$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

d) Sai. B là trung điểm của AA' nên $x_{A'}=2x_B-x_A=-2-(-2)=0$, $y_{A'}=2y_B-y_A=-6-4=-10$, tức $A'(0;-10)$. Điểm $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB chứ không phải điểm đối xứng của A qua B.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;2)$.

Ý	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.	✓	
b)	Tam giác ABC cân tại A.	✓	
c)	$\cos\widehat{BAC}=0{,}6$.		✓
d)	Diện tích tam giác ABC bằng 6.	✓	

Lời giải

a) Đúng. $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;4)$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 2+2\cdot 4=16$.

b) Đúng. $AB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. Vì $AB=AC$ nên tam giác ABC cân tại A.

c) Sai. $\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\frac{16}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{16}{20}=0{,}8$, không phải 0,6 (0,6 là giá trị của $\sin\widehat{BAC}$).

d) Đúng. $\cos\widehat{BAC}=\frac{16}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}=0{,}8$ nên $\sin\widehat{BAC}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6$.

Diện tích $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 0{,}6=6$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

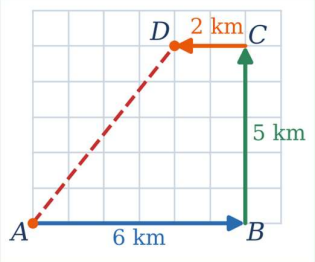
Câu 1. Trên vịnh Hạ Long, một thuyền kayak xuất phát từ bến A, chèo 6 km theo hướng đông đến điểm B, rồi 5 km theo hướng bắc đến điểm C, sau đó 2 km theo hướng tây đến điểm D. Tính khoảng cách từ D đến bến A (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm, độ dời của cả hành trình là $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}$ (6 km, hướng đông) và $\overrightarrow{CD}$ (2 km, hướng tây) ngược hướng, nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ là vectơ hướng đông có độ dài $6-2=4$ (km); vectơ này vuông góc với $\overrightarrow{BC}$ (5 km, hướng bắc).

Do đó $AD=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}\approx 6{,}40$; làm tròn đến hàng phần mười, $AD\approx 6{,}4$ km.



Lưu ý: quãng đường thuyền đã chèo là $6+5+2=13$ (km), lớn hơn nhiều so với khoảng cách AD.

Đáp số: 6,4

Câu 2. Cho tam giác ABC có $AB=3$, $AC=7$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A (D thuộc cạnh BC). Biết $\overrightarrow{AD}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$, tính $x-y$.

Lời giải

Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{7}$, nên $DB=\frac{3}{10}BC$. Vì D thuộc cạnh BC nên $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{10}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên cách biểu thị là duy nhất: $x=\frac{7}{10}$, $y=\frac{3}{10}$. Do đó $x-y=\frac{4}{10}=0{,}4$.

Đáp số: 0,4

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}=(3;1)$ và $\vec{b}=(1;-2)$. Tìm số thực k để vectơ $\vec{a}+k\vec{b}$ có độ dài nhỏ nhất (viết kết quả dưới dạng số thập phân).

Lời giải

$\vec{a}+k\vec{b}=(3+k;1-2k)$, nên $\left|\vec{a}+k\vec{b}\right|^2=(3+k)^2+(1-2k)^2=5k^2+2k+10$.

Hàm số bậc hai $f(k)=5k^2+2k+10$ có hệ số của k^2 dương nên đạt giá trị nhỏ nhất tại $k=-\frac{2}{2\cdot 5}=-\frac{1}{5}=-0{,}2$; khi đó $\left|\vec{a}+k\vec{b}\right|^2=\frac{49}{5}$.

Nhận xét: với $k=-0{,}2$ thì $\vec{a}+k\vec{b}=\left(\frac{14}{5};\frac{7}{5}\right)$ và $\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\frac{14}{5}-\frac{14}{5}=0$: độ dài nhỏ nhất đạt được khi $\vec{a}+k\vec{b}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Đáp số: −0,2

Câu 4. Cho tam giác ABC có $A(-1;3)$, $B(5;5)$, $C(3;-3)$. Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC: $M\left(\frac{5+3}{2};\frac{5+(-3)}{2}\right)=(4;1)$.

$\overrightarrow{AM}=(4-(-1);1-3)=(5;-2)$, nên $AM=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}\approx 5{,}385\approx 5{,}39$.

Đáp số: 5,39

Câu 5. Cho tam giác ABC có $AB=3$, $AC=5$ và M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$; theo quy tắc hiệu, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)=\frac{1}{2}(25-9)=8$.

Nhận xét: kết quả không phụ thuộc vào góc A. Đặc biệt, khi $AB=AC$ thì $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$: trung tuyến của tam giác cân đồng thời là đường cao.

Đáp số: 8

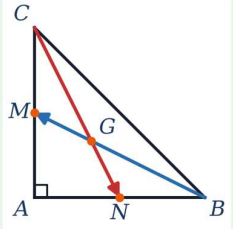
Câu 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và AB. Tính số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{CN}$ (đơn vị: độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đặt $AB=AC=a$; khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Ta có $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{2}AB^2+\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-a^2$; $BM^2=\frac{1}{4}AC^2+AB^2=\frac{5a^2}{4}$ và tương tự $CN^2=\frac{5a^2}{4}$.

$\cos\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}\right)=\frac{-a^2}{\frac{5a^2}{4}}=-\frac{4}{5}$, suy ra $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}\right)\approx 143{,}13°$; làm tròn đến hàng đơn vị được $143°$.



Lưu ý: hai **đường thẳng** BM, CN cắt nhau theo góc khoảng $37°$; còn góc giữa hai **vectơ** là góc tù vì tích vô hướng của chúng âm.

Đáp số: 143

PHẦN IV. Tự luận

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm thuộc đường chéo BD sao cho $BN = \frac{1}{3}BD$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Chứng minh ba điểm C, N, M thẳng hàng và N là trọng tâm của tam giác ABC.

c) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(0;0)$, $B(6;0)$, $D(2;4)$. Tìm toạ độ các điểm C, M, N và kiểm tra lại kết quả câu b).

Lời giải

a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; lại có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a}$. Do đó $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

b) Ta có $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$: hai vectơ $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CM}$ cùng phương và có chung điểm đầu C, nên ba điểm C, N, M thẳng hàng.

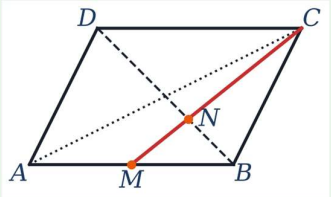
Hơn nữa $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$, trong đó CM là đường trung tuyến của tam giác ABC (M là trung điểm của AB): N thuộc đoạn CM và $CN = \frac{2}{3}CM$, nên N là trọng tâm của tam giác ABC.

(Cũng có thể kiểm tra trực tiếp:

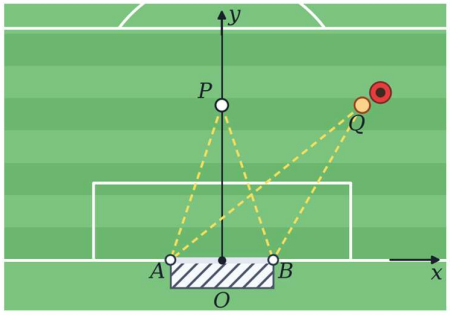
$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = -3\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -(2\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$.)

c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (6;0)$ nên $C(8;4)$; M là trung điểm của AB nên $M(3;0)$; $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}(-4;4)$ nên $N\left(6 - \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

$\overrightarrow{CM} = (-5;-4)$, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$ nên C, N, M thẳng hàng. Trọng tâm của tam giác ABC có toạ độ $\left(\frac{0+6+8}{3}; \frac{0+0+4}{3}\right) = \left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3}\right)$, trùng với N. Kết quả câu b) được kiểm chứng.



Bài 2. (**Vận dụng**) Trên sân bóng đá, khung thành rộng 7,32 m. Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên mỗi trục là 1 m) có trục Ox là vạch cầu môn, gốc O là trung điểm của khung thành; hai cột dọc ở $A(-3{,}66;0)$ và $B(3{,}66;0)$. Chấm phạt đền là $P(0;11)$; một cầu thủ đang giữ bóng tại $Q(10;11)$ (hình vẽ). Góc nhìn khung thành AB từ vị trí đặt bóng gọi là *góc sút*.



a) Tính khoảng cách từ chấm phạt đền đến mỗi cột dọc và tính góc sút $\widehat{APB}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

b) Tính góc sút $\widehat{AQB}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ). Từ vị trí nào sút bóng thuận lợi hơn?

c) Từ Q, cầu thủ sút bóng lăn thẳng theo hướng của vectơ $\vec{u}=(-1;-2)$. Bóng có đi vào khung thành không? Nếu không, bóng cắt vạch cầu môn tại điểm cách cột dọc gần nhất bao nhiêu mét?

Lời giải

a) $\overrightarrow{PA}=(-3{,}66;-11)$, $\overrightarrow{PB}=(3{,}66;-11)$, nên

$PA=PB=\sqrt{3{,}66^2+11^2}=\sqrt{134{,}3956}\approx 11{,}59$ (m).

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3{,}66^2+11^2=107{,}6044$, nên $\cos\widehat{APB}=\frac{107{,}6044}{134{,}3956}\approx 0{,}8007$ và $\widehat{APB}\approx 36{,}8°$.

b) $\overrightarrow{QA}=(-13{,}66;-11)$, $\overrightarrow{QB}=(-6{,}34;-11)$, nên $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=13{,}66\cdot 6{,}34+121=207{,}6044$.

$QA=\sqrt{13{,}66^2+11^2}\approx 17{,}538$ và $QB=\sqrt{6{,}34^2+11^2}\approx 12{,}696$, nên

$\cos\widehat{AQB}\approx\frac{207{,}6044}{17{,}538\cdot 12{,}696}\approx 0{,}9323$ và $\widehat{AQB}\approx 21{,}2°$.

Góc sút tại chấm phạt đền lớn hơn khoảng $15{,}6°$: từ đó, khung thành "mở" rộng hơn trước mắt người sút, nên sút từ P thuận lợi hơn.

c) Gọi $N(x;0)$ là điểm bóng cắt vạch cầu môn. Bóng lăn thẳng theo hướng $\vec{u}$ nên $\overrightarrow{QN}=(x-10;-11)$ cùng hướng với $\vec{u}=(-1;-2)$, tức là $\overrightarrow{QN}=t\vec{u}$ với $t>0$.

So sánh tung độ: $-11=-2t\Leftrightarrow t=5{,}5$; so sánh hoành độ: $x-10=-5{,}5\Leftrightarrow x=4{,}5$.

Vì $4{,}5>3{,}66$ nên $N(4{,}5;0)$ nằm ngoài khung thành: bóng không vào lưới mà đi chệch ra ngoài cột B một khoảng $4{,}5-3{,}66=0{,}84$ (m).

CHUYÊN ĐỀ 4

TOÁN 10 NÂNG CAO · BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

◎ GIỚI THIỆU CHUYÊN ĐỀ

Vectơ giúp giải nhiều bài toán hình học phẳng mà không phải vẽ thêm đường phụ: chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song hay vuông góc; tính tỉ số độ dài, tỉ số diện tích; tìm tập hợp điểm; tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của độ dài vectơ hay của tổng bình phương khoảng cách. Chuyên đề này nâng các kĩ năng của Bài 7 – Bài 11 (SGK) lên mức thi học sinh giỏi.

- **A.** Phân tích vectơ theo hai vectơ không cùng phương; điểm chia đoạn thẳng; **tâm tỉ cự**; hằng đẳng thức Lagrange; tích vô hướng.
- **B.** Năm dạng toán, từ phân tích vectơ đến các đẳng thức vectơ đặc biệt trong tam giác; mỗi dạng có ví dụ giải mẫu (có ví dụ mức HSG) và bài tập tự luyện, nhiều bài lấy từ đề thi HSG (có ghi nguồn).
- **C.** 24 bài thi HSG, Olympic cấp tỉnh, cụm trường và cấp trường (Hà Nội, Hải Dương, Bắc Ninh, Vĩnh Phúc, Hà Nam, Nghệ An, Quảng Trị, TP Hồ Chí Minh) có ghi nguồn.
- **D.** Phát triển bài toán: 6 bài (trong đó có một bài toán thực tế), phát triển từ ý tưởng của các đề thi.

A KIẾN THỨC MỞ RỘNG

1. Phân tích vectơ – Thẳng hàng

◆ PHÂN TÍCH VECTƠ

- Cho $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương. Mọi $\vec{x}$ biểu diễn **duy nhất** dạng $\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v}$; do đó $m\vec{u} + n\vec{v} = m'\vec{u} + n'\vec{v} \Leftrightarrow m = m', n = n'$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ với $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ với điểm O bất kì, $\overrightarrow{OC} = t\,\overrightarrow{OA} + (1-t)\,\overrightarrow{OB}$ với $t \in \mathbb{R}$.
- Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$ ($\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$): $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$. Nếu M thuộc đoạn AB và $AM = t \cdot AB$ thì $\overrightarrow{OM} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$.

2. Tâm tỉ cự

★ ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ CÓ TRỌNG SỐ

Cho các điểm $A_1, \ldots, A_n$ và các số $k_1, \ldots, k_n$ có tổng $k = k_1 + \cdots + k_n \neq 0$. Tồn tại duy nhất điểm I (tâm tỉ cự) sao cho $k_1\,\overrightarrow{IA_1} + \cdots + k_n\,\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$, và với mọi M:

$$k_1\,\overrightarrow{MA_1} + \cdots + k_n\,\overrightarrow{MA_n} = k\,\overrightarrow{MI}.$$

- Hệ quả: khi M chạy trên đường thẳng d, giá trị nhỏ nhất của $\left|\sum k_i\,\overrightarrow{MA_i}\right|$ bằng $|k| \cdot d(I,d)$, đạt khi M là hình chiếu của I trên d.
- Hằng đẳng thức Lagrange: $\sum k_i MA_i^2 = k\,MI^2 + \sum k_i IA_i^2$; khi $k > 0$, biểu thức $\sum k_i MA_i^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv I$.

- Tính hằng số: $\sum k_i IA_i^2 = \frac{1}{k}\sum_{i<j} k_i\, k_j A_iA_j^2$ (bình phương vô hướng hai vế của $\sum k_i \overrightarrow{IA_i} = \vec{0}$ và dùng $2\overrightarrow{IA_i}\cdot\overrightarrow{IA_j} = IA_i^2 + IA_j^2 - A_iA_j^2$).
- Nếu $k = 0$ thì $\sum k_i \overrightarrow{MA_i}$ là vectơ không đổi; khi đó, với điểm O cố định, $\sum k_i MA_i^2 = 2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\sum k_i \overrightarrow{OA_i}\right) + \sum k_i OA_i^2$, nên tập hợp các điểm M có $\sum k_i MA_i^2$ bằng một hằng số cho trước thường là một đường thẳng.

3. Tích vô hướng

◆ CÔNG THỨC VÀ ỨNG DỤNG

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2)$; $\vec{u}\cdot\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$, dấu bằng khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.
- Trong tam giác: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$.
- Với I là trung điểm AB: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$; $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$; $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$.

✱ ĐẲNG THỨC VECTƠ ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

- Trọng tâm G: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Tâm nội tiếp I: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- Tâm ngoại tiếp O, trực tâm H: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (đường thẳng Euler).

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Phân tích vectơ – Tỉ số – Ba điểm thẳng hàng

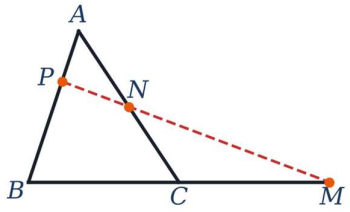
⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chọn hai vectơ "cơ sở" không cùng phương (thường là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) và biểu diễn mọi vectơ cần xét theo hai vectơ đó.
- Ba điểm thẳng hàng: chứng minh hai vectơ tương ứng cùng phương; hoặc chứng minh $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AN} + \beta\overrightarrow{AP}$ với $\alpha + \beta = 1$ thì M thuộc đường thẳng NP.
- Tìm giao điểm, tỉ số: đặt tham số trên hai đường thẳng rồi đồng nhất hệ số (dựa vào tính duy nhất của phân tích); với các đường thẳng đi qua đỉnh của tam giác, có thể tìm ngay giao điểm dưới dạng **tâm tỉ cự** của ba đỉnh.
- *Sai lầm thường gặp: quên điều kiện "không cùng phương" của hai vectơ cơ sở khi đồng nhất hệ số; nhầm dấu khi chuyển hệ thức $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ sang $\overrightarrow{AM}$.*

▶ **Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P (khác các đỉnh) lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB, thoả mãn $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = n\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = p\overrightarrow{PB}$.

a) Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (định lí Menelaus).

b) Áp dụng: M là điểm đối xứng với B qua C, N là trung điểm của AC, P là điểm thuộc cạnh AB với $AP = \frac{1}{3}AB$ (hình vẽ). Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.



Lời giải

a) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Các điểm khác đỉnh nên m, n, p khác 0 và khác 1 (chẳng hạn $m = 1$ dẫn đến $B \equiv C$).

$\overrightarrow{MB} = m\,\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \vec{u} - \overrightarrow{AM} = m\left(\vec{v} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{m\vec{v}-\vec{u}}{m-1}$.

$\overrightarrow{NC} = n\,\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \vec{v} - \overrightarrow{AN} = -n\,\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \vec{v} = (1-n)\,\overrightarrow{AN}$;

$\overrightarrow{PA} = p\,\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} = p\left(\vec{u} - \overrightarrow{AP}\right) \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{AP}$.

Thay vào: $\overrightarrow{AM} = \frac{m(1-n)}{m-1}\overrightarrow{AN} - \frac{p-1}{p(m-1)}\overrightarrow{AP}$. Hai vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$ không cùng phương, nên M thuộc đường thẳng NP khi và chỉ khi tổng hai hệ số bằng 1:

$$\frac{m(1-n)}{m-1} - \frac{p-1}{p(m-1)} = 1 \Leftrightarrow pm(1-n) - (p-1) = p(m-1) \Leftrightarrow 1 - mnp = 0.$$

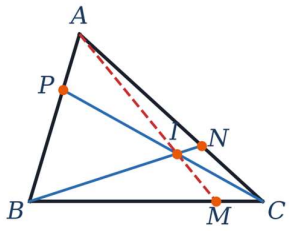
Vậy M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$.

b) C là trung điểm của MB nên $\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MC}$, tức $m = 2$. N là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$, tức $n = -1$. P thuộc cạnh AB và $PB = 2PA$ nên $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$, tức $p = -\frac{1}{2}$.

Ta có $mnp = 2 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Vậy M, N, P thẳng hàng.

Nhận xét: $m < 0$ khi và chỉ khi M nằm trong đoạn BC (tương tự với n, p). Vì $mnp = 1 > 0$, một đường thẳng không đi qua đỉnh nào hoặc cắt đúng hai cạnh của tam giác, hoặc không cắt cạnh nào.

▶ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC. Lấy điểm P thuộc cạnh AB với $AP = \frac{1}{3}AB$ và điểm N thuộc cạnh AC với $AN = 2NC$. Gọi I là giao điểm của BN và CP; đường thẳng AI cắt BC tại M. Tính các tỉ số $\frac{BM}{MC}$ và $\frac{AI}{IM}$.



Lời giải

Ý tưởng. Tìm các số x, y, z để I là tâm tỉ cự của A, B, C với các hệ số x, y, z; khi đó mọi đường thẳng nối một đỉnh với I đều xác định được ngay.

$AP = \frac{1}{3}AB$ nên $PB = 2PA$, tức $2\,\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. $AN = 2NC$ nên $\overrightarrow{NA} + 2\,\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, hay $2\,\overrightarrow{NA} + 4\,\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ (nhân với 2 để hệ số của A trong hai hệ thức bằng nhau).

Gọi J là điểm thoả mãn $2\,\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 4\,\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (tổng các hệ số bằng 7).

– Từ $2\,\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ suy ra $2\,\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = 3\,\overrightarrow{JP}$, nên $3\,\overrightarrow{JP} + 4\,\overrightarrow{JC} = \vec{0}$: J thuộc đoạn CP.

– Từ $2\overrightarrow{NA}+4\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ suy ra $2\overrightarrow{JA}+4\overrightarrow{JC}=6\overrightarrow{JN}$, nên $\overrightarrow{JB}+6\overrightarrow{JN}=\vec{0}$: J thuộc đoạn BN.

Do đó J là giao điểm của BN và CP, tức $J\equiv I$ và $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

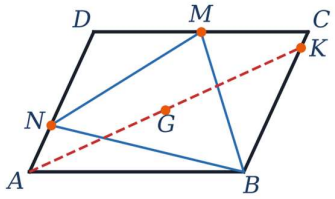
Gọi M' là điểm thuộc đoạn BC với $\overrightarrow{M'B}+4\overrightarrow{M'C}=\vec{0}$ (tức $BM'=4M'C$). Khi đó $\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=5\overrightarrow{IM'}$, nên $2\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IM'}=\vec{0}$: I thuộc đoạn AM' và $IA=\frac{5}{2}IM'$. Như vậy M' là giao điểm của AI với BC, tức $M'\equiv M$.

Vậy $\frac{BM}{MC}=4$ và $\frac{AI}{IM}=\frac{5}{2}$.

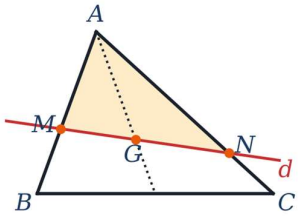
Nhận xét: tổng quát, nếu $\frac{AP}{PB}=\frac{y}{x}$, $\frac{AN}{NC}=\frac{z}{x}$ *thì I là tâm tỉ cự với các hệ số* x, y, z, *và* $\frac{AI}{IM}=\frac{y+z}{x}=\frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}$ *(định lí Van Aubel; ở đây* $\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$*). Đồng thời* $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$ *(định lí Ceva).*

✎ Bài tập tự luyện

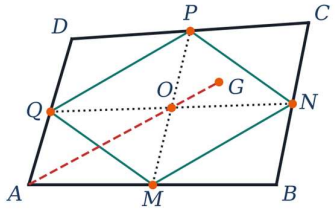
Bài 1. **[HSG tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hải Dương, 2016 – 2017]** (★) Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh CD, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN=\frac{1}{3}AD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN, đường thẳng AG cắt BC tại K. Tính tỉ số $\frac{BK}{BC}$.



Bài 2. (★) Cho tam giác ABC có trọng tâm G và diện tích S. Một đường thẳng d đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN.



Bài 3. **[Khảo sát đội tuyển HSG Toán 10 lần 2, THPT Trần Phú – Vĩnh Phúc, 2021 – 2022]** (★) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA; O là giao điểm của MP và NQ; G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.



Dạng 2. Tâm tỉ cự – GTNN của độ dài vectơ và tổng bình phương

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Tìm điểm I thoả mãn $\sum k_i \overrightarrow{IA_i} = \vec{0}$ (biểu diễn $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ cơ sở, hoặc dùng toạ độ).
- Độ dài vectơ: $\left|\sum k_i \overrightarrow{MA_i}\right| = |k| \cdot MI$; bài toán trở thành tìm khoảng cách nhỏ nhất (lớn nhất) từ điểm cố định I đến điểm M.
- Tổng bình phương: dùng hằng đẳng thức Lagrange $\sum k_i MA_i^2 = k\,MI^2 + \sum k_i IA_i^2$.
- M chạy trên đường thẳng d: $MI \geq d(I,d)$. M chạy trên đường tròn $(O;R)$: $|R - OI| \leq MI \leq R + OI$, dấu bằng tại giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn.
- *Chú ý: nếu M chỉ chạy trên một đoạn thẳng (một cạnh) mà hình chiếu của I lại nằm ngoài đoạn đó, thì giá trị nhỏ nhất đạt tại đầu mút gần hình chiếu hơn.*

▶ Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$, $AC = 8$. Điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

Lời giải

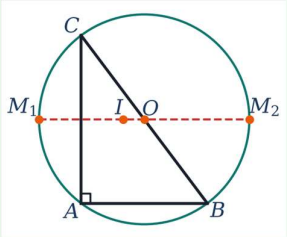
Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (tổng các hệ số bằng 6). Theo hằng đẳng thức Lagrange, $T = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$.

Tính hằng số (mục A), với $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$:

$$IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = \frac{1\cdot 2\cdot AB^2 + 1\cdot 3\cdot AC^2 + 2\cdot 3\cdot BC^2}{6} = \frac{72 + 192 + 600}{6} = 144.$$

Do đó $T = 6MI^2 + 144$.

Chọn hệ trục toạ độ với $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(0;8)$. Khi đó $I\left(\frac{2\cdot 6}{6}; \frac{3\cdot 8}{6}\right) = (2;4)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm $O(3;4)$ là trung điểm của cạnh huyền BC, bán kính $R = 5$; $OI = 1 < R$ nên I nằm trong đường tròn.



Với M thuộc đường tròn, theo bất đẳng thức tam giác: $OM - OI \leq MI \leq OM + OI$, tức $4 \leq MI \leq 6$. Đường thẳng OI (là đường thẳng $y = 4$) cắt đường tròn tại $M_1(-2;4)$ và $M_2(8;4)$, với $M_1I = 4$, $M_2I = 6$.

Vậy $T_{\min} = 6 \cdot 16 + 144 = 240$, đạt khi $M \equiv M_1(-2;4)$; $T_{\max} = 6 \cdot 36 + 144 = 360$, đạt khi $M \equiv M_2(8;4)$.

Kiểm tra tại M_1: $MA^2 = 20$, $MB^2 = 80$, $MC^2 = 20$, nên $T = 20 + 160 + 60 = 240$.

▶ Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi O, R và I, r lần lượt là tâm và bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M: $a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \geq abc$. Khi nào xảy ra dấu bằng?

b) Chứng minh hệ thức Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$; từ đó suy ra $R \geq 2r$.

Lời giải

a) Tâm I của đường tròn nội tiếp thoả mãn $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (mục A, chứng minh ở Ví dụ 10), tức I là tâm tỉ cự của A, B, C với các hệ số a, b, c, có tổng $a + b + c > 0$.

Theo hằng đẳng thức Lagrange: $a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 = (a + b + c)MI^2 + a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2$.

Tính hằng số: $a\cdot IA^2+b\cdot IB^2+c\cdot IC^2=\frac{ab\cdot AB^2+bc\cdot BC^2+c\cdot CA^2}{a+b+c}=\frac{abc^2+bca^2+cab^2}{a+b+c}=\frac{abc(a+b+c)}{a+b+c}=abc$.

Do đó $a\cdot MA^2+b\cdot MB^2+c\cdot MC^2=(a+b+c)MI^2+abc\geq abc$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv I$.

b) Áp dụng đẳng thức vừa chứng minh với $M\equiv O$ ($OA=OB=OC=R$): $(a+b+c)R^2=(a+b+c)OI^2+abc$, nên $OI^2=R^2-\frac{abc}{a+b+c}$.

Gọi S,p là diện tích và nửa chu vi của tam giác. Từ $S=\frac{abc}{4R}=pr$ suy ra $abc=4RS=4Rpr$, nên $\frac{abc}{a+b+c}=\frac{4Rpr}{2p}=2Rr$. Vậy $OI^2=R^2-2Rr$.

Vì $OI^2\geq 0$ nên $R^2\geq 2Rr$, tức $R\geq 2r$; dấu bằng khi $O\equiv I$, tức tam giác ABC đều.

Nhận xét: Chuyên đề 3 chứng minh $R\geq 2r$ bằng công thức Heron; vectơ cho kết quả mạnh hơn – biết chính xác khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp.

✎ Bài tập tự luyện

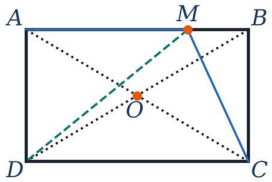
Bài 4. **[HSG Toán 10 lần 2, THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc, 2020 – 2021]** (★) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2AD$, $BC=a$. Điểm M di động trên đường thẳng BC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 5. (★) Cho tam giác ABC có $AB=2$, $BC=3$, $\widehat{ABC}=120^\circ$. Xét biểu thức $T=4MA^2+MB^2+MC^2$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của T khi M thay đổi trên đường thẳng BC.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của T khi M thay đổi trên đoạn thẳng BC.

Bài 6. **[HSG tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hải Dương, 2022 – 2023]** (★) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB>AD$. Tìm vị trí điểm M trên các cạnh của hình chữ nhật sao cho biểu thức $T=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+MB^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài 7. **[HSG cấp cơ sở Toán 10, cụm THPT Lục Nam – Bắc Giang, 2023 – 2024 (câu trắc nghiệm, trình bày lại)]** (★) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Gọi M là điểm di động trên đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MB^2+2MC^2$.

Bài 8. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Tĩnh Gia 1 – Thanh Hoá, 2023 – 2024 (câu trả lời ngắn, trình bày lại)]** (★) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A, biết $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x để độ dài vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ nhỏ nhất.

Dạng 3. Tích vô hướng: góc, độ dài, điều kiện vuông góc

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Biểu diễn hai vectơ cần xét theo hai vectơ cơ sở $\vec{u}$, $\vec{v}$ đã biết $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ và $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (hoặc chọn hệ trục toạ độ khi hình có góc vuông).
- Vuông góc: tích vô hướng bằng 0, dẫn đến phương trình theo tham số. Góc cho trước: dùng $\cos(\vec{x},\vec{y})=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$.
- Góc nhỏ nhất, lớn nhất: biểu diễn côsin của góc theo một biến rồi đánh giá (bất đẳng thức AM – GM, hằng đẳng thức).
- Đẳng thức độ dài: bình phương vô hướng một hệ thức vectơ, chẳng hạn $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$.

▶ **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC có $AB=6$, $BC=7$, $CA=5$. Điểm M thuộc cạnh AB với $AM=2MB$; điểm N thoả mãn $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$ $(k\in\mathbb{R})$. Tìm k để $CM\perp BN$.

Lời giải

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$: $|\vec{u}|=6$, $|\vec{v}|=5$ và $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\frac{36+25-49}{2}=6$.

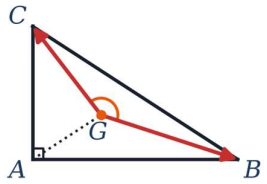
M thuộc cạnh AB với $AM=2MB$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\vec{u}$; suy ra $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{u}-\vec{v}$. Ngoài ra $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=k\vec{v}-\vec{u}$.

$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(\frac{2}{3}\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot(k\vec{v}-\vec{u})=\frac{2k}{3}\vec{u}\cdot\vec{v}-\frac{2}{3}|\vec{u}|^2-k|\vec{v}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=4k-24-25k+6=-21k-18$.

$CM\perp BN\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BN}=0\Leftrightarrow-21k-18=0\Leftrightarrow k=-\frac{6}{7}$.

Vậy $k=-\frac{6}{7}$ (điểm N nằm trên tia đối của tia AC). *(Theo đề HSG tỉnh Hải Dương 2017 – 2018.)*

▶ **Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC=a$, trọng tâm G. Tìm độ dài AB để góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ nhỏ nhất.



Lời giải

Đặt hệ trục toạ độ: $A(0;0)$, $B(x;0)$, $C(0;a)$ với $x=AB>0$. Trọng tâm $G\left(\frac{x}{3};\frac{a}{3}\right)$, nên $\overrightarrow{GB}=\left(\frac{2x}{3};-\frac{a}{3}\right)$, $\overrightarrow{GC}=\left(-\frac{x}{3};\frac{2a}{3}\right)$.

$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=-\frac{2x^2}{9}-\frac{2a^2}{9}=-\frac{2(x^2+a^2)}{9}$, $GB=\frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{3}$, $GC=\frac{\sqrt{x^2+4a^2}}{3}$. Do đó $\cos\widehat{BGC}=\frac{-2(x^2+a^2)}{\sqrt{(4x^2+a^2)(x^2+4a^2)}}$.

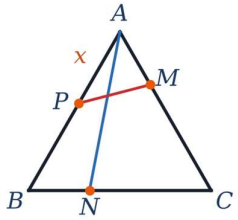
Theo bất đẳng thức AM – GM: $\sqrt{(4x^2+a^2)(x^2+4a^2)}\le\frac{(4x^2+a^2)+(x^2+4a^2)}{2}=\frac{5(x^2+a^2)}{2}$. Vì tử số âm nên $\cos\widehat{BGC}\le\frac{-2(x^2+a^2)}{\frac{5}{2}(x^2+a^2)}=-\frac{4}{5}$.

Góc $\widehat{BGC}\in(0°;180°)$ nhỏ nhất khi côsin của nó lớn nhất, tức $\cos\widehat{BGC}=-\frac{4}{5}$; điều này xảy ra khi $4x^2+a^2=x^2+4a^2\Leftrightarrow x=a$.

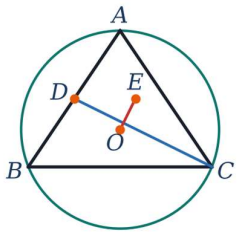
Vậy $AB=a$ (tam giác ABC vuông cân tại A). *(Đề HSG lần 2, THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc, 2020 – 2021.)*

✎ Bài tập tự luyện

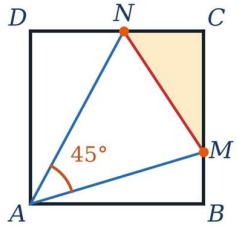
Bài 9. **[HSG Toán 10, THPT Đan Phượng – Hà Nội, 2018 – 2019]** (★) Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm N, M, P sao cho $BN = \frac{a}{3}$, $CM = \frac{2a}{3}$, $AP = x$ $(0 < x < a)$. Tìm x theo a để đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM.



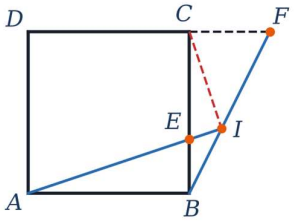
Bài 10. **[HSG Toán 10 lần 2, THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc, 2020 – 2021]** (★★) Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng $OE \perp CD$.



Bài 11. (★) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các cạnh BC, CD sao cho $\widehat{MAN} = 45°$. Chứng minh rằng chu vi tam giác CMN không đổi.



Bài 12. **[HSG cấp cơ sở Toán 10, cụm THPT Lục Nam – Bắc Giang, 2023 – 2024]** (★) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E, F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; đường thẳng BF cắt đường thẳng AE tại điểm I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90°$.



Bài 13. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Phùng Khắc Khoan – Thạch Thất, Hà Nội, 2020 – 2021]** (★) Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB \perp EF$ và hai tam giác ACE, BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Dạng 4. Tập hợp điểm

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Biến đổi điều kiện về một trong các dạng: $MI = R$ (đường tròn), $MA = MB$ (đường trung trực), $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{n} = k$ (đường thẳng vuông góc với $\vec{n}$).
- Dùng các công thức trung điểm cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, $MA^2 \pm MB^2$ và tâm tỉ cự cho tổng có trọng số; điều kiện tỉ số $MA = k \cdot MB$ thì bình phương rồi dùng tâm tỉ cự với các hệ số 1 và $-k^2$.
- Tổng các hệ số khác 0: tập hợp thường là đường tròn; tổng các hệ số bằng 0: tập hợp thường là đường thẳng (mục A).
- Biện luận theo tham số (tập rỗng, một điểm, đường tròn).

▶ **Ví dụ 7.** Cho đoạn thẳng $AB = 4$. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB; ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $IA = IB = 2$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 4$.

Điều kiện $\Leftrightarrow MI^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow MI = 3$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I (trung điểm AB), bán kính bằng 3.

▶ **Ví dụ 8.** Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 - MB^2 = 2a^2$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB. Ta có $MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB. Vì $\overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Điều kiện $\Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2 > 0$, nên $\overrightarrow{IH}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $IH \cdot 2a = a^2$, tức $IH = \frac{a}{2}$: H là điểm cố định, là trung điểm của đoạn IB. Ngược lại, mọi điểm M có hình chiếu trên AB là H đều thoả mãn điều kiện.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H, với H là trung điểm của IB.

▶ **Ví dụ 9.** Cho đoạn thẳng $AB = a$ và số thực $k > 0$, $k \neq 1$.

a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $MA = k \cdot MB$ là một đường tròn (đường tròn Apollonius); xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

b) Gọi C, D là hai điểm trên đường thẳng AB thoả mãn $\overrightarrow{CA} = -k\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} = k\overrightarrow{DB}$. Chứng minh rằng CD là một đường kính của đường tròn ở câu a).

Lời giải

a) $MA = k \cdot MB \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$. Các hệ số 1 và $-k^2$ có tổng $1 - k^2 \neq 0$, nên có điểm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} - k^2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Chèn điểm A: $-\overrightarrow{AI} - k^2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right) = \vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{AI} = \frac{k^2}{k^2-1}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $IA = \frac{k^2 a}{|k^2-1|}$ và $IB = \left|1 - \frac{k^2}{k^2-1}\right| a = \frac{a}{|k^2-1|}$.

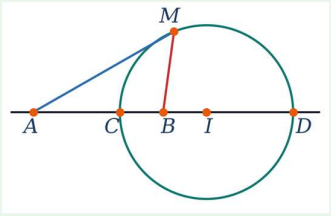
Theo hằng đẳng thức Lagrange: $MA^2-k^2MB^2=(1-k^2)MI^2+IA^2-k^2IB^2=(1-k^2)MI^2+\frac{k^4a^2-k^2a^2}{(k^2-1)^2}=(1-k^2)MI^2+\frac{k^2a^2}{k^2-1}$.

Vì vậy $MA=k\cdot MB\Leftrightarrow MI^2=\frac{k^2a^2}{(k^2-1)^2}\Leftrightarrow MI=\frac{ka}{|k^2-1|}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I (với $\overrightarrow{AI}=\frac{k^2}{k^2-1}\overrightarrow{AB}$), bán kính $R=\frac{ka}{|k^2-1|}$.

b) Từ $\overrightarrow{CA}=-k\overrightarrow{CB}$: $-\overrightarrow{AC}=-k\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$, nên $\overrightarrow{AC}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$. Từ $\overrightarrow{DA}=k\overrightarrow{DB}$: $-\overrightarrow{AD}=k\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$, nên $\overrightarrow{AD}=\frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$. Hai điểm C,D đều thoả mãn $MA=k\cdot MB$ nên thuộc đường tròn.

Mặt khác $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{k^2}{k^2-1}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}$, nên I là trung điểm của CD. Vậy CD là một đường kính của đường tròn.



Nhận xét: hình vẽ ứng với $a=3$, $k=2$: $AI=4$, $R=2$, $AC=2$, $AD=6$. Khi $k=1$, điều kiện trở thành $MA=MB$ và tập hợp là đường trung trực của AB.

✎ Bài tập tự luyện

Bài 14. (★) Cho tứ giác $ABCD$; I,J lần lượt là trung điểm của AB, CD (giả sử $I\neq J$). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$. Chứng minh rằng tập hợp đó đi qua trung điểm của đoạn IJ khi và chỉ khi $AB=CD$.

Bài 15. Cho đoạn thẳng $AB=2a$ có trung điểm I. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2+MB^2=k^2$, biện luận theo $k>0$.

Bài 16. (★) Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$.

Bài 17. **[HSG cấp trường Toán 10 (vòng 2), THPT Nguyễn Gia Thiều – Hà Nội, 2022 – 2023]** (★) Cho tam giác ABC có $BC=a$, $AB=AC=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2-2MB^2-2MC^2=a^2$.

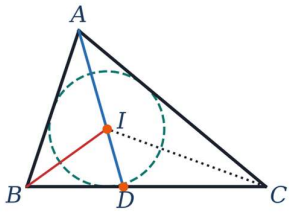
Dạng 5. Đẳng thức vectơ đặc biệt trong tam giác

⚙ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Dùng tính chất chia đoạn của đường phân giác trong, phân giác ngoài, chân đường cao (hệ thức lượng trong tam giác vuông).
- Biểu diễn điểm cần xét qua hai đầu mút của đoạn thẳng chứa nó: nếu D thuộc đoạn BC thì $\overrightarrow{XD}=\frac{DC}{BC}\overrightarrow{XB}+\frac{DB}{BC}\overrightarrow{XC}$ với mọi điểm X; rồi thay vào hệ thức cần chứng minh.
- Khi đã có đẳng thức $x\overrightarrow{IA}+y\overrightarrow{IB}+z\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, chèn một đỉnh làm gốc: $\overrightarrow{AI}=\frac{y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}}{x+y+z}$, để giải

các bài toán song song, vuông góc, thẳng hàng liên quan đến I.

▶ **Ví dụ 10.** Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC thoả mãn $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.



Lời giải

Gọi D là chân đường phân giác trong góc A (D thuộc cạnh BC). Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$, suy ra $DB=\frac{ac}{b+c}$, $DC=\frac{ab}{b+c}$.

Do đó $\overrightarrow{ID}=\frac{DC}{BC}\overrightarrow{IB}+\frac{DB}{BC}\overrightarrow{IC}=\frac{b\overrightarrow{I}+c\overrightarrow{IC}}{b+c}$.

Trong tam giác ABD, BI là phân giác của góc B nên $\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$. Vì I nằm giữa A và D nên $a\overrightarrow{IA}=-(b+c)\overrightarrow{ID}=-\left(b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)$.

Vậy $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

▶ **Ví dụ 11.** Cho tam giác ABC không đều, có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$; I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm. Chứng minh rằng $IG\parallel BC$ khi và chỉ khi $b+c=2a$. Khi đó, tính bán kính r của đường tròn nội tiếp theo đường cao h_a kẻ từ A.

Lời giải

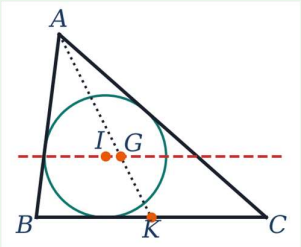
Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Chèn điểm A vào đẳng thức của Ví dụ 10: $-a\overrightarrow{AI}+b\left(\vec{u}-\overrightarrow{AI}\right)+c\left(\vec{v}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}$, nên $\overrightarrow{AI}=\frac{b\vec{u}+c\vec{v}}{a+b+c}$.

Ngoài ra $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$, suy ra $\overrightarrow{GI}=\left(\frac{b}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)\vec{u}+\left(\frac{c}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)\vec{v}=\frac{(2b-a-c)\vec{u}+(2c-a-b)\vec{v}}{3(a+b+c)}$.

Nếu $\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ thì $2b=a+c$ và $2c=a+b$, suy ra $a=b=c$, trái giả thiết. Vậy $I\neq G$.

$\overrightarrow{BC}=\vec{v}-\vec{u}$ và $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương, nên $\overrightarrow{GI}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ khi và chỉ khi hai hệ số của $\vec{u}$, $\vec{v}$ trong $\overrightarrow{GI}$ là hai số đối nhau: $(2b-a-c)+(2c-a-b)=0\Leftrightarrow b+c=2a$. Điểm I nằm trong tam giác, không thuộc BC, nên điều này tương đương $IG\parallel BC$.

Khi $b+c=2a$, hai điểm I, G cách đều đường thẳng BC. Gọi K là trung điểm BC; $GK=\frac{1}{3}AK$ nên $r=d(I,BC)=d(G,BC)=\frac{1}{3}d(A,BC)=\frac{h_a}{3}$.



Vậy $IG\parallel BC\Leftrightarrow b+c=2a$, và khi đó $r=\frac{h_a}{3}$.

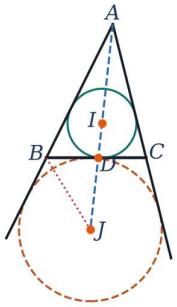
Kiểm tra bằng công thức diện tích: $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S}{3a}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S}{a}=\frac{h_a}{3}$. *Hình vẽ ứng với tam giác có* $a=5$, $b=6$, $c=4$.

✎ Bài tập tự luyện

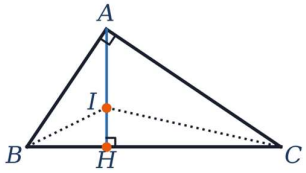
Bài 18. (★) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và nửa chu vi p; I là tâm đường tròn nội tiếp, J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A (đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài của hai cạnh AB, AC).

a) Chứng minh rằng $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm A, I, J thẳng hàng và $\frac{AI}{AJ} = \frac{p-a}{p}$.



Bài 19. **[HSG tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hà Tĩnh, 2021 – 2022 (trích ý a)]** (★★) Cho tam giác ABC vuông tại A ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$), đường cao AH. Điểm I thuộc đoạn AH sao cho $AI = 2IH$. Chứng minh rằng $a^2\overrightarrow{IA} + 2b^2\overrightarrow{IB} + 2c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.



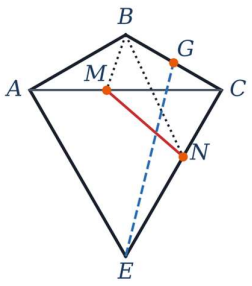
C TUYỂN CHỌN BÀI THI HỌC SINH GIỎI

Các bài dưới đây được tuyển chọn từ đề thi học sinh giỏi, Olympic, khảo sát chất lượng của các tỉnh, cụm trường và trường THPT; với đề của các sở, trường và kì thi, nguồn và năm thi được ghi trong ngoặc vuông. Đề được trình bày lại thống nhất kí hiệu, giữ nguyên dữ kiện và yêu cầu.

Đề 1. **[HSG khối 10, THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh, 2022 – 2023]** (★★) Cho tứ giác lồi $ABCE$ có $BA = BC = a$ và tam giác ACE đều có cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Trên các đoạn thẳng AC, CE lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$ $(0 \le k \le 1)$.

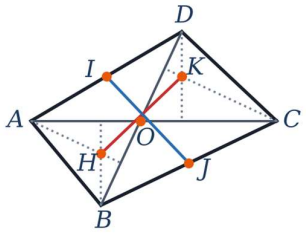
a) Tìm k để $MN \perp EG$, với G là trung điểm của đoạn thẳng BC.

b) Tìm k để $BM^2 + BN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Đề 2. **[HSG Toán 10, THPT Đan Phượng – Hà Nội, 2020 – 2021; THPT Phan Huy Chú – Quốc Oai, Hà Nội, 2024 – 2025]** (★★) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau

tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO, CDO; I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $HK \perp IJ$.



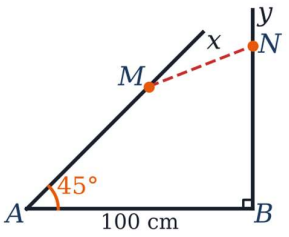
Đề 3. **[Khảo sát đội tuyển HSG Toán 10 lần 2, THPT Trần Phú – Vĩnh Phúc, 2021 – 2022]** (★★) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a, M là điểm di động trên đường thẳng AC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$.

Đề 4. **[Olympic Toán 10 liên cụm trường THPT – Hà Nội, 2024 – 2025 (câu trả lời ngắn)]** (★) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BC, M là điểm di động trên d. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

Đề 5. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Phùng Khắc Khoan – Thạch Thất, Hà Nội, 2024 – 2025; THPT Diễn Châu 2 – Nghệ An, 2023 – 2024]** (★) Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O và có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB và G' là trọng tâm của tam giác MNP. Chứng minh rằng ba điểm O, G, G' thẳng hàng.

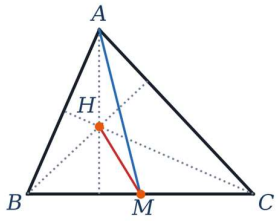
Đề 6. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Thạch Thất – Hà Nội, 2025 – 2026]** (★★) Cho tam giác ABC, M là điểm di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm vị trí điểm M để $MB^2 + MC^2 - 2MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đề 7. **[Olympic Toán 10 cụm THPT Hà Đông – Hoài Đức, Hà Nội, 2018 – 2019]** (★) Cho hai tia Ax, By nằm cùng phía đối với đường thẳng AB, với $AB = 100$ cm, $\widehat{xAB} = 45°$ và $By \perp AB$. Cùng lúc, chất điểm X xuất phát từ A chuyển động trên tia Ax với vận tốc $3\sqrt{2}$ cm/s, chất điểm Y xuất phát từ B chuyển động trên tia By với vận tốc 4 cm/s. Sau t giây, X ở vị trí M, Y ở vị trí N. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.



Đề 8. **[Khảo sát đội tuyển HSG 10 lần 1, THPT Thanh Miện – Hải Dương, 2017 – 2018]** Cho tam giác ABC có trọng tâm G; hai điểm D, E xác định bởi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng D, E, G thẳng hàng.

Đề 9. [Khảo sát đội tuyển HSG 10 lần 1, THPT Thanh Miện – Hải Dương, 2017 – 2018] (★) Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}BC^2$.



Đề 10. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh, 2018 – 2019] Cho tam giác ABC có $AB=1$, $AC=x$, $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NA}$. Tìm x để $AM\perp CN$.

Đề 11. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh, 2018 – 2019] Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{6}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

Đề 12. [Olympic Toán 10 cụm trường THPT Hoàn Kiếm – Hai Bà Trưng, Hà Nội, 2023 – 2024] (★★) Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

a) Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Giả sử $a=3$, $b=5$. Tìm c để $IG\perp IC$, với G là trọng tâm tam giác ABC.

Đề 13. [Olympic Toán 10 cụm Thạch Thất – Quốc Oai, Hà Nội, 2023 – 2024] Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $5\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ và một điểm E thoả mãn $4\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm E, A, D thẳng hàng.

Đề 14. [Olympic Toán 10 cụm Thạch Thất – Quốc Oai, Hà Nội, 2023 – 2024] (★★) Cho tam giác ABC có $AB=3$, $BC=4$, $CA=5$. Điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=MB^2+MC^2-MA^2$.

Đề 15. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Bình Chiểu – TP Hồ Chí Minh, 2023 – 2024] Cho tam giác ABC, M là điểm trên cạnh AC thoả mãn $\overrightarrow{MA}=-4\overrightarrow{MC}$, I là trung điểm BM, K là điểm thoả mãn $\overrightarrow{BK}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x để A, I, K thẳng hàng.

Đề 16. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh, 2023 – 2024] Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P, Q thoả mãn $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{NP}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm N, P, Q thẳng hàng.

Đề 17. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Nguyễn Gia Thiều – Hà Nội, 2022 – 2023] (★★) Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng a. Các điểm D, E xác định bởi $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$, $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$. Gọi N, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AE và H là trực tâm của tam giác ABD.

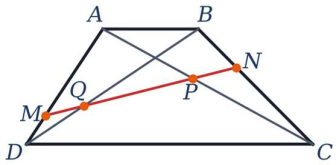
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{a^2}{2}$.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng NQ và HC vuông góc với nhau.

c) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{11a^2}{4}$.

Đề 18. [HSG Toán 10, THPT Phú Xuyên B – Hà Nội, 2024 – 2025] (★) Cho đường tròn tâm O, bán kính $R=5$ và điểm M cố định với $OM=7$. Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B. Tính $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Đề 19. [HSG cấp tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hà Nam, 2024 – 2025] (★) Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD với $CD=3AB$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh AD, BC sao cho $AM=3MD$, $CN=2NB$; P là giao điểm của AC và MN, Q là giao điểm của BD và MN. Tính $\frac{PQ}{MN}$.



Đề 20. [HSG văn hoá Toán 10, THPT Quảng Trị – Quảng Trị, 2025 – 2026] (★) Cho tam giác ABC có trọng tâm G; các điểm N, P thoả mãn $2\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PC}$ $(k\neq 1)$. Tìm k để G, P, N thẳng hàng.

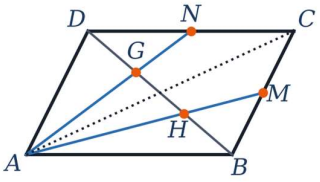
Đề 21. [Olympic Toán 10 liên cụm Thanh Xuân – Cầu Giấy, Mê Linh – Sóc Sơn, Đông Anh, Hà Nội, 2020 – 2021] (★) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3\sqrt{2}$, $AD=\sqrt{3}$; O là giao điểm hai đường chéo, I và G lần lượt là trung điểm CD và OB.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$, $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $AI\perp IG$.

c) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=37$.

Đề 22. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Phan Huy Chú – Quốc Oai, Hà Nội, 2024 – 2025] Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy G, H sao cho $DG=GH=HB$. Gọi M là giao điểm của AH và BC, N là giao điểm của AG và DC. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.



Đề 23. [HSG cụm trường THPT Hà Nội, 2021 – 2022] (★) Cho tam giác ABC đều cạnh a, trọng tâm G; điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

a) Chứng minh rằng $6\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AC}$.

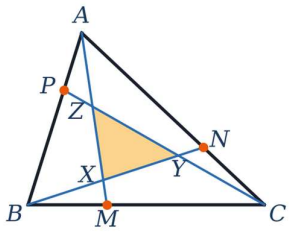
b) Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Tính $\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|$ theo a.

Đề 24. [HSG khối 10, THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh, 2022 – 2023] Cho tam giác ABC và hai điểm I, J thoả mãn $\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng $IJ\parallel AC$.

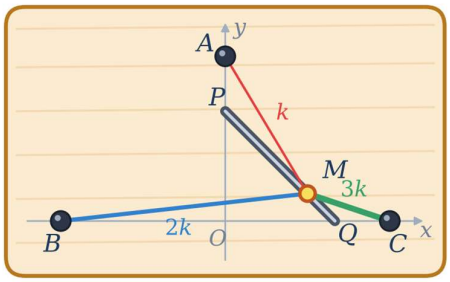
D PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN

Các bài dưới đây được phát triển từ ý tưởng của các dạng toán và đề thi trong chuyên đề, mức độ tương đương đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh.

Bài 1. (★) Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$, $CN = \frac{1}{3}CA$, $AP = \frac{1}{3}AB$. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của AM và BN, của BN và CP, của CP và AM. Tính diện tích tam giác XYZ theo S.



Bài 2. (★) (**Bài toán thực tế**) Trên một mặt bàn nằm ngang có ba cọc cố định A, B, C. Chọn hệ trục toạ độ Oxy trên mặt bàn (đơn vị trên mỗi trục là xentimét) sao cho $A(0;60)$, $B(-60;0)$, $C(60;0)$. Một chiếc vòng nhỏ M được nối với ba cọc bằng ba sợi dây chun. Coi mỗi sợi dây chun như một lò xo có chiều dài tự nhiên không đáng kể: sợi dây nối vòng với cọc X kéo vòng bằng lực $k_X\overrightarrow{MX}$, trong đó $k_A = k$, $k_B = 2k$, $k_C = 3k$ với $k = 0{,}2$ N/cm. Bỏ qua ma sát, kích thước của vòng và khối lượng các sợi dây.



a) Chứng minh rằng hợp lực $\vec{F}$ của ba lực đàn hồi tác dụng lên vòng bằng $6k\ \overrightarrow{MI}$, với I là một điểm cố định. Tìm toạ độ của I.

b) Thả vòng trên mặt bàn. Vòng nằm cân bằng ở vị trí nào?

c) Luồn vòng vào một thanh thép thẳng, nhẵn, gắn cố định trên mặt bàn, nối hai điểm $P(0;40)$ và $Q(40;0)$; vòng chỉ trượt được dọc theo thanh. Tìm vị trí cân bằng của vòng trên thanh và độ lớn của lực mà thanh tác dụng lên vòng khi đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 3. (★★) Cho tam giác ABC và điểm T nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120°$.

a) Gọi $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ là các vectơ đơn vị lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TB}$, $\overrightarrow{TC}$. Chứng minh rằng $\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M: $MA + MB + MC \geq TA + TB + TC$.

c) Áp dụng: cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 2\sqrt{3}$ và đường cao $AH = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA + MB + MC$ khi M thay đổi trong mặt phẳng.

Bài 4. (★★) Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đặt $S_a = S_{MBC}$, $S_b = S_{MCA}$, $S_c = S_{MAB}$.

a) Chứng minh rằng $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Áp dụng: cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Chứng minh rằng $\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Bài 5. (★) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; K là trung điểm AB, G là trọng tâm.

a) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

b) Chứng minh rằng tập hợp đó đi qua G khi và chỉ khi $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Bài 6. (★★) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

b) Suy ra $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của $P = \cos A + \cos B + 2\cos C$.

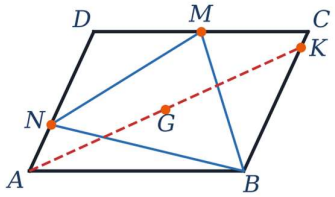
HƯỚNG DẪN GIẢI

CHUYÊN ĐỀ 4. VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

1 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Phân tích vectơ – Tỉ số – Ba điểm thẳng hàng

Bài 1. **[HSG tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hải Dương, 2016 – 2017]** (★) Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh CD, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = \frac{1}{3}AD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN, đường thẳng AG cắt BC tại K. Tính tỉ số $\frac{BK}{BC}$.



Lời giải

Đặt $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ (không cùng phương); $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\vec{d}$.

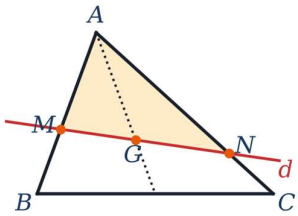
G là trọng tâm tam giác BMN nên $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{d}$.

K thuộc đường thẳng AG : $\overrightarrow{AK} = t\,\overrightarrow{AG} = \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{4t}{9}\vec{d}$. K thuộc đường thẳng BC : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \vec{b} + s\vec{d}$ với $\overrightarrow{BK} = s\,\overrightarrow{BC}$.

Đồng nhất hệ số: $\frac{t}{2} = 1$ và $\frac{4t}{9} = s$, suy ra $t = 2$, $s = \frac{8}{9}$.

Vậy $\overrightarrow{BK} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BC}$, tức $\frac{BK}{BC} = \frac{8}{9}$.

Bài 2. (★) Cho tam giác ABC có trọng tâm G và diện tích S. Một đường thẳng d đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN.



Lời giải

Đặt $x = \frac{AB}{AM}$, $y = \frac{AC}{AN}$. Vì M, N thuộc các cạnh AB, AC (và khác A, do d đi qua điểm G nằm trong tam giác) nên $x \geq 1$, $y \geq 1$ và $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = y\,\overrightarrow{AN}$.

G là trọng tâm nên $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{x}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{y}{3}\overrightarrow{AN}$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ không cùng phương và G thuộc đường thẳng MN, nên tổng hai hệ số bằng 1: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, tức $x + y = 3$.

Hai tam giác AMN, ABC có chung góc A nên $\frac{S_{AMN}}{S} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot AN \sin A}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \text{si}} = \frac{1}{xy}$.

Từ $x+y=3$ và $y\ge 1$ suy ra $1\le x\le 2$, và $xy=x(3-x)$. Ta có $x(3-x)=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$ và $x(3-x)-2=(x-1)(2-x)\ge 0$, nên $2\le xy\le\frac{9}{4}$.

Do đó $\frac{4S}{9}\le S_{AMN}\le\frac{S}{2}$.

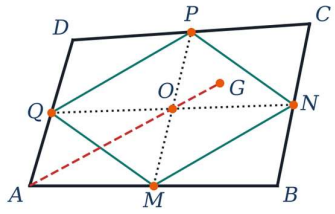
– $S_{AMN}=\frac{4S}{9}$ khi $x=y=\frac{3}{2}$, tức $AM=\frac{2}{3}AB$, $AN=\frac{2}{3}AC$: d song song với BC.

– $S_{AMN}=\frac{S}{2}$ khi $x=1$ hoặc $x=2$, tức $M\equiv B$ hoặc $N\equiv C$: d là đường trung tuyến kẻ từ B hoặc từ C.

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là $\frac{4S}{9}$, giá trị lớn nhất là $\frac{S}{2}$.

Sai lầm thường gặp: chỉ dùng $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$ mà bỏ quên điều kiện $1\le x\le 2$ (do M, N nằm trên các cạnh), nên không tìm được giá trị lớn nhất.

Bài 3. **[Khảo sát đội tuyển HSG Toán 10 lần 2, THPT Trần Phú – Vĩnh Phúc, 2021 – 2022]** (★) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA; O là giao điểm của MP và NQ; G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.



Lời giải

MN, QP lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, ACD nên $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Do đó $MNPQ$ là hình bình hành và giao điểm O của hai đường chéo MP, NQ là trung điểm của MP.

M, P lần lượt là trung điểm AB, CD nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OP}$. Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right)=\vec{0}$.

G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}$. Thay vào đẳng thức trên: $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$, tức $\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OG}$.

Vậy A, O, G thẳng hàng (O nằm giữa A và G, $OA=3OG$).

Dạng 2. Tâm tỉ cự – GTNN của độ dài vectơ và tổng bình phương

Bài 4. **[HSG Toán 10 lần 2, THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc, 2020 – 2021]** (★) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2AD$, $BC=a$. Điểm M di động trên đường thẳng BC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Vì $AD=BC=a$ nên $AB=2a$. Chọn hệ trục toạ độ với $A(0;0)$, $B(2a;0)$, $C(2a;a)$, $D(0;a)$; đường thẳng BC có phương trình $x=2a$.

Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Toạ độ của I: $x_I=\frac{0+2\cdot 2a+3\cdot 2a}{6}=\frac{5a}{3}$, $y_I=\frac{0+0+3a}{6}=\frac{a}{2}$.

Với mọi M: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MI}$, nên $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=6MI\ge 6\,d(I,BC)=6\left(2a-\frac{5a}{3}\right)=2a$.

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của I trên BC, tức $M\left(2a;\frac{a}{2}\right)$ là trung điểm BC.
Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $2a$, đạt khi M là trung điểm của BC.

Bài 5. (★) Cho tam giác ABC có $AB=2$, $BC=3$, $\widehat{ABC}=120^\circ$. Xét biểu thức $T=4MA^2+MB^2+MC^2$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của T khi M thay đổi trên đường thẳng BC.

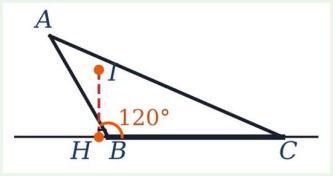
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của T khi M thay đổi trên đoạn thẳng BC.

Lời giải

Gọi I là điểm thoả mãn $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (tổng các hệ số bằng 6). Theo định lí côsin, $AC^2=4+9-2\cdot 2\cdot 3\cos 120^\circ=19$.

Theo hằng đẳng thức Lagrange và công thức tính hằng số ở mục A: $T=6MI^2+\frac{4\cdot 1\cdot AB^2+4\cdot 1\cdot AC^2+1\cdot 1\cdot BC^2}{6}=6MI^2+\frac{16+76+9}{6}=6MI^2+\frac{101}{6}$.

Chọn hệ trục toạ độ với $B(0;0)$, $C(3;0)$; vì $AB=2$, $\widehat{ABC}=120^\circ$ nên $A\left(-1;\sqrt{3}\right)$. Khi đó $I\left(\frac{-4+0+3}{6};\frac{4\sqrt{3}}{6}\right)=\left(-\frac{1}{6};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Hình chiếu của I trên đường thẳng BC là $H\left(-\frac{1}{6};0\right)$, nằm **ngoài** đoạn BC, trên tia đối của tia BC.



a) Với M thuộc đường thẳng BC: $MI\geq IH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, nên $T\geq 6\cdot\frac{4}{3}+\frac{101}{6}=\frac{149}{6}$. Giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{149}{6}$, đạt khi $M\equiv H$ (M nằm trên tia đối của tia BC, $BM=\frac{1}{6}$).

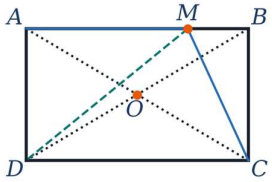
b) Với $M(x;0)$, $0\leq x\leq 3$: $MI^2=MH^2+IH^2=\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{4}{3}\geq\frac{1}{36}+\frac{4}{3}$, dấu bằng khi $x=0$.

Do đó $T\geq 6\left(\frac{1}{36}+\frac{4}{3}\right)+\frac{101}{6}=\frac{1}{6}+8+\frac{101}{6}=25$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T trên đoạn BC là 25, đạt khi $M\equiv B$ (kiểm tra: $T=4AB^2+0+BC^2=16+9=25$).

Sai lầm thường gặp: ở câu b) vẫn lấy ngay hình chiếu H của I, trong khi H không thuộc đoạn BC; giá trị $\frac{149}{6}$ khi đó không đạt được.

Bài 6. **[HSG tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hải Dương, 2022 – 2023]** (★) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB>AD$. Tìm vị trí điểm M trên các cạnh của hình chữ nhật sao cho biểu thức $T=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+MB^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật: O là trung điểm chung của AC và BD, $OA=OB=OC=OD=\frac{AC}{2}$.

Vì $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ nên $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)=MO^2-OA^2$.

Vì $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$ nên $MB^2+MD^2=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB}\right)^2=2MO^2+2OB^2$.

Suy ra $T = 3MO^2 + 2OB^2 - OA^2 = 3MO^2 + \frac{AC^2}{4}$. Độ dài AC không đổi nên T nhỏ nhất khi và chỉ khi MO nhỏ nhất.

Khoảng cách từ O đến các cạnh AB, CD bằng $\frac{AD}{2}$, đến các cạnh AD, BC bằng $\frac{AB}{2} > \frac{AD}{2}$. Với M thuộc cạnh AB: $MO \geq \frac{AD}{2}$, dấu bằng khi M là trung điểm AB (tương tự với cạnh CD); với M thuộc cạnh AD hoặc BC: $MO \geq \frac{AB}{2} > \frac{AD}{2}$.

Vậy T nhỏ nhất khi M là trung điểm của AB hoặc của CD; khi đó $T_{\min} = \frac{3AD^2}{4} + \frac{AB^2+AD^2}{4} = \frac{AB^2+4AD^2}{4}$.

Bài 7. **[HSG cấp cơ sở Toán 10, cụm THPT Lục Nam – Bắc Giang, 2023 – 2024 (câu trắc nghiệm, trình bày lại)]** (★) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Gọi M là điểm di động trên đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MB^2 + 2MC^2$.

Lời giải

Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; khi đó I thuộc đoạn BC với $BI = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}$, $IC = \frac{1}{3}$.

Với mọi M: $P = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 3MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\right) + IB^2 + 2IC^2 = 3MI^2 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 3MI^2 + \frac{2}{3}$.

M chạy trên đường thẳng AB nên $MI \geq IH$, với H là hình chiếu của I trên AB. Vì $BI = \frac{2}{3}BC$ nên $IH = \frac{2}{3}d(C, AB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $P \geq 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, dấu bằng khi $M \equiv H$.

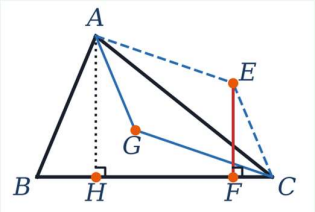
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{3}$, đạt khi M là hình chiếu của I trên AB (khi đó $AM = \frac{2}{3}$).

Bài 8. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Tĩnh Gia 1 – Thanh Hoá, 2023 – 2024 (câu trả lời ngắn, trình bày lại)]** (★) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A, biết $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x để độ dài vecto $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Dựng điểm E sao cho $AGCE$ là hình bình hành, tức $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GC}$ (E cố định). Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$.

Gọi F là hình chiếu của E trên BC. Với M thuộc đường thẳng BC: $ME \geq EF$, dấu bằng khi $M \equiv F$. Ta xác định vị trí của F.



Vì x là tỉ số độ dài nên có thể chọn đơn vị sao cho $BH = 1$, $HC = 3$. Đặt hệ trục với gốc H, trục hoành là đường thẳng BC: $B(-1; 0)$, $C(3; 0)$, $A(0; h)$ với $h = AH > 0$.

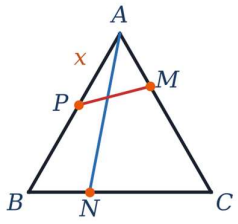
Trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{h}{3}\right)$, nên $\overrightarrow{GC} = \left(\frac{7}{3}; -\frac{h}{3}\right)$ và $E\left(\frac{7}{3}; \frac{2h}{3}\right)$. Hình chiếu của E trên trục hoành là $F\left(\frac{7}{3}; 0\right)$.

$\overrightarrow{BF} = \left(\frac{10}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 0)$, nên $\overrightarrow{BF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Vậy độ dài $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$, tức $x = \frac{5}{6}$ (giá trị nhỏ nhất bằng $EF = \frac{2}{3}AH$).

Dạng 3. Tích vô hướng: góc, độ dài, điều kiện vuông góc

Bài 9. **[HSG Toán 10, THPT Đan Phượng – Hà Nội, 2018 – 2019]** (★) Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm N, M, P sao cho $BN = \frac{a}{3}$, $CM = \frac{2a}{3}$, $AP = x$ $(0 < x < a)$. Tìm x theo a để đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM.



Lời giải

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: $|\vec{u}| = |\vec{v}| = a$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot a \cdot \cos 60° = \frac{a^2}{2}$.

N thuộc BC với $BN = \frac{a}{3}$: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

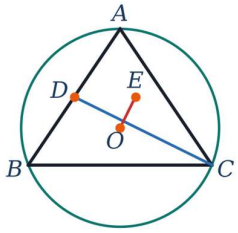
M thuộc CA với $CM = \frac{2a}{3}$ nên $AM = \frac{a}{3}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{v}$; P thuộc AB với $AP = x$: $\overrightarrow{AP} = \frac{x}{a}\vec{u}$. Suy ra $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{x}{a}\vec{u}$.

$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = \frac{2}{9}\vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{2x}{3a}|\vec{u}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{v}|^2 - \frac{x}{3a}\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{a^2}{9} - \frac{2ax}{3} + \frac{a^2}{9} - \frac{ax}{6} = \frac{2a^2}{9} - \frac{5ax}{6}$.

$AN \perp PM \Leftrightarrow \frac{2a^2}{9} = \frac{5ax}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4a}{15}$ (thoả mãn $0 < x < a$). Vậy $x = \frac{4a}{15}$.

Nhận xét: bài toán này cũng có trong đề Olympic 27/4 Toán 10 tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu 2017 – 2018 (cạnh bằng 3, đáp số $x = \frac{4}{5}$) và đề HSG Toán 10 THPT Trần Phú – Hà Tĩnh 2019 – 2020 (cạnh bằng $3a$, đáp số $AP = \frac{4a}{5}$).

Bài 10. **[HSG Toán 10 lần 2, THPT Đồng Đậu – Vĩnh Phúc, 2020 – 2021]** (★★) Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng $OE \perp CD$.



Lời giải

Chọn O làm gốc, đặt $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$; ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$.

D là trung điểm AB: $\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. E là trọng tâm tam giác ADC: $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \vec{c}\right) = \frac{3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{6}$.

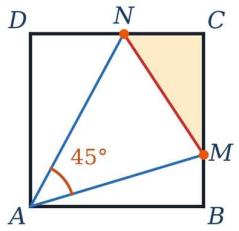
Ngoài ra $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$.

12 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)=(3+1-4)R^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{c}+(-2+2)\vec{b}\cdot\vec{c}=4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Tam giác cân tại A: $AB=AC\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2\Rightarrow 2R^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2R^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Do đó $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Vậy $OE\perp CD$.

Bài 11. (★) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các cạnh BC, CD sao cho $\widehat{MAN}=45°$. Chứng minh rằng chu vi tam giác CMN không đổi.



Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ với $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$, $D(0;a)$. Đặt $BM=x$, $DN=y$ với $x,y\in[0;a]$; khi đó $M(a;x)$, $N(y;a)$, $\overrightarrow{AM}=(a;x)$, $\overrightarrow{AN}=(y;a)$.

$\widehat{MAN}=45°\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{AM\cdot AN}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\,a(x+y)=\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$.

Hai vế không âm; bình phương và đặt $s=x+y$, $q=xy$: $2a^2s^2=a^4+a^2(s^2-2q)+q^2\Leftrightarrow a^2s^2=(a^2-q)^2$.

Vì $as\geq 0$ và $a^2-q\geq 0$ (do $0\leq q\leq a^2$) nên $as=a^2-q$, tức $a(x+y)+xy=a^2$. $(*)$

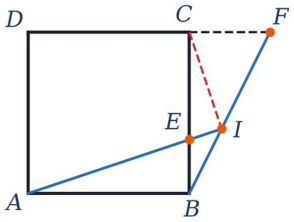
Chu vi tam giác CMN bằng $CM+CN+MN=(a-x)+(a-y)+MN$, với $MN^2=(a-x)^2+(a-y)^2$.

Ta có $MN^2-(x+y)^2=2a^2-2a(x+y)-2xy=0$ theo $(*)$, nên $MN=x+y$.

Vậy chu vi tam giác CMN bằng $(a-x)+(a-y)+(x+y)=2a$, không đổi.

Nhận xét: đẳng thức $MN=BM+DN$ gợi ý lời giải hình học quen thuộc – quay tam giác ADN quanh A một góc $90°$ để AD trùng AB, rồi chứng minh hai tam giác bằng nhau. Lời giải bằng tích vô hướng ở trên không cần vẽ thêm hình.

Bài 12. **[HSG cấp cơ sở Toán 10, cụm THPT Lục Nam – Bắc Giang, 2023 – 2024]** (★) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E, F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; đường thẳng BF cắt đường thẳng AE tại điểm I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC}=90°$.



Lời giải

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$: $|\vec{u}|=|\vec{v}|=a$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{CD}=-\vec{u}$.

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\vec{u}$ (F nằm trên tia đối của tia CD, $CF=\frac{a}{2}$), nên $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$.

I thuộc BF: $\overrightarrow{BI} = k\,\overrightarrow{BF}$, suy ra $\overrightarrow{AI} = \vec{u} + k\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}\right) = \left(1 + \frac{k}{2}\right)\vec{u} + k\vec{v}$.

I thuộc AE nên $\overrightarrow{AI}$ cùng phương với $\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$, tức hệ số của $\vec{u}$ gấp 3 lần hệ số của $\vec{v}$: $1 + \frac{k}{2} = 3k \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$. Do đó $\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}$.

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v} - (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{5}\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$.

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{6}{25}|\vec{u}|^2 - \frac{6}{25}|\vec{v}|^2 - \frac{16}{25}\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{6a^2}{25} - \frac{6a^2}{25} - 0 = 0$.

Vậy $IA \perp IC$, tức $\widehat{AIC} = 90°$.

Bài 13. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Phùng Khắc Khoan – Thạch Thất, Hà Nội, 2020 – 2021]** (★) Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB \perp EF$ và hai tam giác ACE, BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm chung của hai tam giác. Khi đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

Trừ vế theo vế: $\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GE}\right) = \vec{0}$, tức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{CD} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}\right)$, nên $CD^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}\right)^2 = AB^2 + EF^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$.

Vì $AB \perp EF$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$. Vậy $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Dạng 4. Tập hợp điểm

Bài 14. (★) Cho tứ giác $ABCD$; I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD (giả sử $I \neq J$). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$. Chứng minh rằng tập hợp đó đi qua trung điểm của đoạn IJ khi và chỉ khi $AB = CD$.

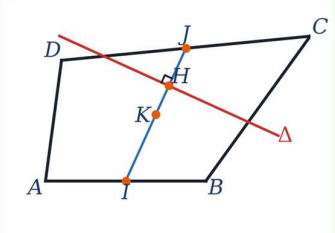
Lời giải

Theo công thức ở mục A: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ và $MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2}$. Điều kiện $\Leftrightarrow MI^2 - MJ^2 = \frac{CD^2 - AB^2}{4}$.

Gọi K là trung điểm của IJ: $MI^2 - MJ^2 = \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}\right) = \overrightarrow{JI} \cdot 2\,\overrightarrow{MK} = 2\,\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng IJ. Vì $\overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{IJ}$ nên $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{IJ}$, và điều kiện trở thành $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{CD^2 - AB^2}{8}$.

Đẳng thức này xác định duy nhất điểm H trên đường thẳng IJ: $KH = \frac{|CD^2 - AB^2|}{8IJ}$, H thuộc tia KJ nếu $CD > AB$, thuộc tia KI nếu $CD < AB$, và $H \equiv K$ nếu $AB = CD$.



Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng Δ vuông góc với IJ tại H. Đường thẳng Δ đi qua K khi và chỉ khi $H \equiv K$, tức $AB = CD$.

Nhận xét: với hình chữ nhật $ABCD$ ta có $AB = CD$, nên Δ là đường thẳng qua tâm, song song với AB – chính là trục đối xứng của hình chữ nhật, phù hợp với điều kiện $MA = MD$, $MB = MC$.

Bài 15. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm I. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 = k^2$, biện luận theo $k > 0$.

Lời giải

$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 2a^2$.

Điều kiện $\Leftrightarrow 2MI^2 + 2a^2 = k^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k^2 - 2a^2}{2}$.

– Nếu $k > a\sqrt{2}$: tập hợp là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\frac{k^2 - 2a^2}{2}}$.

– Nếu $k = a\sqrt{2}$: $MI = 0$, tập hợp chỉ gồm điểm I.

– Nếu $0 < k < a\sqrt{2}$: không có điểm M nào (tập hợp rỗng).

Bài 16. (★) Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ($\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$). Với mọi M: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \sum\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Tam giác đều cạnh a: $GA = GB = GC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, nên $GA^2 + GB^2 + GC^2 = a^2$.

Điều kiện $\Leftrightarrow 3MG^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow MG = \frac{a\sqrt{3}}{3} = GA$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 17. **[HSG cấp trường Toán 10 (vòng 2), THPT Nguyễn Gia Thiều – Hà Nội, 2022 – 2023]** (★) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AB = AC = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2 = a^2$.

Lời giải

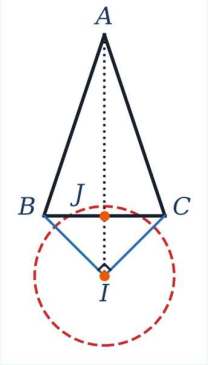
Gọi J là trung điểm BC; tam giác cân tại A nên $AJ \perp BC$ và $AJ = \sqrt{AB^2 - BJ^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$.

Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Vì $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$ nên $\overrightarrow{IA} = 4\overrightarrow{IJ}$; suy ra $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}$: I nằm trên tia đối của tia JA với $JI = \frac{1}{3}AJ = \frac{a}{2}$.

Khi đó $IA = AJ + JI = 2a$ và $IB = IC = \sqrt{IJ^2 + JB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Với mọi M: $MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2 = (1 - 2 - 2)MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}\right) + IA^2 - 2IB^2 - 2IC^2 = -3MI^2 + 4a^2 - a^2 - a^2 = -3MI^2 + 2a^2$.

Điều kiện $\Leftrightarrow -3MI^2 + 2a^2 = a^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow MI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



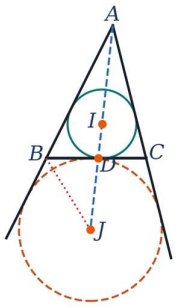
Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, trong đó I thuộc tia đối của tia JA với $JI = \frac{a}{2}$ (tam giác IBC vuông cân tại I).

Dạng 5. Đẳng thức vectơ đặc biệt trong tam giác

Bài 18. (★) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và nửa chu vi p; I là tâm đường tròn nội tiếp, J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A (đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài của hai cạnh AB, AC).

a) Chứng minh rằng $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm A, I, J thẳng hàng và $\frac{AI}{AJ} = \frac{p-a}{p}$.



Lời giải

a) J cách đều hai đường thẳng AB, AC và nằm trong góc BAC, nên J thuộc tia phân giác của góc A. Tia này cắt BC tại D (chân đường phân giác trong); J và A nằm khác phía đối với BC nên D nằm giữa A và J.

Như ở Ví dụ 10: $DB = \frac{ac}{b+c}$ và $\overrightarrow{JD} = \frac{b\overrightarrow{JB}+c\overrightarrow{JC}}{b+c}$.

BJ là phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABD (góc ngoài tại B của tam giác ABD cũng là góc ngoài tại B của tam giác ABC). Theo tính chất đường phân giác ngoài: $\frac{JA}{JD} = \frac{BA}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$.

D nằm giữa A và J nên hai vectơ $\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD}$ cùng hướng, do đó $a\overrightarrow{JA} = (b+c)\overrightarrow{JD} = b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC}$.

Vậy $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

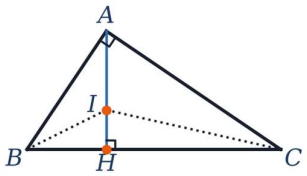
b) Chèn điểm A vào đẳng thức ở câu a): $a\overrightarrow{AJ} + b\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}\right) + c\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}\right) = \vec{0}$, nên $\overrightarrow{AJ} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c-a}$ (với $b + c - a = 2(p - a) > 0$).

Tương tự, từ $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=\frac{b+c-a}{a+b+c}\overrightarrow{AJ}=\frac{p-a}{p}\overrightarrow{AJ}$. Vậy A, I, J thẳng hàng và $\frac{AI}{AJ}=\frac{p-a}{p}$.

Nhận xét: gọi r, r_a là bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc A. Hai tam giác vuông tạo bởi A, I, J và các tiếp điểm trên tia AB đồng dạng nên $\frac{AI}{AJ}=\frac{r}{r_a}$; kết hợp với câu b) ta được hệ thức quen thuộc $pr=(p-a)r_a$ $(=S)$.

Bài 19. **[HSG tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hà Tĩnh, 2021 – 2022 (trích ý a)]** (★★) Cho tam giác ABC vuông tại A $(BC=a, CA=b, AB=c)$, đường cao AH. Điểm I thuộc đoạn AH sao cho $AI=2IH$. Chứng minh rằng $a^2\overrightarrow{IA}+2b^2\overrightarrow{IB}+2c^2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.



Lời giải

Trong tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH: $BA^2=BH\cdot BC$, $CA^2=CH\cdot CB$, nên $BH=\frac{c^2}{a}$, $HC=\frac{b^2}{a}$ (H nằm giữa B và C).

H thuộc đoạn BC nên $\overrightarrow{IH}=\frac{HC}{BC}\overrightarrow{IB}+\frac{BH}{BC}\overrightarrow{IC}=\frac{b^2\overrightarrow{IB}+c^2\overrightarrow{IC}}{a^2}$.

I thuộc đoạn AH với $AI=2IH$ nên $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}$. Suy ra $a^2\overrightarrow{IA}=-2a^2\overrightarrow{IH}=-2b^2\overrightarrow{IB}-2c^2\overrightarrow{IC}$.

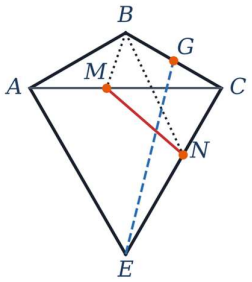
Vậy $a^2\overrightarrow{IA}+2b^2\overrightarrow{IB}+2c^2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

2 BÀI THI HỌC SINH GIỎI

Đề 1. **[HSG khối 10, THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh, 2022 – 2023]** (★★) Cho tứ giác lồi $ABCE$ có $BA=BC=a$ và tam giác ACE đều có cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Trên các đoạn thẳng AC, CE lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=k$ $(0\le k\le 1)$.

a) Tìm k để $MN\perp EG$, với G là trung điểm của đoạn thẳng BC.

b) Tìm k để BM^2+BN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải

Các góc cần dùng. Tam giác ABC cân tại B có $AC^2=3a^2=a^2+a^2-2a^2\cos\widehat{ABC}$ nên $\cos\widehat{ABC}=-\frac{1}{2}$, $\widehat{ABC}=120^\circ$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=30^\circ$. Tứ giác lồi nên B, E nằm khác phía đối với AC, do đó $\widehat{BCE}=\widehat{BCA}+\widehat{ACE}=30^\circ+60^\circ=90^\circ$.

Các tích vô hướng. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE}=a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\cos120^\circ=-\frac{3a^2}{2}$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=a\sqrt{3}\cdot a\cdot\cos150^\circ=-\frac{3a^2}{2}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=a\cdot a\sqrt{3}\cdot\cos150^\circ=-\frac{3a^2}{2}$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$.

a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=(1-k)\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{CE}$ và $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EG}=-(1-k)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE}+\frac{1-k}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}-k\,CE^2+\frac{k}{2}\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{3a^2(1-k)}{2}-\frac{3a^2(1-k)}{4}-3a^2k=\frac{3a^2}{4}(1-5k)$.

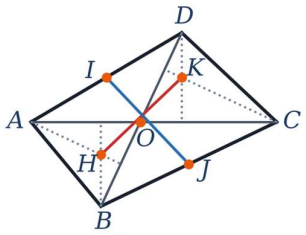
$MN\perp EG\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EG}=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{5}$.

b) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CE}$. Do đó $BM^2=a^2+2k\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+3a^2k^2=a^2-3a^2k+3a^2k^2$ và $BN^2=a^2+2k\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CE}+3a^2k^2=a^2+3a^2k^2$.

Suy ra $BM^2+BN^2=a^2(6k^2-3k+2)=a^2\left[6\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{8}\right]\geq\frac{13a^2}{8}$, dấu bằng khi $k=\frac{1}{4}\in[0;1]$.

Vậy: a) $k=\frac{1}{5}$; b) BM^2+BN^2 nhỏ nhất bằng $\frac{13a^2}{8}$ khi $k=\frac{1}{4}$.

Đề 2. [HSG Toán 10, THPT Đan Phượng – Hà Nội, 2020 – 2021; THPT Phan Huy Chú – Quốc Oai, Hà Nội, 2024 – 2025] (★★) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO, CDO; I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $HK\perp IJ$.



Lời giải

I, J lần lượt là trung điểm AD, BC nên $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$ và $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BJ}$. Cộng vế theo vế, với $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

Do đó $2\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{DB}$.

H là trực tâm tam giác ABO nên $BH\perp AO$, tức $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$; K là trực tâm tam giác CDO nên $DK\perp CO$, tức $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Viết $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DK}$, ta được $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Tương tự, $AH\perp BO$ và $CK\perp DO$ nên $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{DB}=0$. Viết $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}$, ta được $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.

Cộng lại: $2\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\right)=0$.

Vậy $HK\perp IJ$.

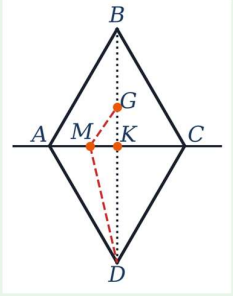
Đề 3. [Khảo sát đội tuyển HSG Toán 10 lần 2, THPT Trần Phú – Vĩnh Phúc, 2021 – 2022] (★★) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a, M là điểm di động trên đường thẳng AC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$; $ABCD$ là hình bình hành có $AB=BC$ nên là hình thoi, D cố định. Khi đó $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}$.

Suy ra $T=3MG+3MD=3(MG+MD)$.



Gọi K là trung điểm AC; trong hình thoi $ABCD$, K là trung điểm của BD và B, G, K, D thẳng hàng. G nằm trong tam giác ABC, còn D đối xứng với B qua K, nên G và D nằm khác phía đối với đường thẳng AC. Do đó với M thuộc AC: $MG + MD \geq GD$, dấu bằng khi M là giao điểm của đoạn GD với AC, tức $M \equiv K$.

Tính GD: $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $GK = \frac{1}{3}BK$, $KD = BK$, nên $GD = \frac{4}{3}BK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $3GD = 2a\sqrt{3}$, đạt khi M là trung điểm của AC.

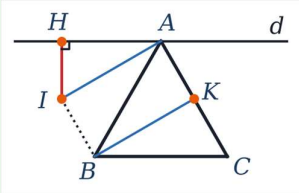
Đề 4. [Olympic Toán 10 liên cụm trường THPT – Hà Nội, 2024 – 2025 (câu trả lời ngắn)] (★) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BC, M là điểm di động trên d. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ với $B(0;0)$, $C(2a;0)$, $A\left(a;a\sqrt{3}\right)$; khi đó d có phương trình $y = a\sqrt{3}$.

Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (tổng các hệ số $1 + 2 - 1 = 2$): $x_I = \frac{a+0-2a}{2} = -\frac{a}{2}$, $y_I = \frac{a\sqrt{3}+0-0}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (Dễ thấy $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BK}$ với K là trung điểm AC, tức $AIBK$ là hình bình hành.)

Với mọi M: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$, nên $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = 2MI \geq 2\,d(I,d) = 2\left(a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a\sqrt{3}$.



Dấu bằng khi M là hình chiếu H của I trên d, tức $M\left(-\frac{a}{2};a\sqrt{3}\right)$ (M nằm trên d, cách A một đoạn $\frac{3a}{2}$ về phía B).

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $a\sqrt{3}$.

Đề 5. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Phùng Khắc Khoan – Thạch Thất, Hà Nội, 2024 – 2025; THPT Diễn Châu 2 – Nghệ An, 2023 – 2024] (★) Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O và có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB và G' là trọng tâm của tam giác MNP. Chứng minh rằng ba điểm O, G, G' thẳng hàng.

Lời giải

M là trọng tâm tam giác OBC nên $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$; tương tự $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right)$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Cộng lại: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{2}{3}\cdot 3\,\overrightarrow{OG} = 2\,\overrightarrow{OG}$.

G' là trọng tâm tam giác MNP nên $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG'}$. Suy ra $3\overrightarrow{OG'}=2\overrightarrow{OG}$, tức $\overrightarrow{OG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OG}$.

Vậy O, G, G' thẳng hàng (G' thuộc đoạn OG với $OG'=\frac{2}{3}OG$). *Nhận xét: lập luận trên đúng với mọi điểm O; tam giác không đều nên $O\neq G$ và ba điểm phân biệt.*

Đề 6. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Thạch Thất – Hà Nội, 2025 – 2026] (★★) Cho tam giác ABC, M là điểm di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm vị trí điểm M để $MB^2+MC^2-2MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

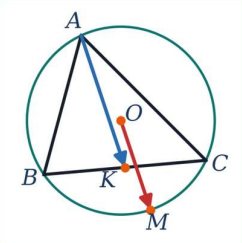
Lời giải

Gọi O, R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp, K là trung điểm BC; $OA=OB=OC=OM=R$.

$MB^2+MC^2-2MA^2=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=(1+1-2)MO^2+(R^2+R^2-2R^2)+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\right)$.

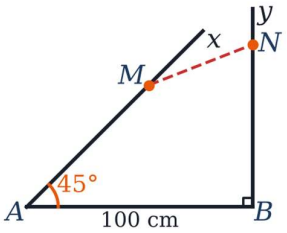
Mà $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OK}-2\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AK}$, nên $MB^2+MC^2-2MA^2=4\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AK}=-4\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AK}$.

Ta có $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AK}\leq OM\cdot AK=R\cdot AK$, dấu bằng khi $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AK}$. Do đó $MB^2+MC^2-2MA^2\geq -4R\cdot AK$.



Vậy biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-4R\cdot m_a$ ($m_a=AK$ là độ dài trung tuyến kẻ từ A) khi M là điểm trên đường tròn sao cho $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AK}$, tức M là đầu mút của bán kính song song và cùng hướng với trung tuyến AK.

Đề 7. [Olympic Toán 10 cụm THPT Hà Đông – Hoài Đức, Hà Nội, 2018 – 2019] (★) Cho hai tia Ax, By nằm cùng phía đối với đường thẳng AB, với $AB=100$ cm, $\widehat{xAB}=45^\circ$ và $By\perp AB$. Cùng lúc, chất điểm X xuất phát từ A chuyển động trên tia Ax với vận tốc $3\sqrt{2}$ cm/s, chất điểm Y xuất phát từ B chuyển động trên tia By với vận tốc 4 cm/s. Sau t giây, X ở vị trí M, Y ở vị trí N. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.



Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ với gốc A, tia AB là tia Ox, hai tia Ax, By nằm trong nửa mặt phẳng $y>0$: $A(0;0), B(100;0)$.

Sau t giây ($t \geq 0$): $AM = 3\sqrt{2}t$ và tia Ax tạo với Ox góc $45°$, nên $M\left(3\sqrt{2}t\cos 45°; 3\sqrt{2}t\sin 45°\right) = (3t; 3t)$; $BN = 4t$ và $By \perp AB$ nên $N(100; 4t)$.

$\overrightarrow{MN} = (100 - 3t; t)$,

$MN^2 = (100 - 3t)^2 + t^2 = 10t^2 - 600t + 10\,000 = 10(t - 30)^2 + 1000 \geq 1000$.

Dấu bằng khi $t = 30$. Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \approx 31{,}6$ cm, đạt sau 30 giây (khi đó $M(90; 90)$, $N(100; 120)$).

Đề 8. **[Khảo sát đội tuyển HSG 10 lần 1, THPT Thanh Miện – Hải Dương, 2017 – 2018]** Cho tam giác ABC có trọng tâm G; hai điểm D, E xác định bởi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng D, E, G thẳng hàng.

Lời giải

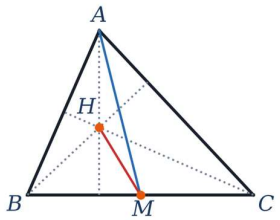
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

G là trọng tâm nên $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, suy ra $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

Nhận thấy $\frac{6}{5}\overrightarrow{DG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DG}$ cùng phương nên D, E, G thẳng hàng.

Đề 9. **[Khảo sát đội tuyển HSG 10 lần 1, THPT Thanh Miện – Hải Dương, 2017 – 2018]** (★) Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.



Lời giải

M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

Do đó $2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

H là trực tâm nên $CH \perp AB$, $BH \perp AC$. Suy ra $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CH}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH}\right) \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Cộng lại: $2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{BC}{2} \cdot BC = \frac{BC^2}{2}$ (hai vectơ $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng).

Vậy $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

Đề 10. **[HSG cấp trường Toán 10, THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh, 2018 – 2019]** Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = x$, $\widehat{BAC} = 60°$. Các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm x để $AM \perp CN$.

Lời giải

$\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) + 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$.

$\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}\right) - 2\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, nên $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot x\cdot\cos 60^\circ=\frac{x}{2}$, $AB^2=1$, $AC^2=x^2$. Do đó $9\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)=2AB^2-5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-3AC^2=2-\frac{5x}{2}-3x^2$.

$AM\perp CN\Leftrightarrow 2-\frac{5x}{2}-3x^2=0\Leftrightarrow 6x^2+5x-4=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=-\frac{4}{3}$.

Vì $x>0$ nên $x=\frac{1}{2}$.

Đề 11. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh, 2018 – 2019] Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{6}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên

$0=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)^2=GA^2+GB^2+GC^2+2\left(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$.

Mặt khác $GA=\frac{2}{3}m_a$, $GB=\frac{2}{3}m_b$, $GC=\frac{2}{3}m_c$ và theo công thức đường trung tuyến $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, nên

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

Vậy $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{6}(AB^2+BC^2+CA^2)$.

Đề 12. [Olympic Toán 10 cụm trường THPT Hoàn Kiếm – Hai Bà Trưng, Hà Nội, 2023 – 2024] (★★) Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

a) Chứng minh rằng $a\,\overrightarrow{IA}+b\,\overrightarrow{IB}+c\,\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Giả sử $a=3$, $b=5$. Tìm c để $IG\perp IC$, với G là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải

a) Đây là đẳng thức đã chứng minh ở Ví dụ 10 (dùng tính chất đường phân giác trong của các góc A và B).

b) Viết đẳng thức ở câu a) với gốc C: $a\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CI}\right)+b\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CI}\right)-c\,\overrightarrow{CI}=\vec{0}$, nên $\overrightarrow{CI}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}$.

Ngoài ra $\overrightarrow{CG}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}$.

Với $CA=b$, $CB=a$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos C$: $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CI}=\frac{ab^2+a^2b+(a+b)ab\cos C}{3(a+b+c)}=\frac{ab(a+b)(1+\cos C)}{3(a+b+c)}$ và $CI^2=\frac{a^2b^2+b^2a^2+2a^2b^2\cos C}{(a+b+c)^2}=\frac{2a^2b^2(1+\cos C)}{(a+b+c)^2}$.

$IG\perp IC\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CI}\right)\cdot\overrightarrow{CI}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CI}=CI^2$. Vì $1+\cos C>0$, điều kiện tương đương $\frac{a+b}{3}=\frac{2ab}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b)(a+b+c)=6ab$.

Với $a=3$, $b=5$: $8(8+c)=90\Leftrightarrow c=\frac{13}{4}$ (thoả mãn bất đẳng thức tam giác $2<c<8$). Vậy $c=\frac{13}{4}$.

Đề 13. [Olympic Toán 10 cụm Thạch Thất – Quốc Oai, Hà Nội, 2023 – 2024] Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $5\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$ và một điểm E thoả mãn $4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm E, A, D thẳng hàng.

Lời giải

$5\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$.

$4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AE} + 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\right) + 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{9}$.

Suy ra $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AD}$.

Vậy E, A, D thẳng hàng (E thuộc đoạn AD với $AE = \frac{5}{9}AD$).

Đề 14. [Olympic Toán 10 cụm Thạch Thất – Quốc Oai, Hà Nội, 2023 – 2024] (★★) Cho tam giác ABC có $AB = 3, BC = 4, CA = 5$. Điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = MB^2 + MC^2 - MA^2$.

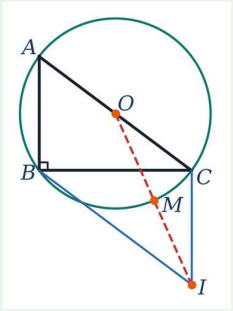
Lời giải

Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC}$, tức $ACIB$ là hình bình hành.

Với mọi M:

$T = (1 + 1 - 1)MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\right) + IB^2 + IC^2 - IA^2 = MI^2 + IB^2 + IC^2 - IA^2$.

$AB^2 + BC^2 = 25 = CA^2$ nên tam giác vuông tại B. Chọn hệ trục toạ độ với $B(0;0), A(0;3), C(4;0)$. Khi đó $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} = (4;-3), I(4;-3); IB^2 = 25, IC^2 = 9, IA^2 = 16 + 36 = 52$, nên $T = MI^2 - 18$.



Đường tròn ngoại tiếp có tâm O là trung điểm AC, $O\left(2;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{5}{2}$; $OI = \sqrt{4 + \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2} > R$ nên I nằm ngoài đường tròn.

Với M thuộc đường tròn: $MI \geq OI - OM = \frac{\sqrt{97}-5}{2}$, dấu bằng khi M là giao điểm của đoạn OI với đường tròn.

Vậy $T_{\min} = \frac{\left(\sqrt{97}-5\right)^2}{4} - 18 = \frac{122-10\sqrt{97}}{4} - 18 = \frac{25-5\sqrt{97}}{2}$.

Đề 15. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Bình Chiểu – TP Hồ Chí Minh, 2023 – 2024] Cho tam giác ABC, M là điểm trên cạnh AC thoả mãn $\overrightarrow{MA} = -4\overrightarrow{MC}$, I là trung điểm BM, K là điểm thoả mãn $\overrightarrow{BK} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x để A, I, K thẳng hàng.

Lời giải

$\overrightarrow{MA} = -4\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AM} = -4\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.

I là trung điểm BM : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$.
A, I, K thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=m\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow 1-x=\frac{m}{2}$ và $x=\frac{2m}{5}$. Suy ra $1-\frac{2m}{5}=\frac{m}{2}\Leftrightarrow m=\frac{10}{9}$, $x=\frac{4}{9}$.
Vậy $x=\frac{4}{9}$.

Đề 16. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh, 2023 – 2024] Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P, Q thoả mãn $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{NP}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm N, P, Q thẳng hàng.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, nên $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}=-\frac{7}{24}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$. Nhận thấy $\frac{16}{7}\overrightarrow{NP}=-\frac{16}{7}\cdot\frac{7}{24}\overrightarrow{AB}+\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{NQ}$.
Vậy N, P, Q thẳng hàng.

Đề 17. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Nguyễn Gia Thiều – Hà Nội, 2022 – 2023] (★★) Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng a. Các điểm D, E xác định bởi $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$, $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$. Gọi N, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AE và H là trực tâm của tam giác ABD.

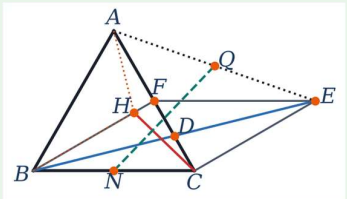
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{a^2}{2}$.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng NQ và HC vuông góc với nhau.

c) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{11a^2}{4}$.

Lời giải

Xác định D, E. Gọi F là trung điểm của AC. Từ giả thiết: $2\overrightarrow{BE}-2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$, tức $2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BF}$. Vậy $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$, nên $BFEC$ là hình bình hành.
$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$ nên D thuộc đoạn AC với $AD=\frac{3}{4}AC$, tức D là trung điểm của FC; do đó D cũng là trung điểm của đường chéo BE của hình bình hành $BFEC$. Tam giác ABC đều nên $BF\perp AC$, suy ra $CE\perp AC$.



a) H là trực tâm tam giác ABD nên $HA\perp BD$ và $HB\perp AD$; vì B, D, E thẳng hàng và A, D, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BE}=0$, $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

– $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}$.

– $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}$ (vì $HB\perp AC$, $EC\perp AC$).

– $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$, nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}AC^2=2\left(-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{3a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$ (góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}$ bằng $120°$).

Vậy $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EQ}$ và $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}$; cộng vế theo vế, với $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$: $2\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}$.

Do đó $2\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$. Vậy $NQ\perp HC$.

c) $BFEC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FC}$, do đó $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$: F là trọng tâm tam giác ABE.

Với mọi M: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FM}\right)=FM^2-\overrightarrow{FM}\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}\right)+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$. Cộng với hai đẳng thức tương tự, vế trái của điều kiện bằng $3FM^2-2\overrightarrow{FM}\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}\right)+\sigma=3FM^2+\sigma$, với $\sigma=\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FA}$.

Bình phương vô hướng đẳng thức $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$: $\sigma=-\frac{1}{2}(FA^2+FB^2+FE^2)$, với $FA=\frac{a}{2}$, $FB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $FE=BC=a$. Do đó $\sigma=-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}+a^2\right)=-a^2$.

Điều kiện $\Leftrightarrow 3FM^2-a^2=\frac{11}{4}^2\Leftrightarrow FM^2=\frac{5a^2}{4}\Leftrightarrow FM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

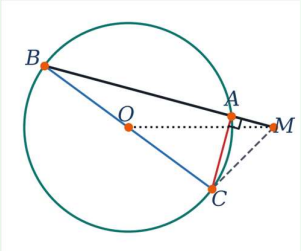
Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm F (trung điểm của AC), bán kính $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Đề 18. [HSG Toán 10, THPT Phú Xuyên B – Hà Nội, 2024 – 2025] (★) Cho đường tròn tâm O, bán kính $R=5$ và điểm M cố định với $OM=7$. Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B. Tính $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

Gọi C là điểm đối xứng với B qua O; khi đó BC là đường kính và $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}$.

Nếu $A\neq C$ thì $\widehat{BAC}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), tức $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{MB}$; nếu $A\equiv C$ thì $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong cả hai trường hợp: $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

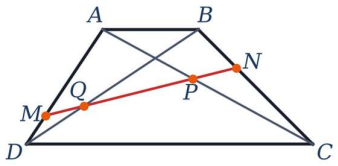


Mặt khác $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=MO^2-OB^2=49-25=24$.

Vậy $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=24$, không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Nhận xét: M nằm ngoài đường tròn nên $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng và $MA\cdot MB=OM^2-R^2$ – đại lượng này gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn. Nếu M nằm trong đường tròn, lập luận trên cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2<0$.

Đề 19. [HSG cấp tỉnh Toán 10, Sở GD&ĐT Hà Nam, 2024 – 2025] (★) Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD với $CD = 3AB$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh AD, BC sao cho $AM = 3MD$, $CN = 2NB$; P là giao điểm của AC và MN, Q là giao điểm của BD và MN. Tính $\frac{PQ}{MN}$.



Lời giải

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Vì $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 3\vec{u} + \vec{v}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

$AM = 3MD$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{v}$; $CN = 2NB$ nên $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \vec{u} + \frac{1}{3}(2\vec{u} + \vec{v}) = \frac{5\vec{u}+\vec{v}}{3}$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{5}{3}\vec{u} - \frac{5}{12}\vec{v}$.

$P \in MN$: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{MN} = \frac{5t}{3}\vec{u} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5t}{12}\right)\vec{v}$. $P \in AC$ nên hệ số của $\vec{u}$ gấp 3 lần hệ số của $\vec{v}$: $\frac{5t}{3} = 3\left(\frac{3}{4} - \frac{5t}{12}\right) \Leftrightarrow \frac{35t}{12} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow t = \frac{27}{35}$.

$Q \in MN$: $\overrightarrow{AQ} = \frac{5t'}{3}\vec{u} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5t'}{12}\right)\vec{v}$. $Q \in BD$ nên $\overrightarrow{AQ} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$, tức tổng hai hệ số bằng 1: $\frac{5t'}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5t'}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{5t'}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t' = \frac{1}{5}$.

Do đó $\overrightarrow{MP} = \frac{27}{35}\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MQ} = \frac{7}{35}\overrightarrow{MN}$, nên $\overrightarrow{QP} = \frac{20}{35}\overrightarrow{MN}$.

Vậy $\frac{PQ}{MN} = \frac{4}{7}$.

Đề 20. [HSG văn hoá Toán 10, THPT Quảng Trị – Quảng Trị, 2025 – 2026] (★) Cho tam giác ABC có trọng tâm G; các điểm N, P thoả mãn $2\overrightarrow{BN} + 5\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC}$ $(k \neq 1)$. Tìm k để G, P, N thẳng hàng.

Lời giải

Từ $2\overrightarrow{BN} + 5\overrightarrow{NC} = \vec{0}$: $2\left(\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GB}\right) + 5\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GN}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{5\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GB}}{3}$ (N nằm trên đường thẳng BC, ngoài đoạn BC, về phía C).

Từ $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC}$: $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GP} = k\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GP}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{GP} = \frac{\overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GC}}{1-k} = \frac{-\overrightarrow{G} - (1+k)\overrightarrow{GC}}{1-k}$ (thay $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$).

Hai vectơ $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ không cùng phương. G, P, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{GP}$ cùng phương với $\overrightarrow{GN}$ $\Leftrightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{-(1+k)}{5} \Leftrightarrow 1 + k = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{7}{2}$.

Vậy $k = -\frac{7}{2}$ (khi đó P thuộc đoạn AC với $\overrightarrow{AP} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AC}$).

Đề 21. [Olympic Toán 10 liên cụm Thanh Xuân – Cầu Giấy, Mê Linh – Sóc Sơn, Đông Anh, Hà Nội, 2020 – 2021] (★) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3}$; O là giao điểm hai đường chéo, I và G lần lượt là trung điểm CD và OB.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$, $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $AI \perp IG$.

c) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 37$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ (O là trung điểm AC); G là trung điểm OB nên $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{4}$; I là trung điểm CD nên $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$ và $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

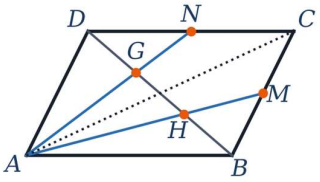
b) Vì $AB\perp AD$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IG}=\frac{1}{8}AB^2-\frac{3}{4}AD^2=\frac{18}{8}-\frac{9}{4}=0$. Vậy $AI\perp IG$.

c) O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ và $OA=OB=OC=OD=\frac{AC}{2}$, với $AC^2=AB^2+AD^2=21$.

$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\sum\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=4MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+4OA^2=4MO$.

Điều kiện $\Leftrightarrow 4MO^2+21=37\Leftrightarrow MO=2$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính 2.

Đề 22. [HSG cấp trường Toán 10, THPT Phan Huy Chú – Quốc Oai, Hà Nội, 2024 – 2025] Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy G, H sao cho $DG=GH=HB$. Gọi M là giao điểm của AH và BC, N là giao điểm của AG và DC. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.



Lời giải

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Vì $DG=GH=HB$: $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2\vec{u}+\vec{v}}{3}$, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{\vec{u}+2\vec{v}}{3}$.

$M\in BC$ nên $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+s\vec{v}$; $M\in AH$ nên $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $2\vec{u}+\vec{v}$, suy ra $s=\frac{1}{2}$: $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ (M là trung điểm BC).

Tương tự, $N\in DC$ nên $\overrightarrow{AN}=r\vec{u}+\vec{v}$, cùng phương với $\vec{u}+2\vec{v}$ nên $r=\frac{1}{2}$: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ (N là trung điểm DC).

Do đó $2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=3\vec{u}+3\vec{v}=3\overrightarrow{AC}$.

Đề 23. [HSG cụm trường THPT Hà Nội, 2021 – 2022] (★) Cho tam giác ABC đều cạnh a, trọng tâm G; điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

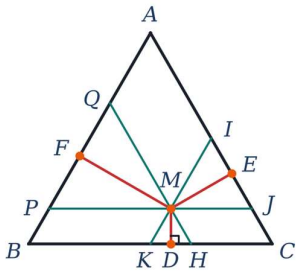
a) Chứng minh rằng $6\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Tính $\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|$ theo a.

Lời giải

a) Chèn điểm G: $\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GM}\right)+2\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GM}\right)+3\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GM}\right)=\vec{0}$, nên $6\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.

b) Các hệ số 1; 2; 3 đều dương nên M nằm trong tam giác. Qua M kẻ: đường song song với BC cắt AB, AC tại P, J; đường song song với CA cắt BC, AB tại H, Q; đường song song với AB cắt BC, CA tại K, I.



Các tam giác MHK, MIJ, MPQ có các cạnh song song với các cạnh của tam giác đều ABC nên là tam giác đều; do đó chân đường vuông góc D, E, F lần lượt là trung điểm của HK, IJ, PQ, và $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MK}\right), \overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right), \overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}\right)$.

Các tứ giác $AQMI, BPMK, CHMJ$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MJ}$.

Cộng lại: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$.

Theo câu a), $MG=\frac{AC}{6}=\frac{a}{6}$. Vậy $\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|=\frac{3}{2}\cdot\frac{a}{6}=\frac{a}{4}$.

Đề 24. [HSG khối 10, THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh, 2022 – 2023] Cho tam giác ABC và hai điểm I, J thoả mãn $\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}, \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng $IJ \parallel AC$.

Lời giải

$\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BC}$, tức $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{CB}$.

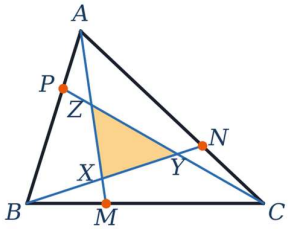
$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CB}\right)-3\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, tức $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$.

Hai vectơ $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương. Mà $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BC}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ nên $I\notin AC$. Vậy $IJ \parallel AC$.

3 PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN

Bài 1. (★) Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BM=\frac{1}{3}BC, CN=\frac{1}{3}CA, AP=\frac{1}{3}AB$. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của AM và BN, của BN và CP, của CP và AM. Tính diện tích tam giác XYZ theo S.



Lời giải

Xác định điểm X. $BM=\frac{1}{3}BC$ nên $MC=2MB$, tức $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$; $CN=\frac{1}{3}CA$ nên $NA=2NC$, tức $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Gọi X' là điểm thoả mãn $\overrightarrow{X'A}+4\overrightarrow{X'B}+2\overrightarrow{X'C}=\vec{0}$.

– $4\overrightarrow{X'B}+2\overrightarrow{X'C}=6\overrightarrow{X'M}$, nên $\overrightarrow{X'A}+6\overrightarrow{X'M}=\vec{0}$: X' thuộc đoạn AM.

– $\overrightarrow{X'A}+2\overrightarrow{X'C}=3\overrightarrow{X'N}$, nên $4\overrightarrow{X'B}+3\overrightarrow{X'N}=\vec{0}$: X' thuộc đoạn BN và $BX'=\frac{3}{7}BN$.

Vậy $X' \equiv X$ và $BX = \frac{3}{7}BN$.

Diện tích tam giác ABX**.** Hai tam giác ABX, ABN có chung đỉnh A, hai cạnh đáy BX, BN nằm trên cùng một đường thẳng, nên $S_{ABX} = \frac{BX}{BN}S_{ABN} = \frac{3}{7}S_{ABN}$. Tương tự $S_{ABN} = \frac{AN}{AC}S = \frac{2}{3}S$. Do đó $S_{ABX} = \frac{2}{7}S$.

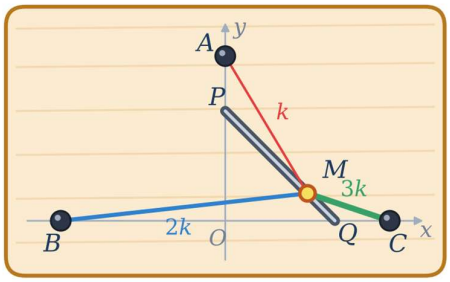
Giả thiết không thay đổi khi đổi vòng $A \to B \to C \to A$ (đồng thời $M \to N \to P \to M$, $X \to Y \to Z \to X$), nên hoàn toàn tương tự: $S_{BCY} = S_{CAZ} = \frac{2}{7}S$.

Ba tam giác ABX, BCY, CAZ cùng với tam giác XYZ chia tam giác ABC thành bốn phần không chồng lên nhau (hình vẽ), nên $S_{XYZ} = S - 3 \cdot \frac{2}{7}S = \frac{S}{7}$.

Vậy diện tích tam giác XYZ bằng $\frac{S}{7}$.

Nhận xét: nếu thay $\frac{1}{3}$ *bởi* $\frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$*, cách làm trên cho* $S_{XYZ} = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}S$ *(một trường hợp của định lí Routh). Với* $n = 2$*, ba đường thẳng là ba trung tuyến, đồng quy tại trọng tâm, và* $S_{XYZ} = 0$.

Bài 2. (★) (**Bài toán thực tế**) Trên một mặt bàn nằm ngang có ba cọc cố định A, B, C. Chọn hệ trục toạ độ Oxy trên mặt bàn (đơn vị trên mỗi trục là xentimét) sao cho $A(0;60)$, $B(-60;0)$, $C(60;0)$. Một chiếc vòng nhỏ M được nối với ba cọc bằng ba sợi dây chun. Coi mỗi sợi dây chun như một lò xo có chiều dài tự nhiên không đáng kể: sợi dây nối vòng với cọc X kéo vòng bằng lực $k_X\overrightarrow{MX}$, trong đó $k_A = k$, $k_B = 2k$, $k_C = 3k$ với $k = 0{,}2$ N/cm. Bỏ qua ma sát, kích thước của vòng và khối lượng các sợi dây.



a) Chứng minh rằng hợp lực $\vec{F}$ của ba lực đàn hồi tác dụng lên vòng bằng $6k\ \overrightarrow{MI}$, với I là một điểm cố định. Tìm toạ độ của I.

b) Thả vòng trên mặt bàn. Vòng nằm cân bằng ở vị trí nào?

c) Luồn vòng vào một thanh thép thẳng, nhẵn, gắn cố định trên mặt bàn, nối hai điểm $P(0;40)$ và $Q(40;0)$; vòng chỉ trượt được dọc theo thanh. Tìm vị trí cân bằng của vòng trên thanh và độ lớn của lực mà thanh tác dụng lên vòng khi đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

a) $\vec{F} = k\overrightarrow{MA} + 2k\overrightarrow{MB} + 3k\overrightarrow{MC} = k\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right)$. Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; theo tính chất tâm tỉ cự, $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MI}$ với mọi M. Do đó $\vec{F} = 6k\ \overrightarrow{MI}$.

Toạ độ của I: $x_I = \frac{0+2\cdot(-60)+3\cdot 60}{6} = 10$, $y_I = \frac{60+0+0}{6} = 10$. Vậy $I(10;10)$.

b) Trên mặt bàn nằm ngang, trọng lực và phản lực của mặt bàn cân bằng nhau, nên vòng cân bằng khi và chỉ khi $\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv I$. Vậy vòng nằm yên tại điểm $I(10;10)$.

c) Thanh nhẵn chỉ tác dụng lên vòng một lực $\vec{N}$ vuông góc với thanh. Vòng cân bằng $\Leftrightarrow \vec{F}+\vec{N}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}$ vuông góc với thanh $\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{PQ}$, tức M là hình chiếu H của I trên đường thẳng PQ.

Đường thẳng PQ có phương trình $x+y=40$ và $\overrightarrow{PQ}=(40;-40)$. Đặt $H(t;40-t)$; khi đó $\overrightarrow{HI}=(10-t;t-30)$ và $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{PQ}=40(10-t)-40(t-30)=40(40-2t)=0 \Leftrightarrow t=20$. Vậy $H(20;20)$ – chính là trung điểm của thanh PQ.

Khi đó $IH=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$ (cm) và $|\vec{N}|=|\vec{F}|=6k\cdot IH=6\cdot 0{,}2\cdot 10\sqrt{2}=12\sqrt{2}\approx 17{,}0$ (N).

Kiểm tra trực tiếp tại $H(20;20)$: $\overrightarrow{HA}=(-20;40)$, $\overrightarrow{HB}=(-80;-20)$, $\overrightarrow{HC}=(40;-20)$, nên $\vec{F}=0{,}2[(-20;40)+2(-80;-20)+3(40;-20)]=(-12;-12)$; vectơ này vuông góc với $\overrightarrow{PQ}$ và có độ dài $12\sqrt{2}$.

Vậy vòng cân bằng tại trung điểm $H(20;20)$ của thanh, và thanh tác dụng lên vòng một lực có độ lớn khoảng 17,0 N.

Nhận xét: với mọi vị trí M trên thanh, $|\vec{F}|=6k\cdot MI$ nhỏ nhất đúng tại vị trí cân bằng H – bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\sum k_i\overrightarrow{MA_i}\right|$ trên một đường thẳng (Dạng 2) có ý nghĩa cơ học rõ ràng. Thế năng đàn hồi $\frac{1}{2}(k\cdot MA^2+2k\cdot MB^2+3k\cdot MC^2)$ cũng nhỏ nhất tại H, theo hằng đẳng thức Lagrange.

Bài 3. (★★) Cho tam giác ABC và điểm T nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ATB}=\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=120°$.

a) Gọi $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ là các vectơ đơn vị lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TC}$. Chứng minh rằng $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M: $MA+MB+MC\geq TA+TB+TC$.

c) Áp dụng: cho tam giác ABC cân tại A có $BC=2\sqrt{3}$ và đường cao $AH=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA+MB+MC$ khi M thay đổi trong mặt phẳng.

Lời giải

a) $\left|\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}\right|^2=3+2\left(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}+\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}\right)=3+2\cdot 3\cos 120°=0$. Vậy $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=\vec{0}$.

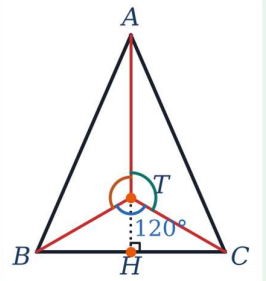
b) Với mọi vectơ $\vec{x}$ và vectơ đơn vị $\vec{e}$: $\vec{e}\cdot\vec{x}\leq|\vec{e}|\cdot|\vec{x}|=|\vec{x}|$. Vì $\overrightarrow{TA}=TA\cdot\vec{e_1}$ nên $MA\geq\vec{e_1}\cdot\overrightarrow{MA}=\vec{e_1}\cdot\left(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA}\right)=\vec{e_1}\cdot\overrightarrow{MT}+TA$.

Tương tự $MB\geq\vec{e_2}\cdot\overrightarrow{MT}+TB$ và $MC\geq\vec{e_3}\cdot\overrightarrow{MT}+TC$. Cộng lại và dùng câu a): $MA+MB+MC\geq\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}\right)\cdot\overrightarrow{MT}+TA+TB+TC=TA+TB+TC$.

Dấu bằng xảy ra khi $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$, tức M nằm trên cả ba tia TA,TB,TC: $M\equiv T$.

c) Chọn hệ trục toạ độ với $H(0;0)$, $B\left(-\sqrt{3};0\right)$, $C\left(\sqrt{3};0\right)$, $A(0;4)$. Do tính đối xứng, tìm T trên đoạn AH: $\widehat{BTC}=120°$ nên $\widehat{BTH}=60°$ và $TH=\frac{BH}{\tan 60°}=1$, tức $T(0;1)$.

Kiểm tra: $\overrightarrow{TA}=(0;3)$, $\overrightarrow{TB}=\left(-\sqrt{3};-1\right)$, $\overrightarrow{TC}=\left(\sqrt{3};-1\right)$; $\cos\widehat{ATB}=\frac{-3}{3\cdot 2}=-\frac{1}{2}$ và $\cos\widehat{BTC}=\frac{-3+1}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}$, còn $\widehat{CTA}=\widehat{ATB}$ do đối xứng. Vậy ba góc tại T đều bằng $120°$.



Theo câu b): $MA+MB+MC \geq TA+TB+TC = 3+2+2 = 7$, dấu bằng khi $M \equiv T$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB+MC$ bằng 7.

Nhận xét: điểm T (điểm Fermat – Torricelli) tồn tại khi mọi góc của tam giác đều nhỏ hơn $120°$. *Ý nghĩa thực tế: đặt trạm bơm tại T thì tổng chiều dài ba đường ống thẳng nối trạm với ba khu dân cư A, B, C là nhỏ nhất.*

Bài 4. (★★) Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đặt $S_a = S_{MBC}$, $S_b = S_{MCA}$, $S_c = S_{MAB}$.

a) Chứng minh rằng $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Áp dụng: cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Chứng minh rằng

$\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Đường thẳng AM cắt BC tại D (D thuộc đoạn BC, M thuộc đoạn AD). Hai cặp tam giác ABD, ACD và MBD, MCD có chung đường cao kẻ từ A, từ M nên $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{S_{MBD}}{S_{MCD}} = \frac{DB}{DC}$; suy ra $\frac{S_c}{S_b} = \frac{S_{ABD}-S_{MBD}}{S_{ACD}-S_{MCD}} = \frac{DB}{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{MD} = \frac{DC\cdot\overrightarrow{MB}+DB\cdot\overrightarrow{MC}}{BC} = \frac{S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}}{S_b+S_c}$.

Mặt khác $\frac{MD}{AD} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{S_a}{S_a+S_b+S_c}$ (hai tam giác chung đáy BC), nên $\frac{MA}{MD} = \frac{S_b+S_c}{S_a}$; M nằm giữa A và D nên $S_a\overrightarrow{MA} = -(S_b+S_c)\overrightarrow{MD} = -\left(S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC}\right)$. Vậy $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Tam giác nhọn nên H nằm trong tam giác. Gọi AD là đường cao ($D \in BC$), $H \in AD$. Hai tam giác vuông BDH và ADC có $\widehat{HBD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với góc C) nên đồng dạng: $\frac{HD}{BD} = \frac{DC}{AD}$, suy ra $HD = \frac{BD\cdot DC}{AD}$.

Trong các tam giác vuông ABD, ACD: $BD = \frac{AD}{\tan B}$, $DC = \frac{AD}{\tan C}$. Do đó $\frac{HD}{AD} = \frac{BD\cdot DC}{AD^2} = \frac{1}{\tan B\tan C}$ và $S_{HBC} = \frac{HD}{AD}\cdot S = \frac{S}{\tan B\tan C}$ (S là diện tích tam giác ABC).

Tương tự $S_{HCA} = \frac{S}{\tan C\tan A}$, $S_{HAB} = \frac{S}{\tan A\tan B}$, nên $S_{HBC} : S_{HCA} : S_{HAB} = \tan A : \tan B : \tan C$.

Áp dụng câu a) với $M \equiv H$ rồi nhân hai vế với $\frac{\tan A\tan B\tan C}{S}$, ta được $\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Nhận xét: câu a) với M là tâm đường tròn nội tiếp ($S_a = \frac{ar}{2}$, $S_b = \frac{br}{2}$, $S_c = \frac{cr}{2}$) *cho lại đẳng thức* $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ *của Ví dụ 10.*

Bài 5. (★) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; K là trung điểm AB, G là trọng tâm.

a) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

b) Chứng minh rằng tập hợp đó đi qua G khi và chỉ khi $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Lời giải

a) Chèn điểm C : $MA^2=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)^2=MC^2+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CA}+b^2$, $MB^2=MC^2+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CB}+a^2$.

Suy ra $MA^2+MB^2-2MC^2=2\overrightarrow{MC}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)+a^2+b^2=4\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CK}+a^2+b^2$ (tổng các hệ số $1+1-2=0$ nên không còn số hạng MC^2).

Điều kiện $\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CK}=\frac{a^2+b^2}{4}$. Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng CK : $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CK}$. Vế phải dương nên H thuộc tia CK và $CH\cdot CK=\frac{a^2+b^2}{4}$, tức $CH=\frac{a^2+b^2}{4m_c}$ với $m_c=CK$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng Δ vuông góc với trung tuyến CK tại điểm H thuộc tia CK sao cho $CH=\frac{a^2+b^2}{4m_c}$.

b) G thuộc tia CK với $CG=\frac{2}{3}m_c$. $G\in\Delta\Leftrightarrow G\equiv H\Leftrightarrow\frac{2}{3}m_c=\frac{a^2+b^2}{4m_c}\Leftrightarrow 8m_c^2=3(a^2+b^2)$.

Thay $m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$: $2(2a^2+2b^2-c^2)=3(a^2+b^2)\Leftrightarrow a^2+b^2=2c^2$. Chẳng hạn với tam giác đều, Δ là đường thẳng qua G song song với AB.

Bài 6. (★★) Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z: $x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

b) Suy ra $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của $P=\cos A+\cos B+2\cos C$.

Lời giải

a) Đặt $\vec{u}=\frac{1}{a}\overrightarrow{BC}$, $\vec{v}=\frac{1}{b}\overrightarrow{CA}$, $\vec{w}=\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ (các vectơ đơn vị). Góc giữa $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CA}$ bằng C, mà $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$, nên góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}$ bằng $180^\circ-C$ và $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\cos C$. Tương tự $\vec{v}\cdot\vec{w}=-\cos A$, $\vec{w}\cdot\vec{u}=-\cos B$.

Do đó $0\leq(x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w})^2=x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B$, đó chính là bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$. Vì $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ nên $\vec{w}=-\frac{a\vec{u}+b\vec{v}}{c}$; thay vào: $\left(x-\frac{za}{c}\right)\vec{u}+\left(y-\frac{zb}{c}\right)\vec{v}=\vec{0}$. Hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương, nên dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

b) Chọn $x=y=z=1$: $3\geq 2(\cos A+\cos B+\cos C)$, tức $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$; dấu bằng khi $a=b=c$ (tam giác đều).

c) Ta cần chọn x , y , z sao cho $yz:zx:xy=1:1:2$; chọn $x=y=2$, $z=1$: $9\geq 4\cos A+4\cos B+8\cos C=4P$, tức $P\leq\frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{1}$, chẳng hạn $a=b=2$, $c=1$ (ba số này thoả mãn bất đẳng thức tam giác). Khi đó $\cos A=\cos B=\frac{4+1-4}{2\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{4}$, $\cos C=\frac{4+4-1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{7}{8}$ và $P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{4}$, đạt khi $a:b:c=2:2:1$.