

LỜI GIẢI THAM KHẢO

KỶ CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI HỌC SINH GIỎI

CẤP QUỐC GIA

Thực hiện. Nhóm SATP, CLB PiMC trường THPT Chuyên Tiền Giang

Mặc dù đã cố gắng hết sức, nhưng do thời gian hạn chế nên khó tránh sai sót. Nhóm tác giả mong nhận được nhiều phản hồi từ bạn đọc để lời giải được hoàn thiện hơn nữa qua địa chỉ mail ctgpimc@gmail.com.

Câu 1 (TST Đồng Tháp 2026).

Cho hàm số $f: [0; 1] \rightarrow [-2026; 2026]$ thỏa mãn

$$f(x) = -\sqrt{1-x} \cdot f\left(\sqrt{(1-x)^3}\right), \forall x \in [0; 1].$$

- a) Xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức $u_0 = a \in (0; 1)$ và $u_{n+1} = \sqrt{(1-u_n)^3}$. Chứng minh rằng, $u_n \in (0; 1)$ và

$$f(a) = (-1)^n \cdot \sqrt[3]{u_1 u_2 \dots u_n} \cdot f(u_n)$$

với mọi số nguyên dương n .

- b) Chứng minh rằng, $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải.

- a) Đầu tiên, ta sẽ chứng minh $u_n \in (0; 1)$ bằng phương pháp quy nạp. Rõ ràng, $u_0 = a \in (0; 1)$. Giả sử, $u_n \in (0; 1)$ với số tự nhiên $n \geq 0$. Ta có,

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - u_n < 1 \Rightarrow 0 < (1 - u_n)^3 < 1.$$

Do đó, $u_{n+1} = \sqrt{(1-u_n)^3} \in (0; 1)$. Vậy theo nguyên lý quy nạp, $u_n \in (0; 1)$ với mọi $n \geq 0$.

Cuối cùng, ta chứng minh hệ thức $f(a) = (-1)^n \cdot \sqrt[3]{u_1 u_2 \dots u_n} \cdot f(u_n)$ với mọi số nguyên dương n . Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có,

$$(u_n)^{\frac{2}{3}} = 1 - u_{n-1} \Rightarrow \sqrt{1 - u_{n-1}} = \sqrt[3]{u_n},$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Mặt khác,

$$f(u_{n-1}) = -\sqrt{1 - u_{n-1}} \cdot f\left(\sqrt{(1 - u_{n-1})^3}\right) = -\sqrt[3]{u_n} \cdot f(u_n),$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(u_0) = -\sqrt[3]{u_1} \cdot f(u_1) \\ &= (-\sqrt[3]{u_1}) \cdot (-\sqrt[3]{u_2}) \cdot f(u_2) = (-1)^2 \sqrt[3]{u_1 u_2} \cdot f(u_2) \\ &\dots \\ &= (-1)^n \sqrt[3]{u_1 u_2 \dots u_n} \cdot f(u_n) \end{aligned}$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) Rõ ràng, $f(1) = 0$, dẫn đến $f(1) = 0$. Lấy $a \in (0; 1)$ tùy ý, xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức $u_0 = a \in (0; 1)$ và $u_{n+1} = \sqrt{(1 - u_n)^3}$. Ta có,

$$(u_n \cdot u_{n+1})^2 = u_n^2 \cdot (1 - u_n)^3 \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \left(\frac{6\sqrt{15}}{125} \right)^2 < \left(\frac{24}{125} \right)^2,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Suy ra,

$$u_n \cdot u_{n+1} < \frac{24}{125},$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó,

$$0 < u_1 u_2 \dots u_n = \begin{cases} u_1 u_2 \dots u_{2k} \leq \left(\frac{24}{125} \right)^k & \text{nếu } n = 2k \\ u_1 u_2 \dots u_{2k} u_{2k+1} < u_1 u_2 \dots u_{2k} \leq \left(\frac{24}{125} \right)^k & \text{nếu } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Suy ra, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{u_1 u_2 \dots u_n} = 0$.

Mặt khác, từ định nghĩa hàm f , ta có, $f(u_n)$ bị chặn, do đó,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [(-1)^n \cdot \sqrt[3]{u_1 u_2 \dots u_n} \cdot f(u_n)] = 0.$$

Theo kết quả câu a), ta có, $f(a) = (-1)^n \cdot \sqrt[3]{u_1 u_2 \dots u_n} \cdot f(u_n)$, dẫn đến, $f(a) = 0$ với mọi $a \in (0; 1)$. Hơn nữa, do $f(0) = f(1) = 0$ nên $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Câu 2. Cho tam giác ABC ($AC < BC$) có đường phân giác AD ($D \in BC$). Gọi K là trung điểm của AB , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACK} = \widehat{AEC}$. Giả sử $CD = CE$.

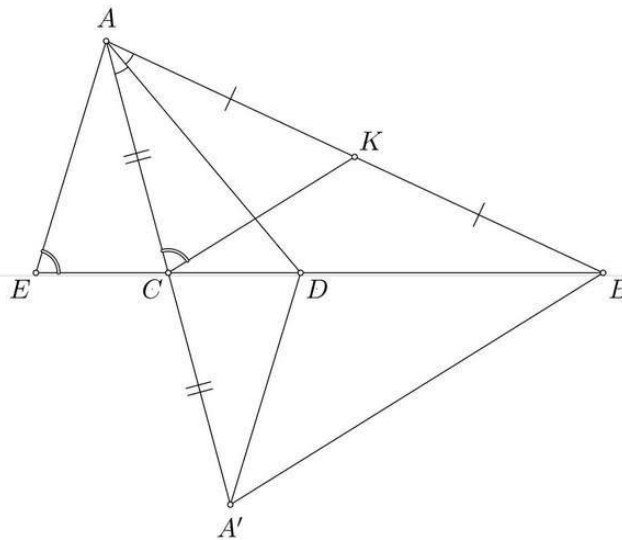
a) Chứng minh rằng $DA = DB$.

b) Gọi J là điểm thuộc đoạn thẳng BC sao cho $CA = CJ$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi L là giao điểm của DK và AJ , M là giao điểm của CL và đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC , G là giao điểm của IM và AB . Chứng minh rằng các điểm B, L, D, M, G cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

a) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua C .





Ta để ý rằng tứ giác $ADA'E$ là hình bình hành, và $BA' \parallel CK$, do đó biến đổi góc thì

$$\widehat{BA'C} = \widehat{ACK} = \widehat{AEC} = \widehat{CA'D},$$

suy ra CA' tiếp xúc với (BDA') , do đó $CA^2 = CA'^2 = CD \cdot CB$.

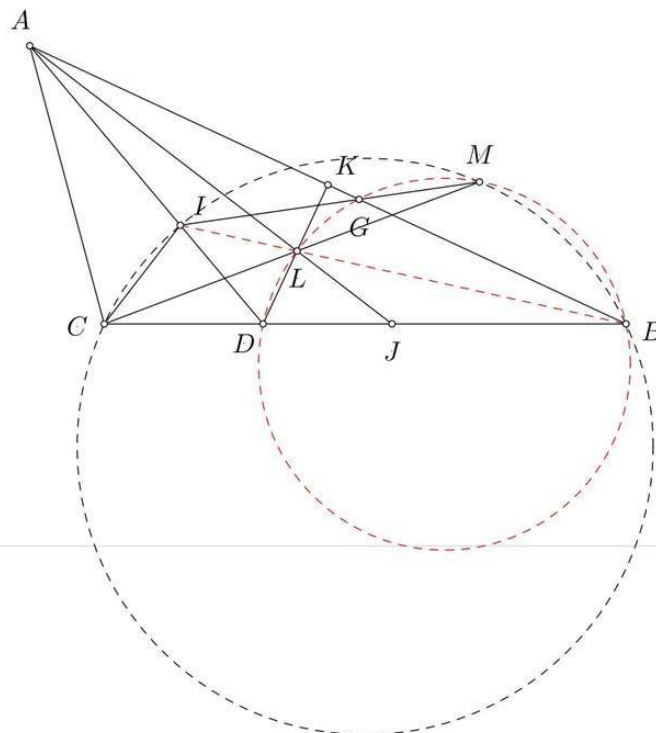
Ta suy ra CA tiếp xúc với (BDA) , do đó $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{ABD}$, suy ra $DA = DB$.

b) Trước hết, ta biến đổi góc thì

$$\widehat{JAD} = \widehat{CAJ} - \widehat{CAD} = \widehat{CJA} - \widehat{ABD} = \widehat{JAB},$$

suy ra AL là tia phân giác của $\widehat{DAB}$.

Do DK cũng là tia phân giác của $\widehat{ADB}$ nên L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADB , do đó B, L, I thẳng hàng.



Ta có

$$\widehat{CDL} = 180^\circ - \widehat{KDB} = 90^\circ + \widehat{ABD} = 90^\circ + \widehat{BAD} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BIC} = \widehat{BMC},$$

suy ra B, L, D, M đồng viên.

Ta cũng có $\widehat{GML} = \widehat{IMC} = \widehat{IBC} = \widehat{ABI} = \widehat{GBL}$, suy ra B, L, M, G đồng viên.

Do đó năm điểm B, L, D, M, G cùng thuộc một đường tròn.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương $n \geq 2$ sao cho tồn tại vô số bộ n số nguyên dương liên tiếp có tổng là số chính phương và không là lũy thừa của 2.

Lời giải.

Đáp số. Tất cả các số n thỏa mãn là các số sao cho $\nu_2(n)$ không là số nguyên dương chẵn.

Với $a \geq 0$, đặt

$$S(a, n) = (a+1) + (a+2) + \dots + (a+n) = na + \frac{n(n+1)}{2}$$

là tổng của n số nguyên dương liên tiếp.

Chứng minh $n = 2^a \cdot b$ ($a > 0$ chẵn, b lẻ) không thỏa mãn. Ta có

$$S(x, n) = nx + \frac{n(n+1)}{2} = 2^a bx + 2^{a-1}b(2^a b + 1).$$

Dễ thấy số này chia hết cho 2^{a-1} nhưng không chia hết cho 2^a . Do đó $\nu_2(S(x, n)) = a-1$ là số lẻ nên $S(a, n)$ không thể là số chính phương.

Chứng minh n lẻ thỏa mãn. Xét $a = k^2 n - \frac{n+1}{2}$ với $k \geq 1$. Khi đó

$$S(a, n) = na + \frac{n(n+1)}{2} = n \left(a + \frac{n+1}{2} \right) = (kn)^2$$

là số chính phương, cũng không phải là lũy thừa của 2.

Chứng minh $n = 2^a \cdot b$ (a, b lẻ) thỏa mãn. Xét $x = \frac{k^2 b - 2^a b - 1}{2}$ với k là số nguyên dương lẻ đủ lớn và có một ước nguyên tố lẻ. Khi đó

$$S(x, n) = nx + \frac{n(n+1)}{2} = 2^a bx + 2^{a-1}b(2^a b + 1) = 2^{a-1}b(2x + 2^a b + 1) = 2^{a-1}k^2 b^2$$

là số chính phương, cũng không là lũy thừa của 2.

Câu 4. Có 7 điểm phân biệt được đánh dấu từ 0 đến 6. Một con châu chấu xuất phát từ điểm khác 0 và thực hiện $n-1$ lần nhảy đến n vị trí. Châu chấu có thể nhảy đến ô khác hoặc nhảy lên rồi đáp xuống vị trí mà châu chấu đang đứng, tuy nhiên châu chấu không thể nhảy từ vị trí 2 đến vị trí 0 hoặc từ vị trí 2 đến vị trí 6. Một hành trình được định nghĩa là vị trí của châu chấu qua các bước nhảy. Gọi u_n là số hành trình khác nhau của châu chấu sau n bước nhảy.

a) Tìm công thức truy hồi của dãy (u_n) .

b) Chứng minh rằng $u_{2026} \cdot u_{2028}$ là tổng của 2 số chính phương.

Lời giải.

- a) Với mỗi số nguyên dương n , gọi a_n là số hành trình mà châu chấu kết thúc tại điểm 2, b_n là số hành trình châu chấu kết thúc tại điểm khác 2. Khi đó $u_n = a_n + b_n$.

Với $n = 1$, ta được $a_n = 1, b_n = 5$.

Xét hành trình có độ dài $n + 1$.

- Nếu bước thứ n châu chấu nhảy đến điểm số 2 thì có a_n hành trình thỏa mãn. Châu chấu có 4 cách để nhảy đến điểm khác 2 và có 1 cách để nhảy đến điểm số 2.

- Nếu bước thứ n không phải là điểm số 2 thì có b_n hành trình thỏa mãn. Châu chấu có 6 cách để nhảy đến điểm khác 2 và có 1 cách để nhảy đến điểm số 2.

Do đó $a_{n+1} = a_n + b_n$ và $b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$ với mọi $n \geq 1$.

Để ý rằng $a_{n+1} = a_n + b_n = u_n$ và $b_n = a_{n+1} - a_n$ nên với mọi $n \geq 1$ thì

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_{n+2} + b_{n+2} \\ &= (a_{n+1} + b_{n+1}) + (4a_{n+1} + 6b_{n+1}) \\ &= u_{n+1} + (4a_{n+1} + 6(a_{n+2} - a_{n+1})) \\ &= u_{n+1} + (6a_{n+2} - 2a_{n+1}) \\ &= u_{n+1} + 6u_{n+1} - 2u_n \\ &= 7u_{n+1} - 2u_n. \end{aligned}$$

Ta tính được $a_2 = 6, b_2 = 34$, do đó $u_2 = a_2 + b_2 = 40$.

Vậy dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 6, u_2 = 40$ và $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 2u_n$ với mọi $n \geq 1$.

- b) Với $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, đặt $v_n = u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}$. Khi đó, với mọi số nguyên dương n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2}^2 - u_{n+1} u_{n+3} \\ &= u_{n+2}(7u_{n+1} - 2u_n) - u_{n+1}(7u_{n+2} - 2u_{n+1}) \\ &= 2u_{n+1}^2 - 2u_n u_{n+2} \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Ta suy ra $v_n = 2^{n-1} v_1 = 2^{n-1} (u_2^2 - u_1 u_3) = -2^{n+2}$ với mọi số nguyên dương n .

Do đó $u_{2027}^2 - u_{2026} u_{2028} = -2^{2028}$, suy ra $u_{2026} u_{2028} = u_{2027}^2 + 2^{2028}$ là tổng của hai số chính phương.

Câu 5. Cho $n \geq 2$ là số nguyên dương. Xét các đa thức $f(x), g(x), h(x)$ hệ số thực có bậc không vượt quá n . Một số thực x_0 được gọi là *tốt* nếu các giá trị $f(x_0), g(x_0), h(x_0)$ tạo thành một cặp số cộng theo một thứ tự bất kì nào đó. Giả sử rằng chỉ có hữu hạn số tốt như vậy.

- a) Chứng minh rằng số lượng số tốt không vượt quá $3n$.
b) Hãy xây dựng bộ ba đa thức $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn có $3n$ số tốt.

Lời giải.

- a) Xét các đa thức

$$a(x) = g(x) + h(x) - 2f(x),$$



$$b(x) = h(x) + f(x) - 2g(x),$$

$$c(x) = f(x) + g(x) - 2h(x),$$

và xét $P(x) = a(x)b(x)c(x)$. Khi đó x là số tốt khi và chỉ khi $P(x) = 0$.

Do có hữu hạn số tốt nên $P(x)$ là đa thức khác 0. Do $a(x), b(x), c(x)$ có bậc không quá n nên đa thức $P(x)$ có bậc không quá $3n$.

Do vậy đa thức $P(x)$ có không quá $3n$ nghiệm thực, hay có tối đa $3n$ số tốt.

b) Xét $Q(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)$. Đa thức này có n nghiệm thực phân biệt là $1, 2, \dots, n$.

Do $Q(i) = Q(i+1)$ nên tồn tại x_i thuộc $(i; i+1)$ sao cho $Q'(x_i) = 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Đặt $m = \min_{i=1, n-1} (|y(x_i)|)$. Xét $c \in (0, m)$ thì

☑ phương trình $Q(x) = c$ có đủ n nghiệm thực phân biệt,

☑ do $-c \in (-m, 0)$, phương trình $Q(x) = -c$ cũng có đủ n nghiệm thực phân biệt.

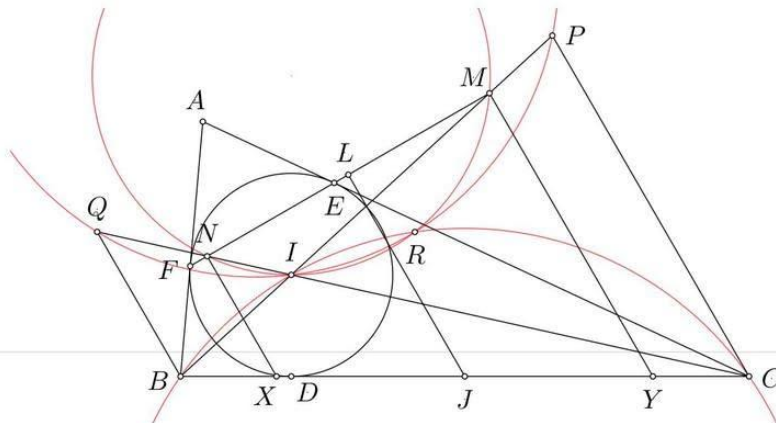
Chọn các đa thức $f(x) = \frac{3Q(x) - c}{3}$, $g(x) = \frac{c - 3Q(x)}{3}$, $h(x) = 0$ thì các đa thức $a(x) = Q(x) + c$, $b(x) = -2Q(x)$ và $c(x) = Q(x) - c$ đều có n nghiệm thực phân biệt. Do đó, bộ ba đa thức f, g, h này thỏa mãn bài toán.

Câu 6. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F . BI, CI, DI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M, N, K . Các điểm P, Q nằm trên BM, CN sao cho CP và BQ cùng song song với AI .

- Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác IBC, IMN, IPQ có một điểm chung khác I .
- Gọi S là giao điểm của EF và BC , T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E và F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng đường thẳng qua S vuông góc với TK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

Lời giải.

a) Xét hình vẽ bên dưới.



Trước hết, ta chứng minh M, N thuộc đường tròn đường kính BC .

Bây giờ, gọi V là trung điểm của AI thì A, V, I, T thẳng hàng và $(AI, TV) = -1$.

Gọi W là giao điểm của KT và BC thì $(SW, DJ) \stackrel{K}{=} (VT, IA) = -1$, do đó S, W liên hợp với nhau với (DMN) .

Ta cũng có $(SD, BC) = -1$, do đó $(SK, MN) \stackrel{I}{=} (SD, BC) = -1$. Do đó, S, K liên hợp với nhau đối với (DMN) .

Ta suy ra KT là đường đối cực của S đối với (DMN) , do đó đường thẳng qua S vuông góc với TK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

Câu 7. Trên bảng có viết dãy các số $0, 1, 2, \dots, n$ với n là một số nguyên dương lẻ. An và Bình cùng chơi một trò chơi bằng cách thay phiên nhau xóa các số có trên bảng. An là người đi trước. Gọi A và B lần lượt là tổng của các số mà An và Bình đã xóa.

- Giả sử $n = 7$. Hỏi An có bao nhiêu cách xóa để $\gcd(A, B) = 1$?
- Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n lẻ sao cho An luôn có thể chọn các số để xóa thỏa mãn $\gcd(A, B)$ chẵn bất kể cách xóa số của Bình.
- Với $n = 81$, An thực hiện thao tác xóa các số sao cho giá trị của $\gcd(A, B)$ lớn nhất còn Bình thực hiện thao tác xóa sao cho giá trị của $\gcd(A, B)$ nhỏ nhất. Hỏi giá trị cuối cùng của $\gcd(A, B)$ là bao nhiêu nếu An và Bình đều thực hiện các thao tác xóa tối ưu?

Lời giải.

- Gọi S và T lần lượt là tập hợp các số An và Bình đã xóa.

Để ý rằng $A + B = 0 + 1 + \dots + 7 = 28$ và $\gcd(A, B) = \gcd(A, A + B) = \gcd(A, 28)$, nên ta chỉ cần tính số tập hợp có 4 phần tử có tổng nguyên tố cùng nhau với 28. - Để A lẻ, trong S có 3 số lẻ và 1 số chẵn, hoặc 4 số lẻ và 3 số chẵn. Có $2 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} = 32$ bộ. - Để A lẻ và chia hết cho 7, A chỉ có thể nhận các giá trị là 7 hoặc 21 (do $6 \leq A \leq 22$). Chỉ có hai tập hợp S thỏa mãn, đó là $\{0, 1, 2, 4\}, \{3, 5, 6, 7\}$.

Do vậy, có $32 - 2 = 30$ cách xóa để $\gcd(A, B) = 1$.

- Ta chứng minh $n = 8k - 7$ thỏa mãn ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) đề bài.

Khi đó, trên bảng có $4k$ số chẵn và $4k$ số lẻ. Chiến thuật của An như sau:

- An xóa một số lẻ ở lượt đầu tiên.

- Ở những lượt tiếp theo, nếu Bình xóa số chẵn thì An xóa số chẵn. Nếu Bình xóa số lẻ và số lượng số lẻ còn lại lớn hơn 0, An cũng xóa số lẻ.

Với chiến thuật này, An xóa đúng $\frac{4k}{2} = 2k$ số chẵn, do đó số số lẻ An xóa là số chẵn, tức là A chẵn.

Do $A + B = 0 + 1 + \dots + (8k - 1) = (8k - 1)4k$ là số chẵn nên B cũng chẵn, do đó $2 \mid \gcd(A, B)$.

- Để ý rằng $A + B = 0 + 1 + \dots + 81 = 41 \cdot 81$, nên $\gcd(A, B) \mid A + B = 41 \cdot 3^4$. Ta sẽ chỉ ra chiến thuật để An đảm bảo A chia hết cho 41, và sẽ chỉ ra chiến thuật để Bình đảm bảo B không chia hết cho 3.

Chiến thuật của An. Chia 82 số thành 41 cặp $(i, i + 41)$ với $0 \leq i \leq 40$. An bắt đầu bằng cách lấy số 0.

Kể từ lượt đầu tiên trở đi, nếu Bình xóa số còn lại trong cặp thì An xóa một số bất kỳ trong cặp mới. Nếu không, Bình đã xóa đúng một số trong một cặp nào đó. An chỉ cần xóa số còn lại trong cặp đó. Khi đó, sau lượt của An, An đảm bảo có đúng một cặp có một trong hai số bị xóa.

Do vậy, sau khi tất cả các số trên bảng bị xóa, An lấy đúng một số trong mỗi cặp. Khi đó $A \equiv 0 + 1 + \dots + 40 = 41 \cdot 20 \equiv 0 \pmod{41}$. Do đó An đảm bảo $41 \mid \gcd(A, B)$, hay $\gcd(A, B) \geq 41$.

Chiến thuật của Bình. Để ý rằng có 82 số chia hết cho 3, 27 số chia 3 dư 1, 27 số chia 3 dư 2. Khi đó, chia 82 số này thành 41 cặp:

- 14 cặp số, với mỗi cặp chia hết cho 3,
- 13 cặp số, với mỗi số trong cặp chia 3 dư 1,
- 13 cặp số, với mỗi số trong cặp chia 3 dư 2,
- 1 cặp còn lại, cặp này chứa một số chia 3 dư 1 và một số chia 3 dư 2.

Khi đó, khi An xóa số nào, Bình xóa số còn lại trong cặp. Sau 82 lượt chơi, An xóa tổng cộng 41 số, và một trong hai trường hợp sau xảy ra:

- Trong 41 số, có 14 số chia hết cho 3, 14 số chia 3 dư 1, 14 số chia 3 dư 2. Khi đó $A \equiv 14 \cdot 0 + 14 \cdot 1 + 13 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{3}$.
- Trong 41 số, có 14 số chia hết cho 3, 13 số chia 3 dư 1, 14 số chia 3 dư 2. Khi đó $A \equiv 14 \cdot 0 + 13 \cdot 1 + 14 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Trong cả hai trường hợp, A không chia hết cho 3. Do đó, Bình đảm bảo $\gcd(A, B) \leq 41$.

Vậy giá trị cuối cùng của $\gcd(A, B)$ là 41.

