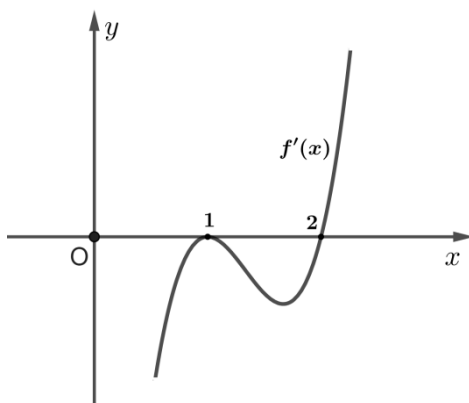


PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(1;3)$. B. $(-\infty;2)$. C. $(0;1)$ và $(2;+\infty)$. D. $(0;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) \leq 0, \forall x \leq 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Câu 2: Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x + 9}{x + 1}$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $6\sqrt{5}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $y = x + \frac{9}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{9}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -7 \end{cases}$

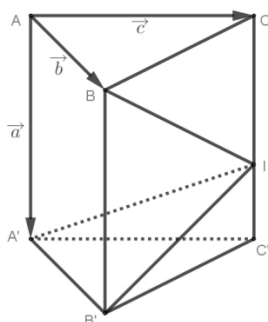
Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là: $A(2;5); B(-4;-7)$.

$\Rightarrow AB = 6\sqrt{5}$.

Câu 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $IC = 3.IC'$, G là trọng tâm tứ diện $BA'B'C'$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}$. B. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$.
C. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Lời giải



$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} &= \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} \\
&\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG} = (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'A'}) + (\overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'B'}) + \overrightarrow{IC'} \\
&\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG} = (\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IC'}) + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C'A'} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}(2\vec{b} - 3\vec{c}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}
\end{aligned}$$

Câu 4: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 120° và $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Tính độ dài của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$.

A. $\sqrt{19}$.

B. 49.

C. 19.

D. 7.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(|\vec{a} - \vec{b}| \right)^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 49.$$

$$\text{Nên } |\vec{a} - \vec{b}| = 7.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -2; 3)$, $B(0; 2; -1)$, $C(-2; 0; 1)$. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

A. $\vec{u} = (7; 2; -2)$.

B. $\vec{u} = (1; 6; -6)$.

C. $\vec{u} = (1; 6; -2)$.

D. $\vec{u} = (4; 14; -14)$.

Lời giải

Ta có:

$$+) \overrightarrow{AB} = (-1; 4; -4) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (-2; 8; -8);$$

$$+) \overrightarrow{AC} = (-3; 2; -2) \Rightarrow -\overrightarrow{AC} = (3; -2; 2).$$

$$\text{Suy ra } \vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (1; 6; -6).$$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các đỉnh $A'(-1; 2; 3)$, $C'(1; 4; 5)$, $B(-3; 3; -2)$, $D(5; 3; 2)$. Tìm tọa độ đỉnh D' .

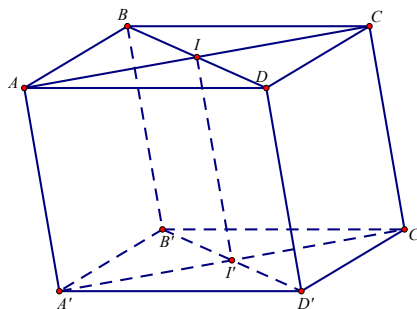
A. $D'(0; 2; -1)$.

B. $D'(-4; 3; 2)$.

C. $D'(2; 4; 1)$.

D. $D'(4; 3; 6)$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Khi đó: I là trung điểm của $BD \Rightarrow I(1; 3; 0)$.

Và I' là trung điểm của $A'C' \Rightarrow I'(0; 3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{II'} = (-1; 0; 4)$.

Gọi $D'(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{DD'} = (x - 5; y - 3; z - 2)$.

$$\text{Do } D'I'ID \text{ là hình bình hành } \Rightarrow \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{II'} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -1 \\ y - 3 = 0 \\ z - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$$

Vậy $D'(4; 3; 6)$.

Câu 7: Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thu nhập (triệu đồng)	[5;8)	[8;11)	[11;14)	[14;17)	[17;20)
Số người	30	55	45	30	20

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng).

A. 11,75.

B. 12,5.

C. 11.

D. 10,5.

Lời giải

$$\bar{x} = \frac{6,5 \times 30 + 9,5 \times 55 + 12,5 \times 45 + 15,5 \times 30 + 18,5 \times 20}{180} = 11,75.$$

Câu 8: Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	7	5	6	4

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 12,2.

B. 27,5.

C. $\frac{155}{13}$.

D. $\frac{165}{14}$.

Lời giải

Cỡ mẫu $n = 28$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{28}$ là mẫu số liệu gốc về thời gian tập nhảy mỗi ngày của bạn Chi được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1; \dots; x_6 \in [20;25)$; $x_7; \dots; x_{13} \in [25;30)$; $x_{14}; \dots; x_{18} \in [30;35)$;

$x_{19}; \dots; x_{24} \in [35;40)$; $x_{25}; \dots; x_{28} \in [40;45)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm $[25;30)$, do đó tứ phân vị thứ nhất

$$\text{của mẫu số liệu ghép nhóm là: } Q_1 = 25 + \frac{\frac{28}{4} - 6}{7} (30 - 25) = \frac{180}{7}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc nhóm $[35;40)$, do đó, tứ phân vị thứ ba

$$\text{của mẫu số liệu ghép nhóm là: } Q_3 = 35 + \frac{\frac{3 \cdot 28}{4} - 18}{6} (40 - 35) = \frac{75}{2}$$

$$\text{Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: } \Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{165}{14}.$$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$ là:

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

$$pt \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 10: Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ lần lượt là m, M . Khi đó $2M + m$ bằng

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Do đó $m = -2; M = 1$.

Vậy $2M + m = 0$.

Câu 11: Đặt $a = \log_2 3$, $b = \log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45 = \frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ (với $m, n, p \in \mathbb{Z}$) thì

$13m + 12n + 2024p$ bằng:

- A.** 3012. **B.** 1024. **C.** 2028. **D.** 2061.

Lời giải

Ta có:

$$\log_6 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 9 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{\log_3 3^2 + \frac{1}{\log_5 3}}{\log_3 3 + \frac{1}{\log_5 3}} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a(1+2b)}{b(a+1)}.$$

Theo bài ra: $\log_6 45 = \frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$, do đó: $m=1$, $n=2$, $p=1$.

Vậy $13m + 12n + 2024p = 2061$.

Câu 12: Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a + 8b$ ta được

- A.** -1 . **B.** 5 . **C.** -4 . **D.** 2 .

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - ax \right) - b \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1 - a^2x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1 + ax}} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(4 - a^2)x^2 - 3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1 + ax}} - b \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ a > 0 \\ \frac{-3}{2+a} - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy $a + 8b = -4$.

Câu 13: Một cấp số cộng (u_n) có tổng của n số hạng đầu là S_n được tính theo công thức $S_n = 3n^2 + 5n, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó.

- A.** $u_1 = -8; d = 6$. **B.** $u_1 = 8; d = -6$. **C.** $u_1 = 8; d = 6$. **D.** $u_1 = 6; d = 8$.

Lời giải

Ta có: $S_1 = 3.1^2 + 5.1 = 8 = u_1$

Lại có $S_2 = u_1 + u_2 \Leftrightarrow 2u_1 + d = 22 \Rightarrow d = 6$.

Câu 14: Gieo đồng thời hai con xúc xắc I và II cân đối, đồng chất một lần. Ta gọi biến cố A : “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm”. Khi đó xác suất $P(A)$ của biến cố A là

- A.** $P(A) = \frac{25}{36}$. **B.** $P(A) = \frac{11}{36}$. **C.** $P(A) = \frac{1}{36}$. **D.** $P(A) = \frac{15}{36}$.

Lời giải

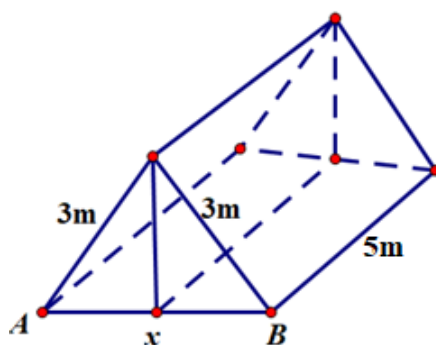
Nhận thấy: $n(\Omega) = 6.6 = 36$.

Biến cố $\bar{A}$: “không có con xúc xắc nào xuất hiện mặt 6 chấm”

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = 5.5 = 25 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{25}{36}$$

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Câu 15: Người ta dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài 6 m và chiều rộng 5 m bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh chiều dài của tấm bạt sao cho hai mép cạnh chiều rộng của tấm bạt sát đất và cách nhau $x(m)$, hai đầu hồi của lều được thiết kế cửa ra, vào và có thể khép kín (tham khảo hình vẽ dưới). Thể tích không gian phía trong lều lớn nhất bằng $\frac{a}{b} (m^3)$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a + b$?



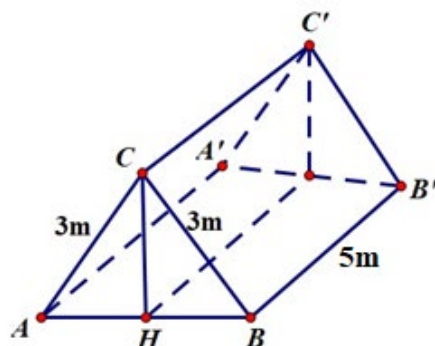
A. 47.

B. 27.

C. 35.

D. 28.

Lời giải



Xét hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân với hai cạnh bên có độ dài bằng 3m, chiều cao lăng trụ bằng 5m.

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm } AB \text{ thì } CH \perp AB, CH = \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}.$$

$$\text{Do đó diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{4}.$$

$$\text{Suy ra thể tích của lều là } V = 5 \cdot \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{4}.$$

Để không gian phía trong lều lớn nhất thì $V_{\max}$.

$$\text{Ta có } V = \frac{5}{4} x\sqrt{36 - x^2} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{36}{2} = \frac{45}{2} (m^3) \text{ với mọi } x \in (0; 6).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } a = 45, b = 2 \Rightarrow a + b = 47.$$

- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;-3;2)$, $B(2;1;-2)$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thay đổi thoả mãn $BM = BN = 2$ và A, M, N thẳng hàng. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2.AM + 5.AN$ có dạng $7\sqrt{m} - n$ với m, n là số tự nhiên. Tính giá trị $5m + n$.
- A.** 211. **B.** 161. **C.** 215. **D.** 169.

Lời giải

Ta có: M, N nằm trên mặt cầu tâm B , bán kính $R = 2$.

Do $BA = \sqrt{41} > R = 2 \Rightarrow A$ nằm ngoài đoạn MN . Để S nhỏ nhất thì N phải nằm giữa A, M

Gọi H là trung điểm $MN \Rightarrow BH \perp MN, HM = HN = \frac{1}{2}MN$

Khi đó: $S = 2(AH + HM) + 5(AH - NH) = 7.AH - 3.NH$

$$S = 7\sqrt{AB^2 - BH^2} - 3\sqrt{R^2 - BH^2} = 7\sqrt{41 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2} \text{ với } BH = x, 0 \leq x < 2$$

Xét hàm số $f(x) = 7\sqrt{41 - x^2} - 3\sqrt{4 - x^2}, (0 \leq x < 2)$

$$f'(x) = \frac{-7x}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}} = x \left(\frac{-7}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} \right).$$

$$\text{Xét } \frac{-7}{\sqrt{41 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} > 0 \Leftrightarrow 7\sqrt{4 - x^2} < 3\sqrt{41 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow 196 - 49x^2 < 369 - 9x^2 \Leftrightarrow 40x^2 + 173 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 2), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; 2)$

Vậy $\min_{[0; 2)} f(x) = f(0) = 7\sqrt{41} - 6 \Rightarrow m = 41, n = 6 \Rightarrow 5m + n = 211$

- Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{2024}{f(x) - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	-7	3	1	$-\infty$

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

- Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2024}{f(x) - 1} = \frac{2024}{-7 - 1} = -253 \Rightarrow y = -253$ là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2024}{f(x) - 1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2024}{f(x) - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2024}{f(x) - 1} = -\infty$$

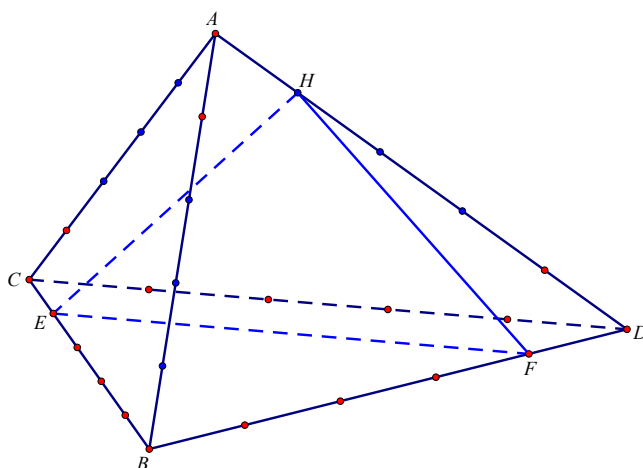
$\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

- Lại thấy: phương trình $f(x) - 1 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2 < 1$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x = x_1, x = x_2$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tất cả 5 đường tiệm cận (đứng và ngang).

- Câu 18:** Cho tứ diện $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 4 điểm chia đều cạnh đó thành các phần bằng nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh lấy từ 24 điểm đánh dấu sao cho mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho.
- A.** 336. **B.** 216. **C.** 288. **D.** 432.

Lời giải



Nhận thấy, nếu một đoạn thẳng có hai đầu mút nằm trên hai cạnh chéo nhau của tứ diện thì nó không thể song song với bất kỳ cạnh nào của tứ diện. Xét tam giác HEF có 3 đỉnh thuộc 24 đỉnh đã đánh dấu.

Giả sử $\triangle HEF$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó một trong các cạnh của nó, giả sử là EF song song với CD . Ta có hai trường hợp là $X \in BC, F \in BD$ hoặc $E \in AC, F \in AD$

Trường hợp 1: Nếu $E \in BC, F \in BD$ thì $H \notin (BCD)$, chỉ còn 12 điểm có thể chọn làm H .

Ta thấy có 4 cặp E, F thỏa mãn. Theo định lý Talet vì có các đoạn tỉ lệ và ứng với mỗi cặp như vậy, trên các cạnh AB, AC, AD ta lại loại bớt 3 điểm nữa (vì khi đó (HEF) song song với nhiều hơn một cạnh của tứ diện). Suy ra có 9 cách chọn H . Do đó, có $4.9 = 36$ tam giác thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: Nếu $E \in AC, F \in AD$ tương tự có 36 tam giác thỏa mãn.

Do các cạnh của tứ diện bình đẳng nên có $6.(2.36) = 432$ tam giác.

Câu 19: Cho tứ diện $OABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^\circ$; $\widehat{AOC} = 90^\circ$; $OA = OB = OC = 1$. M là điểm thuộc cạnh OA sao cho $AM = 2.MO$; N là trung điểm BC . Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $\frac{2}{3}$.

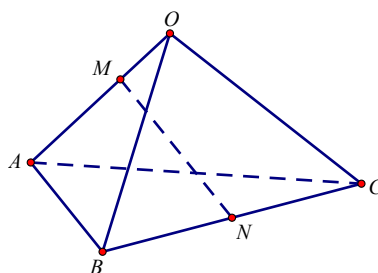
B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \left| -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \right|$$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{1}{9}OA^2 + \frac{1}{4}OB^2 + \frac{1}{4}OC^2 - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{36}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{MN}| = \frac{5}{6}.$$

Câu 20: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $1 < a \leq b \leq a^4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left[\log_a \left(\frac{a^2}{b} \right) \right]^3 - 3 \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{a} \right).$$

A. -18.

B. 6.

C. -26.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \left[\log_a \left(\frac{a^2}{b} \right) \right]^3 - 3 \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{a} \right) = (2 - \log_a b)^3 - 6(\log_a b - 1).$$

$$\text{Do } 1 < a \leq b \leq a^4 \Rightarrow 1 \leq \log_a b \leq 4.$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b \Rightarrow P = -t^3 + 6t^2 - 18t + 14, \quad t \in [1; 4].$$

$$\text{Ta có: } P' = -3t^2 + 12t - 18 < 0, \quad \forall t \in [1; 4], \text{ do đó hàm } P(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } [1; 4]$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = P(4) = -26.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; -1; 2)$, $B(4; 3; -2)$ và $C(5; -1; 6)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Chu vi tam giác ABC là 20.

b) Độ dài đường cao AH của tam giác ABC là $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

c) Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(\frac{16}{5}; -1; \frac{18}{5}\right)$.

d) Điểm $M(a; b; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $2MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn $a + b = 1$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} = (2; 4; -4) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6.$$

$$\overrightarrow{AC} = (3; 0; 4) \Rightarrow AC = 5; \quad \overrightarrow{BC} = (1; -4; 8) \Rightarrow BC = 9.$$

$$\text{Do đó chu vi tam giác } ABC \text{ là } 2p = AB + BC + CA = 20.$$

Vậy a) đúng.

$$\text{b) Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-CA)(p-AB)} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

Vậy b) sai.

$$\text{c) Ta có } BA = 6, \quad BC = 9.$$

Gọi $D(x; y; z)$ là chân đường phân giác trong hạ từ B xuống AC .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{DA} = -\frac{BA}{BC} \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{6}{9} \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{DC}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{DA} = (2-x; -1-y; 2-z) \text{ và } \overrightarrow{DC} = (5-x; -1-y; 6-z) \text{ nên } D\left(\frac{16}{5}; -1; \frac{18}{5}\right).$$

Vậy c) đúng.

$$\text{d) Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } 2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}. \text{ Suy ra } I = \left(4; -5; \frac{34}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } 2MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2 &= 2.IA^2 - 3.IB^2 + 4.IC^2 + 2.\overrightarrow{MI} \cdot (2.\overrightarrow{IA} - 3.\overrightarrow{IB} + 4.\overrightarrow{IC}) + 3MI^2 \\ &= 2.IA^2 - 3.IB^2 + 4.IC^2 + 3.MI^2 \end{aligned}$$

Do đó $2MA^2 - 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất.

Do M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên M là hình chiếu vuông góc của I trên (Oxy) hay $M(4; -5; 0)$.

Suy ra $a = 4; b = -5 \Rightarrow a + b = -1$.

Vậy **d)** sai.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 6 và O là giao điểm của AC và BD . Trong các mặt phẳng chứa đường thẳng CD' , gọi (α) là mặt phẳng tạo với $mp(BDD'B')$ một góc nhỏ nhất; đường thẳng $\Delta = (\alpha) \cap (BDD'B')$; điểm $E = \Delta \cap BD$. Kẻ $OH \perp \Delta$ tại H . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

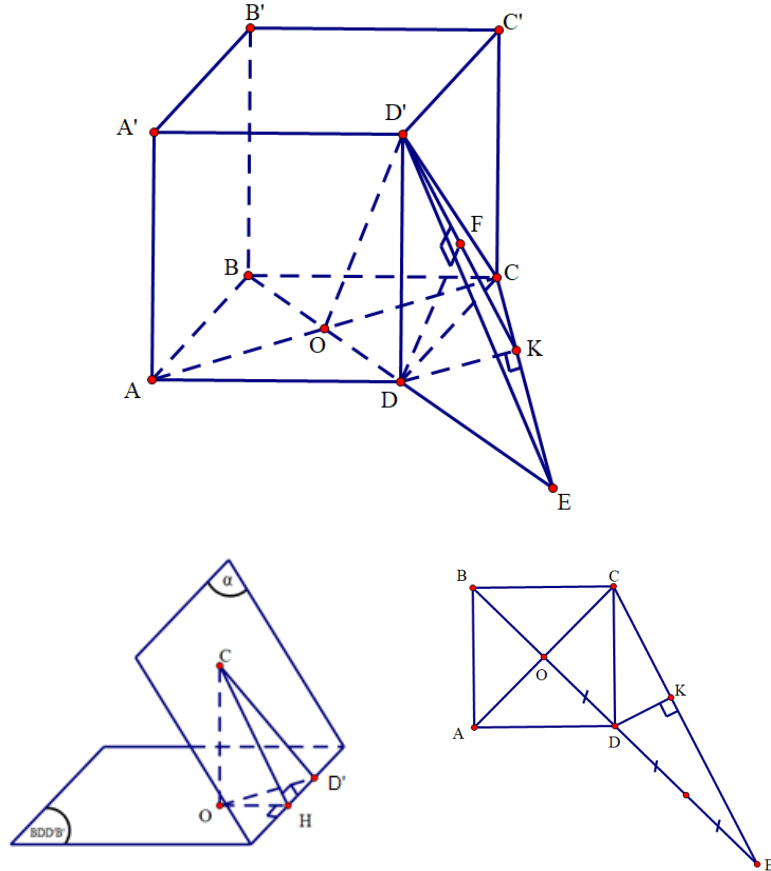
a) Góc giữa (α) và $(BDD'B')$ là góc $\widehat{OHC}$.

b) $DE = 6\sqrt{2}$.

c) Thể tích tứ diện $C'BCE$ là $V = 72$.

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{6}$.

Lời giải



a) $\Delta = (\alpha) \cap (BDD'B')$.

Ta có $CO \perp (BDD'B') \Rightarrow CO \perp \Delta$.

Kẻ $OH \perp \Delta \Rightarrow CH \perp \Delta \Rightarrow \varphi = ((\alpha), (BDD'B')) = (\widehat{OH, CH}) = \widehat{OHC}$ là góc giữa (α) và $(BDD'B')$.

Vậy **a)** đúng.

* Ta có: $\sin \varphi = \frac{OC}{CH} \geq \frac{OC}{CD'} = \sin \widehat{OD'C} \Rightarrow \min \varphi = \widehat{OD'C}$, đạt được khi $\Delta \perp OD'$.

Gọi $E = \Delta \cap BD \Rightarrow \Delta D'OE$ vuông tại D' và $(\alpha) \equiv (ED'C)$.

b) Do $\Delta D'OE$ vuông tại D và có đường cao $D'D$ nên

$$OD.OE = OD'^2 \Rightarrow 3\sqrt{2}.OE = (3\sqrt{6})^2 \Rightarrow OE = 9\sqrt{2} \Rightarrow DE = 6\sqrt{2}.$$

Vậy **b)** đúng.

c) Do E đối xứng với B qua D nên $S_{\triangle BCE} = 2.S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABCD}$

$$\Rightarrow V_{C'BCE} = \frac{1}{3}CC'.S_{\triangle BCE} = \frac{1}{3}CC'.S_{\triangle ABCD} = \frac{6^3}{3} = 72.$$

Vậy c) đúng.

d) Có $d(A, (\alpha)) = 2d(O, (\alpha)) = 2 \cdot \frac{3}{2}d(D, (\alpha)) = 3d(D, (\alpha)).$

Kẻ $DK \perp CE, (K \in CE)$; kẻ $DF \perp D'K, (F \in D'K) \Rightarrow DF \perp (\alpha) \Rightarrow d(D, (\alpha)) = DF.$

Ta có $DK = \frac{6}{\sqrt{5}}; DD' = 6 \Rightarrow DF = \sqrt{6} \Rightarrow d(A, (\alpha)) = 3.DF = 3\sqrt{6}.$

Vậy d) sai.

Câu 3: Một hộp chứa 45 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 45. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Số cách lấy được cả 3 quả cầu đánh số chẵn bằng 1540.

b) Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số lẻ bằng $\frac{1}{2}.$

c) Xác suất để tổng 3 số ghi trên 3 quả cầu là số chia hết cho 4 bằng $\frac{323}{1290}.$

d) Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu là một số chia hết cho 8 bằng $\frac{523}{1290}.$

Lời giải

Trong 45 quả cầu có 22 quả cầu đánh số chẵn và 23 quả cầu đánh số lẻ.

a) Số cách lấy ra cả 3 quả cầu đánh số chẵn từ trong hộp: $C_{22}^3 = 1540.$

Vậy a) đúng.

b) Để tổng của 3 số ghi trên 3 quả cầu là số lẻ thì cả 3 số ghi trên 3 quả cầu đều là lẻ hoặc có 2 quả ghi số chẵn và 1 quả ghi số lẻ.

+) Cả 3 quả ghi số lẻ: có C_{23}^3 cách chọn

+) Có 2 quả ghi số chẵn và 1 quả ghi số lẻ: có $C_{22}^2.C_{23}^1$ cách chọn

Vậy xác suất để tổng 3 số là số lẻ bằng: $\frac{C_{23}^3 + C_{22}^2.C_{23}^1}{C_{45}^3} = \frac{322}{645}.$

Vậy b) sai.

c) Nhận thấy: trong các số từ 1 đến 45 có: 11 số chia hết cho 4, 12 số chia 4 dư 1, 11 số chia 4 dư 2 và 11 số chia 4 dư 3.

Để chọn được 3 quả cầu mà tổng của 3 số ghi trên đó là số chia hết cho 4 ta có các trường hợp sau:

TH1: Chọn cả 3 quả cầu đều ghi số chia hết cho 4, có: $C_{11}^3.$

TH2: Chọn 1 quả ghi số chia hết cho 4, 1 quả ghi số chia 4 dư 1 và 1 quả ghi số chia 4 dư 3: có $C_{11}^1.C_{12}^1.C_{11}^1.$

TH3: Chọn 1 quả ghi số chia hết cho 4, 2 quả ghi số chia 4 dư 2: có $C_{11}^1.C_{11}^2.$

TH4: Chọn 2 quả ghi số chia 4 dư 1 và 1 quả ghi số chia 4 dư 2: có $C_{12}^2.C_{11}^1.$

TH5: Chọn 2 quả ghi số chia 4 dư 3 và 1 quả ghi số chia 4 dư 2: có $C_{11}^2.C_{11}^1.$

Vậy xác suất chọn được 3 quả cầu mà tổng của 3 số là số chia hết cho 4 là

$$\frac{C_{11}^3 + C_{11}^1.C_{12}^1.C_{11}^1 + C_{11}^1.C_{11}^2 + C_{12}^2.C_{11}^1 + C_{11}^2.C_{11}^1}{C_{45}^3} = \frac{323}{1290}.$$

Vậy c) đúng.

d) Chia 45 quả cầu thành 4 nhóm:

Nhóm 1: Gồm 23 quả cầu mang số lẻ.

Nhóm 2: Gồm 11 quả cầu mang số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.

Nhóm 3: Gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8.

Nhóm 4: Gồm 5 quả cầu mang số chia hết cho 8.

Đề tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số không chia hết cho 8 thì có 4 trường hợp sau:

TH1: 1 quả nhóm 1 và 2 quả nhóm 2 có: $C_{23}^1 \cdot C_{11}^2$ cách lấy.

TH2: 2 quả nhóm 1 và 1 quả nhóm 2 có: $C_{23}^2 \cdot C_{11}^1$ cách lấy.

TH3: 2 quả nhóm 1 và 1 quả nhóm 3 có: $C_{23}^2 \cdot C_6^1$ cách lấy.

TH4: 3 quả nhóm 1: C_{23}^3 cách lấy.

Vậy xác suất cần tính: $P = 1 - \frac{C_{23}^1 \cdot C_{11}^2 + C_{23}^2 \cdot C_{11}^1 + C_{23}^2 \cdot C_6^1 + C_{23}^3}{C_{45}^3} = \frac{623}{1290}$.

Vậy **d)** sai.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$ có đồ thị là đường cong (C). Giả sử A, B là 2 điểm thuộc 2 nhánh

của đồ thị (C) sao cho AB song song với trục hoành. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Trên đồ thị (C) của hàm số có 8 điểm mà hoành độ và tung độ đều là số nguyên.

b) Có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 7x + 18$.

c) Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng $2\sqrt{5}$.

d) Đường tròn (T): $(x+1)^2 + (y+1)^2 = R^2$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $R^2 > 12(\sqrt{2} - 1)$.

Lời giải

a) Ta có $y = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1} = x - \frac{6}{x + 1}$

Khi đó

$$x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 : (x+1) \Leftrightarrow x+1 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\} \Leftrightarrow x \in \{-7; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 5\}$$

Vậy có 8 điểm mà toạ độ là những số nguyên.

Vậy **a)** đúng.

b) Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 7$.

Giả sử $M(a; b)$ là tiếp điểm. Khi đó

$$y'(a) = 7 \Leftrightarrow 1 + \frac{6}{(a+1)^2} = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; -6) \\ M(-2; 4) \end{cases}$$

+ Phương trình tiếp tuyến tại $M(0; -6)$: $y = 7x - 6$.

+ Phương trình tiếp tuyến tại $M(-2; 4)$: $y = 7(x + 2) + 4 = 7x + 18$ (loại)

Hay có 1 tiếp tuyến thỏa mãn.

Vậy **b)** sai.

c) Giả sử phương trình AB là $y = a$. Hoành độ A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 1} = a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - (a-1)x - a - 6 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \Delta = a^2 + 2a + 25 > 0 \\ (-1)^2 + (a-1) - a - 6 = -6 \neq 0 \end{cases}$$

nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác -1

$$\text{Khi đó } AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{a^2 + 2a + 25} = \sqrt{(a+1)^2 + 24} \geq 2\sqrt{6}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Hay giá trị nhỏ nhất của AB bằng $2\sqrt{6}$ khi $a = -1$.

Vậy **c)** sai.

d) Đường tròn (T) có tâm $I(-1; -1)$ là giao của 2 đường tiệm cận của đồ thị (C) . Nên I là tâm đối xứng của (C) . Gọi $A\left(-1+a; a-1-\frac{6}{a}\right); a > 0$ là điểm thuộc nhánh bên phải tiệm cận đứng của (C) .

(T) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $R > IA_{\min}$.

$$\text{Ta có: } IA = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{6}{a}\right)^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{36}{a^2} - 12} \geq \sqrt{2\sqrt{2a^2 \cdot \frac{36}{a^2}} - 12} = 2\sqrt{3\sqrt{2} - 3}$$

$$IA_{\min} = 2\sqrt{3\sqrt{2} - 3} \Leftrightarrow 2a^2 = \frac{36}{a^2} \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{18}.$$

$$\Rightarrow R > 2\sqrt{3\sqrt{2} - 3} \Leftrightarrow R^2 > 12(\sqrt{2} - 1) \text{ thì đường tròn } (T) \text{ cắt đồ thị } (C) \text{ tại 4 điểm phân biệt.}$$

Vậy **d)** đúng.

Câu 5: Tại một trường THPT, để khảo sát năng lực học môn Toán của hai lớp 12E và 12F, giáo viên đã cho học sinh ở hai lớp làm bài kiểm tra khảo sát đầu năm, thống kê điểm của học sinh được cho trong bảng sau:

Lớp điểm thi	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
Số hs lớp 12E	3	6	12	24	5
Số hs lớp 12F	4	5	16	18	7

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Dựa vào điểm trung bình môn Toán ta đánh giá được lớp 12E học tốt môn Toán hơn lớp 12F.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu thống kê điểm của lớp 12F nhỏ hơn 2,9.

c) Điểm thi có số học sinh đạt được nhiều nhất ở lớp 12E nhỏ hơn ở lớp 12F.

d) Dựa vào độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm, ta thấy rằng lớp 12E học đều hơn lớp 12F.

Lời giải

a) Điểm trung bình của lớp 12E: $\overline{x_E} = \frac{1}{50}(3.1 + 6.3 + 12.5 + 24.7 + 5.9) = 5,88.$

Điểm trung bình của lớp 12F: $\overline{x_F} = \frac{1}{50}(4.1 + 5.3 + 16.5 + 18.7 + 7.9) = 5,76.$

$$\Rightarrow \overline{x_E} > \overline{x_F}$$

Do đó dựa vào điểm trung bình ta thấy học sinh lớp 12E học tốt hơn học sinh lớp 12F.

Vậy **a)** đúng.

b) Tìm khoảng tứ phân vị của MSLGN lớp 12F:

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[4; 6)$, do đó:

$$Q_1 = 4 + \frac{\frac{50}{4} - 9}{16} \cdot (6 - 4) = \frac{71}{16}.$$

- Nhóm chứa tứ phân vị thứ 3 là nhóm $[6; 8)$, do đó:

$$Q_3 = 6 + \frac{3 \cdot \frac{50}{4} - 25}{18} \cdot (8 - 6) = \frac{133}{18}.$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = \frac{133}{18} - \frac{71}{16} = \frac{425}{144} \approx 2,95.$

Vậy **b)** sai.

c) Điểm học sinh đạt được nhiều nhất ở mỗi lớp là một của mẫu số liệu ghép nhóm của mỗi lớp được cho bằng trên.

- Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12E là nhóm $[6; 8)$

$$M_o = 6 + \frac{24-12}{24-12+24-5} \cdot (8-6) = \frac{210}{31} \approx 6,77.$$

- Nhóm chứa một của mẫu số liệu thống kê ghép nhóm ở lớp 12F là nhóm [6;8)

$$M_o = 6 + \frac{18-16}{18-16+18-7} \cdot (8-6) = \frac{82}{13} \approx 6,31.$$

Vậy **c)** sai.

d) - Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12E:

$$s_E = \sqrt{S_E^2} = \sqrt{\frac{1}{50}(3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 3^2 + 12 \cdot 5^2 + 24 \cdot 7^2 + 5 \cdot 9^2) - 5,88^2} \approx 2,05$$

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12F:

$$s_F = \sqrt{S_F^2} = \sqrt{\frac{1}{50}(4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 3^2 + 16 \cdot 5^2 + 18 \cdot 7^2 + 7 \cdot 9^2) - 5,76^2} \approx 2,19$$

Ta thấy độ lệch chuẩn ở mẫu số liệu lớp 12E nhỏ hơn độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12F. Do đó lớp 12E học đều môn Toán hơn lớp 12F.

Vậy **d)** đúng.

Câu 6: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 115 + 20\sin(180\pi t)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Chu kỳ của hàm $P(t)$ là 90.

b) Số lần huyết áp tâm thu xảy ra trong khoảng thời gian một giờ đồng hồ là 5000.

c) Chỉ số huyết áp là 135/95.

d) Trong một phút, số lần mà tốc độ thay đổi huyết áp bằng 1800π ($mmHg/phút$) là 180.

Lời giải

a) Chu kỳ của hàm số $P(t)$ là $\frac{2\pi}{180\pi} = \frac{1}{90}$.

Vậy **a)** sai.

b) Dựa vào hàm số $P(t)$ ta thấy: huyết áp cao nhất là 135 $mmHg$

$$\text{hay } P(t) = 135 \Leftrightarrow 115 + 20\sin(180\pi t) = 135 \Leftrightarrow \sin(180\pi t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 180\pi t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{360} + \frac{k}{90} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Xét } 0 \leq t \leq 60 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{360} + \frac{k}{90} \leq 60 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq 5400 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 5399\} \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 1 giờ đồng hồ số lần huyết áp cao nhất (huyết áp tâm thu) là 5400 lần.

Vậy **b)** sai.

c) Vì $-1 \leq \sin(180\pi t) \leq 1$ nên $95 \leq 115 + 20\sin(180\pi t) \leq 135$.

$P(t)$ lớn nhất bằng 135; $P(t)$ nhỏ nhất bằng 95 nên chỉ số huyết áp là 135/95.

Vậy **c)** đúng.

d) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow P'(t) = 1800\pi \Leftrightarrow 3600\pi \cdot \cos(180\pi t) = 1800\pi$

$$\Leftrightarrow \cos(180\pi t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 180\pi t = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{540} + \frac{k}{90} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{540} + \frac{k}{90} \leq 1 \\ 0 \leq -\frac{1}{540} + \frac{k}{90} \leq 1 \end{cases} \xRightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k \in \{0; 1; 2; \dots; 89\} \\ k \in \{1; 2; 3; \dots; 90\} \end{cases} \Rightarrow \text{có 180 giá trị của } t. \text{ Vậy d) đúng.}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 3$ có nghiệm $x \in [-2; 1]$?

Lời giải

TL: 11.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 3$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: PT $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-2; 1]$.

Ta có: $h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)[3f^2(x) + 1] + 3x^2$

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 4x + 6 > 0, \forall x \in [-2; 1] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-2; 1]$.

$\Rightarrow$ hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-2; 1]$ nên

$$\min_{[-2; 1]} h(x) = h(-2) = m - 10, \quad \max_{[-2; 1]} h(x) = h(1) = m + 1343$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-2; 1]} h(x) \cdot \max_{[-2; 1]} h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2) \leq 0 \Leftrightarrow (m - 10)(m + 1343) \leq 0 \Leftrightarrow -1343 \leq m \leq 10$$

Do m nguyên không âm nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{0; 1; 2; \dots; 10\}$.

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên không âm của m thỏa mãn.

Câu 2: Có một hòn đảo nằm trong một vịnh biển, giả sử rằng đường bao sát biển của hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy là một phần bên phải trục tung của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ và giả sử một con đường trong đất liền chạy trên một đường thẳng có phương trình $y = -9x + 45$ như hình vẽ, với đơn vị của hệ trục là 100m. Tập đoàn đầu tư du lịch S muốn làm một cây cầu vượt biển có dạng một đoạn thẳng nối từ con đường trong đất liền ra hòn đảo để khai thác du lịch sinh thái. Tính độ dài ngắn nhất (đơn vị: mét) của cây cầu cần làm với kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Lời giải

TL: 188

Gọi $M(x_0; y_0), x_0 > 0$, là điểm nằm trên đường bao sát biển của hòn đảo (thuộc đồ thị hàm số bậc ba đã cho) để từ đó xây dựng cây cầu nối với con đường trong đất liền.

Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M , khi đó, để độ dài của cây cầu ngắn nhất thì Δ phải song song với con đường trong đất liền.

Đường thẳng $y = 45 - 9x$ có hệ số góc $k = -9$, do đó tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k = -9$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow M(3;1).$$

Nhận thấy: độ dài ngắn nhất của cây cầu bằng khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $(d): 9x + y - 45 = 0$.

$$d(M; d) = \frac{|9 \cdot 3 + 1 - 45|}{\sqrt{9^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{289}{82}}.$$

Vì đơn vị của hệ trục là $100m$ nên độ dài ngắn nhất của cây cầu là $100 \cdot \sqrt{\frac{289}{82}} \approx 188 \text{ (m)}$

Câu 3: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x > \frac{y}{3} > 0$ và $3x + y + 3xy \geq 7$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 9x^2 + \frac{1}{4}(3x + 5y)^2 - 2\ln(1 + 30xy - 5y^2)$ bằng $a - \ln b$ với a, b là các số tự nhiên. Tính giá trị $a - b$.

Lời giải

TL: -651

- Đặt $z = 3x$, ta được: $z > y > 0$ và $z + y + zy \geq 7$.

Khi đó: $1 + 30xy - 5y^2 = 1 + 10zy - 5y^2 > 1 + 10y^2 - 5y^2 = 5y^2 + 1 > 1$

và $P = z^2 + \frac{1}{4}(z + 5y)^2 - 2\ln(1 + 10zy - 5y^2)$.

Theo giả thiết ta được: $z \geq \frac{7-y}{y+1}$.

Ta có: $z^2 + \frac{1}{4}(z + 5y)^2 = \frac{5(z^2 + 2zy + 5y^2)}{4}$

Mà $z^2 + 2zy + 5y^2 = (z + y)^2 + 4y^2 \geq [8(z + y) - 16] + [8y - 4] = 8(z + 2y) - 20$

$\geq 8\left[\frac{7-y}{y+1} + 2y\right] - 20 = 8\left[\frac{8}{y+1} + 2(y+1)\right] - 44 \geq 64 - 44 = 20$

Nên $z^2 + \frac{(z + 5y)^2}{4} \geq 25$, dấu "=" xảy ra khi $z = 3, y = 1$ hay $x = y = 1$.

Mặt khác ta có

$10zy - 5y^2 - \frac{5(z^2 + 2zy + 5y^2)}{4} = \frac{-5(z - 3y)^2}{4} \leq 0$

(dấu "=" xảy ra khi $z = 3, y = 1$ hay $x = y = 1$)

$\Rightarrow 1 + 10zy - 5y^2 \leq z^2 + \frac{(z + 5y)^2}{4} + 1$.

Đặt $t = z^2 + \frac{(z + 5y)^2}{4} + 1 \geq 26 \Rightarrow \ln(1 + 10zy - 5y^2) \leq \ln t \Rightarrow P \geq t - 1 - 2\ln t$

Xét hàm số $f(t) = t - 1 - 2\ln t$ với $t \geq 26$.

Có: $f'(t) = 1 - \frac{2}{t} = \frac{t-2}{t} > 0, \forall t \geq 26 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[26; +\infty)$

$\Rightarrow P \geq f(t) \geq f(26) = 25 - 2\ln 26 = 25 - \ln 676$.

Do đó $P_{\min} = 25 - \ln 676$ khi $z = 3, y = 1$ hay $x = y = 1$

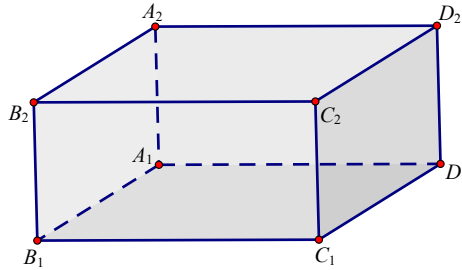
Vậy $a = 25, b = 676 \Rightarrow a - b = -651$.

Câu 4: Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài $30cm$, chiều rộng $20cm$, chiều cao $10cm$. Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai (không có nước) có dạng hình chóp cụt tứ giác đều

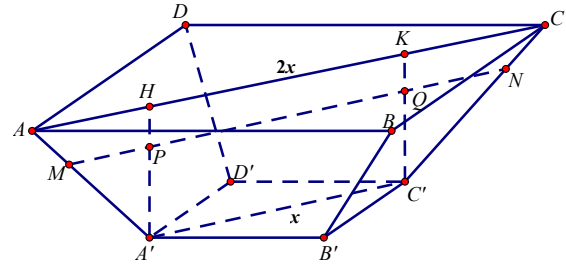
với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài x (cm), miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2x$ (cm). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{5}$ so với lượng nước ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai (đơn vị cm^3) với kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Lời giải

TL: 2314



Hình 4a



Hình 4b

- Ta có: 2 khay nước được mô hình hóa thành hình 4a và hình 4b

Thể tích nước ở khay thứ nhất trước khi đổ bằng: $30.20.10 = 6000 \text{ (cm}^3\text{)}$

Sau khi đổ, thể tích nước ở khay thứ hai bằng: $6000 \cdot \frac{1}{5} = 1200 \text{ (cm}^3\text{)}$

- Xét khay thứ 2 (hình 4b).

Gọi chiều cao của khay thứ hai là: h (cm).

Xét hình thang $ACC'A'$, lấy $MN \parallel AC$, MN là vị trí mực nước trong khay; H, K lần lượt là hình chiếu của A', C' trên AC ; P, Q lần lượt là giao điểm của $A'H$ và MN , $C'K$ và MN .

Theo giả thiết, mực nước (ngang với MN) trong khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay

đó, suy ra: $\frac{A'P}{A'H} = \frac{C'Q}{C'K} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MP}{AH} = \frac{NQ}{CK} = \frac{2}{3}$.

Ta có: $AH = CK = \frac{x}{2}$, $HK = x$, nên $MN = \frac{5x}{3}$. Thể tích của nước trong khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cụt tứ giác đều với đáy lớn nhận MN là đường chéo và đáy nhỏ nhận $A'C'$ là đường chéo, chiều cao bằng $\frac{2}{3}h$. Vì thể tích nước trong khay thứ hai bằng 1200 cm^3 nên ta có

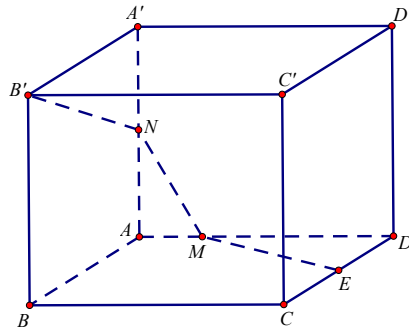
$$\frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{5}{3}x\right)^2}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{3}x\right)^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}} + \frac{x^2}{2} \right] \cdot \frac{2}{3}h = 1200 \Leftrightarrow \frac{49}{81}hx^2 = 1200 \Leftrightarrow x^2h = \frac{97200}{49}$$

Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng

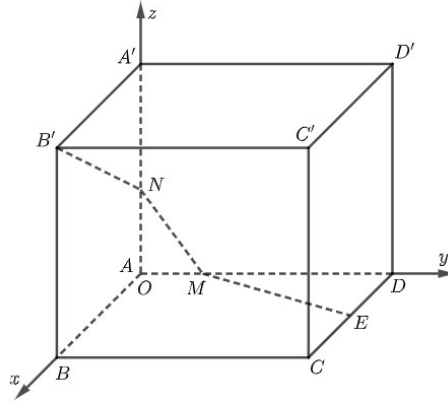
$$V = \frac{h}{3} \left[\frac{(2x)^2}{2} + \sqrt{\frac{(2x)^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}} + \frac{x^2}{2} \right] = \frac{7}{6}x^2h = \frac{7}{6} \cdot \frac{97200}{49} = \frac{16200}{7} \approx 2314 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy $V \approx 2314 \text{ cm}^3$.

Câu 5: Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh bằng 10 dm (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD , đi tiếp qua điểm N thuộc cạnh AA' rồi tới điểm B' . Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu dm ?



Lời giải



TL: 25

Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD và AA' (như hình vẽ). Ta có: $B'(10;0;10)$ và $E(5;10;0)$.

$N \in Oz \Rightarrow N(0;0;a); M \in Oy \Rightarrow M(0;b;0)$, (điều kiện $0 \leq a, b \leq 10$).

$$\Rightarrow B'N = \sqrt{100 + (a-10)^2}; MN = \sqrt{a^2 + b^2}; ME = \sqrt{25 + (b-10)^2}.$$

Ta có: $B'N + MN + ME = \sqrt{100 + (a-10)^2} + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{25 + (b-10)^2}$.

$$= \sqrt{(10-a)^2 + 10^2} + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{5^2 + (10-b)^2} \geq \sqrt{(10-a+a+5)^2 + (10+b+10-b)^2} = 25.$$

(Áp dụng bất đẳng thức vector $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$).

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{10-a}{10} = \frac{a}{b} = \frac{5}{10-b} = \frac{10-a+a+5}{10+b+10-b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2}; b = \frac{10}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng 25 dm.

Câu 6:

Cho dãy gồm 2021 số được sắp thứ tự tăng dần như sau: $C_4^4; C_5^4; \dots; C_{2023}^4; C_{2024}^4$. Lấy ngẫu nhiên ba số hạng liên tiếp từ dãy số đã cho, biết xác suất để tổng của ba số này là một số lẻ bằng $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a+b$.

Lời giải

TL: 3029

Với mỗi số hạng C_n^4 của dãy đã cho ta xét n thuộc một trong hai nhóm số sau:

- Nhóm 1: $8p+4; 8p+5; 8p+6; 8p+7$ với $p \geq 0$.

- Nhóm 2: $8q; 8q+1; 8q+2; 8q+3$ với $q \geq 1$.

a/ Xét n thuộc nhóm 1, chẳng hạn $n = 8p+4$ (xét tương tự cho các số còn lại trong nhóm 1)

Ta có:

$$C_n^4 = C_{8p+4}^4 = \frac{(8p+4)(8p+3)(8p+2)(8p+1)}{1.2.3.4} = \frac{(2p+1)(8p+3)(4p+1)(8p+1)}{3},$$

đây là số lẻ (từ số là tích của 4 số lẻ, mẫu số là số lẻ).

b/ Xét n thuộc nhóm 2, chẳng hạn $n = 8q+1$ (xét tương tự cho các số còn lại trong nhóm 2)

$$\text{Ta có } C_n^4 = C_{8q+1}^4 = \frac{(8q+1)8q(8q-1)(8q-2)}{1.2.3.4}$$

$$\text{Do } \begin{cases} 8q(8q-1)(8q-2):3 \\ 8q(8q-1)(8q-2)=16q(8q-1)(4q-1):16 \end{cases} \text{ nên } 8q(8q-1)(8q-2):48 \Rightarrow C_n^4 \text{ là số chẵn.}$$

Từ những điều ở trên ta thấy 4 số hạng đầu của dãy là các số lẻ, 4 số hạng kế tiếp là các số chẵn và cứ liên tiếp như thế.

- Ta thấy: trong 2021 số đã cho:

+) có 253 nhóm gồm các số lẻ (nhóm đầu tiên $C_4^4, C_5^4, C_6^4, C_7^4$ là nhóm các số lẻ và nhóm $C_{2020}^4, C_{2021}^4, C_{2022}^4, C_{2023}^4$ là nhóm các số lẻ);

+) có 252 nhóm các số chẵn (nhóm thứ hai $C_8^4, C_9^4, C_{10}^4, C_{11}^4$ và nhóm gần cuối $C_{2016}^4, C_{2017}^4, C_{2018}^4, C_{2019}^4$)

+) và số C_{2024}^4 là số chẵn.

- Ta có số cách lấy 3 số hạng liên tiếp trong dãy 2021 số hạng bằng 2019 cách nên số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 2019$.

- Gọi A là biến cố đề bài nêu, ta có các nhóm ba số hạng liên tiếp thỏa mãn biến cố A là:

+) 3 số liên tiếp thuộc 1 nhóm các số lẻ: mỗi nhóm có 2 cách chọn, nên có $253 \times 2 = 506$ cách

+) 1 số lẻ ở đầu (từ nhóm số lẻ thứ 2) hoặc cuối nhóm các số lẻ và 2 số chẵn liên tiếp ở cuối hoặc đầu nhóm các số chẵn, tương ứng: có 504 cách (3 số liên tiếp cuối cùng $C_{2022}^4, C_{2023}^4, C_{2024}^4$ không thỏa mãn).

Do đó $n(A) = 506 + 504 = 1010$.

Suy ra: xác suất cần tính là $P(A) = \frac{1010}{2019}$ hay $a = 1010, b = 2019$

Vậy $a + b = 3029$.

HẾT