

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 18/09/2024

Bài 1. (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = a \geq 2025, u_{n+1} = \frac{2024n+1}{2025n+1}(u_n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - 2024)$.

Bài 2. (5 điểm) Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khác hàm hằng thỏa mãn

$$f(xf(y) + y) + f(x + y) = 2f(y) + f(xy) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

a) Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ khi và chỉ khi $x = 0$.

b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF . Gọi A_b là điểm đối xứng của B qua F , A_c là điểm đối xứng của C qua E . Gọi X là giao điểm của DE và AB , Y là giao điểm của DF và AC .

a) Chứng minh rằng bốn điểm X, Y, A_b, A_c cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi B_c là điểm đối xứng của C qua D , B_a là điểm đối xứng của A qua F , C_a là điểm đối xứng của A qua E , C_b là điểm đối xứng của B qua D . Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $AA_bA_c, BB_cB_a, CC_aC_b$ bằng nhau.

Bài 4. (5 điểm) Với x và y nguyên, $x | y$ là ký hiệu y chia hết cho x .

a) Có tồn tại hay không các số nguyên a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn đồng thời ba tính chất: $a | 2^b - 1$, $b | 2^c - 1$ và $c | 2^a - 1$.

b) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $a^b | b^a - 1$.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chú ý : - Mọi cách giải đúng, ngắn gọn đều cho điểm tương ứng.
- Điểm toàn bài không qui tròn.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1a 2,0đ	Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta c/m $u_n \geq 2024 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.	0,5
	Khi $n = 1$, khẳng định đúng do giả thiết. Giả sử khẳng định đúng với n . Thế thì $u_{n+1} = \frac{2024n+1}{2025n+1}(u_n + 1) \geq \frac{2024n+1}{2025n+1}\left(2025 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{2024n+1}{n} > 2024 + \frac{1}{n+1}.$ Vì vậy khẳng định đúng với $n+1$. Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $u_n \geq 2024 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5
	Vì vậy, xét $u_{n+1} - u_n = \frac{2024n+1}{2025n+1} - \frac{n}{2025n+1}u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow (u_n)$ là dãy không tăng. Mà (u_n) bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L > 0$.	0,5
	Từ công thức truy hồi cho $n \rightarrow +\infty$ ta có $L = \frac{2024}{2025}(L+1) \Rightarrow L = 2024$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2024$.	0,5
Câu 1b 3,0đ	Bổ đề. Cho số thực $q \in (0; 1)$ và hai dãy số thực không âm $(c_n)_{n \geq 1}, (a_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn: $a_{n+1} \leq qa_n + c_n, \forall n \geq 1$. Khi đó nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.	0,5
	Chứng minh. Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$, nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $c_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$ Khi đó, với mọi $n \geq n_0 + 1$ ta có $a_n \leq qa_{n-1} + \varepsilon \leq q(qa_{n-2} + \varepsilon) + \varepsilon = q^2a_{n-2} + (q+1)\varepsilon \leq \dots$ $\leq q^{n-n_0}a_{n_0} + (q^{n-n_0-1} + \dots + q+1)\varepsilon < q^{n-n_0}a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{1-q} \quad (1)$	0,5
	Vì $q \in (0,1)$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n-n_0}a_{n_0} = 0$. Do đó tồn tại $n_1 \geq n_0$ sao cho $q^{n-n_0}a_{n_0} < \varepsilon, \forall n \geq n_1 \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $a_n < \frac{2-q}{1-q}\varepsilon, \forall n \geq n_1$. Do $(a_n)_{n \geq 1}$ là dãy số thực không âm nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.	0,5

	Trở lại bài toán. Đặt $v_n = n(u_n - 2024), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng kết quả ở câu a, ta có $u_n \geq 2024 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $v_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lại có từ công thức truy hồi suy ra $\frac{v_{n+1}}{n+1} + 2024 = \frac{2024n+1}{2025n+1} \left(\frac{v_n}{n} + 2025 \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{n+1} = \frac{2024n+1}{2025n+1} \cdot \frac{v_n}{n} + \frac{1}{2025n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow v_{n+1} = \frac{(n+1)(2024n+1)}{n(2025n+1)} v_n + \frac{n+1}{2025n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow v_{n+1} - 1 = \frac{(n+1)(2024n+1)}{n(2025n+1)} (v_n - 1) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5
	Mặt khác $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2024n+1)}{n(2025n+1)} = \frac{2024}{2025} < \frac{2025}{2026}$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{(n+1)(2024n+1)}{n(2025n+1)} < \frac{2025}{2026}, \forall n \geq n_0$ $\Rightarrow v_{n+1} - 1 < \frac{2025}{2026} (v_n - 1) + \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0.$	0,5
	Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, áp dụng bổ đề cho dãy các số thực không âm $(v_n - 1)_{n \geq n_0}$ ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - 2024) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.	0,5
Câu 2a 2,0đ	Đặt $g(x) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó từ phương trình hàm ban đầu ta có $g(xg(y) - x + y) + g(x + y) = 2g(y) + g(xy), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$ Kí hiệu $P(u, v)$ là phép thế $x = u, y = v$ vào (1). $P(0, 0) \Rightarrow 2g(0) = 3g(0) \Rightarrow g(0) = 0.$ $P(x, 0) \Rightarrow g(-x) + g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g \text{ là hàm lẻ.}$	0,5
	Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \neq 0$ sao cho $g(x_0) = 0$. $P(x, x_0)$ cho ta $g(x_0 - x) + g(x + x_0) = g(xx_0), \forall x \in \mathbb{R}$ Ở đây thay x bởi $-x$ ta có $g(x_0 + x) + g(x_0 - x) = g(-xx_0), \forall x \in \mathbb{R}$ Dẫn đến $g(xx_0) = g(-xx_0), \forall x \in \mathbb{R}$.	1,0
	Mà g là hàm lẻ nên $g(xx_0) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ vô lí vì } f \text{ không là hàm hằng.}$ Vậy $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0$.	0,5

Câu 2b 3,0đ	$P(x,x) \Rightarrow g(xg(x)) + g(2x) = 2g(x) + g(x^2), \forall x \in \mathbb{R}.$ Thay x bởi $-x$ và chú ý g là hàm lẻ ta có $g(xg(x)) - g(2x) = -2g(x) + g(x^2) \Rightarrow \begin{cases} g(xg(x)) = g(x^2) \\ g(2x) = 2g(x) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$	1,0
	Lại có $P(-2,2) \Rightarrow g(-2g(2)+4) = 2g(2) + g(-4).$ Mà $g(-4) = -g(4) = -2g(2)$ nên $g(-2g(2)+4) = 0$ $\Rightarrow -2g(2)+4=0$ (Áp dụng câu a) $\Rightarrow g(2)=2 \Rightarrow g(1)=1.$	0,5
	Do đó $P(x,1)$ cho ta: $g(x+1) = g(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)	0,5
	Mặt khác $g(-1) = -g(1) = -1$ nên $P(-1,y)$ cho ta $g(y - g(y) - 1) + g(y - 1) = 2g(y) + g(-y), \forall y \in \mathbb{R}.$ Áp dụng (2) ta suy ra $g(y - g(y)) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow y - g(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow g(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}.$	0,5
	$\Rightarrow f(y) = y - 1, \forall y \in \mathbb{R}.$ Thử lại ta thấy thoả mãn. Vậy: $f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,5
Câu 3a 2,0đ		

	Xét thể hình như hình vẽ. Các trường hợp khác tương tự. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Ta có $\widehat{HB_aB} = \widehat{HBA} = \widehat{HDE}$ $\Rightarrow$ Tứ giác B_aHDX nội tiếp $\Rightarrow \overline{AA_b} \cdot \overline{AX} = \overline{AH} \cdot \overline{AD}$.	1,0
	Tương tự, ta có $\overline{AA_c} \cdot \overline{AY} = \overline{AH} \cdot \overline{AD}$ $\Rightarrow \overline{AA_b} \cdot \overline{AX} = \overline{AA_c} \cdot \overline{AY} \Rightarrow X, Y, A_b, A_c$ đồng viên.	1,0
Câu 3b 3,0đ	Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC . Ta có tứ giác $ABDE$ nội tiếp $\Rightarrow \overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XD} \cdot \overline{XE}$ $\Rightarrow \wp_{X/(O)} = \wp_{X/(N)}$. Tương tự $\wp_{Y/(O)} = \wp_{Y/(N)}$	0,5
	$\Rightarrow XY$ là trục đẳng phương của (N) và $(O) \Rightarrow XY \perp ON$. Mà O, N, H thẳng hàng nên $XY \perp OH$. (1)	0,5
	Từ câu a ta có XY và A_bA_c đối song trong $\widehat{BAC}$. Do đó gọi O_a là tâm đường tròn AA_bA_c thì $XY \perp AO_a$. Kết hợp với (1) suy ra $AO_a \parallel OH$.	0,5
	Gọi I là trung điểm của AH thì I là tâm đường tròn đi qua A, H, E, F . Gọi P là giao điểm của (AEF) và (O) . Khi đó $\triangle PFB \sim \triangle PEC$ (g.g) mà A_b, A_c lần lượt đối xứng với B, C qua F, E nên suy ra $\triangle PA_bB \sim \triangle PA_cC$ (c.g.c).	0,5
	Từ đó ta có $\widehat{PA_bB} = \widehat{PA_cC} \Rightarrow \widehat{PA_bA} = \widehat{PA_cA}$ suy ra tứ giác APA_bA_c nội tiếp hay ba đường tròn $(O_a), (I), (O)$ đồng trục AP suy ra O, I, O_a thẳng hàng. Chứng tỏ OO_a chia đôi AH . Mà $AO_a \parallel OH$ nên AO_aHO là hình bình hành $\Rightarrow AO_a = OH$.	0,5
	Vì vậy, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AA_bA_c bằng OH . Chứng minh tương tự với hai tam giác BB_cB_a, CC_aC_b ta suy ra đpcm.	0,5
Câu 4a 2,0đ	Giả sử tồn tại các số nguyên $a, b, c > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thế thì do $a \mid 2^b - 1$ nên a lẻ. Tương tự, b, c là các số lẻ.	0,5
	Xét p là ước nguyên tố nhỏ nhất trong tất cả các ước nguyên tố của a, b, c . Không mất tính tổng quát coi $p \mid a$. Thế thì p lẻ. Đặt $h = \text{ord}_p 2$. Áp dụng định lý Fermat nhỏ ta suy ra $h \mid p - 1$.	0,5
	Ngoài ra từ giả thiết ta có $a \mid 2^b - 1 \Rightarrow h \mid b \Rightarrow h \mid (b, p - 1)$.	0,5
	Chú ý nếu $b, p - 1$ cùng chia hết cho số nguyên tố q nào đó thì q là một ước nguyên tố của b nhỏ hơn p , mâu thuẫn. Vì vậy $(b, p - 1) = 1$ $\Rightarrow h \mid 1 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow p \mid 2 - 1 = 1$, vô lí. Vậy không tồn tại các số nguyên $a, b, c > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,5

Câu 4b 3,0đ	Nếu $a=1$ hoặc $b=1$ thì hiển nhiên ta có $a^b \mid b^a - 1$. Xét $a, b > 1$. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của a. Thế thì $p \mid b^a - 1$ $\Rightarrow \begin{cases} (b, p) = 1 \\ \text{ord}_p b \mid a \end{cases}$. Hơn nữa theo định lý Fermat nhỏ ta có $\text{ord}_p b \mid p-1$ $\Rightarrow \text{ord}_p b \mid (a, p-1) = 1 \Rightarrow p \mid b-1$. Xét hai trường hợp:	0,5
	TH1. $p \geq 3$. Áp dụng bổ đề LTE ta có $v_p(b^a - 1) = v_p(b-1) + v_p(a)$ $\Rightarrow bv_p(a) = v_p(a^b) \leq v_p(b-1) + v_p(a) \Rightarrow v_p(a)(b-1) \leq v_p(b-1)$. Mà $v_p(a) \geq 1$ nên $b-1 \leq v_p(b-1) \Rightarrow p^{b-1} \leq b-1$. Tuy nhiên, bằng quy nạp ta chứng minh được $2^x > x, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow p^{b-1} > 2^{b-1} > b-1$, mâu thuẫn.	0,5
	TH2. $p = 2$. Áp dụng bổ đề LTE ta có $v_2(b^a - 1) = v_2(b^2 - 1) - 1 + v_2(a)$ $\Rightarrow bv_2(a) = v_2(a^b) \leq v_2(b^2 - 1) - 1 + v_2(a) \Rightarrow (b-1)v_2(a) \leq v_2(b^2 - 1) - 1$. Mà $v_2(a) \geq 1$ nên $b-1 \leq v_2(b^2 - 1) - 1$.	0,5
	Nếu $b \equiv 1 \pmod{4}$ thì $b-1 \leq v_2(b-1) \Rightarrow 2^{b-1} \leq b-1$. Tương tự TH1 ta có điều vô lí.	0,5
	Nếu $b \equiv 3 \pmod{4}$ thì $b-1 \leq v_2(b+1) \Rightarrow 2^{b-1} \leq b+1$. Dễ dàng kiểm tra $b \geq 4$ không thỏa nên $b \leq 3 \Rightarrow b = 3$. Ngoài ra, đẳng thức xảy ra nên $v_2(a) = 1$. Đặt $a = 2a_0$ trong đó a_0 lẻ $\Rightarrow (2a_0)^3 \mid 3^{2a_0} - 1 \Rightarrow a_0^3 \mid 9^{a_0} - 1$.	0,5
	Tương tự như trên, nếu $a_0 > 1$, ta có ước nguyên tố nhỏ nhất của a_0 là ước của $9-1 \Rightarrow 2 \mid a_0$, vô lí. Vì vậy $a_0 = 1 \Rightarrow a = 2$. Tóm lại các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn là $(1, k), (k, 1), (2, 3)$, trong đó $k \in \mathbb{N}^*$ bất kì.	0,5

HẾT

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi thứ hai: 19/9/2024

(Đề thi có 1 trang, gồm 3 bài)

Bài 5. (6 điểm) Đặt S là tập hợp các đa thức $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$ hệ số thực thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện sau:

- i) Với $i = 0, 1, \dots, 2n$, thì $2024 \leq a_i \leq 2025$.
- ii) Tồn tại một số thực α sao cho $P(\alpha) = 0$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một đa thức có bậc 4048 trong tập hợp S .

b) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại đa thức $f \in S$ thỏa mãn $\deg f = 2n$.

Bài 6. (7 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC lần lượt cắt AC, AB tại E, F . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại D . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là S .

a) Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng với O qua AC, AB . Chứng minh rằng sáu điểm A, S, E, F, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Qua A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với BC, CA, AB , chúng cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , I là điểm đối xứng với H qua O . Chứng minh rằng đường tròn Euler của các tam giác XYZ, HIX, HIY, HIZ đồng quy tại S .

Bài 7. (7 điểm) Với mỗi số nguyên dương n , đếm số cách điền các số $0, 1, \dots, 5$ vào các ô của bảng ô vuông $n \times n$ thỏa mãn:

a) Tổng các số trong mỗi hàng đều chia hết cho 2, còn tổng các số trong mỗi cột đều chia hết cho 3.

b) Tương tự câu a, nhưng thêm điều kiện tổng các số trong mỗi đường chéo chính chia hết cho 6, (mỗi bảng ô vuông $n \times n$ có hai đường chéo chính).

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI
QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2024 – 2025**

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Chú ý: - Mọi cách giải đúng, ngắn gọn đều cho điểm tương ứng.
- Điểm toàn bài không qui tròn.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 5a 2,0đ	Rõ ràng, với $n = 2024$, ta có thể chọn $a_{2k} = 2024, \forall 0 \leq k \leq n$ và $a_{2k+1} = 2025, \forall 0 \leq k < n$ thì $P(-1) = 0$.	2,0
Câu 5b 4,0đ	Ta sẽ chứng minh $n = 2024$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ có bậc $2n < 2.2024$ và đa thức này có một nghiệm thực. Ta có thể thấy $P(x) \geq 2024 > 0$ với $x \geq 0$, do đó nghiệm của đa thức trên là số âm. Nên đặt $Q(x) = P(-x)$ thì $Q(x)$ phải có một nghiệm thực dương.	0,5
	Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh rằng $Q(x) > 0$ với $x > 0$. Ta có $Q(1) = 2024(n+1) - 2025n = 2024 - n > 0$.	0,5
	Giả sử $x \neq 1$. Khi đó, $Q(x) > 0$ $\Leftrightarrow 2024(x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + 1) \geq 2025(x^{2n-1} + \dots + x)$ $\Leftrightarrow 2024 \cdot \left(\frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} \right) \geq 2025x \cdot \left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} \right) \Leftrightarrow \frac{x^{2n+2} - 1}{x(x^{2n} - 1)} \geq 1 + \frac{1}{2024}.$	0,5
	Vì $n < 2024$ nên chỉ cần chứng minh $\frac{x^{2n+2} - 1}{x(x^{2n} - 1)} \geq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, hay chứng minh $nx^{2n} + nx^{2n-2} + \dots + nx^2 + n \geq (n+1)x^{2n-1} + (n+1)x^{2n-3} + \dots + (n+1)x$, với mọi $x > 0$.	0,5
	Nhưng với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $nx^{2k+1} \leq \frac{n}{2}x^{2k} + \frac{n}{2}x^{2k+2}$ theo BĐT AM-GM.	0,5
	Ngoài ra, ta có $x^k + x^{2n-k} \leq x^{2n} + 1$ (điều này tương đương với $(x^i - 1)(x^{2n-i} - 1) \geq 0$ và rõ ràng là đúng). Cộng các bất đẳng thức loại thứ nhất cho tất cả các k từ 0 đến $n-1$ và loại thứ hai cho tất cả các k lẻ từ 1 đến $2n-1$ ta có đpcm.	0,5
	Do đó, với $n < 2024$ một đa thức như vậy không thể tồn tại. Vậy đáp số là $n = 2024$.	0,5

	Gọi R là trung điểm của XI. Thế thì $(SP,SO) \equiv (SH_a,SO) \equiv (H_aO,SH_a) \pmod{\pi}$. Xét phép đối xứng qua đường thẳng BC ta có $(H_aO,SH_a) \equiv (HO,HX) \pmod{\pi}$ $\Rightarrow (SP,SO) \equiv (HO,HX) \equiv (RP,RO) \pmod{\pi}$. Dẫn đến $S \in (OPR)$ là đường tròn Euler của tam giác HIX.	1,0																									
	Tương tự S cũng nằm trên đường tròn Euler của các tam giác HIY, HIZ. Hơn nữa, đường tròn Euler của tam giác XYZ là (ABC) đi qua S. Vậy ta có điều phải chứng minh.	1,0																									
Câu 7a 3,0đ	Xét bảng con $(n-1) \times (n-1)$ ở góc trên bên trái. Ta có số cách điền các số $0,1,\dots,5$ vào các ô của bảng này là $6^{(n-1)^2}$.	0,5																									
	Với mỗi cách điền như vậy, ô bên phải cùng của mỗi hàng trong $n-1$ hàng đầu tiên có 3 cách điền, ô bên dưới cùng của mỗi cột trong $n-1$ cột đầu tiên có 2 cách điền.	1,0																									
	Khi đó chỉ còn ô ở góc dưới bên phải chưa được điền số, gọi x là tổng $n-1$ số đã được điền ở hàng n, y là tổng của $n-1$ số đã được điền ở cột n, ta có duy nhất $c \in \{0,1,\dots,5\}$ sao cho $2 \mid c+x$ và $3 \mid c+y$. Vì vậy có duy nhất cách điền ô ở góc dưới bên phải.	1,0																									
	Ta suy ra số cách điền bảng thoả mãn là $6^{(n-1)^2} \cdot 3^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 6^{n(n-1)}$.	0,5																									
Câu 7b 4,0đ	Xét bảng con $(n-2) \times (n-2)$ ở giữa bảng (không tính hai hàng thứ 1 và thứ n, không tính hai cột thứ 1 và thứ n) như hình dưới đây: <table><tr><td>x_1</td><td>b_1</td><td>$\dots$</td><td>b_{n-2}</td><td>x_2</td></tr><tr><td>a_1</td><td></td><td>$\dots$</td><td></td><td>c_1</td></tr><tr><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td></tr><tr><td>a_{n-2}</td><td></td><td>$\dots$</td><td></td><td>c_{n-2}</td></tr><tr><td>x_4</td><td>d_1</td><td>$\dots$</td><td>d_{n-2}</td><td>x_3</td></tr></table>	x_1	b_1	$\dots$	b_{n-2}	x_2	a_1		$\dots$		c_1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{n-2}		$\dots$		c_{n-2}	x_4	d_1	$\dots$	d_{n-2}	x_3	1,0
	x_1	b_1	$\dots$	b_{n-2}	x_2																						
	a_1		$\dots$		c_1																						
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$																						
a_{n-2}		$\dots$		c_{n-2}																							
x_4	d_1	$\dots$	d_{n-2}	x_3																							
	Ta có $6^{(n-2)^2}$ cách điền các số $0,1,\dots,5$ vào các ô của bảng này.																										
	Đồng thời, các ô x_1,x_2 có 6^2 cách điền. Khi đó các ô x_3,x_4 có duy nhất một cách điền (do tổng các số trong mỗi đường chéo chính chia hết cho 6).	1,0																									
	Ngoài ra điền theo thứ tự: $a_1,a_2,\dots,a_{n-3}$ có 6^{n-3} cách điền, a_{n-2} có 2 cách điền, $b_1,b_2,\dots,b_{n-3}$ có 6^{n-3} cách điền, b_{n-2} có 3 cách điền, $c_1,c_2,\dots,c_{n-3}$ có 3^{n-3} cách điền, c_{n-2} có 1 cách điền, $d_1,d_2,\dots,d_{n-3}$ có 2^{n-3} cách điền, d_{n-2} có 1 cách điền.	1,5																									
	Suy ra bảng đã cho có $6^{(n-2)^2} \cdot 6^2 \cdot 6^{n-3} \cdot 2 \cdot 6^{n-3} \cdot 3 \cdot 3^{n-3} \cdot 2^{n-3} = 6^{(n+1)(n-2)}$ cách điền.	0,5																									

HẾT