

CHUYÊN ĐỀ 2: MŨ VÀ LÔGARIT

BÀI 2. LÔGARIT

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Biết khái niệm và tính chất của lôgarit.
- + Biết các quy tắc lôgarit và công thức đổi cơ số.
- + Biết các khái niệm lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên.

❖ Kỹ năng

- + Biết vận dụng định nghĩa để tính một số biểu thức chứa lôgarit đơn giản.
- + Biết vận dụng các tính chất của lôgarit vào các bài toán biến đổi, tính toán các biểu thức chứa lôgarit.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b , và ký hiệu là $\log_a b$.

2. Tính chất

Cho $a, b > 0, a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{array}{ll} \log_a a = 0; & \log_a a = 1 \\ a^{\log_a b} = b; & \log_a (a^\alpha) = \alpha \end{array}$$

3. Quy tắc tính lôgarit

a. Lôgarit của một tích

Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Chú ý: Định lý trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a (b_1 \dots b_n) = \log_a b_1 + \dots + \log_a b_n$$

trong đó $a, b_1, b_2, \dots, b_n > 0, a \neq 1$.

b. Lôgarit của một thương

Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \quad (a > 0, b > 0)$.

c. Lôgarit của một lũy thừa

Cho hai số dương $a, b, a \neq 1$. Với mọi α , ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

4. Đổi cơ số

Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; c \neq 1$, ta có:

Nhận xét: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b \quad (a, b > 0, a \neq 1)$

Ví dụ: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0.

Ví dụ:

$$\bullet \log_\pi \frac{1}{2} + \log_\pi 2 = \log_\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \log_\pi 1 = 0;$$

$$\begin{aligned} \bullet \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \dots + \log_3 \frac{7}{8} + \log_3 \frac{8}{9} \\ = \log_3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \right) \\ = \log_3 \frac{1}{9} = -2. \end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\bullet \log_5 \frac{125}{25} = \log_5 125 - \log_5 25 = 3 - 2 = 1;$$

$$\bullet \log_7 \frac{1}{49} = -\log_7 49 = -2.$$

Ví dụ:

$$\bullet \log_2 8^3 = 3 \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9;$$

$$\bullet \log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

Ví dụ:

$$\bullet \log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3};$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\bullet \log_3 27 = \frac{1}{\log_{27} 3} = 3;$$

Đặc biệt:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1);$$

$$\bullet \log_{128} 2 = \log_{2^7} 2 = \frac{1}{7} \log_2 2 = \frac{1}{7}.$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0).$$

5. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên

a. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Với $b > 0$, $\log_{10} b$

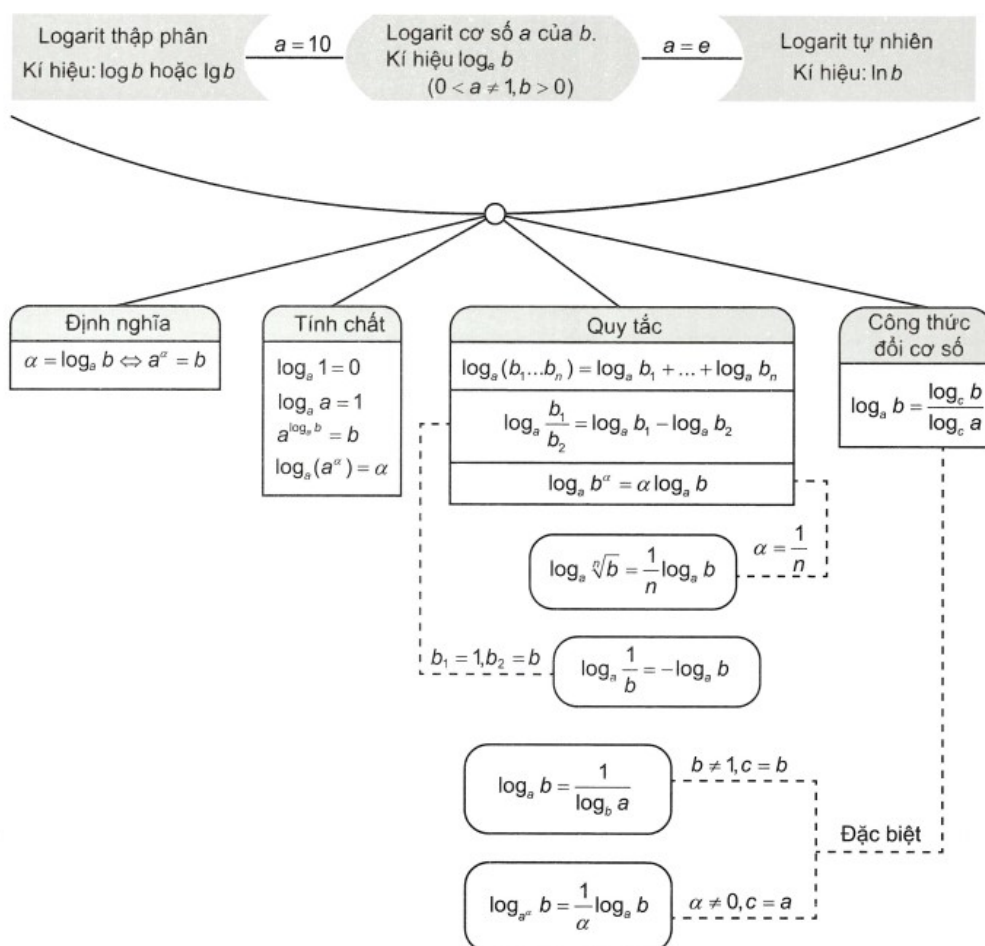
thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

b. Lôgarit tự nhiên

Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Với $b > 0$, $\log_e b$

được viết là $\ln b$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Biến đổi biểu thức lôgarit

Bài toán 1. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho $x, y > 0$ và $x^2 + 4y^2 = 12xy$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2(x + 2y) = \log_2 x + \log_2 y + 1$.

B. $\log_2\left(\frac{x + 2y}{4}\right) = \log_2 x - \log_2 y$.

C. $\log_2(x + 2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y)$.

D. $4 \log_2(x + 2y) = \log_2 x + \log_2 y$.

Hướng dẫn giải

Với $x, y > 0$, ta có: $x^2 + 4y^2 = 12xy \Leftrightarrow (x + 2y)^2 = 16xy$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + 2y)^2 = \log_2 16xy$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2(x + 2y) = 4 + \log_2 x + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + 2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y).$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

B. $\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

D. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$.

Hướng dẫn giải

Vì khi $a < b < 0$ không tồn tại $\ln a, \ln b$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho a, b, c, d là các số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$.

B. $a^c = b^d \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}$.

C. $a^c = b^d \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{c}{d}$.

D. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{d}{c}$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Các lôgarit có mặt trong các đáp án đều có cùng cơ số 2. Do đó ta cũng có thể dùng các quy tắc của lôgarit, biến đổi từng đáp án đến khi thấy xuất hiện biểu thức không còn lôgarit và so sánh với giả thiết ban đầu để tìm ra đáp án đúng.

Chú ý: Khi biến đổi biểu thức chứa lôgarit, ta cần thận trọng trong việc lựa chọn tính chất, công thức, quy tắc sao cho biểu thức luôn xác định với điều kiện ban đầu.

Do a, b, c, d là các số thực dương, khác 1 nên ta có:

$$a^c = b^d \Leftrightarrow c \ln a = d \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}.$$

Chọn B.

Ví dụ 4: Với các số thực dương a, b bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a - \log_2 b.$

B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - \log_2 b.$

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a + \log_2 b.$

D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = \log_2 (2a^3) - \log_2 (b) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3 \log_2 a - \log_2 b.$$

Chọn A.

Bài toán 2. Tính giá trị của biểu thức không có điều kiện. Rút gọn biểu thức.



Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ ta có thể biến đổi theo một trong các cách sau:

Ví dụ:

• $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_a a^\alpha = \alpha$;

• $\log_{32} 128 = \log_{2^5} 2^7 = \frac{7}{5}$;

• $a = b^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_{b^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}$;

• $32^{\log_2 9} = 2^{5 \log_2 9} = 9^5$.

• $a = c^\alpha$, $b = c^\beta$, từ đó ta suy ra

$$\log_a b = \log_{c^\alpha} c^\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

• Để tính $b^{\log_a c}$, ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó suy ra

$$b^{\log_a c} = a^{\alpha \log_a c} = c^\alpha$$



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho $a, b, c, d > 0$. Rút gọn biểu thức

$$S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} \text{ ta được}$$

A. $S = 1$.

B. $S = 0$.

C. $S = \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right)$.

D. $S = \ln(abcd)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} \right) = \ln 1 = 0.$$

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ bằng

A. 6

B. 24

C. 12.

D. 18.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \log_{\frac{1}{a^2}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \frac{3}{\frac{1}{a^2}} \cdot 4 \cdot \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 24.$$

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$.

Biến đổi biểu thức $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được

A. $P = -5 + 3\sqrt{3}$.

B. $P = -1 + \sqrt{3}$.

C. $P = -1 - \sqrt{3}$.

D. $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Chọn C.

Ví dụ 4 : Biến đổi biểu thức

Phương pháp giải trắc

nghiệm: Ta thấy các đáp án đều là các hằng số, như vậy ta dự đoán giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của a, b .

Sử dụng máy tính bỏ túi Casio, thay $a = b = 2$ vào biểu thức $\log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ rồi bấm =, được kết quả $P = 24$.

Chọn B.

Phương pháp giải trắc nghiệm:

Chọn $a = 2, b = 2^{\sqrt{3}}$.

Bấm máy ta được

$$P = -1 - \sqrt{3}.$$

Chọn C.

$$P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2} \quad (\text{với } 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$$

ta được

A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng các quy tắc biến đổi lôgarit ta có:

$$\begin{aligned} P &= \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2} \\ &= \frac{1}{2} [\log_a a^{10} + \log_a b^2] + 2 [\log_a a - \log_a \sqrt{b}] + 3 \cdot (-2) \log_b b \\ &= \frac{1}{2} [10 + 2 \log_a b] + 2 \left[1 - \frac{1}{2} \log_a b \right] - 6 = 1. \end{aligned}$$

Chọn B.

Bài toán 3. Tính giá trị biểu thức theo một biểu thức đã cho

Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ theo $m = \log_a x; n = \log_a y$ ta biến đổi **Ví dụ:** Cho $\log_a b = 2, \log_a c = -3$.

$$b = a^\alpha \cdot x^\beta \cdot y^\gamma.$$

$$\text{Tính giá trị của } \log_a \frac{a^2 b^3}{c^4}.$$

Từ đó suy ra $\log_a b = \log_a a^\alpha \cdot x^\beta \cdot y^\gamma = \alpha + m\beta + n\gamma$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{a^2 b^3}{c^4} &= \log_a a^2 + \log_a b^3 - \log_a c^4 \\ &= 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 20. \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\log_{12} 27 = a$. Khi đó giá trị của $\log_6 16$ được tính theo a là

A. $\frac{4(3-a)}{3+a}$. B. $\frac{4(3+a)}{3-a}$. C. $\frac{4a}{3-a}$. D. $\frac{2a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } a = \log_{12} 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 12} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{3-a}.$$

$$\text{Khi đó } \log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho $\lg 3 = a, \lg 2 = b$. Khi đó giá trị của $\log_{125} 30$ được tính theo a là:

- A. $\frac{4(3-a)}{3-b}$. B. $\frac{1+a}{3(1-b)}$. C. $\frac{a}{3+b}$. D. $\frac{a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \log_{125} 30 = \frac{\lg 30}{\lg 125} = \frac{1 + \lg 3}{3(1 - \lg 2)} = \frac{1 + a}{3(1 - b)}.$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Cho $a = \log_2 3; b = \log_3 5; c = \log_7 2$. Khi đó giá trị của $\log_{140} 63$ được tính theo a, b, c là:

- A. $\frac{2ac-1}{abc+2c+1}$. B. $\frac{abc+2c+1}{2ac+1}$.
C. $\frac{2ac+1}{abc+2c+1}$. D. $\frac{ac+1}{abc+2c+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \log_{140} 63 &= \frac{\log_2 63}{\log_2 140} = \frac{\log_2 3^2 \cdot 7}{\log_2 2^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2 \log_2 3 + \log_2 7}{2 + \log_2 5 + \log_2 7} \\ &= \frac{2 \log_2 3 + \frac{1}{\log_7 2}}{2 + \log_2 3 \cdot \log_3 5 + \frac{1}{\log_7 2}} = \frac{2a + \frac{1}{c}}{2 + ab + \frac{1}{c}} \\ &= \frac{1 + 2ac}{1 + 2c + abc}. \end{aligned}$$

Chọn C.

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

Phương pháp giải

Cơ sở lý thuyết: $A = B \Leftrightarrow A - B = 0$

+) Đây là một nhận định cực kì cơ bản nhưng dựa vào nó ta có thể có các kỹ thuật bấm rất nhanh gọn phù hợp với yêu cầu của thi trắc nghiệm.

+) Khi đề bài cho dưới dạng tính giá trị của biểu thức P và bên dưới cho 4 đáp án. Khi đó 1 trong 4 đáp án sẽ bằng P và ta sử dụng máy tính bỏ túi để tìm ra đáp án đúng một cách nhanh nhất.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Nếu $a = \log_{15} 3$ thì

Trắc nghiệm: Sử dụng máy tính: gán lần lượt $\log_2 3, \log_3 5, \log_7 2$ cho a, b, c . Lấy $\log_{140} 63$ trừ đi lần lượt các đáp án ở A, B, C, D. Kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.

A. $\log_{25} 15 = \frac{3}{5(1-a)}$.

B. $\log_{25} 15 = \frac{5}{3(1-a)}$.

C. $\log_{25} 15 = \frac{1}{2(1-a)}$.

D. $\log_{25} 15 = \frac{1}{5(1-a)}$.

Hướng dẫn giải

Tư duy tự luận thì ta làm như sau:

Ta có: $a = \log_{15} 3 = \frac{1}{\log_3(3.5)} = \frac{1}{1 + \log_3 5} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$.

Khi đó: $\log_{25} 15 = \frac{1}{2} \log_5 15 = \frac{1}{2} \log_5 (5.3) = \frac{1}{2} (1 + \log_5 3) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\log_3 5} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{1-a}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-a}{a} \right) = \frac{1}{2(1-a)}.$$

Chọn C.

Bây giờ, ta sẽ sử dụng casio - vinacal theo cơ sở lí thuyết đã trình bày ở trên để giải bài toán này.

Bước 1: Để dễ dàng bấm máy ta gán các giá trị $\log_{15} 3$ cho A.



Bấm $\log_{15} 3$.

Bước 2: Nhập biểu thức: $\log_{25} 15 - (...)$

Lần 1: Nhập $\log_{25} 15 - \frac{3}{3(1-A)} =$

Loại A.

Lần 2: Bấm để sửa biểu thức thành $\log_{25} 15 - \frac{5}{2(1-A)} =$

Loại B.

Lần 3: Bấm để sửa biểu thức thành $\log_{25} 15 - \frac{1}{2(1-A)} =$

Chọn C.

Ví dụ 2. Đặt $a = \log_2 3$, $b = \log_5 3$. Biểu diễn $\log_6 45$ theo a, b ta được

A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$.

B. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$.

D. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_2 3 = a \Leftrightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a}$ và $\log_5 3 = b \Leftrightarrow \log_3 5 = \frac{1}{b}$.

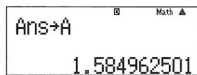
Khi đó:

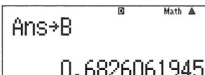
$$\log_6 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 9 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 2} = \frac{2 + \log_3 5}{1 + \log_3 2} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a(1+2b)}{b(1+a)} = \frac{a+2ab}{b+ab}.$$

Chọn C.

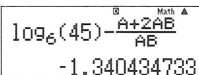
SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI (CASIO HAY VINACAL) ĐỂ GIẢI NHƯ SAU:

Bước 1: Để dễ dàng bấm máy ta gán các giá trị $\log_2 3$, $\log_5 3$ cho A, B.

Gán $\log_2 3 = A$. Bấm $\log_2 3$. 

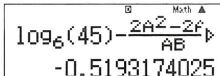
Gán $\log_5 3 = B$. Bấm $\log_5 3$. 

Bước 2: Nhập biểu thức: $\log_6 45 - (\dots)$

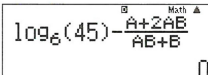
Lần 1: Nhập $\log_6 45 - \frac{A+2AB}{AB} =$ 

Loại A.

Lần 2: Bấm $\leftarrow$ để sửa biểu thức thành $\log_6 45 - \frac{2A^2-2AB}{AB} =$



Loại B.

Lần 3: Bấm $\leftarrow$ để sửa biểu thức thành $\log_6 45 - \frac{A+2AB}{AB+B} =$ 

Chọn C.

Ví dụ 3. Nếu $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$; $\log_2 3 = c$ thì $\log_{12} 35$ bằng

A. $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

B. $\frac{3b+3ac}{c+2}$.

C. $\frac{3b+2ac}{c+3}$.

D. $\frac{3b+3ac}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Để dễ dàng bấm máy ta gán các giá trị $\log_{27} 5$, $\log_8 7$, $\log_2 3$ cho A, B, C.

Gán $\log_{27} 5 = A$. **Bấm** $\log_{27} 5$.

Ans→A
0.4883245069

Gán $\log_8 7 = B$. **Bấm** $\log_8 7$.

Ans→B
0.935784974

Gán $\log_2 3 = C$. **Bấm** $\log_2 3$.

Ans→C
1.584962501

Bước 2: Nhập biểu thức: $\log_{12} 35 - (\dots)$

Lần 1: Nhập $\log_{12} 35 - \frac{3B+2AC}{C+2} =$

$\log_{12}(35) - \frac{3B+2AC}{C+2}$
0.2158951541

Loại A.

Lần 2: Bấm $\leftarrow$ để sửa biểu thức thành $\log_{12} 35 - \frac{3B+3AC}{C+2} =$

$\log_{12}(35) - \frac{3B+3AC}{C+2}$
0

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Với mọi số tự nhiên n . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ căn bậc hai}}$.

B. $n = \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ căn bậc hai}}$.

C. $n = 2 + \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ căn bậc hai}}$.

D. $n = 2 - \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ căn bậc hai}}$.

Câu 2: Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8\log_b(a^3\sqrt{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu

thức $P = \log_a(a^3\sqrt{ab}) + 2017$, ta được

A. $P = 2019$.

B. $P = 2020$.

C. $P = 2017$.

D. $P = 2016$.

Câu 3: Biết $\log_5 3 = a$, khi đó giá trị của $\log_3 \frac{27}{25}$ được tính theo a là

A. $\frac{3a-2}{a}$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $\frac{3}{2a}$.

D. $\frac{a}{3a-2}$.

Câu 4: Cho $a = \log_2 20$. Giá trị $\log_{20} 5$ theo a bằng

A. $\frac{5a}{2}$.

B. $\frac{a+1}{a}$.

C. $\frac{a-2}{a}$.

D. $\frac{a+1}{a-2}$.

Câu 5: Số thực x thỏa mãn: $\log x = \frac{1}{2} \log 3a - 2 \log b + 3 \log \sqrt{c}$ (a, b, c là các số thực dương). Hãy biểu diễn x theo a, b, c .

A. $x = \frac{\sqrt{3ac^3}}{b^2}$.

B. $x = \frac{\sqrt{3a}}{b^2 c^3}$.

C. $x = \frac{\sqrt{3a} \cdot c^3}{b^2}$.

D. $x = \frac{\sqrt{3ac}}{b^2}$.

Câu 6: Đặt $\log_3 5 = a$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_{15} 75 = \frac{a+1}{2a+1}$.

B. $\log_{15} 75 = \frac{2a+1}{a+1}$.

C. $\log_{15} 75 = \frac{2a-1}{a+1}$.

D. $\log_{15} 75 = \frac{2a+1}{a-1}$.

Câu 7: Cho a, b là các số thực dương, $a \neq 1$. Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2 \log b}{\log a} - 1}$, ta được

A. $P = |\log_a b|$.

B. $P = |\log_a b - 1|$.

C. $P = |\log_a b + 1|$.

D. $P = 0$.

Câu 8: Cho $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b, \log_2 3 = c$. Giá trị của $\log_{12} 35$ bằng

A. $\frac{3b+3ac}{c+2}$.

B. $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

C. $\frac{3b+2ac}{c+3}$.

D. $\frac{3b+3ac}{c+1}$.

Câu 9: Cho $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$.

Một học sinh tính: $P = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} b}$ theo các bước sau:

Bước I: $P = \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \dots + \log_b a^n$.

Bước II: $P = \log_b (a \cdot a^2 \cdot a^3 \dots a^n)$.

Bước III: $P = \log_b a^{1+2+3+\dots+n}$.

Bước IV: $P = n(n+1) \cdot \log_b a$.

Trong các bước trình bày, bước nào sai?

A. Bước III

B. Bước I

C. Bước II

D. Bước IV

Câu 10: Cho $\log_7 12 = x, \log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$, ta được

A. $S = 4$.

B. $S = 19$.

C. $S = 10$.

D. $S = 15$.

Câu 11: Cho $a, b > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tổng $a + b$ bằng

A. 12.

B. 10.

C. 16.

D. 18.

Câu 12: Biết rằng $\log_2 a, \log_3 b, \log_5 c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và có tổng bằng 14, đồng thời $\log_2 a^4, \log_3 b^2, \log_5 c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Giá trị của $P = a + b + c$ bằng

A. 125.

B. 390725.

C. 390625.

D. 390710.

Câu 13: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_9 y = \log_6 \left(\frac{xy}{4} + 1 \right)$. Giá trị của biểu thức

$$P = x^{\log_4 6} + y^{\log_9 6} \text{ bằng}$$

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 14: Cho $a = \log_{20} 15; b = \log_{30} 15$ biết $\log_{4000} 600 = \frac{ma + nb}{ab + pb + qa}$ và trong đó $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $S = m + n + p + q$ bằng

- A. $S = 1$. B. $S = 2$. C. $S = 3$. D. $S = 4$.

Câu 15: Cho $\frac{\log a}{p} = \frac{\log b}{q} = \frac{\log c}{r} = \log x \neq 0; \frac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo p, q, r .

- A. $y = q^2 - pr$. B. $y = \frac{p+r}{2q}$. C. $y = 2q - p - r$. D. $y = 2q - pr$.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức chưa lôgarit theo một biểu thức đã cho

Phương pháp giải

Thật vậy:

Để tính $\log_a b$ theo $m = \log_a x; n = \log_a y$, ta sẽ biến đổi $\log_a b = \log_a a^\alpha \cdot x^\beta \cdot y^\gamma$

$$b = a^\alpha \cdot x^\beta \cdot y^\gamma. \quad \quad \quad = \alpha + \beta \cdot \log_a x + \gamma \cdot \log_a y$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \log_a b = \log_a a^\alpha \cdot x^\beta \cdot y^\gamma = \alpha + m\beta + n\gamma. \quad \quad \quad = \alpha + m\beta + n\gamma.$$

Ví dụ mẫu

Phương pháp trắc nghiệm:

Ví dụ 1: Cho $\log_{12} 27 = a$. Khi đó giá trị của $\log_6 16$ tính theo a bằng

Sử dụng máy tính: gán $\log_{12} 27 = A$.

Lấy $\log_6 16$ trừ đi lần lượt các đáp số ở A, B, C, D kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.

Chọn A.

- A. $\frac{4(3-a)}{3+a}$. B. $\frac{4(3+a)}{3-a}$. C. $\frac{4a}{3-a}$. D. $\frac{2a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } a = \log_{12} 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 12} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{2a}{3-a}.$$

$$\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho $\log 3 = a, \log 2 = b$. Khi đó giá trị của $\log_{125} 30$ tính theo a là

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng máy tính: gán lần lượt $\log 3 = A; \log 2 = B$.

- A. $\frac{4(3-a)}{3-b}$. B. $\frac{1+a}{3(1-b)}$. C. $\frac{a}{3+b}$. D. $\frac{a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{125} 30 = \frac{\log 30}{\log 125} = \frac{1 + \log 3}{3(1 - \log 2)} = \frac{1 + a}{3(1 - b)}$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho $a = \log_2 3; b = \log_3 5; c = \log_7 2$. Khi đó giá trị của biểu thức $\log_{140} 63$ được tính theo a, b, c là

A. $\frac{2ac - 1}{abc + 2c + 1}$. B. $\frac{abc + 2ac + 1}{2ac + 1}$.

C. $\frac{2ac + 1}{abc + 2c + 1}$. D. $\frac{ac + 1}{abc + 2c + 1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{140} 63 = \frac{\log_2 63}{\log_2 140} = \frac{\log_2 3^2 \cdot 7}{\log_2 2^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 7}{2 + \log_2 5 + \log_2 7}$

$$= \frac{2\log_2 3 + \frac{1}{\log_7 2}}{2 + \log_2 3 \cdot \log_3 5 + \frac{1}{\log_7 2}} = \frac{2a + \frac{1}{c}}{2 + ab + \frac{1}{c}} = \frac{1 + 2ac}{1 + 2c + abc}$$

Chọn C.

Ví dụ 4. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$

Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3. B. $3 \cdot 2^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$. C. 4. D. 6.

Hướng dẫn giải

Ta xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x \log_2 x - \log_2^3 c$ với $x \in [1; 2]$.

Ta có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3 \log_2 x - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3 \log_2^2 x}{x \ln 2}$;

$$f''(x) = 6x - \frac{3}{x \ln 2} - \frac{6 \log_2 x}{x^2 \ln^2 2} + \frac{3 \log_2^2 x}{x^2 \ln 2}.$$

Vì $f'''(x) = 6 \left(1 - \frac{1}{x^3 \ln^3 2} \right) + \frac{3}{x^2 \ln 2} + \frac{6 \log_2 x (3 - \log_2 x)}{x^3 \ln^2 2} > 0 \quad \forall x \in [1; 2]$ nên

$$f''(x) \geq f''(1) \approx 1,67 > 0.$$

Lấy $\log_{140} 63$ trừ đi lần lượt các đáp án số ở A, B, C, D, kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng máy tính: gán lần lượt $\log_2 3 = A; \log_3 5 = B; \log_7 2 = C$.

Lấy $\log_{140} 63$ trừ đi lần lượt các đáp án số ở A, B, C, D, kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.

Như vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến và có nghiệm duy nhất trên $[1;2]$ vì $f'(1) < 0; f'(2) > 0$ và có đồ thị lõm trên $[1;2]$. Do đó ta có bảng biến thiên

x	1	x_0	2
$f(x)$	1	$f(x_0)$	1

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy rằng $f(x) \leq 1$ cho nên

$$P \leq 3 + \log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 4$$

Đồng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Chọn C.

Ví dụ 5. Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Với giá trị nào của m thì tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$?

A. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

B. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$ và $(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$.

C. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

D. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $4x + 4y - 4 \geq 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4x+4y-4 \geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 2 \quad (C_1).$$

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) (C_1) có tâm $I_1(2;2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

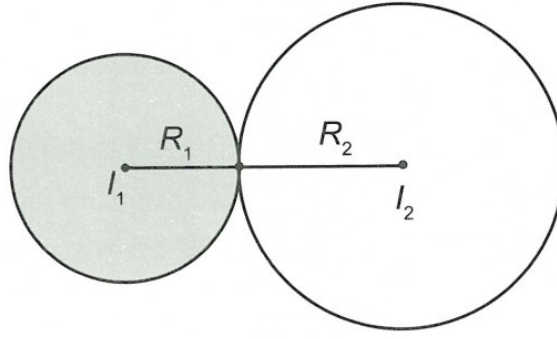
Mặt khác: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \quad (*)$.

Với $m = 0$ thì $x = -1; y = 1$ (không thỏa mãn $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$).

Với $m > 0$ thì (*) là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

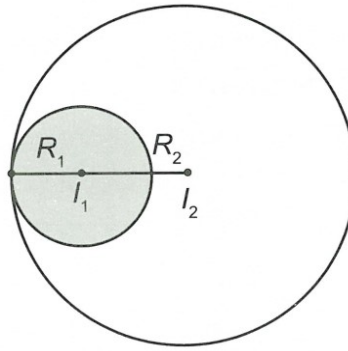
Để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

Trường hợp 1: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.



Khi đó: $R_1 + R_2 = I_1 I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

Trường hợp 2: (C_1) nằm trong (C_2) và hai đường tròn tiếp xúc trong.



Khi đó: $R_2 - R_1 = I_1 I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 6. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) \text{ bằng}$$

- A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 13$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2}{\log_a \frac{a}{b}}\right)^2 + 3(\log_b a - 1) \\ &= \left(\frac{2}{1 - \log_a b}\right)^2 + 3(\log_b a - 1). \end{aligned}$$

Đặt $\log_a b = t$ ($0 < t < 1$). Khi đó $P = \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{3}{t} - 3 = f(t)$ với $0 < t < 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{8}{(1-t)^3} - \frac{3}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	15	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $P_{\min} = 15$.

Chọn D.

Ví dụ 7. Cho hai số thực x, y thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 \geq 3 \text{ và } \log_{x^2+y^2} [x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2] \geq 2$$

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$.

Khi đó biểu thức $T = 2(M + m + 1)$ có giá trị gần nhất số nào sau đây?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

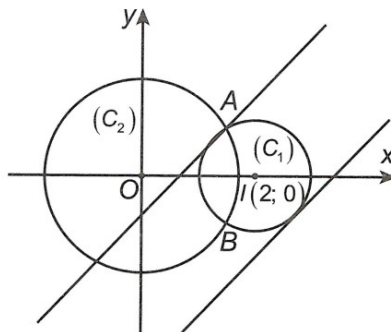
Hướng dẫn giải

Ta có $\log_{x^2+y^2} [x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2] \geq 2 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2} [(x^2 + y^2)(4x - 3)] \geq 2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(4x - 3) \geq (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \leq 1.$$

Tập hợp các số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 3 \\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ những điểm thuộc miền trong hình tròn (C_1) có tâm

$I(2; 0)$, bán kính $R_1 = 1$ và nằm ngoài hình tròn (C_2) có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{3}$.



Biểu thức: $P = x - y \Rightarrow x - y - P = 0$ là họ đường thẳng Δ song song với đường $y = x$.

Các giao điểm của hai hình tròn là $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng Δ đi qua A.

Khi đường thẳng Δ qua điểm A, ta có: $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - P_{\min} = 0 \Rightarrow P_{\min} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

P đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C_1) ta có:

$$d(I; \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|2 - P|}{\sqrt{1 + 1}} = 1 \Leftrightarrow P = 2 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow P_{\max} = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } T = 2(M + m + 1) = 2\left(2 + \sqrt{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) \approx 10.$$

Chọn D

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho $x \neq y; xy < 1$ thỏa mãn $3^{(x-y)^2} \log_2(x-y)^2 = 3^{2-2xy} \log_2(2-2xy)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ bằng

- A. 7. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{17}{2}$. D. 3.

Câu 2: Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ bằng

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 3: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = mn$ bằng

- A. $\frac{16875}{16}$. B. $\frac{4000}{27}$. C. 15625. D. 3456.

Câu 4: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + 2b + 3c$ bằng

- A. $3\sqrt{10}$. B. $12 + 2\sqrt{42}$. C. $12 + 2\sqrt{35}$. D. $6\sqrt{10}$.

Câu 5: Cho các số thực $a, b > 1$ thỏa mãn điều kiện $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng

- A. $\sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}$. B. $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$. C. $\frac{1}{2}(\log_3 2 + \log_2 3)$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}}$.

Câu 6: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$ bằng

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{10}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{3+\sqrt{3}}{30}$. D. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(x-3) + xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$ bằng

- A. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$. B. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$. C. $\frac{37-\sqrt{249}}{21}$. D. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$.

Câu 8: Cho $b > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a-b)^2 + (10^a - \log b)^2}$ bằng

- A. $\sqrt{2} \log(\ln 10)$. B. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$.
C. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} + \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$. D. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \ln \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$.

Câu 9: Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < b < a < 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a \frac{4(3b-1)}{9} + 8 \log_{\frac{b}{a}} a - 1$ bằng

- A. 6. B. $3\sqrt[3]{2}$. C. 8. D. 7.

Câu 10: Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất $P = x + y$ bằng

- A. $P_{\min} = 2\sqrt{2} + 3$. B. $P_{\min} = 6$. C. $P_{\min} = 2 + 3\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Câu 11: Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}} a - 3$ bằng

- A. $\min P = 13$. B. $\min P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. C. $\min P = 9$. D. $\min P = \sqrt[3]{2}$.

Câu 12: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y \leq \log_{\frac{1}{3}} (x + y^2)$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2x + 3y$ bằng

- A. $P_{\min} = 7 - 2\sqrt{10}$. B. $P_{\min} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. C. $P_{\min} = 7 + 3\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = 7 + 2\sqrt{10}$.

Câu 13: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$ bằng

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 14: Cho 2 số dương a và b thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của $S = a + b$ bằng

A. $\min S = 12$.

B. $\min S = 14$.

C. $\min S = 8$.

D. $\min S = 16$.

Câu 15: Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4) \dots (\log_3 n)}{9^n}$, với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Có bao nhiêu số n để $f(n) = a$.

A. 2.

B. vô số.

C. 1.

D. 4.

Câu 16: Cho $P = 9 \log_{\frac{1}{3}}^3 \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$ với $a \in \left[\frac{1}{27}; 3 \right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P . Giá trị của biểu thức $S = 4M - 3m$ bằng

A. 42.

B. 38.

C. $\frac{109}{9}$.

D. $\frac{83}{2}$.

Câu 17: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $b^2 = 3ab + 4a^2$ và $a \in [4; 2^{32}]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4} \log_2 \frac{b}{4}$. Tính tổng $T = M + m$.

A. $T = \frac{1897}{62}$.

B. $T = \frac{3701}{124}$.

C. $T = \frac{2957}{124}$.

D. $T = \frac{7}{2}$.

Câu 18: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn hệ thức: $2 \log_2 a - \log_2 b \leq \log_2(a + 6b)$. Giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \frac{ab - b^2}{a^2 - 2ab + 2b^2}$ bằng

A. $P_{\max} = \frac{2}{3}$.

B. $P_{\max} = 0$.

C. $P_{\max} = \frac{1}{2}$.

D. $P_{\max} = \frac{2}{5}$.

Câu 19: Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a + b + c$ là

A. 3.

B. $3.2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

C. 4.

D. 6.

Câu 20: Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}$$
 là

A. $P_{\min} = 20$.

B. $P_{\min} = 10$.

C. $P_{\min} = 18$.

D. $P_{\min} = 12$.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Biến đổi biểu thức chứa lôgarit

1-B	2-A	3-A	4-C	5-A	6-B	7-A	8-A	9-D	10-D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

11-D	12-D	13-C	14-D	15-C					
------	------	------	------	------	--	--	--	--	--

Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức chưa lôgarit theo một biểu thức đã cho

1-B	2-D	3-D	4-C	5-A	6-B	7-D	8-B	9-D	10-A
11-C	12-D	13-C	14-B	15-A	16-	17-B	18-C	19-C	20-A