

Họ và tên: SBD:.....

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 10$ trên đoạn $[0; 2]$

Câu 3 (1,0 điểm). Giải phương trình, bất phương trình:

a) $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 4 \sin x - 1$.

b) $2 \log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \leq 2$

Câu 4 (1,0 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2-6i$. Tìm môđun của số phức z .

b) Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A , tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5.

Câu 5 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos x + \sqrt{3 \sin x + 1}) dx$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, tam giác SAB cân tại S và SC tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA theo a .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(-1;-3;4)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. CMR mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB tiếp xúc với mặt cầu (S) . Xác định tọa độ của tiếp điểm.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi K là điểm đối xứng của A qua C . Đường thẳng đi qua K vuông góc với BC cắt BC tại E và cắt AB tại $N(-1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $\angle AEB = 45^\circ$, $BK: 3x + y - 15 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 3.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - y^2 + 2y - x - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 \end{cases}$$

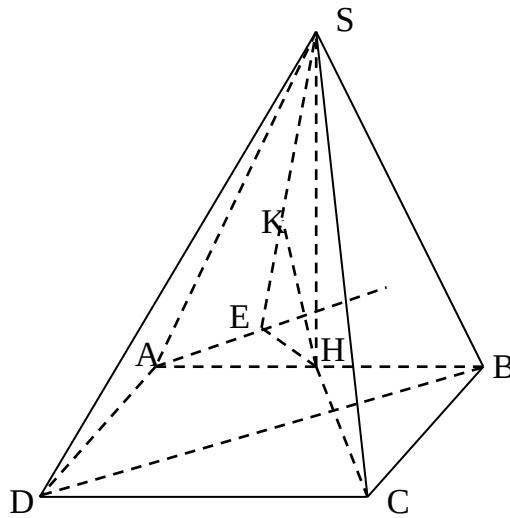
Câu 10 (1,0 điểm). Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x+y+z \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

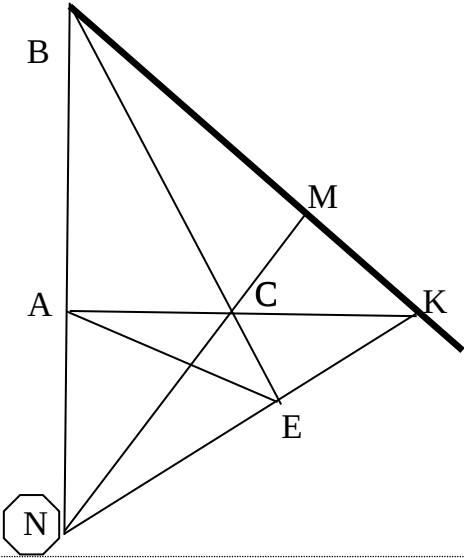
biểu thức:
$$P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{8+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{8+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{8+z^3}}$$

...Hết...

Câu	Đáp án	Điểm																		
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.	1,0																		
	- TXĐ: $\mathbb{R}$ - Sự biến thiên: +) Ta có: $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (0; 1)$ và hàm đồng biến trên các khoảng $(-1; 0), (1; +\infty)$.	0,25																		
	+) Cực trị: $x_{CD} = 0, y_{CD} = 1$ $x_{CT} = \pm 1, y_{CT} = 0$ +) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$	0,25																		
	+) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	-	0	+	0	-	y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$														
	y'	-	0	+	0	-														
y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$															
- Đồ thị:		0,25																		
2	Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 10$ trên đoạn $[0; 2]$	1,0																		
	ta có: $f'(x) = -8x^3 + 8x$	0,25																		
	Với $x \in [0; 2]$ thì: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.	0,25																		
	Ta có: $f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = -6$	0,25																		
	Vậy: $\max_{[0;2]} f(x) = f(1) = 12; \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -6$	0,25																		
3	Giải phương trình, bất phương trình: a) $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 4 \sin x - 1$. b) $2 \log_3(x-1) + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) \leq 2$	1,0																		

	a) $PT \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\sin^2 x - 4\sin x = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin x(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $S = \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	0,25
	b) ĐK: $x > 1$, $BPT \Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)] \leq 1$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ Vậy nghiệm $S = [1; 2]$	0,25
4	a) Cho số phức z $(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2 - 6i$ (*). Tìm môđun của số phức z. b) Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A, tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5.	1,0
	a) Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó: (*) $\Leftrightarrow (1+i)(a+bi) + (3-i)(a-bi) = 2 - 6i \Leftrightarrow 4a - 2b - 2bi = 2 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ -2b = -6 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + 3i \Rightarrow z = \sqrt{13}$	0,25
	b) Số phần tử của A là $6.A_6^3 = 720$	0,25
	Số cách chọn một số có hàng đơn vị là số 0 có $1.A_6^3 = 120$ cách Số cách chọn một số có hàng đơn vị là số 5 có $1.5.A_5^2 = 100$ cách Suy ra số cách chọn một số chia hết cho 5 là $120 + 100 = 220$ cách Vậy xác suất cần tìm bằng $\frac{220}{720} = \frac{11}{36}$.	0,25
5	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos x + \sqrt{3\sin x + 1}) dx$.	1,0
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{3\sin x + 1} dx = I_1 + I_2$	0,25

	$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + x \right) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$	0,25
	$I_2 = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} d(3 \sin x + 1) = \frac{2}{9} \left(\sqrt{3 \sin x + 1} \right)^3 \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{14}{9}$	0,25
	$I = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{14}{9}}$	0,25
6	Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, tam giác SAB cân tại S và SC tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA theo a.	1,0
	Gọi H là trung điểm AB. Do SAB cân tại S, suy ra $SH \perp AB$, mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$ và $\angle SCH = 60^\circ$. 	0,25
	Ta có $SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{CB^2 + BH^2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{15}$. $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{15} \cdot 4a^2 = \boxed{\frac{4\sqrt{15}}{3} a^3}$	0,25
	Qua A vẽ đường thẳng Δ song song với BD. Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên Δ và K là hình chiếu của H lên SE, khi đó $\Delta \perp (SHE) \Rightarrow \Delta \perp HK$ suy ra $HK \perp (S, \Delta)$. Mặt khác, do $BD \parallel (S, \Delta)$ nên ta có $d(BD; SA) = d(BD; (S, \Delta)) = d(B; (S, \Delta)) = 2d(H; (S, \Delta)) = 2HK$	0,25
	Ta có $\angle EAH = \angle DBA = 45^\circ$ nên tam giác EAH vuông cân tại E, suy ra $HE = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow HK = \frac{HE \cdot HS}{\sqrt{HE^2 + HS^2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{31}} a$. $\text{Vậy: } d(BD; SA) = \boxed{\frac{2\sqrt{465}}{31} a}$	0,25
7	Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3; 1; 2), B(-1; -3; 4)$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.	1,0

	CMR mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB tiếp xúc với mặt cầu (S). Xác định tọa độ của tiếp điểm.	
	Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3), R = 2$. Phương trình mặt phẳng (P) là trung trực của AB đi qua $M(1; -1; 3)$, có vtp $\overrightarrow{AB} = (-4; -4; 2)$ là (P): $2x + 2y - z + 3 = 0$	0,25
	Ta có: $d(I; (P)) = 2 = R$ nên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB tiếp xúc với mặt cầu (S) (đpcm)	0,25
	Phương trình đường thẳng d đi qua I nhận véc tơ $\vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$ làm vt chỉ phương là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$	0,25
	$d \cap (P) = H(1+2t; 2+2t; 3-t) \in (P) \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$ Vậy: tọa độ tiếp điểm là $H\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$	0,25
8	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi K là điểm đối xứng của A qua C. Đường thẳng đi qua K vuông góc với BC cắt BC tại E và cắt AB tại $N(-1; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $\angle AEB = 45^\circ$, $BK: 3x + y - 15 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 3.	1,0
		
	Tứ giác ABKE nội tiếp $\Rightarrow \angle AKB = \angle AEB = 45^\circ \Rightarrow \triangle AKB$ vuông cân tại A $\Rightarrow \angle ABK = 45^\circ$	0,25
	Gọi $B(a; 15-3a) (a > 3)$ sao cho: $BN = \sqrt{2}d(N, BK) = 3\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = 2(L), a = 5 \Rightarrow B(5; 0)$	0,25
	Tam giác BKN có BE và KA là đường cao $\Rightarrow C$ là trực tâm của BKN $\Rightarrow CN \perp BK \Rightarrow CN: x - 3y + 10 = 0$. $\triangle ABK$ và $\triangle KCM$ vuông cân	

	$\Rightarrow KM = \frac{1}{\sqrt{2}}CK = \frac{1}{2\sqrt{2}}AC = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}BK = \frac{BK}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = -4\overrightarrow{KM}$	0,25
	$M = MN \cap BK \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow K(3;6)$	
	AC qua K vuông góc AB $\Rightarrow AC: 2x - y = 0$ $A = AC \cap AB \Rightarrow A(1;2)$. C là trung điểm của AK $\Rightarrow C(2;4)$ Vậy $A(1;2), B(5;0), C(2;4)$	0,25
9	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - y^2 + 2y - x - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 \end{cases}$	1,0
	Điều kiện: $x \geq 0, 1 \leq y \leq 6, 2x+3y-7 \geq 0$ (*) Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{x} \neq 0$	0,25
	Khi đó, PT (1) $\Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$ $\Leftrightarrow (x-y+1)\left(y-1 + \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}\right) = 0$ $\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$ (do (*))	0,25
	Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ ĐK: $4/5 \leq x \leq 5$ $\Leftrightarrow (7-x) - 3\sqrt{5-x} + 3(x-\sqrt{5x-4}) = 0$ $\Leftrightarrow (4-5x+x^2)\left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;2), (4;5)$.	0,25
10	Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa: $x+y+z \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{8+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{8+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{8+z^3}}$.	1,0

	Theo BĐT Bunhiacopxki: $P\left[\left(yz+\sqrt{8+x^3}\right)+\left(zx+\sqrt{8+y^3}\right)+\left(xy+\sqrt{8+z^3}\right)\right]\geq\left(x+y+x\right)^2$ $\Leftrightarrow P\geq\frac{\left(x+y+z\right)^2}{xy+yz+zx+\sqrt{8+x^3}+\sqrt{8+y^3}+\sqrt{8+z^3}}$	0,25												
	Ta có: $\sqrt{8+x^3}=\sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)}\leq\frac{2+x+4-2x+x^2}{2}=\frac{6-x+x^2}{2}$ Tương tự: $\sqrt{8+y^3}\leq\frac{6-y+y^2}{2}; \sqrt{8+z^3}\leq\frac{6-z+z^2}{2}$ Suy ra: $P\geq\frac{2(x+y+z)^2}{2xy+2yz+2zx+18-(x+y+z)+x^2+y^2+z^2}$ $=\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-(x+y+z)+18}$	0,25												
	Đặt $t=x+y+z$ ($t\geq 3$). Khi đó: $P\geq\frac{2t^2}{t^2-t+18}$ Xét hàm số: $f(t)=\frac{2t^2}{t^2-t+18}$ với $t\geq 3$. $f'(t)=\frac{2(-t^2+36t)}{(t^2-t+18)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=36$ BBT <table><tr><td>t</td><td>3</td><td>36</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(t)'$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>f(t)</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{144}{71}$</td><td>2</td></tr></table>	t	3	36	$+\infty$	$f(t)'$	+	0	-	f(t)	$\frac{3}{4}$	$\frac{144}{71}$	2	0,25
t	3	36	$+\infty$											
$f(t)'$	+	0	-											
f(t)	$\frac{3}{4}$	$\frac{144}{71}$	2											
	Từ BBT ta có: GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $t=3$. Vậy GTNN của P là: $\frac{3}{4}$ khi $x=y=z=1$.	0,25												