

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 23/9/2026

Đề thi gồm có 01 trang, 04 câu

Câu 1 (5,0 điểm)

Cho dãy số thực dương (a_n) thỏa mãn điều kiện $a_n(a_{n+1}^2 - 1) = a_{n+1}(a_n^2 + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh $\lim a_n = +\infty$.

b) Tính $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$.

Câu 2 (5,0 điểm)

Xét hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau với mọi số nguyên dương m, n, a :

(i) $f(f(m)f(n)) = mn$;

(ii) $f(2027a+1) = 2027a+1$.

a) Tính $f(1)$.

b) Tìm tất cả hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

(Cho biết 2027 là một số nguyên tố)

Câu 3 (5,0 điểm)

Xét phương trình

$$\varphi(\varphi(n)+k) = n-k \text{ với } n, k \text{ nguyên dương.}$$

a) Chứng minh với mỗi số nguyên dương k cố định, chỉ có hữu hạn số n là hợp số thỏa mãn phương trình.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình có vô số nghiệm nguyên dương n .

(Với m nguyên dương, ký hiệu $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m)

Câu 4 (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hai đường kính AA', BB' của đường tròn (O) và điểm D sao cho $A'CB'D$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , E là giao điểm của BD và AC , F là giao điểm của CD và AB . Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của hai tam giác BEC và BFC .

a) Chứng minh hai tam giác ABC và MH_1H_2 có cùng trực tâm.

b) Đường thẳng BC cắt hai đường thẳng $A'D, H_1H_2$ lần lượt tại K, T . Gọi S, G, I lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (MH_2, KH_1) , (KH_2, MH_1) và (SG, H_1H_2) . Gọi X là hình chiếu vuông góc của G lên ST . Chứng minh bốn điểm S, X, I và trung điểm của đoạn thẳng H_1H_2 cùng nằm trên một đường tròn.

----- HẾT -----

Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Giám thị coi thi **KHÔNG** giải thích gì thêm.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 24/9/2026

Đề thi gồm có 01 trang, 03 câu

Câu 5 (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) cố định và điểm I cố định nằm trong đường tròn đó (I khác O). Một đường thẳng d thay đổi đi qua I nhưng không qua O và cắt (O) tại A, B sao cho I không trùng với trung điểm H của đoạn thẳng AB . Các tiếp tuyến tại O của đường tròn (OAH) và đường tròn (OBH) cắt đường trung trực của đoạn thẳng OI lần lượt tại O_1 và O_2 . Đường tròn $(O_1; O_1O)$ cắt đường tròn (OAH) tại C (khác O) và đường tròn $(O_2; O_2O)$ cắt đường tròn (OBH) tại D (khác O). Chứng minh đường tròn (OCD) đi qua một điểm cố định khác O khi d thay đổi nhưng luôn đi qua I .

Câu 6 (7,0 điểm)

Gọi A là tập hợp gồm 2026 số nguyên dương đầu tiên. Nếu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ của các phần tử thuộc A thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$ với $i \in \{1; 2; \dots; 2025\}$ thì a_i được gọi là *điểm giảm* của hoán vị đó.

a) Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ của các phần tử thuộc A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ có duy nhất một điểm giảm là $a_i = 2026$;

(ii) Điểm giảm a_i chia hoán vị thành hai phần $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ và $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{2026}$, trong đó tập hợp $X = \{a_{i+1}; \dots; a_{2026}\}$ chứa ít nhất một số chẵn và ít nhất một số lẻ?

b) Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ của các phần tử thuộc A có duy nhất một điểm giảm?

Câu 7 (7,0 điểm)

Cho $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số nguyên dương và $P(x)$ là đa thức khác hằng có hệ số nguyên.

a) Chứng minh tập hợp các số nguyên tố là ước của ít nhất một giá trị của đa thức $P(x)$ tại các số nguyên là một tập hợp vô hạn.

b) Chứng minh tồn tại một tập hợp vô hạn S gồm các số nguyên tố sao cho với mọi p thuộc S , số $c_1^n + c_2^n + \dots + c_k^n + P(n)$ chia hết cho p với vô số số nguyên dương n .

----- HẾT -----

*Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Giám thị coi thi KHÔNG giải thích gì thêm.*

CHỌN ĐTQG ĐÀ NẴNG 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P1)

Cho dãy số thực dương (a_n) thỏa mãn điều kiện $a_n(a_{n+1}^2 - 1) = a_{n+1}(a_n^2 + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

① Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

② Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$.

 Lời giải.

Vì $a_n, a_{n+1} > 0$, chia hai vế cho $a_n a_{n+1}$ ta được $a_{n+1} - \frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{1}{a_n}$. nên

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

① Để ý (a_n) tăng, giả sử (a_n) bị chặn trên, khi đó tồn tại $L > 0$ sao cho $a_n \rightarrow L$.

Khi đó vế trái tiến tới 0, còn vế phải tiến tới $2/L > 0$, mâu thuẫn nên suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

② Do $a_{n+1} > a_n$, ta có $0 < a_{n+1} - a_n < \frac{2}{a_n}$, suy ra

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} < \frac{2}{a_n^2} \rightarrow 0,$$

Do đó $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, mặt khác ta có

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n) \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 2 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow 4$$

Do đó theo Stolz-Cesaro thì $\frac{a_n^2}{n} \rightarrow 4$ nên $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 2$. Đặt $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ thì

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{a_n} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \rightarrow 1.$$

Vì thế lại theo Stolz-Cesaro ta có được $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 1$ hay $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = 1$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P2)

Xét hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau với mọi số nguyên dương m, n, a :

◇ $f(f(m)f(n)) = mn$;

◇ $f(2027a + 1) = 2027a + 1$.

① Tính $f(1)$.

② Tìm tất cả hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

 Lời giải.

① Cho $n = 1$ thì $f(f(m)f(1)) = m$, suy ra f là song ánh.

Ta có $f(2028) = 2028$. Thay $m = 1, n = 2028$ ta được

$$f(f(1)f(2028)) = 2028 = f(2028).$$

Do f đơn ánh nên $f(1) \cdot 2028 = 2028$ hay $f(1) = 1$.

② Từ $f(1) = 1$ ta có $f(f(m)) = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}^*$, do đó

$$f(mn) = f(f(f(m)f(n))) = f(m)f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Giờ ta sẽ chứng minh $f(p) = p$ với mọi số nguyên tố p .

Trước hết, nếu p là số nguyên tố thì $f(p)$ cũng là số nguyên tố, vì nếu $f(p) = uv$ với $u, v > 1$ thì

$$p = f(f(p)) = f(uv) = f(u)f(v).$$

Để ý với $u > 1$ thì $f(u) > 1$ do tính song ánh, từ đó có mâu thuẫn nên $f(p)$ là số nguyên tố.

Bây giờ lấy số nguyên tố $q \neq 2027$. Vì $(q, 2027) = 1$, tồn tại $b \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ sao cho

$$qb \equiv 1 \pmod{2027}.$$

Viết $qb = 2027c + 1$. Ta có $c \geq 1$. Xét

$$X = qb = 2027c + 1, \quad Y = q(b + 2027) = 2027(c + q) + 1.$$

Ta có $f(X) = X, f(Y) = Y$ và $f(q)$ chia hết cho cả X và Y , do đó

$$f(q) \mid \gcd(X, Y) = \gcd(qb, q(b + 2027)) = q \gcd(b, b + 2027) = q \gcd(b, 2027) = q.$$

Vì $f(q)$ là số nguyên tố, suy ra $f(q) = q$.

Đặt $r = f(2027)$ thì r là số nguyên tố.

Nếu $r \neq 2027$, ta có $r = f(r) = f(f(2027)) = 2027$, mâu thuẫn. Vậy $f(2027) = 2027$.

Do đó $f(p) = p$ với mọi số nguyên tố p , kết hợp với tính nhân tính ta có $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P3)

Xét phương trình $\varphi(\varphi(n) + k) = n - k$ với n, k nguyên dương.

- ① Chứng minh với mỗi số nguyên dương k cố định, chỉ có hữu hạn số n là hợp số thỏa mãn phương trình.
- ② Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình có vô số nghiệm nguyên dương n .

Lời giải.

Trước hết ta có bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 0.1.

Với N là hợp số thì $\varphi(N) \leq N - \sqrt{N}$.

Chứng minh. Thật vậy, gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của N . Khi đó $p \leq \sqrt{N}$.

Trong các số $1, 2, \dots, N$ có đúng N/p bội của p , và chúng không nguyên tố cùng nhau với N . Vì thế

$$N - \varphi(N) \geq \frac{N}{p} \geq \sqrt{N}$$

□

① Giả sử n thỏa mãn $\varphi(\varphi(n) + k) = n - k$. Ta có $n > k$ và $\varphi(n) + k \geq 2$ nên

$$n - k = \varphi(\varphi(n) + k) \leq \varphi(n) + k - 1.$$

Vì vậy $n - \varphi(n) \leq 2k - 1$. Nếu n là hợp số thì $\sqrt{n} \leq n - \varphi(n) \leq 2k - 1$ nên $n \leq (2k - 1)^2$.

Từ đó có hữu hạn hợp số n thỏa mãn yêu cầu đề bài

- ② Giả sử với k nào đó, phương trình có vô số nghiệm nguyên dương n . Để ý chỉ có hữu hạn hợp số nên phải có vô số nghiệm n là số nguyên tố, thì $\varphi(n) = n - 1$ nên

$$\varphi(n + k - 1) = n - k.$$

Đặt $M = n + k - 1$ thì $M - \varphi(M) = 2k - 1$. Nếu M là hợp số thì $\sqrt{M} \leq 2k - 1$ nên chỉ có hữu hạn giá trị hợp số M . Do có vô số giá trị M nên phải có ít nhất 1 giá trị M là số nguyên tố và khi đó

$$M - \varphi(M) = 1$$

Do đó $2k - 1 = 1$ nên $k = 1$. Ngược lại với $k = 1$ thì mọi số nguyên tố n thỏa mãn yêu cầu nên giá trị duy nhất thỏa mãn là $k = 1$.

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P4)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hai đường kính AA', BB' của đường tròn (O) và điểm D sao cho $A'C'B'D$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , E là giao điểm của BD và AC , F là giao điểm của CD và AB . Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của hai tam giác BEC và BFC .

- ① Chứng minh hai tam giác ABC và MH_1H_2 có cùng trực tâm.
- ② Đường thẳng BC cắt hai đường thẳng $A'D$, H_1H_2 lần lượt tại K, T . Gọi S, G, I lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (MH_2, KH_1) , (KH_2, MH_1) và (SG, H_1H_2) . Gọi X là hình chiếu vuông góc của G lên ST . Chứng minh bốn điểm S, X, I và trung điểm của đoạn thẳng H_1H_2 cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

- ① Gọi N, P lần lượt là trung điểm CA, AB . Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$.

Ta dễ thấy $BH \parallel B'D$ và $BH = B'D$ nên $BD \parallel B'H$.

$\Rightarrow HN \perp CH_1$ (do N là trung điểm HB') mà $HH_1 \perp CN$.

$\Rightarrow N$ là trực tâm $\triangle HH_1C$ nên $H_1N \perp CH \Rightarrow M, N, H_1$ thẳng hàng, tương tự ta cũng có M, P, H_2 thẳng hàng nên $CH \perp MH_1$ và $BH \perp MH_2$ nên H là trực tâm $\triangle MH_1H_2$.

- ② Ta chứng minh tứ giác MKH_1H_2 nội tiếp.

Do M là trung điểm HA' và $HH_1 \parallel CA'$ nên nếu gọi MN cắt CA' tại U thì ta có M là trung điểm H_1U . Tương tự ta gọi MP cắt BA' tại Z thì M là trung điểm H_2Z .

Gọi L là hình chiếu của A lên BC thì ta thấy K, L đối xứng qua BC do $HLA'K$ là hình bình hành.

Ta có $\frac{NU}{PZ} = \frac{NC/\cos UNC}{PB/\cos BPZ} = \frac{1/2AC}{1/2AB} = \frac{LN}{LP}$, mà $\angle LNM = \angle LPM$ nên $\triangle LPZ \sim \triangle LNU$ (c.g.c).

$\Rightarrow \angle LZM = \angle LUM$ nên tứ giác $MLUZ$ nội tiếp.

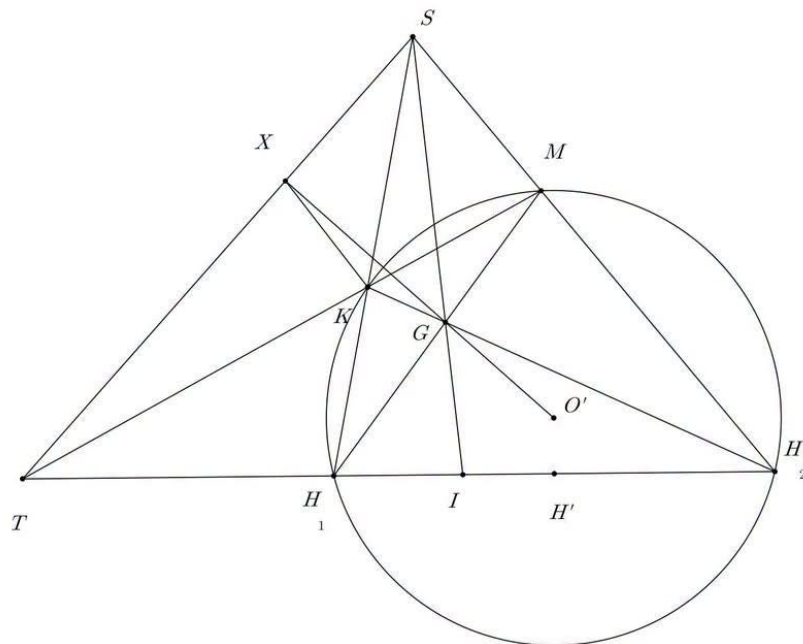
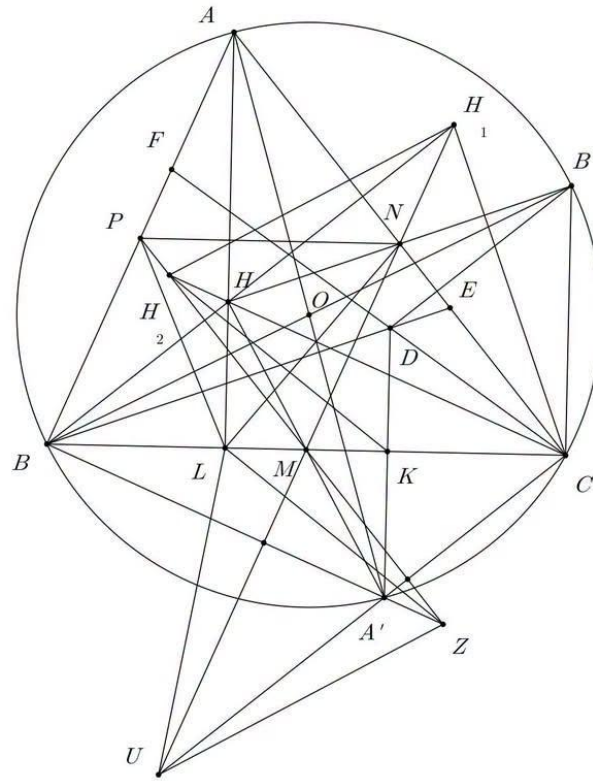
Nên MKH_1H_2 nội tiếp do phép đối xứng tâm M biến L thành K , Z thành H_2 , U thành H_1 .

Gọi đường tròn đi qua 4 điểm K, M, H_2, H_1 là (O') và H' là trung điểm H_2H_1 .

Do $(TIH_1H_2) = -1 \Rightarrow TI \cdot TH' = TH_1 \cdot TH_2$ theo hệ thức Maclaurin.

Theo tính chất quen thuộc của tứ giác toàn phần ta có hình chiếu X của G trên ST là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $KMH_2H_1.ST \Rightarrow TX \cdot TS = TK \cdot TM = TH_2 \cdot TH_1 = TI \cdot TH'$.

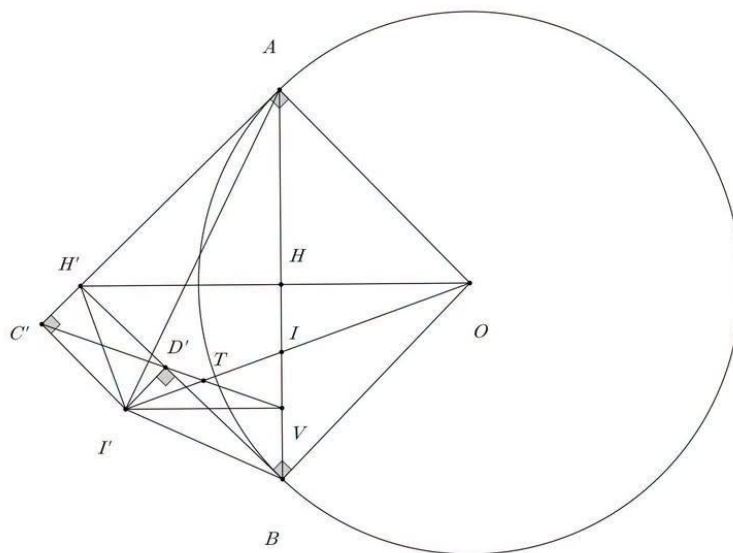
$\Rightarrow (SXI)$ đi qua trung điểm H_2H_1 .



CHỌN ĐTQG ĐÀ NẴNG 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P5)

Cho đường tròn (O) cố định và điểm I cố định nằm trong đường tròn đó (I khác O). Một đường thẳng d thay đổi đi qua I nhưng không qua O và cắt (O) tại A, B sao cho I không trùng với trung điểm H của đoạn thẳng AB . Các tiếp tuyến tại O của đường tròn (OAH) và đường tròn (OBH) cắt đường trung trực của đoạn thẳng OI lần lượt tại O_1 và O_2 . Đường tròn $(O_1; O_1O)$ cắt đường tròn (OAH) tại C (khác O) và đường tròn $(O_2; O_2O)$ cắt đường tròn (OBH) tại D (khác O). Chứng minh rằng đường tròn (OCD) đi qua một điểm cố định khác O khi d thay đổi nhưng luôn đi qua I .

**Lời giải.**

Xét phép nghịch đảo tâm O phương tích OA^2 . Gọi X' là ảnh của 1 điểm X bất kì qua phép nghịch đảo. Do H' là ảnh của H nên $OH \cdot OH' = OA^2$ nên H' là giao điểm 2 tiếp tuyến tại A, B của O và ảnh của (OAH) là AH' , ảnh của (OBH) là BH' .

Ta thấy đường tròn $(O_1; O_1O)$ đi qua tâm nghịch đảo và đi qua I có tiếp tuyến là OA nên ảnh của đường tròn này sẽ là đường thẳng đi qua I' song song với OA . Vậy ảnh C' của C sẽ là giao điểm của đường thẳng qua I' song song OA với AH' nên $I'C' \perp AH'$.

Tương tự ta cũng được ảnh D' của D là hình chiếu của I' trên BH' .

Gọi T là trung điểm II' và V là hình chiếu của I' trên AB . Từ các tứ giác nội tiếp và $OI \cdot OI' = OB^2$ ta có $\angle I'VD = \angle I'BD' = \angle OBI' - 90^\circ = \angle OIB - 90^\circ = 90^\circ - \angle I'IV = \angle TI'V = \angle TVI' \Rightarrow D', T, V$ thẳng hàng. Tương tự ta có C', T, V thẳng hàng nên $C'D'$ đi qua T cố định do I và I' cố định. Vậy ta có (OCD) luôn đi qua ảnh của T cố định là điểm T' nằm trên OI thỏa mãn $OT' \cdot OT = OA^2$ cố định.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P6)

Gọi A là tập hợp gồm 2026 số nguyên dương đầu tiên. Nếu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ của các phần tử thuộc A thỏa mãn $a_i > a_{i+1}$ với $i \in \{1, 2, \dots, 2025\}$ thì a_i được gọi là **điểm giảm** của hoán vị đó.

- ① Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ của các phần tử thuộc A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
 - ◇ $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ có duy nhất một điểm giảm là $a_i = 2026$;
 - ◇ Điểm giảm a_i chia hoán vị thành hai phần $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ và $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{2026}$, trong đó tập hợp $X = \{a_{i+1}, \dots, a_{2026}\}$ chứa ít nhất một số chẵn và ít nhất một số lẻ?
- ② Có bao nhiêu hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ của các phần tử thuộc A có duy nhất một điểm giảm?

Lời giải.

- ① Gọi i là vị trí của số 2026.

Vì 2026 là số lớn nhất nên nếu $i < 2026$ thì $a_i = 2026 > a_{i+1}$, tức 2026 là một điểm giảm.

Theo giả thiết đây là điểm giảm duy nhất, do đó $a_1 < a_2 < \dots < a_{i-1} < a_i = 2026$ và $a_{i+1} < a_{i+2} < \dots < a_{2026}$. Vì thế, sau khi chọn tập $X = \{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{2026}\} \subset \{1, 2, \dots, 2025\}$, hoán vị được xác định duy nhất: các phần tử của $\{1, 2, \dots, 2025\} \setminus X$ đứng trước 2026 theo thứ tự tăng dần, còn các phần tử của X đứng sau 2026 theo thứ tự tăng dần.

Trong $\{1, 2, \dots, 2025\}$ có 1012 số chẵn và 1013 số lẻ. Điều kiện của đề bài tương đương với việc X chọn ít nhất một số chẵn và ít nhất một số lẻ. Số cách chọn là $(2^{1012} - 1)(2^{1013} - 1)$.

Vậy số hoán vị cần tìm là $(2^{1012} - 1)(2^{1013} - 1)$.

- ② Xét một hoán vị có duy nhất một điểm giảm, ở vị trí i .

Khi đó hai dãy $a_1 < a_2 < \dots < a_i$ và $a_{i+1} < a_{i+2} < \dots < a_{2026}$ đều tăng nghiêm ngặt.

Do đó, nếu đặt $B = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ thì hoán vị được xác định duy nhất bởi tập B : viết các phần tử của B theo thứ tự tăng dần, sau đó viết các phần tử của phần bù $A \setminus B$ theo thứ tự tăng dần.

Tập B phải khác rỗng và khác A , nên ban đầu có $2^{2026} - 2$ cách chọn.

Hoán vị thu được không có điểm giảm khi và chỉ khi phần tử cuối của khối thứ nhất nhỏ hơn phần tử đầu của khối thứ hai. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $B = \{1, 2, \dots, r\}$ với $r \in \{1, 2, \dots, 2025\}$ nào đó, và có 2025 trường hợp như vậy.

Vì thế số hoán vị có đúng một điểm giảm là $(2^{2026} - 2) - 2025 = 2^{2026} - 2027$.

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Đà Nẵng TST - P7)

Cho $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số nguyên dương và $P(x)$ là đa thức khác hằng có hệ số nguyên.

- 1 Chứng minh tập hợp các số nguyên tố là ước của ít nhất một giá trị của đa thức $P(x)$ tại các số nguyên là một tập hợp vô hạn.
- 2 Chứng minh tồn tại một tập hợp vô hạn S gồm các số nguyên tố sao cho với mọi p thuộc S , số $c_1^n + c_2^n + \dots + c_k^n + P(n)$ chia hết cho p với vô số số nguyên dương n .

 Lời giải.

- 1 Đây chính là định lý Schur trong đa thức, ta có thể chứng minh như sau:

Nếu tồn tại số nguyên u sao cho $P(u) = 0$ thì mọi số nguyên tố đều là ước của giá trị $P(u)$, nên kết luận hiển nhiên. Xét trường hợp $P(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Giả sử phản chứng rằng chỉ có hữu hạn số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_r$ là ước của các giá trị $P(n)$.

Chọn một số nguyên a và đặt $M = P(a) \neq 0$. Ta có $P(a + Mx) - P(a)$ chia hết cho Mx trong $\mathbb{Z}[x]$, nên tồn tại $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $P(a + Mx) = M(1 + xR(x))$.

Đặt $N = p_1 p_2 \dots p_r$ (nếu $r = 0$ thì lấy $N = 1$).

Vì P khác hằng nên đa thức $1 + xR(x)$ cũng khác hằng. Do đó có thể chọn số nguyên dương t đủ lớn để $|1 + NtR(Nt)| > 1$. Số nguyên $1 + NtR(Nt)$ có một ước nguyên tố q . Với mỗi j ta có $1 + NtR(Nt) \equiv 1 \pmod{p_j}$, nên $q \notin \{p_1, \dots, p_r\}$. Mặt khác, $q \mid 1 + NtR(Nt)$ suy ra $q \mid P(a + MNt)$, trái với giả thiết rằng $p_1, \dots, p_r$ là tất cả các ước nguyên tố có thể xuất hiện.

- 2 Xét đa thức $Q(x) = P(-x) + k \in \mathbb{Z}[x]$ khác hằng.

Để ý tồn tại vô số số nguyên tố p sao cho tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $p \mid Q(m) = P(-m) + k$.

Đặt $C = c_1 c_2 \dots c_k$. Chỉ có hữu hạn số nguyên tố là ước của C , do đó tồn tại tập vô hạn $S \subset \mathbb{P}$ sao cho với mỗi $p \in S$, tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $p \mid P(-m) + k$ và $p \nmid c_j$ với mọi $j = 1, 2, \dots, k$.

Cố định $p \in S$. Để ý nếu $P(-m) + k \equiv 0 \pmod{p}$ thì với $m_0 \equiv m \pmod{p}$ ta vẫn có

$$P(-m_0) + k \equiv 0 \pmod{p}$$

Với mỗi số tự nhiên t , đặt $n_t = (m_0 + tp)(p - 1)$. Khi đó n_t là các số nguyên dương đôi một khác nhau. Do $p \nmid c_j$, theo định lý Fermat nhỏ, ta có $c_j^{n_t} \equiv 1 \pmod{p}$ với mọi j .

Đồng thời $n_t \equiv -m_0 \pmod{p}$, nên $P(n_t) \equiv P(-m_0) \pmod{p}$. Suy ra

$$c_1^{n_t} + c_2^{n_t} + \dots + c_k^{n_t} + P(n_t) \equiv k + P(-m_0) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vì có vô hạn giá trị t , với mỗi $p \in S$ có vô số số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu.