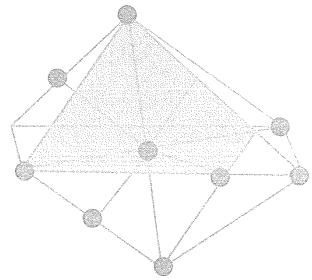
LƯƠNG ĐỨC TRỌNG - ĐẶNG ĐÌNH HANH - PHẠM HOÀNG HÀ



PHƯƠNG PHÁP SIÊU TỐC GIẢI TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN

CHUYÊN ĐỀ: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

T396

Mục lục

LỜI GIỚI THIỆU 4

1 TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 9

2 TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG 44

3 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 69

4 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 105

5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG 131

6 BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN 177

7 GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH 214

8 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU 251

9 ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU 290

10 ÔN TẬP - CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP 323

11 MỘT SỐ ĐỀ TỔNG HỢP 346

LỜI GIỚI THIỆU

Theo phương án tổ chức kì thi Trung học phổ thông Quốc gia của Bộ Giáo dục và Đào tạo, từ năm học 2017, các bài thi Toán, Ngoại ngữ, Khoa học Tự nhiên và Khoa học Xã hội thi theo hình thức trắc nghiệm khách quan. Đây là sự điều chỉnh lớn của Bộ Giáo dục và Đào tạo về hình thức và nội dung đề thi Trung học phổ thông quốc gia, ảnh hưởng trực tiếp đến việc dạy và học, tài liệu dạy và học của cả giáo viên và học sinh.

Đề thi trắc nghiệm môn Toán gồm 50 câu, thời gian làm bài 90 phút. Đề thi có phần kiểm tra kiến thức cơ bản dùng để xét tốt nghiệp và phần nâng cao dùng để sàng lọc thí sinh trong tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

Trong quá trình làm bài trắc nghiệm môn Toán, nếu như phần Giải tích 12 ngoài việc nắm vững các kiến thức, tính chất cơ bản để tìm được kết quả chính xác, có thể sử dụng máy tính bỏ túi để trợ giúp thì phần hình học không dễ dàng sử dụng máy tính bỏ túi để tìm được đáp án. Chính vì vậy, học sinh phải nắm vững các định nghĩa, các công thức, các mối liên hệ cơ bản, các tính chất hình học đặc thù từ đó thông qua quá trình giải bài tập cơ bản, làm các dạng bài tập hình học điển hình rèn luyện được kĩ năng, rút ngắn được thời gian làm bài.

Với mục đích đó, nhằm giúp các em học sinh có một cuốn tài liệu tốt về phần Hình giải tích không gian, nhóm tác giả biên soạn cuốn sách **"Phương pháp siêu tốc giải trắc nghiệm môn Toán - Chuyên đề: Hình học Giải tích trong không gian."** Trong cuốn sách này, ngoài các chuyên đề bám sát các bài học trong sách giáo khoa còn có thêm một số chuyên đề mở rộng, nâng cao đáp ứng cho các bài tập có tính chất phân loại cao trong đề thi.

Cấu trúc của mỗi chuyên đề gồm: tóm tắt nội dung kiến thức cơ bản, các

dạng bài tập cơ bản, các ví dụ ở dạng bài tập trắc nghiệm khách quan, được phân hóa theo bốn mức độ: nhận biết, thông hiểu, vận dụng và vận dụng cao; trong đó các bài tập cơ bản chiếm khoảng 70%, các bài tập nâng cao chiếm khoảng 30%. Ở mỗi ví dụ, ngoài việc trình bày lời giải để học sinh nắm vững kiến thức cơ bản, trong nhiều ví dụ có trình bày những **nhận xét đặc thù** để giúp cho học sinh có thể *nhanh chóng loại bỏ một hoặc hai đáp án gây nhiễu.* Đặc biệt, sau nhiều ví dụ có phần **thủ thuật chọn nhanh đáp án** để giúp học sinh nhanh chóng tìm được đáp án chính xác. Trong chuyên đề cuối cùng, ngoài các bài tập tổng hợp của hình giải tích không gian còn có phần *ứng dụng của Hình Giải tích không gian vào việc giải một số bài tập Hình không gian.* Cuối mỗi chuyên đề có bài tập để học sinh tự rèn luyện. Kết thúc của mỗi chuyên đề là phần *Đáp án - Hướng dẫn giải,* phần này bao gồm đáp án của tất cả các câu hỏi, bài tập và hướng dẫn giải những câu hỏi, bài tập điển hình hoặc những bài tập khó để học sinh có thể đối chiếu, qua đó giúp học sinh tích lũy kinh nhiệm, hình thành phương pháp giải các bài tập.

Đây là cuốn sách tham khảo bổ ích, thiết thực, phục vụ trực tiếp cho việc dạy và học của học phần Hình giải tích không gian. Các thầy cô giáo có thể lựa chọn nhiều bài tập trong cuốn sách để làm ví dụ khi giảng bài và giao bài tập về nhà. Các em học sinh có thể sử dụng cuốn sách để tự luyện tập, từ đó nắm bắt được những kiến thức cơ bản, các dạng bài tập nâng cao của phần hình giải tích không gian.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song không thể trách khỏi những thiếu sót trong quá trình biên soạn, các tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo, các em học sinh và các bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

LỜI CẢM ƠN

Công ty phát hành sách SPBook xin bày tỏ sự trân quý của mình tới các tác giả, các thầy cô đã dành thời gian, tâm huyết và cả sự nỗ lực của mình để cuốn sách được ra đời.

Cảm ơn thầy Lương Đức Trọng, thầy Đặng Đình Hanh, thầy Phạm Hoàng Hà đã trực tiếp xây dựng, biên soạn nội dung của cuốn sách.

Cảm ơn các thầy cô đã giành thời gian để cộng tác với SPBook trong việc biên soạn và đọc phản biện bản thảo của cuốn sách. Đặc biệt là các thầy cô:

Thầy Phan Dương

- Giảng viên trường đại học Kinh tế Quốc dân
- Giáo viên dạy luyện thi đại học môn Toán tại Hà Nội
- Giám đốc dự án trí tuệ nhân tạo Bgo

Thầy Phạm Văn Điệp

- Phó hiệu trưởng - Trường THPT Mỹ Đức A - H. Mỹ Đức - TP. Hà Nội
- Cử nhân khoa học Toán - Tin đại học Khoa học Tự nhiên - Hà Nội
- Danh hiệu Chiến sĩ thi đua cấp cơ sở nhiều năm liền của Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội

Thầy Lê Bá Trần Phương

- Giảng viên trường đại học Công nghiệp Hà Nội
- 1 trong 7 giáo viên luyện thi Toán giỏi tại Hà Nội
- Gần 20 năm kinh nghiệm luyện thi ĐH, CĐ
- Là người Thầy của nhiều thủ khoa, á khoa của các trường danh tiếng.
- Quan điểm giảng dạy và biên soạn: bám sát nội dung sách giáo khoa và các kiến thức trọng tâm thường có trong đề thi. Kiến thức được đề cập từ dễ đến khó, phân dạng rõ ràng.
- Tác giả của nhiều đầu sách Toán cho sinh viên như Hướng dẫn tự học Toán cao cấp tập 1, tập 2 do NXB Giáo dục ấn hành.

Thầy Nguyễn Tiến Đạt

- Giáo viên luyện thi môn Toán, có hơn 1.200 học sinh thuộc Hà Nội và các tỉnh lân cận đang theo học.
- 7 năm kinh nghiệm luyện thi môn Toán.
- Nhiều phương pháp giải toán trắc nghiệm bằng máy tính.
- Phương châm dạy ngắn gọn - hiệu quả cao
- Công tác tại *hoc24h.vn*

SPBook hy vọng trong thời gian tới, sẽ nhận được nhiều hơn nữa những ý kiến đóng góp, phản biện về chuyên môn cũng như nội dung trong sách của quý thầy cô, quý bạn đọc trên cả nước để lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

NHÓM KÍN FACEBOOK HỖ TRỢ EM

ĐỘT PHÁ MÔN TOÁN CÙNG SPBOOK

■ Lợi ích khi tham gia nhóm kín?

- Được giải đáp những thắc mắc trong quá trình sử dụng sách
- Được nhận sự hỗ trợ đắc lực từ các thầy Lương Đức Trọng- Đặng Đình Hanh - Phạm Hoàng Hà và các giáo viên dạy Toán khác
- Được giao lưu kết bạn mới cùng chí hướng

■ Ai là người giải đáp?

- Tác giả Lương Đức Trọng - Đặng Đình Hanh - Phạm Hoàng Hà và các giáo viên Toán
- Đội ngũ CTV là sinh viên lớp chất lượng cao khoa Toán trường ĐH Sư phạm Hà Nội

■ Nhóm hoạt động như thế nào?

- Nhóm hỗ trợ giải đáp tất cả những thắc mắc của các em xoay quanh các cuốn sách tham khảo môn Toán do SPBook phát hành và các kiến thức Toán học khác.
- Hỗ trợ 24/24 chỉ cần các em hỏi SPBook sẽ trả lời

■ Ai được tham gia nhóm?

- Học sinh mua một trong những sách tham khảo môn Toán mới nhất của SPBook
- Học sinh sử dụng sách gốc, không phải sách photo

■ Em vào nhóm như thế nào?

- Bước 1: Em like fanpage của SPBook tại: https://www.facebook.com/suphambook/ (nếu em đã like fanpage từ trước rồi thì hãy bỏ qua bước này, tiến hành bước 2 luôn nhé!)
- Bước 2: Em chụp 1 ảnh duy nhất có hình sách gốc kèm hóa đơn mua sách gốc rồi gửi về mục Tin nhắn của fanpage SPBook
- Bước 3: Bước còn lại là chờ đợi chút xíu nhé, Admin sẽ kiểm tra thông tin và duyệt quyền tham gia của em vào nhóm kín.

CHỦ ĐỀ 1
TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Hệ tọa độ trong không gian:** Hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ lần lượt là *các vectơ đơn vị* trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*. Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ được gọi là *các mặt phẳng tọa độ*.
   Không gian gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ được gọi là không gian $Oxyz$.

2. **Tọa độ của một điểm:** Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm tùy ý M. Khi đó tồn tại duy nhất bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Ta nói rằng điểm M có tọa độ là $(x; y; z)$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$.
   Chú ý:
   - Nếu điểm A thuộc trục Ox thì tọa độ của A có dạng $A(a; 0; 0)$;
   - Nếu điểm B thuộc trục Oy thì tọa độ của B có dạng $B(0; b; 0)$;
   - Nếu điểm C thuộc trục Oz thì tọa độ của C có dạng $C(0; 0; c)$.

3. **Tọa độ của một vectơ:** Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ bất kì. Khi đó tồn tại duy nhất bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn $\vec{a} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Ta nói rằng vectơ $\vec{a}$ có tọa độ là $(x; y; z)$ và viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.
   Chú ý:
   - Tọa độ của điểm M chính là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.
   - Tọa độ của các vectơ đơn vị là: $\vec{i} = (1; 0; 0)$; $\vec{j} = (0; 1; 0)$; $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

- Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{0}$ là $(0;0;0)$.

4. **Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{a}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{b}=(x';y';z')$ và cho k là một số thực. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x+x';y+y';z+z');\\&\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(x-x';y-y';z-z');\\&k\overrightarrow{a}=(kx;ky;kz).\end{aligned}$$

Chú ý:

- $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'.\end{cases}$.
- Cho vectơ $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{b}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{a}$ khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho $\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$, điều đó tương đương với $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\\z'=kz.\end{cases}$.
- Nếu $A(x_A;y_A;z_A)$, $B=(x_B;y_B;z_B)$ thì $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.
- Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là tồn tại một số thực k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

5. **Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và một số ứng dụng:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{a}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{b}=(x';y';z')$. Ta có:

- Biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ là:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=x.x'+y.y'+z.z'.$$

Đặc biệt: $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow x.x'+y.y'+z.z'=0$..

- Độ dài của vectơ: $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, với $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi đó

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$ là:

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

- Nếu M là trung điểm của AB thì tọa độ của M được xác định bởi công thức:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì tọa độ của G được xác định bởi công thức

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right).$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tọa độ của một điểm, một vectơ và các yếu tố liên quan

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa, khái niệm có liên quan đến vectơ và các biểu thức tọa độ.

VÍ DỤ 1.1. *Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a}=(2;-1;-2)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{b}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{a}$ và có độ dài bằng 6.*

A. $\overrightarrow{b}=(4;-2;-4)$

B. $\overrightarrow{b}=(-4;2;4)$

C. $\overrightarrow{b}=(4;-2;-4)$ *hoặc* $\overrightarrow{b}=(-4;2;4)$

D. $\overrightarrow{b}=(12;-6;-12)$ *hoặc* $\overrightarrow{b}=(-12;6;12)$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3,\quad \left|\overrightarrow{b}\right|=6.$$

Mặt khác hai vectơ này cùng phương nên ta có $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{a}$ hoặc $\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{a}$. Từ đó ta suy ra $\overrightarrow{b}=(4;-2;-4)$ hoặc $\overrightarrow{b}=(-4;2;4)$.

Đáp án là C. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Có hai vectơ có độ dài bằng 6 và cùng phương với một vectơ khác $\overrightarrow{0}$ cho trước. Do đó, các ***đáp án A và B đều bị loại. Loại đáp án D*** *do độ dài của các vectơ đó đều không bằng 6.*

VÍ DỤ 1.2. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (1;1;-1)$ và $\vec{c} = (2;3;0)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?*

A. $(5;7;0)$. *B.* $(2;3;1)$. *C.* $(1;3;1)$. *D.* $(-2;-1;1)$.

LỜI GIẢI. Ta có: $\vec{d} = (2+1+2;3+1+3;1-1+0) = (5;7;0)$.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Khi thực hiện các phép toán cộng, trừ vectơ, chúng ta thực hiện phép toán trên từng thành phần hoành độ, tung độ, cao độ của các vectơ đó.

VÍ DỤ 1.3. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1,1,1)$, $B(-4,3,1)$, $C(-9,5,m)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi:*

A. $m = 0$. *B.* $m = 1$.

C. $m = -1$. *D. Không tồn tại* m.

LỜI GIẢI. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho:

$$\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB} \quad (*).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-5;2;0), \quad \overrightarrow{AC} = (-10;4;m-1).$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được:

$$\begin{cases} -10 = -5.k \\ 4 = 2.k \\ m-1 = 0.k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 1. \end{cases}$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Từ $(*)$ ta có ngay kết quả sau: A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại hai số thực p, k sao cho

$$\begin{cases} p + k = 1 \\ \overrightarrow{OC} = p.\overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Xét hệ

$$\begin{cases} p + k = 1 \\ p.1 + k.(-4) = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow m = -1.1 + 2.1 = 1$$

Vậy đáp án là B.

VÍ DỤ 1.4. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(-2;4;1)$. Tìm tọa độ của điểm M thuộc trục tung và cách đều hai điểm A và B.*

A. $M\left(0;\frac{11}{6};0\right)$ *B.* $M\left(0;\frac{11}{10};0\right)$ *C.* $M\left(0;-\frac{11}{6};0\right)$ *D.* $M\left(0;\frac{11}{10};0\right)$

LỜI GIẢI. Gọi $M(0;m;0)$. Ta có:

$$AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (0-3)^2+(m-1)^2+(0-0)^2 = (0-(-2))^2+(m-4)^2+(0-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 9+m^2-2m+1 = 4+m^2-8m+16+1 \Leftrightarrow 6m = 11 \Leftrightarrow m = \frac{11}{6}$$
$$\Rightarrow M\left(0;\frac{11}{6};0\right).$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.5. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2,1,2)$, $B(0;1;0)$, $C(4,-1,2)$. Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) và cách đều ba điểm A, B và C.*

A. $M\,(3;-1;0)$. *B.* $M\,(3;0;-1)$. *C.* $M\,(2;0;1)$. *D.* $M\,(0;0;2)$.

LỜI GIẢI. Gọi $M(a;0;c)$. Ta có:

$$\begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(0-1)^2+(c-2)^2 = (a-0)^2+(0-1)^2+(c-0)^2 \\ (a-2)^2+(0-1)^2+(c-2)^2 = (a-4)^2+(0+1)^2+(c-2)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4c = 8 \\ 4a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow M(3;0;-1).$$

Đáp án là B. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Vì mặt phẳng Oxz có phương trình là $y = 0$ nên điểm $M(3;-1;0)$ không thuộc mặt phẳng Oxz. Ta ***loại được đáp án A.***

Dạng 2: Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa tích vô hướng và biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

VÍ DỤ 1.6. *Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (a;b;c)$, khi đó độ dài của $\vec{u}$ được tính theo công thức nào sau đây?*

A. $\sqrt{a+b+c}$. *B.* $a+b+c$. *C.* $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. *D.* $a^2+b^2+c^2$.

LỜI GIẢI. Độ dài vectơ $\vec{u}$ là: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.7. *Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được tính theo công thức nào sau đây?*

A. $a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3$.
B. $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
C. $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1$.
D. $a_1b_3 + a_3b_2 + a_2b_1$.

LỜI GIẢI . Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
Đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.8. *Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Khẳng định nào dưới đây là* **sai***:*

A. $\vec{a} = (x; y; z)$.
B. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
C. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
D. $\vec{a}^3 = |\vec{a}|^3$.

LỜI GIẢI. Ta có vế trái của đáp án D là một vectơ, vế phải của đáp án D là một số thực. Vậy D là khẳng định sai.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.9. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$. Khẳng định nào dưới đây là* **sai***:*

A. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.
B. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
D. $\left|\overrightarrow{AB}\right| < \left|\overrightarrow{OA}\right| - \left|\overrightarrow{OB}\right|$.

LỜI GIẢI. Ta có

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB \geq OA - OB = \left|\overrightarrow{OA}\right| - \left|\overrightarrow{OB}\right|.$$

Vậy D là khẳng định sai.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.10. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Khẳng định nào dưới đây là* ***đúng****:*

A. Góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ luôn là một góc nhọn.
B. Nếu góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 0^0 thì $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$
C. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
D. Nếu hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì góc giữa hai véctơ đó bằng 0^0.

LỜI GIẢI. Từ định nghĩa của tích vô hướng ta suy ra đáp án C là đúng.
Đáp án là C. □

Nhận xét:

- Góc giữa hai vectơ có thể là một góc tù.
- Nếu góc giữa hai véctơ bằng 0^0 thì hai vectơ đó cùng hướng.
- Nếu hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương thì góc giữa hai véctơ đó bằng 0^0 hoặc bằng 180^0.

VÍ DỤ 1.11. *Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ* $\overrightarrow{u} = (x; y; z), \overrightarrow{u'} = (x'; y'; z')$. *Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng:*

A. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} \geq 0$ *với mọi* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'$.

B. $\overrightarrow{u}^2.\overrightarrow{u'}^2 = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'})^2$ *khi và chỉ khi hai vectơ* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'$ *cùng phương.*

C. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ *khi và chỉ khi* $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

D. $|\overrightarrow{u}|.\left|\overrightarrow{u'}\right| < \left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}\right|$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2.\overrightarrow{u'}^2 \Leftrightarrow \left(|\overrightarrow{u}|.\left|\overrightarrow{u'}\right|.\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)\right)^2 = |\overrightarrow{u}|^2.\left|\overrightarrow{u'}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) = 0^0 \\ \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) = 180^0.\end{array}\right.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét:

- Đáp án A sai khi góc giữa hai vectơ là góc tù.
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ khi và chỉ khi $x = x', y = y'$ và $z = z'$, do đó đáp án C sai.
- Đáp án D sai do

$$\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}\right| = |\overrightarrow{u}|.\left|\overrightarrow{u'}\right|.\left|\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)\right| \leq |\overrightarrow{u}|.\left|\overrightarrow{u'}\right|.$$

VÍ DỤ 1.12. *Trong không gian* $Oxyz$, *cho hai vectơ* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ *và* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$. *Khi đó, tích vô hướng của hai vectơ* $\overrightarrow{u}$ *và* $\overrightarrow{v}$ *là?*

A. -3 *B. -2* *C. 3* *D. 2*

LỜI GIẢI. Ta có: $\vec{u} = (0;1;-3)$ và $\vec{v} = (1;0;1) \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.1 + 1.0 - 3.1 = -3$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.13. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{j} + m\vec{k} + 3\vec{i}$ và $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$. Tìm m để tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 2?*

A. 2. *B. 3.* *C. 0.* *D. 1.*

LỜI GIẢI. Ta có: $\vec{u} = (3;2;m)$ và $\vec{v} = (1;0;-1)$. Suy ra:

$$\vec{u}.\vec{v} = 3.1 + 2.0 + m.(-1) = 3 - m = 2 \Rightarrow m = 1.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.14. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1,-1,1)$, $\vec{b} = (4,0,-1)$, $\vec{c} = (3,2,-1)$. Tính giá trị của biểu thức*

$$P = 2016\,\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2.$$

A. -45. *B.* -53. *C.* 53. *D.* 45.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\vec{a}.\vec{c} = 1.3 + (-1).2 + 1.(-1) = 0;$$
$$\vec{b}^2 = 4^2 + 0^2 + (-1)^2 = 17;$$
$$\vec{c}^2 = 3^2 + 2^2 + (-1)^2 = 14.$$

Suy ra

$$P = 2016.0 + 17 - 5.14 = -53.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.15. *Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Biết $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, khi đó giá trị của m bằng?*

A. 0 *B. 1* *C. 2* *D.* -1

LỜI GIẢI. Sử dụng định nghĩa và công thức tính độ dài của một vectơ, ta có:

$$\vec{u} = (m;1;-2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{m^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{m^2 + 5}.$$

Khi đó:

$$|\vec{u}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.16. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;1;2)$ và $\vec{b} = (x;0;1)$. Tìm $x > 0$ để $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{26}$?*

A. $x = 3$ *B.* $x = -4$ *C.* $x = -2$ *D.* $x = 4$

LỜI GIẢI. Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (x+1;1;3) \Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = x^2 + 2x + 11 = 26 \Rightarrow x = 3$ hoặc $x = -5$ (loại).

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.17. *Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{OM} = \sqrt{3}.\vec{i} - \vec{k}$ và $\overrightarrow{ON} = \vec{j} - \vec{k}$. Tính độ dài đoạn thẳng MN?*

A. 3. *B. 4.* *C.* $\sqrt{3}$. *D. 2.*

LỜI GIẢI. Ta có: $M(\sqrt{3};0;-1)$ và $N(0;1;-1)$. Suy ra

$$MN = \sqrt{\left(0-\sqrt{3}\right)^2 + (1-0)^2 + (-1-(-1))^2} = 2.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.18. *Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc tạo bởi hai véctơ*

$$\vec{a} = (-4;-3;-1), \ \vec{b} = (1;-2;-3).$$

Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:

A. $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{364}}$. *B.* $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{312}}$. *C.* $\cos\varphi = \dfrac{5}{364}$. *D.* $\cos\varphi = \dfrac{5}{312}$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\vec{a}.\vec{b} = -4.1 + (-3).(-2) + (-1).(-3) = 5;$$
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26};$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

Suy ra:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{5}{\sqrt{26}.\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{364}}.$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 1.19. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ*

$$\overrightarrow{a} = (-1; m; 2m-1),\ \overrightarrow{b} = (5; m+1; 3).$$

Với những giá trị nào của m thì $\sin\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = 1$.
B. $m = -8$.
C. $m = 1$ *hoặc* $m = -8$.
D. không tồn tại m.

LỜI GIẢI. Với mọi cặp vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ta có:

$$\sin\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ này vuông góc. Điều đó tương đương với điều kiện:

$$\overrightarrow{a}.\ \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow (-1).5 + m.(m+1) + (2m-1).3 = 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 7m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -8. \end{array}\right.$$

Đáp án là C. □

Dạng 3: Tìm tọa độ của điểm đặc biệt

Phương pháp giải: Sử dụng công thức và các tính chất hình học đặc biệt để tìm mối quan hệ giữa các vectơ, từ đó tìm tọa độ của điểm đặc biệt.

VÍ DỤ 1.20. *Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn đẳng thức*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}.$$

A. $(x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1)$
B. $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$
C. $\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}, \dfrac{y_1 - y_2}{2}, \dfrac{z_1 - z_2}{2}\right)$
D. $\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}, \dfrac{y_2 - y_1}{2}, \dfrac{z_2 - z_1}{2}\right)$

LỜI GIẢI. Điểm M thỏa mãn đẳng thức

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

khi và chỉ khi M là trung điểm của AB. Do đó M là tọa độ là:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.21. *Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$. Tìm công thức xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.*

A. $(x_3+x_2+x_1, y_3+y_2+y_1, z_3+z_2+z_1)$.

B. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

C. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{2}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{2}\right)$.

D. Đáp án khác.

LỜI GIẢI. ***Đáp án là B.*** □

VÍ DỤ 1.22. *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ.*

A. $M'(-x_0;y_0;z_0)$. *B.* $M'(-x_0;-y_0;z_0)$.

C. $M'(-x_0;-y_0;-z_0)$. *D.* $M'(2x_0;2y_0;2z_0)$.

LỜI GIẢI. Vì O là trung điểm của MM' nên ta có:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_O - x_M = -x_0 \\ y_{M'} = 2y_O - y_M = -y_0 \\ z_{M'} = 2z_O - z_M = -z_0 \end{cases} \Rightarrow M'(-x_0;-y_0;-z_0).$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 1.23. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;-2)$, $B(-2;-2;-4)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.*

A. $M(2;4;-6)$. *B.* $M(2;-3;1)$. *C.* $M(-6;-8;-2)$. *D.* $M(1;2;-3)$.

LỜI GIẢI. Áp dụng công thức của tọa độ trung điểm ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ z_M = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{-2+(-4)}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;-3).$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.24. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;4;4)$, $B(-2;-2;-2)$. Điểm nào dưới đây nằm trên đường thẳng AB?*

A. $M_1(-1;1;1)$. *B.* $M_2(1;-1;1)$. *C.* $M_3(1;1;-1)$. *D.* $M_4(1;1;1)$.

LỜI GIẢI. Điểm M nằm trên đường thẳng AB khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-6;-6;-6), \quad \overrightarrow{AM_1} = (-5;-3;-3), \quad \overrightarrow{AM_2} = (-3;-5;-3),$$
$$\overrightarrow{AM_3} = (-3;-3;-5), \quad \overrightarrow{AM_4} = (-3;-3;-3).$$

Suy ra: $\overrightarrow{AM_4} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$. Do đó ba điểm A, B, M_4 thẳng hàng.

Đáp án là D. □

Nhận xét: Tọa độ của các điểm A, B đều có tính chất $x = y = z$, do đó các điểm nằm trên đường thẳng AB đều phải có tính chất đó. Từ đó suy ra điểm M_4 nằm trên đường thẳng AB.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Ta dễ thấy điểm M_4 là trung điểm của đoạn thẳng AB, do đó điểm M_4 nằm trên đường thẳng AB.

VÍ DỤ 1.25. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;6;-2)$, $B(-2;-2;-6)$, $C(1;-7;-1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.*

A. $G(3;-3;-9)$. *B.* $G(1;-1;-3)$. *C.* $G(-1;1;3)$. *D.* $G(1;1;-3)$.

LỜI GIẢI. Áp dụng công thức của tọa độ trọng tâm của một tam giác ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = -3 \end{cases} \Rightarrow M(1;-1;-3).$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.26. *Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;2;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(1;0;2)$. Tìm tọa độ đỉnh D?*

A. $(1;-1;1)$. *B.* $(1;1;3)$. *C.* $(1;-2;-3)$. *D.* $(-1;1;1)$.

LỜI GIẢI. Gọi $D(a;b;c)$. Vì $ABCD$ là một hình bình hành nên ta có:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=1-1\\b-2=0-1\\c-1=2-0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=3\end{cases}\Rightarrow D\left(1;1;3\right).$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Để tìm tọa độ của một điểm trong một hình hình hành, hình hộp, chúng ta thường sử dụng các vectơ bằng nhau.

VÍ DỤ 1.27. *Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $A(1;0;0)$, $B(1;2;0)$, $D(2;-1;0)$ và $A'(5;2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C'?*

A. $(3;1;0)$. *B.* $(8;3;1)$. *C.* $(2;1;0)$. *D.* $(6;3;1)$.

LỜI GIẢI. Vì $ACC'A', ABCD$ là những hình bình hành nên áp dụng quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases}x_{C'}-x_A=x_B-x_A+x_D-x_A+x_{A'}-x_A\\y_{C'}-y_A=y_B-y_A+y_D-y_A+y_{A'}-y_A\\z_{C'}-z_A=z_B-z_A+z_D-z_A+z_{A'}-z_A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C'}=x_{A'}+x_B+x_D-2x_A=6\\y_{C'}=y_{A'}+y_B+y_D-2y_A=3\\z_{C'}=z_{A'}+z_B+z_D-2z_A=1.\end{cases}$$

Vậy $C'(6;3;1)$.

Đáp án là D. □

Nhận xét:

Đáp án A sai do cho rằng tọa độ của C' là tổng tọa độ của hai điểm B và D.
Đáp án B sai do cho rằng tọa độ của C' là tổng tọa độ của ba điểm B, D và A'.
Đáp án C xuất phát từ sai lầm cho rằng $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (trùng với điểm C).

VÍ DỤ 1.28. *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;2;-3)$ là trọng tâm của tam giác ABC, trong đó A thuộc trục Ox, B thuộc trục Oy, C thuộc trục Oz. Tọa độ của các điểm A, B, C là:*

A. $A\left(1;0;0\right), B(0;2;0), C(0;0;-3)$. *B.* $A\left(3;0;0\right), B(0;6;0), C(0;0;-9)$.

C. $A\left(-3;0;0\right), B(0;-6;0), C(0;0;9)$. *D.* $A\left(6;0;0\right), B(0;3;0), C(0;0;-9)$.

LỜI GIẢI. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \\ z_A+z_B+z_C=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+0+0=3.1 \\ 0+b+0=3.2 \\ 0+0+c=3.(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3;0;0) \\ B(0;6;0) \\ C(0;0;-9). \end{cases}$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 1.29. *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;2;-3)$ là trọng tâm của tam giác ABC, trong đó $A(2;3;-1)$, $B(4;-6;-2)$. Tìm tọa độ của điểm C.*

A. $C(-5;5;0)$. *B.* $C(3;-9;-6)$. *C.* $C(-3;9;6)$. *D.* $C(-3;9;-6)$.

LỜI GIẢI. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \\ z_A+z_B+z_C=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+4+x_C=3.1 \\ 3+(-6)+y_C=3.2 \\ -1+(-2)+z_C=3.(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-3 \\ y_C=9 \\ z_C=-6 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(-3;9;-6)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.30. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;-2;3)$, $C(1;-6;3)$. Gọi M là trung điểm của BC. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào* **sai***:*

A. $M\left(\frac{5}{2};-4;3\right)$. *B.* $AM \perp BC$.

C. Tam giác BAC vuông tại A. *D.* $MA=MB=MC$.

LỜI GIẢI. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0;0)$; $\overrightarrow{AC}=(0;-4;0)$. Suy ra

$$AB=3, AC=4.$$

Vậy tam giác ABC không cân tại A, suy ra khẳng định B là sai.

Đáp án là B. □

Nhận xét: Chúng ta dễ thấy các khẳng định C và D tương đương. Do đó cả hai khẳng định này đều đúng (nếu không thì bài toán có hai khẳng định sai!). Từ đó ta loại được hai đáp án C và D.

VÍ DỤ 1.31. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;-1)$, $B(2;-4;1)$, $C(5;2;-3)$. Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào* **sai**:

A. $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$. *B.* $AG=\dfrac{2}{3}AM$.

C. $G(3;-1;-1)$. *D. Tam giác ABC vuông.*

LỜI GIẢI. Vì M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác ABC nên các khẳng định A và B đều đúng.
Theo công thức xác định tọa độ trọng tâm của tam giác ta có

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2+2+5}{3}=3 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-1+(-4)+2}{3}=-1 \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{-1+1+(-3)}{3}=-1. \end{cases}$$

Vậy khẳng định C là đúng. Từ đó suy ra D là khẳng định sai.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 1.32. *Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(2;0;0)$, $D(0;4;0)$, và $A'(0;0;4)$. Tìm tọa độ tâm I của hình hộp ABCD.A'B'C'D'.*

A. $(2;4;4)$ *B.* $(1;2;0)$ *C.* $(1;2;2)$ *D. Đáp án khác*

LỜI GIẢI. Ta có I là trung điểm của AC'. Vì $ACC'A'$, $ABCD$ là những hình bình hành nên áp dụng quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} x_{C'}=x_{A'}+x_B+x_D-2x_A=2 \\ y_{C'}=y_{A'}+y_B+y_D-2y_A=4 \\ z_{C'}=z_{A'}+z_B+z_D-2z_A=4 \end{cases} \rightarrow C'(2;4;4).$$

Từ đó suy ra tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AC' là $I(1;2;2)$.
Đáp án là C. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: *Vì A trùng với gốc tọa độ, B, D, A' nằm trên các trục tọa độ nên ta có thể dóng được ngay tọa độ của điểm C' là $(2;4;4)$. Từ đó suy ra đáp án đúng là C.*

VÍ DỤ 1.33. *Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(2;0;0)$, $D(0;4;0)$, và $A'(0;0;6)$. Gọi I là tâm của hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai**:

A. $C'(2;4;6)$.

B. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}=\overrightarrow{0}$.

C. $AC'=A'C=BD'=B'D$.

D. $AC\perp B'D'$.

LỜI GIẢI. Ta có

$$AB=2;\ AD=4.$$

Suy ra hình bình hành $ABCD$ không phải là một hình thoi, do đó hai đường chéo AC và BD không vuông góc với nhau. Từ đó suy ra AC và $B'D'$ không vuông góc.

Đáp án là D. □

Nhận xét: Trong một hình hộp chữ nhật, các đường chéo chính có độ dài bằng nhau.

VÍ DỤ 1.34. *Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, và $A'(0;0;1)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai**:

A. $C'(1;1;1)$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $AC'\perp A'C$.

D. $B'D\perp(ACD')$.

LỜI GIẢI. Ta có

$$AC=\sqrt{2};\ AA'=1.$$

Suy ra hình chữ nhật $ACC'A'$ không phải là một hình vuông, do đó hai đường chéo AC' và $A'C$ không vuông góc với nhau.

Đáp án là C. □

Nhận xét: Trong một hình lập phương, các đường chéo chính có độ dài bằng nhau nhưng không vuông góc với nhau.

VÍ DỤ 1.35. *Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, trong đó $A(2;3;-1)$, $B(4;-6;-2)$, $C(-3;9;-6)$. Tìm tọa độ của điểm M sao cho biểu thức*

$$P = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;-3)$ *B.* $M(-1;2;-3)$ *C.* $M(1;2;3)$ *D.* $M(1;-2;-3)$

LỜI GIẢI. Gọi $M(x;y;z)$. Ta có:

$$\begin{aligned} AM^2 + BM^2 + CM^2 &= (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 + (x-4)^2 + (y+6)^2 + (z+2)^2 \\ &\quad + (x+3)^2 + (y-9)^2 + (z+6)^2 \\ &= 3\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z\right) + 196 \\ &= 3\left[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2\right] + 154 \geq 154. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;-3).$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Bài toán có thể giải theo cách 2 như sau:
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Từ biểu diễn:

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 = \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2.\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GM}$$

ta chứng minh được đẳng thức:

$$P = AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Do đó

$$P \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$M \equiv G\,(1;2;-3)\,.$$

VÍ DỤ 1.36. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B(-4;4;2)$. Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh O của ΔOAB. Tìm tọa độ của điểm D.*

A. $D\left(0;\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$.
B. $D\left(-1;3;-\frac{3}{2}\right)$.
C. $D(8;0;0)$.
D. Đáp án khác.

LỜI GIẢI. Gọi $D(a;b;c)$. Ta có:

$$OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3,\quad OB=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=6.$$

Vì OD là phân giác của tam giác OAB nên ta có:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{OA}{OB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow BD=2AD.$$

Mặt khác ta có D thuộc đoạn thẳng AB, do đó hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AD}$ ngược hướng. Từ đó ta được:

$$\overrightarrow{BD}=-2.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}a-(-4)=-2(a-2)\\b-4=-2(b-2)\\c-2=-2(c-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=\frac{8}{3}\\c=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(0;\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 1.1. Trong không gian Oxyz, cho $\overrightarrow{u} = (x; y; z)$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**:

A. $k.\overrightarrow{u} = (kx; ky; kz)$
B. $(\overrightarrow{u})^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$
C. $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
D. $|k.\overrightarrow{u}| = k\,|\overrightarrow{u}|$ với mọi số thực k.

BÀI TẬP 1.2. Trong không gian Oxyz, cho $\overrightarrow{u} = (x; y; z)$, $\overrightarrow{u'} = (x'; y'; z')$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**:

A. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = 0$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ hoặc $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{0}$.
B. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} = (x + x'; y + y'; z + z')$.
C. $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'} = (x - x'; y - y'; z - z')$.
D. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy' + zz'$.

BÀI TẬP 1.3. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(x; y; z)$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**:

A. $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.
B. $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
C. $(\overrightarrow{OM})^2 = xy + yz + zx$.
D. $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$.

BÀI TẬP 1.4. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ không trùng với gốc tọa độ. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**:

A. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.
B. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
D. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

BÀI TẬP 1.5. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

A. $(x_2 + x_1; y_2 + y_1; z_2 + z_1)$.
B. $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}; \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.
D. $\left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}; \dfrac{y_2 - y_1}{2}; \dfrac{z_2 - z_1}{2}\right)$.

BÀI TẬP 1.6. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$. Tìm tọa độ của điểm G thỏa mãn đẳng thức
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$

A. $(x_3+x_2+x_1, y_3+y_2+y_1, z_3+z_2+z_1)$.

B. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

C. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{2}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{2}\right)$.

D. Đáp án khác.

BÀI TẬP 1.7. Trong không gian Oxyz, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{u}=4\overrightarrow{k}+2\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$ là:

A. $\overrightarrow{u}=(4;2;-3)$. B. $\overrightarrow{u}=(2;-3;4)$.

C. $\overrightarrow{u}=(-3;4;2)$. D. đáp án khác.

BÀI TẬP 1.8. Trong không gian Oxyz, vectơ $\overrightarrow{u}=(e;\pi;1)$ khi và chỉ khi:

A. $\overrightarrow{u}=e\overrightarrow{i}+\pi\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. B. $\overrightarrow{u}=e\overrightarrow{j}+\pi\overrightarrow{k}+\overrightarrow{i}$.

C. $\overrightarrow{u}=e\overrightarrow{k}+\pi\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$. D. $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{e^2+\pi^2+1}$.

BÀI TẬP 1.9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\overrightarrow{b}(x_2;y_2;z_2)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**:

A. Góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ lớn nhất bằng 180^0.

B. $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=180^0$ khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng phương.

C. $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=180^0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}=-x_1x_2-y_1y_2-z_1z_2$.

D. $\dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ bằng 180^0.

BÀI TẬP 1.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\overrightarrow{a}=(5;7;2)$, $\overrightarrow{b}=(3;0;4)$, $\overrightarrow{c}=(-6;1;-1)$. Hãy tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{m}=3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

A. $\overrightarrow{m}=(3;22;-3)$. B. $\overrightarrow{m}=(3;-3;22)$. C. $\overrightarrow{m}=(-3;3;22)$. D. $\overrightarrow{m}=(3;22;3)$.

BÀI TẬP 1.11. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vectơ $\overrightarrow{a}=(2;1;0)$, $\overrightarrow{b}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{c}=(2;2;-1)$ và $\overrightarrow{u}=(3;7;-7)$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{u}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

A. $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$. B. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

C. $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$. D. $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

BÀI TẬP 1.12. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a} = (-2;1;2)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{b}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{a}$ và có độ dài bằng 6.

A. $\overrightarrow{b} = (4;-2;-4)$.

B. $\overrightarrow{b} = (-4;2;4)$.

C. $\overrightarrow{b} = (4;-2;-4)$ hoặc $\overrightarrow{b} = (-4;2;4)$.

D. $\overrightarrow{b} = (-12;6;12)$ hoặc $\overrightarrow{b} = (12;-6;-12)$.

BÀI TẬP 1.13. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a} = (-2;-1;2)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{b}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2\left|\overrightarrow{a}\right|$.

A. $\overrightarrow{b} = (4;2;-4)$. B. $\overrightarrow{b} = (-4;-2;4)$.

C. $\overrightarrow{b} = (4;2;-4)$ hoặc $\overrightarrow{b} = (-4;-2;4)$. D. $\overrightarrow{b} = (12;6;-12)$.

BÀI TẬP 1.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ

$$\overrightarrow{a} = (1;2;-2),\ \overrightarrow{b} = (-2;m-3;m).$$

Với những giá trị nào của m thì hai vectơ đó có độ dài bằng nhau.

A. $m = 1$. B. $m = 1$ hoặc $m = 2$.

C. $m = 2$ D. không tồn tại m.

BÀI TẬP 1.15. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a} = (-2;-1;3)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{b} = (4;b;c)$ biết rằng hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ có cùng phương.

A. $\overrightarrow{b} = (4;-2;-6)$. B. $\overrightarrow{b} = (-4;-2;6)$.

C. $\overrightarrow{b} = (4;2;-6)$. D. $\overrightarrow{b} = (4;-2;-6)$.

BÀI TẬP 1.16. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a} = (-m;m+3;2m-3)$. Tìm m để vectơ $\overrightarrow{a}$ có độ dài nhỏ nhất.

A. $m = \dfrac{1}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = -3$.

BÀI TẬP 1.17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1,3,3)$, $B(-4,3,1)$, $C(-2,5,m)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi:

A. $m = 10$. B. $m = 1$.

C. $m = 0$. D. Không tồn tại m.

BÀI TẬP 1.18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-2)$, $B(4;2;-5)$, $C(10;5;-14)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. A, B, C là ba đỉnh của tam giác. B. $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA}$.

C. $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{AB}$.

BÀI TẬP 1.19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1,-1,1)$, $\vec{b} = (4,0,-1)$, $\vec{c} = (-3,2,-1)$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 2016\,\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^{\,2} - 5\vec{c}^{\,2}.$$

A. -45 B. -53 C. 53 D. 45.

BÀI TẬP 1.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ

$$\vec{a} = (1;2;-3),\ \vec{b} = (m;1-2m;1).$$

Với những giá trị nào của m thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

A. $m = -\dfrac{1}{3}$. B. $m = -\dfrac{1}{2}$. C. $m = 1$ D. $m = 0$.

BÀI TẬP 1.21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ

$$\vec{a} = (1;m;1-2m),\ \vec{b} = (-5;m+1;-3).$$

Với những giá trị nào của m thì $\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = 1$. B. $m = -8$.
C. $m = 1$ hoặc $m = -8$. D. không tồn tại m.

BÀI TẬP 1.22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ

$$\vec{a} = (1;m;1-2m),\ \vec{b} = (m+1;m^2+1;2-4m).$$

Với những giá trị nào của m thì $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \dfrac{1}{2}$. B. $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{1}{2}$.
C. $m = 1$ D. không tồn tại m.

BÀI TẬP 1.23. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;0;-2)$, $B\,(2;1;-1)$ và $C\,(1;-2;2)$. Tính độ dài ba cạnh AB, BC và CA của tam giác.

A. $\sqrt{19};\sqrt{3};2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3};\sqrt{19};2\sqrt{5}$.
C. $2\sqrt{5};\sqrt{19};\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3};2\sqrt{5};\sqrt{19}$.

BÀI TẬP 1.24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-2;4;2)$. Tìm tọa độ của điểm M thuộc trục hoành và cách đều hai điểm A và B.

A. $M\,(-1;0;0)$. B. $M\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$ C. $M\,(1;0;0)$ D. $M\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.

BÀI TẬP 1.25. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$ và $C(4;2;2)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và côsin của góc $\widehat{BAC}$.

A. 23 và $\dfrac{23}{6\sqrt{35}}$ B. -27 và $\dfrac{-9}{2\sqrt{35}}$ C. 27 và $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$ D. -23 và $\dfrac{-23}{6\sqrt{35}}$

BÀI TẬP 1.26. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1,1,2)$, $B(-1;1;0)$, $C(3,1,2)$. Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) và cách đều ba điểm A, B và C.

A. $M(2;-1;0)$. B. $M(2;0;-1)$. C. $M(1;0;1)$. D. $M(-1;0;2)$.

BÀI TẬP 1.27. Trong không gian Oxyz, cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC. Cho M là một điểm bất kì. Điều kiện nào dưới đây không tương đương với điều kiện của bài toán:

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

B. $\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

C. Công thức xác tọa độ của điểm G là:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}.$$

D. $MA+MB+MC\geq 3MG$.

BÀI TẬP 1.28. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là:

A. $(0,0,z_o)$. B. $(x_0,y_0,0)$. C. $(x_0,0,z_0)$. D. $(0,y_0,z_0)$.

BÀI TẬP 1.29. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox là:

A. $(0,0,z_0)$. B. $(0,y_0,0)$. C. $(x_0,0,0)$. D. $(0,y_0,z_0)$.

BÀI TẬP 1.30. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua O là:

A. $M'(-x_0,y_0,z_0)$. B. $M'(x_0,-y_0,z_0)$.

C. $M'(x_0,y_0,-z_0)$. D. $M'(-x_0,-y_0,-z_0)$.

BÀI TẬP 1.31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đẳng thức $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{b}$, với $\overrightarrow{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\overrightarrow{b}=(x_2;y_2;z_2)$, tương đương với:

A. $\overrightarrow{a}^2=4\overrightarrow{b}^2$. B. $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{b}^2$.

C. $x_2=2x_1,y_2=2y_1,z_2=2z_1$. D. $x_1=2x_2,y_1=2y_2,z_1=2z_2$.

BÀI TẬP 1.32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm cho hai điểm $A(4;6;-2)$, $B(-2;-2;-6)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

A. $M(2;4;-8)$. B. $M(2;-4;1)$. C. $M(-6;-8;-4)$. D. $M(1;2;-4)$.

BÀI TẬP 1.33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;6;-2)$, $B(-2;-2;-6)$, $C(1;-7;-4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(3;-3;-12)$. B. $G(1;-1;-4)$.

C. $G(-1;1;4)$. D. $G(1;1;-4)$.

BÀI TẬP 1.34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$ và $C(1;-2;2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh AC và trọng tâm G của ΔABC.

A. $M(1;-1;0)$ và $G(4;-1;1)$. B. $M(1;-1;0)$ và $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

C. $M(2;-2;0)$ và $G(4;-1;1)$. D. $M(2;-2;0)$ và $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

BÀI TẬP 1.35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;-4;-4)$, $B(6;6;6)$. Điểm nào dưới đây nằm trên đường thẳng AB?

A. $M_1(-1;-1;1)$. B. $M_2(1;-1;-1)$. C. $M_3(1;1;1)$. D. $M_4(-1;1;-1)$.

BÀI TẬP 1.36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;-2;-3)$ là trọng tâm của tam giác ABC, trong đó A thuộc trục Ox, B thuộc trục Oy, C thuộc trục Oz. Tọa độ của các điểm A, B, C là:

A. $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;-3)$. B. $A(3;0;0), B(0;-6;0), C(0;0;-9)$.

C. $A(-3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;9)$. D. $A(6;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;-9)$.

BÀI TẬP 1.37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;1;-3)$ là trọng tâm của tam giác ABC, trong đó $A(2;3;-1)$, $B(4;-6;-2)$. Tìm tọa độ của điểm C.

A. $C(-5;2;0)$. B. $C(3;-12;-6)$. C. $C(-3;6;6)$. D. $C(-3;6;-6)$.

BÀI TẬP 1.38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-1;1;1)$. B. $D(2;1;1)$. C. $D(-1;2;1)$. D. $D(1;1;1)$.

BÀI TẬP 1.39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;0)$, $B(1;-2;2)$, $D(3;1;-4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABDC$ là hình bình hành.

A. $C(4;-1;0)$. B. $C(2;3;-6)$. C. $C(-2;-3;6)$. D. $C\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

BÀI TẬP 1.40. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(2;3;4)$. Gọi M là trung điểm của BC. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**:

A. $M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$.

B. $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

C. $2AM > AB + AC$.

D. $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

BÀI TẬP 1.41. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;3;5)$, $B(3;1;1)$, $C(5;8;9)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**:

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

B. $G(3;4;5)$.

C. $GA = GB = GC$.

D. $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

BÀI TẬP 1.42. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(2;0;0)$, $D(0;-4;0)$, và $A'(0;0;4)$. Tìm tọa độ tâm I của hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

A. $(2;-4;4)$. B. $(1;-2;0)$. C. $(1;-2;2)$. D. Đáp án khác.

BÀI TẬP 1.43. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(4;0;0)$, $D(0;4;0)$, và $A'(0;0;6)$. Gọi I là trung điểm của CC'. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. $C'(4;4;6)$.

B. $I(4;4;3)$.

C. $AC' = A'C = BD' = B'D$.

D. $AI=\dfrac{AC+AC'}{2}$.

BÀI TẬP 1.44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có $A(0;1;0)$, $B(1;1;0)$, $D(0;2;0)$, và $A'(0;1;1)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. $C'(1;2;1)$.

B. $AC' = AB + AD + AA'$.

C. $AC' = A'C$.

D. $AC' \perp (BDA')$.

BÀI TẬP 1.45. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, trong đó $A(2;3;-1)$, $B(4;-6;-2)$, $C(-3;9;-9)$. Tìm tọa độ của điểm M sao cho biểu thức

$$P = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;-4)$. B. $M(-1;2;-4)$. C. $M(1;2;4)$. D. $M(1;-2;-4)$.

BÀI TẬP 1.46. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, trong đó $A(0;-2;4)$, $B(3;-5;-2)$. Tìm tọa độ của điểm M sao cho biểu thức

$$P = AM^2 + 2BM^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};1\right)$. B. $M\,(1;-3;2)$. C. $M\,(2;-4;0)$. D. $M\,(3;-7;2)$.

BÀI TẬP 1.47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B(-4;4;2)$. Gọi D là chân đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB. Tìm tọa độ của điểm D.

A. $D\left(0;\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$. B. $D\left(-1;3;-\frac{3}{2}\right)$. C. $D(8;0;0)$. D. Đáp án khác.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 1.1. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.2. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.3. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.4. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.5. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.6. Điểm G thỏa mãn đẳng thức

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

khi và chỉ khi G là trọng tâm của tam giác ABC. Do đó G là tọa độ là:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.7. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.8. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.9. Ta có: góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ bằng 180^0 khi và chỉ khi và vectơ đó cùng phương và ngược chiều. Vậy đáp án B là sai.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.10. Sử dụng các biểu thức tọa độ của vectơ, ta có:

$$\begin{cases}3\overrightarrow{a}=(15;21;6)\\-2\overrightarrow{b}=(-6;0;-8)\\\overrightarrow{c}=(-6;1;-1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{m}=3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(3;22;-3).$$

Vậy đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.11. Giả sử ta có biểu diễn $\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c}$, khi đó:

$$\overrightarrow{u} = (2m + n + 2p; m - n + 2p; 2n - p) = (3; 7; -7)$$

Suy ra: $\begin{cases} 2m + n + 2p = 3 \\ m - n + 2p = 7 \\ 2n - p = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -3 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$

Vậy đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.12. Ta có $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 6$. Mặt khác hai vectơ này cùng phương nên ta có $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{a}$ hoặc $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{a}$. Từ đó ta suy ra $\overrightarrow{b} = (-4; 2; 4)$ hoặc $\overrightarrow{b} = (4; -2; -4)$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.13. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.14. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.15. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.16. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.17. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho:

$$\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB} \quad (*).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-5; 0; -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-3; 2; m - 3).$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được:

$$\begin{cases} -3 = -5.k \\ 2 = 0.k \\ m - 3 = -2.k. \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.18. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.19. Ta có:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} = -1.(-3) + (-1).2 + 1.(-1) = 0;$$
$$\overrightarrow{b}^2 = 4^2 + 0^2 + (-1)^2 = 17;$$
$$\overrightarrow{c}^2 = (-3)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 14.$$

Suy ra

$$P = 2016.0 + 17 - 5.14 = -53.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.20. Ta có

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow 1.m + 2.(1-2m) - 3.1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.21. Với mọi cặp vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ta có:

$$\sin\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right) \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ này vuông góc. Điều đó tương đương với điều kiện:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow 1.(-5) + m.(m+1) + (1-2m).(-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 7m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -8. \end{array}\right.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.22. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.23. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1;1;1), \overrightarrow{BC} = (-1;-3;3), \overrightarrow{CA} = (0;2;-4)$$

Do đó: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{19}$.

$CA = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{0^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Vậy đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.24. Gọi $M(m;0;0)$. Ta có:

$$AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2 = (m-(-2))^2 + (0-4)^2 + (0-2)^2$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 + 4 + 1 = m^2 + 4m + 4 + 16 + 4 \Leftrightarrow 10m = -10 \Leftrightarrow m = -1$$
$$\Rightarrow M(-1;0;0).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.25. Sử dụng biểu thức tọa độ của tích vô hướng, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1;5;-2), \overrightarrow{AC} = (5;4;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1.5 + 5.4 + (-2).(-1) = 27.$$

Theo công thức tính góc giữa hai vectơ, ta có:

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{27}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}.\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}$$
$$= \frac{27}{\sqrt{30}.\sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Vậy đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.26. Gọi $M(a;0;c)$. Ta có:

$$\begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (0-1)^2 + (c-2)^2 = (a+1)^2 + (0-1)^2 + (c-0)^2 \\ (a-1)^2 + (0-1)^2 + (c-2)^2 = (a-3)^2 + (0-1)^2 + (c-2)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 4c = 4 \\ 4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow M(2;0;-1).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.27. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.28. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.29. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.30. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.31. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 1.32. Áp dụng công thức của tọa độ trung điểm của một đoạn thẳng ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-2+(-6)}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;-4).$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.33. Áp dụng công thức của tọa độ trọng tâm của một tam giác ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = -4 \end{cases} \Rightarrow M(1;-1;-4).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.34. Theo công thức tọa độ của trung điểm và trọng tâm, ta có:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = 1; y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = -1; z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = 0$$

và

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\frac{1}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Suy ra: $M(1;-1;0)$ và $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Vậy đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.35. Điểm M nằm trên đường thẳng AB khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho

$$\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (10;10;10), \quad \overrightarrow{AM_1} = (-3;-3;5), \quad \overrightarrow{AM_2} = (5;-3;-3),$$
$$\overrightarrow{AM_3} = (5;5;5), \quad \overrightarrow{AM_4} = (-3;-5;-3).$$

Suy ra: $\overrightarrow{AM_3} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$. Do đó ba điểm A, B, M_3 thẳng hàng.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.36. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \\ z_A+z_B+z_C=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+0+0=3.1 \\ 0+b+0=3.(-2) \\ 0+0+c=3.(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-6 \\ c=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3;0;0) \\ B(0;-6;0) \\ C(0;0;-9). \end{cases}$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.37. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \\ z_A+z_B+z_C=3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+4+x_C=3.1 \\ 3+(-6)+y_C=3.1 \\ -1+(-2)+z_C=3.(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-3 \\ y_C=6 \\ z_C=-6 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(-3;6;-6)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.38. Gọi tọa độ D là $D\,(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó: $\overrightarrow{AD}=(x_D+3;y_D+2;2z_D)$ và $\overrightarrow{BC}=(2;3;1)$.

Vì $ABCD$ là một hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Từ đó ta được:

$$\begin{cases} x_D+3=2 \\ y_D+2=3 \\ z_D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D=-1 \\ y_D=1 \\ z_D=1 \end{cases} \Rightarrow D\,(-1;1;1)\,.$$

Vậy đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.39. *Đáp án là B .* □

GIẢI BÀI TẬP 1.40. Vì M là trung điểm của BC nên ta có:

$$\begin{aligned} &2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ \Rightarrow\ &2AM=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|\le\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|=AB+AC. \end{aligned}$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.41. Ta có:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{24};$$
$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (8-3)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{57}.$$

Suy ra tam giác ABC không đều, do đó trọng tâm G không trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Vậy khẳng định C là sai.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.42. Ta có I là trung điểm của AC'. Vì $ACC'A', ABCD$ là những hình bình hành nên áp dụng quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} x_{C'} = x_{A'} + x_B + x_D - 2x_A = 2 \\ y_{C'} = y_{A'} + y_B + y_D - 2y_A = -4 \\ z_{C'} = z_{A'} + z_B + z_D - 2z_A = 4 \end{cases} \rightarrow C'(2;-4;4).$$

Từ đó suy ra tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AC' là $I(1;-2;2)$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.43. Vì I là trung điểm của CC' nên ta có:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}}{2}$$
$$\Rightarrow AI = \left|\overrightarrow{AI}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}\right|}{2} \leq \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AC'}\right|}{2} = \frac{AC + AC'}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ cùng hướng, điều này vô lý. Vậy khẳng định D là sai.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 1.44. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có cạnh bằng 1 nên ta suy ra:

$$AC'^2 = AC^2 + AA'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2 = 3 \Rightarrow AC' = \sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra khẳng định B là sai.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 1.45. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Từ biểu diễn:

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 = \overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GM}^2 + 2.\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GM}$$

ta chứng minh được đẳng thức:

$$P = AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Do đó

$$P \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$M \equiv G\,(1; 2; -4)\,.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 1.46. Gọi I là điểm được xác định bởi:

$$\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}.$$

Ta chứng minh được:

$$P = AM^2 + 2BM^2 = 3MI^2 + AI^2 + 2BI^2.$$

Do đó

$$P \geq AI^2 + 2BI^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$M \equiv I\,(2; -4; 0)\,.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 1.47. Gọi $D(a; b; c)$. Ta có:

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3, \quad OB = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = 6.$$

Vì OD là phân giác của tam giác OAB nên ta có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 2AD.$$

Mặt khác ta có ba điểm A, B, D thẳng hàng và D không thuộc đoạn thẳng AB, do đó hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Từ đó ta được:

$$\overrightarrow{BD} = 2.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} a-(-4) = 2(a-2) \\ b-4 = 2(b-2) \\ c-2 = 2(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow D\,(8;0;0)\,.$$

Đáp án là C. □

CHỦ ĐỀ 2
TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa và một số tính chất của tích có hướng của hai vectơ:** Trước hết ta nhắc lại khái niệm định thức cấp hai để thuận lợi cho việc sử dụng:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- Định nghĩa. Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$. Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$ (hay $\vec{u} \wedge \vec{v}$) và được xác định như sau:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Một số tính chất của tích có hướng của hai vectơ:

- Tích có hướng của hai vectơ vuông góc với cả hai vectơ thành phần:

$$[\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{u}, \quad [\vec{u}, \vec{v}] \perp \vec{v}.$$

- Khi ta đổi thứ tự của hai vectơ ta có:

$$[\vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}].$$

- Độ dài của vectơ tích có hướng:

$$|[\vec{u}, \vec{v}]| = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \sin(\vec{u}, \vec{v}) .$$

2. Một số ứng dụng của tích có hướng

- *Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:* Ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng khi và chỉ khi "**tích hỗn tạp**" của ba vectơ đó bằng không:

$$[\vec{u}, \vec{v}] . \vec{w} = 0.$$

Từ đó suy ra:

- Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, điều đó tương đương với:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] . \overrightarrow{AD} = 0.$$

- Bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện khi và chỉ khi:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] . \overrightarrow{AD} \neq 0.$$

- *Tính diện tích của tam giác:*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \right| .$$

Từ đó ta suy ra công thức tính diện tích của hình bình hành ABCD:

$$S_{ABCD} = 2.S_{\Delta ABD} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] \right| .$$

- *Tính thể tích của hình hộp:*

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] . \overrightarrow{AA'} \right| .$$

- *Tính thể tích của tứ diện :*

Thể tích của tứ diện $ABCD$ được tính bởi công thức:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} . \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] . \overrightarrow{AD} \right| .$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Các bài toán liên quan đến tích có hướng

Phương pháp giải: Sử dụng công thức và một số tính chất của tích có hướng.

VÍ DỤ 2.1. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Trong các công thức dưới đây, công thức nào đúng:*

A. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

B. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

C. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \right)$.

D. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right)$.

LỜI GIẢI. ***Đáp án là A.*** □

VÍ DỤ 2.2. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 3; 5)$, $\vec{v} = (2; -1; -3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:*

A. $(-4, 13, -7)$. *B.* $(4, -13, 7)$. *C.* $(13, -7, -4)$. *D.* $(-7, -4, 13)$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}] &= \left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (3.(-3) - (-1).5; 5.2 - (-3).1; 1.(-1) - 2.3) \\ &= (-4; 13; -7)\,.\end{aligned}$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 2.3. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; 4; -6)$, $\vec{v} = (-3; -6; 9)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:*

A. $(-6, -24, -54)$. *B.* $\vec{0}$. *C.* -84. *D. Kết quả khác.*

LỜI GIẢI. Ta có:

$$[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}\right)$$
$$= (4.9-(-6).(-6);(-6).(-3)-9.2;2.(-6)-(-3).4)$$
$$= (0;0;0) = \vec{0}.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, do đó đáp án C là sai.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Từ định nghĩa của tích có hướng của hai vectơ ta suy ra tích có hướng của hai vectơ cùng phương bằng $\vec{0}$. Trong bài toán này ta có:

$$\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u} \Rightarrow [\vec{u},\vec{v}] = \vec{0}.$$

VÍ DỤ 2.4. *Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1;3;5)$. Số các vectơ $\vec{v}$ thỏa mãn đẳng thức $[\vec{u},\vec{v}] = (4;-13;7)$ là:*

A. 0. *B.* 1. *C.* 2. *D. vô số.*

LỜI GIẢI. Gọi $\vec{v} = (a;b;c)$. Ta có

$$[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ b & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ c & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{vmatrix}\right)$$
$$= (3c-5b;5a-c;b-3a).$$

Theo giả thiết ta có:

$$[\vec{u},\vec{v}] = (4;-13;7) \Leftrightarrow \begin{cases} 3c-5b=4 \\ 5a-c=-13 \\ b-3a=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t \\ b=7+3t \\ c=13+5t. \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm. Vậy có vô số vectơ $\vec{v}$ thỏa mãn bài toán.

Đáp án là D. □

Nhận xét: Với mọi số thực k,m thì

$$[\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u}+m\vec{v},\vec{v}] = [\vec{u},\vec{v}+k\vec{u}]$$

VÍ DỤ 2.5. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai**:

A. $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

B. $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$.

D. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 + \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|^2 = |\vec{a}|^2.\left|\vec{b}\right|^2$.

LỜI GIẢI. ***Đáp án là C.*** □

Nhận xét: Biểu thức về phải trong đáp án C chính là: $\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$.

VÍ DỤ 2.6. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng:*

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

B. $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\right)$

D. $(\vec{a}.\vec{b})^2 + \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|^2 = |\vec{a}|^2.\left|\vec{b}\right|^2$

LỜI GIẢI. Từ các đẳng thức

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}, \vec{b}); \quad \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

ta suy ra:

$$(\vec{a}.\vec{b})^2 + \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|^2 = |\vec{a}|^2.\left|\vec{b}\right|^2\left(\sin^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \cos^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = |\vec{a}|^2.\left|\vec{b}\right|^2.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.7. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng:*

A. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$ *khi và chỉ khi* $\vec{a} = \vec{0}$ *hoặc* $\vec{b} = \vec{0}$.

B. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

C. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$ *khi và chỉ khi hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng phương.*

D. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

LỜI GIẢI. **Đáp án là C.** □

VÍ DỤ 2.8. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ khác $\vec{0}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:*

A. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ *lớn nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị lớn nhất.*

B. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ *lớn nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

C. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ *nhỏ nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

D. *Cả ba khẳng định trên đều sai.*

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \Rightarrow \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq 1.$$

Từ đó suy ra:

- $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$, điều đó tương đương với góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 90^0. Vậy các đáp án A và B đều sai.
- $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$, điều đó tương đương với góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 0^0 hoặc 180^0. Vậy đáp án C là sai.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.9. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (2; 4; -6)$, $\vec{v} = (4; 5; 6)$, $\vec{w} = (-1; -2; 3)$. Tính giá trị của biểu thức $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w}$.*

A. 0. B. -156. C. 156. D. $\vec{0}$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}4&-6\\5&6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-6&2\\6&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&4\\4&5\end{vmatrix}\right)=(54;-36;-6).$$

Suy ra:

$$[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=54.(-1)-36.(-2)-6.3=0.$$

Đáp án là A . □

Nhận xét: Biểu thức $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}$ là tích vô hướng giữa hai vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ và $\vec{w}$, do đó giá trị của nó là một số thực. Do đó ta loại được đáp án D.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Ta có:

$$[\vec{u},\vec{v}]\perp\vec{u}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}].\vec{u}=0\Rightarrow[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}=[\vec{u},\vec{v}].\left(-\frac{1}{2}\vec{u}\right)=-\frac{1}{2}[\vec{u},\vec{v}].\vec{u}=0.$$

Dạng 2: Một số ứng dụng của tích có hướng

Phương pháp giải: Sử dụng điều kiện đồng phẳng của ba vectơ, sử dụng các công thức tính diện tích, thể tích của tứ diện, thể tích của hình hộp để giải các bài tập có liên quan.

VÍ DỤ 2.10. *Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có góc A khác 45^0. Trong các công thức dưới đây, công thức nào* **sai***:*

A. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A.$ *B.* $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$

C. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|.$ *D.* $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

LỜI GIẢI. Chúng ta dễ thấy rằng các đáp án A, B, C đều đúng.

Vậy đáp án D là sai.

Đáp án là D. □

Nhận xét: Tại sao bài toán lại cần giả thiết góc A khác 45^0?

Đó là bởi vì nếu góc A bằng 45^0 thì ta có

$$\sin A=\cos A.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}.AB.AC.\cos A=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A=S_{\Delta ABC}$$

và khi đó khẳng định D cũng đúng!

VÍ DỤ 2.11. *Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD. Trong các công thức dưới đây, công thức nào* **sai**:

A. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

B. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right|$.

C. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$.

D. $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD}$, *trong đó AH là độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của tứ diện ABCD.*

LỜI GIẢI. Chúng ta dễ thấy rằng các đáp án A, B, D đều đúng.
Vậy đáp án C là sai.
Đáp án là C. □

Nhận xét: Trong các công thức tính diện tích, thể tích, chúng ta phải cận thận, đọc kĩ để phân biệt giữa tích có hướng và tích vô hướng.

VÍ DỤ 2.12. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai**:

A. $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c} = 0$.
B. $\left[\vec{b}, \vec{c}\right].\vec{a} = 0$.
C. $[\vec{c}, \vec{a}].\vec{b} = 0$.
D. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$.

LỜI GIẢI. Chúng ta dễ thấy rằng các đáp án B, C, D đều đúng.
Vậy đáp án A là sai.
Đáp án là A. □

Nhận xét: Khẳng định A sai, vì vế trái của nó là một vectơ, trong khi đó vế phải của nó là một số thực.

VÍ DỤ 2.13. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;-1;1)$, $\vec{b} = (0;1;2)$, $\vec{c} = (4;-3;6)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:*

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
B. $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} \neq [\vec{b}, \vec{a}].\vec{c}$.
C. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
D. Cả ba kết luận trên đều sai.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3; -2; 1).$$

Suy ra:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = -3.4 - 2.(-3) + 1.6 = 0.$$

Do đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Hai khẳng định A và C là phủ định của nhau, do đó trong hai khẳng định này có một khẳng định đúng, một khẳng định sai! Do đó các khẳng định B và D đều sai. Ta loại ngay được hai đáp án B và D.

VÍ DỤ 2.14. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 4)$, $\vec{b} = (2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-3; 2; m^2 + m)$. Ba vectơ này đồng phẳng khi và chỉ khi:*

A. $m = 1$. *B.* $m = -2$.

C. $m = 1$ *hoặc* $m = -2$. *D.* $m^3 + m^2 - 2m = 0$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2; 7; -4)$$

Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow 2.(-3) + 7.2 - 4(m^2 + m) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2. \end{array} \right.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 2.15. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (4; 3; 4)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\vec{c} = (1; 2; 1)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai***:*

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. *B.* $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right].\vec{a}\right|$.

C. $\vec{a} = \vec{b} + 2.\vec{c}$. *D. Cả ba khẳng định trên đều sai.*

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\vec{b} + 2.\vec{c} = (2 + 2.1; -1 + 2.2; 2 + 2.1) = (4; 3; 4) = \vec{a}.$$

Do đó khẳng định C là đúng. Từ đó suy ra khẳng định D là sai.

Đáp án là D. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: *Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì ta luôn có*

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right].\vec{a}\right|.$$

Vậy khẳng định B luôn đúng, do đó khẳng định D là sai.

VÍ DỤ 2.16. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (4;2;5)$, $\vec{b} = (3;1;3)$, $\vec{c} = (-2;0;-1)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:*

A. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} \neq \left[\vec{b}, \vec{a}\right].\vec{c}$.

B. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c} < \vec{0}$.

C. Ba vectơ đã cho đồng phẳng.

D. Cả ba khẳng định trên đều đúng.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) = (1;3;-2).$$

Suy ra:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 1.(-2) + 3.0 - 2.(-1) = 0.$$

Do đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Đáp án là C. □

Nhận xét: Giữa các vectơ không có quan hệ so sánh lớn hơn, nhỏ hơn, khẳng định B luôn sai. Từ đó loại đáp án B. Và do đó khẳng định D cũng sai. Ta cũng loại được đáp án D.

VÍ DỤ 2.17. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;7;-3)$, $C(2;1;0)$. Tìm điểm D thuộc trục Oz sao cho bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.*

A. $D(1;2;0)$.

B. $D(0;0;3)$.

C. $D(0;0;-3)$.

D. Đáp án khác.

LỜI GIẢI. Vì điểm D thuộc trục Oz nên tọa độ của điểm D có dạng $D(0;0;d)$.

Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, điều đó tương đương với:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0 \quad (*).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-2;6;-4), \overrightarrow{AC} = (1;0;-1), \overrightarrow{AD} = (-1;-1;d-1).$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-6&-4\\0&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4&-2\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&6\\1&0\end{vmatrix}\right)=(-6;-6;-6).$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được:

$$-6.(-1)+(-6).(-1)+(-6).(d-1)=0\Leftrightarrow 18-6d=0\Leftrightarrow d=3\Rightarrow D(0;0;3).$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Ta loại ngay được đáp án A vì điểm $D(1;2;0)$ không thuộc trục Oz.

VÍ DỤ 2.18. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0), C(0;0;3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.*

A. $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};1\right)$. *B.* $H(1;1;3)$.

C. $H\left(\frac{9}{19};\frac{9}{19};\frac{3}{19}\right)$. *D.* $H\left(\frac{3}{19};\frac{3}{19};\frac{6}{19}\right)$.

LỜI GIẢI. Gọi $H(a;b;c)$. Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \quad (1)\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \quad (2)\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0 \quad (3)\end{cases}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AH}=(a-1;b;c),\overrightarrow{BC}=(0;-1;3),\overrightarrow{BH}=(a;b-1;c),\overrightarrow{AC}=(-1;0;3).$$

Thay vào các đẳng thức (1), (2) ta được:

$$(1)\Leftrightarrow -1.b+3.c=0\Leftrightarrow b=3c.$$
$$(2)\Leftrightarrow -1.a+3.c=0\Leftrightarrow a=3c.$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(-1;1;0),\overrightarrow{AC}=(-1;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;3;1).$$

Thay vào đẳng thức số (3) ta được:

$$3.(a-1)+3.b+1.c=0\Leftrightarrow 3.(3c-1)+3.3c+c=0\Leftrightarrow c=\frac{3}{19}\Rightarrow H\left(\frac{9}{19};\frac{9}{19};\frac{3}{19}\right).$$

Đáp án là C. □

Nhận xét: Khẳng định ở đáp án A bị loại vì tam giác ABC không đều nên trực tâm H không trùng với trọng tâm $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};1\right)$ của tam giác ABC.

VÍ DỤ 2.19. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.*

A. $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$. *B.* $S=\sqrt{3}$. *C.* $S=\sqrt{2}$. *D.* $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1),\overrightarrow{AC}=(-1;0;0)$$
$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\0&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(0;-1;-1).$$

Từ đó ta suy ra:

$$S=\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Nếu không sử dụng tích có hướng, diện tích của tam giác ABC có thể được tính theo công thức:

$$S=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A\quad(*).$$

Ta có:

$$\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{-1.(-1)-1.0+1.0}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Thay vào công thức (*) ta được:

$$S=\frac{1}{2}.\sqrt{3}.1.\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Như vậy chúng ta thấy rằng việc sử dụng tích có hướng để tính diện tích của tam giác rất thuận lợi.

VÍ DỤ 2.20. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;7;-3)$, $C(2;1;0)$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống đường thẳng BC. Tính độ dài của đoạn thẳng AH.*

A. $AH=2\sqrt{2}$. *B.* $AH=\sqrt{2}$. *C.* $AH=1$. *D.* $AH=2$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{2.\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}{BC}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}{BC} \quad (*)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BA}=(2;-6;4),\overrightarrow{BC}=(3;-6;3)$$
$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-6&4\\-6&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4&2\\3&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&-6\\3&-6\end{vmatrix}\right)=(6;6;6).$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được:

$$AH=\frac{\sqrt{6^2+6^2+6^2}}{\sqrt{3^2+(-6)^2+3^2}}=\sqrt{2}.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 2.21. *Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD với $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;1;-2)$. Tính thể tích V của tứ diện ABCD.*

A. $V=\frac{5}{2}$. *B.* $V=\frac{5}{3}$. *C.* $V=\frac{1}{6}$. *D.* $V=\frac{5}{6}$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1),\overrightarrow{AC}=(-1;0;-1),\overrightarrow{AD}=(2;0;-3)$$
$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(1;-2;-1).$$

Từ đó ta suy ra:

$$V=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}.|1.2-2.0-1.(-3)|=\frac{5}{6}.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 2.22. *Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;3)$, $D(1;1;1)$. Tính độ dài đường cao DH của tứ diện ABCD.*

A. $DH=\frac{8}{19}$. *B.* $DH=\frac{8}{\sqrt{19}}$. *C.* $DH=\frac{4}{\sqrt{19}}$. *D.* $DH=\frac{4}{19}$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$DH = \frac{3V_{D.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|} \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;1;0), \overrightarrow{AC} = (-1;0;3), \overrightarrow{AD} = (0;1;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (3;3;1).$$

Thay vào công thức (*) ta được:

$$DH = \frac{|3.0 + 3.1 + 1.1|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{19}}.$$

Đáp án là C. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 2.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**:

A. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{a} = \vec{0}$ với mọi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

B. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{b} = \vec{0}$ với mọi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

C. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ luôn cùng phương với $\vec{a}$.

D. $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| \leq |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|$ với mọi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

BÀI TẬP 2.2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ khác $\vec{0}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng**:

A. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ lớn nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 90^0.

B. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ lớn nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

C. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

D. $\dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đạt giá trị lớn nhất.

BÀI TẬP 2.3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ khác $\vec{0}$ và thỏa mãn đẳng thức $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.

B. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

C. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp (\vec{a} + \vec{b})$.

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

BÀI TẬP 2.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 3; 5)$, $\vec{v} = (-2; 1; 3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:

A. $(-4, 13, -7)$. B. $(4, -13, 7)$. C. $(13, -7, -4)$. D. $(-7, -4, 13)$

BÀI TẬP 2.5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2;4;-6)$, $\vec{v} = (-5;-10;15)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:

A. $(-10,-40,-90)$. B. $\vec{0}$. C. -140. D. 0.

BÀI TẬP 2.6. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (3;5;1)$. Trong các vectơ $\vec{v}$ dưới đây, vectơ nào thỏa mãn đẳng thức $[\vec{u},\vec{v}] = (-13;7;4)$?

A. $\vec{v} = (2;-1;-3)$. B. $\vec{v} = (1;3;-2)$.

C. $\vec{v} = (-2;1;3)$. D. $\vec{v} = (3;-2;1)$.

BÀI TẬP 2.7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (1;2;-3)$, $\vec{v} = (4;-8;6)$, $\vec{w} = (7;-2;-3)$. Tính giá trị của biểu thức $[\vec{u},\vec{v}].\vec{w}$.

A. 0. B. -72. C. 72. D. $\vec{0}$.

BÀI TẬP 2.8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có góc A là một góc tù. Trong các công thức dưới đây, công thức nào **sai**:

A. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A$. B. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

C. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

BÀI TẬP 2.9. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD. Trong các công thức dưới đây, công thức nào **sai**:

A. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

B. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right|$.

C. $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\left|\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}\right|$.

D. $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD}$, với AH là đường cao của tứ diện ABCD.

BÀI TẬP 2.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$. B. $[\vec{c},\vec{a}].\vec{b} = 0$.

C. $(\vec{b}.\vec{a}).\vec{c} = 0$. D. $\left[\vec{b},\vec{c}\right].\vec{a} = 0$.

BÀI TẬP 2.11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;-1;1)$, $\vec{b} = (0;1;2)$, $\vec{c} = (4;-3;7)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng**:

A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
B. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = \left[\vec{b}, \vec{a}\right].\vec{c}$.
C. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
D. Cả ba kết luận trên đều đúng.

BÀI TẬP 2.12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2;4)$, $\vec{b} = (2;0;1)$, $\vec{c} = (-3;2;m^2 - m)$. Ba vectơ này đồng phẳng khi và chỉ khi:

A. $m = -1$.
B. $m = 2$.
C. $m \neq -1$ và $m \neq 2$.
D. $m = -1$ hoặc $m = 2$.

BÀI TẬP 2.13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3;1;3)$, $\vec{b} = (2;-1;2)$, $\vec{c} = (1;2;1)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
B. $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{b}, \vec{c}\right].\vec{a}\right|$.
C. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
D. Cả ba khẳng định trên không đồng thời đúng.

BÀI TẬP 2.14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (4;2;5)$, $\vec{b} = (3;1;3)$, $\vec{c} = (2;0;1)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:

A. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} \neq \left[\vec{b}, \vec{a}\right].\vec{c}$.
B. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} \neq 0$.
C. Ba véctơ đã cho đồng phẳng.
D. Cả ba khẳng định trên đều sai.

BÀI TẬP 2.15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;7;-3)$, $C(2;1;0)$. Tìm điểm D thuộc trục Ox sao cho bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

A. $D(0;2;1)$.
B. $D(3;0;0)$.
C. $D(-3;0;0)$.
D. Đáp án khác.

BÀI TẬP 2.16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;2)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

A. $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.
B. $H(1;1;2)$.
C. $D\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{2}{9}\right)$.
D. $D\left(\frac{2}{9};\frac{2}{9};\frac{4}{9}\right)$.

BÀI TẬP 2.17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp J của tam giác ABC.

A. $J\left(\frac{5}{9};\frac{5}{9};\frac{16}{9}\right)$. B. $J(2;2;4)$.

C. $J\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. D. Đáp án khác.

BÀI TẬP 2.18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;7;-3), C(2;1;0)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S=6\sqrt{3}$. B. $S=3\sqrt{3}$. C. $S=4\sqrt{7}$. D. $S=2\sqrt{7}$.

BÀI TẬP 2.19. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành ABCD có $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $D(-1;1;1)$. Tính diện tích S của của hình bình hành ABCD.

A. $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $S=\sqrt{3}$. C. $S=\sqrt{2}$. D. $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP 2.20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2), C(-1;1;0)$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống đường thẳng BC. Tính độ dài của đoạn thẳng AH.

A. $AH=\frac{\sqrt{30}}{5}$. B. $AH=\sqrt{30}$. C. $AH=\sqrt{2}$. D. $AH=2\sqrt{2}$.

BÀI TẬP 2.21. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;3)$, $D(1;1;1)$. Tính thể tích V của tứ diện ABCD.

A. $V=\frac{4}{3}$. B. $V=\frac{5}{3}$. C. $V=\frac{2}{3}$. D. $V=\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP 2.22. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD với $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;1;-2)$. Tính độ dài đường cao DH của tứ diện ABCD.

A. $DH=\frac{5}{3}$. B. $DH=\frac{5}{\sqrt{6}}$. C. $DH=\frac{10}{\sqrt{6}}$. D. $DH=\frac{5}{6}$.

BÀI TẬP 2.23. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $D(-1;1;0)$, $A'(2;1;5)$. Tính thể tích V của hình hộp.

A. $V=\frac{5}{2}$. B. $V=\frac{2}{3}$. C. $V=3$. D. $V=2$.

BÀI TẬP 2.24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(0;0;3)$, $A'(1;1;1)$. Tính độ dài đường cao A'H của hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

A. $A'H=\frac{8}{19}$. B. $A'H=\frac{8}{\sqrt{19}}$. C. $A'H=\frac{4}{\sqrt{19}}$. D. $A'H=\frac{4}{19}$.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 2.1. Theo tính chất của tích có hướng ta có $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Do đó các khẳng định A và B đều đúng.

Mặt khác ta có:

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| . \left|\vec{b}\right| . \sin(\vec{a}, \vec{b}) \leq |\vec{a}| . \left|\vec{b}\right| .$$

Do đó khẳng định D cũng đúng.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.2. Ta có:

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| . \left|\vec{b}\right| . \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \Rightarrow \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}| . \left|\vec{b}\right|} = \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$, điều đó tương đương với góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 90^0. Vậy đáp án A là đúng.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.3. Ta có:

$$\left(\vec{a} . \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 . \vec{b}^2 \Leftrightarrow \left(|\vec{a}| . \left|\vec{b}\right| . \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)^2 = |\vec{a}|^2 . \left|\vec{b}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0 \\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^0. \end{array}\right.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.4. Ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\left|\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{array}\right|\right) = (4; -13; 7.)$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.5. Ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\left|\begin{array}{cc} 4 & -6 \\ -10 & 15 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc} -6 & 2 \\ 15 & -5 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -5 & -10 \end{array}\right|\right) = (0; 0; 0) .$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.6. Gọi $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$. Ta có

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \left(\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ c & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} \right)$$
$$= (5c - b; a - 3c; 3b - 5a).$$

Theo giả thiết ta có:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = (-13; 7; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 5c - b = -13 \\ a - 3c = 7 \\ 3b - 5a = 4 \end{cases}$$

Hệ này có một nghiệm là $(1; 3; -2)$.

Đáp án là B.

Chú ý: Ta có thể tính tích có hướng trực tiếp các vectơ trong bốn đáp án để tìm ra đáp án đúng. □

GIẢI BÀI TẬP 2.7. Ta có:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \right) = (-12; -18; -16).$$

Suy ra:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}].\overrightarrow{w} = -12.7 - 18.(-2) - 16.(-3) = 0.$$

Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 2.8. Chúng ta dễ thấy rằng các đáp án A, B, C đều đúng. Vậy đáp án D là sai.

Đáp án là D.

Ta có thể giải thích trực tiếp khẳng định D sai như sau: Do góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ chính là góc A (góc tù), do đó vế phải của khẳng định D là một số thực âm, trong khi đó vế trái của khẳng định D là một số thực dương. □

GIẢI BÀI TẬP 2.9. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 2.10. Chúng ta dễ thấy rằng các đáp án A, B, D đều đúng. Vậy đáp án C là sai.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.11. Ta có:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\right)=(-3;-2;1).$$

Suy ra:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right].\overrightarrow{c}=-3.4-2(-3)+1.7=1\neq 0.$$

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ không đồng phẳng.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.12. Ta có:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&4\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}\right)=(2;7;-4)$$

Ba vectơ $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right].\overrightarrow{c}=0\Leftrightarrow 2.(-3)+7.2-4(m^2-m)=0\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2.\end{array}\right.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.13. Ta có:

$$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(2+1;-1+2;2+1)=(3;1;3)=\overrightarrow{a}.$$

Do đó khẳng định C là đúng; đồng thời ba vectơ $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ đồng phẳng. Từ đó suy ra khẳng định A là sai.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.14. Ta có:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5&4\\3&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4&2\\3&1\end{vmatrix}\right)=(1;3;-2).$$

Suy ra:

$$\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right].\overrightarrow{c}=1.2+3.0-2.1=0.$$

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ đồng phẳng.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.15. Vì điểm D thuộc trục Ox nên tọa độ của điểm D có dạng $D(d;0;0)$.

Bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, điều đó tương đương với:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0 \quad (*).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(-2;6;-4)\,,\overrightarrow{AC}=(1;0;-1)\,,\overrightarrow{AD}=(d-1;-1;-1)\,.$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\left|\begin{array}{cc}-6&-4\\0&-1\end{array}\right|;\left|\begin{array}{cc}-4&-2\\-1&1\end{array}\right|;\left|\begin{array}{cc}-2&6\\1&0\end{array}\right|\right)=(-6;-6;-6)\,.$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được:

$$-6.(d-1)+(-6).(-1)+(-6).(-1)=0\Leftrightarrow 18-6d=0\Leftrightarrow d=3\Rightarrow D(3;0;0).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.16. Gọi $H(a;b;c)$. Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \quad (1)\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \quad (2)\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0 \quad (3)\end{cases}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AH}=(a-1;b;c)\,,\overrightarrow{BC}=(0;-1;2)\,,\overrightarrow{BH}=(a;b-1;c)\,,\overrightarrow{AC}=(-1;0;2)\,.$$

Thay vào các đẳng thức (1), (2) ta được:

$$(1)\Leftrightarrow -1.b+2.c=0\Leftrightarrow b=2c.$$
$$(2)\Leftrightarrow -1.a+2.c=0\Leftrightarrow a=2c.$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)\,,\overrightarrow{AC}=(-1;0;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;2;1)\,.$$

Thay vào đẳng thức số (3) ta được:

$$2.(a-1)+2.b+1.c=0\Leftrightarrow 2.(2c-1)+2.2c+c=0\Leftrightarrow c=\frac{2}{9}\Rightarrow H\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{2}{9}\right).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.17. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 2.18. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-2;6;-4)\,, \overrightarrow{AC} = (1;0;-1)\,.$$

Suy ra:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-6;-6;-6)\,.$$

Từ đó ta được:

$$S = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-6)^2}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.19. Ta có:

$$S = 2S_{\Delta ABD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;1)\,, \overrightarrow{AD} = (-1;0;0)$$
$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (0;-1;-1)\,.$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được: Từ đó ta suy ra:

$$S = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.20. Ta có:

$$AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2.\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|}{BC} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|}{BC} \quad (*)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BA} = (1;1;-1)\,, \overrightarrow{BC} = (0;1;-2)$$
$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1;2;1)\,.$$

Thay vào đẳng thức (*) ta được:

$$AH = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 2.21. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;1;0), \overrightarrow{AC} = (-1;0;3), \overrightarrow{AD} = (0;1;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (3;3;1).$$

Từ đó ta suy ra:

$$V = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}.|3.0 + 3.1 + 1.1| = \frac{2}{3}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 2.22. Ta có:

$$DH = \frac{3V_{D.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].AD\right|}{\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;1), \overrightarrow{AC} = (-1;0;-1), \overrightarrow{AD} = (2;0;-3)$$
$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1;-2;-1).$$

Thay vào công thức (*) ta được:

$$DH = \frac{|1.2 - 2.0 - 1.(-3)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + -1^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 2.23. Ta có:

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right| \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;1), \overrightarrow{AD} = (-1;0;-1), \overrightarrow{AA'} = (2;0;4)$$
$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1;-2;-1).$$

Thay vào công thức (*) ta được:

$$V = |1.2 - 2.0 - 1.4| = 2.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 2.24. Ta có:

$$A'H = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|}{2.\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|} \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;1;0), \overrightarrow{AD} = (-1;0;3), \overrightarrow{AA'} = (0;1;1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (3;3;1).$$

Thay vào công thức (*) ta được:

$$A'H = \frac{|3.0 + 3.1 + 1.1|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{19}}.$$

Đáp án là C. □

CHỦ ĐỀ 3
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Vectơ $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá của nó vuông góc với mặt phẳng (P).
- **Chú ý:**
  - Một mặt phẳng bất kì có vô số vectơ pháp tuyến.
  - Tất cả các vectơ pháp tuyến của cùng một mặt phẳng cùng phương với nhau.

2. Phương trình mặt phẳng

- Mặt phẳng (P) đi qua một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- Một mặt phẳng bất kì có *phương trình tổng quát* là:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với điều kiện } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Khi đó: vectơ $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

3. Các trường hợp đặc biệt

- Phương trình các mặt phẳng tọa độ là: $(Oxy) : z = 0$; $(Oyz) : x = 0$ và $(Ozx) : y = 0$.

- Mặt phẳng (P) không đi qua gốc O và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$ được gọi là *mặt phẳng theo đoạn chắn* và có phương trình là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng

Phương pháp giải: Nếu phương trình của mặt phẳng (P) là $Ax+By+Cz+D=0$ thì $\overrightarrow{n}=k.(A;B;C)$ (với $k\neq 0$) là những vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Một số chú ý để tìm vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$:

- Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) cho trước thì ta có thể chọn

$$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}.$$

- Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d cho trước thì ta có thể chọn

$$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}\neq\overrightarrow{0},$$

trong đó $\overrightarrow{u_d}$ là một vectơ có giá nằm trên đường thẳng d hoặc song song với đường thẳng d.

- Nếu ta tìm được hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}$ cùng vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ thì ta có thể chọn $\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$.
- Nếu hai mặt phẳng vuông góc thì hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng đó cũng vuông góc.
- Nếu đường thẳng AB thuộc mặt phẳng (P) hoặc đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) thì $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AB}$.

VÍ DỤ 3.1. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?*

A. $\overrightarrow{n}_1=(0;0;1)$. *B.* $\overrightarrow{n}_2=(0;1;0)$. *C.* $\overrightarrow{n}_3=(2;0;0)$. *D.* $\overrightarrow{n}_4=(0;0;0)$.

LỜI GIẢI. Vì mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox nên mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{i}=(1;0;0)$. Do đó vectơ $\overrightarrow{n}_3=2.\overrightarrow{i}=(2;0;0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Đáp án là C. □

Nhận xét: Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k.\vec{n}$, với $k \neq 0$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Chúng ta cũng lưu ý rằng vectơ $\vec{0}$ không phải là một vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng.

VÍ DỤ 3.2. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz). Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?*

A. $\vec{n}_1 = (0;0;1)$. *B.* $\vec{n}_2 = (0;-1;0)$. *C.* $\vec{n}_3 = (1;0;0)$. *D.* $\vec{n}_4 = (0;0;0)$.

LỜI GIẢI. Vì mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) và $(Oxy) \cap (Oyz) = Oy$ nên mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oy. Do đó (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0;1;0)$. Từ đó suy ra vectơ $\vec{n}_2 = -\vec{j} = (0;-1;0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Đáp án là B. □

Nhận xét: Bài toán này sử dụng một kết quả quen thuộc: "Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó".

VÍ DỤ 3.3. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oyz). Khẳng định nào dưới đây là đúng:*

A. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ.

B. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oy.

C. Mặt phẳng (P) song song với trục Ox.

D. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0)$.

LỜI GIẢI. Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oyz) nên (P) vuông góc với trục Ox. Do đó (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0)$.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 3.4. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là: $ax + by + cz + d = 0$. Với a, b, c, d tùy ý, vectơ nào dưới đây luôn là một vectơ pháp tuyến của (α):*

A. $\vec{n} = (ma; mb; mc)$ *với* $m \neq 0$. *B.* $\vec{n} = (ma; mb; mc)$ *với* $m \in \mathbb{R}$.

C. $\vec{n} = (ma; -mb; mc)$ *với* $m \neq 0$. *D.* $\vec{n} = (-a; b; c)$.

LỜI GIẢI. ***Đáp án là A.*** □

Nhận xét: Một mặt phẳng có thể có nhiều véc tơ pháp tuyến, các véc tơ pháp tuyến đó cùng phương với nhau .

VÍ DỤ 3.5. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?*

A. $\overrightarrow{n}=(-1;0;-1)$. *B.* $\overrightarrow{n}=(3;-1;2)$.

C. $\overrightarrow{n}=(3;-1;0)$. *D.* $\overrightarrow{n}=(3;0;-1)$.

LỜI GIẢI. ***Đáp án là D.*** □

Nhận xét: Khi xác định tọa độ của véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng, chúng ta không quan tâm tới hệ số tự do.

VÍ DỤ 3.6. *Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): -x+2y+4=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?*

A. $\overrightarrow{n}=(1;-2;0)$. *B.* $\overrightarrow{n}=(-1;0;4)$. *C.* $\overrightarrow{n}=(-1;2;4)$. *D.* $\overrightarrow{n}=(1;2;0)$.

LỜI GIẢI. Từ phương trình của mặt phẳng (P) ta suy ra mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_1}=(-1;2;0)$. Do đó $\overrightarrow{n_2}=-\overrightarrow{n_1}=(1;-2;0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
Đáp án là A. □

VÍ DỤ 3.7. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây nhận vectơ $\overrightarrow{n}=(-2;1;0)$ là một vectơ pháp tuyến ?*

A. $-2x+y+z=0$. *B.* $2x-y+1=0$.

C. $x-2y=0$. *D.* $-2x+z=0$.

LỜI GIẢI. ***Đáp án là B.*** □

VÍ DỤ 3.8. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{1}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. Vectơ nào dưới đây là KHÔNG là vectơ pháp tuyến của (Q)?*

A. $\overrightarrow{n_1}=(1;-2;3)$. *B.* $\overrightarrow{n_2}=(6;-3;2)$.

C. $\overrightarrow{n_3}=\left(1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. *D.* $\overrightarrow{n_4}=(-6;3;-2)$.

LỜI GIẢI. Phương trình của mặt phẳng (P) được viết lại dưới dạng:

$$6x-3y+2z-6=0.$$

Từ đó suy ra các vectơ $\overrightarrow{n_2}; \overrightarrow{n_3}; \overrightarrow{n_4}$ là những vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P), và do đó các vectơ đó cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Các vectơ pháp tuyến của cùng một mặt phẳng cùng phương. Trong các phương án của đề bài, ba vectơ $\overrightarrow{n_2}; \overrightarrow{n_3}; \overrightarrow{n_4}$ cùng phương, vectơ $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với ba vectơ đó. Do đó vectơ $\overrightarrow{n_1}$ không phải là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

VÍ DỤ 3.9. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng*

$$(Q): \ 4x - 4y + 2z + 1 = 0.$$

Tìm tất cả các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ của mặt phẳng (P) và có độ dài bằng 3 .

A. $\overrightarrow{n} = (4; -4; 2)$.

B. $\overrightarrow{n} = (2; 2; 1)$.

C. $\overrightarrow{n} = (2; -2; 1)$.

D. $\overrightarrow{n} = (2; -2; 1)$ *hoặc* $\overrightarrow{n} = (-2; 2; -1)$.

LỜI GIẢI. Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên ta có:

$$\overrightarrow{n} = k.\overrightarrow{n_Q} = k.(4; -4; 2) = (4k; -4k; 2k)$$

với $k \neq 0$.

Mặt khác, do $\overrightarrow{n}$ có độ dài bằng 3 nên ta có:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{(4k)^2 + (-4k)^2 + (2k)^2} = 3 \Leftrightarrow 6|k| = 3 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy $\overrightarrow{n} = (2; -2; 1)$ hoặc $\overrightarrow{n} = (-2; 2; -1)$.

Đáp án là D. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án:

Loại đáp án A vì độ dài của vectơ trong phương án đó bằng $\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6$. Cả hai vectơ ở các phương án B và C cùng song song với $\overrightarrow{n_Q}$ và cùng có độ dài bằng 3 nên ta chọn đáp án D!

VÍ DỤ 3.10. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(1; 0; 1)$, $B(0; -1; -3)$, $C(3; 2; 5)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?*

A. $\overrightarrow{n}=(1;-1;0)$. *B.* $\overrightarrow{n}=(1;1;0)$.

C. $\overrightarrow{n}=(4;4;0)$. *D.* $\overrightarrow{n}=(2;2;-1)$.

LỜI GIẢI. Từ giả thiết ta suy ra

$$\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-4)\,;\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AC}=(2;2;4)\,.$$

Ta có

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&-4\\2&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4&-1\\4&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}\right)=(4;-4;0)\,.$$

Ta chọn

$$\overrightarrow{n_P}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-1;0)\,.$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án:

Kiểm tra điều kiện $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$ *ta loại được các đáp án B, C.*

Kiểm tra điều kiện $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AC}=0$ *ta loại được đáp án D.*

VÍ DỤ 3.11. *Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng* $(Q):x+y-3z=0$, *đồng thời (P) song song với trục Oz. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?*

A. $\overrightarrow{n}=(1;1;-3)$. *B.* $\overrightarrow{n}=(0;0;1)$. *C.* $\overrightarrow{n}=(1;-1;0)$. *D.* $\overrightarrow{n}=(1;1;0)$.

LỜI GIẢI. Từ giả thiết ta suy ra

$$\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}=(1;1;-3)\,;\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{k}=(0;0;1)\,.$$

Ta chọn

$$\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{k}\right]=\left(\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&1\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\right)=(1;-1;0)\,.$$

Đáp án là C. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án:

Kiểm tra điều kiện $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{n}=0$ *ta loại được các đáp án A, B.*

Kiểm tra điều kiện $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n}=0$ *ta loại được đáp án D.*

VÍ DỤ 3.12. *Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là:*

$$x - my + (m+3)z + 1 = 0; \quad x + y + 2z = 0.$$

Với những giá trị nào của m thì mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

A. $m = -1$. *B.* $m = 0$.

C. $m = -7$. *D. Không có* m *thỏa mãn bài toán.*

LỜI GIẢI. Ta có: $\overrightarrow{n_P} = (1; -m; m+3)$, $\overrightarrow{n_Q} = (1; 1; 2)$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 1.1 + (-m).1 + (m+3).2 = 0 \Leftrightarrow m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -7.$$

Đáp án là C. □

Dạng 2: Lập phương trình của mặt phẳng

Phương pháp giải: Dựa vào bài toán ta tìm một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) và tìm một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (A; B; C)$ của mặt phẳng (P). Sau đó viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C.(z - z_0) = 0.$$

VÍ DỤ 3.13. *Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?*

A. Cho trước ba điểm phân biệt trong không gian, ta luôn dựng được ít nhất một mặt phẳng chứa ba điểm đó.

B. Với hai đường thẳng cho trước, ta luôn dựng được ít nhất một mặt phẳng chứa 2 đường thẳng đó.

C. Một mặt phẳng chỉ có duy nhất một véc tơ pháp tuyến.

D. Cho trước một điểm và một đường thẳng, ta luôn dựng được duy nhất một mặt phẳng chứa điểm và đường thẳng đã cho.

LỜI GIẢI. Ta có :

B sai vì trong trường hợp hai đường thẳng chéo nhau thì không tồn tại mặt phẳng nào chứa cả hai đường thẳng đó.

C sai do một mặt phẳng có vô số các véc tơ pháp tuyến.

D sai do nếu điểm đó nằm trên đường thẳng đã cho thì ta dựng được vô số mặt phẳng thỏa mãn.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Với những bài tập mang tính lý thuyết như vậy, chúng ta cần xem xét tới vị trí tương đối của các yếu tố: phân biệt, nằm trong nhau, chéo nhau ,...

VÍ DỤ 3.14. *Mệnh đề nào dưới đây không đúng ?*

A. *Qua ba điểm phân biệt trong không gian luôn dựng được chỉ một mặt phẳng chứa ba điểm đó.*

B. *Qua hai đường thẳng song song luôn dựng được chỉ một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.*

C. *Phương trình* $ax + by + cz + d = 0$ *là phương trình tổng quát của một mặt phẳng nếu* $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

D. *Qua hai đường thẳng cắt nhau luôn dựng được chỉ một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.*

LỜI GIẢI. **Phương án A sai** vì với 3 điểm thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm đó.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Nếu bổ sung thêm dữ kiện ba điểm không thẳng hàng thì mệnh đề A đúng.

VÍ DỤ 3.15. *Trong không gian với hệ tọa độ* $Oxyz$, *phương trình của mặt phẳng* (α) *đi qua điểm* $A(1;1;-1)$ *và có vectơ pháp tuyến* $\overrightarrow{n} = (1;1;1)$ *là:*

A. $x + y - z - 2 = 0$. B. $x + y + z - 1 = 0$.

C. $x + y + z - 3 = 0$. D. $x + y + z + 2 = 0$.

LỜI GIẢI. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Cho trước điểm A và véc tơ $\overrightarrow{n}$ tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua A và nhận $\overrightarrow{n}$ làm véc tơ pháp tuyến.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ *với véc tơ pháp tuyến tương ứng* $\overrightarrow{n}$ *thì* $\overrightarrow{n} || (a, b, c)$.

Từ đó **loại đáp án A**. *Bấm máy kiểm tra thì thấy hai mặt phẳng ở đáp án* $C; D$ *không đi qua điểm (1; 1; -1).*

VÍ DỤ 3.16. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(100;2016;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(0;0;1)$ là:*

A. $x+y+z-107=0$. *B.* $z=3$.

C. $x=100$. *D.* $y=2016$.

LỜI GIẢI. Phương trình mặt phẳng (α):

$$0.(x-100)+0.(y-2016)+1.(z-3)=0 \Leftrightarrow z=3.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Mặt phẳng đi qua A nhận véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ có hai tọa độ bằng 0 thì phương trình của phẳng có dạng:

- $x=x_A$ nếu $b=c=0$;
- $y=y_A$ nếu $a=c=0$;
- $z=z_A$ nếu $a=b=0$.

VÍ DỤ 3.17. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ pháp tuyến cùng phương với véc tơ $\overrightarrow{n}=(2;2;4)$ là:*

A. $x+y+z=3$. *B.* $x+y+2z=4$

C. $2x+2y+4z=4$ *D.* $-2x-2y-4z=4$

LỜI GIẢI. Do mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến cùng phương với vectơ $\overrightarrow{n}(2;2;4)$ nên ta có thể chọn

$$\overrightarrow{n_P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{n}=(1;1;2).$$

Mặt khác mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ nên phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$1.(x-1)+1.(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2z=4$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Nếu $\overrightarrow{m}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{n}$ thì $\overrightarrow{m}$ cũng là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: **Loại đáp án A** *do hai vectơ $(1;1;1)$ và $(2;2;4)$ không cùng phương.*

Loại C;D *do các mặt phẳng này không chứa A.*

VÍ DỤ 3.18. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-3=0$ và điểm $A(1;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).*

A. $x+2y-z=0$. *B.* $x+2y+z=0$.

C. $x-2y-z=0$. *D.* $x+2y-z=1$.

LỜI GIẢI. Vì hai mặt phẳng (β) và (α) song song nên phương trình mặt phẳng (β) có dạng:

$$x+2y-z+D=0 \quad \text{với} \quad D\neq -3.$$

Do (β) đi qua $A(1;0;1)$ nên ta có: $1-1+D=0\Leftrightarrow D=0$.
Vậy phương trình của (β) là $x+2y-z=0$.
Đáp án là A. □

Nhận xét: Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): ax+by+cz+d=0$ thì phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:

$$ax+by+cz+m=0$$

với $m\neq d$.
Thủ thuật chọn nhanh đáp án: **Loại các đáp án B, D** *vì các mặt phẳng đó không đi qua A.*
Loại C *vì mặt phẳng đó không song song với mặt phẳng (α).*

VÍ DỤ 3.19. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(2;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với AB.*

A. $x+y+2z-3=0$. *B.* $x+3y+4z-7=0$.

C. $x+y+2z-6=0$. *D.* $x+3y+4z-26=0$.

LỜI GIẢI. Vì mặt phẳng (α) vuông góc với AB nên vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của (α) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;4)$, suy ra ta có thể chọn $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;2)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-0)+1(y-1)+2(z-1)=0\Leftrightarrow x+y+2z-3=0.$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB thì ta có thể chọn:

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}.$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: **Loại các đáp án C, D** *vì các mặt phẳng đó không đi qua A.*
Loại B *vì vectơ pháp tuyến mặt phẳng đó không song song với vectơ* $\overrightarrow{AB}$.

VÍ DỤ 3.20. *Trong không gian* $Oxyz$*, cho hai điểm* $A(-2;0;4)$ *và* $B(2;2;-2)$*. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng* AB.

A. $2x+y-3z+2=0$. *B.* $2x-y-3z=0$.
C. $2x+y-3z-2=0$. *D.* $y=1$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và (P) vuông góc với AB. Ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1 \\ z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1).$$

Ta chọn: $\overrightarrow{n_P} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2;1;-3)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2x+(y-1)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z+2=0.$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: **Loại các đáp án B, C** *vì các mặt phẳng đó không đi qua I.*
Loại D *vì vectơ pháp tuyến mặt phẳng đó không song song với vectơ* $\overrightarrow{AB}$.

VÍ DỤ 3.21. *Trong không gian* $Oxyz$*, viết phương trình mặt phẳng* (α) *song song với mặt phẳng* $(\beta): x+y-2z+4=0$ *đồng thời cắt các trục* Ox, Oz *lần lượt tại hai điểm* M, N *sao cho* $MN=\sqrt{5}$.

A. $x+y-2z+2=0$. *B.* $x+y-2z-2=0$.
C. $x+y-2z\pm 2=0$. *D.* $2x+y-2z+2=0$.

LỜI GIẢI. Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng

$$x+y-2z+D=0$$

trong đó $D \neq 4$.
Theo giả thiết, mặt phẳng (α) cắt hai trục Ox, Oz tại hai điểm M, N suy ra $M(-D;0;0)$ và $N(0;0;\dfrac{D}{2})$.
Khi đó, $MN=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{D^2+\dfrac{D^2}{4}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{5D^2}{4}=5 \Leftrightarrow D^2=4 \Leftrightarrow D=\pm 2$.
Đáp án là C. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại D vì mặt phẳng đó không song song với mặt phẳng (β).
Thử đáp án ta thấy được cả hai mặt phẳng $x+y-2z\pm 2=0$ đều thỏa mãn.

VÍ DỤ 3.22. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;2)$ và hai mặt phẳng $(\alpha_1): x-y+3=0$ và $(\alpha_2): y-z+3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) là:*

A. $x+y+z-2=0$. *B.* $2x+2y+2z+3=0$.
C. $x-y-z+2=0$. *D.* $x+y-z+2=0$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_{\alpha_1}}=(1;-1;0); \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_{\alpha_2}}=(0;1;-1).$$

Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{n_{\alpha_1}}, \overrightarrow{n_{\alpha_2}}]=(1;1;1).$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-0)+1(y-0)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+z-2=0.$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại B vì mặt phẳng đó không đi qua A.
Loại C vì mặt phẳng đó không không vuông góc với mặt phẳng (α_1).
Loại C vì mặt phẳng đó không không vuông góc với mặt phẳng (α_2).

VÍ DỤ 3.23. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;0)$, $N(-2;0;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z+3=0$. Phương trình mặt phẳng (β) đi qua hai điểm M, N và vuông góc với mặt phẳng (α) là:*

A. $2x-3y-12z+4=0$. *B.* $2x-3y-12z-4=0$.

C. $3x+5y+z-13=0$. *D.* $z=0$.

LỜI GIẢI. Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{MN} = (-3;-2;0)$ và $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha} = (3;-2;1)$. Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{n_\alpha}] = (-2;3;12).$$

Mặt phẳng (β) đi qua $M(1;2;0)$ và nhận $\overrightarrow{n_\beta}(-2;3;12)$ làm véc tơ pháp tuyến, phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$-2(x-1)+3(y-2)+12z=0 \Leftrightarrow 2x-3y-12z+4=0.$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Tương tự bài tập trước, ta sẽ lấy tích có hướng $\overrightarrow{MN}$ và véc tơ pháp tuyến của (α).

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại B vì mặt phẳng không đi qua M.
Loại C vì mặt phẳng không đi qua N.
Loại D vì mặt phẳng không vuông góc với mặt phẳng (α).

VÍ DỤ 3.24. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(3;0;0)$, $B(-1;1;1)$ và $C(-3;1;2)$ là:*

A. $x+3y+z-3=0$. *B.* $x+2y+2z-3=0$.

C. $x+2y+2z+3=0$. *D.* $x-2y+4z-3=0$.

LỜI GIẢI. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4;1;1)$; $\overrightarrow{AC} = (-6;1;2)$. Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1;2;2).$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-3)+2(y-0)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-3=0.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Sau khi tính được véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng, chúng ta có thể loại đi các mặt phẳng có hệ số $a;b;c$ mà véc tơ $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ không song song với véc tơ pháp tuyến vừa tìm được.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại đáp án A vì mặt phẳng không đi qua điểm C.

Loại đáp án C vì mặt phẳng không đi qua điểm A.

Loại đáp án D vì mặt phẳng không đi qua điểm B.

VÍ DỤ 3.25. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $M(1;2;3)$ và chứa trục Ox.*

A. $3x-z=0$. *B.* $2x-y=0$.

C. $3y-2z=0$. *D.* $3y+2z-12=0$.

LỜI GIẢI. Ta có mặt phẳng (P) đi qua O, đồng thời ta có:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{OM} = (1;2;3),\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{i} = (1;0;0).$$

Ta có thể chọn:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{i}\right] = (0;3;-2).$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là:

$$0(x-1)+3(y-2)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow 3y-2z=0.$$

Đáp án là C. □

Nhận xét: Bài toán có thể giải theo cách sau: Vì mặt phẳng (P) chứa trục Ox nên phương trình của (P) có dạng:

$$by+cz=0.$$

Mặt khác (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ nên ta có:

$$b.2+c.3=0 \Leftrightarrow b=-\frac{3c}{2}.$$

Từ đó suy ra (P) có phương trình là $3y-2z=0$.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại các đáp án A và B vì các mặt phẳng đó không vuông góc với trục Ox.

Loại đáp án D vì mặt phẳng không đi qua O.

Dạng 3: Phương trình mặt phẳng chắn

Phương pháp giải: Tìm giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ (khác O). Khi đó phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

VÍ DỤ 3.26. *Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$.*

A. $6x+3y+2z-6=0$. *B.* $6x+3y+2z+6=0$.

C. $6x-3y+2z-6=0$. *D.* $6x+3y-2z-6=0$.

LỜI GIẢI. Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có :

$$(\alpha):\quad \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0.$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án:

Loại đáp án B *do mặt phẳng ở đáp án B không chứa A.*

Loại đáp án D *do mặt phẳng ở đáp án D không chứa B.*

Loại đáp án C *do mặt phẳng ở đáp án C không chứa C.*

VÍ DỤ 3.27. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;6)$, $B(0;-3;0)$ và $C(6;0;0)$. Phương trình nào sau đây* ***không*** *là phương trình của mặt phẳng (ABC)?*

A. $x-2y+z-6=0$. *B.* $\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$.

C. $x+2y+z-6=0$. *D.* $\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6}-1=0$.

LỜI GIẢI. Phương trình mặt phẳng chắn (ABC) là:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow x-2y+z-6=0.$$

Đáp án là C. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Chúng ta sẽ sử dụng phương trình đoạn chắn để giải hoặc bấm máy kiểm tra xem mặt phẳng nào không chứa 3 điểm.

VÍ DỤ 3.28. *Trong không gian Oxyz, gọi $A_1; A_2; A_3$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A (2; 3; 4) trên các trục Ox, Oy, Oz. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào* ***sai:***

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$.

B. Phương trình mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ *là:* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

C. Thể tích của tứ diện $OA_1A_2A_3$ *bằng 4.*

D. Mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ *đi qua điểm A.*

LỜI GIẢI. Vì $A_1; A_2; A_3$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 3; 4)$ trên các trục Ox, Oy, Oz nên ta có

$$A_1(2; 0; 0),\ A_2(0; 3; 0),\ A_3(0; 0; 4).$$

Từ đó suy ra các khẳng định A và B là đúng. Thể tích của khối tứ diện $OA_1A_2A_3$ là:

$$V_{OA_1A_2A_3} = \frac{1}{3}.OA_3.S_{\Delta OA_1A_2} = \frac{1}{6}OA_3.OA_1.OA_2 = \frac{1}{6}.4.3.2 = 4.$$

Vậy khẳng định C là đúng.

Khẳng định D là sai do

$$\frac{x_A}{2} + \frac{y_A}{3} + \frac{z_A}{4} = \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} = 3 \neq 1 \Rightarrow A \notin (A_1A_2A_3).$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 3.29. *Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M sao cho (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C và M là trọng tâm của tam giác ABC.*

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

B. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 0$.

C. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$.

D. $3x + 2y + z = 14$.

LỜI GIẢI. Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$. Vì M là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_M \\ y_A + y_B + y_C = 3y_M \\ z_A + z_B + z_C = 3z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 + 0 = 3.3 \\ 0 + b + 0 = 3.2 \\ 0 + 0 + c = 3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(9; 0; 0) \\ B(0; 6; 0) \\ C(0; 0; 3). \end{cases}$$

Phương trình của mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$.

Đáp án là C. □

Nhận xét: Loại các đáp án A và B vì các mặt phẳng đó không đi qua M.

VÍ DỤ 3.30. *Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(3;2;1)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC đều.*

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. *B.* $3x+2y+z-14=0$.

C. $3x+2y+z=1$. *D.* $x+y+z-6=0$.

LỜI GIẢI. Ta thấy mặt phẳng (P) không đi qua điểm O, vì nếu (P) đi qua O thì bốn điểm A,B,C,O trùng nhau. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó $a,b,c>0$. Tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AB^2=AC^2 \\ AB^2=BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=a^2+c^2 \\ a^2+b^2=b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=c^2 \\ a^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$

(do $a,b,c>0$).

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Mặt khác $M(3;2;1)$ thuộc mặt phẳng (P) nên ta có:

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=1 \Leftrightarrow a=6 \Rightarrow a=b=c=6.$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow x+y+z-6=0.$$

Đáp án là D. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại các đáp án A và C vì các mặt phẳng đó không đi qua điểm M.

Chọn đáp án D vì mặt phẳng đó cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm $A(6;0;0)$, $B(0;6;0)$, $C(0;0;6)$ và tam giác ABC đều.

VÍ DỤ 3.31. *Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;2)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.*

A. $2x+y+2z-9=0$. *B.* $2x+2y+z-9=0$.

C. $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=3$. *D.* $x+2y+2z-9=0$.

LỜI GIẢI. Ta có

$$OA \perp OB, OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$$

Mặt khác ta có $AM \perp BC$ nên ta suy ra $BC \perp (OAM)$. Từ đó ta được: $BC \perp OM$. Chứng minh tương tự ta được $AC \perp OM$. Do đó $OM \perp (ABC)$. Ta chọn

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{OM} = (2; 1; 2).$$

Từ đó suy ra phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$2(x-2) + 1(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 9 = 0.$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Tứ diện $ABCD$ được gọi là một tứ diện trực tâm nếu các cặp cạnh đối diện của chúng đôi một vuông góc. Một tính chất tốt của tứ diện trực tâm là hình chiếu vuông góc của một đỉnh trên mặt đối diện là trực tâm của mặt đối diện đó. Trong bài này, do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta suy ra được $OABC$ là một tứ diện trực tâm. Từ đó theo giải thiết ta có ngay $\overrightarrow{OM}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: *Loại các đáp án B và D vì các mặt phẳng đó không đi qua điểm M.*

Loại đáp án C vì mặt phẳng đó cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$ và $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} \neq 0$.

VÍ DỤ 3.32. *Trong không gian Oxyz, cho ba điểm thay đổi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó a, b, c khác 0 và thỏa mãn điều kiện $bc + 3ac - 2ab = abc$. Khoảng cách lớn nhất từ O đến mặt phẳng (ABC) là:*

A. $\sqrt{6}$. *B.* $\sqrt{14}$. *C.* $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. *D. Không tồn tại.*

LỜI GIẢI. Phương trình của mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{bc + 3ac - 2ab}{abc} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{b} - \frac{2}{c} = 1.$$

Từ đó suy ra $M(1;3;-2) \in mp(ABC)$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mp(ABC). Ta có

$$d(O,(ABC)) = OH \leq OM = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng với M. Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\sqrt{14}$.
Đáp án là B. □

Nhận xét: Để tìm được các bài toán cực trị về hình học, có một cách hiệu quả là từ giải thiết chúng ta đi tìm các yếu tố cố định của bài toán, rồi từ đó tìm cách đánh giá thông qua các yếu tố cố định đó.

VÍ DỤ 3.33. *Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn đi qua điểm $M(3;1;2)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện OABC là:*

A. 6. *B.* 27.
C. 81. *D. Không tồn tại.*

LỜI GIẢI. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó $a,b,c>0$. Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Theo giả thiết ta có:

$$M(3;1;2) \in (P) \Leftrightarrow \frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1.$$

Ta có:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}OC.S_{\Delta OAB} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{abc}{6}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1 = \frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{a}.\frac{1}{b}.\frac{2}{c}} \Rightarrow abc \geq 27.6 \Rightarrow V_{OABC} \geq 27.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{3}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=3 \\ c=6. \end{cases}$

Đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 3.1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là:

A. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$.

B. $A(x - y_0) + B(y - z_0) + C(z - x_0) = 0$.

C. $A(x + x_0) + B(y + y_0) + C(z + z_0) = 0$.

D. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

BÀI TẬP 3.2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(-x_0; y_0; -z_0)$ và có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A, -B, C)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là:

A. $A(x + x_0) - B(y - y_0) + C(z + z_0) = 0$.

B. $A(x - x_0) - B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

C. $A(x - x_0) - B(y + y_0) + C(z - z_0) = 0$.

D. $A(x + x_0) - B(y + y_0) + C(z + z_0) = 0$.

BÀI TẬP 3.3. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng**:

A. Mỗi một mặt phẳng chỉ có duy nhất một vectơ pháp tuyến.

B. Mặt phẳng (P) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm A thuộc (P) và biết một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

C. Mặt phẳng (P) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm A thuộc (P) và (P) vuông góc với một mặt phẳng (Q) cho trước.

D. Mặt phẳng (P) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm A thuộc (P) và (P) song song với một đường thẳng d cho trước.

BÀI TẬP 3.4. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (A; B; C)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc thì hai vectơ pháp tuyến của chúng cũng vuông góc.

C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) có hai vectơ pháp tuyến bằng nhau thì chúng song song.

D. Nếu hai mặt phẳng cắt nhau thì hai vectơ pháp tuyến của chúng không cùng phương.

BÀI TẬP 3.5. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ không trùng với O. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}-1=0$.
B. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.
C. $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}-1=0$.
D. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1=0$.

BÀI TẬP 3.6 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-z+2=0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n}=(-1;0;-1)$.
B. $\overrightarrow{n}=(3;-1;2)$.
C. $\overrightarrow{n}=(3;-1;0)$.
D. $\overrightarrow{n}=(3;0;-1)$.

BÀI TẬP 3.7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oz. Tìm tất cả các vectơ pháp tuyến của (P).

A. $\overrightarrow{n}=(m;m;0)$ với $m\neq 0$.
B. $\overrightarrow{n}=(0;0;1)$.
C. $\overrightarrow{n}=(0;0;m)$ với $m\neq 0$.
D. $\overrightarrow{n}=(0;0;-1)$.

BÀI TẬP 3.8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q):\ 4x-4y-2z-1=0$. Tìm tất cả các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ của mặt phẳng (P) và có độ dài bằng 3 .

A. $\overrightarrow{n}=(4;-4;-2)$.
B. $\overrightarrow{n}=(2;2;-1)$.
C. $\overrightarrow{n}=(2;-2;-1)$.
D. $\overrightarrow{n}=(2;-2;-1)$ hoặc $\overrightarrow{n}=(-2;2;1)$.

BÀI TẬP 3.9. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): mx+y+(m+3)z+1=0, (Q): -x+y+2z=0$. Với những giá trị nào của m thì mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q).

A. $m=-1$.
B. $m=0$.
C. $m=-7$.
D. Không có m thỏa mãn bài toán.

BÀI TẬP 3.10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ với $(a^2+b^2+c^2>0)$. Mệnh đề nào dưới đây **không đúng**?

A. $\overrightarrow{n} = (a;b;c) \perp \overrightarrow{AB} \quad \forall A;B \in (\alpha)$.

B. Nếu $\overrightarrow{m}$ là véc tơ chỉ phương của (d) (đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α)) thì $\overrightarrow{n} = (a;b;c) \perp \overrightarrow{m}$.

C. $\overrightarrow{n} = (a;b;c)$ được gọi là vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

D. $\overrightarrow{n} = (a;b;c)$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

BÀI TẬP 3.11. Trong không gian Oxyz, phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oxy) là:

A. $x = 0$. B. $y = 0$. C. $z = 0$. D. $x + y = 0$.

BÀI TẬP 3.12. Trong không gian Oxyz, phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oyz) là:

A. $x = 0$. B. $y = 0$. C. $z = 0$. D. $y + z = 0$.

BÀI TẬP 3.13. Trong không gian Oxyz, phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) là:

A. $x = 1$. B. $y = -2$. C. $z = 3$. D. $z + 3 = 0$.

BÀI TẬP 3.14. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;4)$ và song song với hai trục Ox, Oy. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là:

A. $x = 2$. B. $y = 3$.

C. $2x + 3y + 4z - 29 = 0$. D. $z - 4 = 0$.

BÀI TẬP 3.15. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1;1;2)$ là:

A. $x + y + 2z - 1 = 0$. B. $x + y - 2z - 1 = 0$.

C. $x - y + 2z - 1 = 0$. D. $x + y + 2z + 1 = 0$

BÀI TẬP 3.16. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2017;2016;2018)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (1;0;0)$ là:

A. $x-y+z-19 = 0$ B. $z = 2018$ C. $x = 2017$ D. $y = 2016$

BÀI TẬP 3.17 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với AB.

A. $x + y + 2z - 3 = 0$. B. $x + 3y + 4z - 7 = 0$.

C. $x + y + 2z - 6 = 0$. D. $x + 3y + 4z - 26 = 0$.

BÀI TẬP 3.18. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (α) : $2x+3y-4z-2=0$ và điểm $A(0;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).

A. $2x+3y-4z+2=0$. B. $2x+3y-4z-6=0$.

C. $2x+3y-4z-3=0$. D. $2x+3y-4z-5=0$.

BÀI TẬP 3.19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;5)$ và $B(-1;5;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

A. $x+y+z=0$. B. $x+y-z=0$.

C. $x-y+z=0$. D. $-x+y+z=0$.

BÀI TẬP 3.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;0;4)$ và $B(2;2;-2)$. Tìm tập hợp các điểm M cách đều hai điểm A và B.

A. $2x+y-3z+2=0$. B. $2x-y-3z=0$.

C. $2x+y-3z-2=0$. D. $y=1$.

BÀI TẬP 3.21. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): x-y+2z-1=0$ đồng thời (α) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.

A. $x-y+2z-2=0$ B. $x-y+2z+2=0$

C. $x-y+2z=0$ D. $x-y+2z\pm 2=0$

BÀI TẬP 3.22. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;1)$, $B(0;0;0)$ và $C(0;0;2)$ là:

A. $y=0$ B. $x-1=0$ C. $x+y-z=0$ D. $z-2=0$

BÀI TẬP 3.23. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và chứa đường thẳng BC, trong đó $B(4;0;1)$, $C(-10;5;3)$.

A. $-x-2y-2z-6=0$ B. $-x-2y-2z-5=0$

C. $x+2y+2z-3=0$ D. $x+2y+2z-6=0$

BÀI TẬP 3.24. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;0;5)$ và có vectơ pháp tuyến vuông góc với $\overrightarrow{n}=(1;2;1)$; $\overrightarrow{m}=(2;2;3)$ là:

A. $4x-y+2z+6=0$. B. $4x-y-2z+6=0$

C. $4x-y-2z-6=0$ D. $-2x-2y-4z=4$

BÀI TẬP 3.25. Trong không gian Oxyz, lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-2;-1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng

$$(Q):\ x+y-3z=0,\quad (R):2x-y-z=0.$$

A. $4x+5y+3z+22=0$.
B. $4x-5y+3z-12=0$.
C. $2x+y+3z-22=0$.
D. $4x+5y+3z-22=0$.

BÀI TẬP 3.26. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-1;1)$, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+2y-z+1=0$ và song song với trục Ox.

A. $y+2z-1=0$.
B. $y-2z+3=0$.
C. $x-1=0$.
D. $y+2z+1=0$.

BÀI TẬP 3.27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha):-2x-y+z+3=0$. Phương trình mặt phẳng (β) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

A. $x+2y+z-1=0$.
B. $x+y+4z-1=0$.
C. $x+2y+4z-1=0$.
D. $x+y+z-1=0$.

BÀI TẬP 3.28. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và chứa trục Oz.

A. $3x-z=0$.
B. $2x-y=0$.
C. $3y-2z=0$.
D. $2x+y-4=0$.

BÀI TẬP 3.29. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;1)$, $B(2;1;0)$ và song song với trục Ox.

A. $y+2z-1=0$.
B. $y-2z+3=0$.
C. $x-1=0$.
D. $y+2z+1=0$.

BÀI TẬP 3.30. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$, $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A,B và khoảng cách từ C tới (P) bằng khoảng cách từ D tới (P).

A. $4x+2y+7z-15=0$ hoặc $2x+3z-5=0$
B. $4x+2y+7z-15=0$ hoặc $2x+4z-5=0$
C. $2x+3z-5=0$
D. $-4x+2y+7z-15=0$

BÀI TẬP 3.31. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-2;2;-4)$, ba đỉnh B, C, D cùng thuộc mặt phẳng (Oxy). Gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm B', C', D'.

A. $x = -2$. B. $y = 2$. C. $z = -2$. D. $z = 2$.

BÀI TẬP 3.32. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) nào dưới đây đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-3)$.

A. $6x - 3y - 2z + 6 = 0$. B. $6x - 3y - 2z - 1 = 0$.

C. $6x - 3y - 2z - 6 = 0$. D. $6x - 3y - 2z + 3 = 0$.

BÀI TẬP 3.33. Trong không gian Oxyz, gọi $A_1; A_2; A_3$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2,-3,4)$ trên các trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình của mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$.

A. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} + \dfrac{z}{4} = 0$. B. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} + \dfrac{z}{4} = 1$.

C. $2x - 3y + 4z = 1$. D. $6x - 4y + 3z = 1$.

BÀI TẬP 3.34. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(3;-2;1)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M sao cho (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C và M là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{1} = 1$. B. $\dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{-6} + \dfrac{z}{3} = 0$.

C. $\dfrac{x}{9} - \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{3} = 1$. D. $9x - 6y + 3z = 1$.

BÀI TẬP 3.35. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(2;1;3)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC đều.

A. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{3} = 1$. B. $x + y + z - 6 = 0$.

C. $2x + 3y + z = 1$. D. $2x + y + 3z - 14 = 0$.

BÀI TẬP 3.36. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;2)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

A. $2x - y + 2z - 9 = 0$. B. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 1$.

C. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{2} = 3$. D. $2x - 2y + 2z + 9 = 0$.

BÀI TẬP 3.37. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn đi qua điểm $M(2;3;4)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho tam giác ABC đều. Số mặt phẳng (P) thỏa mãn bài toán là:

A. 0. B. 1. C. 4. D. 8.

BÀI TẬP 3.38. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn đi qua điểm $M(2;3;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện OABC là:

A. 6. B. 27. C. 81. D. 18.

BÀI TẬP 3.39. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm là $C(0;0;2)$, $M(1;1;1)$. Cho (P) cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho thể tích của tứ diện OABC nhỏ nhất.

A. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$. B. $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$.

C. $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. D. $x+y+2z+4=0$.

BÀI TẬP 3.40. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1;1;1)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$.

B. $x+y+z-3=0$.

C. $x+y+z=6$.

D. $x+y+z-3=0$ hoặc $x+y+z+3=0$.

BÀI TẬP 3.41. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm thay đổi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó a, b, c là ba số dương và thỏa mãn điều kiện $bc+3ac+2ab \geq abc$. Khoảng cách lớn nhất từ O đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{14}$. C. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. D. Không tồn tại.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 3.1. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.2. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.3. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.4. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.5. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.6. Ta có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n} = (3; 0; -1)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.7. Vì mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oz nên $\overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do đó tập hợp các vectơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n} = (0; 0; m)$ với $m \neq 0$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.8. Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên ta có:

$$\overrightarrow{n} = k.\overrightarrow{n_Q} = k.(4; -4; -2) = (4k; -4k; -2k)$$

với $k \neq 0$.
Mặt khác, do $\overrightarrow{n}$ có độ dài bằng 3 nên ta có:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{(4k)^2 + (-4k)^2 + (-2k)^2} = 3 \Leftrightarrow 6|k| = 3 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy $\overrightarrow{n} = (2; -2; -1)$ hoặc $\overrightarrow{n} = (-2; 2; 1)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.9. Ta có: $\overrightarrow{n_P} = (m; 1; m+3)$, $\overrightarrow{n_Q} = (-1; 1; 2)$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow m.(-1) + 1.1 + (m+3).2 = 0 \Leftrightarrow m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -7.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.10. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.11. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.12. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.13. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.14. Vì mặt phẳng (P) song song với hai trục Ox, Oy nên (P) vuông góc với trục Oz. Do đó ta có thể chọn $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{k} = (0;0;1)$. Suy ra phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$1.(z-4) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.15. Phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.16. Phương trình mặt phẳng (α):

$$1.(x-2017) + 0.(y-2016) + 0.(z-2018) = 0 \Leftrightarrow x = 2017.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.17. Mặt phẳng (α) vuông góc với AB nên ta có thể chọn

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} = (1;1;2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-0) + 1(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.18. Vì mặt phẳng (β) song song với (α) nên ta có thể chọn

$$\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2;3;-4).$$

Suy ra, phương trình mặt phẳng (β) là:

$$2(x-0) + 3(y-2) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 4z - 6 = 0.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.19. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và (P) vuông góc với AB. Ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 4 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(0;4;4).$$

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-2)$. Ta chọn: $\overrightarrow{n_P} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(x-0) - 1(y-4) + 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.20. Gọi $M(x;y;z)$. Ta có

$$\begin{aligned} & AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2 + y^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + y - 3z + 2 = 0. \end{aligned}$$

Đáp án là A.

Ta cũng lưu ý rằng tập hợp các điểm M cách đều hai điểm A và B chính là mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB. □

GIẢI BÀI TẬP 3.21. Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta) : x - y + 2z - 1 = 0$ nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng:

$$x - y + 2z + D = 0$$

trong đó $D \neq -1$.
Theo giả thiết, mặt phẳng (α) cắt hai trục Ox, Oy tại hai điểm M, N suy ra $M(-D;0;0)$ và $N(0;D;0)$.
Khi đó, $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{D^2 + D^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2D^2 = 8 \Leftrightarrow D^2 = 4 \Leftrightarrow D = \pm 2$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.22. Ta có: $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{BA} = (1;0;1)$; $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{BC} = (0;0;2)$. Ta có:

$$[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = (0;-2;0)$$

Ta chọn: $\overrightarrow{n_P} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là: $-2(y-0) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.23. Vì mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C nên vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của (α) vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Do đó vectơ $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương với vectơ

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 24; 24).$$

Ta chọn $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 2; 2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-2) + 2(y+1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Vậy đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 3.24. Ta có $[\vec{n}, \vec{m}] = (4; -1; -2)$ là véc tơ pháp tuyến của (α). Mặt khác mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; 0; 5)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$4(x-1) - y - 2(z-5) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 2z + 6 = 0.$$

Vậy đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.25. Từ giả thiết ta suy ra

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} = (1; 1; -3)\,;\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_R} = (2; -1; -1).$$

Ta chọn

$$\overrightarrow{n_P} = -[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}] = (4; 5; 3).$$

Mặt khác mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-2; -1; -3)$ nên ta có phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$4(x+2) + 5(y+1) + 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y + 3z + 22 = 0.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.26. Ta có:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{i} = (1;0;0),\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} = (1;2;-1).$$

Ta có thể chọn:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{n_Q}\right] = \left(\left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{array}\right|; \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|; \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right|\right) = (0;1;2).$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(y+1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow y + 2z - 1 = 0.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.27. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;1;0)$ và $\overrightarrow{n_\alpha} = (-2;-1;1)$. Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\alpha}] = (1;2;4).$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (β) là:

$$1(x-1) + 2(y-0) + 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 4z - 1 = 0.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.28. Ta có mặt phẳng (P) đi qua O, đồng thời ta có:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{OM} = (1;2;3),\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{k} = (0;0;1).$$

Ta có thể chọn: $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{k}] = (2;-1;0)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2(x-1) - 1(y-2) - 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

Đáp án đúng là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.29. Ta có:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{i} = (1;0;0),\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{AB} = (1;2;-1).$$

Ta có thể chọn:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (0;1;2).$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(y+1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow y + 2z - 1 = 0.$$

Đáp án đúng là A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.30. Có hai trường hợp xảy ra:

- Mặt phẳng (P) qua A, B và song song với CD.
  Khi đó vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương với vectơ

  $$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (-8;-4;-14).$$

  Ta chọn: $\overrightarrow{n_P} = (4;2;7)$. Mặt khác mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;1)$ nên phương trình của mặt phẳng (P) là:

  $$4(x-1) + 2(y-2) + 7(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 7z - 15 = 0.$$

- (P) cắt CD tại trung điểm I của CD với $I(1;1;1)$.
  Mặt phẳng đi qua $A(1;2;1)$ và nhận véc tơ $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right] = (2;0;3)$ làm véc tơ pháp tuyến nên (P) có phương trình là:

  $$2(x-1) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3z - 5 = 0.$$

  Đáp án đúng là A.

□

GIẢI BÀI TẬP 3.31. Vì B', C', D' lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD nên mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (BCD), nghĩa là (P) song song với mặt phẳng (Oxy). Do đó ta có thể chọn

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{k} = (0;0;1).$$

Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của A trên các mặt phẳng (BCD), $(B'C'D')$. Ta có H' là trung điểm của AH.

Vì H là hình chiếu vuông góc của $A(-2;2;-4)$ trên mặt phẳng (Oxy) nên ta có $H(-2;2;0)$. Suy ta tọa độ trung điểm H' của AH là $H'(-2;2;-2)$. Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là

$$1.(z+2)=0 \Leftrightarrow z=-2.$$

Đáp án đúng là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.32. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta được phương trình mặt phẳng (α) là:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-3}=1 \Leftrightarrow 6x-3y-2z-6=0.$$

Vậy đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.33. Vì $A_1;A_2;A_3$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2,-3,4)$ trên các trục Ox,Oy,Oz nên ta có

$$A_1(2;0;0),\ A_2(0;-3;0),\ A_3(0;0;4).$$

Vậy phương trình của mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$ là:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.34. Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$. Vì $M(3;2;1)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_M \\ y_A+y_B+y_C=3y_M \\ z_A+z_B+z_C=3z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+0+0=3.3 \\ 0+b+0=3.(-2) \\ 0+0+c=3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-6 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(9;0;0) \\ B(0;-6;0) \\ C(0;0;3). \end{cases}$$

Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{9}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 3.35. Ta thấy mặt phẳng (P) không đi qua điểm O, vì nếu (P) đi qua O thì bốn điểm A, B, C, O trùng nhau. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó $a, b, c > 0$. Tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ a^2+b^2 = b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = c^2 \\ a^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

(do $a, b, c > 0$).

Phương trình mặt phẳng (P) có là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Mặt khác $M(2;1;3)$ thuộc mặt phẳng (P) nên ta có:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 6 \Rightarrow a = b = c = 6.$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.36. Ta có

$$OA \perp OB, OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$$

Mặt khác ta có $AM \perp BC$ nên ta suy ra $BC \perp (OAM)$. Từ đó ta được: $BC \perp OM$. Chứng minh tương tự ta được $AC \perp OM$. Do đó $OM \perp (ABC)$. Ta chọn

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{OM} = (2;-1;2).$$

Từ đó suy ra phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$2(x-2) - 1(y+1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 9 = 0.$$

Vậy đáp là đáp án A. □

GIẢI BÀI TẬP 3.37. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó a, b, c khác 0. Tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ a^2+b^2 = b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = c^2 \\ a^2 = c^2 \end{cases} \quad (I)$$

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Mặt khác $M(2;1;3)$ thuộc mặt phẳng (P) nên ta có:

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1 \quad (*).$$

Hệ (I) có bốn trường hợp xảy ra, trong mỗi trường hợp đó thay vào phương trình (*) ta được một mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Vậy có 4 mặt phẳng (P) thỏa mãn bài toán. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.38. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó $a,b,c>0$. Phương trình của mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Theo giả thiết ta có:

$$M(2;3;1)\in(P)\Leftrightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Ta có:

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}OC.S_{\Delta OAB}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{abc}{6}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a}.\frac{3}{b}.\frac{1}{c}}\Rightarrow abc\geq 27.6\Rightarrow V_{OABC}\geq 27.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{2}{a}=\frac{3}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=9\\c=3.\end{cases}$

Vậy đáp án đúng là đáp án B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.39. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0)$, trong đó $a,b>0$. Vì mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;2)$ nên phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2}=1.$$

Theo giả thiết ta có:

$$M(1;1;1)\in(P)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}OC.S_{\Delta OAB} = \frac{1}{6}OA.OB.2 = \frac{ab}{3}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}} \Rightarrow ab \geq 16 \Rightarrow V_{OABC} \geq \frac{16}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 3.40. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 3.41. *Đáp án là B.* □

CHỦ ĐỀ 4
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ $(a,b,c\neq 0)$ là:

$$d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}.$$

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ $(a,b,c\neq 0)$ là:

$$d:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

3. Nếu điểm M thuộc vào đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ hoặc phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ thì tọa độ M có dạng

$$M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct).$$

4. Nếu đường thẳng d có vectơ chỉ phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ không cùng phương thì vectơ chỉ phương của d là

$$\overrightarrow{u_d}=[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}].$$

5. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ của mặt phẳng (P) là một vectơ chỉ phương của d.

6. Nếu đường thẳng d song song hoặc thuộc các mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}$ thì vectơ chỉ phương của d xác định bởi

$$\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}].$$

7. Nếu đường thẳng d song song với đường thẳng Δ thì vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n_\Delta}$ của đường thẳng Δ là vectơ chỉ phương của d.

8. Nếu đường thẳng d vuông góc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 có các vectơ chỉ phương tương ứng là $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ không cùng phương thì vectơ chỉ phương của d xác định bởi $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Lập phương trình đường thẳng

VÍ DỤ 4.1. *Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}(a; b; c) \neq \overrightarrow{0}$ là*

A. $\Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ B. $\Delta : \begin{cases} x = a + x_0 t \\ y = b + y_0 t \\ z = c + z_0 t \end{cases}$

C. $\Delta : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ D. $\Delta : \dfrac{x - a}{x_0} = \dfrac{y - b}{y_0} = \dfrac{z - c}{z_0}$

LỜI GIẢI. ***Đáp án là C.*** □

VÍ DỤ 4.2. *Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(2; -1; 3)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}(3; 1; -1)$.*

A. $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ B. $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

C. $\Delta : \dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z + 1}{3}$ D. $\Delta : \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z - 3}{-1}$

LỜI GIẢI. ***Đáp án là B.*** □

VÍ DỤ 4.3. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;3), B(4;3;-1)$ và $C(3;-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với BC.*

A. $\Delta: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 3-2t \\ z = -1+3t \end{cases}$ *B.* $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+5t \\ z = 3-4t \end{cases}$

C. $\Delta: \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ *D.* $\Delta: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-3}{4}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{BC}(-1;-5;4)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-4} \text{ và } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+5t \\ z = 3-4t \end{cases}.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 4.4. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;0)$ và $N(-3;4;2)$. Phương trình đường thẳng qua M và N là:*

A. $MN: \begin{cases} x = 1-3t \\ y = -2+4t \\ z = 2t \end{cases}$ *B.* $MN: \begin{cases} x = -3+t \\ y = 4-2t \\ z = 2 \end{cases}$

C. $MN: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{1}$ *D.* $MN: \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-2}{1}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng qua hai điểm M, N là đường thẳng đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{MN}(-4;6;2)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó đường thẳng cần tìm có phương trình chính tắc là:

$$MN: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{6} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}.$$

Và phương trình tham số của MN là: $MN: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -2+3t \\ z = t \end{cases}$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 4.5. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;4)$ và $B(3;-3;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau* ***không*** *đi qua A và B.*

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-2t \\ z=4-2t \end{cases}$ *B.* $\begin{cases} x=3-t \\ y=-3+t \\ z=2+t \end{cases}$

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$ *D.* $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$

LỜI GIẢI. ***Đáp án là D.*** □

VÍ DỤ 4.6. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(3;5;2), C(3;1;-3)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (ABC).*

A. $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}$ *B.* $d:\dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z}{4}$

C. $d:\begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-4' \end{cases}$ *D.* $d:\begin{cases} x=0 \\ y=4t \\ z=5t \end{cases}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng d đi qua gốc $O(0;0;0)$. Do $d \perp (ABC)$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}(2;4;1), \overrightarrow{AC}(2;0;-4)$ vuông góc với vectơ chỉ phương của d . Suy ra đường thẳng d có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right)=(-16;10;-8).$$

Suy ra phương trình chính tắc của d là

$$d:\frac{x}{-16}=\frac{y}{10}=\frac{z}{-8}\Leftrightarrow\frac{x}{8}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$$

và phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=8t \\ y=-5t \\ z=4t \end{cases}$.

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 4.7. *Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):3x+2y+4z-7=0$ và $(Q):2x-3y-3z+4=0$.*

A. $\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = -2 - 17t \\ z = -2 + 13t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

C. $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-2}{17} = \dfrac{z}{-13}$ D. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng Δ cần tìm có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v_\Delta}$ xác định bởi tích có hướng của hai vectơ pháp tuyến các mặt phẳng $(P), (Q)$ là $\overrightarrow{n_P}(3;2;4), \overrightarrow{n_Q}(2;-3;-3)$. Suy ra

$$\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (6; 17; -13).$$

Mặt khác, xét hệ $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 7 = 0 \\ 2x - 3y - 3z + 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ thì hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa điểm $M(1;2;0)$ nên Δ cũng đi qua M. Vậy phương trình chính tắc và tham số của đường thẳng Δ là

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{17} = \frac{z}{-13} \text{ và } \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 17t \\ z = -13t \end{cases}.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 4.8. *Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng vuông góc chung Δ của hai đường thẳng*

$$d_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}.$$

A. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ B. $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$

C. $\begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = -1 - 2t' \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 2t' \end{cases}$

LỜI GIẢI. Gọi $H(1+3k;-1+2k;2-2k) \in d_1$ và $K(4+2t;4+2t;-3-t) \in d_2$ lần lượt là giao điểm đường vuông góc chung Δ với d_1, d_2. Suy ra

$$\overrightarrow{HK}(2t-3k+3;2t-2k+5;-t+2k-5).$$

Do Δ là đường vuông góc chung nên $\overrightarrow{HK}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của d_1 và d_2 là $\overrightarrow{v_1}(3;2;-2)$ và $\overrightarrow{v_2}(2;2;-1)$. Điều này dẫn tới

$$\begin{cases} \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{v_1}=0 \\ \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{v_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2t-3k+3)+2(2t-2k+5)-2(-t+2k-5)=0 \\ 2(2t-3k+3)+2(2t-2k+5)-1(-t+2k-5)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12t-17k+29=0 \\ 9t-12k+21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(4;1;0) \\ K(2;2;-2) \end{cases}.$$

Do $\overrightarrow{HK}(-2;1;-2)$ nên Δ có phương trình chính tắc và tham số tương ứng là

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2} \text{ và } \begin{cases} x=4+2t' \\ y=1-t' \\ z=2t' \end{cases}.$$

Đáp án là D. □

Tìm điểm trên đường thẳng

VÍ DỤ 4.9. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. Tìm trên d điểm B có hoành độ nguyên sao cho $AB=\sqrt{5}$.*

A. $B(-1;1;-3)$ *B.* $B(-4;0;1)$ *C.* $B\left(-\dfrac{27}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{9}{7}\right)$ *D.* $B(-5;3;3)$

LỜI GIẢI. Do B thuộc vào đường thẳng d nên tọa độ B thỏa mãn phương trình tham số của d. Do đó $B(-1-2t;1+t;-3+3t)$, suy ra

$$AB=\sqrt{(-1-2t+4)^2+(1+t-1)^2+(-3+3t-3)^2}=\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow (3-2t)^2+t^2+(3t-6)^2=5$$
$$\Leftrightarrow 14t^2-48t+40=0$$
$$\Leftrightarrow t=2 \text{ hoặc } t=\frac{10}{7}$$
$$\Leftrightarrow B(-5;3;3) \text{ hoặc } B\left(-\frac{27}{7};\frac{17}{7};\frac{9}{7}\right)$$

Do B có hoành độ nguyên nên $B(-5;3;3)$.

Đáp án là D. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Do điểm B có tọa độ nguyên nên ta có thể ***loại đáp án C****, mặt khác điểm B thuộc d nên bằng phép thử tọa độ điểm vào phương trình đường thẳng ta có thể* ***loại đáp án B****. Cuối cùng ta cần kiểm tra độ dài AB thì* ***đáp án A không thỏa mãn****. Vậy đáp án đúng là D.*

Nhận xét: Trong quá trình cho học sinh thực hành, chúng tôi nhận thấy cách làm tìm đáp án đúng trực tiếp sẽ đạt được hiệu quả nhanh hơn đối với học sinh khá giỏi, thành thạo kĩ năng tính toán. Còn cách làm gián tiếp bằng loại trừ các phương án sai phù hợp hơn với học sinh ở mức độ trung bình.

VÍ DỤ 4.10. *Cho hai điểm $A(2;-1;1)$, $B(-3;0;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM vuông tại A.*

A. $M(2;-1;2)$ *B.* $M(3;-2;4)$ *C.* $M(1;0;0)$ *D.* $M(3;-2;-4)$

LỜI GIẢI. Do điểm M thuộc d nên M có tọa độ $M(2+t;1-3t;2+2t)$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}(-5;1;2),\overrightarrow{AM}(t;2-3t;1+2t).$$

Tam giác ABM vuông tại A khi và chỉ khi $AM\perp AB$, có nghĩa là

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-5t+(2-3t)+2(1+2t)=0$$

$$\Leftrightarrow 4-4t=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow M(3;-2;4).$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Ngoài cách làm theo tích vô hướng, để kiểm tra một tam giác có vuông hay không ta còn có thể sử dụng định lý Pytago đảo. Tuy nhiên cách này sẽ khiến biểu thức trở nên phức tạp hơn. Do đó khi gặp góc vuông, phương án tốt nhất là dùng tích vô hướng. Đây cũng là cách giải nhanh nhất cho bài toán dạng này.

VÍ DỤ 4.11. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3),B(-3;-1;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm trên đường thẳng d, điểm M sao cho tam giác ABM vuông tại M.*

A. $M(-3;-2;3)$ *B.* $M(-2;0;4)$

C. $M(-4;-4;2)$ *D.* $M(-2;0;4)$ *hoặc* $M(-3;-2;3)$

LỜI GIẢI. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(-3+t;-2+2t;3+t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{MA}(4-t;-2t;-t), \overrightarrow{MB}(-t;1-2t;-t)$$

Tam giác ABM vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. Tức là

$$(4-t)(-t)+(-2t)(1-2t)+(-t)(-t)=0 \Leftrightarrow 6t^2-6t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$$

Do đó $M(-2;0;4)$ hoặc $M(-3;-2;3)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 4.12. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(2;-2;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM cân tại M.*

A. $M(3;1;4)$ *B.* $M(1;-1;3)$ *C.* $M\left(-\dfrac{3}{2};-2;\dfrac{5}{2}\right)$ *D.* $M(2;2;1)$

LỜI GIẢI. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(1+2t;-1+2t;3+t)$. Ta có

$$MA^2=(1+2t-1)^2+(-1+2t+2)^2+(3+t-3)^2=9t^2+4t+1$$
$$MB^2=(1+2t-2)^2+(-1+2t+2)^2+(3+t-2)^2=9t^2+2t+3$$

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi $MA=MB$. Tức là

$$9t^2+4t+1=9t^2+2t+3 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow M(3;1;4).$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 4.13. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(4;2;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM có diện tích là $2\sqrt{3}$.*

A. $M(0;0;0)$ *B.* $M(4;6;-2)$

C. $M(-12;-18;6)$ *D.* $M(4;6;-2)$ *hoặc* $M(-12;-18;6)$

LỜI GIẢI. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(2t;3t;-t)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}(1;1;0), \overrightarrow{AM}(2t-3;3t-1;-t-2)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3t-1 & -t-2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -t-2 & 2t-3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2t-3 & 3t-1 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (-t-2; t+2; t+2).$$

Diện tích tam giác ABM là

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-t-2)^2 + (t+2)^2 + (t+2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|t+2|.$$

Tam giác ABM có diện tích bằng $2\sqrt{3}$ khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|t+2| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |t+2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+2 = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow M(4;6;-2) \\ t+2 = -4 \Rightarrow t = -6 \Rightarrow M(-12;-18;6) \end{array} \right. .$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 4.14. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{1}$, mặt phẳng $(P) : x + y + 2z - 5 = 0$ và điểm $A(1;2;3)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho điểm N đối xứng với M qua A nằm trên mặt phẳng (P)*

A. $M(1;0;-2)$ *B.* $M(3;-3;1)$ *C.* $M(25;-24;6)$ *D.* $M(13;-12;2)$

LỜI GIẢI. Do điểm M thuộc d nên tọa độ M có dạng $M(1+3t; -3t; -2+t)$. Vì N đối xứng với M qua A nên A là trung điểm của MN nên

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_A = \dfrac{y_M + y_N}{2} \\ z_A = \dfrac{z_M + z_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_A - x_M = 2.1 - (1+3t) = 1 - 3t \\ y_N = 2y_A - y_M = 2.2 - (-3t) = 4 + 3t \\ z_N = 2z_A - z_M = 2.3 - (-2+t) = 8 - t \end{cases}.$$

Mặt khác, M nằm trên (P) nên

$$1 - 3t + (4 + 3t) + 2(8 - t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 16 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 8 \Rightarrow M(25;-24;6).$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 4.15. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;-1;2)$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z + 5 = 0$. Tìm điểm M trên d sao cho MA song song với mặt phẳng (P).*

A. $M(1;-2;1)$ *B.* $M(0;3;0)$ *C.* $M(2;-7;2)$. *D.* $M(-1;-3;3)$.

LỜI GIẢI. Do M nằm trên d nên tọa độ M có dạng $M(1+t;-2-5t;1+t)$. Vì MA song song với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AM}(4+t;-1-5t;t-1)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}(1;2;2)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_P} = 1.(4+t)+2(-1-5t)+2(t-1)=0 \Leftrightarrow -7t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow M(1;-2;1).$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 4.16. *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;4), B(-4;3;-2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+7}{2}$. Tìm điểm M trên d sao cho OM vuông góc với AB, với O là gốc tọa độ.*

A. $M(-3;2;-7)$ B. $M(-6;2;-6)$

C. $M(1;6;1)$ D. $M(-1;-6;-1)$

LỜI GIẢI. Do điểm $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(-3+t;2+t;-7+2t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{OM}(-3+t;2+t;-7+2t), \overrightarrow{AB}(-6;2;-6).$$

OM vuông góc với AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}=0$. Tức là

$$-6(-3+t)+2(2+t)-6(-7+2t)=0 \Leftrightarrow 64-16t=0 \Leftrightarrow t=4.$$

Do đó $M(1;6;1)$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 4.17. *Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(0;4;0), C(0;2;-1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. Tìm trên d điểm D có hoành độ dương sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{19}{6}$.*

A. $D(1;-1;2)$ B. $D(3;0;5)$

C. $D\left(-18;-\dfrac{21}{2};-\dfrac{47}{4}\right)$ D. $D(21;20;19)$

LỜI GIẢI. Do D nằm trên d nên tọa độ D có dạng $D(1+2t;-1+t;2+3t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB}(-2;3;0), \overrightarrow{AC}(-2;1;-1), \overrightarrow{AD}(2t-1;t-2;3t+2).$$

Ta có

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}3&0\\1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&-2\\-1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&3\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(-3;-2;4).$$

Suy ra

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\frac{1}{6}\left|-3(2t-1)-2(t-2)+4(3t+2)\right|=\frac{|4t+15|}{6}=\frac{19}{6}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4t+15=19\\4t+15=-19\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\Rightarrow D(3;0;5)\\t=-\dfrac{17}{2}\Rightarrow D\left(-16;-\dfrac{19}{2};-\dfrac{47}{2}\right)\end{array}\right..$$

Do D có hoành độ dương nên $D(3;0;5)$.

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 4.18. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng*

$$d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}\text{ và }d':\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Tìm điểm M trên d và điểm M' trên d' sao cho $\overrightarrow{MM'}$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{v_1}(1;1;-1),\overrightarrow{v_2}(3;1;1)$.

A. $M(-2;-7;-5),M'(-5;-1;-2)$ *B.* $M(1;-1;1),M'(-1;1;0)$

C. $M(4;5;7),M'(1;2;1)$ *D.* $M(6;9;11),M'(9;6;5)$

LỜI GIẢI. Do $M\in d,M'\in d'$ nên M,M' có tọa độ tương ứng là

$$M(1+t;-1+2t;1+2t),M'(-1+2k;1+k;k).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MM'}(2k-t-2;k-2t+2;k-2t-1).$$

Véc tơ $\overrightarrow{MM'}$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ thì

$$\begin{cases}\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v_1}=1.(2k-t-2)+1.(k-2t+2)-1.(k-2t-1)=0\\\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v_2}=3.(2k-t-2)+1.(k-2t+2)+1.(k-2t-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2k-t+1=0\\8k-7t-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\k=-2\end{cases}.$$

Do đó $M(-2;-7;-5),M'(-5;-1;-2)$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 4.19. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng*

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ và } d': \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Tìm điểm M và M' trên d_1 và d_2 sao cho vectơ $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{v}(3;-1;1)$.

A. $M(1;1;1), M'(-2;1;3)$ *B.* $M(1;1;1), M'(4;0;2)$

C. $M(2;2;3), M'(-1;3;2)$ *D.* $M(-5;2;2), M'(-2;1;3)$

LỜI GIẢI. Do $M \in d, M' \in d'$ nên M, M' có tọa độ tương ứng là

$$M(1+t;1+t;1+2t), M'(-2+k, 1+2k; 3-k).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MM'}(k-t-3; 2k-t; -k-2t+2).$$

Véc tơ $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương với $\overrightarrow{v}$ khi và chỉ khi

$$\frac{k-t-3}{3} = \frac{2k-t}{-1} = \frac{-k-2t+2}{1}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 7k-4t=3 \\ k-3t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;2;3) \\ M'(-1;3;2) \end{cases}.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 4.20. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng*

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{1}.$$

Tìm điểm M trên d_1 và N trên d_2 sao cho M, O, N thẳng hàng,

A. $M(1;-4;2), N(-1;4;-2)$ *B.* $M(1;-4;0), N(-1;4;0)$

C. $M(1;-4;2), N(-1;4;0)$ *D.* $M(3;-2;1), N(-3;2;-1)$

LỜI GIẢI. Do $M \in d_1, N \in d_2$ nên M, N có tọa độ tương ứng là

$$M(1+2t;-4+2t;2-t), N(-1+2k;4+2k;k).$$

Do đó

$$\overrightarrow{OM}(1+2t;-4+2t;2-t), \overrightarrow{ON}(-1+2k;4+2k;k).$$

Các điểm M, O, N thẳng hàng khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng phương. Điều này có nghĩa là

$$\frac{1+2t}{-1+2k} = \frac{-4+2t}{4+2k} = \frac{2-t}{k}.$$

Từ dấu "=" thứ nhất, ta suy ra

$$4+8t+2k+4tk = 4-2t-8k+4tk \Leftrightarrow t+k=0 \Leftrightarrow k=-t.$$

Thay vào dấu "=" thứ hai ta được

$$\frac{-4-2k}{4+2k} = \frac{2-t}{-t} = -1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow k=-1.$$

Do vậy $M(3;-2;1)$ và $N(-3;2;-1)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 4.21. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng*

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}, d_2: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-2t \\ z = -1-t \end{cases} \text{ và } d_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+k \\ z = 2k \end{cases}.$$

Tìm điểm A trên d_1, điểm B trên d_2 và điểm C trên d_3 sao cho A là trung điểm BC.

A. $A(1;-1;2), B(1;1;-1), C(1;1;2)$ *B.* $A(1;-1;2), B(1;-3;4), C(1;1;0)$

C. $A(2;0;-1), B(3;-1;-2), C(1;1;0)$ *D.* $A(2;1;1), B(3;-1;-2), C(1;3;4)$

LỜI GIẢI. Do $A \in d_1, B \in d_2, C \in d_3$ nên tọa độ các điểm A, B, C có dạng

$$A(1+a;-1+2a;2-a), B(1+2b;1-2b;-1-b), C(1;1+c;2c).$$

Khi đó, A là trung điểm BC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1+2b+1 = 2(1+a) \\ 1-2b+1+c = 2(-1+2a) \\ -1-b+2c = 2(2-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 4a+2b-c=4 \\ 2a-b+2c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}.$$

Do đó $A(2;1;1), B(3;-1;-2), C(1;3;4)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 4.22. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;1), B(-1;0;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Điểm M trên d sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của MA^2+MB^2 là bao nhiêu?*

A. 18 *B.* 24 *C.* 30 *D.* 66

LỜI GIẢI. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(1+t;-1-t;-1+2t)$. Suy ra

$$\begin{cases} MA^2 = (t-2)^2+(1-t)^2+(2t-2)^2 = 6t^2-14t+9 \\ MB^2 = (t+2)^2+(-t-1)^2+(2t-4)^2 = 6t^2-10t+21 \end{cases}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2 &= 12t^2-24t+30 = 12(t^2-2t+1)+18 \\ &= 12(t-1)^2+18 \geq 18. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=1$.

Do vậy $\min(MA^2+MB^2) = 18$ khi $M(2;-2;1)$.

Đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Lập phương trình đường thẳng

BÀI TẬP 4.1. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v_\Delta}(a;b;c)$ là:

A. $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ B. $\Delta:\begin{cases}x=a+x_0t\\y=b+y_0t\\z=c+z_0t\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ D. $\Delta:\dfrac{x-a}{x_0}=\dfrac{y-b}{y_0}=\dfrac{z-c}{z_0}$

BÀI TẬP 4.2. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua $A(1;-2;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v}(2;-3;1)$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-3t\\z=2+t\end{cases}$ B. $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=-3-2t\\z=1+2t\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$ D. $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$

BÀI TẬP 4.3. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(-2;1;1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v}(-2;3;-1)$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=-2-2t\\y=1+3t\\z=1-t\end{cases}$ B. $\Delta:\begin{cases}x=-2-2t\\y=3+t\\z=-1+t\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ D. $\Delta:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{1}$

BÀI TẬP 4.4. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(3;-1;2)$ và $C(-2;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với BC.

A. $\Delta:\begin{cases}x=5+2t\\y=-3+t\\z=1-t\end{cases}$ B. $\Delta:\begin{cases}x=2+5t\\y=1-3t\\z=-1+t\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ D. $\Delta:\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}$

BÀI TẬP 4.5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$ và $B(2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua A và B là:

A. $\Delta: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$

B. $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

C. $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$

D. $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases}$

BÀI TẬP 4.6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;1)$ và $B(1;-1;2)$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau **không** đi qua A và B?

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-2t \\ z=1-t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-t \\ z=1+t \end{cases}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

D. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

BÀI TẬP 4.7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1), B(1;-2;2), C(3;-3;2)$. Tìm đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (ABC).

A. $d: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$

B. $d: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{7}$

C. $d: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

D. $d: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$

BÀI TẬP 4.8. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+y-2z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$.

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$

D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$

BÀI TẬP 4.9. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng vuông góc chung Δ của hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=-1-3t \end{cases}.$$

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

B. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+1}{1}$

C. $\begin{cases} x=3-t' \\ y=-1+t' \\ z=2+t' \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=2+t' \\ y=2-3t' \\ z=4-2t' \end{cases}$

Tìm điểm trên đường thẳng

BÀI TẬP 4.10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Tìm trên d điểm B có hoành độ nguyên sao cho $AB=\sqrt{6}$.

A. $B(1;1;-2)$

B. $B(-3;1;5)$

C. $B\left(-\dfrac{25}{17};\dfrac{59}{17};\dfrac{29}{17}\right)$

D. $B(-1;3;1)$

BÀI TẬP 4.11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;2), B(3;1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=5-t \end{cases}$. Tìm trên d, điểm C sao cho tam giác ABC cân tại A.

A. $C(2;1;5)$ B. $C(4;1;3)$ C. $C(1;-3;0)$ D. $C(3;1;4)$

BÀI TẬP 4.12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(4;-2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm trên d, điểm C sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(2;-3;1)$ B. $C(1;1;0)$ C. $C(3;-7;2)$ D. $C(1;0;-3)$

BÀI TẬP 4.13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;1), B(4;1;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM vuông tại M.

A. $M(2;-1;-1)$

B. $M(3;-2;2)$

C. $M\left(\dfrac{28}{11};-\dfrac{17}{11};\dfrac{7}{11}\right)$

D. $M(3;-2;2)$ hoặc $M\left(\dfrac{28}{11};-\dfrac{17}{11};\dfrac{7}{11}\right)$

BÀI TẬP 4.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;3), B(1;-1;4)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM cân tại M.

A. $M(3;1;5)$ B. $M(1;0;4)$ C. $M\left(\dfrac{3}{2};-1;\dfrac{7}{2}\right)$ D. $M(-1;-1;3)$

BÀI TẬP 4.15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(1;3;-1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-2}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM có diện tích là $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

A. $M(0;0;0)$ B. $M(1;2;-2)$

C. $M(5;10;-10)$ D. $M\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$

BÀI TẬP 4.16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Tìm M thuộc d sao cho điểm N đối xứng với M qua A nằm trên mặt phẳng (P).

A. $M(-1;0;2)$ B. $M(1;1;3)$ C. $M(3;2;4)$ D. $M(-3;-1;1)$

BÀI TẬP 4.17. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-4;3)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3-2t \\ z = 2+3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 5x+3y+z+5=0$. Tìm điểm M trên d sao cho MA song song với mặt phẳng (P).

A. $M(1;-3;2)$ B. $M(2;-6;4)$ C. $M(0;-1;-1)$. D. $M(2;-5;5)$.

BÀI TẬP 4.18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3), B(2;3;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Tìm điểm M trên d sao cho OM vuông góc với AB.

A. $M(-3;2;-7)$ B. $M(-6;2;-6)$

C. $M(1;-2;1)$ D. $M(-1;-6;-1)$

BÀI TẬP 4.19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;2;0), B(0;1;0), C(0;-1;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-4}{1}$. Tìm trên d điểm D có hoành độ nguyên sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 1.

A. $D(-1;1;4)$ B. $D(3;-3;6)$

C. $D\left(\frac{23}{5};-\frac{23}{5};\frac{24}{5}\right)$ D. $D(3;-3;6)$ hoặc $D\left(\frac{27}{5};-\frac{27}{5};\frac{36}{5}\right)$

BÀI TẬP 4.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-3} \text{ và } d':\begin{cases}x=-1\\y-1+t\\z=t\end{cases}.$$

Tìm điểm M trên d và điểm M' trên d' sao cho $\overrightarrow{MM'}(-4;1;3)$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{v_1}(1;1;1), \overrightarrow{v_2}(1;-2;2)$.

A. $M(1;-1;1), M'(5;-2;-2)$ B. $M(3;0;-3), M'(-1;1;0)$

C. $M(3;1;-2), M'(-1;2;1)$ D. $M(1;-1;1), M'(-1;1;0)$

BÀI TẬP 4.21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=-2+2t\end{cases} \text{ và } d':\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Tìm điểm M và M' trên d_1 và d_2 sao cho vectơ $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{v}(4;-1;-1)$.

A. $M(1;3;-2), M'(-2;1;1)$ B. $M(1;3;-2), M'(5;2;-3)$

C. $M(2;0;0), M'(-2;1;1)$ D. $M(3;1;2), M'(-1;2;3)$

BÀI TẬP 4.22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{2} \text{ và } d_2:\begin{cases}x=3-t\\y=1+3t\\z=1-t\end{cases}.$$

Tìm điểm M trên d_1 và N trên d_2 sao cho M, O, N thẳng hàng.

A. $M(1;-4;2), N(-1;4;-2)$ B. $M(1;-4;0), N(-1;4;0)$

C. $M(2;-1;1), N(4;-2;2)$ D. $M(3;-2;1), N(-3;2;-1)$

BÀI TẬP 4.23. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}, d_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -1-t \end{cases} \text{ và } d_3 : \begin{cases} x = 2-k \\ y = 3+k \\ z = 1 \end{cases}$$

Tìm điểm A trên d_1, điểm B trên d_2 và điểm C trên d_3 sao cho A là trung điểm BC.

A. $A(1;-1;2), B(1;2;-1), C(3;-4;5)$ B. $A(1;-1;2), B(0;-5;3), C(2;3;1)$

C. $A\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};0\right), B(1;2;-1), C(2;3;1)$ D. $A(2;1;-1), B(3;-2;-3), C(1;4;1)$

BÀI TẬP 4.24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;2), B(1;-1;0)$ và đường thẳng $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{3}$. Điểm M trên d sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2$ là bao nhiêu?

A. 16 B. 8 C. 38 D. 104

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 4.1. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 4.2. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 4.3. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 4.4. Đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{BC}(-5;3;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1} \text{ và } \begin{cases} x=2+5t \\ y=1-3t \\ z=-1+t \end{cases}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.5. Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $A(1;0;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó

$$\Delta : \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.6. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 4.7. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -4 & 3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}\right)=(3;6;7).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.8. Đường thẳng Δ cần tìm có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{v_\Delta}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=\left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-1;-3;-2).$$

Mặt khác, xét hệ $\begin{cases} x+y-2z-3=0 \\ x-y+z-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ thì hai mặt phẳng $(P),(Q)$ chứa điểm $M(2;1;0)$ nên Δ cũng đi qua M.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.9. Gọi $H(1+k;3-k;2+2k) \in d_1$ và $K(-3t;t;-1-3t) \in d_2$ tương ứng là giao điểm đường vuông góc chung Δ với d_1, d_2. Suy ra

$$\overrightarrow{HK}(-3t-k-1;t+k-3;-3t-2k-3).$$

Do Δ là đường vuông góc chung nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{v_1}=0 \\ \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{v_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10t-6k-4=0 \\ 19t+10k+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(2;2;4) \\ K(3;-1;2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{HK}(1;-3;-2).$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.10. Do $B \in d$ nên $B(1-2t;1+2t;-2+3t)$, suy ra

$$\begin{aligned} &AB=\sqrt{(1-2t)^2+(2t-1)^2+(3t-5)^2}=\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow &17t^2-38t+21=0 \\ \Leftrightarrow &t=1 \text{ hoặc } t=\frac{21}{17} \\ \Leftrightarrow &B(-1;3;1) \text{ hoặc } B\left(-\frac{25}{17};\frac{59}{17};\frac{29}{17}\right). \end{aligned}$$

Do B có hoành độ nguyên nên $B(-5;3;3)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.11. Do $C \in d$ nên tọa độ C có dạng $C(2+t;1;5-t)$. Tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi

$$AB=AC \Leftrightarrow t^2+2^2+(3-t)^2=9 \Leftrightarrow 2t^2-6t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

- Với $t=1$ thì $C(3;1;4) \equiv B$ (loại).
- Với $t=2$ thì $C(4;1;3)$ (thỏa mãn).

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.12. Do $C \in d$ nên tọa độ C có dạng $C(2+t;-3-4t;1+t)$. Vì ΔABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AB}(4;-1;1) \perp \overrightarrow{AC}(t+2;-2-4t;t-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow C(1;1;0).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 4.13. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(2+t;-1-t;-1+3t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{MA}(-1-t;t;2-3t), \overrightarrow{MB}(2-t;2+t;4-3t).$$

Tam giác ABM vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. Tức là

$$(-1-t)(2-t)+t(t+2)+(2-3t)(4-3t)=0 \Leftrightarrow 11t^2-17t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{6}{11} \end{array}\right. .$$

Do đó $M(3;-2;2)$ hoặc $M\left(\dfrac{28}{11};-\dfrac{17}{11};\dfrac{7}{11}\right)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.14. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(-1+2t;-1+t;3+t)$. Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi $MA=MB$. Tức là

$$(2t-3)^2+t^2+t^2=(2t-2)^2+t^2+(t-1)^2 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M(3;1;5)$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 4.15. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(t;2t;-2t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB}(-1;2;0), \overrightarrow{AM}(t-2;2t-1;-2t+1)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2t-1 & -2t+1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2t+1 & t-2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ t-2 & 2t-1 \end{vmatrix}\right)$$
$$= (-4t+2;-2t+1;-4t+5)$$

Diện tích tam giác ABM là

$$S_{ABM}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{36t^2-60t+30}$$

Tam giác ABM có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ khi và chỉ khi

$$36t^2-60t+25=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{6} \Rightarrow M\left(\frac{5}{6};\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right).$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.16. Do M là điểm trên d nên tọa độ M có dạng $M(-1+2t;t;2+t)$. Điểm N đối xứng M qua A nên

$$\begin{cases} x_N = 2x_A - x_M = 3 - 2t \\ y_N = 2y_A - y_M = -2 - t \\ z_N = 2z_A - z_M = 2 - t \end{cases} \Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t).$$

Vì $N \in (P)$ nên

$$3 - 2t + (-2 - t) - 2(2 - t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(3;2;4).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.17. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(1+t;-3-2t;2+3t)$, suy ra $\overrightarrow{AM}(t;1-2t;3t-1)$.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_P} = 5t + 3.(1 - 2t) + 1.(3t - 1) = 0 \Leftrightarrow 2t + 2 = 0 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(0;-1;-1).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.18. Do điểm $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(-2+3t;-1-t;3-2t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{OM}(-2+3t;-1-t;3-2t), \overrightarrow{AB}(3;1;-1).$$

OM vuông góc với AB khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = 3.(-2+3t) + 1.(-1-t) + (-1).(3-2t) = 0 \Leftrightarrow 10t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Do đó $M(1;-2;1)$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.19. Do $D \in d$ nên tọa độ D có dạng $D(-1+2t;1-2t;4+t)$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB}(-3;-1;0), \overrightarrow{AC}(-3;-3;2), \overrightarrow{AD}(2t-4;-1-2t;t+4).$$

Ta có

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}\right) = (-2;6;6).$$

Suy ra

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{6}\left|-2(2t-4)+6(-1-2t)+6(t+4)\right| = \frac{|-5t+13|}{3} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5t+13=3 \\ -5t+13=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \Rightarrow D(3;-3;6) \\ t=\dfrac{16}{5} \Rightarrow D\left(\dfrac{27}{5};-\dfrac{27}{5};\dfrac{36}{5}\right) \end{array}\right. .$$

Do D có hoành độ nguyên nên $D(3;0;5)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.20. Do $M \in d, M' \in d'$ nên M, M' có tọa độ tương ứng là

$$M(1+2k;-1+2k;1-3k), M'(-1;1+t;t).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MM'}(-2k-2;t-2k+2;t+3k-1).$$

Véc tơ $\overrightarrow{MM'}$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v_1} = 2t-k-1=0 \\ \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v_2} = 8k-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ k=1 \end{cases}.$$

Do đó $M(3;1;-2), M'(-1;2;1)$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.21. Do $M \in d, M' \in d'$ nên M, M' có tọa độ tương ứng là

$$M(1+t;3-t;-2+2t), M'(-2+k,1+k;1+2k).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MM'}(k-t-3;k+t-2;2k-2t+3).$$

Véc tơ $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương với $\overrightarrow{v}$ khi và chỉ khi

$$\frac{k-t-3}{4} = \frac{k+t-2}{-1} = \frac{2k-2t+3}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(3;1;2) \\ M'(-1;2;3) \end{cases}.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.22. Do $M \in d_1, N \in d_2$ nên M, N có tọa độ tương ứng là

$$M(1+k;-4+3k;-1+2k), N(3-t;1+3t;1-t).$$

Do đó

$$\overrightarrow{OM}(1+k;-4+3k;-1+2k), \overrightarrow{ON}(3-t;1+3t;1-t).$$

Các điểm M, O, N thẳng hàng khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng phương. Điều này có nghĩa là

$$\frac{1+k}{3-t} = \frac{-4+3k}{1+3t} = \frac{-1+2k}{1-t} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(2;-1;1) \\ N(4;-2;2) \end{cases}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 4.23. Do $A \in d_1, B \in d_2, C \in d_3$ nên tọa độ các điểm A, B, C có dạng

$$A(1+a;-1+2a;2-3a), B(1+b;2-2b;-1-b), C(2-c;3+c;1).$$

Khi đó, A là trung điểm BC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3+b-c = 2(1+a) \\ 5-2b+c = 2(-1+2a) \\ -b = 2(2-3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}.$$

Do đó $A(2;1;-1), B(3;-2;-3), C(1;4;1)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 4.24. Do $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(2+t;-2+t;5+3t)$. Suy ra

$$\begin{cases} MA^2 = (t-1)^2 + (t-1)^2 + (3t+3)^2 = 11t^2 + 14t + 11 \\ MB^2 = (t+1)^2 + (t-1)^2 + (3t+5)^2 = 11t^2 + 30t + 27 \end{cases}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= 22t^2 + 44t + 38 = 22(t^2+2t+1) + 16 \\ &= 12(t+1)^2 + 16 \geq 16. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$.

Do vậy $\min(MA^2 + MB^2) = 16$ khi $M(1;-3;2)$.

Đáp án là A. □

CHỦ ĐỀ 5
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

1. Cho mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$ và mặt phẳng $(P'): A'x+B'y+C'z+D'=0$ $(A'^2+B'^2+C'^2>0)$.

   - $(P)\equiv(P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$.
   - $(P)\parallel(P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$.
   - (P) cắt (P') nếu chúng không trùng nhau và cũng không song song với nhau. Giao tuyến của $(P),(P')$ là đường thẳng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_{P'}}]$.
   - $(P)\perp(P') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_{P'}}=AA'+BB'+CC'=0$.

2. Quan hệ giữa các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng

   - Nếu $(P)\parallel(P')$ hoặc $(P)\equiv(P')$ thì vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ của (P) cũng là vectơ pháp tuyến của (P') và ngược lại, vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{P'}}$ của (P') cũng là vectơ pháp tuyến của (P).
   - Nếu $(P)\perp(P')$ thì vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ của (P) vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P') và ngược lại, vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{P'}}$ của (P') vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P).

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

1. Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$, phương trình tham số $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$.

- $d\subset(P)\Leftrightarrow\begin{cases} M(x_0;y_0;z_0)\in(P) \\ \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ aA+bB+cC=0 \end{cases}$.
- $d\parallel(P)\Leftrightarrow\begin{cases} M(x_0;y_0;z_0)\notin(P) \\ \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \\ aA+bB+cC=0 \end{cases}$.
- d cắt (P) nếu nó không nằm trên hay song song với (P). Tọa độ giao điểm $I(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$ thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P), tức là
$$\boxed{t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{aA+bB+cC}}$$
- $d\perp(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{u_d}\parallel\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}=\dfrac{c}{C}$.

2. Quan hệ giữa vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Nếu $d\parallel(P)$ hoặc $d\subset(P)$ thì vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d và vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với nhau.
- Nếu $d\perp(P)$ thì vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d là vectơ pháp tuyến của (P). Ngược lại, vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

1. Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$, phương trình tham số $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ và đường thẳng d' có

phương trình chính tắc $\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}$, phương trình tham số $\begin{cases} x=x_0'+a't \\ y=y_0'+b't \\ z=z_0'+c't \end{cases} (a'^2+b'^2+c'^2>0)$.

- $d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} M(x_0;y_0;z_0)\in d' \\ \overrightarrow{u_d}\parallel\overrightarrow{u_{d'}}\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \end{cases}$.
- $d\parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} M(x_0;y_0;z_0)\notin d' \\ \overrightarrow{u_d}\parallel\overrightarrow{u_{d'}}\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \end{cases}$.
- $d\perp d' \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{d'}}=aa'+bb'+cc'=0$.
- d, d' cắt nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} [\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}]\neq 0 \\ [\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}].\overrightarrow{MM'}=0 \end{cases}$$

  với $M(x_0;y_0;z_0)\in d$ và $N(x_0';y_0';z_0')\in d'$.

- d, d' chéo nhau khi và chỉ khi

$$[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}].\overrightarrow{MM'}\neq 0$$

  với $M(x_0;y_0;z_0)\in d$ và $N(x_0';y_0';z_0')\in d'$.

2. Quan hệ giữa các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng

- Nếu $d\parallel d'$ hoặc $d\equiv d'$ thì vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d cũng là vectơ chỉ phương của d' và ngược lại, vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d'}}$ của d' cũng là vectơ chỉ phương của d.
- Nếu $d\perp d'$ thì vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d vuông góc với vectơ pháp tuyến của d' và ngược lại, vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d'}}$ của d' vuông góc với vectơ pháp tuyến của d.

Chú ý: Để tính tích hỗn tạp của ba vectơ $\overrightarrow{u_1}(a_1;b_1;c_1), \overrightarrow{u_2}(a_2;b_2;c_2), \overrightarrow{u_3}(a_3;b_3;c_3)$ *ta*

có thể sử dụng tính năng tính định thức ma trân vuông cấp 3 trong máy tính

$$\overrightarrow{u_1}.[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}] = det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Hai mặt phẳng trùng nhau

VÍ DỤ 5.1. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): 3x - my - 3z + 2m = 0$ và $(Q): (m+1)x - 4y - (m+1)z + m - 4 = 0$ trùng nhau?*

A. $m = 3$ *hoặc* $m = -4$ *B.* $m = 3$

C. $m = -4$ *D.* $m = 0$

LỜI GIẢI. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ trùng nhau khi và chỉ khi

$$\frac{3}{m+1} = \frac{-m}{-4} = \frac{-3}{-(m+1)} = \frac{2m}{m-4}$$

$$\Rightarrow m(m+1) = 12 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -4 \end{array}\right.$$

- Nếu $m = 3$ thì $\dfrac{-3}{-(m+1)} \neq \dfrac{2m}{m-4}$ nên không thỏa mãn.
- Nếu $m = -4$ thì $\dfrac{-3}{-(m+1)} = \dfrac{2m}{m-4}$ nên thỏa mãn.

Đáp án là C. □

Hai mặt phẳng song song

VÍ DỤ 5.2. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): mx + (m-2)y + mz + 12 = 0$ và $(Q): (m+3)x - 4y + (m+3)z - m = 0$ song song với nhau?*

A. $m = 1$ *hoặc* $m = -6$ *B.* $m = 1$

C. $m = -6$ *D.* $m \neq 1, -6$

LỜI GIẢI. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ song song với nhau khi và chỉ khi

$$\frac{m}{m+3}=\frac{m-2}{-4}=\frac{m}{m+3}\neq\frac{12}{-m}.$$

$$\Rightarrow -4m=(m+3)(m-2)\Leftrightarrow m^2+5m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-6\end{array}\right..$$

- Với $m=1$ thì $\dfrac{m}{m+3}\neq\dfrac{12}{-m}$ nên thỏa mãn.
- Với $m=-6$ thì $\dfrac{m}{m+3}=\dfrac{12}{-m}=2$ nên không thỏa mãn.

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 5.3. *Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(Q):3x-2y-z+1=0$*

A. $(P):x+y+z-2=0$ *B.* $(P):x+y+z-1=0$

C. $(P):3x-2y-z+1=0$ *D.* $(P):3x-2y-z+7=0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;1;2)$ và song song với (Q) nên vectơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}(3;-2;-1)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (P). Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là

$$(P):3(x+1)-2(y-1)-(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z+7=0.$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Nếu mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng $(Q):Ax+By+Cz+D=0$ không chứa M thì (P) có phương trình là

$$(P):A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Trước hết ta ưu tiên kiểm tra tính song song của hai mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng cách xét xem hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}$ có cùng phương không? ***Ta loại bỏ được phương án A và B.*** *Kiểm tra trong hai mặt phẳng còn lại, mặt phẳng nào đi qua M, ta* ***loại được phương án C.*** *Vậy đáp án đúng là D.*

Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng

VÍ DỤ 5.4. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): x+my-2z+1=0$ và $(Q): mx-3y+2z-2=0$ vuông góc?*

A. $m=-1$ *B.* $m=3$ *C.* $m=-2$ *D.* $m=0$

LỜI GIẢI. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến tương ứng là $\overrightarrow{n_P}(1;m;-2)$ và $\overrightarrow{n_Q}(m;-3;2)$. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=1.m+m.(-3)-2.2=0\Leftrightarrow -2m-4=0\Leftrightarrow m=-2.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 5.5. *Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây qua hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$?*

A. $x-z+2=0$ *B.* $x-z+1=0$ *C.* $2x-y-z+3=0$ *D.* $2x-z+3=0$

LỜI GIẢI. Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do (Q) đi qua A,B nên (Q) nhận $\overrightarrow{AB}(-2;-2;-2)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt khác, vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}(1;-2;1)$ làm vectơ chỉ phương. Suy ra (Q) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_Q}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_P}]=\left(\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&-2\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&-2\\1&-2\end{vmatrix}\right)=(-6;0;6)=-6(1;0;-1).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (Q) là $x-z+2=0$.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Mặt phẳng đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}].$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tích vô hướng của vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P) với các phương án đề bài cho, ta ***loại bỏ được phương án C và D.*** *Cuối cùng, kiểm tra tính chất đi qua điểm A và B,* ***ta loại được phương án B.*** *Vậy đáp án là A.*

VÍ DỤ 5.6. *Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây qua điểm $A(2;-1;3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 3x-2y+z-5=0$ và $(Q): x+3y-2z+1=0$?*

A. $x+7y+11z=0$ *B.* $x+7y+11z-28=0$

C. $3x-2y+z-11=0$ *D.* $x+3y-2z+7=0$

LỜI GIẢI. Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm. Do (R) vuông góc với (P) và (Q) nên (R) các vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}(3;-2;1)$ và vectơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}(1;3;-2)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P). Suy ra (R) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_R} = [\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) = (1;7;11).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (R) là

$$(R): (x-2)+7(y+1)+11(z-3)=0 \Leftrightarrow x+7y+11z-28=0$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Mặt phẳng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}].$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tính vuông góc với mặt phẳng (P), ***ta loại được phương án C và D.*** *Kiểm tra tính vuông góc với mặt phẳng (Q) ta thấy cả hai phương án A,B đều thỏa mãn, tuy nhiên khi kiểm tra tính chất đi qua điểm A thì* ***loại được phương án A.*** *Vậy đáp án là B.*

VÍ DỤ 5.7. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q_1): x+y-z+1=0$ và $(Q_2): x-y+2z-1=0$. Mặt phẳng (P) chứa d và vuông góc với $(R): x-y-z+1=0$ thì phương trình của (P) là*

A. $x-y+2z-1=0$ *B.* $x-y+2z-2=0$

C. $2x+y+z-2=0$ *D.* $x+2y-z-3=0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của (Q_1) và (Q_2) có dạng

$$(P): m(x+y-z+1)+n(x-y+2z-1)=0 \quad (m^2+n^2>0)$$

$$\Leftrightarrow (m+n)x+(m-n)y+(2n-m)z+m-n=0$$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(m+n;m-n;2n-m)$ vuông góc với mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_R}(1;-1;-1)$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = (m+n)-(m-n)-(2n-m) = m = 0.$$

Chon $n=1$ thì phương trình mặt phẳng (P) là $x-y+2z-1=0$.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có dạng

$$m(Ax+By+Cz+D)+n(A'x+B'y+C'z+D')=0 \quad (m^2+n^2>0).$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tính vuông góc với mặt phẳng (R) ***ta loại được phương án C và D.*** *Để kiểm tra tính chất đi qua giao tuyến hai mặt phẳng, ta để ý 2 hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases} (I) \text{ và } \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \\ x-y+2z-2=0 \end{cases} (II).$$

Hệ (I) có vô số nghiệm nên ***phương án A thỏa mãn****, còn hệ (II) có nghiệm duy nhất nên* ***phương án B bị loại.***

Dạng 2: Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng

Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng

VÍ DỤ 5.8. *Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y-2z-1=0$ vuông góc với đường thẳng nào sau đây?*

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

C. Đường thẳng đi qua $A(1;2;3)$ và $B(-1;1;0)$.

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x-y-1=0$ và $(R): 2x+z+1=0$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;1;-2)$.

- Đường thẳng $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_A}(1;-1;1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-1}{1}$.
- Đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_B}(1;1;1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{1}{-2}$.

- Đường thẳng đi qua $A(1;2;3)$ và $B(-1;1;0)$ có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_C} = \overrightarrow{AB} = (-2;-1;-3)$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-1}{1}$.
- Đường giao tuyến của (Q) và (R) là đường thẳng có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_D} = [\overrightarrow{n_Q}; \overrightarrow{n_R}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1;-1;2) = -\overrightarrow{n_P}$$

cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$.

Đáp án là D. □

*Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Trước hết ta **xếp thứ tự ưu tiên kiểm tra các phương án lần lượt là A, B, D và C**. Kiểm tra tính song song của vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ với các đường thẳng, ta **loại được phương án A và B**. Hai phương án còn lại có thể kiểm tra theo cách 1: xem $\overrightarrow{AB}$ có cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ không? từ đó **loại đi phương án C**. Hoặc theo cách 2: kiểm tra tính vuông góc của $(Q), (R)$ với (P), từ đó suy ra **phương án D thỏa mãn**.*

VÍ DỤ 5.9. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$. Mặt phẳng nào trong những mặt phẳng sau đây đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với đường thẳng d*

A. $y + 2z = 0$

B. Mặt phẳng đi qua O và hai điểm $A(-1;-1;1), B(1;-2;1)$.

C. Mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng $(P) : x - 2y + z + 3 = 0$.

D. Mặt phẳng đi qua O và vuông góc với $(Q) : x-2y+z+3 = 0, (R) : x+y+z-3 = 0$.

LỜI GIẢI. Đường thẳng d không đi qua O và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;2;3)$.

- Mặt phẳng $y+2z = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_A}(0;1;2)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.
- Mặt phẳng đi qua O, A, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OA}(-1;-1;1), \overrightarrow{OB}(1;-2;1)$ nên có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_B} = [\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (1;2;3)$$

cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.

- Mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng $(P): x-2y+z+3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_C}(1;-2;1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.
- Mặt phẳng đi qua O và vuông góc với (Q) và (R) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-3;0;3)$$

không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$.

Đáp án là B. □

Nhận xét: Việc kiểm tra tính vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có thể được quyết định theo tính cùng phương của vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Tuy nhiên việc xác định được vectơ pháp tuyến của mặt phẳng không phải lúc nào cũng dễ dàng, nhanh chóng. Do đó, trong bài toán này việc giải nhanh là vô cùng cần thiết!

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Trước hết ta thực hiện việc ***ưu tiên kiểm tra theo thứ tự A, C và D*** *vì việc kiểm tra 3 phương án này thực hiện ít phép toán hơn. Nếu cả 3 phương án này sai, hiển nhiên đáp án là B. Trước hết ta* ***loại ngay đáp án A*** *vì vectơ pháp tuyến mặt phẳng không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$. Xét tích vô hướng $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\neq 0$ và $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_Q}\neq 0$ nên* ***loại đáp án C và D.***

Mặt phẳng song song với đường thẳng

VÍ DỤ 5.10. *Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$ song song với mặt phẳng nào trong những mặt phẳng sau đây?*

A. $2x-3y+z+1=0$

B. Mặt phẳng qua $A(3;-1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}(-2;3;-1)$

C. Mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y-7z+3=0$

D. Mặt phẳng trung trực của AB với $A(1;-2;0), B(3;0;2)$.

LỜI GIẢI. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2;-3;1)$.

- Mặt phẳng $2x-3y+z+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_A}(2;-3;1)$ không vuông góc với $\overrightarrow{u_d}$ nên không song song với d.
- Mặt phẳng qua $A(3;-1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_B}(-2;3;-1)$ không vuông góc với $\overrightarrow{u_d}$ nên không song song với d.

- Mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng $(P): x-2y+z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_C}(1;-2;1)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_d}$ đồng thời $\overrightarrow{n_C}$ vuông góc với $\overrightarrow{OM}(3;-1;1)$ với $M(3;-1;1)$. Do đó mặt phẳng này chứa đường thẳng d.

- Mặt phẳng trung trực của AB với $A(1;-2;0), B(3;0;2)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}(2;2;2)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_d}$. Mặt khác $I(2;-1;1)$ là trung điểm AB, $M(3;-1;1)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IM}(1;0;0)$ không vuông góc với $\overrightarrow{AB}$ nên mặt phẳng trung trực của AB không chứa M, do đó nó song song với d.

Đáp án là D. □

*Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Trước hết **ta xếp thứ tự ưu tiên A, B, C sau đó mới đến D** vì việc xác định vectơ pháp tuyến ở các phương án này rõ ràng hơn. Do đó kiểm tra tích vô hướng $\overrightarrow{u_d}$ với các vectơ pháp tuyến ở các phương án ta **loại được A, B**. Với hai phương án còn lại ta chỉ cần kiểm tra tính chất có chứa M hay không, ta **loại được C**.*

VÍ DỤ 5.11. *Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x-4y+z-8=0$ song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?*

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=2+3t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$

C. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-2;-1)$ và $B(-2;-3;-2)$

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x+y-2z+3=0$ và $(R): 2x-3y-z-2=0$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-4;1)$.

- Đường thẳng $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=2+3t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_A}(2;1;3)$ không vuông góc với $\overrightarrow{u_P}$ vì $\overrightarrow{u_A}, \overrightarrow{n_P} \neq 0$.

- Đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_B}(1;-4;1)$ không vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_A}, \overrightarrow{n_P} \neq 0$.

- Đường thẳng đi qua A và B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_C} = \overrightarrow{AB}(-3;-1;-1)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ nhưng $A, B \in (P)$ nên đường thẳng AB nằm trong (P).
- Giao tuyến của (Q) và (R) là đường thẳng có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_D} = [\overrightarrow{n_Q}; \overrightarrow{n_R}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-7;-3;-5)$$

vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_D}.\overrightarrow{n_P} = 0$. Hơn nữa $M\left(-\frac{7}{5}; -\frac{8}{5}; 0\right) \in (Q) \cap (R)$ nhưng $M \notin (P)$.

Đáp án là D. □

Nhận xét: Việc kiểm tra tính song song giữa đường thẳng và mặt phẳng có thể được quyết định theo tính vuông góc của vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cộng với việc kiểm tra một điểm trên đường thẳng có thuộc mặt phẳng hay không. Tuy nhiên việc xác định được vectơ chỉ phương của đường thẳng không phải lúc nào cũng dễ dàng, nhanh chóng. Do đó, trong bài toán này việc giải nhanh là vô cùng cần thiết!

*Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Trước hết ta thực hiện việc **ưu tiên kiểm tra theo thứ tự A, B và D** vì việc kiểm tra 3 phương án này thực hiện ít phép toán hơn. Nếu cả 3 phương án này sai, hiển nhiên đáp án là B. Trước hết ta **loại ngay đáp án A, B** vì vectơ chỉ phương của đường thẳng không vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Với phương án D, để kiểm tra tính song song, xét hệ*

$$\begin{cases} x - 4y + z - 8 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

*thấy hệ vô nghiệm nên giao tuyến của $(Q), (R)$ và (P) không có điểm chung nên **đáp án là D.***

VÍ DỤ 5.12. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;1;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với đường thẳng d có phương trình là*

A. $-4x+2y+3z-1=0$ *B.* $-4x+2y+3z-9=0$

C. $2x+y+2z+1=0$. *D.* $x+y-z+1=0$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) đi qua A, B nên có vectơ $\overrightarrow{AB}(-2;-1;-2)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến. Mặt khác, (P) song song với d nên (P) có vectơ pháp tuyến vuông góc với vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}(1;-1;2)$. Suy ra vectơ pháp tuyến của (P) là

$$\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u_d}]=\left(\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-4;2;3).$$

Do đó phương trình (P) là

$$(P):-4(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow -4x+2y+3z-9=0.$$

Đáp án là B. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tích vô hướng của vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ của d với các mặt phẳng ta ***loại được phương án C và D****. Kiểm tra tính chất đi qua A và B ta* ***loại được phương án A****. Vậy đáp án đúng là B.*

Mặt phẳng chứa đường thẳng

VÍ DỤ 5.13. *Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):x+y-2z-1=0$ chứa đường thẳng nào trong các đường thẳng sau:*

A. $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1\end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

C. Đường thẳng đi qua $A(2;-1;1)$ và $B(3;-2;2)$.

D. Giao tuyến của $(Q):x+y-z-1=0$ và $(R):2x+2y-3z-2=0$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;1;-2)$.

- Đường thẳng $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1\end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_A}(1;1;0)$ không vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_A}.\overrightarrow{n_P}\neq 0$.

- Đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_B}(1;1;1)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0$. Tuy nhiên điểm $M(2;1;2)$ thuộc đường thẳng nhưng không thuộc mặt phẳng (P).

- Điểm $A, B \notin (P)$.

- Giao tuyến của (Q) và (R) là đường thẳng có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n_Q};\overrightarrow{n_R}]=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-1;1;0)$$

  vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$. Mặt khác $M(1;0;0)\in(Q)\cap(R)$ cũng nằm trên (P).

Đáp án là D. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tích vô hướng của vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ của mặt phẳng (P) với vectơ chỉ phương các đường thẳng ta ***loại phương án A và B****. Hai phương án còn lại có thể xét theo một trong 2 cách sau:*

- *Cách 1: Xét tính vuông góc của $\overrightarrow{n_P}$ với $\overrightarrow{AB}$:* ***Loại phương án C.***

- *Cách 2: Xét hệ phương trình* $\begin{cases}x+y-2z-1=0\\ x+y-z-1=0\\ 2x+2y-3z-2=0\end{cases}$ *có vô số nghiệm.*

  Đáp án là D.

VÍ DỤ 5.14. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng* $d:\begin{cases}x=-1+t\\ y=1-t\\ z=1+2t\end{cases}$ *và đi qua điểm $M(1;2;3)$ có phương trình là*

A. $(P): x+y-3=0$ *B.* $(P): 4x-2y-3z+1=0$

C. $(P): x+y+z-1=0$ *D.* $(P): 4x-2y-3z+9=0$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên (P) nhận vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}(1;-1;2)$ làm vectơ chỉ phương, đồng thời (P) chứa điểm $N(-1;1;1)\in$

d. Suy ra (P) có thêm một vectơ chỉ phương nữa là $\overrightarrow{MN}(-2;-1;-2)$. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{MN}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (4;-2;-3).$$

Do vậy (P) có phương trình

$$(P): 4(x-1) - 2(y-2) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 3z + 9 = 0.$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và đường thẳng d đi qua N và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$. Khi đó (P) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{MN}].$$

*Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tích vô hướng của vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;-1;2)$ của đường thẳng d với các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng, ta **loại được phương án C**. Kiểm tra tính chất đi qua điểm $M(1;2;3)$ **ta loại được phương án B**. Kiểm tra tính chất đi qua điểm $A(-1;1;1)$ ta **loại được phương án A**. Vậy đáp án đúng là D.*

VÍ DỤ 5.15. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 4z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).*

A. $(Q): x - y - z - 2 = 0$ *B.* $(Q): 2x + y - 2z = 0$

C. $(Q): x - 3y + 4z - 4 = 0$ *D.* $(Q): 3x - y - 4z - 2 = 0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d nên nó nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(3;1;2)$ của d làm vectơ chỉ phương. Đồng thời (Q) qua điểm $M(1;-1;0) \in d$. Mặt khác, do (Q) vuông góc với (P) nên (Q) có thêm một vectơ chỉ phương nữa là vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-3;4)$ của (P). Suy ra vectơ pháp tuyến của (Q) là

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_P}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\right) = (10;-10;-10) = 10(1;-1;-1).$$

Do đó phương trình của (Q) là

$$(Q): (x-1) - (y+1) - z = 0 \Leftrightarrow x - y - z - 2 = 0.$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}].$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tính vuông góc của vectơ chỉ phương đường thẳng d với vectơ pháp tuyến các mặt phẳng ta ***loại được đáp án C.*** *Kiểm tra tính vuông góc của vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P) với các vectơ pháp tuyến các mặt phẳng ta* ***loại được đáp B và D.*** *Vậy đáp án đúng là A.*

VÍ DỤ 5.16. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng*

$$d_1 : \frac{x-8}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{-1} \text{ và } d_2 : \frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2

A. $(P) : 4x - 5y - 6z - 1 = 0$ *B.* $(P) : 4x - 5y - 6z + 41 = 0$

C. $(P) : x - 2y - z + 10 = 0.$ *D.* $(P) : x - y - z + 5 = 0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 nên nó nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1;2;-1)$ của d_1 làm vectơ chỉ phương. Đồng thời (P) qua điểm $M(8;5;8) \in d_1$. Mặt khác, do (P) song song với d_2 nên (P) có thêm một vectơ chỉ phương nữa là vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(7;2;3)$ của d_2. Suy ra vectơ pháp tuyến của (P) là

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \right) = (8;-10;-12) = 2(4;-5;-6).$$

Do đó phương trình của (P) là

$$(P) : 4(x-8) - 5(y-5) - 6(z-8) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y - 6z + 41 = 0.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}].$$

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Kiểm tra tính vuông góc của vectơ chỉ phương đường thẳng d_1 với vectơ pháp tuyến các mặt phẳng ta ***loại được đáp án A và C.*** *Kiểm tra tính vuông góc của vectơ chỉ phương đường thẳng d_2 với các vectơ pháp tuyến các mặt phẳng ta* ***loại được đáp D.*** *Vậy đáp án đúng là B.*

Đường thẳng cắt mặt phẳng

VÍ DỤ 5.17. *Trong hệ trục $Oxyz$, đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây cắt mặt phẳng $(P): x+y-2z-1=0$*

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

C. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(2;1;1)$

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x+y-z-1=0$ và $(R): 2x-z+1=0$.

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;1;-2)$.

- Đường thẳng $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_A}(1;-1;0)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_A}.\overrightarrow{n_P}=0$ nên nó song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P).
- Đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_B}(1;1;1)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_B}.\overrightarrow{n_P}=0$ nên nó song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P).
- Đường thẳng đi qua A, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_C}=\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_C}.\overrightarrow{n_P}=0$ nên nó song song hoặc nằm trên (P).
- Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q), (R)$ là đường thẳng có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_D}=[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_R}]=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right)=(-1;-1;1)$$

không vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ vì $\overrightarrow{u_D}.\overrightarrow{n_P}\neq 0$. Do đó đường thẳng này sẽ cắt (P).

Đáp án là D. □

*Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng ở phương án A và B vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P) nên **loại phương án A và B**. Với 2 phương án còn lại có 2 cách*

- *Cách 1: $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}$ nên **loại phương án C**.*

- *Cách 2: Hệ* $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+y-z-1=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ *có nghiệm duy nhất* $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$ *nên đường thẳng và mặt phẳng có điểm chung duy nhất,* ***đáp án là D.***

VÍ DỤ 5.18. *Trong không gian* $Oxyz$*, cho đường thẳng* $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=-3+2t \\ z=3+t \end{cases}$ *và mặt phẳng* $(P): 2x+y-2z+9=0$*. Giao điểm của* d *và* (P) *là*

A. $A(-2;-1;2)$ *B.* $A(1;-3;3)$ *C.* $A(2;-5;2)$ *D.* $A(0;-1;4)$

LỜI GIẢI. Giao điểm A của d và (P) có tọa độ dạng $A(1-t;-3+2t;3+t)$. Vì $A \in (P)$ nên tọa độ A thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

$$2(1-t)+(-3+2t)-2(3+t)+9=0 \Leftrightarrow 2-2t=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow A(0;-1;4).$$

Đáp án là D. □

Dạng 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

VÍ DỤ 5.19. *Trong không gian* $Oxyz$*, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau*

$$d_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=1+t' \\ y=-1+t' \\ z=2-2t' \end{cases}.$$

A. Chéo nhau *B. Song song* *C. Cắt nhau* *D. Trùng nhau*

LỜI GIẢI. Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2)$, đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(1;1;-2)$. Suy ra

$$[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)=(0;4;2)$$

Xét $M_1(-1;1;1) \in d_1$ và $M_2(1;-1;2) \in d_2$ thì $\overrightarrow{M_1M_2}(2;-2;1)$. Do đó

$$\overrightarrow{M_1M_2}.[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=-6 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

Đáp án là A. □

Nhận xét: Để thuận tiện trong tính toán, ta thường chọn các điểm $M_1 \in d_1$ và $M_2 \in d_2$ sao cho tọa độ của M_1, M_2 là các số nguyên với giá trị nhỏ. Thông thường M_1 và M_2 nên chọn ứng với tham số $t = 0$ và $t' = 0$.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Do các đường thẳng d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương tương ứng là $\vec{v}_1(1;-1;2)$ và $\vec{v}_2(1;1;-2)$ không cùng phương nên ta có thể ***loại ngay đáp án B và D****. Để kiểm tra A và C ta xét hệ*

$$\begin{cases} -1+t = 1+t' \\ 1-t = -1+t' \\ 1+2t = 2-2t' \end{cases}$$

Do hệ vô nghiệm nên d_1 không cắt d_2, ***loại đáp án C****. Vậy Đáp án đúng là A.*

Hai đường thẳng trùng nhau

VÍ DỤ 5.20. *Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2-2t \end{cases}$ trùng với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?*

A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$

B. Đường thẳng đi qua $A(1;-1;2), B(2;3;2)$

C. Đường thẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và vuông góc với $(P): x+2y+2z=0$

D. Giao tuyến của $(P): 2x+y+2z-5=0, (Q): 2x-2y-z-2=0$

LỜI GIẢI. Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_d}(1;2;-2)$

- Đường thẳng ở phương án A có vectơ chỉ phương $\vec{u_A}(1;-1;2)$ không cùng phương với $\vec{u_d}$ nên đường thẳng này không trùng với d.
- Đường thẳng ở phương án B qua điểm $B(2;3;2) \notin d$ nên đường thẳng này không trùng với d.
- Đường thẳng ở phương án C có vectơ chỉ phương là $\vec{v_C}(1;2;2)$ không cùng phương với $\vec{u_d}$ nên đường thẳng này không trùng với d.

- Đường thẳng ở phương án D đi qua M và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_D} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3; 6; -6) = 3\overrightarrow{u_d},$$

nên đường thẳng này trùng với d.

Đáp án là D. □

Đường thẳng song song với đường thẳng

VÍ DỤ 5.21. *Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?*

A. $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$

B. Đường thẳng đi qua $A(-1; 2; 1), B(1; 5; 0)$

C. Đường thẳng đi qua gốc O *và vuông góc với* $(P) : 2x + 3y - z = 0$

D. Giao tuyến của $(P) : x - y - z + 4 = 0, (Q) : 2x - y + z + 3 = 0$

LỜI GIẢI. Đường thẳng d đi qua $M(-1; 2; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2; 3; -1)$

- Đường thẳng ở phương án A có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_A}(-1; 2; 1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}$ nên đường thẳng này không song song với d.

- Đường thẳng ở phương án B qua điểm $A(-1; 2; 1) \in d$ nên đường thẳng này không song song với d.

- Đường thẳng ở phương án C đi qua điểm $O(0; 0; 0) \notin d$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v_C}(2; 3; -1) = \overrightarrow{u_d}$ nên đường thẳng này song song với d.

- Đường thẳng ở phương án D đi qua $A(-1; 2; 1) \in d$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_D} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -3; 1) = -\overrightarrow{u_d},$$

nên đường thẳng này trung với d.

Đáp án là C. □

Đường thẳng vuông góc với đường thẳng

VÍ DỤ 5.22. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z+3=0$, đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ và điểm $A(1;2;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, song song với (P) và vuông góc với d*

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$ B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$ D. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{-2}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;2;1)$ và vuông góc với đường d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;3;-2)$. Do đó Δ có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_\Delta}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}]=\left(\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\right)=(-7;3;1)=-(7;-3;-1).$$

Mặt khác Δ qua $A(1;2;3)$ nên $\Delta: \dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Đáp án là C. □

Hai đường thẳng chéo nhau

VÍ DỤ 5.23. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng*

$$d_1:\begin{cases}x=-1+t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases} \text{ và } d_2:\begin{cases}x=1+t'\\y=-1+mt'\\z=3+4t'\end{cases}$$

Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau?

A. $m=-1$ B. $m\neq -1$ C. $m=0$ D. $m\neq 0$ và -1

LỜI GIẢI. Ta có d_1 đi qua $M(-1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2)$; d_2 đi qua $N(1;-1;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(1;m;4)$. Suy ra

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}]=\left(\begin{vmatrix}-1&2\\m&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\1&m\end{vmatrix}\right)=(-4-2m;-2;m+1);\overrightarrow{MN}(2;-2;2).$$

Hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n}=2(-4-2m)-2(-2)+2(m+1)\neq 0\Leftrightarrow -2-2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1.$$

Đáp án là B. □

Hai đường thẳng cắt nhau

VÍ DỤ 5.24. *Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}$ cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?*

A. $\begin{cases}x=t'\\y=-t'\\z=3+4t'\end{cases}$

B. Đường thẳng $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$

C. Đường thẳng qua $A(1;2;3)$ *và* $B(2;4;3)$.

D. Giao tuyến của $(P):2x-y+z-3=0$ *và* $(Q):2x-y-z+3=0$.

LỜI GIẢI.

- Hệ phương trình $\begin{cases}-1+t=t'\\1-t=-t'\\1+2t=3+4t'\end{cases}$ vô nghiệm nên đường thẳng ở phương án A không cắt d.
- Hệ phương trình $\dfrac{-1+t-1}{-1}=\dfrac{1-t+1}{1}=\dfrac{1+2t-3}{-2}$ nghiệm đúng với mọi t nên đường thẳng ở phương án B trùng với d.
- Đường thẳng đi qua A,B có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}(1;2;0)$ nên có phương trình $\begin{cases}x=1+t'\\y=2+2t'\\z=3\end{cases}$. Hệ phương trình $\begin{cases}-1+t=1+t'\\1-t=2+2t'\\1+2t=3\end{cases}$ vô nghiệm nên đường thẳng AB và d không cắt nhau.
- Xét giao điểm của d và (P) là $M(-1+t;1-t;1+2t)$ thỏa mãn

$$2(-1+t)-(1-t)+(1+2t)-4=0\Leftrightarrow 5t-5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(0;0;3).$$

Mặt khác $M(0;0;3)\in(Q)$ nên M chính là giao điểm cần tìm.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 5.25. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-3y+4z-1=0$, đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ và điểm $A(3;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (P).*

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{4}$ *B.* $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ *D.* $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$

LỜI GIẢI. Gọi B là giao điểm của Δ và d. Do $B\in d$ nên tọa độ B có dạng $B(1+3t;-1+t;2t)$, suy ra $\overrightarrow{AB}(3t-2;t-2;2t-1)$. Vì $AB\parallel(P)$ không đi qua A, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-3;4)$ nên

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=1.(3t-2)-3.(t-2)+4.(2t-1)=8t=0\Leftrightarrow t=0.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}(-2;-2;-1)$, do đó $AB:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 5.26. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng*

$$d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}\text{ và }d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

Tìm đường thẳng d cắt d_1,d_2 và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x+y+5z+3=0$.

A. $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+2}{5}$ *B.* $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{5}$

C. $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ *D.* $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$

LỜI GIẢI. Gọi A,B tương ứng là hai giao điểm của d với d_1,d_2. Do $A\in d_1, B\in d_2$ nên tọa độ A,B có dạng $A(1+2a;-1+a;2a), B(2+b;b;1-2b)$.

Đường thẳng d vuông góc với (P) khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}(b-2a+1;b-a+1;1-2b-2a)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}(2;1;5)$. Điều này có nghĩa là

$$\frac{b-2a+1}{2}=\frac{b-a+1}{1}=\frac{1-2b-2a}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}b-2a+1=2(b-a+1)\\5(b-a+1)=1-2b-2a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\3a-7b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(-1;-2;-2)\\B(1;-1;3)\end{cases}.$$

Do đó $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+2}{5}$.

Đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Hai mặt phẳng trùng nhau

BÀI TẬP 5.1. Trong không gian $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): 2x + my - 3z + m = 0$ và $(Q): (m+2)x + 4y - (m+4)z + 4 = 0$ trùng nhau?

A. $m = 2$ hoặc $m = -4$ B. $m = 2$ hoặc $m = -6$

C. $m = 2$ D. $m = 0$

Hai mặt phẳng song song

BÀI TẬP 5.2. Trong không gian $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): 2x + my + 2z - 3m = 0$ và $(Q): (m+2)x + 4y + (m+2)z - 9 = 0$ song song với nhau?

A. $m = 2$ hoặc $m = -4$ B. $m = 2$

C. $m = -4$ D. $m \neq 2, 4$

Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng

BÀI TẬP 5.3. Trong không gian $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): 2x + my - 3z + 2 = 0$ và $(Q): mx - 3y - z + 5 = 0$ vuông góc với nhau?

A. $m = 3$ B. $m = \dfrac{3}{2}$ C. $m = -9$ D. $m = 0$

BÀI TẬP 5.4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào trong những mặt phẳng sau đây qua hai điểm $A(2; -1; 3)$, $B(3; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 1 = 0$?

A. $4x + 5y + 7z = 0$ B. $4x + 5y + 7z - 24 = 0$

C. $2x - 3y + z - 10 = 0$ D. $2x - 3y + z - 4 = 0$

BÀI TẬP 5.5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây qua điểm $A(1; -2; 1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z - 5 = 0$ và $(Q): 2x - 3y + z + 1 = 0$?

A. $3x + 2y - z + 2 = 0$ B. $2x - 3y + z - 9 = 0$

C. $x + 5y + 13z = 0$ D. $x + 5y + 13z - 4 = 0$

BÀI TẬP 5.6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q_1): 2x + y - z + 1 = 0$ và $(Q_2): x - 2y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) chứa d và vuông góc với $(R): x - 2y - 3z + 1 = 0$ thì phương trình của (P) là

A. $2x+y-z+1=0$ B. $x-2y+z-1=0$

C. $x+8y-5z+5=0$ D. $x-y+z-1=0$

Dạng 2: Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng

Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng

BÀI TẬP 5.7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-3z-5=0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3-6t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

C. Đường thẳng qua $A(0;1;-1)$ và $B(3;-2;-2)$

D. Giao tuyến của $(Q): x+y+z-1=0$ và $(R): 2x-z+3=0$.

BÀI TẬP 5.8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-3y+2z+1=0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2-3t \end{cases}$

B. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$

C. Đường thẳng qua $A(1;4;-2)$ và $B(3;-2;2)$

D. Giao tuyến của $(Q): 4x+2y+z+1=0$ và $(R): x-y-2=0$.

BÀI TẬP 5.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y-4z-5=0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$

B. Đường thẳng qua $A(0;-1;-2)$ và $B(2;3;-4)$

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): 3x-2y-1=0$ và $(R_1): x-z-1=0$

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): 3x-2y-1=0$ và $(R_2): 4x+2z+1=0$.

BÀI TẬP 5.10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau

A. $(P): 4x-6y+2z-7=0$

B. Mặt phẳng đi qua $A(1;-2;3)$ và song song với $(Q): x-2y+3z-5=0$.

C. Mặt phẳng đi qua $A(1;-2;3)$ và vuông góc với $(R_1): x+y+z-1=0, (R_2): x-y+z-1=0$.

D. Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;-2;3), B(2;-1;4)$ và $C(3;-1;3)$.

BÀI TẬP 5.11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau

A. $(P): 2x-4y+3z-7=0$

B. Mặt phẳng đi qua $A(1;3;-2)$ và song song với $(Q): 2x+4y-6z-4=0$.

C. Mặt phẳng đi qua $A(1;3;-2)$ và vuông góc với $(R_1): x+y+z-1=0$, $(R_2): x-2y-z-1=0$.

D. Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;3;-2), B(0;1;1)$ và $C(2;5;-1)$.

BÀI TẬP 5.12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d : $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau

A. $(P): x+y-3z-5=0$

B. Mặt phẳng đi qua $A(-1;-2;2)$ và song song với $(Q): 2x+2y+3z-7=0$.

C. Mặt phẳng đi qua điểm $A(-1;-2;2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng có phương trình $(R_1): 2x+y+2z-1=0, (R_2): x+2y+2z-1=0$.

D. Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(-1;-2;2), B(-3;-4;5)$ và $C(1;0;1)$.

BÀI TẬP 5.13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d : $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau

A. $(P): 2x+y-3z+1=0$

B. Mặt phẳng đi qua $A(-2;2;1)$ và song song với $(Q): 3x+2y+3z-5=0$.

C. Mặt phẳng đi qua điểm $A(-2;2;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng có phương trình $(R_1): 2x+y-z-1=0, (R_2): x+2y-3z-1=0$.

D. Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(-2;2;1), B(-1;3;2)$ và $C(-1;4;0)$.

BÀI TẬP 5.14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d.

A. $(P): x-y+3z=0$

B. $(P): -2x+y+3z=0$

C. $(P): x-y+3z-4=0$

D. $(P): -2x+y+3z-18=0$

BÀI TẬP 5.15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-3y+4z-1=0$ và điểm $A(3;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P).

A. $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{4}$

B. $\Delta: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

C. $\Delta: \begin{cases} x=3+t \\ y=1-3t \\ z=1+4t \end{cases}$

D. $\Delta: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-3+t \\ z=4+t \end{cases}$

Mặt phẳng song song với đường thẳng

BÀI TẬP 5.16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau

A. $x+y+z-1=0$

B. $x+y+z-5=0$.

C. $-3x+2y+z=0$

D. $3x-2y-z+11=0$

BÀI TẬP 5.17. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y-2z-1=0$ song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

C. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1;1)$ và $B(3;0;2)$

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x+y-2z-1=0$ và $(R): x-2y+z+5=0$.

BÀI TẬP 5.18. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x-2y-2z-1=0$ song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$

C. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;1;0)$ và $B(3;2;2)$

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x+y-2z=0$ và $(R): x+2y+z+4=0$.

BÀI TẬP 5.19. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x-2y+5z-4=0$ song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+4t \\ z=1+t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{1}$

C. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(-1;-1;1)$

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x-y-2z+3=0$ và $(R): x+2y+z-6=0$.

BÀI TẬP 5.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O và song song với d_1, d_2.

A. $(P): x-2y-3z+6=0$ B. $(P): x-2y-3z=0$

C. $(P): x-y-z=0$. D. $(P): x+2y+z=0$

BÀI TẬP 5.21. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;3;-1)$, song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=3+2t \\ z=-t \end{cases}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x-2y+z-3=0$.

A. $x+2y-z-9=0$ B. $x-y-z=0$

C. $x+y-z-6=0$ D. $y+2z-1=0$

BÀI TẬP 5.22. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $A(2;3;-1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x+2y-z+6=0$ và $(Q): 3x-2y+z-4=0$.

A. $d: \begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=-1+2t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x=2t \\ y=-4+3t \\ z=-8-t \end{cases}$

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ D. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$

Mặt phẳng chứa đường thẳng

BÀI TẬP 5.23. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ nằm trong mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau:

A. $2x+3y-2z=0$.

B. Mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}(2;3;-2)$.

C. Mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và vuông góc với $\Delta: \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{2}$.

D. Mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và song song song với $(P): 2x-2y-z-3=0$.

BÀI TẬP 5.24. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$ chứa đường thẳng nào trong các đường thẳng sau:

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \\ z=2t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

C. Đường thẳng đi qua $A(2;0;1)$ và $B(1;1;2)$.

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x+z-3=0$ và $(R): x+y-4=0$.

BÀI TẬP 5.25. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-5=0$ chứa đường thẳng nào trong các đường thẳng sau:

A. $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2+t \\ z=2-2t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

C. Đường thẳng đi qua $A(1;1;2)$ và $B(3;1;-1)$.

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x+2z-3=0$ và $(R): x+y-4=0$.

BÀI TẬP 5.26. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x-3y+3z-4=0$ chứa đường thẳng nào trong các đường thẳng sau:

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-3t \\ z=1+3t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$

C. Đường thẳng đi qua $A(2;1;1)$ và $B(3;2;1)$.

D. Giao tuyến của $(Q): x+y+2z-3=0$ và $(R): 3x-2y+5z-7=0$.

BÀI TẬP 5.27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=-1-2t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng d

A. $(P): 4x-5y-3z+10=0$ B. $(P): x+2y-2z-6=0$

C. $(P): 2x+y+3z-10=0$. D. $(P): x-y-z+2=0$.

BÀI TẬP 5.28. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây chứa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2} \text{ và } d_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$$

A. $x+y-1=0$ B. $-x+y+z-3=0$ C. $x+y=0$ D. $2x+y+z=0$

BÀI TẬP 5.29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào trong những mặt phẳng sau đây chứa đường thẳng $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=2-2t \end{cases}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x-2y+3z-1=0$?

A. $7x+5y+z+2=0$ B. $x-y+z-1=0$

C. $7x+5y+z+5=0$ D. $x-y+z-1=0$

BÀI TẬP 5.30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hãy tìm phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x=-1+t' \\ y=-t' \\ z=2-2t' \end{cases}$ và song song với đường thẳng

$\Delta : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

A. $(P) : 2y + z - 1 = 0$
B. $(P) : x + y - 2z - 1 = 0$
C. $(P) : -2y + z - 2 = 0$
D. $(P) : x + y + 2z - 5 = 0$

BÀI TẬP 5.31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y - 2z + 9 = 0$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau nằm trong (P) và vuông góc với d?

A. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 \\ z = 2 + t \end{cases}$
B. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$
C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và $(Q) : x + y - z + 5 = 0$
D. Đường thẳng đi qua $A(0; -1; 4)$ và $B(1; 0; 5)$

Đường thẳng cắt mặt phẳng

BÀI TẬP 5.32. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$ cắt mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $x - y - z - 3 = 0$
B. Mặt phẳng qua $M(2; -1; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 1; -1)$.
C. Mặt phẳng qua $M(2; -1; 3)$ và song song với $(P) : 2x - y + 2z = 0$
D. Mặt phẳng trung trực của AB với $A(2; -1; 1)$ và $B(4; 0; 0)$

BÀI TẬP 5.33. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : x + y - 2z = 0$ cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$
B. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$
C. Đường thẳng đi qua $A(2; -1; 1)$ và $B(3; 0; 2)$
D. Giao tuyến của $(Q) : x + y - z - 1 = 0$ và $(R) : 2x - z + 1 = 0$

BÀI TẬP 5.34. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x+y-2z-1=0$ **không** cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

C. Đường thẳng đi qua $A(2;-1;2)$ và $B(3;-4;2)$

D. Giao tuyến của $(Q): x+y-z-1=0$ và $(R): 2x-3z+1=0$

BÀI TẬP 5.35. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-1=0$ cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases}$

B. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$

C. Đường thẳng đi qua $A(-1;1;-1)$ và $B(3;2;-1)$

D. Giao tuyến của $(Q): x+y-z-1=0$ và $(R): 2x-3y+3z+1=0$

BÀI TẬP 5.36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-4y+z-7=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của d và (P)

A. $M(1;2;3)$ B. $M(-1;1;0)$ C. $M(3;2;1)$ D. $M\left(\dfrac{29}{2};11;\dfrac{15}{2}\right)$

Dạng 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

BÀI TẬP 5.37. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=-1+t' \\ y=-t' \\ z=2+2t' \end{cases}$$

A. Chéo nhau B. Song song C. Cắt nhau D. Trùng nhau

BÀI TẬP 5.38. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$$d_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

A. Chéo nhau B. Song song C. Cắt nhau D. Trùng nhau

BÀI TẬP 5.39. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3} \text{ và } d_2 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

A. Chéo nhau B. Song song C. Cắt nhau D. Trùng nhau

BÀI TẬP 5.40. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$d_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 - t' \\ z = 5 + 2t' \end{cases}$$

A. Chéo nhau B. Song song C. Cắt nhau D. Trùng nhau

Hai đường thẳng trùng nhau

BÀI TẬP 5.41. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ trùng với đường thẳng nào sau đây?

A. $\begin{cases} x = 2t' \\ y = -2t' \\ z = 3 + 4t' \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 \\ z = 5 + 2t' \end{cases}$

Đường thẳng song song với đường thẳng

BÀI TẬP 5.42. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ song song với đường thẳng nào sau đây?

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{4}$

B. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$

C. $\begin{cases}x=1+t'\\y=2+2t'\\z=3\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=1+t'\\y=1+2t'\\z=3\end{cases}$

BÀI TẬP 5.43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=-1+t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}\quad\text{và}\quad d_2:\begin{cases}x=1+t'\\y=-1+mt'\\z=2+2t'\end{cases}.$$

Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng song song với nhau?

A. $m=-1$

B. $m=1$

C. Không tồn tại m

D. Với mọi m

Đường thẳng vuông góc với đường thẳng

BÀI TẬP 5.44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm mặt phẳng $(P):2x+y+3z=0$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{4}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O, nằm trong (P) và vuông góc với d

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{11}=\dfrac{z+2}{-7}$

B. $\Delta:\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z}{-7}$

C. $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-t\end{cases}$

D. $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=t\end{cases}$

Hai đường thẳng chéo nhau

BÀI TẬP 5.45. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+3t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}$ chéo nhau với đường thẳng nào sau đây?

A. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}$

B. $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

C. $\begin{cases}x=-1+t'\\y=3+t'\\z=3+2t'\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=-1+t'\\y=3-t'\\z=3-2t'\end{cases}$

Hai đường thẳng cắt nhau

BÀI TẬP 5.46. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-3t\\z=2+2t\end{cases}$ cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{2}$

B. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$

C. $\begin{cases}x=-2+t'\\y=3-2t'\\z=3-3t'\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=-2+t'\\y=3-2t'\\z=3-t'\end{cases}$

BÀI TẬP 5.47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases},\ d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$$

và mặt phẳng $(P):x-y-2z+3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P) và cắt cả d_1,d_2.

A. $\Delta:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

B. $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$

C. $\Delta:\begin{cases}x=t'\\y=1-t'\\z=1+t'\end{cases}$

D. $\Delta:\begin{cases}x=1+t'\\y=3t'\\z=2-t'\end{cases}$

BÀI TẬP 5.48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;4)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng d.

A. $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=4+t\end{cases}$

B. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=2+t\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$

D. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$

BÀI TẬP 5.49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, cắt trục Ox và song song với mặt phẳng (P).

A. $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=2-t\end{cases}$ B. $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-t\\z=-t\end{cases}$

C. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ D. $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$

BÀI TẬP 5.50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=3+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), cắt và vuông góc với d.

A. $\Delta:\begin{cases}x=-3-t'\\y=4\\z=1+2t'\end{cases}$ B. $\Delta:\begin{cases}x=-2-t'\\y=1\\z=2+2t'\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ D. $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-1}$

BÀI TẬP 5.51. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\\z=2+t\end{cases}$, điểm $A(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt d và (P) lần lượt tại B,C sao cho A là trung điểm BC.

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-3t\\z=-1+t\end{cases}$ B. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=-1+2t\end{cases}$

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ D. $\Delta:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$

BÀI TẬP 5.52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d_1,d_2 và trục Ox lần lượt tại A,B,C sao cho B là trung điểm AC

A. $\Delta: \begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 4 + 3t \\ z = 9 + 8t \end{cases}$

B. $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 4t \\ z = 9t \end{cases}$

C. $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$

D. $\Delta: \dfrac{x-8}{12} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z-8}{4}$

BÀI TẬP 5.53. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$, $d_2: \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua A và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2?

A. Có 1 B. Không tồn tại C. Có vô số D. Có 2

BÀI TẬP 5.54. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. Có bao nhiêu đường thẳng cắt trục hoành và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2?

A. Có 1 B. Không tồn tại C. Có vô số D. Có 2

BÀI TẬP 5.55. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{1}, d_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z+1}{-2} \text{ và } d_3: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ cắt trục tung và cắt cả ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3

A. $\Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{-3}$

B. $\Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{-8} = \dfrac{z}{-3}$

C. $\Delta: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z+3}{1}$

D. $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{2}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 5.1. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ trùng nhau khi và chỉ khi

$$\frac{2}{m+2} = \frac{m}{4} = \frac{-3}{-(m+4)} = \frac{m}{4} \Leftrightarrow m = 2.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.2. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song với nhau khi và chỉ khi

$$\frac{2}{m+2} = \frac{m}{4} = \frac{2}{m+2} \neq \frac{-3m}{-9} \Leftrightarrow m = -4.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.3. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 2.m + m.(-3) - 3.(-1) = 0 \Leftrightarrow 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.4. Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_P}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-4; -5; -7).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (Q) là $(Q) : 4x + 5y + 7z - 24 = 0$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.5. Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm, (R) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_R} = [\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-1; -5; -13).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (R) là $x + 5y + 13z - 4 = 0$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.6. Mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của (Q_1) và (Q_2) có dạng

$$(P) : m(2x + y - z + 1) + n(x - 2y + z - 1) = 0 \quad (m^2 + n^2 > 0)$$

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (R) khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = (2m + n) - 2(m - 2n) - 3(n - m) = 0 \Leftrightarrow 3m + 2n = 0$$

Chon $m = 2, n = -3$ thì phương trình (P) là $x + 8y - 5z + 5 = 0$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.7. Đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_A}(2; 4; -6)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}(1; 2; -3)$ nên nó vuông góc với (P).
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.8. Đường thẳng qua A, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}(2; -6; 4)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}(1; -3; 2)$ nên nó vuông góc với (P).
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.9. Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q) và (R_2) vì

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_{R_2}} = 0$$

nên (P) vuông góc với giao tuyến của (Q) và (R_2).
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.10. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(4; -6; 2)$ cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2; -3; 1)$ của d nên $d \perp (P)$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.11. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(2; 4; -6)$ cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(-1; -2; 3)$ của d nên $d \perp (Q)$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.12. Hai mặt phẳng (R_1) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(2; 1; 2), \overrightarrow{n_2}(1; 2; 2)$ cùng vuông góc với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(-2; -2; 3)$ của d.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.13. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}(1; 1; 1), \overrightarrow{AC}(1; 2; -1)$ cùng vuông góc với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(-3; 2; 1)$ của d nên $d \perp (ABC)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.14. Do $(P) \perp d$ nên (P) nhận $\overrightarrow{u_d}(-2; 1; 3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình (P) là

$$(P) : -2(x + 4) + (y - 1) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 3z - 18 = 0.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.15. Đường thẳng $\Delta \perp (P)$ nên $\overrightarrow{n_P}(1;-3;4)$ là vectơ chỉ phương của Δ. Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1-3t \\ z = 1+4t \end{cases}$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.16. Đường thẳng d chứa điểm $M(-2;2;1)$ không thuộc mặt phẳng $x+y+z-5=0$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của mặt phẳng $x+y+z-5=0$ là $\overrightarrow{n_B}(1;1;1)$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.17. Đường thẳng đi qua $A(2;-1;1)$ và $B(3;0;2)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}(1;1;-2)$, đồng thời $A \notin (P)$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.18. Đường thẳng $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = -2+2t \end{cases}$ đi qua $A(1;1;-2) \notin (P)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v}(2;1;2)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}(3;-2;-2)$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.19. Đường thẳng $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ đi qua $A(2;3;-1) \notin (P)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v}(-1;1;1)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}(3;-2;5)$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.20. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1;-2;-3).$$

Phương trình mặt phẳng $(P): x-2y-3z=0$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.21. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (0;-4;-8).$$

Phương trình mặt phẳng $(P): y+2z-1=0$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.22. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_d}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\3&-2\end{vmatrix}\right)=(0;-4;-8).$$

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=2\\y=3+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.23. Do d đi qua $A(1;-1;2)\in(P)$ và $\overrightarrow{u_d}(2;3;-2)$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}(2;-2;-1)$ nên d nằm trong mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.24. Mặt phẳng (P) chứa hai điểm A,B nên nó chứa đường thẳng AB.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.25. Mặt phẳng (P) chứa hai điểm $M(1;1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(3;-2;2)$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_B}(2;1;-2)$ của đường thẳng $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.26. Hệ phương trình $\begin{cases}2x-3y+3z-4=0\\x+y+2z-3=0\\3x-2y+5z-7=0\end{cases}$ có vô số nghiệm.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.27. Ta có $M(-2;1;-1)$ nên $\overrightarrow{AM}(-4;-2;-2)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}]=\left(\begin{vmatrix}-2&-2\\2&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&-4\\-2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4&-2\\1&2\end{vmatrix}\right)=(8;-10;-6)=2(4;-5;-3).$$

Phương trình $(P): 4x-5y-3z+10=0$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.28. Ta có d_1, d_2 qua $A(-1;1;1), B(0;0;0)$ và có chung vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(1;-1;2)$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-3;-3;0) = -3(1;1;0).$$

Phương trình $(P): x + y = 0$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.29. Mặt phẳng (P) cần tìm có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right) = (-7;-5;-1)$$

(P) qua $M(-1;0;2)$ nên có phương trình $(P): 7x + 5y + z + 5 = 0$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.30. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_\Delta}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (0;-4;2)$$

Mặt phẳng (P) qua $M(-1;0;2)$ nên có phương trình $(P): -2y + z - 2 = 0$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.31. Đường thẳng $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 \\ z = 2 + t \end{cases}$ đi qua điểm $M(-2;-1;2) \in (P)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(1;0;1)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.32. Mặt phẳng qua $M(2;-1;3)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(2;-1;2)$ không vuông góc với $\overrightarrow{u_d}(2;-1;3)$ nên chúng cắt nhau.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.33. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.34. Đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_B}(1;1;2)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(3;1;-2)$, đồng thời $M(2;1;1)$ thuộc đường thẳng nhưng không thuộc mặt phẳng (P) nên chúng không cắt nhau.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.35. Đường thẳng qua A, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}(4;1;0)$ không vuông góc với vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(3;-2;2)$ nên chúng cắt nhau.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.36. Giao điểm $M(1+3t;2+2t;3+t)$ thỏa mãn phương trình (P) nên

$$3(1+3t)-4(2+2t)+(3+t)-7=0\Leftrightarrow 2t-9=0\Leftrightarrow t=\frac{9}{2}.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.37. Ta có $M(-1;1;1)\in d_1,\notin d_2$ và $\overrightarrow{u_1}(1;-l;2)=\overrightarrow{u_2}(1;-1;2)$ nên $d_1\parallel d_2$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.38. Ta có $M(-1;1;1)\in d_1, N(1;0;1)\in d_2$ nên $\overrightarrow{MN}(2;-1;0)$. Lại có

$$[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-4;0;-2)$$

Do $\overrightarrow{MN}.[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=-8\neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.39. Ta có $M(1;-1;-2)\in d_1,d_2$ và $\overrightarrow{u_1}(2;-l;3)\parallel\overrightarrow{u_2}(-2;1;-3)$ nên $d_1\equiv d_2$.
Đáp án là D □

GIẢI BÀI TẬP 5.40. Hệ phương trình

$$\begin{cases}-1+2t=2-t'\\ 1+t=1-t'\\ 1+2t=5+2t'\end{cases}$$

có nghiệm $t=1, t'=-1$. Do đó d_1, d_2 cắt nhau.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.41. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;1;-1)$ thuộc đường thẳng $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;0;2) \parallel \overrightarrow{u_B}(-1;0;-2)$ nên chúng song song với nhau.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.42. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;1;1)$ không thuộc đường thẳng $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ và $\overrightarrow{u_d}(1;-1;2) \parallel \overrightarrow{u_B}(-1;1;-2)$ nên chúng song song với nhau.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 5.43. Đường thẳng d_2 đi qua $M(1;-1;2) \notin d_1$ nên $d_1 \parallel d_2$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2) \parallel \overrightarrow{u_2}(1;m;2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{2}{2} \Leftrightarrow m = -1$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.44. Ta có

$$\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_d}] = (-5;-11;7).$$

Đáp án là B □

GIẢI BÀI TẬP 5.45. Đường thẳng $\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 3 - t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_D}(1;-1;-2)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}(3;-1;2)$ và hệ phương trình $\begin{cases} -2 + 3t = -1 + t' \\ 2 - t = 3 - t' \\ 1 + 2t = 3 - 2t' \end{cases}$ vô nghiệm nên nó chéo nhau với d.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.46. Đường thẳng $\begin{cases} x = -2 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 3 - 3t' \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_D}(1;-2;-3)$

không cùng phương với $\overrightarrow{u_d}(2;-3;2)$ và hệ phương trình $\begin{cases} 1+2t=-2+t' \\ -2-3t=3-2t' \\ 2+2t=3-3t' \end{cases}$ có nghiệm $t=-1, t'=1$ nên nó cắt nhau với d.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.47. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)=d_1\cap(P)$ và điểm $B(2;3;1)=d_2\cap(P)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.48. Gọi giao điểm của Δ và d là $B(1+t;2t;2+t)$. Do $\Delta\perp d$ nên

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=1.t+2.(2t-2)+1.(t-2)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;2;3)\Rightarrow \overrightarrow{AB}(1;0;-1).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.49. Gọi giao điểm của d và Ox là $B(b;0;0)$. Do $d\parallel(P)$ nên

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=2(b-1)-1.(-2)-1.(-2)=0\Leftrightarrow b=-1\Rightarrow B(-1;0;0)\Rightarrow \overrightarrow{AB}(-2;-2;-2).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.50. Đường thẳng Δ đi qua $A(-3;4;1)=d\cap(P)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_\Delta}=[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-2;0;4).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.51. Do $B\in d$ nên $B(1+2t;2-3t;2+t)$. Vì BC nhận A làm trung điểm nên $C(1-2t;4+3t;-4-t)$. Mặt khác, $C\in(P)$ nên

$$(1-2t)+(4+3t)+2(-4-t)+4=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(3;-1;3).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.52. Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2, Ox tại các điểm tương ứng là $A(7+a;4+2a;9-a), B(3-7b;1+2b;1+3b), C(c;0;0)$. Suy ra

$$\begin{cases} 7+a+c=2(3-7b) \\ 4+2a=2(1+2b) \\ 9-a=2(1+3b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-16 \end{cases} \Rightarrow A(8;6;8), B(-4;3;4), C(-16;0;0).$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 5.53. Do hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau nên chỉ có duy nhất 1 đường thẳng đi qua điểm A và cắt cả d_1, d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) qua A, d_1 và mặt phẳng (Q) qua A, d_2. Điều này có được là do hai mặt phẳng (P) và (Q) không song song hay trùng nhau.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 5.54. Do hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau nên với bất kỳ điểm A nào trên trục hoành (chỉ trừ ra 2 điểm) đều có một đường thẳng đi qua cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 5.55. Do $d_1 \parallel d_2$ nên đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) chứa d_1, d_2 đi qua điểm $M(1;1;1), N(2;-1;-1)$ có vectơ pháp tuyến

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{MN}\right] = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right) = (-6;3;-6) = -3(2;-1;2)$$

Suy ra $(P): 2x-y+2z-3=0$. Mặt phẳng (P) cắt trục tung tại $A(0;-3;0)$ và cắt d_3 tại $B(2;-5;-3)$.

Đáp án là A. □

CHỦ ĐỀ 6
BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Hình chiếu vuông góc của một điểm lên một đường thẳng:** Trong không gian, cho điểm M và đường thẳng Δ. Ta gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng Δ nếu H thuộc Δ và đường thẳng MH vuông góc với đường thẳng Δ.
Cách tìm hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng:

   - *Cách 1:*

     - **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với Δ hay nhận vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là vectơ pháp tuyến.
     - **Bước 2:** Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ và gọi tọa độ điểm H theo một tham số.
     - **Bước 3.** Cho tọa độ điểm H thỏa mãn phương trình của đường thẳng Δ ta tìm được tham số.
     - **Bước 4.** Thay tham số vào tọa độ của điểm H ta được tọa độ hình chiếu vuông góc H của M.

- *Cách 2:*
  - **Bước 1:** Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ và gọi tọa độ điểm H theo một tham số.
  - **Bước 2.** Cho $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$. Từ đó ta tìm được tham số.
  - **Bước 3.** Thay tham số vào tọa độ của điểm H ta được tọa độ hình chiếu vuông góc H của M.

Nhận xét: Theo quan điểm của các tác giả khi làm các bài toán trắc nghiệm học sinh nên sử dụng cách 2 để tìm hình chiếu vuông góc của một điểm lên một đường thẳng.

Cách tìm điểm đối xứng của một điểm qua một đường thẳng: Để tìm điểm M' đối xứng của điểm M qua đường thẳng Δ ta làm như sau:

- **Bước 1.** Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm M lên đường thẳng Δ. H là trung điểm của MM'.
- **Bước 2.** Sử dụng công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ của điểm M' là:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}.$$

2. **Hình chiếu vuông góc của một điểm lên một mặt phẳng:** Trong không gian, cho điểm M và mặt phẳng (P). Ta gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) nếu H thuộc (P) và đường thẳng MH vuông góc với mặt phẳng (P).

Cách tìm hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng :

- **Bước 1.** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P) hay nhận vectơ pháp tuyến của (P) là vectơ chỉ phương.
- **Bước 2.** Do $H \in d$ nên ta có thể gọi tọa độ điểm H theo một tham số.
- **Bước 3.** Cho tọa độ điểm H thỏa mãn phương trình của mặt phẳng (P) ta tìm được tham số.

- **Bước 4.** Thay tham số vào tọa độ của điểm H ta được tọa độ hình chiếu vuông góc H của M.

Cách tìm điểm đối xứng của một điểm qua một mặt phẳng: Để tìm điểm M' đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (P) ta làm như sau:

- **Bước 1.** Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm M lên mặt phẳng (P). H là trung điểm của MM'.
- **Bước 2.** Sử dụng công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ của điểm M' là: $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Hình chiếu vuông góc của một điểm lên một đường thẳng

VÍ DỤ 6.1. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ là:*

A. $H(-1;2;3)$ *B.* $H(-1;-2;-3)$ *C.* $H(1;3;2)$ *D.* $H(1;-2;-3)$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng Δ. Khi đó mặt phẳng (P) nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;1;-1)$ của đường thẳng Δ là vectơ pháp tuyến của nó. Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$(P) : 2(x-1) + 1(y+2) - 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z + 3 = 0.$$

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ. Do $H \in \Delta$ nên tọa độ H có dạng $H(-1+2t; 2+t; 3-t)$. Ta có

$$H \in (P) \Rightarrow 2(-1+2t) + (2+t) - (3-t) + 3 = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow H(-1;2;3).$$

Đáp án là A.

Cách 2: Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ. Do $H \in \Delta$ nên tọa độ H có dạng $H(-1+2t; 2+t; 3-t)$. Suy ra $\overrightarrow{MH} = (2t-2; t+4; -t)$ vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; 1; -1)$. Ta có:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-2) + 1(t+4) - 1(-t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(-1; 2; 3).$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Ta có thể thử trực tiếp một cách nhanh chóng khi thay tọa độ các điểm trong các đáp án vào phương trình đường thẳng Δ ta thấy hai điểm ở đáp án B, D không thỏa mãn nên ta có thể ***loại ngay đáp án B và D.*** *Hai đáp án còn lại ta thử điều kiện vuông góc $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$ rồi suy ra đáp án cần tìm là A.*

VÍ DỤ 6.2. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox.*

A. $A'(0; 2; 0)$ *B.* $A'(1; 0; 0)$ *C.* $A'(0; 0; -3)$ *D.* $A'(-1; 0; 0)$

LỜI GIẢI. A' là hình chiếu vuông góc của A lên Ox thì $A'(a; 0; 0)$ và AA' vuông góc với Ox hay $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{i} = 0$. Do đó ta có $a = 1$ hay $A'(1; 0; 0)$.

Đáp án là B. □

Nhận xét: Trong trường hợp đặc biệt là hình chiếu vuông góc của một điểm trên một trục tọa độ ta có thể dùng công thức nhanh sau:

- *Hình chiếu vuông góc của điểm $M(a; b; c)$ lên trục Ox là điểm $M_1(a; 0; 0)$.*
- *Hình chiếu vuông góc của điểm $M(a; b; c)$ lên trục Oy là điểm $M_2(0; b; 0)$.*
- *Hình chiếu vuông góc của điểm $M(a; b; c)$ lên trục Oz là điểm $M_3(0; 0; c)$.*

VÍ DỤ 6.3. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$. Tìm điểm N trên đường thẳng d sao cho độ dài đoạn MN nhỏ nhất.*

A. $N(-1; 2; -3)$ *B.* $N(-1; -2; -3)$ *C.* $N(-1; 2; 3)$ *D.* $N(1; -1; 2)$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Do $N \in d$ nên tọa độ của N có dạng $N = (-3+2t; 1+t; 4-t)$. Ta có

$$\begin{aligned} MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 &= (-4+2t)^2 + (3+t)^2 + (1-t)^2 \\ &= 6t^2 - 12t + 26 = 2(t-1)^2 + 20 \geq 20 \\ &\Rightarrow MN \geq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$.

Vậy MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $t = 1$ hay ta có $N(-1; 2; 3)$.

Đáp án là C.

Cách 2: Ta có độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất khi và chỉ khi N là chân đường vuông góc hạ từ M lên đường thẳng d. Khi đó, do $N \in d$ nên tọa độ của N có dạng $N(-3+2t; 1+t; 4-t)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-4+2t; 3+t; 1-t)$ vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -1)$. Suy ra

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d} = -8 + 4t + 3 + t - 1 + t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow N(-1; 2; 3).$$

Đáp án là C. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Ta có thể thử trực tiếp một cách nhanh chóng khi thay tọa độ các điểm trong các đáp án vào phương trình đường thẳng Δ ta thấy hai điểm ở đáp án A, B không thỏa mãn nên ta có thể ***loại ngay đáp án A và B****. Hai đáp án còn lại ta thử xem khoảng cách nào nhỏ hơn thì đó là kết quả cần tìm và ta có đáp án đúng là đáp án C.*

VÍ DỤ 6.4. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; -1), N(0; -1; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{cases}$. Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên đường thẳng d. Độ dài của đoạn thẳng $M'N'$ là:*

A. $M'N' = 4$ *B.* $M'N' = \dfrac{12}{\sqrt{17}}$ *C.* $M'N' = 12$ *D.* $M'N' = 3$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta đặt $M'(3+2t; 1+t; 2-2t), N'(3+2s; 1+s; 2-2s)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = (1+2t; t; 3-2t) \\ \overrightarrow{NN'} = (3+2s; 2+s; -s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u_d} = 2 + 4t + t - 6 + 4t = 9t - 4 = 0 \\ \overrightarrow{NN'}.\overrightarrow{u_d} = 6 + 4s + 2 + s + 4s = 9s + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{4}{9} \\ s = \dfrac{-8}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M'\left(\dfrac{35}{9}; \dfrac{13}{9}; \dfrac{10}{9}\right) \\ N'\left(\dfrac{11}{9}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{34}{9}\right) \end{cases}$$

Do đó ta có:

$$M'N' = \sqrt{\left(\frac{24}{9}\right)^2 + \left(\frac{12}{9}\right)^2 + \left(\frac{-24}{9}\right)^2} = 4.$$

Đáp án là A.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{MN} = (-2; -2; 3)$ và vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -2)$. Theo định lý hình chiếu ta có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{u_d}$. Do đó ta có:

$$M'N'.|\overrightarrow{u_d}| = |\overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{u_d}| = |-4-2-6| = 12 \Rightarrow M'N' = \frac{12}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 4.$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 6.5. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(4; 0; 6)$ bán kính R và cắt đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ tại hai điểm A, B. Trung điểm của đoạn thẳng AB là.*

A. $(5; -2; 0)$ *B.* $(7; -4; 1)$ *C.* $(-5; 2; 0)$ *D.* $(-7; 4; -1)$

LỜI GIẢI. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng $\Delta \Rightarrow H$ là trung điểm AB.

Ta có $H \in \Delta$ nên suy ra $H(7 + 2t; -4 - 2t; 1 + t)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u} = (2; -2; 1)$.

Ta có :

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u} = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(5; -2; 0).$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 6.6. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua trục Oz là:*

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 8$ *B.* $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 8$ *D.* $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; -1; -1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Mặt cầu (S') có tâm I' đối xứng với I qua Oz và có bán kính $R' = R = 2\sqrt{2}$. Ta có hình chiếu vuông góc của I lên Oz là $H(0; 0; -1)$ nên tọa độ của I' là:

$$\begin{cases} x_{I'} = 2x_H - x_I = 2 \\ y_{I'} = 2y_H - y_I = 1 \\ z_{I'} = 2z_H - z_I = -1 \end{cases}.$$

Vậy ta có $I'(2;1;-1)$. Khi đó phương trình mặt cầu (S') là:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 8.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 6.7. *Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và tam giác ABC có ba đỉnh là $A(1;0;2), B(3;0;0), C(1;3;-1)$. Hình chiếu vuông góc của trực tâm H của tam giác ABC lên đường thẳng Δ là:*

A. $H'(1;2;3)$ *B.* $H'(0;1;2)$ *C.* $H'(-1;0;1)$ *D.* $H'(-2;-1;0)$

LỜI GIẢI. Gọi tọa độ của H là $H(a;b;c)$. Ta có H là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi H thuộc mặt phẳng (ABC) và $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.

Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a-1;b;c-2), & \overrightarrow{BC} = (-2;3;-1) \\ \overrightarrow{BH} = (a-3;b;c), & \overrightarrow{AC} = (0;3;-3) \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -2a+2+3b-c+2 = -2a+3b-c+4 = 0 \ (1) \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 3b-3c = 0 \Leftrightarrow b-c = 0 \ (2) \end{cases}.$$

H thuộc mặt phẳng (ABC) khi và chỉ khi $[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow a+b+c-3 = 0 \ (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có : $\begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ hay điểm H có tọa độ là $H\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

Gọi H' là hình chiếu vuông góc của H trên Δ, suy ra $H'(-2+t;-1+t;t)$.

Ta có $\overrightarrow{HH'} = \left(t-\dfrac{13}{3};t-\dfrac{4}{3};t-\dfrac{1}{3}\right)$ vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;1)$. Suy ra

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = t-\frac{13}{3}+t-\frac{4}{3}+t-\frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H'(0;1;2).$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 6.8. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-3;4), N(2;-1;2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=2-t \end{cases}$. Tìm điểm A thuộc đường thẳng d sao cho $T=|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $A(-1;2;-3)$ *B.* $A(-1;-2;-3)$ *C.* $A(1;-2;-3)$ *D.* $A(-1;2;3)$

LỜI GIẢI. Ta có $T=|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|=|2\overrightarrow{AI}|=2AI$ với I là trung điểm của đoạn thẳng MN. Khi đó ta có T nhỏ nhất khi và chỉ khi AI nhỏ nhất hay A là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d và điểm I có tọa độ $I(1;-2;3)$.
Ta có $A\in d\Rightarrow A(1+2t;3+t;2-t)$. Ta có $\overrightarrow{IA}=(2t;t+5;-1-t)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$. Vậy ta có:

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_d}=4t+t+5+1+t=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow A(-1;2;3).$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 6.9. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0), B(-2;1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm điểm P trên đường thẳng d sao cho $PA+2PB$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $P(1;2;3)$ *B.* $P(0;-1;2)$ *C.* $P(0;1;2)$ *D.* $P(-2;1;0)$

LỜI GIẢI. Ta có $P\in d$ nên tọa độ của điểm P có dạng $P(-1-t;2+t;3+t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} PA=\sqrt{(t+1)^2+(t-1)^2+(t+3)^2}=\sqrt{3t^2+6t+11} \\ PB=\sqrt{(t-1)^2+(t+1)^2+(t+3)^2}=\sqrt{3t^2+6t+11} \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} T=PA+2PB&=3\sqrt{3t^2+6t+11} \\ &=3\sqrt{3(t+1)^2+8}\geq 3\sqrt{8}=6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=-1$. Vậy $PA+2PB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=-1$ hay điểm $P(0;1;2)$.
Đáp án là C. □

VÍ DỤ 6.10. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $K(2;3;-2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua K, tiếp xúc với trục Oy sao cho bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất.*

A. $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=2$ *B.* $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8$ *D.* $(x+1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=8$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R đi qua điểm K và tiếp xúc với trục Oy. Gọi M là tiếp điểm và H là chân đường vuông góc hạ từ K lên Oy. Gọi tọa độ của điểm H là $H(0;h;0)$. Do KH vuông góc với Oy hay $\overrightarrow{KH}.\overrightarrow{j}=0$. Do đó ta có $h=3$ hay tọa độ của điểm H là $H(0;3;0)$.

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$$2R=IK+IM\geq KM\geq KH=2\sqrt{2}\Rightarrow R\geq\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} I \text{ thuộc đoạn } KM \\ M\equiv H \end{cases}$$

khi và chỉ khi I là trung điểm của KH. Vậy bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất khi và chỉ khi (S) là mặt cầu đường kính KH. Tâm I của mặt cầu (S) là $I(1;3;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=2.$$

Đáp án là B. □

Dạng 2: Hình chiếu vuông góc của một điểm lên một mặt phẳng

VÍ DỤ 6.11. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxy là:*

A. $H(2;3;0)$ *B.* $H(-2;3;0)$

C. $H(-2;-3;0)$ *D.* $H(2;-3;0)$

LỜI GIẢI. Do H thuộc mặt phẳng Oxy nên $H(a;b;0)$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{i}=0 \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{j}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}\Rightarrow H(2;-3;0).$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Trong trường hợp đặc biệt là hình chiếu vuông góc của một điểm lên một mặt phẳng tọa độ ta có thể dùng công thức nhanh sau:

- Hình chiếu vuông góc của điểm $M(a;b;c)$ lên mặt phẳng Oxy là điểm $M_1(a;b;0)$.
- Hình chiếu vuông góc của điểm $M(a;b;c)$ lên mặt phẳng Oyz là điểm $M_2(0;b;c)$.
- Hình chiếu vuông góc của điểm $M(a;b;c)$ lên mặt phẳng Oxz là điểm $M_3(a;0;c)$.

VÍ DỤ 6.12. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(R): 2x-y+2z-3=0$ và điểm $A(3;-4;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (R) là:*

A. $H(1;-3;-1)$ *B.* $H(0;1;-2)$ *C.* $H(0;1;2)$ *D.* $H(1;-1;0)$

LỜI GIẢI. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (R) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (R) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_R} = (2;-1;2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;-1;2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -4-t \\ z = 1+2t \end{cases}.$$

Khi đó ta có $H(3+2t;-4-t;1+2t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$6+4t+4+t+2+4t-3=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;-3;-1).$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 6.13. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Biết rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm của đường tròn đó.*

A. $J(2;0;0)$ *B.* $J(1;-1;0)$ *C.* $J(3;0;2)$ *D.* $J(-3;0;-2)$

LỜI GIẢI. Mặt cầu $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 25$. Tâm của mặt cầu (S) là điểm $I(1;2;3)$.

Giả sử mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo một đường tròn tâm H. Khi đó H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Ta có: $IH \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_{IH}} \parallel \overrightarrow{n_P} = (2;-2;-1) \Rightarrow$ ta có thể chọn $\overrightarrow{u_{IH}} = (2;-2;-1)$. Phương trình tham số của đường thẳng IH là:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3-t \end{cases}.$$

Khi đó, tọa độ của H có dạng $(1+2t; 2-2t; 3-t)$. Thay tọa độ của điểm H vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$$2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0 \Rightarrow 9t-9=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(3;0;2).$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 6.14. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 8$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng Oyz là:*

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 8$ *B.* $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 8$

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 8$ *D.* $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 8$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;-1;-1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Mặt cầu (S') có tâm I' đối xứng với I qua mặt phẳng Oyz và có bán kính $R' = R = 2\sqrt{2}$. Ta có hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng Oyz là $H(0;-1;-1)$ nên tọa độ của I' là:

$$\begin{cases} x_{I'} = 2x_H - x_I = 2 \\ y_{I'} = 2y_H - y_I = -1 \\ z_{I'} = 2z_H - z_I = -1 \end{cases}.$$

Vậy ta có $I'(2;1;-1)$. Khi đó phương trình mặt cầu (S') là:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = 8.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 6.15. *Trong vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;-2;3)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z-1=0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MA^2-2MB^2 đạt giá trị lớn nhất.*

A. $M(-2;-1;2)$ *B.* $M(2;1;2)$ *C.* $M(0;-2;1)$ *D.* $M(1;2;-1)$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Do $M \in (P)$ nên tọa độ của điểm M có dạng $M(a;b;2a-b-1)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA^2=(a+4)^2+(b+2)^2+(2a-b-4)^2 \\ MB^2=a^2+(b+1)^2+(2a-b-3)^2 \end{cases}$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} T&=MA^2-2MB^2 \\ &=(a+4)^2+(b+2)^2+(2a-b-4)^2-2(a^2+(b+1)^2+(2a-b-3)^2) \\ &=-5a^2-2b^2+4ab+16a-4b+16 \\ &=-(a-2)^2-(b-1)^2-(2a-b-3)^2+30 \\ &\le 30 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2$ và $b=1$. Vậy T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $M(2;1;2)$.

Đáp án là B.

Nhận xét: Ta nhận thấy cách làm trên khá phức tạp cho việc chọn đáp số a,b. Để dễ dàng giải quyết các bài toán trên ta đưa ra cách làm thứ hai sau đây:

Cách 2: Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}=(8;2;-2)$. Khi đó ta có $I(4;0;1)$ và

$$\begin{aligned} T&=MA^2-2MB^2=\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2 \\ &=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 \\ &=-MI^2+IA^2-2IB^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}) \\ &=-MI^2+IA^2-2IB^2 \end{aligned}$$

Vậy T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Ta có, $IM \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{IM} \parallel \overrightarrow{n_P}=(2;-1;-1) \Rightarrow$ ta có thể chọn $\overrightarrow{u_{IM}}=(2;-1;-1)$.

Suy ra, phương trình tham số của đường thẳng IM là: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Khi đó, tọa độ của M có dạng $(4 + 2t; -t; 1 - t)$. Thay tọa độ của M vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$$8 + 4t - (-t) - (1 - t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(2; 1; 2).$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 6.16. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(R) : 2x - y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(3; -4; -1)$. Điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (R) là:*

A. $A'(-1; 2; 3)$ *B.* $A'(0; 1; -2)$ *C.* $A'(-1; 2; -3)$ *D.* $A'(-1; -2; 3)$

LỜI GIẢI. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (R) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (R) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_R} = (2; -1; -2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; -1; -2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases}.$$

Khi đó ta có $H(3 + 2t; -4 - t; -1 - 2t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$6 + 4t + 4 + t + 2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; -3; 1).$$

A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (R) thì H là trung điểm của AA'. Khi đó theo công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ điểm $A'(-1; -2; 3)$.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 6.17. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(R) : 2x - y + 2z - 3 = 0$ và hai điểm $A(3; -4; 1), B(1; 4; 7)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (R) sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $M(2; -3; 5)$ *B.* $M(0; 1; 2)$
C. $M(-2; -5; -3)$ *D.* $M(-2; -3; -5)$

LỜI GIẢI. Ta nhận thấy:

$$\begin{cases} 2x_A - y_A + 2z_A - 3 = 2.3 - (-4) + 2.1 - 3 > 0 \\ 2x_B - y_B + 2z_B - 3 = 2.1 - 4 + 2.7 - 3 > 0 \end{cases}.$$

Do đó A, B cùng phía so với mặt phẳng (R).
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (R), khi đó ta có:

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn $A'B$ hay M là giao của đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (R).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (R) thì H thuộc Δ.
Ta có, $\Delta \perp (R) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_R} = (2; -1; 2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; -1; 2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

Khi đó ta có $H(3 + 2t; -4 - t; 1 + 2t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$6 + 4t + 4 + t + 2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; -3; -1).$$

A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (R) thì H là trung điểm của AA'. Khi đó theo công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ điểm $A'(-1; -2; -3)$.
Ta có $\overrightarrow{A'B} = (2; 6; 10) \parallel (1; 3; 5) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u}_{A'B} = (1; 3; 5)$.
Phương trình tham số của đường thẳng $A'B$ là:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = 7 + 5t \end{cases}.$$

Khi đó ta có $M(1 + t; 4 + 3t; 7 + 5t)$. Cho M thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$2(1 + t) - (4 + 3t) + 2(7 + 5t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(0; 1; 2).$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Ta có: Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0, a^2+b^2+c^2\neq 0$.

- Hai điểm M, N nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi

$$(ax_M+by_M+cz_M+d)(ax_N+by_N+cz_N+d)>0$$

- Hai điểm M, N nằm khác phía so với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi

$$(ax_M+by_M+cz_M+d)(ax_N+by_N+cz_N+d)<0$$

Ta có cách làm tổng quát của bài toán: "Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất." như sau:

- Nếu A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (P) thì M là giao của đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

- Nếu A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) thì:
  Bước 1. Tìm điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).
  Bước 2. M là giao của đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 6.18. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y-z-3=0$ và hai điểm $A(-1;0;-1), B(3;-4;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $T=MA.MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $M(0;-1;2)$ *B.* $M(0;1;-2)$ *C.* $M(2;1;0)$ *D.* $M(0;-1;-2)$

LỜI GIẢI. Ta nhận thấy $\overrightarrow{AB}=(4;-4;-4) \parallel \overrightarrow{n}_{(P)}=(1;-1;-1)$. Do đó AB vuông góc với mặt phẳng (P) hay hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P) cùng là một điểm H.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta\perp(P)\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P}=(1;-1;-1)\Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;-1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=-1-t \end{cases}.$$

Khi đó ta có $H(-1+t;-t;1-t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$-1+t+t+1+t-3=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(0;-1;-2).$$

Bây giờ ta có:

$$MA.MB \geq HA.HB$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$ hay ta có $M(0;-1;-2)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 6.19. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y-z-3=0$ và ba điểm $A(-1;0;-1), B(3;-4;-5), C(10;7;3)$. Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A,B,C lên mặt phẳng (P). Trọng tâm Q của tam giác MNP là.*

A. $Q(0;-3;0)$ *B.* $Q(3;0;0)$ *C.* $Q(2;-1;0)$ *D.* $Q(0;-1;-2)$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta tìm lần lượt tọa độ các điểm M,N,P rồi áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm Q của tam giác MNP ta có kết quả $Q(3;0;0)$.

Đáp án là B.

Nhận xét: Ta nhận thấy trong cách làm này việc tính toán tọa độ của cả 3 điểm M,N,P thì tương đối mất thời gian. Để tính toán nhanh cho các bài tập dạng này ta dùng tính chất của phép chiếu song song để chỉ ra rằng thực chất trọng tâm Q của tam giác MNP chính là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của tam giác ABC. Do đó ta có một cách làm khác nhanh hơn. Ta sẽ trình bày chi tiết trong cách 2 sau đây.

Cách 2: Theo tính chất của phép chiếu song song ta nhận thấy trọng tâm Q của tam giác MNP chính là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của tam giác ABC.

Theo công thức tọa độ trọng tâm ta có $G(4;-1;-1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua G và vuông góc với (P) thì Q thuộc Δ.

Ta có: $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P} = (1;-1;-1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;-1;-1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 4+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}$.

Khi đó ta có $Q(4+t;-1-t;-1-t)$. Cho Q thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$4+t+1+t+1+t-3=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow Q(3;0;0).$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 6.20. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-1=0$ và ba điểm $A(1;2;-1), B(0;4;0), C(0;0;2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C lên mặt phẳng (α). Diện tích tam giác MNP là.*

A. $S_{\Delta MNP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *B.* $S_{\Delta MNP}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $S_{\Delta MNP}=2\sqrt{3}$ *D.* $S_{\Delta MNP}=\sqrt{3}$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta tìm lần lượt tọa độ các điểm M, N, P ta được $M(0;1;0), N(1;1;1)$, $P(-1;3;1)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=(1;0;1)\\ \overrightarrow{MP}=(-1;2;1)\end{cases}\Rightarrow[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}]=(-2;-2;2)\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}]|=\sqrt{3}.$$

Đáp án là D.

Nhận xét: Ta nhận thấy trong cách làm này việc tính toán tọa độ của cả 3 điểm M, N, P thì tương đối mất thời gian. Để tính toán nhanh cho các bài tập dạng này ta dùng tính chất của phép chiếu vuông góc để chỉ ra mối liên hệ giữa diện tích tam giác MNP và tam giác ABC. Ta có công thức sau:
Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (MNP) ta có:

$$S_{\Delta MNP}=S_{\Delta ABC}\cos\varphi.$$

Do đó ta có một cách làm khác nhanh hơn. Ta sẽ trình bày chi tiết trong cách 2 sau đây.

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1;-2;3)\end{cases}\Rightarrow[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]=(8;2;4)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]|=\sqrt{21}.$$

Mặt khác ta có thể chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

$$\overrightarrow{n}_{(ABC)}=(4;1;2)\Rightarrow\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{n}_{(ABC)}.\overrightarrow{n}_{\alpha}|}{|\overrightarrow{n}_{(ABC)}|.|\overrightarrow{n}_{\alpha}|}=\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Vậy ta có :

$$S_{\Delta MNP}=S_{\Delta ABC}\cos\varphi=\sqrt{3}.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 6.21. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-1=0$ và hai điểm $A(2;1;-1), B(-1;6;-5)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B lên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn thẳng MN là.*

A. 6 *B.* 36 *C.* $4\sqrt{3}$ *D.* 48

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta tìm lần lượt tọa độ các điểm M, N từ đó ta tính được $MN = 4\sqrt{3}$.

Đáp án là C.

Nhận xét: Ta nhận thấy trong cách làm này việc tính toán tọa độ của hai điểm M, N thì cũng tương đối mất thời gian. Do A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) nên để tính toán nhanh ta dùng công thức tính độ dài cạnh bên trong hình thang vuông $ABNM$, với góc M, N vuông. Ta có công thức sau:

$$MN^2 = AB^2 - (AM - BN)^2.$$

Do đó ta có một cách làm khác nhanh hơn. Ta sẽ trình bày chi tiết trong cách 2 sau đây.

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= AB^2 - (AM - BN)^2 \\ &= AB^2 - (d(A,(P)) - d(B,(P)))^2 \\ &= 50 - (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Vậy ta có $MN = 4\sqrt{3}$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 6.22. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-1=0$ và hai điểm $A(1;-2;1), B(4;7;-2)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B lên mặt phẳng (P). Tọa độ điểm K thỏa mãn $2\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{0}$ là.*

A. $K(1;0;0)$ *B.* $K(0;1;0)$ *C.* $K(2;-1;0)$ *D.*$K(0;1;-2)$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta tìm lần lượt tọa độ các điểm M, N là $M(2;-1;1), N(-1;2;1)$ rồi áp dụng công thức tính tọa độ của điểm K ta có kết quả $K(1;0;0)$.

Đáp án là A.

Nhận xét: Ta nhận thấy trong cách làm này việc tính toán tọa độ của hai điểm M, N thì tương đối mất thời gian. Để có thể tính toán nhanh hơn cho các bài tập dạng này ta dùng tính chất của phép chiếu song song để chỉ ra rằng thực chất điểm K chính là hình chiếu vuông góc của điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$. Do đó ta có một cách làm khác nhanh hơn. Ta sẽ trình bày chi tiết trong cách 2 sau đây.

Cách 2: Theo tính chất của phép chiếu song song ta nhận thấy điểm K chính là hình chiếu vuông góc của điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

Ta có $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)\Rightarrow I(2;1;0)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) thì K thuộc Δ.

Ta có, $\Delta\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}\parallel\overrightarrow{n_P}=(1;1;0)\Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}.$$

Khi đó ta có $K(2+t;1+t;0)$. Cho K thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$2+t+1+t-1=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow K(1;0;0).$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 6.23. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x-y-z-3=0$ và hai điểm $A(0;1;1), B(1;-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B lên mặt phẳng (α). Góc giữa đường thẳng MN và đường thẳng AB là.*

A. 120^0 *B.* 90^0 *C.* 60^0 *D.* 30^0

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta tìm lần lượt tọa độ các điểm M, N rồi áp dụng công thức tính góc của hai đường thẳng ta có $(\widehat{AB;MN})=30^0$.

Đáp án là D.

Nhận xét: Ta nhận thấy trong cách làm này ta phải xác định tọa độ của hai điểm M, N thì tương đối mất thời gian. Để có thể tính toán nhanh hơn cho các bài tập dạng này ta đưa ra công thức tính trực tiếp góc giữa hai đường thẳng AB, MN. Do đó ta có một cách làm khác nhanh hơn. Ta sẽ trình bày chi tiết

trong cách 2 sau đây.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-2;1)$, $\overrightarrow{n}_\alpha = (2;-1;-1)$. Khi đó ta có:

$$\sin(\widehat{AB,MN}) = |\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n}_\alpha)| = \frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}_\alpha|}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{n}_\alpha|} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Vậy ta có $(\widehat{AB,MN}) = 30^0$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 6.24. *Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-1=0$ và hai điểm $A(2;1;1), B(4;1;2)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B lên mặt phẳng (P). Phương trình của đường thẳng MN là.*

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$ *B.* $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ *D.* $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Bằng các cách xác định tọa độ của điểm M, N ta có $M(1;0;1), N(2;-1;2)$. Khi đó phương trình của đường thẳng MN là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Đáp án là C.

Cách 2: Chúng ta có thể viết phương trình đường thẳng MN là giao của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó ta cũng có phương trình của đường thẳng MN là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 6.25. *Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y-z-3=0$ và hai điểm $A(2;-2;-2), B(3;-4;-5)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Độ dài đoạn BH là*

A. 4 *B.* 5 *C.* $\sqrt{29}$ *D.* $\sqrt{51}$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Ta tìm được tọa độ của điểm H là $H(1;-1;-1)$. Khi đó ta có:

$$BH = \sqrt{(3-1)^2+(-4+1)^2+(-5+1)^2} = \sqrt{29}.$$

Đáp án là C.

Cách 2: Hạ BK vuông góc với AH tại K. Do A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) nên ta có:

$$BH^2 - BA^2 = KH^2 - KA^2 = (d(B,(P)))^2 - (d(A,(P)) - d(B,(P)))^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = 29 \Rightarrow BH = \sqrt{29}.$$

Đáp án là C.

□

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 6.1. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=3 \\ y=1+t \\ z=-2+3t \end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng d là:

A. $H(-3;-2;-1)$ B. $H(3;2;1)$ C. $H(3;1;-2)$ D. $H(3;-1;-8)$

BÀI TẬP 6.2. Trong vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;1), N(2;1;2)$. Đường thẳng d qua N và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1-m;-2;3+m)$. Tìm tất cả các tham số m để N là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d.

A. $m=-\dfrac{1}{3}$ B. $m=-1$ C. $m=1$ D. $m=9$

BÀI TẬP 6.3. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. Biết rằng mặt cầu tâm I bán kính R tiếp xúc với đường thẳng d tại N. Tọa độ của điểm N là:

A. $N(-1;2;-3)$ B. $N(-1;-2;-3)$ C. $N(-1;2;3)$ D. $N(1;-2;-3)$

BÀI TẬP 6.4. Trong vectơ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;-3;4), N(2;-1;2)$, $P(3;1;0)$. Tìm điểm A thuộc trục Ox sao cho $AM^2+AN^2+AP^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $A(2;0;0)$ B. $A(3;0;0)$ C. $A\left(\dfrac{5}{2};0;0\right)$ D. $A\left(\dfrac{5}{3};0;0\right)$

BÀI TẬP 6.5 (*THPTQG-2016*). Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-2)$, $B(1;0;1)$ và $C(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng BC.

A. $H(0;1;1)$ B. $H(0;-1;-1)$ C. $H(0;1;-1)$ D. $H(1;0;-1)$

BÀI TẬP 6.6. Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;2;-1)$ lên đường thẳng Δ là:

A. $H(0;1;2)$ B. $H(-2;-1;0)$ C. $H(1;2;3)$ D. $H(-1;0;1)$

BÀI TẬP 6.7. Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ và ba điểm $A(0;3;0), B(1;2;0), C(3;-1;1)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2+MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$ B. $M(-2;-1;0)$ C. $M(0;1;2)$ D. $M(-1;0;1)$

BÀI TẬP 6.8. Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ và ba điểm $A(0;3;0), B(1;2;0), C(3;-1;1)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(1;2;3)$ B. $M(-2;-1;0)$ C. $M(-1;0;1)$ D. $M(0;1;2)$

BÀI TẬP 6.9. Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ và tam giác ABC có ba đỉnh là $A(1;2;0), B(-1;1;1), C(-3;-3;11)$. Hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của tam giác ABC lên đường thẳng Δ là:

A. $H(1;2;3)$ B. $H(0;1;2)$ C. $H(-1;0;1)$ D. $H(-2;-1;0)$

BÀI TẬP 6.10. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;4)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$. Điểm đối xứng của M qua đường thẳng Δ là:

A. $M'(1;2;0)$ B. $M'(0;1;2)$ C. $M'(0;2;1)$ D. $M'(2;1;0)$

BÀI TẬP 6.11. Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và tam giác ABC có ba đỉnh là $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)$. Tìm điểm M trên đường thẳng Δ sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$ B. $M(0;1;2)$ C. $M(-1;0;1)$ D. $M(-2;-1;0)$

BÀI TẬP 6.12. Trong vectơ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;3;0), B(2;1;0)$. Tìm điểm M trên đường thẳng Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$ B. $M(0;-1;2)$ C. $M(-1;0;1)$ D. $M(0;1;2)$

BÀI TẬP 6.13. Trong vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0), B(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$. Tìm điểm M trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$ B. $M(0;1;2)$ C. $M(-1;0;1)$ D. $M(0;1;-2)$

BÀI TẬP 6.14. Trong vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0), B(-2;1;0)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. Tìm điểm T trên đường thẳng d sao cho $TA.TB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $T(1;2;3)$ B. $T(0;-1;2)$ C. $T(0;1;2)$ D. $T(-2;1;0)$

BÀI TẬP 6.15. Trong vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0), B(-2;1;0)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. Tìm điểm T trên đường thẳng d sao cho $TA.TB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $T(1;2;3)$ B. $T(0;1;-2)$ C. $T(0;1;2)$ D. $T(-2;1;0)$

BÀI TẬP 6.16. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxz là:

A. $H(2;0;1)$ B. $H(-2;0;1)$ C. $H(-2;0;-1)$ D. $H(2;0;-1)$

BÀI TẬP 6.17. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;-4;1)$, $B(0;1;2)$, $C(1;-1;0), D(1;1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) là:

A. $H(1;-2;-1)$ B. $H(1;-3;-1)$ C. $H(0;1;2)$ D. $H(1;-1;0)$

BÀI TẬP 6.18. Trong vectơ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;-4)$ và mặt phẳng (R) có phương trình $2x-2y-z-3=0$. Điểm đối xứng của điểm A qua (R) là:

A. $A'(2;-1;-3)$ B. $A'(-1;-3;-2)$ C. $A'(-1;-3;2)$ D. $A'(-1;3;-2)$

BÀI TẬP 6.19. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $I(3;-1;-4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z-3=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại điểm H. Tọa độ của điểm H là:

A. $H(1;1;-3)$ B. $H(0;-2;1)$ C. $H(-3;3;6)$ D. $H(-1;-3;-2)$

BÀI TẬP 6.20. Trong vectơ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z-1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z-11=0$. Biết rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm của (C).

A. $H\left(\dfrac{5}{7};\dfrac{3}{7};\dfrac{13}{7}\right)$ B. $H\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{13}{7};\dfrac{5}{7}\right)$ C. $H\left(\dfrac{3}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{13}{7}\right)$ D. $H\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{3}{7}\right)$

BÀI TẬP 6.21. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y-z-7=0$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng của A qua (P) .

A. $B(1;1;2)$ B. $B(-1;-1;2)$ C. $B(0;1;-1)$ D. $B(1;0;-1)$

BÀI TẬP 6.22. Trong tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2), N(4;5;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Tìm điểm A thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $A(1;1;1)$ B. $A(2;1;2)$ C. $A(-2;2;-1)$ D. $A(1;2;2)$

BÀI TẬP 6.23. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-3;2)$, $B(6;-5;0)$ và mặt phẳng $(R): 2x-y+2z-3=0$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (R) sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;-3;-1)$ B. $M(-1;3;1)$ C. $M(-1;1;0)$ D. $M(0;1;-1)$

BÀI TẬP 6.24. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-4;1)$, $B(3;0;3)$ và mặt phẳng $(R): 2x-y+2z-3=0$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (R) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;-3;-1)$ B. $M(1;-1;0)$ C. $M(-1;1;0)$ D. $M(0;1;-1)$

BÀI TẬP 6.25. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(-2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$ B. $M(0;1;-2)$ C. $M(0;1;2)$ D. $M(-2;1;0)$

BÀI TẬP 6.26. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;-4;5)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z-3=0$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $2MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(0;-1;2)$ B. $M(0;1;-2)$ C. $M(0;1;2)$ D. $M(-2;1;0)$

BÀI TẬP 6.27. Trong không gian với vectơ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;-1)$, $B(3;-4;-5)$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-3=0$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $T=MA^2+MB^3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(0;-1;2)$ B. $M(0;1;-2)$ C. $M(2;1;0)$ D. $M(0;-1;-2)$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 6.1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d. Khi đó ta có $H(3;1+t;-2+3t)$. Ta có $\overrightarrow{MH}=(3;t+2;3t-4)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(0;1;3)$. Ta có

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_d}=0+t+2+9t-12=0\Rightarrow t=1\Rightarrow H(3;2;1).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.2. Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;2;1)$. Khi đó N là chân đường vuông góc hạ từ M lên đường thẳng d khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u}=2-2m-4+3+m=0\Rightarrow m=1.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.3. Ta có mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng d tại N khi và chỉ khi N là chân đường cao hạ từ I lên đường thẳng d. Ta có $N\in d\Rightarrow N(-3-2t;1-t;4+t)$. Ta có $\overrightarrow{IN}=(-4-2t;3-t;1+t)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(-2;-1;1)$. Ta có

$$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{u_d}=8+4t-3+t+1+t=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow N(-1;2;3).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.4.

Cách 1: Ta có $A\in Ox$ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(a;0;0)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} AM^2=a^2+(3)^2+(-4)^2=a^2+25\\ AN^2=(a-2)^2+(1)^2+(-2)^2=a^2-4a+9\\ AP^2=(a-3)^2+(-1)^2=a^2-6a+10 \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} T&=AM^2+AN^2+AP^2=a^2+25+a^2-4a+9+a^2-6a+10\\ &=3a^2-10a+44=3(a-\frac{5}{3})^2+\frac{107}{3}\geq\frac{107}{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{107}{3}$. Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $a = \dfrac{5}{3}$ hay điểm $A(\dfrac{5}{3}; 0; 0)$.
Đáp án là D.

Cách 2: Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{0}$. Khi đó tương tự công thức tính tọa độ trọng tâm của một tam giác ta có $G(\dfrac{5}{3}; -1; 2)$. Ta có:

$$\begin{aligned} T &= AM^2 + AN^2 + AP^2 = \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{AN}^2 + \overrightarrow{AP}^2 \\ &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GN})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP})^2 \\ &= 3AG^2 + 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP})\overrightarrow{AG} + GM^2 + GN^2 + GP^2 \\ &= 3AG^2 + GM^2 + GN^2 + GP^2 \end{aligned}$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi AG nhỏ nhất hay A là hình chiếu vuông góc của G lên Ox. Gọi tọa độ của điểm A là $A(a; 0; 0)$. Do GA vuông góc với Ox hay $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{i} = 0$. Do đó ta có $a = \dfrac{5}{3}$, hay tọa độ của điểm A là $A\left(\dfrac{5}{3}; 0; 0\right)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.5. Ta có, $\overrightarrow{BC} = (1; -1; 2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_{BC}} = (1; -1; 2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng BC là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.
Suy ra, tọa độ điểm H có dạng $(1 + t; -t; 1 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t - 2; -t - 2; 2t + 3)$.
Vì $AH \perp BC$ nên ta có:
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (t - 2) - (-t - 2) + 2(2t + 3) = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; 1; -1)$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.6. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ. Khi đó ta có $H(t; 1 + t; 2 + t)$. Ta có $\overrightarrow{MH} = (t - 2; t - 1; t + 3)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1; 1)$. Ta có

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = t - 2 + t - 1 + t + 3 = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow H(0; 1; 2).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.7. Ta có $M \in \Delta$ nên $M(1+t;2+t;3+t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = (t+1)^2 + (t-1)^2 + (t+3)^2 = 3t^2 + 6t + 11 \\ MB^2 = t^2 + t^2 + (t+3)^2 = 3t^2 + 6t + 9 \\ MC^2 = (t-2)^2 + (t+3)^2 + (t+2)^2 = 3t^2 + 6t + 17 \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$T = MA^2 + MB^2 - MC^2 = 3t^2 + 6t + 3 = 3(t+1)^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$.
Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$ hay điểm $M(0;1;2)$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.8. Ta có $M \in \Delta$ nên $M(1+t;2+t;3+t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = (t+1)^2 + (t-1)^2 + (t+3)^2 = 3t^2 + 6t + 11 \\ MB^2 = t^2 + t^2 + (t+3)^2 = 3t^2 + 6t + 9 \\ MC^2 = (t-2)^2 + (t+3)^2 + (t+2)^2 = 3t^2 + 6t + 17 \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$T = MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2 = -3t^2 - 6t - 39 = -3(t+1)^2 - 36 \leq -36.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$. Vậy T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $t = -1$ hay điểm $M(0;1;2)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.9. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có tọa độ của điểm G là $G(-1;0;4)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của G trên đường thẳng Δ. Khi đó ta có $H(1+t;2+t;3+t)$. Ta có $\overrightarrow{GH} = (t+2;t+2;t-1)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;1)$. Ta có

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = t+2+t+2+t-1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0;1;2).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.10. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ. Khi đó ta có $H(-2+t;-1+t;t)$. Ta có $\overrightarrow{MH}=(t;t-2;t-4)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;1)$. Ta có

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta}=t+t-2+t-4=0\Rightarrow t=2\Rightarrow H(0;1;2).$$

M' là điểm đối xứng của M qua Δ thì H là trung điểm của MM' nên ta có:

$$\begin{cases} x_{M'}=2x_H-x_M=2\\ y_{M'}=2y_H-y_M=1\\ z_{M'}=2z_H-z_M=0 \end{cases}.$$

Hay suy ra ta có $M'(2;1;0)$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.11.

Cách 1: Ta có $M\in\Delta$ nên tọa độ của điểm M có dạng $M(-2+t;-1+t;t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA=\sqrt{(t-5)^2+(t-1)^2+t^2}=\sqrt{3t^2-12t+26}\\ MB=\sqrt{(t-2)^2+(t-4)^2+t^2}=\sqrt{3t^2-12t+20}\\ MC=\sqrt{(t-2)^2+(t-1)^2+(t-3)^2}=\sqrt{3t^2-12t+14} \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} T&=MA+MB+MC\\ &=\sqrt{3t^2-12t+26}+\sqrt{3t^2-12t+20}+\sqrt{3t^2-12t+14}\\ &=\sqrt{3(t-2)^2+14}+\sqrt{3(t-2)^2+8}+\sqrt{3(t-2)^2+2}\\ &\geq\sqrt{14}+\sqrt{8}+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=2$. Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=2$ hay điểm $M(0;1;2)$.

Đáp án là B.

Cách 2: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\end{cases}\Rightarrow$ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Gọi H là giao của đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABC) thì H là chân đường

vuông góc hạ từ A, B, C lên đường thẳng Δ.
Ta có $H(-2+t;-1+t;t)$, suy ra $\overrightarrow{AH} = (t-5;t-1;t)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;1)$. Ta có $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta} = t-5+t-1+t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow H(0;1;2)$.
Bây giờ ta có $T = MA + MB + MC \geq HA + HB + HC$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$ hay $M(0;1;2)$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.12.
Cách 1: Ta có $M \in \Delta$ nên tọa độ của điểm M có dạng
$M(-2+t;-1+t;t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA = \sqrt{(t-2)^2+(t-4)^2+t^2} = \sqrt{3t^2-12t+20} \\ MB = \sqrt{(t-4)^2+(t-2)^2+t^2} = \sqrt{3t^2-12t+20} \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} T = MA + MB &= 2\sqrt{3t^2-12t+20} \\ &= 2\sqrt{3(t-2)^2+8} \geq 2\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$.
Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = 2$ hay điểm $M(0;1;2)$.
Đáp án là D.
Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$ nên đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ thì H cũng là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng Δ.

Ta có $H(-2+t;-1+t;t)$, suy ra $\overrightarrow{AH} = (t-2;t-4;t)$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;1)$. Ta có

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta} = t-2+t-4+t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow H(0;1;2).$$

Bây giờ ta có $T = MA + MB \geq HA + HB$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$ hay $M(0;1;2)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.13. Ta có $M \in \Delta$ nên $M(-2+t;-1+t;t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA = \sqrt{(t-2)^2+(t-4)^2+t^2} = \sqrt{3t^2-12t+20} \\ MB = \sqrt{(t-4)^2+(t-2)^2+t^2} = \sqrt{3t^2-12t+20} \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$P_{\Delta MAB} = AB + MA + MB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3t^2 - 12t + 20}$$
$$= 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3(t-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2} + 2\sqrt{8} = 6\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$. Vậy chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = 2$ hay điểm $M(0;1;2)$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.14. Ta có $T \in d$ nên $T(-1-t; 2+t; 3+t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} TA = \sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2 + (t+3)^2} = \sqrt{3t^2 + 6t + 11} \\ TB = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+3)^2} = \sqrt{3t^2 + 6t + 11} \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$P = TA.TB = 3t^2 + 6t + 11 = 3(t+1)^2 + 8 \geq 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$.
Vậy $P = TA.TB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$ hay điểm $T(0;1;2)$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.15. Ta có $T \in d$ nên $T(-1-t; 2+t; -3-t)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} TA = \sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2 + (t+3)^2} = \sqrt{3t^2 + 6t + 11} \\ TB = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+3)^2} = \sqrt{3t^2 + 6t + 11} \end{cases}.$$

Do đó ta có:

$$P = TA.TB^2 = \sqrt{(3t^2 + 6t + 11)^3} = \sqrt{(3(t+1)^2 + 8)^3} \geq 16\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$. Vậy $P = TA.TB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -1$ hay điểm $T(0;1;-2)$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.16. Do H thuộc mặt phẳng Oxz nên $H(a;0;c)$. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\vec{i} = 0 \\ \overrightarrow{AH}.\vec{k} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2;0;1).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.17. Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;-2;-2), \overrightarrow{BD} = (1;0;-1) \Rightarrow [\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}] = (2;-1;2)$. Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $\overrightarrow{n}_{(BCD)} = (2;-1;2)$. Suy ra phương trình của mặt phẳng (BCD) là:

$$2(x-0) - 1(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (BCD) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n}_{(BCD)} = (2;-1;2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;-1;2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.
Khi đó ta có $H(3+2t;-4-t;1+2t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (BCD) ta có:

$$6 + 4t + 4 + t + 2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1;-3;-1).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.18. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (R) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (R) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_R} = (2;-2;-1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;-2;-1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$.
Khi đó ta có $H(3+2t;-1-2t;-4-t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$6 + 4t + 2 + 4t + 4 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1;1;-3).$$

A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (R) thì H là trung điểm của AA'. Khi đó theo công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ điểm $A'(-1;3;-2)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 6.19. Ta có mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại điểm H khi và chỉ khi H là chân đường vuông góc hạ từ I lên mặt phẳng (α).
Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (α) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_\alpha} = (2;-2;-1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;-2;-1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$.

Khi đó ta có $H(3+2t; -1-2t; -4-t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$6 + 4t + 2 + 4t + 4 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; 1; -3).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.20. Theo giả thiết, mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R = 5$. Vì $d(I;(P)) = \dfrac{|6.3 + 3.2 - 2.1 - 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{21}{\sqrt{49}} = 3 < R$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C).

Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $(P) \Rightarrow J$ là tâm của đường tròn (C).

Ta có: $IJ \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{IJ} \parallel \overrightarrow{n_P} = (6;3;-2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_{IJ}} = (6;3;-2)$.

Suy ra, phương trình tham số của đường thẳng IJ là: $\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.

Khi đó, tọa độ của J có dạng $(3+6t; 2+3t; 1-2t)$. Thay tọa độ của J vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$$6(3+6t) + 3(2+3t) - 2(1-2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 49t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{7} \Rightarrow J\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{13}{7}\right).$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.21. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $(P) \Rightarrow B$ thuộc Δ và trung điểm M của AB thuộc (P).

Ta có: $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P} = (2;3;-1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;3;-1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -t \end{cases}$.

Khi đó, tọa độ của B có dạng $(3+2t; 5+3t; -t) \Rightarrow M\left(3+t; \frac{10+3t}{2}; \frac{-t}{2}\right)$.

Vì $M \in (P)$ nên: $2(3+t) + 3\left(\frac{10+3t}{2}\right) - \left(\frac{-t}{2}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow B(-1;-1;2)$.

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.22.

Cách 1: Do $A \in (P)$ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(a;b;a+b-1)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (-a;-1-b;3-a-b) \\ \overrightarrow{AN} = (4-a;5-b;-1-a-b) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN} = (4-2a;4-2b;2-2a-2b).$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} T = |\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}| &= \sqrt{(4-2a)^2+(4-2b)^2+(2-2a-2b)^2} \\ &= 2\sqrt{(2-a)^2+(2-b)^2+(1-a-b)^2} \\ &= 2\sqrt{2a^2+2b^2+2ab-6a-6b+9} \\ &= 2\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(a+b-2)^2+3} \\ &\geq 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $A(1;1;1)$.

Đáp án là A.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Khi đó ta có $I(2;2;0)$ và

$$T = |\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}| = |2\overrightarrow{AI}| = 2.AI.$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi AI nhỏ nhất hay A là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Ta có: $IA \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{IA} \parallel \overrightarrow{n_P} = (1;1;-1) \Rightarrow$ ta có thể chọn $\overrightarrow{u_{IA}} = (1;1;-1)$.

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng IA là: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$.

Khi đó tọa độ của A có dạng $(2+t;2+t;-t)$. Thay tọa độ của A vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$$2+t+2+t+t-1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow A(1;1;1).$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.23. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, khi đó ta có $I(3;-4;1)$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$MI^2 = \frac{MA^2+MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow T = MA^2+MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (R).
Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (R) thì I thuộc Δ.
Ta có, $\Delta \perp (R) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_R} = (2;-1;2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;-1;2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -4-t \\ z = 1+2t \end{cases}$.
Khi đó ta có $M(3+2t;-4-t;1+2t)$. Cho M thuộc mặt phẳng (R) ta có:
$6+4t+4+t+2+4t-3=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(1;-3;-1)$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.24. Ta nhận thấy A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (R).
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (R), khi đó ta có:

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn $A'B$ hay M là giao của đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (R).
Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (R) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (R) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_R} = (2;-1;2) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;-1;2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -4-t \\ z = 1+2t \end{cases}$.
Khi đó ta có $H(3+2t;-4-t;1+2t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$6+4t+4+t+2+4t-3=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;-3;-1).$$

A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (R) thì H là trung điểm của AA'. Khi đó theo công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ điểm $A'(-1;-2;-3)$.
Ta có $\overrightarrow{A'B} = (4;2;6) \parallel (2;1;3) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u}_{A'B} = (2;1;3)$.
Phương trình tham số của đường thẳng $A'B$ là: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = t \\ z = 3+3t \end{cases}$.
Khi đó ta có $M(3+2t;t;3+3t)$. Cho M thuộc mặt phẳng (R) ta có:

$$2(3+2t)-t+2(3+3t)-3=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(1;-1;0).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 6.25.

Cách 1: Ta nhận thấy A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P). Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P), khi đó ta có:

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn $A'B$ hay M là giao của đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (P).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) thì H thuộc Δ.

Ta có, $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P} = (1;1;1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Khi đó ta có $H(-1+t;t;1+t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$-1 + t + t + 1 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(0;1;2).$$

A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) thì H là trung điểm của AA'. Khi đó theo công thức tọa độ trung điểm ta có tọa độ điểm $A'(1;2;3)$.

Ta có $\overrightarrow{A'B} = (-3;-3;-3) \parallel (1;1;1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u}_{A'B} = (1;1;1)$, hay đường thẳng $A'B$ chính là đường thẳng AB và như vậy M chính là điểm H. Vậy ta có$M(0;1;2)$.

Đáp án là C.

Cách 2: Ta nhận thấy $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;-1) \parallel \overrightarrow{n}_{(P} = (1;1;1)$. Do đó AB vuông góc với mặt phẳng (P) hay hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P) cùng là một điểm H. Theo cách làm ở trên ta có $H(0;1;2)$. Bây giờ ta có:

$$MA + MB \geq HA + HB$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$ hay ta có $M(0;1;2)$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 6.26. Ta nhận thấy $\overrightarrow{AB} = (4;-4;4) \parallel \overrightarrow{n}_{(P} = (1;-1;1)$. Do đó AB vuông góc với mặt phẳng (P) hay hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P) cùng là một điểm H.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) thì H thuộc Δ.
Ta có, $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P} = (1;-1;1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;-1;1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$.
Khi đó ta có $H(-1+t;-t;1+t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$-1+t+t+1+t-3=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(0;-1;2).$$

Bây giờ ta có:

$$2MA+MB \geq 2HA+HB$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$ hay ta có $M(0;-1;2)$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 6.27. Ta nhận thấy $\overrightarrow{AB} = (4;-4;-4) \parallel \overrightarrow{n}_P = (1;-1;-1)$. Do đó AB vuông góc với mặt phẳng (P) hay hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P) cùng là một điểm H.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (R) thì H thuộc Δ.
Ta có: $\Delta \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \parallel \overrightarrow{n_P} = (1;-1;-1) \Rightarrow$ ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;-1;-1)$.
Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = -1-t \end{cases}$.
Khi đó ta có $H(-1+t;-t;1-t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$-1+t+t+1+t-3=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(0;-1;-2).$$

Bây giờ ta có:$MA \geq HA, MB \geq HB$ nên

$$MA^2+MB^3 \geq HA^2+HB^3$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv H$ hay ta có $M(0;-1;-2)$.
Đáp án là D. □

CHỦ ĐỀ 7
GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc

- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ xác định bởi

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|}.$$

- Góc giữa đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v_1}$ và đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v_2}$ là

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|.|\overrightarrow{v_2}|}.$$

- Góc giữa mặt phẳng (P_1) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và mặt phẳng (P_2) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}$ là

$$\cos((P_1), (P_2)) = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}.$$

- Góc giữa đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ là

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{n}|}.$$

2. Khoảng cách

- Khoảng cách giữa hai điểm A và B là

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

- Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng có phương trình $(P): ax + by + cz + d = 0$ là

$$d(M,(P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

- Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) song song với đường thẳng Δ được tính bởi

$$d(,\Delta,(P)) = d(M,(P)) \quad \forall M \in \Delta.$$

- Khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) được tính bởi

$$d((P),(Q) = d(M,(Q)) = d(N,(P)) \quad \forall M \in (P), N \in (Q).$$

- Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là khoảng cách từ A đến hình chiếu H của nó trên Δ

$$d(A,\Delta) = AH = \frac{|[\overrightarrow{u_\Delta}, AM]|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|}$$

trong đó $\overrightarrow{u_\Delta}$ là vectơ chỉ phương của Δ và $M \in \Delta$ là một điểm tùy ý.
Chú ý: Nếu Δ là đường thẳng đi qua hai điểm B, C, để tính khoảng cách ta sử dụng công thức

$$d(A,BC) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}{BC}$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ, Δ' được tính theo một trong các cách sau:
  - Cách 1: $d(\Delta,\Delta') = HK$ với H, K là chân đường vuông góc chung của Δ, Δ'.
  - Cách 2: $d(\Delta,\Delta') = d(M,(P))$ với $M \in \Delta$ là một điểm tùy ý, còn (P) là mặt phẳng đi qua Δ' và song song với Δ.
  - Cách 3: $d(\Delta,\Delta') = \frac{|\overrightarrow{MM'}.[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}]|}{|[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}]|}$ với $M \in \Delta, M' \in \Delta'$ là các điểm tùy ý, còn $\overrightarrow{v_\Delta}, \overrightarrow{v_{\Delta'}}$ tương ứng là các vectơ chỉ phương của Δ, Δ'.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Góc

Góc giữa hai vectơ

VÍ DỤ 7.1. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0), B(a;b;0)$ $(a,b>0)$. Biết $OB=4$ và $\widehat{AOB}=60^0$, khi đó giá trị của ab là*

A. $ab=4\sqrt{3}$ *B.* $ab=\dfrac{3\sqrt{7}}{16}$ *C.* $ab=0$ *D.* $ab=4$

LỜI GIẢI. Ta có

$$OB^2=a^2+b^2=4^2=16$$

Mặt khác, $\overrightarrow{OA}(2;0;0), \overrightarrow{OB}(a;b;0)$ nên

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB}=\frac{2a}{4.2}=\frac{a}{4}=\cos 60^0=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2$$

Do $b>0$ nên $b=2\sqrt{3}$. Suy ra $ab=4\sqrt{3}$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.2. *Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;1), B(5;1;-2)$ và $C(a;b;1)$ $(a,b>0)$. Biết $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{12}{25}$ và diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{481}}{2}$. Tìm giá trị của ab.*

A. $ab=10$ *B.* $ab=20$ *C.* $ab=15$ *D.* $ab=25$

LỜI GIẢI. Ta có

$$\sin\widehat{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{BAC}}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{481}}{25}$$

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5$$

Lại có

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}\Rightarrow AC=\frac{2S_{ABC}}{AB.\sin\widehat{BAC}}=\frac{2\dfrac{\sqrt{481}}{2}}{5.\dfrac{\sqrt{481}}{25}}=5$$

$$\Rightarrow AC^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(1-1)^2=25 \quad (*)$$

Mặt khác, $\overrightarrow{AB}(4;0;-3), \overrightarrow{AC}(a-1;b-1;0)$ nên

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{4(a-1)}{5.5}=\frac{12}{25}\Leftrightarrow a-1=3\Leftrightarrow a=4$$

Do $b>0$ nên thay vào $(*)$ ta được $b=5$. Do đó $ab=20$.

Đáp án là B. □

Góc giữa hai đường thẳng

VÍ DỤ 7.3. *Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1), C(5;0;2)$. Tính góc giữa AC và BD.*

A. 30^0 *B.* 60^0 *C.* 90^0 *D.* 120^0

LỜI GIẢI. Do $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (-6;1;-1) \Rightarrow \begin{cases} x_D = x_C - 6 = 5 - 6 = -1 \\ y_D = y_C + 1 = 0 + 1 = 1 \\ z_D = z_D - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-1;1;1).$$

Do đó $\overrightarrow{AC}(8;2;2), \overrightarrow{BD}(-4;4;0)$. Suy ra cosin của góc giữa AC và BD là

$$\cos(AC, BD) = \frac{|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|.\overrightarrow{BD}} = \frac{|8.(-4) + 2.4 + 2.0|}{\sqrt{8^2+2^2+2^2}.\sqrt{(-4)^2+4^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Do vậy $(\widehat{AC, BD}) = 60^0$.

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.4. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ và các đường thẳng*

$$d: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{2}, d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}, d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$$

Tìm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho đường thẳng MN song song với (P) và tạo với d một góc α sao cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

A. $M(0;2;1), N(3;2;9)$ *hoặc* $M(2;4;3), N(1;0;3)$

B. $M(0;2;1), N(3;2;9)$ *hoặc* $M(-3;-4;-2), N(0;-1;1)$

C. $M(2;4;3), N(1;0;3)$ *hoặc* $M(-21;-40;-20), N(-18;-19,-35)$

D. $M(-3;-4;-2), N(0;-1;1)$ *hoặc* $M(-21;-40;-20), N(-18;-19,-35)$

LỜI GIẢI. Do $M \in d_1, N \in d_2$ nên $M(m;2+2m;1+m), N(1+n;n;3+2n)$. Do $MN \parallel (P)$ nên $\overrightarrow{MN}(n-m+1;n-2m-2;2n-m+2)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}(2;-1;-1)$. Vậy ta có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P} = 2(n-m+1) - (n-2m-2) - (2n-m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m-n+2=0 \Rightarrow n=m+2 \Rightarrow \overrightarrow{MN}(3;-m;m+6)$$

Đường thẳng MN tạo với đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2;-1;2)$ một góc α nên

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{u_d}|}=\frac{|2.3+(-m).(-1)+2(m+6)|}{\sqrt{3^2+(-m)^2+(m+6)^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|3m+18|}{3\sqrt{2m^2+12m+45}}$$

$$\Rightarrow \frac{|m+6|}{\sqrt{2m^2+12m+45}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3(m+6)^2=2m^2+12m+45$$

$$\Leftrightarrow m^2+24m+63=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-21 \end{array}\right.$$

- Nếu $m=-3$ thì $n=-1$ nên $M(-3;-4;-2), N(0;-1;1)$.
- Nếu $m=-21$ thì $n=-19$ nên $M(-21;-40;-20), N(-18;-19,-35)$.

Đáp án là D. □

Góc giữa hai mặt phẳng

VÍ DỤ 7.5. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng*

$$(P_1): 2x-y+1=0, (P_2): 2x-z=0 \text{ và } (Q): x-2y+2z-1=0$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của $(P_1), (P_2)$ và tạo với (Q) một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

A. $(P): y-z+1=0$ *hoặc* $(P): 2x-2y+z+2=0$

B. $(P): y-z+1=0$ *hoặc* $(P): 4x-y-z+1=0$

C. $(P): 2x-2y+z+2=0$ *hoặc* $(P): 10x+8y-13z-8=0$

D. $(P): 4x-y-z+1=0$ *hoặc* $(P): 10x+8y-13z-8=0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) qua giao tuyến của $(P_1), (P_2)$ có phương trình dạng

$$(P): m(2x-y+1)+n(2x-z)=0 \Leftrightarrow 2(m+n)x-my-nz+m=0 \quad (m^2+n^2>0)$$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(2(m+n);-m;-n)$. Do (P) tạo với mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(1;-2;2)$ một góc φ nên

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|}=\frac{|2(m+n)+2m-2n|}{\sqrt{4(m+n)^2+(-m)^2+(-n)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4|m|}{3\sqrt{5m^2+5n^2+8mn}} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \Leftrightarrow 18m^2 = 5m^2+5n^2+8mn$$

$$\Leftrightarrow 13m^2-5n^2-8mn=0 \Leftrightarrow (m-n)(13m+8n)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=n \\ 13m=-8n \end{array}\right.$$

- Nếu $m=n$, chọn $m=1, n=1$ thì $(P): 4x-y-z+1=0$.
- Nếu $13m=-8n$, chọn $m=-8, n=13$ thì $(P): 10x+8y-13z-8=0$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.6. *Trong hệ trục $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 5x-2y+5z=0$ và tạo với $(R): x-4y-8z+6=0$ một góc 45^0.*

A. $(P): x+5y+z=0$

B. $(P): x-y=0$

C. $(P): 9x+20y-z=0$

D. $(P): x-y=0$ *hoặc* $(P): 9x+20y-z=0$

LỜI GIẢI. Gọi $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(5;-2;5)$ nên

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 5a-2b+5c=0 \Rightarrow b=\frac{5a+5c}{2}$$

Mặt khác, (P) tạo với mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_R}(1;-4;-8)$ một góc 45^0 nên

$$\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R}|}{|\overrightarrow{n_P}.|\overrightarrow{n_R}|} = \frac{|a-4b-8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}} = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(a-4b-8c)^2 = 81(a^2+b^2+c^2)$$

Thay $b=\dfrac{5a+5c}{2}$ vào biểu thức ta được

$$2\left(a-4.\frac{5a+5c}{2}-8c\right)^2 = 81\left(a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(-9a-18c\right)^2 = \frac{81}{4}\left(5a^2+5c^2+2ac\right)$$

$$\Leftrightarrow 8(a^2+4ac+4c^2) = (5a^2+5c^2+2ac)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+30ac+27c^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3(a+c)(a+9c)=0$$

- Nếu $a+c=0$, chọn $a=1, c=-1$ thì $b=0$ nên $\overrightarrow{n_P}(1;0;-1)$, do đó

$$(P): x-y=0.$$

- Nếu $a+9c=0$, chọn $a=9, c=-1$ thì $b=20$ nên $\overrightarrow{n_P}(9;20;-1)$, do đó

$$(P): 9x+20y-z=0.$$

Đáp án là D. □

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

VÍ DỤ 7.7. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;-2), B(3;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+3z-5=0$. Tính cosin của góc φ giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P).*

A. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{238}}{34}$ *B.* $\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{102}}{34}$ *C.* $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{34}}{34}$ *D.* $\cos\varphi=\sqrt{\dfrac{33}{34}}$

LỜI GIẢI. Ta có mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-2;3)$ và $\overrightarrow{AB}(2;2;3)$. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Khi đó

$$\sin\varphi=\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{n_P}|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{|1.2+(-2).2+3.3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}.\sqrt{2^2+2^2+3^2}}=\frac{\sqrt{238}}{34}.$$

Do đó

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\frac{3\sqrt{102}}{34}.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.8. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;0)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+5=0$. Tìm điểm N có tọa độ nguyên trên d sao cho MN tạo với mặt phẳng (P) một góc 30^0*

A. $N(2;0;-2)$ *B.* $N(4;1;-1)$

C. $N(0;-1;-3)$ *D.* $N\left(\dfrac{23}{5};\dfrac{14}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$

LỜI GIẢI. Do $N\in d$ nên N có tọa độ $N(2+2t;t;-2+t)$. Ta có

$$\overrightarrow{MN}(2t+1;t+1;t-2)$$

Đường thẳng MN tạo với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(2;-1;-1)$ một góc 30^0 nên

$$\sin 30^0 = \frac{|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}|}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{n_P}|} = \frac{|2(2t+1)-(t+1)-(t-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{(2t+1)^2+(t+1)^2+(t-2)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t+3|}{\sqrt{6t^2+2t+6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 2(2t+3)^2 = 3(6t^2+2t+6)$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 18t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{9}{5} \end{array}\right. .$$

- Nếu $t=0$ thì $N(2;0;-2)$ (thỏa mãn).
- Nếu $t=\dfrac{9}{5}$ thì $N\left(\dfrac{23}{5};\dfrac{14}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$ (loại).

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.9. *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;1)$ hai mặt phẳng*

$$(P): x-2y+2z-2=0 \text{ và } (Q): 2x+2y+z-1=0$$

Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (Q), đi qua A và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng 45^0.

A. $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$ *B.* $\Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$

C. $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}$ *D.* $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}$ *hoặc* $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

LỜI GIẢI. Gọi vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$. Do đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(2;2;1)$ nên

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n_Q} = 2a+2b+c=0 \Rightarrow c=-2a-2b$$

Mặt khác, Δ tạo với (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-2;2)$ một góc 45^0 nên

$$\frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n_P}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{n_P}|} = \frac{|a-2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-2b+2(-2a-2b)|}{3\sqrt{a^2+b^2+(-2a-2b)^2}} = \frac{|-3a-6b|}{3\sqrt{5a^2+5b^2+8ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2(a+2b)^2 = 5a^2+5b^2+8ab \Leftrightarrow 3a^2-3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. .$$

- Nếu $a=b$, chọn $a=b=1$ thì $c=-4$ nên $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}$.
- Nếu $a=-b$, chọn $a=1, b=-1$ thì $c=0$ nên $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$.

Đáp án là D. □

Dạng 2: Khoảng cách

Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng

VÍ DỤ 7.10. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$. Khoảng cách d từ điểm I đến (P) là*

A. $d=1$ *B.* $d=3$ *C.* $d=\frac{1}{3}$ *D.* $d=-1$

LỜI GIẢI. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là

$$d(I,(P)) = \frac{|1+2.2+2.1-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 1.$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.11. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+5=0$. Tìm điểm M trên tia Oy sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 5?*

A. $M(4;0;-2)$ *B.* $M(0;10;0)$ *C.* $M(0;-10;0)$ *D.* $M(0;5;0)$

LỜI GIẢI. Điểm M thuộc trục Oy có tọa độ dạng $M(0;m;0)$ $(m \geq 0)$. Suy ra

$$d(M,(P)) = \frac{|2.0+2.m-0+5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|2m+5|}{3} = 5$$

$$\Leftrightarrow |2m+5| = 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+5=15 \\ 2m+5=-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=5 & (TM) \\ m=-10 & (L) \end{array}\right. .$$

Do đó $M(0;5;0)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.12. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+12=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách (P) một khoảng là $\frac{2}{3}$.*

A. $(Q): 2x+2y-z+\frac{5}{3}=0$

B. $(Q): 2x+2y-z+\frac{5}{3}=0$ *hoặc* $(Q): 2x+2y-z+\frac{1}{3}=0$

C. $(Q): 2x+2y-z+4=0$

D. $2x+2y-z+4=0$ *hoặc* $2x+2y-z+8=0$

LỜI GIẢI. Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên (Q) có phương trình dạng

$$(Q): 2x+2y-z+m=0 \quad (m\neq 1)$$

Khoảng cách giữa $(P) \parallel (Q)$ cũng chính là khoảng cách từ điểm $M(-6;0;0)\in(P)$ đến (Q). Suy ra

$$d((P),(Q))=d(M,(Q))=\frac{|-6-2.0+2.0+m|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|m-6|}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-6=2\Rightarrow m=8 \\ m-6=-2\Leftrightarrow m=4 \end{array}\right. \quad \text{(thỏa mãn).}$$

Do đó $(Q): 2x+2y-z+8=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+4=0$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.13. *Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;5)$, mặt phẳng $(P): x-2y+2z+6=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Tìm điểm M trên d sao cho M cách đều (P) và A?*

A. $M(-1;3;2)$ *B.* $M(1;2;3)$

C. $M(17;-6;11)$ *D.* $M(1;2;3)$ *hoặc* $M(17;-6;11)$

LỜI GIẢI. Do $M\in d$ nên tọa độ M có dạng $M(-1+2t;3-t;2+t)$. Suy ra

$$AM=\sqrt{(2t-3)^2+(-t-1)^2+(t-3)^2}=\sqrt{6t^2-16t+19}$$

$$d(M,(P))=\frac{|-1+2t-2(3-t)+2(2+t)+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|6t+3|}{3}=|2t+1|$$

Điểm M cách đều A và (P) khi và chỉ khi

$$\sqrt{6t^2-16t+19}=|2t+1|\Leftrightarrow 6t^2-16t+19=(2t+1)^2=4t^2+4t+1$$
$$\Leftrightarrow 2t^2-20t+18=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=9 \end{array}\right. .$$

Do đó $M(1;2;3)$ hoặc $M(17;-6;11)$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.14. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) sao cho A cách đều (P) và (Q).*

A. $(Q):x+2y+2z+3=0$

B. $(Q):2x+4y-4z-2=0$

C. $(Q):x+2y-2z-9=0$

D. $(Q):2x+4y-4z-2=0$ *hoặc* $(Q):x+2y-2z-9=0$

LỜI GIẢI. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$$d(A,(P))=\frac{|-1+2.2-2.(-1)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{4}{3}.$$

Do $(Q)\parallel(P)$ nên (Q) có phương trình dạng

$$(Q):x+2y-2z+m=0\quad (m\neq -1).$$

Khoảng cách từ A đến (Q) là

$$d(A,(Q))=\frac{|-1+2.2-2.(-1)+m|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|m+5|}{3}.$$

Điểm A cách đều (P) và (Q) khi và chỉ khi

$$d(A,(P))=d(A,(Q))\Leftrightarrow \frac{|m+5|}{3}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+5=4\Leftrightarrow m=-1 \quad \text{(loại)} \\ m+5=-4\Leftrightarrow m=-9 \quad \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. .$$

Do đó $(Q):x+2y-2z-9=0$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.15. *Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;0;1), B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z-5=0$. Tìm mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) và AB sao cho (Q) cách điểm $M(1;-1;1)$ một khoảng là $\frac{1}{\sqrt{35}}$.*

A. $(Q): x+5y+3z=0$

B. $(Q): x+5y+3z-2=0$

C. $(Q): x+5y+3z=0$ *hoặc* $(Q): x+5y+3z-2=0$

D. $(Q): x+5y+3z+2=0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;1;-2)$ và song song với đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}(-2;1;-1)$ nên (Q) có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_Q}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}]=\left(\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(1;5;3).$$

Do đó (Q) có phương trình dạng $(Q): x+5y+3z+m=0$ và $A\notin(Q)\Leftrightarrow m\neq -4$. Khoảng cách từ M đến (Q) là

$$d(M,(Q))=\frac{|1+5.(-1)+3.1+m|}{\sqrt{1^2+5^2+3^2}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{35}}=\frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=1\Leftrightarrow m=-2\\m-1=-1\Leftrightarrow m=0\end{array}\right.$$

Do đó $(Q): x+5y+3z=0$ hoặc $(Q): x+5y+3z-2=0$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.16. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$, $(Q): x+y-2z+1=0$ và điểm $M(1;1;-2)$. Tìm mặt phẳng (R) vuông góc với $(P),(Q)$ sao cho khoảng cách từ M đến (R) bằng $\sqrt{29}$.*

A. $(R): 2x+4y+3z=0$

B. $(R): 2x+4y+3z+29=0$

C. $(R): 2x+4y+3z-29=0$

D. $(R): 2x+4y+3z+29=0$ *hoặc* $(R): 2x+4y+3z-29=0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (R) vuông góc với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-2;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(1;1;-2)$ nên

(R) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_R} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2; 4; 3).$$

Do đó phương trình mặt phẳng (R) có dạng $(R) : 2x + 4y + 3z + m = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến (R) là

$$d(M, (R)) = \frac{|2.1 + 4.1 + 3.(-2) + m|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \Leftrightarrow m = \pm 29.$$

Do vậy $(R) : 2x + 4y + 3z + 29 = 0$ hoặc $(R) : 2x + 4y + 3z - 29 = 0$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.17. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z = 0$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$. Gọi A là giao điểm của (P) và Δ và M là điểm thuộc Δ sao cho $AM = \sqrt{6}$. Tính khoảng cách d từ M đến mặt phẳng (P).*

A. $d = 6$ *B.* $d = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ *C.* $d = \sqrt{6}$ *D.* $\dfrac{1}{6}$

LỜI GIẢI. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(2; 1; -1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1; -2; 1)$. Khi đó

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n_P}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{n_P}|} = \frac{|2.1 + 1.(-2) + (-1).1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}.\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{6}$$

Do đó khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là

$$d(M, (P)) = AM.\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.18. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$ và điểm $M(2; -1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $K(1; 0; 0)$, song song với Δ, đồng thời cách M một khoảng bằng $\sqrt{3}$.*

A. $(P) : x + y + z - 7 = 0$

B. $(P) : x + y + z - 1 = 0$

C. $(P) : 17x + 5y - 19z - 17 = 0$

D. $(P) : x + y + z - 1 = 0$ *hoặc* $(P) : 17x + 5y - 19z - 17 = 0$

LỜI GIẢI. Gọi $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do (P) đi qua $K(1;0;0)$ nên

$$(P): a(x-1)+by+cz=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-a=0.$$

Vì (P) song song với Δ đi qua $A(-2;4;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}(2;-3;1)$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_\Delta}=2a-3b+c=0 \Rightarrow c=3b-2a \\ A\notin(P) \Leftrightarrow -3a+4b-c\neq 0 \end{cases}.$$

Khoảng cách từ M đến (P) là

$$\begin{aligned} d(M,(P)) &= \frac{|2a-b+3c-a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a-b+3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a-b+3(3b-2a)|}{\sqrt{a^2+b^2+(3b-2a)^2}} \\ &= \frac{|8b-5a|}{\sqrt{5a^2+10b^2-12ab}}. \end{aligned}$$

Điểm M cách (P) một khoảng bằng $\sqrt{3}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} d(M,(P))=\sqrt{3} &\Leftrightarrow (8b-5a)^2=3\left(5a^2+10b^2-12ab\right) \\ &\Leftrightarrow 25a^2+64b^2-80ab=15a^2+30b^2-36ab \\ &\Leftrightarrow 10a^2-44ab+24b^2=0 \\ &\Leftrightarrow 2(a-b)(5a-17b)=0. \end{aligned}$$

- Nếu $a=b$, chọn $a=b=1$ thì $c=1$ (loại vì $-3a+4b-c=0$).
- Nếu $5a=17b$, chọn $\begin{cases} a=17 \\ b=5 \end{cases}$ thì $c=-19$ nên $(P): 17x+5y-19z-17=0$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.19. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(1;0;3)$ và mặt phẳng $(P): x-y+3z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc với (P) và cách B một khoảng bằng $\sqrt{2}$.*

A. $(Q): 2x-y-z-1=0$

B. $(Q): x+y+1=0$

C. $(Q): 4x-5y-3z-5=0$

D. $(Q): x+y+1=0$ *hoặc* $(Q): 4x-5y-3z-5=0$

LỜI GIẢI. Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q). Do (Q) đi qua $A(1;-2;3)$ nên

$$(Q): a(x-1)+b(y+2)+c(z-3)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-a+2b-3c=0.$$

Mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-1;3)$ nên

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=a-b+3c=0 \Rightarrow b=a+3c.$$

Khoảng cách từ B đến (Q) là

$$d(B,(Q))=\frac{|a.1+b.0+c.3-a+2b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2b^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow b^2=a^2+c^2$$

Thay $b=a+3c$ vào biểu thức thì

$$(a+3c)^2=a^2+c^2 \Leftrightarrow 6ac+8c^2=0 \Leftrightarrow 2c(3a+4c)=0$$

- Nếu $c=0$, chọn $a=b=1$ thì $(Q): x+y+1=0$.
- Nếu $3a+4c=0$, chọn $a=4, c=-3, b=-5$ thì $(Q): 4x-5y-3z-5=0$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.20. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;5;1), N(-1;1;3)$ và $A(12;-5;8)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và N sao cho (P) cách A một khoảng lớn nhất.*

A. $(P): x+y+4z-12=0$ *B.* $(P): x-2y-2z+9=0$

C. $(P): 12x-10y+7z+7=0$ *D.* $(P): 11x-8y+6z+1=0$

LỜI GIẢI. Mặt phẳng (P) đi qua M, N có khoảng cách lớn nhất đến điểm A khi và chỉ khi (P) vuông góc với AH với H là hình chiếu của A trên MN. Đường thẳng MN qua $M(3;5;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN}(-4;-4;2)=-2(2;2;-1)$ nên tọa độ H có dạng

$$H(3+2t;5+2t;1-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(2t-9;2t+10;-t-7)$$

Do H là hình chiếu của A trên MN nên

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{MN}=-4(2t-9)-4(2t+10)+2(-t-7)=0$$

$$\Leftrightarrow -18t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Do đó $\overrightarrow{AH}(-11;8;-6)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do đó

$$(P): -11(x-3) + 8(y-5) - 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow 11x - 8y + 6z + 1 = 0.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 7.21. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;0), B(1;-2;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cách đều hai điểm A, B.*

A. $(P): x - 2y - 2z + 3 = 0$

B. $(P): 5x - 6y - 2z - 5 = 0$

C. $(P): 3x - 2y + 2z - 11 = 0$

D. $(P): 5x - 6y - 2z - 5 = 0$ *hoặc* $(P): 3x - 2y + 2z - 11 = 0$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của (P). Do (P) chứa đường thẳng d đi qua $M(1;-1;3)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2;2;-1)$ nên

$$(P): a(x-1) + b(y+1) + c(z-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a + b - 3c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(A,(P)) = \dfrac{|3a + b - a + b - 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{|2a + 2b - 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ d(B,(P)) = \dfrac{|a - 2b + 4c - a + b - 3c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{|-b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{cases}$$

và

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d} = 2a + 2b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + 2b.$$

Mặt phẳng (P) cách đều A, B khi và chỉ khi

$$d(A,(P)) = d(B,(P)) \Leftrightarrow |2a + 2b - 3c| = |-b + c| \Leftrightarrow |-4a - 4b| = |2a + b|.$$

- Nếu $-4a - 4b = 2a + b \Leftrightarrow 6a + 5b = 0$, chọn $a = 5, b = -6$ thì $c = -2$ nên

$$(P): 5x - 6y - 2z - 5 = 0.$$

- Nếu $-4a-4b=-2a-b \Leftrightarrow 2a+3b=0$, chọn $a=3, b=-2$ thì $c=2$ nên

$$(P): 3x-2y+2z-11=0.$$

Đáp án là D.

Cách 2: Mặt phẳng (P) cách đều hai điểm A, B khi và chỉ khi $(P) \parallel AB$ hoặc (P) đi qua trung điểm của AB.

- Nếu $(P) \parallel AB$ thì vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với $\overrightarrow{AB}(-2;-3;4)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2;2;-1)$ của d. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}]=\left(\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-5;6;2)=-(5;-6;-2).$$

Mặt khác (P) qua $M(1;-1;3) \in d$ nên

$$(P): 5(x-1)-6(y+1)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow 5x-6y+z-5=0.$$

- Nếu (P) qua trung điểm của AB là $I\left(2;-\frac{1}{2};2\right)$ thì vectơ pháp tuyến của (P) sẽ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{MI}\left(1;\frac{1}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{u_d}(2;2;-1)$. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{u_d}]=\left(\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=\left(\frac{3}{2};-1;1\right)=\frac{1}{2}(3;-2;2).$$

Lại có (P) qua $M(1;-1;3) \in d$ nên

$$(P): 3(x-1)-2(y+1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+2z-11=0.$$

Đáp án là D. □

Khoảng cách giữa điểm và đường thẳng

VÍ DỤ 7.22. *Cho các điểm $A(1;-1;2), B(3;0;3)$ và $M(-3;1;2)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB.*

A. $\sqrt{6}$ *B.* $2\sqrt{5}$ *C.* $\sqrt{14}$ *D.* $\sqrt{38}$

LỜI GIẢI. Ta có $\overrightarrow{AB}(2;1;1), \overrightarrow{AM}(-4;2;0)$. Suy ra

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}] = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}\right) = (-2;-4;8).$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB là

$$d(M,AB) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+8^2}}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{14}.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 7.23. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+3y-z+2=0$ và $(Q): x+z+1=0$ có giao tuyến là đường thẳng Δ. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến Δ.*

A. $d = \dfrac{\sqrt{418}}{22}$ *B.* $d = \dfrac{2\sqrt{11}}{11}$ *C.* $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *D.* $d = \sqrt{22}$

LỜI GIẢI. Các mặt phẳng $(P),(Q)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;3;-1), \overrightarrow{n_Q}(1;0;1)$ nên giao tuyến Δ của chúng có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right) = (3;-2;-3).$$

Mặt khác, điểm $M(0;-1;-1) \in (P),(Q)$ nên M cũng thuộc Δ nên $\overrightarrow{OM}(0;-1;-1)$, do đó

$$[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{u_\Delta}] = \left(\begin{vmatrix}-2 & -3\\ -1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1;3;-3)$$

Khoảng cách từ O đến Δ là

$$d(O,\Delta) = \frac{|[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{u_\Delta}]|}{|\overrightarrow{u}_\Delta|} = \frac{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-3)^2}}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{418}}{22}.$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.24. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;2), B(2;1;1)$. Tìm điểm C trên Δ sao cho khoảng cách từ B đến AC là $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.*

A. $C(1;1;1)$ *B.* $C(-1;0;2)$ *C.* $C(-3;-1;3)$ *D.* $C(3;2;0)$

LỜI GIẢI. Do $C \in \Delta$ nên C có tọa độ $C(-1+2t; t; 2-t)$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}(2;2;-1), \overrightarrow{AC}(2t-1; t+1; -t)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ t+1 & -t \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -t & 2t-1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2t-1 & t+1 \end{vmatrix} \right) = (1-t; 1; 4-2t).$$

Khoảng cách từ B đến AC là

$$d(B, AC) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}{AC} = \frac{\sqrt{(1-t)^2+1^2+(4-2t)^2}}{\sqrt{(2t-1)^2+(t+1)^2+(-t)^2}} = \frac{\sqrt{5t^2-18t+18}}{\sqrt{6t^2-2t+2}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\Leftrightarrow 180t^2 - 648t + 648 = 180t^2 - 60t + 60 \Leftrightarrow 588t - 588 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Do đó $C(1;1;1)$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 7.25. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;0;1)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua điểm A, vuông góc với Δ' và cách B một khoảng lớn nhất.*

A. $\Delta' : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1 \end{cases}$ *B.* $\Delta' : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases}$

C. $\Delta' : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ *D.* $\Delta' : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng Δ' đi qua A cách B một khoảng lớn nhất khi và chỉ khi Δ' vuông góc với AB với $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$. Mặt khác, Δ' vuông góc với Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}(1;1;2)$. Do đó Δ' có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_{\Delta'}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_\Delta}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2;-2;2) = -2(1;1;-1).$$

Do vậy $\Delta' : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.26. *Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : x+2y+z-6=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d*

và cắt (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ cách gốc tọa độ O một khoảng nhỏ nhất.

A. $(P): 3x-y+z-4=0$ *B.* $(P): x-3y-z+4=0$

C. $(P): 2x+z-4=0$ *D.* $(P): x+y+z-4=0$

LỜI GIẢI. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của O trên (P) và Δ. Khi đó, $H \in (P)$ nên

$$d(O,\Delta) = OK \geq OH = d(I,(P))$$

Do đó để khoảng cách từ O đến Δ nhỏ nhất thì $H \equiv K$. Khi đó (Q) là mặt phẳng đi qua H và chứa d.

Do $OH \perp (P)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;2;1)$ nên H có tọa độ $H(t;2t;t)$. Mặt khác, $H \in (P)$ nên

$$t+2.2t+t-6=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(1;2;1)$$

Mặt phẳng (Q) chứa $d \ni M(1;1;2)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;1;-2)$ nên (Q) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{HM}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-1;-1;-1) = -(1;1;1)$$

Do đó $(Q): x+y+z-4=0$.

Đáp án là D. □

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

VÍ DỤ 7.27. *Cho hai đường thẳng chéo nhau* $\Delta_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ *và* $\Delta_2: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$. *Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.*

A. $d = 2\sqrt{2}$ *B.* $d = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$ *C.* $d = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$ *D.* $d = 2$

LỜI GIẢI. Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có vectơ chỉ phương tương ứng là $\overrightarrow{v_1}(1;2;3)$, $\overrightarrow{v_2}(-1;1;1)$. Mặt phẳng (P) qua Δ_1 và song song với Δ_2 đi qua điểm $A(1;2;3) \in \Delta_1$ và có vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1;-4;3).$$

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$(x-1)+4(y-2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+4y-3z=0.$$

Do $\Delta_2 \parallel (P) \supset \Delta_1$ nên khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 chính là khoảng cách giữa Δ_2 và mặt phẳng (P). Khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm $B(1;0;1)$ đến mặt phẳng (P). Do đó

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=d(\Delta_2,(P))=d(B,(P))=\frac{|1+4.0-3.1|}{\sqrt{1^2+4^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{26}}{13}.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7.28. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;1)$, mặt phẳng $(P): x+3y-2z+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ' đi qua điểm A, song song với (P) và vuông góc với Δ. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng Δ và Δ'.*

A. $d=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ *B.* $d=\dfrac{5\sqrt{14}}{7}$ *C.* $d=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ *D.* $d=\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

LỜI GIẢI. Đường thẳng Δ' song song với mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;3;-2)$ và vuông góc với đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v}(1;-2;2)$ nên Δ' có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{v'}=[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{v}]=\left(\begin{vmatrix}3&-2\\-2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&1\\2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&3\\1&-2\end{vmatrix}\right)=(2;-4;-5).$$

Mặt phẳng (Q) chứa Δ và song song với Δ' đi qua điểm $M(1;0;-1)\in\Delta$ và có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_Q}=[\overrightarrow{v},\overrightarrow{v'}]=\left(\begin{vmatrix}-2&2\\-4&-5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\-5&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}\right)=(18;9;0)=9(2;1;0).$$

Do đó $(Q): 2x+y-2=0$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là

$$d(\Delta,\Delta')=d(\Delta',(Q))=d(A,(Q))=\frac{|2.2+3-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1: Góc

Góc giữa hai đường thẳng

BÀI TẬP 7.1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{4}$ và điểm $A(2;3;1)$. Tìm trên Δ điểm B có tất cả tọa độ nguyên sao cho đường thẳng AB tạo với Δ một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{58}}$.

A. $B(1;-1;0)$

B. $B(3;2;4)$

C. $B(-1;-4;-4)$

D. $B\left(\dfrac{101}{29};\dfrac{79}{29};\dfrac{144}{29}\right)$

BÀI TẬP 7.2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P) : x - y + z - 5 = 0$ và điểm $M(3;-1;1)$. Hãy viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua M và tạo với d một góc 45^0.

A. $\Delta : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

B. $\Delta : \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+1}{-8} = \dfrac{z-1}{-15}$

C. $\Delta : \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{cases}$

D. $\Delta : \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{cases}$ hoặc $\Delta : \begin{cases} x = 3+7t \\ y = -1-8t \\ z = 1-15t \end{cases}$

Góc giữa hai mặt phẳng

BÀI TẬP 7.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - y - 2z = 0$ và điểm $M(2;-3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M vuông góc với (P) và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc 45^0.

A. $(Q) : x - y + z - 6 = 0$ hoặc $(Q) : 3x + y + z - 4 = 0$

B. $(Q) : x - y + z - 6 = 0$ hoặc $(Q) : x + y + 1 = 0$

C. $(Q) : 3x + y + z - 4 = 0$ hoặc $(Q) : 5x - 3y + 4z - 23 = 0$

D. $(Q) : x + y + 1 = 0$ hoặc $(Q) : 5x - 3y + 4z - 23 = 0$

BÀI TẬP 7.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$. (Q) là một mặt phẳng qua M và N và tạo với (P) một góc φ. Giá trị nhỏ nhất của $\sin\varphi$ là

A. 0 B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. 1

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

BÀI TẬP 7.5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1} \text{ và } d_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{-1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với d_2 một góc 30^0.

A. $(P): x+3y+2z-6=0$

B. $(P): x+2y+z-4=0$

C. $(P): x-y-2z+2=0$

D. $(P): x+2y+z-4=0$ hoặc $(P): x-y-2z+2=0$

BÀI TẬP 7.6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-2)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$. Δ là một đường thẳng đi qua A và cắt d. Đường thẳng Δ tạo với mặt phẳng (P) một góc φ, giá trị nhỏ nhất của $\cos\varphi$ là

A. 0 B. $\frac{\sqrt{399}}{21}$ C. $\frac{2\sqrt{21}}{21}$ D. 1

Dạng 2: Khoảng cách

Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng

BÀI TẬP 7.7. Cho điểm $I(3;6;7)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-11=0$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P).

A. $d=6$ B. $d=\frac{1}{3}$ C. $d=18$ D. $d=-6$

BÀI TẬP 7.8. Cho điểm $A(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z=0$. Tìm mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách A một khoảng bằng 2.

A. $(Q): x+2y+2z+3=0$ B. $(Q): 2x-2y+z+2=0$

C. $(Q): 2x-2y+z-2=0$ D. $(Q): 2x-2y+z+12=0$

BÀI TẬP 7.9. Cho đường thẳng $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

A. $M(0;1;2)$ B. $M(-8;-15;-22)$

C. $M(10;21;32)$ D. $M(-8;-15;-22)$ hoặc $M(10;21;32)$

BÀI TẬP 7.10. Cho điểm $A(-3;-1:2)$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 + 5t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d cách đều A và (P).

A. $M(-3;-6;2)$ B. $M(-3;-11;3)$

C. $M(-3;-1;1)$ D. $M(-3;-6;2)$ hoặc $M(-3;-1;1)$

BÀI TẬP 7.11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2}$. Tìm trên d điểm M cách đều hai mặt phẳng (Oxy) và (α).

A. $M(1;1;0)$ B. $M(0;-1;2)$

C. $M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{7}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$ D. $M(0;-1;2)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{7}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$

BÀI TẬP 7.12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x + y + z - 3 = 0, (Q) : x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với $(P), (Q)$, đồng thời cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

A. $(R) : x - z = 0$

B. $(R) : x - z + 2 = 0$

C. $(R) : x - z - 2 = 0$

D. $(R) : x - z + 2 = 0$ hoặc $(R) : x - z - 2 = 0$

BÀI TẬP 7.13. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;1;0)$ và hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}, d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2, đồng thời cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$.

A. $(P): x-y-2z+6=0$

B. $(P): x+2y+z+3=0$

C. $(P): x+2y+z-9=0$

D. $(P): x+2y+z+3=0$ hoặc $(P): x+2y+z-9=0$

BÀI TẬP 7.14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(0;-3;0)$ và $C(1;4;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, B và cách C một khoảng bằng 1.

A. $(P): x-z=0$

B. $(P): 2x-y+2z-3=0$

C. $(P): x-y+3z-3=0$

D. $(P): 2x+y-2z-1=0$

BÀI TẬP 7.15. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm mặt phẳng (Q) qua gốc tọa độ O, vuông góc với (P) và cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

A. $(Q): x+2y-3z=0$

B. $(Q): x-z=0$

C. $(Q): 5x-8y+3z=0$

D. $(Q): x-z=0$ hoặc $(Q): 5x-8y+3z=0$

BÀI TẬP 7.16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$ và điểm $A(1;1;2)$. Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oyz). Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và cách A một khoảng bằng 1.

A. $(Q): x+2y-z+1=0$

B. $(Q): x=0$

C. $(Q): x+2y-z+1=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+1=0$

D. $(Q): x=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+1=0$

BÀI TẬP 7.17. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(2;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ A đến (P) bằng $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

A. $(P): x+y+z-4=0$

B. $(P): 2x-y+z-3=0$

C. $(P): x+y-z=0$

D. $(P): x-y-3z+6=0$

BÀI TẬP 7.18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}, \Delta' : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ, Δ' và cách đều Δ, Δ'.

A. $(P) : x + y - 3 = 0$ B. $(P) : 6x + 2y - z - 12 = 0$

C. $(P) : 2x + 2y + z = 0$ D. $(P) : 2x + 2y + z - 6 = 0$

BÀI TẬP 7.19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Trong các mặt phẳng (P) đi qua A, song song với Δ, khoảng cách giữa (P) và Δ có giá trị lớn nhất d là

A. $d = \sqrt{75}$ B. $d = \sqrt{14}$ C. $d = \sqrt{2}$ D. $d = \sqrt{105}$

BÀI TẬP 7.20. Cho bốn điểm $A(4; 0; 0), B(2; -1; 0), C(0; 0; -1), D(4; -2; 1)$. Hỏi lập được bao nhiêu mặt phẳng (P) chứa hai điểm A, B và cách đều hai điểm C, D.

A. không tồn tại B. 1 mặt phẳng

C. 2 mặt phẳng D. vô số mặt phẳng

BÀI TẬP 7.21. Cho bốn điểm $A(1; -1; 4), B(0; 2; 5), C(2; -5; 2), D(-2; 1; 0)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều 4 điểm A, B, C, D.

A. Không tồn tại B. Có 1 mặt phẳng

C. Có 7 mặt phẳng D. Có vô số mặt phẳng

Khoảng cách giữa điểm và đường thẳng

BÀI TẬP 7.22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 2), B(-1; 1; 3)$ và $C(0; 2; 1)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{11}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

BÀI TẬP 7.23. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{1}$. Tìm điểm A trên trục Oy sao cho khoảng cách từ điểm A đến Δ bằng 3.

A. $A(0; 3; 0)$ hoặc $A(0; -3; 0)$ B. $A(0; 2; 0)$ hoặc $A(0; -16; 0)$

C. $A(0; 3; 0)$ hoặc $A(0; -16; 0)$ D. $A(0; 2; 0)$ hoặc $A(0; -3; 0)$

BÀI TẬP 7.24. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(0;-1;2), B(2;1;1)$. Tìm điểm C trên Δ sao cho khoảng cách từ B đến AC bằng 3.

A. $C(-1;0;2)$ B. $C(1;1;1)$ C. $C(-3;-1;3)$ D. $C(3;2;0)$

BÀI TẬP 7.25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x+y-z+1=0$, đường thẳng $d : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$ và điểm $I(1;2;4) \in (P)$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), vuông góc với d và cách I một khoảng là $3\sqrt{2}$.

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-7}{2}$ hoặc $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$

B. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-10}{2}$ hoặc $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z+2}{2}$

C. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-7}{1}$ hoặc $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$

D. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-10}{1}$ hoặc $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$

BÀI TẬP 7.26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;3), B(3;0;1)$ và mặt phẳng $(P) : 2x+z-7=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua B và cách A một khoảng nhỏ nhất.

A. $\Delta : \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$ B. $\Delta : \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-1}{-14}$

C. $\Delta : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 0 \\ z = 1-2t \end{cases}$ D. $\Delta : \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}$

BÀI TẬP 7.27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-4), B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua B, cắt d và cách A một khoảng lớn nhất.

A. $\Delta : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-3}$ B. $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{3}$

C. $\Delta : \begin{cases} x = 1+11t \\ y = 2+7t \\ z = -3 \end{cases}$ D. $\Delta : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = -3+6t \end{cases}$

BÀI TẬP 7.28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-1;1)$, đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : x+2y+z-6=0$. Viết phương trình

mặt phẳng (Q) chứa d sao cho giao tuyến Δ của (P) và (Q) cách I một khoảng nhỏ nhất.

A. $(Q): x+y+z-4=0$ B. $(Q): 2x+z-4=0$

C. $(Q): x-y=0$ D. $(Q): 2y+z-4=0$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

BÀI TẬP 7.29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5} \text{ và } \Delta': \frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{-1}.$$

Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng Δ, Δ'.

A. $d=\dfrac{98\sqrt{3}}{39}$ B. $d=\sqrt{74}$ C. $d=\dfrac{3\sqrt{4066}}{38}$ D. $d=\dfrac{15\sqrt{42}}{14}$

BÀI TẬP 7.30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-3=0$. Viết phương trình dường thẳng Δ' nằm trong (P), vuông góc với Δ và cách Δ một khoảng là $\sqrt{2}$.

A. $\Delta': \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$ hoặc $\Delta': \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

B. $\Delta': \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$ hoặc $\Delta': \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

C. $\Delta': \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ hoặc $\Delta': \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

D. $\Delta': \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ hoặc $\Delta': \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 7.1. Do $B \in \Delta$ nên $B(1+2t;-1+3t;4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t-1;3t-4;4t-1)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_\Delta}|}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{u_\Delta}|} = \frac{|29t-18|}{\sqrt{29}.\sqrt{29t^2-36t+18}} = \frac{6}{\sqrt{58}}.$$

Do B có tọa độ nguyên nên $t=0$.

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.2. Gọi vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$, suy ra

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_P} = a-b+c=0 \Rightarrow b=a+c \\ \cos 45^0 = \dfrac{|\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|.|\overrightarrow{u_d}|} = \dfrac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|3a+4c|}{3\sqrt{2a^2+2c^2+2ac}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c=0 \text{ hoặc } 14c+30a=0$$

- Nếu $c=0$, chọn $a=1, b=1$ thì $\Delta: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+t \\ z=1 \end{cases}$.
- Nếu $14c+30a=0$, chọn $a=7, c=-15, b=-8$ thì $\Delta: \begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.3. Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$. Ta có

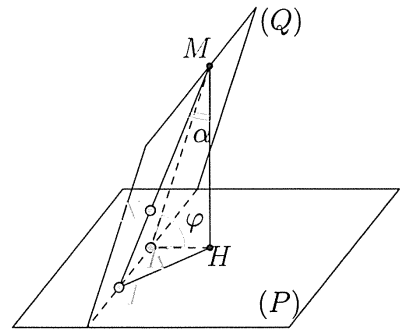
$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = a-b-2c=0 \Rightarrow b=a-2c \\ \cos 45^0 = \dfrac{|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{i}|}{|\overrightarrow{n_Q}|.|\overrightarrow{i}|} = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|a|}{\sqrt{2a^2+5c^2-4ac}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ 4a=5c \end{array}\right. \end{cases}.$$

- Nếu $c=0$, chọn $a=1, b=1$ thì $(P): x+y+1=0$.
- Nếu $4a=5c$, chọn $a=5, c=4, b=-3$ thì $(P): 5x-3y+4z-23=0$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.4

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) và I là giao điểm của MN và mặt phẳng (P). Từ H kẻ HK vuông góc với giao tuyến chung của (P) và (Q) thì



$$\sin\varphi = \frac{MH}{MK} \geq \frac{MH}{MI} = \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}|}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{n_P}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.5. Gọi $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do (P) chứa d nên

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v_1} = a-b+c = 0 \Rightarrow b = a+c.$$

Góc giữa (P) và d_2 là 30^0 nên

$$\frac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_2}|.|\overrightarrow{v_2}|} = \frac{|2a+b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{6}} = \sin 30^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-c=0 \\ 2a+c=0 \end{array}\right.$$

- Nếu $a-c=0$, chọn $a=1, c=1, b=2$ thì $(P): x+2y+z-4=0$.
- Nếu $2a+c=0$, chọn $a=1, c=-2, b=-1$ thì $(P): x-y-2z+2=0$.

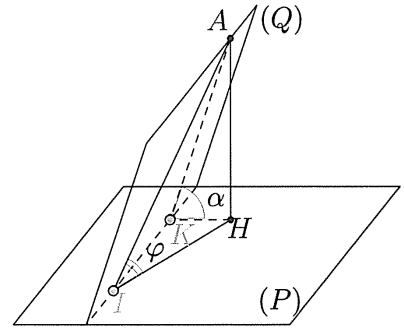
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.6.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và chứa $d \ni M(1;-1;2)$ nên ta chọn

$$\overrightarrow{n_Q} = \frac{1}{3}[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}] = (2;-4;-1)$$

Gọi H là hình chiếu của A trên (P). Từ H kẻ HK vuông góc với giao tuyến chung của (P) và (Q) thì



$$\sin\varphi = \frac{AH}{AI} \leq \frac{AH}{AK} = \sin\alpha \Rightarrow \cos\varphi \geq \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|} = \frac{2\sqrt{21}}{21}.$$

Đáp án là C.

□

GIẢI BÀI TẬP 7.7.

$$d(I,(P))=\frac{|3+2.6+2.7-11|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.8. Mặt phẳng $(Q)\parallel(P)$ nên $(Q):2x-2y+z+m=0\ (m\neq 0)$. Suy ra

$$d(A,(Q))=\frac{|m-6|}{3}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (loại)}\\ m=12 \text{ (thỏa mãn)}\end{array}\right.\cdot$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.9. Do $M\in d$ nên $M(t;1+2t;2+3t)$. Suy ra

$$d(M,(P))=\frac{|1-t|}{3}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-8\Rightarrow M(-8;-15;-22)\\ t=10\Rightarrow M(10;21;32)\end{array}\right.\cdot$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.10. Do $M\in d$ nên $M(-3;-6+5t;2-t)$. Ta có

$$d(M,(P))=AM\Leftrightarrow\frac{|(-3)+2(-6+5t)-2(2-t)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\sqrt{0^2+(5t-5)^2+t^2}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\Rightarrow M(-3;-6;2)\\ t=1\Rightarrow M(-3;-1;1)\end{array}\right.\cdot$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.11. Do $M\in d$ nên $M(1+t;1+2t;-2t)$. Ta có

$$d(M,(Oxy))=d(M,(\alpha))\Leftrightarrow|-2t|=\frac{|2(1+t)-(1+2t)+2(-2t)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1\Rightarrow M(0;-1;2)\\ t=\dfrac{1}{5}\Rightarrow M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{7}{5};-\dfrac{2}{5}\right)\end{array}\right.\cdot$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.12. Mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_R} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1).$$

Do đó $(R) : x - z + m = 0$, suy ra

$$d(O, (R)) = \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.13. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1; 2; 1)..$$

Do đó $(P) : x + 2y + z + m = 0$. Mặt phẳng (P) không đi qua $A(1; 3; 1) \in d_1$ và $B(1; -3; 2) \in d_2$ nên $m \neq -8, 3$. Lại có

$$d(M, (P)) = \frac{|m + 3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \text{ (loại)} \\ m = -9 \text{ (thỏa mãn)} \end{array} \right. .$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.14. Gọi $\overrightarrow{n_P}(a; b; c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của (P) thì

$$\begin{cases} (P) : a(x - 1) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB} = -a - 4b - c = 0 \Rightarrow c = -a - 4b \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(C, (P)) = \frac{|3b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3b|}{\sqrt{2a^2 + 8ab + 17b^2}} = 1.$$

Do đó $a + 2b = 0$, chọn $a = 2, b = -1$ thì $c = 2$. Suy ra

$$(P) : 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.15. Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của (Q). Suy ra

$$\begin{cases} (Q) : ax + by + cz = 0 \\ \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \end{cases}.$$

Khoảng cách từ M tới (Q) là

$$d(M,(Q))=\frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{2a^2+2b^2+2ab}}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 8ab+5b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\8a+5b=0\end{array}\right.$$

- Nếu $b=0$, chọn $a=1,c=-1$ thì $(Q):x-z=0$.
- Nếu $8a+5b=0$, chọn $a=5,b=-8,c=3$ thì $(Q):5x-8y+3z=0$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.16. Mặt phẳng (Q) có dạng

$$m(x+2y-z+1)+nx=0\Leftrightarrow(m+n)x+2my-mz+m=0\quad(m^2+n^2>0)$$

$$d(A,(Q))=\frac{|2m+n|}{\sqrt{6m^2+n^2+2mn}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=n\end{array}\right.$$

- Nếu $m=0$ thì $(Q):x=0$.
- Nếu $m=n$, chọn $m=n=1$ thì $(Q):2x+2y-z+1=0$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.17. Gọi $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2>0)$ là vectơ pháp tuyến của (P). Mặt phẳng (P) chứa $d\ni M(1;1;2)$ nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}=2a-b+c=0\Rightarrow b=2a+c\\(P):a(x-1)+b(y-1)+c(z-2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow d(A,(P))=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5a^2+2c^2+4ac}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a+c=0.$$

Chọn $a=1,c=-1,b=1$ thì $(P):x+y-z=0$.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.18. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}] = (-2; -2; -1) \Rightarrow (P) : 2x + 2y + z + m = 0.$$

Xét $M(1; 2; 1) \in \Delta, M'(2; 1; -1) \in \Delta'$

$$d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|m+7|}{3}, d(\Delta', (P)) = d(M', (P)) = \frac{|m+5|}{3}.$$

$$d(\Delta, (P)) = d(\Delta', (P)) \Leftrightarrow |m+7| = |m+5| \Leftrightarrow m = -6 \Rightarrow (P) : 2x + 2y + z - 6 = 0.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.19.

$$\max d(\Delta, (P)) = d(A, \Delta) = \sqrt{75}$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.20. Do AB và CD chéo nhau nên có hai mặt phẳng thỏa mãn:

- Mặt phẳng qua A, B và trung điểm của CD.
- Mặt phẳng qua A, B và song song với CD.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.21. Do AB và CD chéo nhau nên có 7 mặt phẳng sau thỏa mãn:

- Mặt phẳng qua các trung điểm của AB, AC và AD.
- Mặt phẳng qua các trung điểm của AB, AC và song song với AD.
- Mặt phẳng qua trung điểm AB, AD và song song với AC.
- Mặt phẳng qua trung điểm AB và song song với AC, AD.
- Mặt phẳng song song với AB và đi qua trung điểm các đường thẳng AC, AD.
- Mặt phẳng song song với AB, AC và đi qua trung điểm AD.

- Mặt phẳng song song với AB, AD và đi qua trung điểm AC, AD.

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.22. Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$. Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BC}(1;1;-2)$. Suy ra

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}] = \left(\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = (-5;-3;-4).$$

Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là

$$d(A,BC) = \frac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}]|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{(-5)^2+(-3)^2+(-4)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.23. Ta có $A(0;a;0), M(2;1;2) \in \Delta$. Khi đó

$$d(A,\Delta) = \frac{|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_\Delta}]|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|} = \frac{\sqrt{(-a-7)^2+(a+7)^2}}{\sqrt{1^2+4^2+1^2}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\\ a=-16\end{array}\right.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.24. Điểm $C \in \Delta$ nên $C(-1+2t;t;2-t)$

$$\overrightarrow{AB}(2;2;-1), [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = (t-1;-1;2t-4)$$

$$\Rightarrow d(B,AC) = \frac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{5t^2-18t+18}}{\sqrt{6t^2-2t+2}} = 3 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow C(-1;0;2)$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.25. Δ có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_\Delta} = -\frac{1}{2}[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}] = (2;-1;1).$$

Véc tơ vuông góc với $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_\Delta}$ là

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_\Delta}] = (0;1;1).$$

Nếu H là hình chiếu của I trên Δ thì $\overrightarrow{IH} = \pm 3\sqrt{2}.\dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$. Suy ra $H(1;5;7)$ hoặc $H(1;-1;1)$.

Đáp án là C □

GIẢI BÀI TẬP 7.26. Ta có $\min d(A,\Delta) = d(A,(P))$. Để khoảng cách là nhỏ nhất thì Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P). Khi đó

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}] = (-1;-7;2) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (7;-5;-14).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 7.27. Δ qua B, cách A một khoảng lớn nhất khi và chỉ khi Δ vuông góc với AB. Mặt khác, Δ nằm trong mặt phẳng qua B và chứa d qua $M(0;1;0)$. Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{v_d}] = (7;-11;1) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}] = (-11;-7;0) \nparallel \overrightarrow{u_d}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 7.28. Ta có

$$d(I,\Delta) \geq d(I,(P))$$

Do đó, để khoảng cách $d(I,\Delta)$ là nhỏ nhất thì (Q) đi qua $H(2;1;2)$ là hình chiếu của I trên (P). Mặt khác, (Q) qua $d \ni M(1;1;2)$ nên có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{HM}] = (0;2;1) \Rightarrow (Q): 2y + z - 4 = 0.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 7.29. Ta có $M(2;3;-4) \in \Delta, M'(-1;4;4) \in \Delta' \Rightarrow \overrightarrow{MM'}(-3;1;8)$

$$[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}] = (-13;-13;-13) \Rightarrow \overrightarrow{MM'}.[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}] = -98$$

$$\Rightarrow d(\Delta,\Delta') = \frac{|\overrightarrow{MM'}.[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}]|}{|[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}]|} = \frac{98\sqrt{3}}{39}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 7.30. Δ' có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_{\Delta'}} = \frac{1}{3}[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_\Delta}] = (1;-1;-1)$$

Mặt phẳng (Q) qua Δ' và song song với Δ có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_Q} = \frac{1}{3}[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}] = (0;1;-1)$$

nên $(Q): y-z+m=0$. Khoảng cách từ $A(1;2;0)\in\Delta$ đến (Q) chính là khoảng cách giữa Δ,Δ'

$$d(A,(Q))=\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-4\end{array}\right.$$

- Nếu $m=0$ thì $(Q): y-z=0\Rightarrow M(3;0;0)\in\Delta',\Delta': \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$.
- Nếu $m=-4$ thì $(Q): y-z-4=0\Rightarrow M(-5;4;0)\in\Delta',\Delta': \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z}{-1}$.

Đáp án là D. □

CHỦ ĐỀ 8
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Phương trình mặt cầu:** Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(a;b;c)$ và bán kính $R>0$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Phương trình:

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0, A^2+B^2+C^2-D>0$$

cũng là phương trình của mặt cầu. Khi đó tâm của mặt cầu là điểm $I(-A;-B;-C)$ và bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

2. **Vị trí tương đối của điểm và mặt cầu:** Cho điểm M và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Khi đó ta có:

- Điểm M nằm trong mặt cầu (S) khi và chỉ khi $IM<R$.
- Điểm M nằm trên mặt cầu hay thuộc mặt cầu (S) khi và chỉ khi $IM=R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi $IM>R$.

3. **Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu:** Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Khi đó ta có:

- Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu hay nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I,(P))>R$.

- Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu hay có một điểm chung duy nhất với mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I,(P))=R$. Khi đó tiếp điểm H là chân đường vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P).
- Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn khi và chỉ khi $d(I,(P))<R$. Khi đó tâm H của đường tròn là chân đường vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P) và bán kính r của đường tròn được xác định bởi công thức:
$$r^2=R^2-(d(I;(P)))^2.$$

4. **Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu:** Cho đường thẳng Δ và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Khi đó ta có:
   - Đường thẳng Δ không có điểm chung với mặt cầu hay nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)>R$.
   - Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R$.
   - Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)<R$. Khi đó đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B thì trung điểm H của đoạn AB là chân đường vuông góc của điểm I lên đường thẳng Δ và ta có mối liên hệ:
$$R^2=(d(I;(P)))^2+\frac{AB^2}{4}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết phương trình của mặt cầu

VÍ DỤ 8.1. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu (S) tâm là I và có bán kính $R=3$ là:*

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$ *B.* $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$ *D.* $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3$

LỜI GIẢI. Phương trình mặt cầu S là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Đáp án là B. □

Nhận xét: Để chọn nhanh đáp án chúng ta để ý đến bán kính và ta có thể loại hai đáp án A và D.

VÍ DỤ 8.2. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;0), A(-2;0;-3)$. Phương trình mặt cầu (S) tâm là I và đi qua A là:*

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=19$ *B.* $(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=19$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{19}$ *D.* $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=13$

LỜI GIẢI. Điểm A nằm trên mặt cầu (S) nên ta có $R^2=IA^2=19$.
Vậy mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=19$.
Đáp án là A. □

VÍ DỤ 8.3. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1), B(0;0;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:*

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=12$ *B.* $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$

C. $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=0$ *D.* $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=0$

LỜI GIẢI. Mặt cầu đường kính AB có tâm I là trung điểm của đoạn AB. Suy ra ta có tọa độ của điểm I là $I(1;-1;-1)$. Bán kính của mặt cầu là $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$.
Đáp án là B . □

VÍ DỤ 8.4. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1), B(0;0;3)$. Phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc Ox là:*

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=10$ *B.* $(x+1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

C. $x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$ *D.* $x^2+y^2+z^2=9$

LỜI GIẢI. Gọi I là tâm của mặt cầu (S) cần tìm. Khi đó $IA=IB$ nên I thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua trung điểm $M(1;-1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(-2;2;2)$ là vectơ pháp tuyến nên nó có phương trình là:

$$-2(x-1)+2(y+1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow x-y-z=0.$$

Khi đó tâm I của mặt cầu (S) là $I(0;0;0)$. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IB=3$. Vậy phương trình măt cầu là $x^2+y^2+z^2=9$.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 8.5. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=24$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua gốc tọa độ O là:*

A. $(S'): (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=24$ *B.* $(S'): (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=6$

C. $(S'): (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=6$ *D.* $(S'): (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=24$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=2\sqrt{6}$. Mặt cầu (S')có tâm I' đối xứng với I qua gốc tọa độ nên suy ra ta có $I'(-1;0;2)$. Bán kính $R'=R=2\sqrt{6}$. Vậy phương trình của mặt cầu (S') là:

$$(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=24$$

Đáp án là D . □

VÍ DỤ 8.6. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;0;-3)$. Khẳng định nào sau đây* **sai***:*

A. Mặt cầu đường kính AB là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$

B. Mặt cầu đường kính AB có bán kính bằng $\sqrt{6}$

C. Mặt cầu đường kính AB có tâm là $I(1;-1;-1)$

D. Diện tích mặt cầu đường kính AB là 12π

LỜI GIẢI. Áp dụng công thức ta tính được $AB=2\sqrt{6}$.

Mặt cầu đường kính AB có tâm I là trung điểm của AB. Tọa độ của điểm I là $I(1;-1;-1)$.

Bán kính mặt cầu đường kính AB là $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$.

Diện tích mặt cầu đường kính AB là $4\pi R^2=24\pi$. Vậy khẳng định sai là khẳng định D.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 8.7. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình*

$$x^2+y^2+z^2-2x-2my-2z+m+4=0, m \text{ là một tham số.}$$

Điều kiện của tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

A. $m>2$ *hoặc* $m<-1$ *B.* $m\geq 2$ *hoặc* $m\leq -1$

C. $-1<m<2$ *D.* $-1\leq m\leq 2$

LỜI GIẢI. Điều kiên để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu là:

$$1^2+m^2+1^2-m-4=m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. .$$

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 8.8. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:*

A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=36$ *B.* $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=12$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=6$ *D.* $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

LỜI GIẢI. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi khoảng cách từ I tới (P) bằng bán kính mặt cầu. Suy ra ta có

$$R=\frac{|2+3+4-3|}{\sqrt{1+1+1}}\Rightarrow R=2\sqrt{3}.$$

Phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=12.$$

Đáp án là B . □

VÍ DỤ 8.9. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có diện tích bằng 6π là:*

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$ *B.* $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=7$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3$ *D.* $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=15$

LỜI GIẢI. Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có diện tích bằng $S=\pi.r^2=6\pi$, nên ta tính được bán kính đường tròn là $r=\sqrt{6}$.
Khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{|-1+4+4-4|}{\sqrt{1+4+4}}=1$.
Do đó ta có $R^2=6+1=7$. Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=7.$$

Đáp án là B . □

VÍ DỤ 8.10. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;2;-2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng d là:*

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$ *B.* $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=26$

C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=25$ *D.* $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=26$

LỜI GIẢI. Gọi tiếp điểm là H thì ta có H thuộc đường thẳng d và $IH \perp d$.
Suy ra tọa độ của điểm H có dạng $H(t; t+1; t+2)$.
Ta có $\overrightarrow{IH} = (t-3; t-1; t+4)$.
Véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\overrightarrow{u} = (1;1;1)$ Vậy ta có:

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow t-3+t-1+t+4 = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Suy ra ta có $H(0;1;2)$ và $R = IH = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$. Phương trình mặt cầu là:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 26.$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Do tâm của mặt cầu cần tìm là điểm $I(3;2;-2)$ nên ta loại được các trường hợp B, C. Ta có thể dùng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng để suy ra bán kính của mặt cầu cần tìm là $R = d(I;d) = \sqrt{26}$.

VÍ DỤ 8.11. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;1;1), B(1;3;1)$, $C(1;1;3), D(1;1;1)$. Phương trình mặt cầu S ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:*

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3$ *B.* $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$
C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 3$ *D.* $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 12$

LỜI GIẢI. Gọi phương trình mặt cầu (S) là:
$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, (R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.
Do bốn điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu nên thay tọa độ của các điểm đó vào phương trình mặt cầu rồi rút gọn ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 11 + 6a + 2b + 2c + d &= 0 \\ 11 + 2a + 6b + 2c + d &= 0 \\ 11 + 2a + 2b + 6c + d &= 0 \\ 3 + 2a + 2b + 2c + d &= 0 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình trên ta suy ra $a = b = c = -2, d = 9$. Vậy ta có phương trình của mặt cầu là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3.$$

Đáp án là A . □

VÍ DỤ 8.12. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;1;-1)$, $B(1;-1;-1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt cầu qua ba điểm A, B, C và có bán kính là $\sqrt{2}$ là:*

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=2$ *B.* $x^2+y^2+(z+1)^2=2$

C. $x^2+y^2+(z-1)^2=2$ *D.* $x^2+(y+1)^2+z^2=2$

LỜI GIẢI. Gọi phương trình mặt cầu (S) là:
$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, (R^2=a^2+b^2+c^2-d>0)$.
Thay tọa độ 3 điểm A, B, C vào phương trình mặt cầu ta có hệ:

$$\begin{cases} 3-2a+2b-2c+d &= 0 \\ 3+2a-2b-2c+d &= 0 \\ 1+2a+d &= 0 \\ a^2+b^2+c^2-d &= 2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta nhận được $a=b=0, c=1, d=-1$.
Suy ra phương trình mặt cầu là:

$$x^2+y^2+z^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z+1)^2=2.$$

Đáp án là B. □

Dạng 2: **Bài toán liên quan đến tâm và bán kính của mặt cầu**

VÍ DỤ 8.13. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. Tâm của mặt cầu (S) là:*

A. $I(-1;-2;-3)$ *B.* $I(2;1;3)$ *C.* $I(1;2;3)$ *D.* $I(1;3;2)$

LỜI GIẢI. Áp dụng công thức phương trình của mặt cầu ta có tâm của mặt cầu là: $I(1;2;3)$.
Đáp án là C. □

VÍ DỤ 8.14. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-3=0$. Bán kính của mặt cầu (S) là:*

A. $R=\sqrt{5}$ *B.* $R=\sqrt{3}$ *C.* $R=2$ *D.* $R=\sqrt{7}$

LỜI GIẢI. Ta đưa phương trình mặt cầu về dạng chính tắc:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=5.$$

Do đó bán kính của mặt cầu là: $R=\sqrt{5}$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 8.15. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3$. Thể tích khối cầu (S) là:*

A. $V=36\pi$ *B.* $V=4\pi\sqrt{3}$ *C.* $V=\pi\sqrt{3}$ *D.* $V=3\pi$

LỜI GIẢI. Từ phương trình của mặt cầu ta có bán kính của mặt cầu là $R=\sqrt{3}$. Do đó thể tích của khối cầu là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\pi\sqrt{3}$.

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 8.16. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) phương trình $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=2m^2+2m+1$. Tìm tham số m để mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất.*

A. $m=-\dfrac{1}{2}$ *B.* $m=\dfrac{1}{2}$ *C.* $m=-1$ *D.* $m=1$

LỜI GIẢI. Gọi $R>0$ là bán kính mặt cầu (S) ta có $R^2=2m^2+2m+1$. Suy ra R nhỏ nhất khi và chỉ khi R^2 nhỏ nhất.

Ta có:

$$R^2=2(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}\quad\forall m,$$

dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu nhỏ nhất khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 8.17. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2mx-4z-m+2=0$ với tham số m. Tìm m để tâm của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$.*

A. $m=3$ *B.* $m=-1$ *C.* $m=1$ *D.* $m=-3$

LỜI GIẢI. Phương trình mặt cầu $(S):(x+m)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+m+2$.. Khi đó tâm của mặt cầu (S) là: $I(-m;0;2)$. Ta có điểm I thuộc mặt phẳng (P) điều kiện là

$$-m+0-2-1=0\Leftrightarrow m=-3.$$

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 8.18. *Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx-2y+m+1=0$ với tham số m. Tìm m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm cách O một khoảng là $\sqrt{2}$.*

A. $m=1$ *B.* $m=\pm 1$ *C.* $m=-1$ *D.* $m=0$

LỜI GIẢI. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-m)^2+(y-1)^2+z^2=m^2-m.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$m^2-m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right. .$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m;1;0)$. Ta có:

$$IO=\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2+1=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right. .$$

Kết hợp điều kiện ta có $m=-1$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 8.19. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;2), B(2;-1;0)$ và phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2mz-1=0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm I và tam giác IAB cân đỉnh I.*

A. $m=1$ *B.* $m=1$ *hoặc* $m=-1$

C. $m=0$ *D.* $m=-1$.

LỜI GIẢI. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-m)^2+(y-m)^2+(z-m)^2=3m^2+1.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$3m^2+1>0 \Leftrightarrow \forall m.$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m;m;m)$.
Ta có tam giác IAB cân đỉnh I khi và chỉ khi :

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow m^2 + (m-1)^2 + (m-2)^2 = (m-2)^2 + (m+1)^2 + m^2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết hợp điều kiện ta suy ra $m = 0$.
Đáp án là C. □

VÍ DỤ 8.20. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1), B(2;-1;0)$ và phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2z - 3 = 0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm I và tam giác IAB có diện tích bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.*

A. $m = 0$ *B.* $m = 1$
C. $m = 0$ *hoặc* $m = 1$ *D.* $m = -1$ *hoặc* $m = 0$

LỜI GIẢI. Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 + (z-1)^2 = 2m^2 + 4$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$2m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow \forall m.$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m;m;1)$. Ta có:

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}]| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do $\overrightarrow{AI} = (m-1;m;0)$, $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-1)$, nên tính toán theo công thức ta có:

$$6m^2 - 6m + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. .$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 8.21. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;-1)$, $B(-1;1;-1)$, $C(-1;0;0)$. Mặt cầu (S) là mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn lớn thì tâm của mặt cầu (S) là:*

A. $I(0;0;-1)$ *B.* $I(0;0;-1)$ *C.* $I(0;-1;-1)$ *D.* $I(0;1;1)$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) là mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn lớn thì tâm của mặt cầu (S) trùng với tâm tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu.
Giải hệ phương trình $IA^2 = IB^2 = IC^2$ tìm được $I(a;a;a-1)$
Mặt khác bốn điểm I, A, B, C đồng phẳng suy ra

$$[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy ta có $I(0;0;-1)$.
Đáp án là A. □

Nhận xét: Chúng ta có thể làm theo cách khác là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là giao của ba mặt phẳng gồm mặt phẳng trung trực của các cạnh AB, AC và mặt phẳng (ABC).

VÍ DỤ 8.22. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2), B(0;2;2)$, $C(0;-1;5)$. Mặt cầu (S) là mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn lớn thì bán kính của mặt cầu (S) là:*

A. $R = 2\sqrt{3}$ *B.* $R = 2\sqrt{6}$ *C.* $R = 2\sqrt{2}$ *D.* $R = \sqrt{6}$

LỜI GIẢI. Từ giả thiết ta có bán kính mặt cầu chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Cách 1: Sử dụng cách làm trong Ví dụ 8.21 ta tìm được tọa độ của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \sqrt{6}$.
Đáp án là D.
Cách 2: Ta sử dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC. Ta có :

$$\begin{cases} AB &= 3\sqrt{2} \\ AC &= 3\sqrt{2} \\ BC &= 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow R = 2.AB.\sin 60^0 = \sqrt{6}.$$

Khi đó bán kính của mặt cầu là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \sqrt{6}$.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 8.23. *Trong hệ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(-1;1;-1)$, $C(1;-1;-1)$. Trong tất cả các mặt cầu chứa A, B, C thì mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là:*

A. $R = 2\sqrt{2}$ *B.* $R = \sqrt{2}$ *C.* $R = \sqrt{3}$ *D.* $R = 2$

LỜI GIẢI. Gọi (S) là mặt cầu đã cho, I là tâm, R là bán kính mặt cầu và $R_{\Delta ABC}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt cầu có diện tích nhỏ nhất khi bán kính của nó nhỏ nhất. Do mặt cầu cắt mặt phẳng (ABC) nên ta có :

$$R^2 = (R_{\Delta ABC})^2 + (d(I,(P)))^2 \geq (R_{\Delta ABC})^2 \Rightarrow R \geq R_{\Delta ABC}.$$

Khi đó, bán kính mặt cầu nhỏ nhất khi nó là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có :

$$\begin{cases} AB &= \sqrt{2} \\ AC &= \sqrt{6} \\ BC &= \sqrt{8} \end{cases}.$$

Suy ra tam giác ABC vuông tại A và do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R = \frac{BC}{2} = \sqrt{2}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nhỏ nhất là $R = \sqrt{2}$.

Đáp án là B. □

Dạng 3: Điểm và dây cung của mặt cầu

VÍ DỤ 8.24. *Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;2)$, $B(1;-1;0)$, $C(0;2;1)$, $D(1;0;-1)$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D?*

A. 0 *B.* 1 *C.* 3 *D. vô số*

LỜI GIẢI. Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, (R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

Thay tọa độ điểm A, B, C, D vào phương trình mặt cầu ta được:

$$\begin{cases} a = 4b + \dfrac{3}{2} \\ c = b \\ d = -5 - 6b \end{cases}.$$

Vậy có vô số mặt cầu qua 4 điểm đó.

Đáp án là D . □

VÍ DỤ 8.25. *Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;2)$, $B(1;-1;0)$, $C(0;2;1)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D?*

A. 0 *B.* 1 *C.* 3 *D. vô số*

LỜI GIẢI. Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là:
$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, (R^2=a^2+b^2+c^2-d>0)$.
Thay tọa độ điểm A, B, C, D vào phương trình mặt cầu ta được:

$$\begin{cases} a=4b+\dfrac{3}{2} \\ c=b \\ d=-5-6b \\ 0.b+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}-5=0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm nên không có mặt cầu nào qua cả 4 điểm đó.

Đáp án là A . □

VÍ DỤ 8.26. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu có bán kính bằng 1 và tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục?*

A. 0 *B.* 1 *C.* 8 *D. vô số*

LỜI GIẢI. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu. Từ giả thiết ta có: $|a|=|b|=|c|=1$ suy ra a, b, c có thể nhận 1 trong 2 giá trị 1 hoặc -1. Từ đó suy ra có 8 bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn. Vậy có 8 mặt cầu thỏa mãn.

Đáp án là C . □

VÍ DỤ 8.27. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x+y=0$?*

A. 0 *B. vô số* *C.* 1 *D.* 4

LỜI GIẢI. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục, suy ra $|a|=|b|=|c|$
Để $I\in(P)$ thì điều kiện là $a+b=0\Rightarrow a=-b$.

Ta được $I_1(a;-a;a)$ hoặc $I_2(a;-a;-a)$. Suy ra có vô số mặt cầu thỏa mãn.

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 8.28. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ và hai điểm $A(-1;3;1), B(-3;2;0)$. Kết luận nào sau đây* **sai***?*

A. Điểm A nằm trong mặt cầu

B. Điểm B nằm ngoài mặt cầu

C. Đoạn AB không có điểm chung với mặt cầu

D. Đoạn AB có điểm chung với mặt cầu

LỜI GIẢI. Tâm của mặt cầu là $I(1;1;-3)$, bán kính $R=5$.

Ta có:

$$\begin{cases} IA &= \sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}<R=5 \\ IB &= \sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}>R=5 \end{cases}.$$

Điều này chứng tỏ điểm A nằm trong mặt cầu, điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy đoạn AB có điểm chung với mặt cầu.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 8.29. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=25$ và điểm $M(0;-2;2)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M. Khi đó độ dài dây AB nhỏ nhất là:*

A. 2 *B.* 10 *C.* 8 *D.* 4

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;1)$, bán kính $R=5$. Độ dài $IM=\sqrt{4+4+1}=3$. Do đó điểm M nằm trong mặt cầu.

Khi đó độ dài dây AB nhỏ nhất khi nó là dây vuông góc với IM tại M. Khi đó, do M là trung điểm của AB nên $AB=2AM$.

Tam giác IMA vuông tại M nên ta có

$$AM=\sqrt{IA^2-IM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4\Rightarrow AB=8.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 8.30. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$, tâm là I, và điểm $M(-2;0;4)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M và tạo với đường thẳng IM một góc 60^0 Khi đó độ dài dây AB là:*

A. $2\sqrt{21}$ B. $2\sqrt{13}$ C. $\sqrt{21}$ D. $\sqrt{13}$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;0)$ và bán kính $R=5$. Ta dễ tính được $IM=4<5=R$ nên điểm $M(-2;0;4)$ nằm trong mặt cầu.
Mặt khác ta có $IH \perp AB$ (H là trung điểm của AB), nên suy ra

$$IH = \sin 60^0 . IM = 2\sqrt{3}.$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông IAH ta có

$$AH = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}.$$

Vậy $AB = 2\sqrt{13}$.
Đáp án là B. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 8.1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(0;-2;1)$. Phương trình mặt cầu S tâm là I và có bán kính $R=\sqrt{6}$ là:

A. $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$ B. $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$

C. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=6$ D. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\sqrt{6}$

BÀI TẬP 8.2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;-1;1), N(0;0;2)$. Phương trình mặt cầu S tâm là M và bán kính bằng MN là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$ B. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$

C. $x^2+y^2+z^2+4x+2y+2z=6$ D. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$.

BÀI TẬP 8.3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;2), B(1;1;-2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=12$ B. $(x-2)^2+y^2+z^2=3$

C. $(x-2)^2+y^2+z^2=6$ D. $(x+2)^2+y^2+z^2=6$

BÀI TẬP 8.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1), B(0;0;3)$. Phương trình mặt cầu nào dưới đây đi qua A, B và có bán kính bằng $\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$ B. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3$

C. $x^2+y^2+z^2+2x+2y+3z=0$ D. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$

BÀI TẬP 8.5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua mặt phẳng Oxy là:

A. $(S'):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$

B. $(S'):(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1$

C. $(S'):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=4$

D. $(S'):(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=4$

BÀI TẬP 8.6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua đường thẳng Oz là:

A. $(S'):(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$

B. $(S'):(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$

C. $(S'):(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$

D. $(S'):(x+3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$

BÀI TẬP 8.7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=6$. Khẳng định nào sau đây **đúng**:

A. Tâm của mặt cầu (S) là $I(-3;0;2)$

B. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=6$

C. Thể tích khối (S) là $V=24\pi\sqrt{6}$

D. Mặt cầu đối xứng với mặt cầu (S) qua Oy là: $(x+3)^2+y^2+(z-2)^2=6$.

BÀI TẬP 8.8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$. Khẳng định nào sau đây **sai**:

A. Tâm của mặt cầu (S) là $I(1;1;1)$

B. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{3}$

C. Diện tích của mặt cầu (S) là $S=3\pi$

D. Thể tích khối (S) là $V=4\pi\sqrt{3}$

BÀI TẬP 8.9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2+y^2+z^2+y+z=0$. Khẳng định nào sau đây **đúng**:

A. Tâm của mặt cầu (S) là $I(0;1;1)$

B. Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\dfrac{1}{2}$

C. Mặt cầu đi qua gốc tọa độ O

D. Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng Oxy.

BÀI TẬP 8.10. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=m^2-1$. Điều kiện của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

A. $-1<m<1$ B. $-1\le m\le 1$

C. $m\ge 1$ hoặc $m\le -1$ D. $m>1$ hoặc $m<-1$

BÀI TẬP 8.11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-4x-2my-2mz+2m+4=0, m \textit{ là một tham số.}$$

Điều kiện của m để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu là:

A. $0<m<1$ B. $m>1$ hoặc $m<0$

C. $0\le m\le 1$ D. ≥ 1 hoặc $m\le 0$

BÀI TẬP 8.12. Trong hệ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4mz-m-1=0$, m là một tham số. Khẳng định nào sau đây **đúng**:

A. Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu chỉ với $m = 1$

B. Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ $m > 1$

C. Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ $m < 1$

D. Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu với mọi m.

BÀI TẬP 8.13. Trong hệ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2m^2x+2mz+m^2+1 = 0$ với tham số m. Tìm m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z + 2 = 0$.

A. $m = 1$ hoặc $m = 2$ B. $m = 1$

C. $m = 2$ D. $m = -2$ hoặc $m = 1$

BÀI TẬP 8.14. Trong hệ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2my-m+1 = 0$, m là một tham số. Điều kiện của tham số m để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu có diện tích bằng 16π:

A. $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$ B. $m = 1$ hoặc $m = -2$

C. $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ D. $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP 8.15. Trong hệ $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx-2y+m-1 = 0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm cách mặt phẳng $(P) : 2x + y + 2z = 0$ một khoảng là 1.

A. $m = 1$ B. $m = 1$ hoặc $m = -2$

C. $m = -2$ D. $m = -1$

BÀI TẬP 8.16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 2), B(2; -1; 0)$ và phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz + 3 = 0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm I và tam giác IAB cân đỉnh I.

A. $m = 1$ B. $m = 1$ hoặc $m = -1$

C. Không tồn tại m thỏa mãn D. $m = -1$.

BÀI TẬP 8.17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 2), B(2; -1; 0)$ và phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz + 3 = 0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm I và tam giác IAB vuông đỉnh A.

A. $m = 3$ B. $m = -3$

C. $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$ D. Không tồn tại m

BÀI TẬP 8.18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1), B(2;-1;0)$ và phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2z + 2 = 0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm I và tam giác IAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

A. $m = 0$ B. $m = 1$

C. $m = 0$ hoặc $m = 1$ D. $m = -1$ hoặc $m = 0$

BÀI TẬP 8.19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;-2;0)$. Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB thì thể tích của khối cầu là:

A. $V = 4\pi\sqrt{3}$ B. $V = 12\pi\sqrt{3}$ C. $V = 32\pi\sqrt{3}$ D. $V = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$

BÀI TẬP 8.20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2), B(3;-2;0)$. Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB thì tâm I và bán kính R là:

A. $I(2;-1;1), R = \sqrt{3}$ B. $I(2;-1;1), R = 2\sqrt{3}$

C. $I(2;-1;-1), R = \sqrt{3}$ D. $I(4;-2;2), R = 2\sqrt{3}$

BÀI TẬP 8.21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;1;-2)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z - 1 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$

BÀI TẬP 8.22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;3;-4)$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z - 3 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I với cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn bán kính $r = 2$ là:

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 16$ B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 16$

C. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 8$ D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 8$

BÀI TẬP 8.23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;-1;-2)$ và mặt phẳng $(P) : -2x + 2y + z - 1 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính $r = 4$ là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 17$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 5$ D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 17$

BÀI TẬP 8.24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-5=0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có chu vi bằng 4π là:

A. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=10$ B. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=8$

C. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=7$ D. đáp án khác

BÀI TẬP 8.25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;2;-2)$ và đường thẳng $(d): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt đường thẳng (d) theo một dây có độ dài 2 là:

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=27$ B. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=30$

C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=30$ D. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=27$

BÀI TẬP 8.26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(4;-3;1)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với đường thẳng Δ là:

A. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$ B. $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=2$

C. $(x+4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=2$ D. $(x+4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$

BÀI TẬP 8.27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ B. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$ D. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=12$

BÀI TẬP 8.28. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-1;-1), B(-1;1;-1)$, $C(-1;0;0)$, $D(0;1;0)$. Phương trình mặt cầu qua bốn điểm A,B,C,D là:

A. $x^2+y^2+(z+1)^2=2$ B. $x^2+y^2+(z-1)^2=2$

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=2$ D. $x^2+(y+1)^2+z^2=2$

BÀI TẬP 8.29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-1;1)$, $B(-1;1;1)$, $C(-1;0;0)$, $D(0;1;0)$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

A. $S=\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ B. $S=2\pi$ C. $S=8\pi$ D. $S=16\pi$

BÀI TẬP 8.30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;1), B(1;3;1), C(1;1;3)$. Phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có diện tích bằng 12π là:

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3$ B. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=3$ D. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=12$

BÀI TẬP 8.31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Bán kính của mặt cầu (S) là:

A. $R=6$ B. $R=\sqrt{6}$ C. $R=2$ D. $R=\pm\sqrt{6}$

BÀI TẬP 8.32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-3=0$. Tâm của mặt cầu (S) là:

A. $I(-1;-1;-3)$ B. $I\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$ C. $I(-1;-1;0)$ D. $I(1;1;0)$

BÀI TẬP 8.33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $3x^2+3y^2+3z^2-2x-1=0$. Bán kính của mặt cầu (S) là:

A. $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $R=1$ C. $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $R=\frac{2}{3}$

BÀI TẬP 8.34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $3x^2+3y^2+3z^2-2x-1=0$. Tâm của mặt cầu (S) là:

A. $I\left(\frac{1}{3};0;0\right)$ B. $I(1;0;0)$ C. $I\left(\frac{1}{\sqrt{3}};0;0\right)$ D. $I\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0;0\right)$

BÀI TẬP 8.35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-2y-3=0$. Diện tích của mặt cầu (S) là:

A. $S=20\pi$ B. $S=12\pi$ C. $S=5\pi$ D. $S=28\pi$

BÀI TẬP 8.36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2mx-2z-m=0, m$ là tham số . Diện tích của mặt cầu (S) nhỏ nhất khi m bằng:

A. $m=-1$ B. $m=-\frac{1}{2}$ C. $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $m=-2$

BÀI TẬP 8.37. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2m^2x-2y+2=0$ với tham số m. Tìm m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x+y-2=0$.

A. $m=1$ B. $m=\pm1$

C. $m=-2$ D. không tồn tại m

BÀI TẬP 8.38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;1;3)$. Mặt cầu (S) là mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn lớn thì tâm của mặt cầu (S) là:

A. $I(1;-2;1)$ B. $I(-1;-2;-1)$ C. $I(1;2;1)$ D. $I(-1;2;-1)$

BÀI TẬP 8.39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;1)$, $C(-2;0;2)$. Mặt cầu (S) là mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn lớn thì thể tích khối cầu (S) là:

A. $V=\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{3}$ B. $V=\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$ C. $V=8\pi\sqrt{2}$ D. $V=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$

BÀI TẬP 8.40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;1;3)$. Trong tất cả các mặt cầu chứa A,B,C thì mặt cầu có diện tích nhỏ nhất là:

A. $S=48\pi$ B. $S=96\pi$ C. $S=32\pi$ D. $S=24\pi$

BÀI TẬP 8.41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm I có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2my-2mz+3m^2=0, m$ là một tham số và điểm $A(1;1;-2)$. Đặt $T=IA^2+IO^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**:

A. T có cả giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

B. T chỉ có giá trị nhỏ nhất

C. T chỉ có giá trị lớn nhất

D. T không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

BÀI TẬP 8.42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;2); B(-1;-1;($ $C(0;2;1); D\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Có bao nhiêu mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D?

A. 0 B. 1 C. 3 D. vô số

BÀI TẬP 8.43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục?

A. 0 B. 1 C. 8 D. vô số

BÀI TẬP 8.44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu có diện tích bằng 1 và tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục?

A. 0 B. 8 C. 1 D. 4

BÀI TẬP 8.45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu cắt cả hai mặt phẳng $(P): x+y=0, (Q): 2x-y+z-1=0$ theo hai đường tròn có cùng bán kính?

A. vô số B. 2 C. 1 D. không có

BÀI TẬP 8.46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$ và điểm $A(1;0;-1)$. Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. Điểm A nằm trong mặt cầu B. Điểm A nằm trên mặt cầu
C. Điểm A nằm ngoài mặt cầu D. Các kết luận trên sai.

BÀI TẬP 8.47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu cắt cả hai mặt phẳng $(P): 3x+y+z+1=0, (Q): 2x-3y+5z-1=0$ theo hai đường tròn có cùng bán kính bằng 2016?

A. vô số B. 2 C. 4 D. không có

BÀI TẬP 8.48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ và điểm $A(-1;3;1)$. Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. Điểm A nằm trong mặt cầu B. Điểm A nằm trên mặt cầu
C. Điểm A nằm ngoài mặt cầu D. Các kết luận trên sai

BÀI TẬP 8.49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$ và điểm $M(0;2;1)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M. Khi đó độ dài dây AB lớn nhất là:

A. 10 B. 8 C. 5 D. 25

BÀI TẬP 8.50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$ và điểm $M(0;2;1)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M. Khi đó độ dài dây AB nhỏ nhất là:

A. 10 B. 5 C. 8 D. 4

BÀI TẬP 8.51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$ và điểm $M(0;2;1)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M. Khi đó độ dài dây AB lớn nhất hơn độ dài dây AB nhỏ nhất là:

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

BÀI TẬP 8.52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$ và điểm $M(0;2;1)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M sao cho chu vi tam giác IAB bằng 18. Khẳng định nào sau đây **không đúng**?

A. Dây AB vuông góc với IM

B. Dây AB có độ dài bằng 8

C. Dây AB có độ dài lớn nhất của tất cả các dây qua điểm M của mặt cầu

D. Diện tích tam giác IAB là 12.

BÀI TẬP 8.53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$, tâm là I, và điểm $M(-2;0;4)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M và tạo với đường thẳng IM một góc 60^0. Khi đó diện tích tam giác IAB là:

A. $6\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{39}$ C. 20 D. 10

BÀI TẬP 8.54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$. Hai điểm A, B thuộc mặt cầu (S). Độ dài đoạn thẳng AB lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 5 B. 6 C. 10 D. 11

BÀI TẬP 8.55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$, tâm là I, và điểm $M(-2;0;4)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M và vuông góc với IM. Khi đó độ dài dây AB là:

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

BÀI TẬP 8.56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2+y^2+z^2=25$, tâm là I, và điểm $M(-2;0;4)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M và nhận M là trung điểm. Khi đó độ dài dây AB là:

A. 10 B. 4 C. 8 D. 6

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 8.1. Mặt cầu S có phương trình $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 6$
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.2. Dễ dàng tính được độ dài $MN = \sqrt{6}$. Suy ra phương trình của mặt cầu S là $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z = 0$.
Đáp án là D . □

GIẢI BÀI TẬP 8.3. Mặt cầu đường kính AB có tâm I là trung điểm của đoạn AB. Suy ra tọa độ của điểm I là $I(2;0;0)$.
Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{6}$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 6$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.4. Thay tọa độ điểm A, B vào các phương trình mặt cầu, ta loại trừ được các đáp án B, C, D.
Vậy phương trình măt cầu là $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.5. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R = 2$. Mặt cầu (S') có tâm I' đối xứng với I qua mặt phẳng Oxy , suy ra $I'(1;0;2)$ và có bán kính $R' = R = 2$. Vậy phương trình mặt cầu (S') là:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.6. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;-2)$, bán kính $R = 4$. Mặt cầu (S') có tâm I' đối xứng với I qua đường thẳng Oz , suy ra $I'(-3;1;-2)$ và có bán kính $R' = R = 4$. Vậy phương trình mặt cầu (S') là:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.7. Măt cầu (S) có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.
Mặt cầu đối xứng với mặt cầu S qua Oy có phương trình là $(x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.8. Tâm của mặt cầu (S) là $I(1;1;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
Diện tích mặt cầu là $S=12\pi$.
Thể tích khối cầu $V=4\pi\sqrt{3}$.
Đáp án là C . □

GIẢI BÀI TẬP 8.9. Tâm của mặt cầu (S) là $I(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$, bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Tọa độ của điểm $O(0;0;0)$ thỏa mãn phương trình mặt cầu nên O thuộc mặt cầu (S).
Khoảng cách từ I tới mặt phẳng Oxy bằng $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra mặt cầu (S) không tiếp xúc với mặt phẳng Oxy.
Đáp án là C . □

GIẢI BÀI TẬP 8.10. Điều kiên để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu là:

$$m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right..$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.11. Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu là:

$$2^2+m^2+m^2-2m-4=2m^2-2m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right..$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.12 . Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$R^2=4m^2+m+2>0.$$

Điều này đúng với mọi m.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.13 . Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-m^2)^2+y^2+(z+m)^2=m^4-1.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$m^4 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. .$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m^2; 0; -m)$. Do đó ta có:

$$I \in (P) \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. .$$

Kết hợp điều kiện ta có $m = 2$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.14. Mặt cầu có diện tích bằng 16π suy ra $R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$.
Ta có phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y-m)^2 + z^2 = m^2 + m$.
Vậy để mặt cầu (S) là mặt cầu có bán kính bằng 2 thì điều kiện là:

$$R^2 = m^2 + m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.15. Phương trình đã cho tương đương với : $(x-m)^2 + (y-1)^2 + z^2 = m^2 - m + 2$.
Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là: $m^2 - m + 2 > 0$, điều này đúng với mọi m.
Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m; 1; 0)$. Ta có:

$$d(I; (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m+1|}{\sqrt{4+1+4}} = 1 \Leftrightarrow |2m+1| = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right. .$$

Kết hợp điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.16. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 + (z-m)^2 = 3m^2 - 3.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$3m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. .$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m;m;m)$.
Ta có tam giác IAB cân đỉnh I khi và chỉ khi :

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (m-1)^2 = (m+1)^2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết hợp điều kiện ta suy ra không tồn tại m thỏa mãn.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.17. Đưa phương trình mặt cầu về dạng chính tắc:

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 + (z-m)^2 = 3m^2 - 3.$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m;m;m)$. Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là: $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$.
Tam giác IAB vuông tại A khi và chỉ khi $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = 0$.
Mặt khác ta có $\overrightarrow{AI} = (m; m-1; m-2)$, $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -2)$. Do đó ta có:

$$2.m - 2(m-1) - 2(m-2) = 0 \Leftrightarrow m + 1 - m + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m = 3$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.18. Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 + (z-1)^2 = 2m^2 - 1$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$2m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ m < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. .$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m;m;1)$. Ta có:

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}]| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do $\overrightarrow{AI} = (m-1; m; 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$, nên tính toán theo công thức ta có:

$$6m^2 - 6m + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. .$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m = 1$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.19. Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB nên bán kính R bằng một nửa độ dài đoạn AB. Ta có: $R = \frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{3}$.
Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\sqrt{3}$.
Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 8.20. Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB thì tâm I là trung điểm của đoạn AB và bán kính R bằng một nửa độ dài đoạn AB. Do đó ta có $I(2; -1; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.21. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi khoảng cách từ I tới (P) bằng bán kính mặt cầu. Suy ra ta có

$$R = \frac{|2-2-2-1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \Rightarrow R = 1.$$

Phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.22. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm I theo một đường tròn bán kính $r = 2$, khi đó ta có $R^2 = r^2 + (d(I;(P)))^2 = 4 + (d(I;(P)))^2$.
Mặt khác ta có: $d(I;(P)) = \dfrac{|2+3+4-3|}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 4 + 12 = 16$.
Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 16.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.23. Măt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm I theo một đường tròn bán kính $r = 4$, khi đó ta có $R^2 = r^2 + (d(I;(P)))^2 = 16 + (d(I;(P)))^2$.
Mặt khác ta có: $d(I;(P)) = \dfrac{|2-2-2-1|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} = 1 \Rightarrow R^2 = 16+1 = 17$.
Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 17.$$

Đáp án là D . □

GIẢI BÀI TẬP 8.24. Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có chu vi bằng $4\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 2$. Măt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm I theo một đường tròn bán kính $r = 4$, khi đó ta có $R^2 = r^2 + (d(I;(P)))^2 = 4 + (d(I;(P)))^2$.
Mặt khác ta có: $d(I;(P)) = \dfrac{|1+0-2-5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \sqrt{6} \Rightarrow R^2 = 4+6 = 10$.
Vậy phương trình của mặt cầu cần tìm là:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 10.$$

Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 8.25. Gọi trung điểm của đoạn AB là H thì ta có $IH \perp d$.
Suy ra tọa độ của điểm H có dạng $H(t; t+1; t+2)$.
Ta có $\overrightarrow{IH} = (t-3; t-1; t+4)$.
Véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\overrightarrow{u} = (1;1;1)$ Vậy ta có:

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow t-3+t-1+t+4 = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Suy ra ta có $H(0;1;2)$ và

$$R^2 = IH^2 + \frac{AB^2}{4} = 26+1 = 27 \Rightarrow R = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu là:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 27.$$

Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 8.26. Gọi tiếp điểm là H thì ta có H thuộc đường thẳng Δ và $IH \perp \Delta$.
Suy ra tọa độ của điểm H có dạng $H(1+2t;-2-t;2t)$.
Ta có $\overrightarrow{IH} = (2t-3;-t+1;2t-1)$.
Véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\overrightarrow{u}_\Delta = (2;-1;2)$. Vậy ta có:

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u}_d = 0 \Leftrightarrow 4t-6+t-1+4t-2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra ta có $H(3;-3;2)$ và $R = IH = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu là:

$$(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2 = 2.$$

Đáp án là B . □

GIẢI BÀI TẬP 8.27. Gọi phương trình mặt cầu (S) là:
$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d = 0, (R^2 = a^2+b^2+c^2-d > 0)$.
Do bốn điểm A, B, C, O thuộc mặt cầu nên thay tọa độ của các điểm đó vào phương trình mặt cầu rồi rút gọn ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 4+4a+d &= 0 \\ 4+4b+d &= 0 \\ 4+4c+d &= 0 \\ d &= 0 \end{cases}. \tag{8.1}$$

Giải hệ phương trình trên ta suy ra $a = b = c = -1, d = 0$. Vậy ta có phương trình của mặt cầu là:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 3.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.28. Gọi phương trình mặt cầu (S) là:
$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d = 0, (R^2 = a^2+b^2+c^2-d > 0)$.
Do bốn điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu nên thay tọa độ của các điểm đó vào

phương trình mặt cầu rồi rút gọn ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 3+2a-2b-2c+d &= 0 \\ 3-2a+2b-2c+d &= 0 \\ 1-2a+d &= 0 \\ 1+2b+d &= 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Giải hệ phương trình trên ta suy ra $a=b=0, c=1, d=-1$. Vậy ta có phương trình của mặt cầu là:

$$x^2+y^2+z^2+2z-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z+1)^2=2.$$

Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 8.29. Gọi phương trình mặt cầu (S) là:
$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, (R^2=a^2+b^2+c^2-d>0)$.
Do bốn điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu nên thay tọa độ của các điểm đó vào phương trình mặt cầu rồi rút gọn ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 3+2a-2b+2c+d &= 0 \\ 3-2a+2b+2c+d &= 0 \\ 1-2a+d &= 0 \\ 1+2b+d &= 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta suy ra $a=b=0, c=-1, d=-1$. Vậy ta có phương trình của mặt cầu là:

$$x^2+y^2+z^2-2z-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=2.$$

Suy ra ta có $R^2=2$.
Khi đó diện tích mặt cầu là: $S=4\pi.R^2=8\pi$.
Đáp án là C . □

GIẢI BÀI TẬP 8.30. Gọi phương trình mặt cầu (S) là:
$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, (R^2=a^2+b^2+c^2-d>0)$.

Do diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 12\pi \Rightarrow R^2 = 3$. Thay tọa độ 3 điểm A, B, C vào phương trình mặt cầu ta có hệ:

$$\begin{cases} 11 + 6a + 2b + 2c + d &= 0 \\ 11 + 2a + 6b + 2c + d &= 0 \\ 11 + 2a + 2b + 6c + d &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - d &= 3 \end{cases} \tag{8.3}$$

Giải hệ phương trình trên ta nhận được $a = b = c = -2, d = 9$.
Suy ra phương trình mặt cầu là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.31. Áp dụng công thức phương trình của mặt cầu ta có bán kính của mặt cầu là: $R = \sqrt{6}$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.32 . Ta đưa phương trình mặt cầu về dạng chính tắc:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5.$$

Do đó tâm của mặt cầu là điểm $I(1;1;0)$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.33. Ta đưa phương trình mặt cầu về dạng chính tắc:

$$(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}.$$

Do đó bán kính của mặt cầu là $R = \frac{2}{3}$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.34. Ta đưa phương trình mặt cầu về dạng chính tắc:

$$(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}.$$

Do đó tâm của mặt cầu là điểm $I(\frac{1}{3}; 0; 0)$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.35. Ta đưa phương trình mặt cầu về dạng chính tắc:

$$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=5.$$

Do đó bán kính của mặt cầu là $R=\sqrt{5}$. Diện tích của mặt cầu là $S=4\pi R^2=20\pi$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.36. Mặt cầu (S) có phương trình là: $(x+m)^2+y^2+(z-1)^2=m^2+m+1$.
Diện tích của mặt cầu là $S=4\pi R^2$. Do đó diện tích mặt cầu nhỏ nhất khi và chỉ khi R^2 nhỏ nhất.
Ta có

$$R^2=m^2+m+1=(m+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}\quad\forall m,$$

dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $m=-\frac{1}{2}$.
Vậy bán kính mặt cầu nhỏ nhất khi $m=-\frac{1}{2}$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.37. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-m^2)^2+(y-1)^2+z^2=m^4-1.$$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là:

$$m^4-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right..$$

Khi đó tâm của mặt cầu là $I(m^2;1;0)$. Do đó ta có:

$$I\in(P)\Leftrightarrow m^2+1-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta suy ra không có giá trị tham số m nào thỏa mãn bài toán.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.38. Mặt cầu (S) là mặt cầu nhận đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn lớn thì tâm của mặt cầu (S) trùng với tâm tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu.
Từ giả thiết $IA^2 = IB^2 = IC^2$ và điều kiện bốn điểm I, A, B, C đồng phẳng là $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AI} = 0$, ta suy ra điểm $I(1;2;1)$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.39. Từ giả thiết ta có bán kính mặt cầu chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có :

$$\begin{cases} AB &= \sqrt{8} \\ AC &= \sqrt{6} \\ BC &= \sqrt{2} \end{cases}.$$

Suy ra tam giác ABC vuông tại C và do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}.$$

Khi đó thể tích của khối cầu là $V = \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.
Đáp án là B . □

GIẢI BÀI TẬP 8.40. Gọi (S) là mặt cầu đã cho. I là tâm, R là bán kính mặt cầu và $R_{\Delta ABC}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt cầu có diện tích nhỏ nhất khi bán kính của nó nhỏ nhất. Do mặt cầu cắt mặt phẳng (ABC) nên ta có :

$$R^2 = (R_{\Delta ABC})^2 + (d(I,(P)))^2 \geq (R_{\Delta ABC})^2 \Rightarrow R \geq R_{\Delta ABC}.$$

Khi đó, bán kính mặt cầu nhỏ nhất khi nó là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Ta có :

$$\begin{cases} AB &= 3\sqrt{2} \\ AC &= 3\sqrt{2} \Rightarrow R = 2.AB.\sin 60^0 = \sqrt{6}. \\ BC &= 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó bán kính của mặt cầu là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay $R = \sqrt{6}$. Do đó diện tích mặt cầu là: $S = 24\pi$.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.41. Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu là

$$1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(1; m; m)$. Ta có

$$\begin{aligned} T &= IA^2 + IO^2 \\ &= 4m^2 + 2m + 6 \\ &= 4(m + \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{4} \geqslant \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $m = \dfrac{-1}{4} \in (-1; 1)$. Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \dfrac{-1}{4}$. Hay T chỉ có GTNN.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.42. Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là:
$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, (R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.
Thay tọa độ điểm A, B, C, D vào phương trình mặt cầu ta được:

$$\begin{cases} a = -4b - \dfrac{3}{2} \\ c = b \\ d = -5 - 6b \\ 0.b + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2} - 5 = 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm nên không có mặt cầu nào qua cả 4 điểm đó.
Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 8.43. Goi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ của hệ trục. Suy ra ta có:

$$d(I; (Oxy)) = d(I; (Oyz) = d(I; (Oxz) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R.$$

Hệ này có vô số nghiệm nên cố vô số mặt cầu thỏa mãn.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 8.44. Mặt cầu có diện tích bằng 1 thì bán kính là $R = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu. Từ giả thiết ta có: $|a| = |b| = |c| = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$, suy ra a, b, c có thể nhận một trong hai giá trị $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Từ đó suy ra có 8 bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn. Vậy có 8 mặt cầu thỏa mãn.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.45. Giả sử tâm của mặt cầu là $I(a;b;c)$, mặt cầu cắt cả hai mặt phẳng $(P), (Q)$ theo hai đường tròn có cùng bán kính suy ra $d(I;(P)) = d(I;(Q))$. Điều này tương đương với phương trình:

$$\frac{|a+b|}{\sqrt{2}} = \frac{|2a-b+c-1|}{\sqrt{4+1+1}} \Leftrightarrow 3(a+b)^2 = (2a-b+c-1)^2.$$

Phương trình này có vô số nghiệm nên có vô số mặt cầu.
Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 8.46. Dễ thấy tâm của mặt cầu là $I(1;1;-3)$, bán kính $R = 2$. Ta có:

$$IA = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} > R = 2.$$

Điều này chứng tỏ điểm A nằm ngoài mặt cầu.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.47. Giả sử tâm của mặt cầu là $I(a;b;c)$, mặt cầu cắt cả hai mặt phẳng $(P), (Q)$ theo hai đường tròn có cùng bán kính suy ra $d(I;(P)) = d(I;(Q))$. Điều này tương đương với phương trình:

$$\frac{|3a+b+c|}{\sqrt{11}} = \frac{|2a-3b+5c-1|}{\sqrt{38}} \Leftrightarrow 38(3a+b+c)^2 = 11(2a-3b+5c-1)^2.$$

Phương trình này có vô số nghiệm nên có vô số mặt cầu.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.48. Dễ thấy tâm của mặt cầu là $I(1;1;-3)$, bán kính $R = 5$. Ta có:

$$IA = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = \sqrt{24} < R = 5.$$

Điều này chứng tỏ điểm A nằm trong mặt cầu.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.49. Dây AB lớn nhất khi nó là đường kính qua điểm M của mặt cầu. Khi đó $AB = 2R = 10$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.50. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;0)$, bán kính $R = 5$. Ta có:

$$IM = \sqrt{4+4+1} = 3 < 5 = R.$$

Do đó điểm M nằm trong mặt cầu.
Khi đó độ dài dây AB nhỏ nhất khi nó là dây vuông góc với IM tại M. Khi đó, do M là trung điểm của AB nên $AB = 2AM$.
Tam giác IMA vuông tại M nên theo định lý Pitago ta có

$$AM = \sqrt{IA^2 - IM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow AB = 8.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.51. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;0)$, bán kính $R = 5$. Độ dài $IM = \sqrt{4+4+1} = 3$. Do đó điểm M nằm trong mặt cầu.
Khi đó độ dài dây AB nhỏ nhất khi nó là dây vuông góc với IM tại M. Khi đó, do M là trung điểm của AB nên $AB = 2AM$.
Tam giác IMA vuông tại M nên theo định lý Pitago ta có

$$AM = \sqrt{IA^2 - IM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow AB = 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là 8. Ta lại có AB lớn nhất khi nó là đường kính và như vậy giá trị lớn nhất của AB là 10.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 8.52. Bán kính mặt cầu $R = 5 = IA = IB$.
Chu vi tam giác IAB bằng 18, suy ra $AB = 18 - 5 - 5 = 8$. Suy ra B đúng.
Ta dễ dàng tính được $IM = 3, IH \perp AB$,H là trung điểm của AB và $AH = 4$.
$IH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 = IM$ mà $M \in AB$ nên $M \equiv H$ và $IM \perp AB$. Suy ra A đúng.
Khi đó AB là dây qua M có độ dài bé nhất. Suy ra C sai.
Mặt khác ta có diện tích tam giác IAB là $S = \frac{1}{2}.IM.AB = 12$. Suy ra D đúng.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.53. Mặt cầu có tâm $I(-2;0;0)$, bán kính $R=5$. Ta dễ có $IM=4<5=R$, nên điểm M nằm trong mặt cầu. Hạ $IH\perp AB$ tại H thì H là trung điểm của AB. Khi đó ta có $IH=\sin 60^0.IM=2\sqrt{3}$.
Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông IAH ta có:

$$AH=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{25-12}=\sqrt{13}\Rightarrow AB=2\sqrt{13}.$$

Vậy diện tích tam giác IAB là

$$S=\frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2\sqrt{13}=2\sqrt{39}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.54. Độ dài đoạn thẳng AB lớn nhất khi nó là đường kính của mặt cầu (S). Khi đó $AB=2R=10$.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 8.55. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;0)$, bán kính $R=5$. Ta có:

$$IM=\sqrt{0+0+16}=4<5=R.$$

Do đó điểm M nằm trong mặt cầu.
Khi đó do tam giác IAB cân đỉnh I nên dây AB vuông góc với IM khi và chỉ khi M là trung điểm của AB. Do đó $AB=2AM$.
Tam giác IMA vuông tại M nên ta có

$$AM=\sqrt{IA^2-IM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3\Rightarrow AB=6.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 8.56. Tam giác IAB cân đỉnh I nên điểm M là trung điểm của AB, suy ra $IM\perp AB$. Tam giác IMA vuông tại M nên ta có

$$AM=\sqrt{IA^2-IM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3\Rightarrow AB=6.$$

Đáp án là D. □

CHỦ ĐỀ 9
ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Vị trí tương đối của điểm và mặt cầu:** Cho điểm M và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Khi đó ta có:
   - Điểm M nằm trong mặt cầu (S) khi và chỉ khi $IM < R$.
   - Điểm M nằm trên mặt cầu hay thuộc mặt cầu (S) khi và chỉ khi $IM = R$.
   - Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi $IM > R$.
2. **Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu:** Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Khi đó ta có:
   - Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu hay nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi
   $$d(I,(P)) > R.$$
   - Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu hay có một điểm chung duy nhất với mặt cầu (S) khi và chỉ khi
   $$d(I,(P)) = R.$$
   Khi đó tiếp điểm H là chân đường vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P).

- Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn khi và chỉ khi

$$d(I,(P)) < R.$$

Khi đó tâm H của đường tròn là chân đường vuông góc của điểm I lên mặt phẳng (P) và bán kính r của đường tròn được xác định bởi công thức:

$$r^2 = R^2 - (d(I;(P)))^2.$$

3. **Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu:** Cho đường thẳng Δ và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. Khi đó ta có:

- Đường thẳng Δ không có điểm chung với mặt cầu hay nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I,\Delta) > R.$$

- Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I,\Delta) = R.$$

- Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(I,\Delta) < R.$$

Khi đó đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B thì trung điểm H của đoạn AB là chân đường vuông góc của điểm I lên đường thẳng Δ và ta có mối liên hệ:

$$R^2 = (d(I;(\Delta)))^2 + \frac{AB^2}{4}.$$

4. **Số mặt phẳng và đường thẳng tiếp xúc với một mặt cầu:**

- Số mặt phẳng đi qua điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là vô số.
- Số mặt phẳng đi qua điểm M thuộc mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 1.
- Số mặt phẳng đi qua điểm M nằm trong mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 0.

- Số mặt phẳng đi chứa đường thẳng d không có điểm chung với mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 2.
- Số mặt phẳng đi chứa đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 1.
- Số mặt phẳng đi chứa đường thẳng d cắt mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 0.
- Số đường thẳng đi qua điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là vô số.
- Số đường thẳng đi qua điểm M thuộc mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là vô số.
- Số đường thẳng đi qua điểm M nằm trong mặt cầu (S) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 0.
- Cho mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S). Số đường thẳng thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là 0.
- Cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Số đường thẳng thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là vô số.
- Cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S). Số đường thẳng thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là vô số.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

VÍ DỤ 9.1. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. Khẳng định nào sau đây là* **sai** *:*

A. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn

B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S)

C. Mặt phẳng (α) có điểm chung với mặt cầu (S)

D. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng bằng $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Ta có:
$$d(I;(\alpha)) = \frac{|-1+2+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3} = R.$$
Vậy mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 9.2. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Khẳng định nào sau đây **sai**:*

A. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn

B. Mặt phẳng (α) có điểm chung với mặt cầu (S)

C. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) là $\frac{2}{3}$

D. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S)

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(1;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có:
$$d(I;(\alpha)) = \frac{|1+2+2-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3} < R.$$
Vậy mặt phẳng (α) cắt mặt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 9.3. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$ và mặt phẳng $(P): 2x+my-2z+1=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)*

A. $m=1$ *B. $m=-1$*

C. $m=1$ hoặc $m=-1$ *D. Đáp án khác*

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(2;0;1)$, bán kính $R=1$.

Ta có điều kiện tiếp xúc là:
$$d(I;(\alpha)) = \frac{|4-2+1|}{\sqrt{2^2+m^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{8+m^2}} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 9.4. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=3$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-m=0$. Tìm tất cả các tham số m để (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.*

A. $-3 \le m \le 3$ *B. $-3 < m < 3$*

C. $m \ge 3$ *D. $m \le 3$*

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0,0,0)$, có bán kính $R=\sqrt{3}$.
Điều kiện để mặt phẳng cắt mặt cầu là:

$$d(I,(P))<R \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{3}}<\sqrt{3}.$$

Từ đó ta suy ra $-3<m<3$.
Đáp án là B. □

VÍ DỤ 9.5. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-my+z-m=0$. Tìm tất cả các tham số m để (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính là 1.*

A. $m=2$ *B.* $m=-2$ *C. Không có* m *D.* $m=\pm 2$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(1,1,1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.
Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn bán kính 1 thì điều kiện là:

$$R^2=d^2(I,(P))+1^2 \Leftrightarrow d(I,(P))=\sqrt{R^2-1} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{5+m^2}}=1 \Leftrightarrow m^2=4.$$

Từ đó ta suy ra $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 9.6. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;1)$ thuộc mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2y-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).*

A. $y+z+2=0$ *B.* $x-2y+z-4=0$
C. $x-2y-z-4=0$ *D.* $x+z-4=0$

LỜI GIẢI. Mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=6$ có tâm $I(0;1;0)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.
Do $M\in(S)$ nên mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại M, khi đó $IM\perp(P)$ nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n}_p=\overrightarrow{IM}=(1;-2;1)$.
Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$1.(x-1)-2.(y+1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+z-4=0.$$

Đáp án là B. □

Nhận xét: Ta có thể chọn đáp án đúng bằng cách loại đáp án C, D khi mà hai mặt phẳng đó không đi qua M. Sau đó ta thử điều kiện tiếp xúc ta được đáp án cần tìm là đáp án B.

VÍ DỤ 9.7. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-y-z+2=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2=0$.Tìm tất cả phương trình mặt phẳng (P) song song với (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).*

A. $x-y-z+2=0$ *hoặc* $x-y-z-4=0$

B. $x-y-z+4=0$

C. $x-y-z-2=0$ *hoặc* $x-y-z+2=0$

D. $x-y-z+2=0$ *hoặc* $x-y-z-4=0$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-1)^2+y^2+z^2=3$ nên nó có tâm $I(1;0;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
Do mặt phẳng $(P)\parallel(\alpha)$ nên ta chọn $\overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{n_\alpha}=(1,-1,-1)$.
Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng : $x-y-z+d=0, d\neq 2$.
Điều kiện để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

$$d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|1+d|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=2\\d=-4\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có $d=-4$. Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$x-y-z-4=0.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 9.8. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2,-1,3)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn tâm M là:*

A. $x-2y+2z-1=0$ *B.* $x-2y+2z-10=0$

C. $2x-y+3z-14=0$ *D. Không tồn tại*

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=5$. Ta có
$IM=\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=3<5=R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu.
Do mặt phẳng (P) cắt (S) theo đường tròn tâm M nên $IM\perp(P)$. Ta chọn

$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{IM} = (1;-2;2)$.

Phương trình của mặt phẳng (P) là :

$$1(x-2)-2(y+1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-10=0.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 9.9. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng*

$$(\alpha_1): x-y+3=0, (\alpha_2): y-z+3=0$$

và mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3$. Phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và vuông góc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) là:

A. $x+y+z-2=0$ *hoặc* $x+y+z+4=0$

B. $x+y+2z-4=0$ *hoặc* $x+y+2z-4=0$

C. $x-y+z=0$ *hoặc* $x-y+z+6=0$

D. $x+y+z+4=0$

LỜI GIẢI . Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(-1;1;-1)$, bán kính là $R=\sqrt{3}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_{\alpha_1}} = (1;-1;0)\,; \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_{\alpha_2}} = (0;1;-1)\,.$$

Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{n_{\alpha_1}}, \overrightarrow{n_{\alpha_2}}] = (1;1;1)\,.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x+y+z+d=0$.

Điều kiện tiếp xúc là:

$$d(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow \frac{|-1+1-1+d|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=4 \\ d=-2 \end{array}\right. .$$

Do đó phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là:

$$\left[\begin{array}{l} x+y+z-2=0 \\ x+y+z+4=0 \end{array}\right. .$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Sau khi tính được vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ta có thể loại các đáp án B, C. Đáp án D ta loại khi chú ý công thức khoảng cách có trị tuyệt đối nên có hai mặt phẳng thỏa mãn.

VÍ DỤ 9.10. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ và điểm $M(0;-1;1)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?*

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D. vô số*

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$, bán kính là $R=\sqrt{5}$. Ta có $MI=\sqrt{3}<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S) và như vậy không có mặt phẳng nào qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 9.11. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S).*

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D. vô số*

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$ nên có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;2;0)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_d=(1;1;1)$. Ta có $\overrightarrow{MI}=(1;-1;1)\Rightarrow[\overrightarrow{MI};\overrightarrow{u}_d]=(-2;0;2)$. Khi đó ta có:

$$d(I;d)=\frac{|[\overrightarrow{MI};\overrightarrow{u}_d]|}{|\overrightarrow{u}_d|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>R.$$

Do đó đường thẳng d không có điểm chung với mặt cầu (S). Khi đó có đúng hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Đáp án là C. □

Dạng 2: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

VÍ DỤ 9.12. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua tâm mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) là:*

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$

C. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$

LỜI GIẢI. Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d\perp(P)$ nên ta chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=\overrightarrow{n}_P=(1;1;-1)$. Mặt khác đường thẳng d đi qua tâm $I(1;2;3)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Ta có thể loại ngay hai đáp án A, C khi hai đường thẳng đó không vuông góc với mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 9.13. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2z+5=0$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases}$. Phương trình của đường thẳng đi qua tâm mặt cầu (S) và song song với đường thẳng Δ là:*

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$

C. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ D. $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$

LỜI GIẢI. Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d\parallel\Delta$ nên ta chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=\overrightarrow{u}_\Delta=(3;1;2)$. Mặt khác đường thẳng d đi qua tâm $I(1;3;1)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Ta loại ngay đáp án B, D vì các đường thẳng đó không song song với đường thẳng Δ. Đáp án C loại vì đường thẳng đó không đi qua tâm I của mặt cầu (S).

VÍ DỤ 9.14. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=6$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2m}{2}$, với m là tham số. Tìm m để đường thẳng d đi qua tâm mặt cầu (S).*

A. $m=-1$ *B.* $m=0$ *C.* $m=1$ *D. vô nghiệm* m

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;0)$. Khi đó $I\in d$ khi và chỉ khi

$$\frac{2-m}{1}=\frac{1-2}{-1}=\frac{2m}{2}\Leftrightarrow m=1.$$

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 9.15. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=7$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=1+t\\z=-2+t\end{cases}$. Phương trình của đường thẳng song song với đường thẳng Δ và cắt mặt cầu (S) theo một dây cung có độ dài lớn nhất là:*

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-2}$ *B.* $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$

C. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ *D.* $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính là $R=\sqrt{7}$.
Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d\parallel\Delta$ hay ta có thể chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=\vec{u}_\Delta=(-2;1;1)$. Mặt khác đường thẳng d cắt mặt cầu (S) theo một dây có độ dài lớn nhất khi và chỉ khi dây cung đó là đường kính của mặt cầu hay đường thẳng d đi qua tâm $I(1;2;0)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}.$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Ta loại ngay đáp án A vì đường thẳng đó không song song với Δ. Ta loại đáp án B vì đường thẳng đó trùng Δ.

VÍ DỤ 9.16. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=mt \\ y=m^2t \\ z=mt \end{cases}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ là đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S).*

A. $m=\pm 1$ *B.* $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=0 \end{array}\right.$ *C.* $m=0$ *D.* $m=-2$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$ nên (S) có tâm $I(1;0;1)$.

Điều kiện để Δ là đường thẳng là $m\neq 0$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $O(0;0;0)$ thuộc mặt cầu (S). Do đó đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi tiếp điểm là O. Khi đó Δ vuông góc với đường thẳng OI hay

$$\overrightarrow{u}_{\Delta}.\overrightarrow{OI}=0 \Leftrightarrow m+m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=0 \end{array}\right. .$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m=-2$.

Đáp án là D. □

Nhận xét: Ta loại ngay đáp án B, C vì khi $m=0$ thì đường thẳng Δ không xác định.

VÍ DỤ 9.17. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$ và điểm $M(2;0;0)$ thuộc mặt cầu (S). Trong các đường thẳng sau đường thẳng nào đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).*

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ *B.* $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

C. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ *D.* $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$. Đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M khi và chỉ d vuông góc với đường thẳng IM hay $\overrightarrow{u}_d.\overrightarrow{IM}=0$. Thử trực tiếp ta có đường thẳng thỏa mãn là:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}.$$

Đáp án là C. □

Nhận xét: Ta loại ngay đáp án B, D vì các đường thẳng không đi qua M.

VÍ DỤ 9.18. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình*
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6=0$ *và điểm $M(0;-1;3)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?*

A. 0 *B.* 1 *C.* 3 *D. vô số*

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=11$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có

$$MI=\sqrt{19}>R$$

nên điểm M nằm ngoài mặt cầu và như vậy có vô số đường thẳng qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 9.19. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=6$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+y+z-5=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?*

A. vô số *B.* 0 *C.* 2 *D.* 3

LỜI GIẢI. Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-1;-2)$, bán kính là $R=\sqrt{6}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|-6-1-2-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{6}}>R$$

nên mặt phẳng (α) không có điểm chung với mặt cầu (S). Khi đó không có đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 9.20. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=11$ và mặt phẳng $(P):x+y-3z+5=0$. Viết phương trình đường thẳng qua điểm $A(-1;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).*

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ *B.* $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ *D.* $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$

LỜI GIẢI.

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có:

$$d(I,(P))=\frac{|2+1+3+5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\sqrt{11}=R$$

nên mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi tiếp điểm là H thì H là chân đường vuông góc hạ từ I lên mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) thì H thuộc Δ.

Ta có, $\Delta\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}\parallel\overrightarrow{n_P}=(1;1;-3)$ nên ta chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=-1-3t\end{cases}.$$

Khi đó ta có $H(2+t;1+t;-1-3t)$. Cho H thuộc mặt phẳng (P) ta có:

$$2+t+1+t+3+9t+5=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow H(1;0;2).$$

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Do mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại H và đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P) nên đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H. Vậy đường thẳng d chính là đường thẳng AH. Do đó vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=\overrightarrow{AH}=(2;1;1)$ và như vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

Đáp án là A.

Nhận xét: Cách làm trên chúng ta chỉ có thể dùng khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Nên để giải quyết được các trường hợp tổng quát ta dùng cách làm thứ 2 sau đây.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Gọi d là đường thẳng cần tìm và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_d=(a;b;c)\neq\overrightarrow{0}$.

Do d thuộc mặt phẳng (P) nên ta có $\overrightarrow{n}_P.\overrightarrow{u}_d=0\Leftrightarrow a+b-3c=0,\ (1)$.

Khoảng cách từ một điểm I đến đường thẳng d là:

$$d(I;d)=\frac{\left|[\overrightarrow{u}_d;\overrightarrow{AI}]\right|}{|\overrightarrow{u}_d|}=\frac{\sqrt{(2c+2b)^2+(-2a-3c)^2+(3b-2a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Khi đó điều kiện tiếp xúc của đường thẳng d và mặt cầu (S) là:

$$\begin{aligned} & d(I;d) = R \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{(2c+2b)^2+(-2a-3c)^2+(3b-2a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{11} \\ \Leftrightarrow & (2c+2b)^2+(-2a-3c)^2+(3b-2a)^2 = 11(a^2+b^2+c^2),\ (2). \end{aligned}$$

Từ (1) ta có $b = 3c - a$ thay vào (2) ta suy ra:

$$(a-2c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2c \Rightarrow b = c.$$

Khi đó ta có $\overrightarrow{u}_d = (a;b;c) = (2c;c;c) \parallel (2;1;1)$. Do vậy ta chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $(2;1;1)$ và khi đó phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Đáp án là A. □

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 9.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. Khẳng định nào sau đây **sai**:

A. Tâm của mặt cầu là $I(2,1,1)$

B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S)

C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn

D. Mặt phẳng (α) không có điểm chung với mặt cầu (S)

BÀI TẬP 9.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y+1)^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+mz-1=0$. Khẳng định nào sau đây **đúng**:

A. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) với mọi m

B. Mặt phẳng (α) không có điểm chung với mặt cầu (S) với mọi m

C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) với mọi m

D. Mặt phẳng (α) có thể đi qua tâm mặt cầu (S)

BÀI TẬP 9.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-3+m=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. Không có m B. $m=4$ hoặc $m=-2$

C. $m=-4$ hoặc $m=2$ D. $m=4$

BÀI TẬP 9.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-3+m=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất.

A. $m=0$ B. $m=-5$ C. $m=1$ D. $m=4$

BÀI TẬP 9.5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+z-3+m=0$ và mặt cầu $(S): x^2+(y+m)^2+(z-m)^2=1$. Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn mà hình tròn tạo bởi đường tròn đó có diện tích lớn nhất.

A. $m=0$ B. $m=2$ C. $m=3$ D. $m=4$

BÀI TẬP 9.6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+my+mz+3m-2=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4z-4=0$. Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{5}$ B. $m = -\frac{1}{5}$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

BÀI TẬP 9.7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + my - m = 0$. Tìm tất cả các tham số m để (α) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

A. $m \leq 1$ B. $m \geq 1$

C. $m > 1$ hoặc $m < -1$ D. $-1 < m < 1$

BÀI TẬP 9.8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha) : 2x + my + z - m = 0$. Tìm tất cả các tham số m để (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính là 1.

A. $m = 2$ B. $m = -2$

C. Không có m D. $m = -2$ hoặc $m = 2$

BÀI TẬP 9.9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1, -1, 4)$ thuộc mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $3y - 4z + 19 = 0$ B. $3y - 4z + 5 = 0$

C. $4y + 3z - 8 = 0$ D. $4y + 3z - 13 = 0$

BÀI TẬP 9.10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S):$x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

A. $x - 2y - 2z + 5 = 0$ hoặc $x - 2y - 2z - 1 = 0$

B. $x + 2y - 2z + 5 = 0$ hoặc $x + 2y - 2z + 1 = 0$

C. $x + 2y - 2z - 5 = 0$ hoặc $x + 2y - 2z + 1 = 0$

D. $x + 2y - 2z + 5 = 0$ hoặc $x + 2y - 2z - 1 = 0$

BÀI TẬP 9.11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2 = 0$ và đường thẳng $(\Delta) : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với đường phẳng (Δ) và tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

A. $x + y - z - 2 = 0$ hoặc $x + y - z + 4 = 0$

B. $x + y - z - 2 = 0$

C. $x + y - z + 2 = 0$ hoặc $x + y - z - 4 = 0$

D. $x + y - z - 4 = 0$

BÀI TẬP 9.12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$. Phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn tâm M là:

A. $x-2y+2z-1=0$ B. $x-2y+2z-6=0$

C. $2x-y+z-1=0$ D. $x+2y-z+4=0$

BÀI TẬP 9.13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1,-1,2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$. Phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính là 4.

A. $2x+2y-z+6=0$ B. $2x-2y-z+2=0$ C. $2x+2y-z+2=0$ D. Đáp án khác

BÀI TẬP 9.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): x+y+3=0$, $(\alpha_2): y+z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=0$. Phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và vuông góc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) là:

A. $x+y+z-2=0$ hoặc $x+y+z+4=0$

B. $x-y+z-2=0$ hoặc $x-y+z+4=0$

C. $x-y+2z=0$ hoặc $x-2y+z+6=0$

D. $2x+y+z-2=0$ hoặc $x+2y+z+4=0$

BÀI TẬP 9.15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$, mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y+1=0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=10$. Phương trình mặt phẳng (β) đi qua tâm của mặt cầu, song song với đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

A. $2x-3y-12z+4=0$. B. $2x-3y-12z-4=0$.

C. $2x-3y+12z-8=0$. D. Không tồn tại.

BÀI TẬP 9.16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$. Phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai trục Ox, Oy. là:

A. $x+y+z-3=0$ hoặc $x+y+z+3=0$

B. $y-3=0$ hoặc $y+3=0$

C. $x-3=0$ hoặc $x+3=0$

D. $z-3=0$ hoặc $z+3=0$

BÀI TẬP 9.17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6=0$ và điểm $M(0;-1;1)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

BÀI TẬP 9.18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6=0$ và điểm $M(0;-1;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. 0 B. 1 C. 3 D. vô số

BÀI TẬP 9.19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

BÀI TẬP 9.20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

BÀI TẬP 9.21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$ và mặt phẳng $(P): 3x+2y-z-1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua tâm mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

A. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$ B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

C. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$

BÀI TẬP 9.22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z=0$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y-z-1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua tâm mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

A. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$ B. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

BÀI TẬP 9.23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-2+t\end{cases}$. Phương trình của đường thẳng đi qua tâm mặt cầu (S) và song song với đường thẳng Δ là:

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$

C. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$

BÀI TẬP 9.24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=6$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua tâm của mặt cầu (S) và song song với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ B. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$ D. không có đường thẳng thỏa mãn

BÀI TẬP 9.25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-t\\y=m+t\\z=-2+t\end{cases}$, với m là tham số. Tìm m để đường thẳng d đi qua tâm mặt cầu (S).

A. $m=-1$ B. $m=0$ C. $m=1$ D. vô nghiệm m

BÀI TẬP 9.26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=-2+t\end{cases}$. Phương

trình của đường thẳng song song với đường thẳng Δ và cắt mặt cầu (S) theo một dây cung có độ dài bằng 4 là:

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$ B. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$ D. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$

BÀI TẬP 9.27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=8$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-mt\\y=t\\z=-2+mt\end{cases}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ là đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $m=1$ B. $m=-1$ C. $m=0$ D. $m=-2$

BÀI TẬP 9.28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z=0$ và điểm $M(2;0;0)$ thuộc mặt cầu (S). Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$

C. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$ D. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

BÀI TẬP 9.29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(0;-1;-3)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

BÀI TẬP 9.30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z-6=0$ và điểm $M(2;-1;-3)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

BÀI TẬP 9.31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+(y-1)^2+z^2=13$ và điểm $M(2;1;-3)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

BÀI TẬP 9.32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. vô số B. 3 C. 2 D. 0

BÀI TẬP 9.33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và có đúng một điểm chung với mặt cầu (S) ?

A. vô số B. 2 C. 1 D. 0

BÀI TẬP 9.34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. vô số B. 1 C. 0 D. 3

BÀI TẬP 9.35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+1=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $M(1;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. vô số B. 1 C. 0 D. 3

BÀI TẬP 9.36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+1=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $M(-1;-2;2)$, nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. vô số B. 1 C. 0 D. 3

BÀI TẬP 9.37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $M(-1;-2;2)$, nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

BÀI TẬP 9.38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=11$. Phương trình đường thẳng đi qua M, tiếp xúc với mặt cầu (S) và vuông góc với trục Ox là:

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=-1-3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1-3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=-1-3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=-1+3t \end{cases}$

BÀI TẬP 9.39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4=0$. Cho hai đường thẳng d,k chéo nhau cùng tiếp xúc với (S). Hỏi khoảng cách giữa hai đường thẳng d,k lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 3 B. 6 C. 18 D. 9

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 9.1. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(2;1;1)$, bán kính $R=1$.
Ta có:

$$d(I;(\alpha))=\frac{|2+2+2-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1=R.$$

Vậy mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.2. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=3$.
Ta có:

$$d(I;(\alpha))=\frac{|3-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+m^2}}<1<R \quad \forall m.$$

Vậy mặt phẳng (α) cắt mặt mặt cầu (S) theo một đường tròn với mọi tham số m.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.3. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=1$.
Điều kiện để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

$$d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|m-1|}{3}=1.$$

Từ đó ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-2 \end{array}\right.$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.4. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính$R=1$.
Điều kiện để mặt phẳng (P) căt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính lớn nhất chính là bán kính của mặt cầu hay mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu. Vậy điều kiện là:

$$2-3+m=0\Leftrightarrow m=1.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.5. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-m;m)$, bán kính $R=1$.
Hình tròn có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi bán kính của nó lớn nhất. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn mà hình tròn tạo bởi nó có

diện tích lớn nhất khi và chỉ khi có bán kính lớn nhất hay khi và chỉ khi bán kính đường tròn bằng bán kính mặt cầu. Khi đó mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu. Vậy điều kiện là:

$$-m+m-3+m=0 \Leftrightarrow m=3.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.6. Mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$ có tâm $I(1;0;2)$, bán kính $R=3$.

Đường tròn có chu vi lớn nhất khi và chỉ khi bán kính của nó lớn nhất. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi lớn nhất khi và chỉ khi có bán kính lớn nhất hay khi và chỉ khi bán kính đường tròn bằng bán kính mặt cầu. Khi đóy mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu. Vậy điều kiện là:

$$1+2m+3m-2=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{5}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.7. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0,0,1)$, có bán kính $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Điều kiện để mặt phẳng (α) không có điểm chung với mặt cầu (S) là:

$$d(I,(P))>R \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}>\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2>1.$$

Từ đó ta suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right. .$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.8. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính$R=\sqrt{2}$.

Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn bán kính 1 thì điều kiện là:

$$R^2=1^2+d^2(I,(P)) \Leftrightarrow d(I,(P))=\sqrt{R^2-1} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{5+m^2}}=1 \Leftrightarrow m^2=4.$$

Từ đó ta suy ra $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.9. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=5$.
Do $M \in (S)$ nên mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại M, khi đó $IM \perp (P)$ nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n}_p = \overrightarrow{MI} = (0;3;-4)$.
Phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$3(y+1)-4(z-4)=0 \Leftrightarrow 3y-4z+19=0.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.10. Mặt cầu (S) có tâm $I(0,1,2)$, bán kính $R=1$.
Do mặt phẳng $(P) \parallel (\alpha)$ nên ta chọn $\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{n_\alpha} = (1,2,-2)$.
Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng : $x+2y-2z+d=0, d \neq -3$.
Điều kiện để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

$$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|d-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=5 \\ d=-1 \end{array}\right. .$$

Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\left[\begin{array}{l} x+2y-2z+5=0 \\ x+2y-2z-1=0 \end{array}\right. .$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.11. Mặt cầu (S) có tâm $I(1,0,0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
Do $(P) \perp (\Delta)$ nên ta có thể chọn $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{u_\Delta} = (1,1,-1)$.
Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x+y-z+d=0$
Điều kiện để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) là:

$$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|d+1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=2 \\ d=-4 \end{array}\right. .$$

Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là

$$\left[\begin{array}{l} x+y-z+2=0 \\ x+y-z-4=0 \end{array}\right. .$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.12. Mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=5$. Ta có $IM=\sqrt{6}<R=5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).
Do mặt phẳng (P) cắt (S) theo đường tròn tâm M nên $IM\perp(P)$ nên ta chọn $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{MI}=(1;2;-1)$.
Phương trình của mặt phẳng (P) là :

$$1(x-0)+2(y+1)-1(z-2)=0\Leftrightarrow x+2y-z+4=0.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.13. Phương trình của mặt cầu (S) là : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=5$.
Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r=4$ thì điều kiện là:

$$d^2(I,(P))=R^2-r^2=25-16=9=IM^2.$$

Do đó $d(I,(P))=IM$ hay M là chân đường vuông góc hạ từ I lên mặt phẳng (P).
Vậy ta có thể chọn $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{MI}=(2;2;-1)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$2(x+1)+2(y+1)-(z-2)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+6=0.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.14. Mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3$ có tâm là điểm $I(-1;-1;-1)$, bán kính là $R=\sqrt{3}$.
Ta có:

$$\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_{\alpha_1}}=(1;1;0)\,;\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_{\alpha_2}}=(0;1;1)\,.$$

Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=[\overrightarrow{n_{\alpha_1}},\overrightarrow{n_{\alpha_2}}]=(1;-1;1)\,.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x-y+z+d=0$.
Điều kiện tiếp xúc là:

$$d(I,(\alpha))=R\Leftrightarrow\frac{|-1+1-1+d|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=4\\d=-2\end{array}\right.\,.$$

Do đó phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là:

$$\left[\begin{array}{l} x-y+z-2=0 \\ x-y+z+4=0 \end{array}\right. .$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.15. Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{u}_d = (3;-2;1)$ và $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha} = (3;2;0)$. Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{u}_d, \overrightarrow{n_\alpha}] = (-2;3;12).$$

Mặt phẳng (β) đi qua tâm $I(1;2;0)$ của mặt cầu và nhận vectơ $\overrightarrow{n_\beta}(-2;3;12)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình của mặt phẳng (β) là:

$$-2(x-1)+3(y-2)+12z=0 \Leftrightarrow 2x-3y-12z+4=0.$$

Do mặt phẳng (β) chứa điểm $M(-2;0;0)$ thuộc d nên $d \subset (\beta)$. Vậy không có mặt phẳng thỏa mãn đề bài.
Đáp án là D. □

Nhận xét: Sau khi tính được vectơ pháp tuyến ta có thể loại đi ngay đáp án C. Loại đáp án B vì mặt phẳng đó không đi qua điểm I. Loại đáp án A vì đi qua điểm $M(-2;0;0)$ thuộc d.

GIẢI BÀI TẬP 9.16. Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;0)$, bán kính là $R=3$.
Ta có:

$$\overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{u_{Ox}} = (1;0;0)\,; \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_{Oy}} = (0;1;0)\,.$$

Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{n_{Ox}}, \overrightarrow{n_{Oy}}] = (0;0;1)\,.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $z+d=0$.
Điều kiện tiếp xúc là:

$$d(I,(\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|d|}{1} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=3 \\ d=-3 \end{array}\right. .$$

Do đó phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là:

$$\left[\begin{array}{l} z-3=0 \\ z+3=0 \end{array}\right. .$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.17. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=11$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có $MI=\sqrt{11}=R$ nên điểm M thuộc mặt cầu (S). Vậy có duy nhất một mặt phẳng qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.18. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=11$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có $MI=\sqrt{19}>R$ nên điểm M nằm ngoài mặt cầu. Vậy có vô số mặt phẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.19. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$ nên có tâm $I(1;0;1)$.
Đường thẳng Δ đi qua điểm $O(0;0;0)$ thuộc mặt cầu (S) và

$$\overrightarrow{u}_{\Delta}.\overrightarrow{OI}=0\Leftrightarrow 1-2+1=0.$$

Do đó đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại O. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S). *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 9.20. Mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ nên có tâm $I(1;1;1)$.
Đường thẳng Δ đi qua điểm $O(0;0;0)$ nằm trong mặt cầu (S). Do đó Δ cắt mặt cầu (S) nên không tồn tại mặt phẳng nào chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.21. Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d\perp(P)$ nên ta chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=\overrightarrow{n}_P=(3;2;-1)$. Mặt khác đường thẳng d đi qua tâm $I(1;-1;2)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.22. Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d \perp (P)$ nên ta chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{n}_P = (3;-2;-1)$. Mặt khác đường thẳng d đi qua tâm $I(1;1;2)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.23. Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d \parallel \Delta$ nên ta chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{u}_\Delta = (1;1;1)$. Mặt khác đường thẳng d đi qua tâm $I(1;2;3)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.24. Do điểm I thuộc đường thẳng d nên không tồn tại đường thẳng thỏa mãn đề bài.

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.25. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$. Khi đó $I \in d$ khi và chỉ khi

$$d: \begin{cases} 1 = 3 + m - t \\ 2 = m + t \\ 0 = -2 + t \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.26. Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính là $R = 2$.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Khi đó ta có $d \parallel \Delta$ hay ta có thể chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d = \overrightarrow{u}_\Delta = (3;2;1)$. Mặt khác đường thẳng d cắt mặt cầu (S) theo một dây có độ dài là $4 = 2R$ nên dây cung đó là đường kính của mặt cầu hay đường thẳng d đi qua tâm $I(1;1;0)$ của mặt cầu (S). Vậy phương trình của đường thẳng d là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.27. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;0;-2)$ thuộc mặt cầu (S). Do đó đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi tiếp điểm là M. Khi đó Δ vuông góc với đường thẳng IM hay

$$\vec{u}_{\Delta}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow (-m).0 + 1.(-2) + m.(-2) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.28. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;2)$. Đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M khi và chỉ d vuông góc với đường thẳng IM hay $\vec{u}_d.\overrightarrow{IM} = 0$. Thử trực tiếp ta có đường thẳng thỏa mãn là:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.29. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-1;2)$, bán kính là $R = 3$. Ta có

$$MI = 5 > R$$

nên điểm M nằm ngoài mặt cầu và như vậy có vô số đường thẳng qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.30. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2 = 20$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;-2)$, bán kính là $R = 2\sqrt{5}$. Ta có

$$MI = \sqrt{6} < R$$

nên điểm M nằm trong mặt cầu và như vậy không có đường thẳng nào đi qua điểm M và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.31. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$, bán kính là $R = \sqrt{13}$. Ta có

$$MI = \sqrt{13} = R$$

nên điểm M thuộc mặt cầu và như vậy có vô số đường thẳng đi qua điểm M và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 9.32. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$, bán kính là $R=\sqrt{6}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|0+1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}<R$$

nên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo một đường tròn. Khi đó có vô số đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.33. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=11$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|2+2-0+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}}<R$$

nên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu theo một đường tròn. Khi đó có vô số đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.34. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-2)^2+y^2+z^2=2$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;0)$, bán kính là $R=\sqrt{2}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|2+0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}>R$$

nên mặt phẳng (α) không có điểm chung với mặt cầu (S). Khi đó không có đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.35. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-2)^2+y^2+z^2=4$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;0)$, bán kính là $R=\sqrt{3}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|2+0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=R$$

nên mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S). Mặt khác ta có

$$IM=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}=R.$$

Vậy mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M. Khi đó có vô số đường thẳng đi qua M, nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.36. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-2)^2+y^2+z^2=4$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;0)$, bán kính là $R=\sqrt{3}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|2+0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=R$$

nên mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S). Mặt khác ta có

$$IM=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}>R.$$

Vậy điểm M nằm ngoài mặt cầu (S). Khi đó có đúng một đường thẳng đi qua M, nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 9.37. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=11$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;0)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có

$$d(I,(\alpha))=\frac{|4+1-0+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}<R$$

nên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Mặt khác ta có

$$IM=\sqrt{3^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{22}>R.$$

Vậy điểm M nằm ngoài mặt cầu (S). Khi đó có đúng hai đường thẳng đi qua M, nằm trong mặt phẳng (α) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 9.38. Gọi d là đường thẳng cần tìm. Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính là $R=\sqrt{11}$. Ta có:

$$IM=\sqrt{1^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}=R$$

nên điểm M thuộc mặt cầu (S). Do đó ta có đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi M là tiếp điểm hay IM vuông góc với đường thẳng d. Khi đó ta có thể chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $[\overrightarrow{IM};\overrightarrow{u}_{Ox}]=(0;1;-3)$. Vậy phương trình đường thẳng d là:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=-1-3t \end{cases}.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 9.39. Mặt cầu (S) có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$. Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;0)$, bán kính là $R=3$. Gọi HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d, k. Ta có

$$d(d,k)=HK\leq HI+IK=2R\Rightarrow d(d,k)\leq 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi HK là một đường kính của mặt cầu (S). Vậy khoảng cách lớn nhất giữa hai đường thẳng là 6.
Đáp án là B. □

CHỦ ĐỀ 10
ÔN TẬP - CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

A. MỘT SỐ VÍ DỤ

VÍ DỤ 10.1. *Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ khác vectơ $\vec{0}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai**:

A. *Góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nhỏ nhất bằng 0^0.*

B. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^o \Leftrightarrow \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

C. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0$ *khi và chỉ khi hai vectơ đó cùng phương.*

D. $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$ *đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 0^0.*

LỜI GIẢI. Góc giữa hai vectơ bằng 0^0 khi và chỉ khi hai vectơ đó cùng phương và cùng chiều.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 10.2. *Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; 2; -1)$, $\vec{x} = -4.\vec{a}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào* **sai**:

A. $\vec{x} + 4\vec{a} = \vec{0}$.

B. $\vec{x}.\vec{a} = -36$.

C. $\vec{x} = (-8; -8; 4)$.

D. $|\vec{x}| = -4|\vec{a}|$.

LỜI GIẢI. Ta có $\vec{x} = -4.\vec{a} \Rightarrow |\vec{x}| = |-4|.|\vec{a}| = 4.|\vec{a}|$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 10.3. *Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(-2;1;3)$, $C(7;-3;0)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC, đồng thời d song song với hai mặt phẳng (Oxy) và (Oxz).*

A. $x=2+t,\ y=0,\ z=1$. *B.* $x=-2+t,\ y=0,\ z=-1$.

C. $x=1+2t,\ y=0,\ z=-t$. *D.* $x=6+t,\ y=0,\ z=3$.

LỜI GIẢI. Tọa độ của điểm G là:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)=(2;0;1).$$

Mặt khác do d song song với hai mặt phẳng (Oxy) và (Oxz) nên ta suy ra d song song với trục Ox. Ta chọn $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{i}=(1;0;0)$. Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là:

$$x=2+t,\ y=0,\ z=1.$$

Đáp án là A. □

Nhận xét: Bài này ta sử dụng một kết quả quen thuộc: "*Nếu một đường thẳng cùng song song với hai mặt phẳng cắt nhau thì đường thẳng đó song song với giao tuyến của hai mặt phẳng đó*".

VÍ DỤ 10.4. *Trong không gian Oxyz, viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng sau:*

$$d_1:\ x=3+6t,\ y=1-3t,\ z=3+9t;\quad d_2:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

A. $7x+y-5z-5=0$. *B.* $7x-y-5z-5=0$.

C. $2x-y+3z-14=0$. *D.* $x+y-z-1=0$.

LỜI GIẢI. Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(3;1;3)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(6;-3;9)$; đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(0;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(2;-1;3)$. Do hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương nên hai đường thẳng đã cho đồng phẳng. Ta có:

$$\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_2}=(2;-1;3);\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;-1;-4).$$

Ta chọn:

$$\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]=(7;-1;-5).$$

Mặt khác (P) đi qua điểm $M_1(3;1;3)$ nên (P) có phương trình là:

$$7(x-3)-1(y-1)-5(z-3)=0 \Leftrightarrow 7x-y-5z-5=0.$$

Đáp án là B. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Loại đáp án A vì mặt phẳng không đi qua điểm $M_1(3;1;3)$.
Loại đáp án C vì mặt phẳng không đi qua điểm $M_2(0;0;-1)$.
Loại đáp án D vì vectơ pháp tuyến của mặt phẳng không vuông góc với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ của đường thẳng d_1.

VÍ DỤ 10.5. *Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm O,* $A(4;0;0)$, $B(0;-2;0)$, ,$C(0;0;2)$. *Phương trình của mặt cầu (S) là:*

A. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$. *B.* $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.
C. $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=24$. *D.* $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$.

LỜI GIẢI. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Ta có:

$$\begin{cases} OI^2=AI^2 \\ OI^2=BI^2 \\ OI^2=CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=(a-4)^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2=a^2+(b+2)^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(c-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \rightarrow I(2;-1;1).$$

Từ đó $R=OI=\sqrt{6}$. Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6.$$

Đáp án là A. □

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: *Loại đáp án B vì mặt cầu đó không đi qua* $O(0;0;0)$.
Loại các đáp án C, D vì các mặt cầu đó không đi qua $A(4;0;0)$.

VÍ DỤ 10.6. *Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng* $d:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z}{-1}$ *và mặt phẳng* $(P):2x-y+2z=0$. *Cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d, có bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tọa độ các điểm I là:*

A. $I_1(5;11;2)$. *B.* $I_2(3;7;1)$.
C. $I_2(3;7;1)$ *hoặc* $I_3(-3;-5;-2)$. *D.* $I_1(5;11;2)$ *hoặc* $I_4(-1;-1;-1)$.

LỜI GIẢI. Phương trình tham số của đường thẳng d là:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -t. \end{cases}$$

Ta có $I \in d \Rightarrow I(1-2t;\ 3-4t;\ -t)$.
Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên ta có:

$$d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(1-2t)-(3-4t)+2.(-t)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |2t+1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t+1=3 \\ 2t+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I(-1;-1;-1) \\ I(5;11;2). \end{array}\right.$$

Đáp án là D. □

Nhận xét: Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) nên có hai mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Từ đó loại được các đáp án A và B.

VÍ DỤ 10.7. *Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình là:*

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}, (P): 2x+y+3z-4=0.$$

Trong những khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:

A. d nằm trong mặt phẳng (P).

B. d song song với mặt phẳng (P).

C. d không vuông góc với mặt phẳng (P).

D. d cắt mặt phẳng (P).

LỜI GIẢI. Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\overrightarrow{u_d} = (2;1;3)$, đồng thời $\overrightarrow{n_P} = (2;1;3) = \overrightarrow{u_d}$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do đó đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), suy ra đường thẳng d cắt mặt phẳng (P).
Đáp án là D. □

VÍ DỤ 10.8. *Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;-4)$, $B(-3;5;2)$, $C(6;-1;-1)$. Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $M_1(1;2;-1)$. *B.* $M_2(3;0;-3)$. *C.* $M_3(1;0;-1)$. *D.* $M_4(0;0;0)$.

LỜI GIẢI. Gọi $M(x;y;z)$. Ta có:

$AM^2+BM^2+CM^2$

$=x^2+(y-2)^2+(z+4)^2+(x+3)^2+(y-5)^2+(z-2)^2+(x-6)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$

$=3\left(x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z\right)+96=3\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2\right]+78.$

Gọi $G(1;2;-1)\Rightarrow GM^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$. Do đó:

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+78.$$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi GM nhỏ nhất. Mặt khác do M thuộc mặt phẳng (Oxz) nên GM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (Oxz). Do đó: $M\equiv M_3(1;0;-1)$.

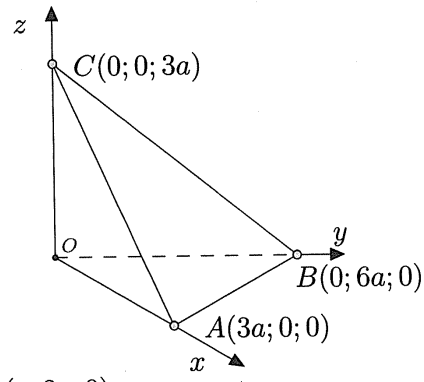
Đáp án là C. □

VÍ DỤ 10.9. *Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một góc góc với nhau và $OA=3a$, $OB=6a$, $OC=3a$. Tính khoảng cách h từ trọng tâm G của tam giác OAB đến mặt phẳng (ABC).*

A. $h=\dfrac{2a}{3}$. B. $h=\dfrac{2a}{9}$. C. $h=\dfrac{4a}{3}$. D. $h=2a$.

LỜI GIẢI

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó O là gốc tọa độ, A thuộc tia Ox, B thuộc tia Oy, C thuộc tia Oz. Ta có



$O(0;0;0),A(3a;0;0),B(0;6a;0),C(0;0;3a).$

Khi đó tọa độ của trọng tâm G của tam giác OAB là

$$G\left(\frac{x_O+x_A+x_B}{3};\frac{y_O+y_A+y_B}{3};\frac{z_O+z_A+z_B}{3}\right)=(a;2a;0).$$

Phương trình của mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{6a}+\frac{z}{3a}=1\Leftrightarrow 2x+y+2z-6a=0.$$

Từ đó suy ra khoảng cách từ G đến mặt phẳng (ABC) là:

$$h=\frac{|2.a+2a+2.0-6a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2a}{3}.$$

Đáp án là A.

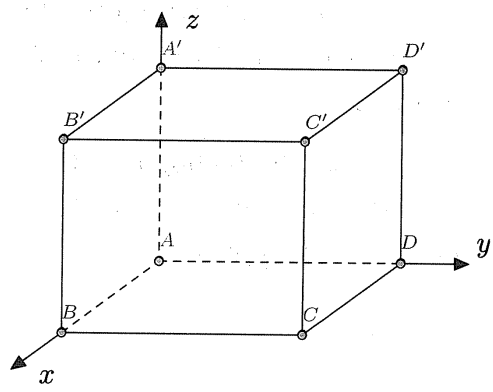
Nhận xét: Nhiều bài hình học không gian yêu cầu tính khoảng cách, thể tích, góc, ... chúng ta có thể gắn vào hình vẽ một hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc, sau đó sử dụng các công thức của hình học giải tích để giải bài toán.

VÍ DỤ 10.10. *Cho hình hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$.*

A. $h = \dfrac{3a}{7}$. *B.* $h = \dfrac{6a}{7}$. *C.* $h = \dfrac{a}{\sqrt{14}}$. *D.* $h = a$.

LỜI GIẢI

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Axyz$ như hình vẽ, trong đó A là gốc tọa độ, B thuộc tia Ax, D thuộc tia Ay, A' thuộc tia Az. Ta có



$B(a;0;0), D(0;2a;0), A'(0;0;3a), C(a;2a;0)$.

Phương trình của mặt phẳng $(A'BD)$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{3a}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-6a=0.$$

Vì hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$ song song nên ta có:

$$d((A'BD),(CB'D')) = d(C,(A'BD)) = \frac{|6.a+3.2a+2.0-6a|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6a}{7}.$$

Đáp án là B.

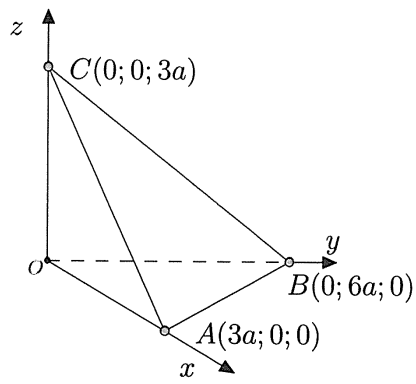
Nhận xét: Trong những hình vẽ có một góc tam diện vuông, chúng ta có thể gắn vào góc tam diện vuông đó một hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc, sau đó tìm tọa độ của các điểm có liên quan đến yêu cầu của bài toán rồi sử dụng các công thức của hình học giải tích để giải bài toán.

VÍ DỤ 10.11. *Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một góc góc với nhau và $OA = 3a$, $OB = 6a$, $OC = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OBC, OAC. Tính thể tích V của tứ diện OMNP.*

A. $V = a^3$. *B.* $V = \dfrac{4a^3}{3}$. *C.* $V = \dfrac{a^3}{3}$. *D.* $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó O là gốc tọa độ, A thuộc tia Ox, B thuộc tia Oy, C thuộc tia Oz. Ta có



$O(0;0;0), A(3a;0;0), B(0;6a;0), C(0;0;3a).$

Từ đó áp dụng công thức tìm tọa độ trọng tâm của một tam giác ta suy ra:

$$M(a;2a;0), N(0;2a;a), P(a;0;a).$$

Ta có:

$$V = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}\right| \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{OM} = (a;2a;0), \overrightarrow{ON} = (0;2a;a), \overrightarrow{OP} = (a;0;a).$$

Suy ra:

$$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right] = \left(2a^2;-a^2;2a^2\right).$$

Thay vào công thức (*) ta được

$$V = \frac{1}{6}.\left|2a^2.a - a^2.0 + 2a^2.a\right| = \frac{2a^3}{3}.$$

Đáp án là D.

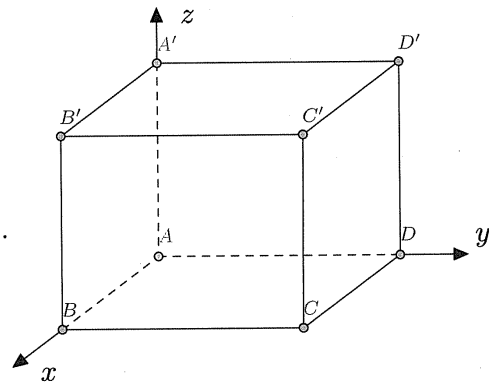
Nhận xét: Thông qua ví dụ này, một lần nữa chúng ta thấy được sự thuận lợi của việc gắn tọa độ vào hình vẽ để giải các bài toán hình học không gian.

VÍ DỤ 10.12. *Cho hình hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp (S) đi qua bốn điểm A, C, B', D'.*

A. $R = a\sqrt{14}$. *B.* $R = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. *C.* $R = \frac{3a}{2}$. *D.* $R = a\sqrt{6}$.

LỜI GIẢI

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Axyz$ như hình vẽ, trong đó A là gốc tọa độ, B thuộc tia Ax, D thuộc tia Ay, A' thuộc tia Az. Ta có



$A(0;0;0), C(a;2a;0), B'(a;0;3a), D'(0;2a;3a)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm của mặt cầu (S). Ta có:

$$\begin{cases} AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = B'I^2 \\ AI^2 = D'I^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = (x-a)^2+(y-2a)^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = (x-a)^2+y^2+(z-3a)^2 \\ x^2+y^2+z^2 = x^2+(y-2a)^2+(z-3a)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=5a \\ 2x+6z=10a \\ 4y+6z=13a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=a \\ z=\dfrac{3a}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2};a;\frac{3a}{2}\right).$$

Từ đó suy ra:

$$R = OI = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Đáp án là B.

Thủ thuật chọn nhanh đáp án: Mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, C, B', D' chính là mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Do đó (S) có một đường kính là AC'. Từ đó suy ra:

$$R = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AC^2+AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP 10.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2; z_2)$ khác vectơ $\overrightarrow{0}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:

A. Góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ lớn nhất bằng 90^0.

B. $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

C. $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ hoặc $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

D. $\dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi góc giữa $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ bằng 90^0.

BÀI TẬP 10.2. Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\overrightarrow{a} = (1; -2; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{x} = -2\overrightarrow{a}$ khi và chỉ khi

A. $|\overrightarrow{x}| = 2|\overrightarrow{a}|$. B. $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{a} = -18$.

C. $\overrightarrow{x} = (-2, 4, -4)$. D. $\overrightarrow{x}^2 = 36$.

BÀI TẬP 10.3. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(4; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 4)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**:

A. $OA = OB = OC$. B. $GA = GB = GC$.

C. $OG \perp (ABC)$. D. $OG = \dfrac{OA + OB + OC}{3}$.

BÀI TẬP 10.4. Trong không gian Oxyz, cho hình bình hành ABDC. Biết rằng $A(0; 3; 5), B(2; 1; 1), C(4; 8; 9)$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**:

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. B. $D(6; 6; 5)$.

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. D. $AD = BC$.

BÀI TẬP 10.5. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1; 2; 3), $B(x_0; 4; z_0)$. Đường thẳng AB song song với trục Oy khi và chỉ khi:

A. $x_0 = 1$. B. $x_0 = z_0 = 0$.

C. $x_0 = 1$ và $z_0 = 3$. D. $x_0 = 1$ hoặc $z_0 = 3$.

BÀI TẬP 10.6 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{1} = 1$. B. $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{3} = 1$.

C. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{3} = 1$. D. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-2} = 1$.

BÀI TẬP 10.7. Trong không gian Oxyz, lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và vuông góc với trục Oy.

A. $x-y-3=0$. B. $y=-1$.

C. $y=1$. D. $x+z-5=0$.

BÀI TẬP 10.8. Trong không gian Oxyz, lập phương trình của mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm $A(1;0;1), B(2;1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxy).

A. $x-y+1=0$. B. $x+y-1=0$.

C. $x-y-1=0$. D. $x+z-1=0$.

BÀI TẬP 10.9. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$(m^2-m)x+y-(m+2)z+m^2+m=0,$$

trong đó m là tham số. Với những giá trị nào của m thì mặt phẳng (P) song song với trục Ox.

A. $m=1$. *B.* $m=0$ hoặc $m=1$.

C. $m=0$. *D.* $m=-2$.

BÀI TẬP 10.10. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình là

$$x+y-2z=0;\ 2x+(m^2-m)y-4z+2m^2-2m-4=0,$$

trong đó m là tham số. Với những giá trị nào của m thì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song.

A. $m=-1$ hoặc $m=2$. *B.* $m=-1$.

C. $m=2$. *D.* Không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

BÀI TẬP 10.11. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình là:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1.$$

Lập phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(1;-2;4)$.

A. $z-2=0$ hoặc $z+2=0$. *B.* $z=4$.

C. $z-2=0$ hoặc $z-4=0$. *D.* $z+2=0$.

BÀI TẬP 10.12. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng:

$$(P):\ x+2y-2z+1=0;\quad (Q):\ 2x+4y-az+b=0.$$

Tìm a và b sao cho khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó bằng 1.

A. $a=4$ và $b=8$. *B.* $a=4$ và $b=8$ hoặc $b=-4$.

C. $a=-2$ và $b=38$ hoặc $b=-34$. *D.* $a=4$ và $b=38$ hoặc $b=-34$.

BÀI TẬP 10.13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0.$$

Điểm $M(m;-2;-3)$ nằm ngoài mặt cầu khi và chỉ khi:

A. $m<-3$ hoặc $m>5$. *B.* $m<-3$.

C. $m>5$. *D.* $-3\le m\le 5$.

BÀI TẬP 10.14. Trong không gian Oxyz, cho M là một điểm thay đổi trên mặt cầu (S) có tâm I (2; 2; 2), bán kính R = 2. Tập hợp những điểm M' đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ là mặt cầu (S') có phương trình là:

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$. *B.* $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=1$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=2$. *D.* $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=4$..

BÀI TẬP 10.15 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y-2z-8=0$.

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

BÀI TẬP 10.16. Trong không gian Oxyz, lập phương trình của mặt cầu (S) đi qua 3 điểm O, $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$.

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$. *B.* $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. *D.* $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$.

BÀI TẬP 10.17. Trong không gian Oxyz, Cho M là một điểm thay đổi trên mặt cầu (S) có tâm I(2, -2, 2), bán kính R = 4. Tập hợp các điểm M' thoả mãn $\overrightarrow{IM}=2.\overrightarrow{IM'}$ là:

A. Mặt cầu tâm I, bán kính R' = 8.

B. Mặt cầu (S') có phương trình: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$.

C. Mặt cầu (S') có phương trình: $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$.

D. Mặt cầu (S') có phương trình: $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$.

BÀI TẬP 10.18. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$.

A. $-x-2y-2z-6=0$. *B.* $-x-2y-2z-5=0$.

C. $x+2y+2z-3=0$. *D.* $x+2y+2z-6=0$.

BÀI TẬP 10.19. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): x + 2y + 3 z - 3 = 0. Trong những kết luận dưới đây, khẳng định nào đúng:

A. Vectơ $\overrightarrow{n_P}=(1;2;3)$ vuông góc với vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

B. Phương trình của đường thẳng d là: $1.(x-1)+2.(y+2)+3(z+3)=0$.

C. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$.

D. Cả ba khẳng định trên đều sai.

BÀI TẬP 10.20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;7;-3)$, $C(2;1;0)$. Tìm điểm D thuộc trục Oy sao cho bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

A. $D(2;0;1)$. *B.* $D(0;3;0)$.

C. $D(0;-3;0)$. *D.* Đáp án khác.

BÀI TẬP 10.21. Trong không gian Oxyz, lập phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(0;0;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x+2y+z-1=0$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-4}$.

A. $d: \dfrac{x}{9}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{-5}$. *B.* $d: \dfrac{x}{9}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{5}$.

C. $d: \dfrac{x}{9}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{-5}$. *D.* $d: \dfrac{x}{9}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-5}$.

BÀI TẬP 10.22. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(P): 2x+y+z+5=0, \quad (Q): 2x-z+3=0.$$

Phương trình tham số của đường thẳng d là:

A. $x=1+t, y=8+4t, z=3+2t$. *B.* $x=t, y=-8+4t, z=3+2t$.

C. $x=2t, y=8+4t, z=3+4t$. *D.* $x=t, y=-8-4t, z=3+2t$.

BÀI TẬP 10.23. Trong không gian Oxyz, khoảng cách từ $M(6;2;-8)$ đến trục Oy bằng:

A. 10. *B.* 2. *C.* $\sqrt{104}$. *D.* $2\sqrt{7}$.

BÀI TẬP 10.24. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $3x+4y+18=0$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. (P) và (S) có vô số điểm chung. *B.* (P) không cắt (S).

C. (P) tiếp xúc với (S). *D.* Cả ba khẳng định trên đều sai.

BÀI TẬP 10.25. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d có phương trình: $x=-t, y=1+t, z=3-t$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x+y+z-7=0$. Trong những khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng:

A. d nằm trong mặt phẳng (P).

B. d song song với mặt phẳng (P).

C. d vuông góc với mặt phẳng (P).

D. d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $H(3;-2;6)$.

BÀI TẬP 10.26. Trong không gian Oxyz, cho ba mặt phẳng:

$$(P): x-y-2z+1=0, \quad (Q): x+3my-z=0, \quad (R): mx-y+z=0.$$

Tìm m để giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R) vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m=1$.

B. $m\neq 1$.

C. $m=-1$.

D. Không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

BÀI TẬP 10.27. Trong không gian Oxyz, tìm những điểm M trên tia Oz sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P): $4x+3z+1=0$ bằng 2.

A. $M(0;0;3)$ hoặc $M\left(0;0;-\dfrac{11}{3}\right)$.

B. $M(0;0;3)$.

C. $M\left(0;0;\dfrac{49}{3}\right)$ hoặc $M\left(0;0;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. $M\left(0;0;\dfrac{49}{3}\right)$.

BÀI TẬP 10.28. Trong không gian Oxyz, cho điểm A di động trên trục Ox, điểm B di động trên mặt phẳng (P): $y+2z-2=0$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B nhỏ nhất là:

A. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. *B.* $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. *C.* $\dfrac{2}{3}$. *D.* $\dfrac{2}{5}$.

BÀI TẬP 10.29. Trong không gian $Oxyz$, Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau sau đây:

$$d_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-1}; \quad d_2 : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

A. $\frac{3}{14}$. *B.* $\frac{3}{\sqrt{14}}$. *C.* $\frac{6}{14}$. *D.* Đáp án khác.

BÀI TẬP 10.30 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, $d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P) : 2x - 2z + 1 = 0$. B. $(P) : 2y - 2z + 1 = 0$.

C. $(P) : 2x - 2y + 1 = 0$. D. $(P) : 2y - 2z - 1 = 0$.

BÀI TẬP 10.31. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(0;-2;-3), B(-4;-4;1)$, $C(2;-3;3)$. Tìm tọa độ của điểm M trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất:

A. $M_1(0;0;-1)$. *B.* $M_2(0;0;1)$. *C.* $M_3(0;-3;0)$. *D.* $M_4(1;0;-1)$.

BÀI TẬP 10.32. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;-5)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho tam giác ABC đều. Số mặt phẳng (P) thỏa mãn bài toán là:

A. 1. *B.* 2. *C.* 3. *D.* 4.

BÀI TẬP 10.33. Trong không gian Oxyz, cho điểm A di động trên mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 29 = 0$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất là:

A. $\frac{27 + 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$. *B.* 7. *C.* 11. *D.* 9.

BÀI TẬP 10.34. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(1;2;0)$, $B(2;7;-6)$, $C(1;1;1)$, $D(7;-1;-3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đồng thời cách đều cả bốn điểm A, B, C, D?

A. 0. *B.* 7. *C.* 4. *D.* Vô số.

BÀI TẬP 10.35. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y + z - 12 = 0$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng d đi qua điểm $M(1;1;8)$, nằm trong (P), đồng thời d tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. 0. *B.* 1. *C.* 2. *D.* Vô số.

BÀI TẬP 10.36. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một góc góc với nhau và $OA = 3a$, $OB = 6a$, $OC = 3a$. Tính khoảng cách h từ trọng tâm G của tam giác OAC đến mặt phẳng (ABC).

A. $h = \dfrac{2a}{3}$. B. $h = \dfrac{2a}{9}$. C. $h = \dfrac{4a}{3}$. D. $h = 2a$.

BÀI TẬP 10.37. Cho hình hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và CD' .

A. $h = \dfrac{3a}{7}$. B. $h = \dfrac{6a}{7}$. C. $h = \dfrac{a}{\sqrt{14}}$. D. $h = a$.

BÀI TẬP 10.38. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một góc góc với nhau và $OA = 3a$, $OB = 6a$, $OC = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OBC, ABC. Tính thể tích V của tứ diện OMNP.

A. $V = a^3$. B. $V = \dfrac{4a^3}{3}$. C. $V = \dfrac{2a^3}{3}$. D. $V = \dfrac{a^3}{3}$.

BÀI TẬP 10.39. Cho hình hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đô dài các cạnh $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp (S) đi qua bốn điểm A', B, C, D.

A. $R = 3a$. B. $R = \dfrac{3a}{2}$. C. $R = a\sqrt{2}$. D. $R = a$.

BÀI TẬP 10.40 (*Đề Minh họa THPTQG 2017*). Trong không gian $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1), B(m;0;0), N(0;n;0)$ và $D(1;1;1)$, với $m > 0, n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R = 1$. B. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R = \dfrac{3}{2}$. D. $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D. LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

GIẢI BÀI TẬP 10.1. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.2. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.3. Dễ thấy $O.ABC$ là hình chóp đều, các khẳng định A, B, C đều đúng, khẳng định D sai. Đẳng thức đúng là:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 10.4. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -22 \neq 0.$$

Do đó hình bình hành $ABDC$ không phải là một hình chữ nhật. Từ đó suy ra hai đường chéo của nó có độ dài không bằng nhau.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 10.5. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.6. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.7. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.8. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.9. Mặt phẳng (P) song song với trục Ox khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{i} = (1;0;0) \\ O\,(0;0;0) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Đáp án là A . □

GIẢI BÀI TẬP 10.10. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho

$$\begin{cases} 2 = k.1 \\ m^2 - m = k.1 \\ -4 = k.(-2) \\ 2m^2 - 2m - 4 \neq k.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m^2 - m = 2 \\ m^2 - m \neq 2. \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm. Vậy không tồn tại m thỏa mãn bài toán.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 10.11. Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{IA} = (0;0;1)$ là vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$1.(z-4) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10.12. Để khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) lớn hơn 0 thì trước hết hai mặt phẳng đó phải song song (nếu hai mặt phẳng trùng nhau hoặc cắt nhau thì khoảng cách giữa chúng sẽ bằng 0). Do đó ta có:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-a}{-2} \neq \frac{b}{1} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b \neq 2. \end{cases}$$

Lấy điểm $A(-1;0;0) \in (P)$. Khi đó ta có:

$$d((P),(Q)) = d(A,(Q)) = \frac{|b-2|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{|b-2|}{6} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 8 \\ b = -4. \end{array}\right.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10.13. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3), R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d} = 4$. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) khi và chỉ khi:

$$IM > R \Leftrightarrow (m-1)^2+(-2-(-2))^2+(-3-(-3))^2 > 16 \Leftrightarrow m^2-2m-15 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 5. \end{array}\right.$$

Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 10.14. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.15. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.16. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.17. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.18. Vì mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C nên vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của (α) vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Ta có:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (12; 24; 24).$$

Ta chọn: $\overrightarrow{n_\alpha} = \dfrac{1}{12}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$.
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1(x-2) + 2(y+1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Như vậy đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 10.19. Vì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P} = (1; 2; 3)$. Từ đó suy ra C là khẳng định đúng.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 10.20. Vì điểm D thuộc trục Oy nên tọa độ của điểm D có dạng $D(0; d; 0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 6; -4), \overrightarrow{AC} = (1; 0; -1).$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-6; -6; -6).$$

Ta chọn $\overrightarrow{n}_{(ABC)} = (1; 1; 1)$. Suy ra phương trình của mặt phẳng (ABC) là:

$$1.(x-1) + 1.(y-1) + 1.(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

Ta có:

$$D \in mp(ABC) \Leftrightarrow 0 + d + 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow d = 3 \Rightarrow D(0; 3; 0).$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10.21. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.22. Tọa độ các điểm thuộc d là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Đặt $x = t$, thay vào hệ trên ta được:

$$\begin{cases} x = t \\ y + z = -5 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -8 - 4t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 10.23. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy là điểm $H(0;2;0)$. Vậy khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Oy bằng $MH = 10$.
Đáp án là A. □

GIẢI BÀI TẬP 10.24. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và có bán kính là $R = 5$. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là

$$h = d(I,(P)) = \frac{|3.1 + 4.2 + 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{29}{5} > R = 5.$$

Do đó mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10.25. Do vectơ chỉ phương của đường thẳng d không vuông góc, cũng không cùng phương với vetơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nên ta suy ra các đáp án A, B và C là sai. Vậy D là đáp án đúng.
Đáp án là D. □

GIẢI BÀI TẬP 10.26. *Đáp án là A.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.27. Gọi $M(0,0,m)$ với $m \geq 0$. Ta có:

$$d(M,(P)) = \frac{|3m+1|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |3m+1| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m+1 = 10 \\ 3m+1 = -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\dfrac{11}{3}. \end{array}\right.$$

Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10.28. Ta có Ox song song với mặt phẳng (P). Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm A và B chính là khoảng cách giữa trục Ox và mặt phẳng

(P), dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AB vuông góc với (P). Mặt khác vì O thuộc Ox nên ta có:

$$d(Ox,(P)) = d(O,(P)) = \frac{|-2|}{\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm A và B nhỏ nhất bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
Đáp án là B. □

GIẢI BÀI TẬP 10.29. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.30. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.31. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.32. *Đáp án là C.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.33. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và có bán kính là $R=2$. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là

$$h = d(I,(P)) = \frac{|2.1+2.(-1)-2+29|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = 9 > R = 2.$$

Do đó mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S). Gọi K và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và I trên mặt phẳng (P). Ta có

$$d(A,(P)) = AK \geq IK + IA \geq IH + R = h + R = 9 + 2 = 11.$$

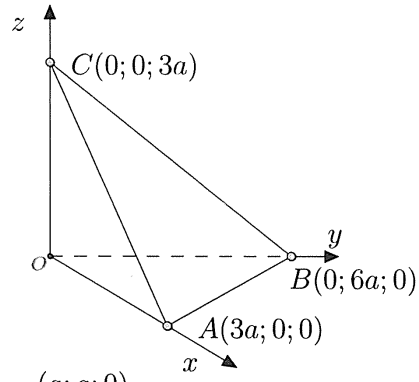
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A là giao điểm của tia đối của tia IH với mặt cầu (S). Vậy khoảng cách lớn nhất từ điểm A đến mặt phẳng (P) là 11.
Đáp án là C. □

GIẢI BÀI TẬP 10.34. *Đáp án là D.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.35. *Đáp án là B.* □

GIẢI BÀI TẬP 10.36

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Oxyz$ như hình vẽ trong đó O là gốc tọa độ, A thuộc tia Ox, B thuộc tia Oy, C thuộc tia Oz. Ta có



$O(0;0;0), A(3a;0;0), B(0;6a;0), C(0;0;3a).$

Khi đó tọa độ của trọng tâm G của tam giác OAB là

$$G\left(\frac{x_O+x_A+x_C}{3};\frac{y_O+y_A+y_C}{3};\frac{z_O+z_A+z_C}{3}\right)=(a;a;0).$$

Phương trình của mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{6a}+\frac{z}{3a}=1\Leftrightarrow 2x+y+2z-6a=0.$$

Từ đó suy ra khoảng cách từ G đến mặt phẳng (ABC) là:

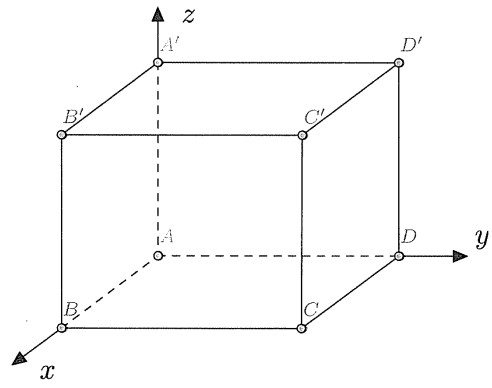
$$h=\frac{|2.a+0+2.a-6a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2a}{3}.$$

Đáp án là A.

□

GIẢI BÀI TẬP 10.37

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Axyz$ như hình vẽ trong đó A là gốc tọa độ, B thuộc tia Ax, D thuộc tia Ay, A' thuộc tia Az. Ta có



$B(a;0;0), D(0;2a;0), A'(0;0;3a), C(a;2a;0).$

Ta có CD' song song với BA', suy ra mặt phẳng $(A'BD)$ chứa BD và song song với CD'. Do đó:

$$h=h(CD',BD)=d(CD',(A'BD))=d(C,(A'BD)).$$

Phương trình của mặt phẳng $(A'BD)$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{3a}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6a=0.$$

Vì hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$ song song nên ta có:

$$d((A'BC),(CB'D'))=d(C,(A'BD))=\frac{|6.a+3.2a+2.0-6a|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{6a}{7}.$$

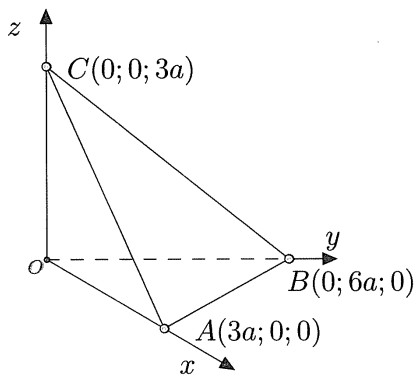
Đáp án là B.

□

GIẢI BÀI TẬP 10.38

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc Oxyz như hình vẽ trong đó O là gốc tọa độ, A thuộc tia Ox, B thuộc tia Oy, C thuộc tia Oz. Ta có

$O(0;0;0), A(3a;0;0), B(0;6a;0), C(0;0;3a).$



Từ đó áp dụng công thức tìm tọa độ trọng tâm của một tam giác ta suy ra:

$M(a;2a;0), N(0;2a;a), P(a;2a;a).$

Ta có:

$$V=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}\right| \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{OM}=(a;2a;0),\overrightarrow{ON}=(0;2a;a),\overrightarrow{OP}=(a;2a;a).$$

Suy ra:

$$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=\left(2a^2;-a^2;2a^2\right).$$

Thay vào công thức (*) ta được

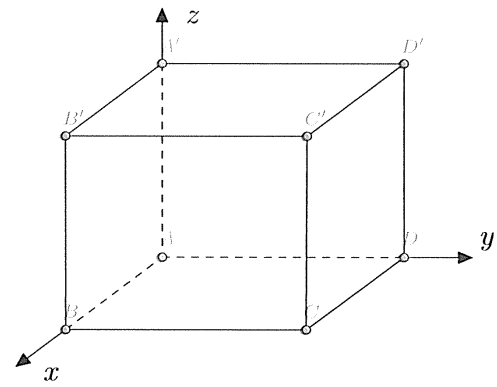
$$V=\frac{1}{6}.\left|2a^2.a-a^2.2a+2a^2.a\right|=\frac{a^3}{3}.$$

Đáp án là C.

□

GIẢI BÀI TẬP 10.39

Chọn hệ trục tọa độ Đề - các vuông góc $Axyz$ như hình vẽ trong đó A là gốc tọa độ, B thuộc tia Ax, D thuộc tia Ay, A' thuộc tia Az. Ta có



$A'(0;0;2a), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;2a;0).$

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm của mặt cầu (S). Ta có:

$$\begin{cases} A'I^2 = BI^2 \\ A'I^2 = CI^2 \\ A'I^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-2a)^2 = (x-a)^2+y^2+z^2 \\ x^2+y^2+(z-2a)^2 = (x-a)^2+(y-2a)^2+z^2 \\ x^2+y^2+(z-2a)^2 = x^2+(y-2a)^2+z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4z = 3a \\ 2x+4y-4z = a \\ y-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = a \\ z = a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2};a;a\right).$$

Từ đó suy ra:

$$R = OI = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + a^2} = \frac{3a}{2}.$$

Đáp án là B.

GIẢI BÀI TẬP 10.40. *Đáp án là A.* □

CHỦ ĐỀ 11
MỘT SỐ ĐỀ TỔNG HỢP

ĐỀ SỐ 1

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;-1;2)$, $\vec{b} = (0;1;3)$, $\vec{c} = (4;-3;7)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng**:

A. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = \left[\vec{b}, \vec{a}\right].\vec{c}$.

C. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

D. Cả ba kết luận trên đều sai.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;-2;-3)$. Phương trình mặt cầu (S) tâm là I và có bán kính $R = 3$ là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện ABCD với $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;1;-2)$. Tính thể tích V của tứ diện ABCD.

A. $V = \frac{5}{2}$. *B.* $V = \frac{5}{3}$. *C.* $V = \frac{1}{6}$. *D.* $V = \frac{5}{6}$.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(R): 2x - 2y - z - 3 = 0$ và điểm $A(3;-2;-2)$. Điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (R) là:

A. $A'(2;-1;0)$ *B.* $A'(-1;-2;0)$ *C.* $A'(-1;2;0)$ *D.* $A'(0;-1;-2)$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;1), B(0;0;3)$. Phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc Ox là:

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=10$ B. $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

C. $x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$ D. $x^2+y^2+z^2=9$

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;-1), B(0;0;3)$. Khẳng định nào sau đây sai:

A. Mặt cầu đường kính AB là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$

B. Mặt cầu đường kính AB có bán kính bằng $\sqrt{6}$

C. Mặt cầu đường kính AB có tâm là $I(1;-1;1)$

D. Diện tích mặt cầu đường kính AB là 12π

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình

$$x^2+y^2+z^2+2mx-2y+2z+m+4=0, m \text{ là một tham số.}$$

Điều kiện của m để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu là:

A. $m>2$ hoặc $m<-1$ B. $m\geq 2$ hoặc $m\leq -1$

C. $-1<m<2$ D. $-1\leq m\leq 2$

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-3;4)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z-3=0$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

A. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=36$ B. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=12$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=6$ D. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;-3;-4)$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-3=0$. Phương trình mặt cầu tâm I với cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn bán kính $r=2$ là:

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$ B. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=16$

C. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=8$ D. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=8$

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=4$ và điểm $A(-1;0;3)$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Điểm A nằm trong mặt cầu B. Điểm A nằm trên mặt cầu

C. Điểm A nằm ngoài mặt cầu D. Các kết luận trên sai.

CÂU 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+y^2+z^2=25$, tâm là I, và điểm $M(2;0;4)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M và tạo với đường thẳng IM một góc 60^0 Khi đó độ dài dây AB là:

A. $2\sqrt{21}$ B. $2\sqrt{13}$ C. $\sqrt{21}$ D. $\sqrt{13}$

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x-2y-2z-7=0$ và $(Q): 2x+3y+3z+4=0$

A. $\begin{cases} x=5-6t \\ y=2+17t \\ z=-2+13t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$

C. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{-17}=\dfrac{z}{-13}$ D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2), B(4;2;-2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM có diện tích là 6

A. $M(0;0;0)$ B. $M(4;6;2)$

C. $M(-12;-18;-6)$ D. $M(4;6;2)$ hoặc $M(-12;-18;-6)$

CÂU 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng $(P): x-my+2z+1+m=0$ và $(Q): mx+3y+2z-m=0$ vuông góc với nhau?

A. $m=-2$ B. $m=1$ C. $m=2$ D. $m=0$

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-y-z-1=0$ và ba điểm $A(1;-2;-1), B(0;-4;0), C(0;0;2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C lên mặt phẳng (α). Diện tích tam giác MNP là:

A. $S_{\Delta MNP}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *B.* $S_{\Delta MNP}=2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $S_{\Delta MNP}=\sqrt{3}$ *D.* $S_{\Delta MNP}=2\sqrt{3}$

CÂU 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu có bán kính là 2017 và tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục?

A. 1 B. 4 C. 5 D. 8

CÂU 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+7}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+9}{1} \text{ và } d_2: \frac{x+3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2.

A. $(P): -4x-5y+6z+41=0$ B. $(P): -4x-5y+6z-1=0$

C. $(P): -x-2y+z+10=0$. D. $(P): x+y-z-5=0$

CÂU 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;3;1)$, song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=3+2t \\ z=t \end{cases}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x-2y-z-3=0$.

A. $y-2z-1=0$ B. $x-y+z=0$

C. $x+y+z-6=0$ D. $x+2y+z-9=0$

CÂU 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$d_1: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+5}{3} \text{ và } d_2: \frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-3}.$$

A. Chéo nhau B. Song song C. Cắt nhau D. Trùng nhau

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-4;3;2)$. Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB. Tìm tọa độ của điểm D.

A. $D(0;\frac{5}{3};\frac{4}{3})$. B. $D\left(-1;2;-\frac{3}{2}\right)$.

C. $D(8;-1;0)$. D. Đáp án khác.

ĐỀ SỐ 2

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm cho hai điểm $A(1;7;-1)$, $B(-2;2;-6)$, $C(4;-6;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(3;-3;-9)$. B. $G(1;-1;-3)$. C. $G(-1;1;3)$. D. $G(1;1;-3)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;0;-1)$, $B\,(2;1;0)$ và $C\,(1;-2;3)$. Tính độ dài ba cạnh AB, BC và CA của tam giác.

A. $\sqrt{19};\sqrt{3};2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3};\sqrt{19};2\sqrt{5}$.
C. $2\sqrt{5};\sqrt{19};\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3};2\sqrt{5};\sqrt{19}$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;2;0)$, $A(-2;1;-3)$. Phương trình mặt cầu (S) tâm là I và đi qua A là:

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=19$ B. $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=19$
C. $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\sqrt{19}$ D. $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=13$

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oyz). Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ.

B. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oy.

C. Mặt phẳng (P) song song với trục Ox.

D. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{i}=(-1;0;0)$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q_1): x+y+z+1=0$ và $(Q_2): x-y-2z-1=0$. Mặt phẳng (P) chứa d và vuông góc với $(R): x-y+z+6=0$ thì phương trình của (P) là

A. $x-y-2z-1=0$ B. $x-y-2z-2=0$
C. $2x+y-z-2=0$ D. $x+2y+z-3=0$

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2)$, $B(-1;7;-2)$, $C(2;1;1)$. Tìm điểm D thuộc trục Oz sao cho bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

A. $D(1;2;0)$. *B.* $D(0;0;4)$.
C. $D(0;0;-2)$. *D.* Đáp án khác.

CÂU 7. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=14$. Phương trình mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua gốc tọa độ O là:

A. $(S'): (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14$ B. $(S'): (x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=14$

C. $(S'): (x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=7$ D. $(S'): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=14$

CÂU 8. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(R): 2x-y-2z-3=0$ và hai điểm $A(3;-4;-1), B(1;4;-7)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (R) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(2;-3;-5)$ *B.* $M(0;1;-2)$ *C.* $M(-2;-5;3)$ *D.* $M(-2;-3;5)$

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(2;0;1)$, $D(1;1;1)$, và $A'(1;0;2)$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng**:

A. $C'(4;1;4)$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $B'D \perp (ACD')$.

D. Không tồn tại hình lập phương thỏa mãn đề bài..

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-2)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

A. $2x+y-2z-9=0$. *B.* $2x+2y-z-9=0$.

C. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}-\dfrac{z}{2}=3$. *D.* $x+2y-2z-9=0$.

CÂU 11. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-3y-2z+5=0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau:

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=23t \end{cases}$

B. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$

C. Đường thẳng qua $A(1;4;2)$ và $B(3;-2;-2)$

D. Giao tuyến của $(Q): 4x+2y-z+1=0$ và $(R): x-y-2=0$.

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. Hai điểm A, B thuộc mặt cầu (S). Độ dài đoạn thẳng AB lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 13 B. 9 C. 4 D. 2

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ và hai điểm $A(-1;3;1), B(-3;m;0)$. Tìm tất cả các tham số m để đoạn thẳng AB cắt mặt cầu (S).

A. $m>0$ B. $m\leq 0$ C. $m\geq 0$ D. $\forall\, m$

CÂU 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;2), B(2;-1;0)$ và phương trình $x^2+y^2+z^2+2mx+2my+2mz+3=0$ với tham số m. Tìm tất cả các tham số m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu có tâm I và tam giác IAB vuông đỉnh A.

A. $m=3$ B. $m=-3$

C. $m=-\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$ D. Không tồn tại m

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình

$$x^2+y^2+z^2+2mx-2y+m+1=0, m \text{ là một tham số.}$$

Điều kiện của tham số m để phương trình đã cho là phương trình một mặt cầu có diện tích bằng 16π:

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{65}}{2}$ B. $m=-1$ hoặc $m=2$

C. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ D. $m=-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

CÂU 16. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$. Mặt phẳng nào sau đây đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với d

A. Mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng $(P): x+2y-z+3=0$.

B. $y+2z=0$

C. Mặt phẳng qua O và hai điểm $A(-1;1;-1), B(1;2;-1)$.

D. Mặt phẳng qua O, vuông góc $(Q): x+2y-z+3=0, (R): x-y-z-3=0$.

CÂU 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ của hệ trục và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x+y+1=0$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

CÂU 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=3-2t\\z=3+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-9=0$. Giao điểm của d và (P) là:

A. $A(0;1;4)$ B. $A(-1;3;3)$ C. $A(-2;5;2)$ D. $A(1;1;2)$

CÂU 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -1 - mt' \\ z = 3 + 4t' \end{cases}.$$

Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. $m = 0$ D. $m \neq 0$

CÂU 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;0)$, $N(-2;0;0)$ và mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 2y + z + 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (β) đi qua hai điểm M, N và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

A. $2x + 3y - 12z + 4 = 0$. *B.* $2x + 3y - 12z - 4 = 0$.

C. $2x + 3y + 12z - 8 = 0$. *D.* $z = 0$.

ĐỀ SỐ 3

CÂU 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(1;0;-1)$, $B(0;-1;3)$, $C(3;2;-5)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\overrightarrow{n}=(1;-1;0)$. B. $\overrightarrow{n}=(1;1;0)$. C. $\overrightarrow{n}=(4;4;0)$. D. $\overrightarrow{n}=(1;1;-4)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ

$$\overrightarrow{a}=(1;2;-3),\ \overrightarrow{b}=(-m;1+2m;1).$$

Với những giá trị nào của m thì hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ vuông góc.

A. $m=\dfrac{1}{3}$. B. $m=\dfrac{1}{2}$. C. $m=-1$ D. $m=0$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;6;-2)$, $C(2;0;1)$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống đường thẳng BC. Tính độ dài của đoạn thẳng AH.

A. $AH=2\sqrt{2}$. B. $AH=\sqrt{2}$. C. $AH=1$. D. $AH=2$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(2;-1;3)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{v}(3;2;-1)$

A. $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ B. $\Delta:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$

C. $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+2t\\z=3-t\end{cases}$ D. $\Delta:\begin{cases}x=2+2t\\y=1-2t\\z=-1+3t\end{cases}$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;1)$, $B(0;0;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=12$ B. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$

C. $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z=0$ D. $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z=0$

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-1;2;1)$, $B(-1;1;0)$ và $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ đỉnh D?

A. $(-1;-1;1)$ B. $(-1;1;3)$ C. $(-1;-2;-3)$ D. $(1;1;1)$

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(0;4;0), C(0;2;1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$. Tìm trên d điểm D có hoành độ dương sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{19}{6}$.

A. $D(1;-1;-2)$ B. $D(3;0;-5)$

C. $D\left(-18;-\dfrac{21}{2};\dfrac{47}{4}\right)$ D. $D(21;20;-19)$

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$ và đi qua điểm $M(1;-2;3)$ có phương trình là:

A. $(P): x-y-3=0$ B. $(P): 4x+2y-3z+1=0$

C. $(P): x-y+z-1=0$ D. $(P): 4x+2y-3z+9=0$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+z-3=0$ và hai điểm $A(0;1;-1), B(1;-1;-2)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B lên mặt phẳng (α). Góc giữa đường thẳng MN và đường thẳng AB là.

A. 30^0 *B.* 60^0 *C.* 90^0 *D.* 120^0

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-4=0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có diện tích bằng 6π là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$ B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=7$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3$ D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=15$

CÂU 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z=0$ và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = -mt \\ y = m^2t \\ z = mt \end{cases}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để Δ là đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $m = \pm 1$ B. $m=-2$ hoặc $m=0$

C. $m=0$ D. $m=-2$

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-3+m-1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+1)^2=1$. Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $m=3$ B. $m=5$ hoặc $m=-1$

C. $m=-3$ hoặc $m=3$ D. $m=5$

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(1;1;0)$, $D(1;5;0)$, và $A'(1;1;6)$. Gọi I là tâm của hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**:

A. $C'(3;7;6)$.

B. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{ID'}=\overrightarrow{0}$.

C. $AC'=A'C=BD'=B'D$.

D. $AC\perp B'D'$.

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+z-3-m=0$ và mặt cầu $(S): x^2+(y-m)^2+(z+m)^2=1$. Tìm tất cả các tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích lớn nhất.

A. $m=0$ B. $m=-2$ C. $m=-3$ D. $m=-4$

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt cầu cắt cả hai mặt phẳng $(P): 2x+y+z=0, (Q): 2x-3y+z-1=0$ theo hai đường tròn có cùng bán kính?

A. vô số B. 2 C. 1 D. không có

CÂU 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=25$ và điểm $M(0;2;-2)$. Dây AB của mặt cầu đi qua điểm M. Khi đó độ dài dây AB nhỏ nhất là:

A. 8 B. 10 C. 2 D. 4

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-2;-3), B(4;-1;-3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$. Tìm trên d, điểm M sao cho tam giác ABM vuông tại M.

A. $M(3;-2;-3)$ B. $M(2;0;-4)$

C. $M\left(\dfrac{25}{7};-\dfrac{22}{7};-\dfrac{4}{7}\right)$ D. $M(2;0;-4)$ hoặc $M\left(\dfrac{25}{7};-\dfrac{22}{7};-\dfrac{4}{7}\right)$

CÂU 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$ và hai điểm $A(-1;-3;-1), B(-3;-2;0)$. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. Điểm A nằm trong mặt cầu

B. Đoạn AB không có điểm chung với mặt cầu

C. Điểm B nằm ngoài mặt cầu

D. Đoạn AB có điểm chung với mặt cầu

CÂU 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng $(\alpha): x+2y+z-3=0$ và điểm $A(1;0;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).

$A.\ x+2y+z=0$ $B.\ x+2y-z=0$

$C.\ x-2y+z=0$ $D.\ x+2y+z=1$

CÂU 20. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn đi qua điểm $M(2;1;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện OABC là:

$A.\ 6.$ $B.\ 9.$ $C.\ 27.$ $D.\ 54.$

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 1

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**C**	**B**	**D**	**C**	**D**	**D**	**A**	**B**	**B**	**C**
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	**B**	**C**	**D**	**C**	**C**	**D**	**A**	**A**	**D**	**A**

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 2

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**D**	**B**	**A**	**D**	**A**	**B**	**D**	**B**	**D**	**A**
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	**C**	**C**	**D**	**B**	**C**	**C**	**C**	**A**	**B**	**A**

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 3

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**A**	**A**	**B**	**C**	**B**	**B**	**B**	**D**	**A**	**B**
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	**D**	**B**	**D**	**C**	**A**	**A**	**D**	**B**	**A**	**B**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập - Chế bản: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011;
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập xuất bản : Phan Hải Như
Biên tập chuyên ngành : Phan Hải Như
Sửa bài : Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm
Chế bản : Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm
Trình bày bìa : Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm
Đối tác liên kết xuất bản : Công ty TNHH Dịch vụ văn hóa Sư Phạm.

SÁCH LIÊN KẾT

Phương pháp siêu tốc giải trắc nghiệm môn Toán chuyên đề Hình học giải tích trong không gian

---

Mã số: 1L-103PT2017
In 2.000 cuốn, khổ 19 x 26,5cm tại Công ty CP in Ngọc Trâm
Số xuất bản: 626-2017/CXB,IPH/11-124/ĐHQGHN, ngày 07/03/2017
Quyết định xuất bản số: 134LK-TN QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 10/03/2017
In xong và nộp lưu chiểu năm 2017.