

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 10/3/2026

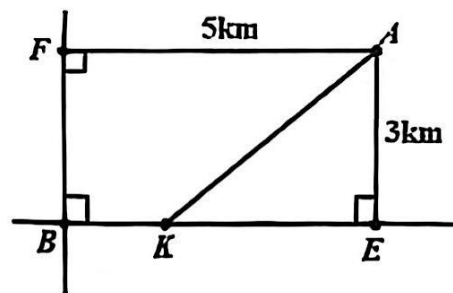
(Đề thi có 02 trang, 05 câu)

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,00 điểm)

a) Trong mặt phẳng Oxy , đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (m là tham số) có 2 điểm cực trị A, B . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam giác OAB là tam giác vuông cân.

b) Từ xã A đến xã B chỉ có 2 con đường AFB hoặc AEB (với $AFBE$ là hình chữ nhật như hình vẽ) và các đoạn đường AF, AE có độ dài lần lượt là 5km và 3km. Người ta muốn xây một con đường mới từ xã A đến xã B bằng cách như sau: chọn một vị trí K trên đoạn đường BE , xây con đường mới đi thẳng từ vị trí điểm K đến xã A rồi sau đó nâng cấp đoạn đường từ xã B đến K để đưa vào sử dụng. Hỏi vị trí điểm K cách xã B bao nhiêu km để chi phí xây con đường BKA thấp nhất? Biết rằng chi phí xây mỗi km đường mới gấp $\frac{5}{4}$ lần chi phí nâng cấp 1km đường cũ.



Câu 2. (4,00 điểm)

a) Giải phương trình $(3x - 1)\sqrt{3x - 2} = 7x^2 - 13x + 8$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1) = 3\sqrt{9 + y^2} + 3y \\ (x^2y - 1)\sqrt{x^2y + xy - 5} + 3x^2y = 7x^2 - 4x + 8. \end{cases}$$

Câu 3. (4,00 điểm)

a) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{36}$ nội tiếp đường tròn $(O; \sqrt{2})$. Chọn ba điểm bất kì từ 36 đỉnh của đa giác đều trên. Tính xác suất để ba điểm đó là ba đỉnh của một tam giác vuông có diện tích bằng một số nguyên.

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, E lần lượt là trung điểm của AB, BC . Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SED) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính thể tích khối chóp $G.AHED$.

Câu 4. (4,00 điểm)

a) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE, CF . Gọi K là trực tâm tam giác AEF . Biết $\widehat{BKC} = 90^\circ$, $BC = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AK .

b) Từ tập $X = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 100\}$, có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên bộ ba số $(a; b; c)$ sao cho đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 - 2bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có đỉnh không trùng với điểm A ?

Câu 5. (4,00 điểm)

a) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 11$ và $u_{n+1} + 15n + 1 = 4u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xác định công thức tổng quát của (u_n) và tìm tất cả giá trị n để u_n là một số chính phương.

b) Trường của Hoàng có tất cả là n lớp. Lớp đông nhất trường có M học sinh. Hôm nay, lớp Hoàng có giờ học ngoại khóa với chủ đề “Thống Kê và Tính Toán”. Nhóm trưởng nhóm của Hoàng phân công các bạn làm việc như sau:

- Hoàng lập dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ là số học sinh từng lớp trong trường.
- Hùng lập dãy số $b_1; b_2; \dots; b_M$ với b_i là số lượng các lớp trong trường mà số học sinh trong mỗi lớp đó không ít hơn i học sinh.
- Sơn tính giá trị S là tổng lập phương mọi số mà Hoàng lập được.
- An tính giá trị A là tổng tất cả giá trị b_i mà Hùng lập được.
- Bình tính giá trị B là tổng tất cả giá trị $i.b_i$.
- Chi tính giá trị C là tổng tất cả giá trị $i^2.b_i$.

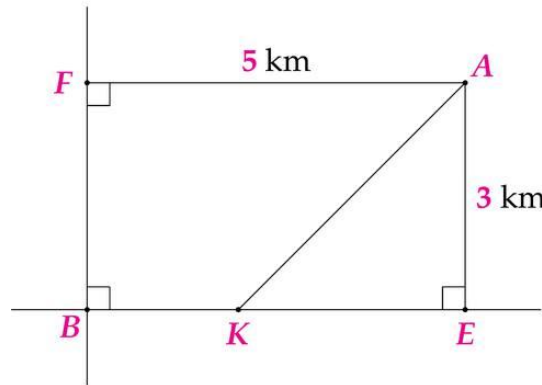
Chứng minh rằng: $S = A - 3B + 3C$.

--- HẾT ---

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH THPT – GDTX TỈNH ĐẮK LẮK NĂM HỌC 2025 – 2026

Câu 1 (4,00 điểm).

- a) Trong mặt phẳng Oxy , đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (m là tham số) có 2 điểm cực trị A, B . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam giác OAB là tam giác vuông cân.
- b) Từ xã A đến xã B chỉ có 2 con đường AFB hoặc AEB (với $AFBE$ là hình chữ nhật như hình vẽ) và các đoạn đường AF, AE có độ dài lần lượt là 5 km và 3 km. Người ta muốn xây một con đường mới từ xã A đến xã B bằng cách như sau: chọn một vị trí K trên đoạn đường BE , xây con đường mới đi thẳng từ vị trí điểm K đến xã A rồi sau đó nâng cấp đoạn đường từ xã B đến K để đưa vào sử dụng. Hỏi vị trí điểm K cách xã B bao nhiêu km để chi phí xây con đường BKA thấp nhất? Biết rằng chi phí xây mỗi km đường mới gấp $\frac{5}{4}$ lần chi phí nâng cấp 1 km đường cũ.



Lời giải

- a) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m. \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B thì phương trình $y' = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt, tức là $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, tọa độ 2 điểm cực trị là: $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$.

Ta thấy $A \in Oy$ và $B \in Ox$, do đó tam giác OAB luôn vuông tại gốc tọa độ O .

Để tam giác OAB vuông cân tại O thì $OA = OB$.

$$|4m^3| = |2m| \Leftrightarrow 2|m|^3 = |m|.$$

Vì $m \neq 0$ nên chia hai vế cho $|m|$ ta được:

$$2m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Đặt $EK = x$ (km), điều kiện $0 \leq x \leq 5$. Suy ra $BK = BE - EK = 5 - x$ (km).

Quãng đường mới xây đi thẳng từ K đến A là cạnh huyền của tam giác vuông AEK :

$$AK = \sqrt{AE^2 + EK^2} = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Gọi chi phí nâng cấp 1 km đường cũ là C , suy ra chi phí xây 1 km đường mới là $\frac{5}{4}C$.

Tổng chi phí xây dựng và nâng cấp là:

$$f(x) = \frac{5}{4}C \cdot AK + C \cdot BK = C \left(\frac{5}{4}\sqrt{x^2 + 9} + 5 - x \right).$$

Để chi phí thấp nhất, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \frac{5}{4}\sqrt{x^2 + 9} - x$ trên đoạn $[0; 5]$.

Ta có $g'(x) = \frac{5x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - 1 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2 + 9}$.

Vì $x \geq 0$, bình phương 2 vế ta được:

$$25x^2 = 16(x^2 + 9) \Leftrightarrow 9x^2 = 144 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Lập bảng biến thiên

x	0	4	5
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$\frac{15}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5\sqrt{34} - 20}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 4$.

Khi $x = 4$, vị trí điểm K cách xã B một khoảng là $BK = 5 - 4 = 1$ (km).

Vậy vị trí điểm K cách xã B 1 km.

Câu 2 (4,00 điểm).

a) Giải phương trình $(3x - 1)\sqrt{3x - 2} = 7x^2 - 13x + 8$.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1) = 3\sqrt{9 + y^2} + 3y \\ (x^2y - 1)\sqrt{x^2y + xy - 5} + 3x^2y = 7x^2 - 4x + 8. \end{cases}$$

Lời giải

a) Điều kiện: $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} & [(3x - 1)\sqrt{3x - 2} - x(3x - 1)] = 7x^2 - 13x + 8 - 3x^2 + x \\ \Leftrightarrow & (3x - 1) \cdot \frac{3x - 2 - x^2}{\sqrt{3x - 2} + x} = 4(x^2 - 3x + 2) \\ \Leftrightarrow & (3x - 1)(\sqrt{3x - 2} - x) = 4x^2 - 12x + 8 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(3x-1)(x^2-3x+2)}{\sqrt{3x-2}+x} - 4(x^2-3x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2) \left[4 + \frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}+x} \right] = 0.$$

Với $x \geq \frac{2}{3}$ ta có $3x-1 > 0$, $\sqrt{3x-2} \geq 0$ nên biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương.

Do đó: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

b) Xét phương trình thứ nhất của hệ: $xy^2(\sqrt{x^2+1}+1) = 3(\sqrt{y^2+9}+y)$. (1)

Dễ thấy $\sqrt{y^2+9} > \sqrt{y^2} = |y| \geq -y$, nên vế phải luôn lớn hơn 0, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Do đó vế trái dương, suy ra $x > 0$ và $y \neq 0$.

Chia 2 vế của (1) cho $y^2 > 0$:

$$x(\sqrt{x^2+1}+1) = \frac{3}{y^2}(\sqrt{y^2+9}+y).$$

Vì $x > 0$ nên $x(\sqrt{x^2+1}+1) > 0$, mà $\sqrt{y^2+9}+y > 0$ nên bắt buộc $y > 0$.

Với $y > 0$, ta có:

$$x(\sqrt{x^2+1}+1) = \frac{3}{y} \left(\sqrt{1+\frac{9}{y^2}}+1 \right). \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t(\sqrt{t^2+1}+1)$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{t^2+1}+1 + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t > 0$, suy ra hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (2) có dạng $f(x) = f\left(\frac{3}{y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{y} \Leftrightarrow xy = 3$.

Thay $xy = 3$ vào phương trình thứ hai của hệ:

$$(x \cdot 3 - 1)\sqrt{x \cdot 3 + 3 - 5} + 3 \cdot x \cdot 3 = 7x^2 - 4x + 8 \Leftrightarrow (3x - 1)\sqrt{3x - 2} = 7x^2 - 13x + 8.$$

Đây chính là phương trình ở câu a), cho ta nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

☑ Với $x = 1 \Rightarrow y = 3$ (thỏa mãn $y > 0$).

☑ Với $x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn $y > 0$).

Vậy hệ có các nghiệm $(x; y)$ là $(1; 3)$ và $\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 3 (4,00 điểm).

a) Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{36}$ nội tiếp đường tròn $(O; \sqrt{2})$. Chọn ba điểm bất kì từ 36 đỉnh của đa giác đều trên. Tính xác suất để ba điểm đó là ba đỉnh của một tam giác vuông có diện tích bằng một số nguyên.

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, E lần lượt là trung điểm của AB, BC . Khoảng cách

từ điểm H đến mặt phẳng (SED) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính thể tích khối chóp $G.AHED$.

Lời giải

a) Không gian mẫu: Chọn 3 đỉnh bất kỳ từ 36 đỉnh là $n(\Omega) = C_{36}^3 = 7140$.

Để 3 đỉnh tạo thành một tam giác vuông nội tiếp đường tròn thì tam giác đó phải nhận 1 trong 18 đường kính của đa giác làm cạnh huyền.

Giả sử cạnh huyền là $BC = 2R = 2\sqrt{2}$.

Chọn 1 điểm A khác B, C trong 34 điểm còn lại.

Diện tích tam giác vuông là $S = \frac{1}{2}BC \cdot h = h\sqrt{2}$, với h là khoảng cách từ A đến BC .

Mỗi cung nhỏ chắn giữa 2 đỉnh kề nhau có số đo 10° .

Khoảng cách $h = R \sin(k \cdot 10^\circ) = \sqrt{2} \sin(10^\circ \cdot k)$, với $k \in \{1, 2, \dots, 17\}$.

Khi đó $S = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(10^\circ \cdot k) = 2 \sin(10^\circ \cdot k)$.

Để S là số nguyên, mà $0 < 2 \sin(10^\circ \cdot k) \leq 2$, nên $S \in \{1; 2\}$.

☑ Trường hợp 1: $S = 1 \Leftrightarrow \sin(10^\circ \cdot k) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^\circ \cdot k \in \{30^\circ, 150^\circ\} \Leftrightarrow k \in \{3, 15\}$.

Ứng với mỗi đường kính, có 4 điểm A thỏa mãn.

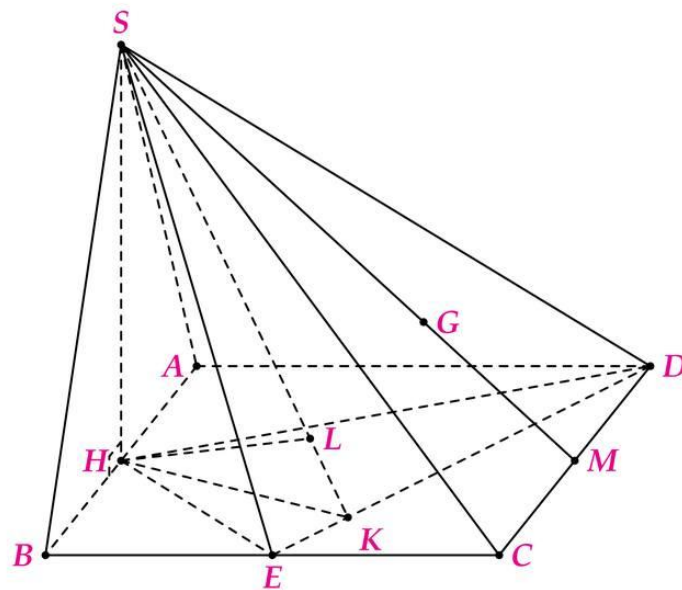
☑ Trường hợp 2: $S = 2 \Leftrightarrow \sin(10^\circ \cdot k) = 1 \Leftrightarrow 10^\circ \cdot k = 90^\circ \Leftrightarrow k = 9$.

Ứng với mỗi đường kính, có 2 điểm A thỏa mãn.

Số tam giác vuông có diện tích nguyên là: $18 \times (4 + 2) = 108$ tam giác.

Xác suất cần tìm là: $P = \frac{108}{7140} = \frac{9}{595}$.

b)



Do $\triangle SAB$ cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên đường cao của chóp chính là SH . Đặt $SH = h$.

Kẻ $HK \perp ED$ tại K , kẻ $HL \perp SK$ tại L . Khi đó $HL \perp (SED) \Rightarrow d(H, (SED)) = HL = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Khoảng cách từ trung điểm H của AB đến đường thẳng ED trong hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$ là $HK = \frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Trong tam giác vuông SHK :

$$\frac{1}{HL^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a\sqrt{6}/2)^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(3a/\sqrt{5})^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3a^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{5}{9a^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{9a^2} \Rightarrow h = 3a.$$

Khoảng cách từ trọng tâm G của $\triangle SCD$ xuống đáy là $d(G, (ABCD)) = \frac{1}{3}SH = a$.

Diện tích đa giác $AHED$ là:

$$S_{AHED} = S_{ABCD} - S_{HBE} - S_{CDE} = (2a)^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{5a^2}{2}.$$

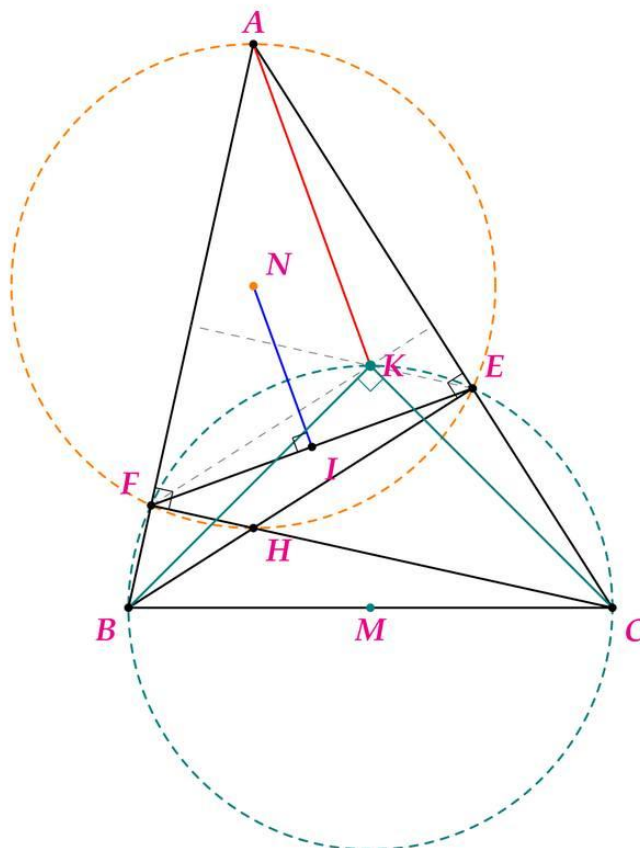
$$\text{Thể tích: } V_{G.AHED} = \frac{1}{3} \cdot d(G, (ABCD)) \cdot S_{AHED} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{5a^2}{2} = \frac{5a^3}{6}.$$

Câu 4 (4,00 điểm).

- a) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE, CF . Gọi K là trực tâm tam giác AEF . Biết $\widehat{BKC} = 90^\circ$, $BC = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AK .
- b) Từ tập $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 100\}$, có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên bộ ba số $(a; b; c)$ sao cho đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 - 2bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có đỉnh không trùng với điểm A ?

Lời giải

a)



Chứng minh K cùng nằm trên đường tròn với B, C, E, F .

Ta có các đường cao BE, CF của $\triangle ABC$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$.

Suy ra 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn tâm M (trung điểm BC), đường kính $BC = 8$. Bán kính đường tròn này là 4 cm.

Mặt khác, giả thiết cho $\widehat{BKC} = 90^\circ$, suy ra điểm K cũng nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC .

Như vậy, 3 điểm E, F, K cùng nằm trên đường tròn (M) có bán kính bằng 4.

Mặt khác đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ đối xứng với đường tròn ngoại tiếp $\triangle KEF$ qua EF nên bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle EFK$ là 4 cm.

Tìm góc $\widehat{BAC}$.

Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g.g).

Mặt khác $\frac{AE}{AB} = \cos \widehat{BAC}$ nên tỉ số đồng dạng của 2 tam giác này là $k = \cos \widehat{BAC}$.

Dẫn đến $R' = R \cdot \cos \widehat{BAC}$ (với R và R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle AEF$).

Áp dụng định lý sin cho $\triangle ABC$: $2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{4}{\sin \widehat{BAC}}$.

Thay vào biểu thức trên: $4 = \left(\frac{4}{\sin \widehat{BAC}} \right) \cdot \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow \cot \widehat{BAC} = 1 \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ$.

Tính độ dài AK .

Trong $\triangle AEF$, ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R' = 4$ và góc $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

Áp dụng định lý Sin cho $\triangle AEF$: $EF = 2R' \sin \widehat{BAC} = 2 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$.

Gọi N là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$, I là trung điểm cạnh EF .

Theo tính chất đường thẳng Euler, khoảng cách từ đỉnh đến trục tâm gấp đôi khoảng cách từ tâm ngoại tiếp đến cạnh đối diện: $AK = 2 \cdot NI$.

Trong tam giác vuông NIF (vuông tại I):

$$NI = \sqrt{NF^2 - IF^2} = \sqrt{(R')^2 - \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$$

Vậy độ dài đoạn thẳng $AK = 2 \cdot NI = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.

b) Đồ thị hàm số đi qua $A(1;0)$ suy ra $a \cdot 1^2 - 2b \cdot 1 + c = 0 \Leftrightarrow a + c = 2b$.

Đồ thị là parabol của hàm số bậc hai nên $a \neq 0$.

Tọa độ đỉnh không trùng với A suy ra $\frac{b}{a} \neq 1 \Rightarrow a \neq b$, dẫn đến $a \neq c$.

Vậy ta cần chọn bộ 3 số (a, b, c) từ X sao cho $a + c = 2b$, $a \neq c$ và $a \neq 0$.

Điều kiện $a + c = 2b$ đồng nghĩa với việc a và c phải cùng tính chẵn lẻ. Ứng với mỗi cách chọn (a, c) thỏa mãn, có duy nhất một giá trị $b = \frac{a+c}{2} \in X$.

Trong tập X có 51 số chẵn (từ 0 đến 100) và 50 số lẻ (từ 1 đến 99).

☑ Trường hợp 1: a và c cùng chẵn.

Chọn $a \in X$ là số chẵn khác 0: có 50 cách.

Chọn $c \in X$ là số chẵn khác a : có $51 - 1 = 50$ cách.

Số cách chọn bộ (a, c) trong trường hợp này là: $50 \times 50 = 2500$ cách.

☑ Trường hợp 2: a và c cùng lẻ.

Chọn $a \in X$ là số lẻ: có 50 cách (do không chứa 0).

Chọn $c \in X$ là số lẻ khác a : có $50 - 1 = 49$ cách.

Số cách chọn bộ (a, c) trong trường hợp này là: $50 \times 49 = 2450$ cách.

Vậy có tất cả $2500 + 2450 = 4950$ cách chọn.

Câu 5 (4,00 điểm).

- a) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 11$ và $u_{n+1} + 15n + 1 = 4u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xác định công thức tổng quát của (u_n) và tìm tất cả giá trị n để u_n là một số chính phương.
- b) Trường của Hoàng có tất cả là n lớp. Lớp đông nhất trường có M học sinh. Hôm nay, lớp Hoàng có giờ học ngoại khóa với chủ đề “Thống Kê và Tính Toán”. Nhóm trưởng nhóm của Hoàng phân công các bạn làm việc như sau:

- ☒ Hoàng lập dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ là số học sinh từng lớp trong trường.
- ☒ Hùng lập dãy số $b_1; b_2; \dots; b_M$ với b_i là số lượng các lớp trong trường mà số học sinh trong mỗi lớp đó không ít hơn i học sinh.
- ☒ Sơn tính giá trị S là tổng lập phương mọi số mà Hoàng lập được.
- ☒ An tính giá trị A là tổng tất cả giá trị b_i mà Hùng lập được.
- ☒ Bình tính giá trị B là tổng tất cả giá trị $i \cdot b_i$.
- ☒ Chi tính giá trị C là tổng tất cả giá trị $i^2 \cdot b_i$.

Chứng minh rằng: $S = A - 3B + 3C$.

Lời giải

- a) Hệ thức truy hồi: $u_{n+1} = 4u_n - 15n - 1$.

Đặt $u_n = v_n + an + b$. Thay vào hệ thức:

$$v_{n+1} + a(n+1) + b = 4(v_n + an + b) - 15n - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = 4v_n + (3a - 15)n + (3b - a - 1).$$

Chọn $3a - 15 = 0 \Rightarrow a = 5$ và $3b - a - 1 = 0 \Rightarrow b = 2$.

Khi đó $v_{n+1} = 4v_n$, đây là cấp số nhân với công bội $q = 4$.

Ta có $v_1 = u_1 - 5 \cdot 1 - 2 = 11 - 7 = 4$. Suy ra $v_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$.

Vậy, công thức tổng quát: $u_n = 4^n + 5n + 2$.

Tìm n để u_n là số chính phương:

- ☒ $n = 1 \Rightarrow u_1 = 11$ (loại).
- ☒ $n = 2 \Rightarrow u_2 = 28$ (loại).
- ☒ $n = 3 \Rightarrow u_3 = 81 = 9^2$ (thỏa mãn).
- ☒ Với $n \geq 4$, ta có: $(2^n)^2 = 4^n < 4^n + 5n + 2 < 4^n + 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n + 1)^2$.

Do u_n bị kẹp giữa 2 số chính phương liên tiếp nên u_n không thể là số chính phương.

Vậy $n = 3$.

b) Thay vì tính tổng trên toàn trường cùng một lúc, ta xét sự đóng góp của **một lớp học bất kỳ** vào các đại lượng A, B, C .

Giả sử ta xét lớp thứ k có x học sinh ($x = a_k$). Ta tính xem lớp này đóng góp bao nhiêu vào các tổng A, B và C .

Theo định nghĩa, b_i là số lượng các lớp có từ i học sinh trở lên. Vì lớp đang xét có x học sinh, nên nó sẽ được “đếm” đúng **1** lần trong các giá trị $b_1, b_2, \dots, b_x$. Từ b_{x+1} trở đi, lớp này không đủ sĩ số nên đóng góp bằng **0**.

☑ **Sự đóng góp vào A :** Vì $A = b_1 + b_2 + \dots + b_M$, lớp này đóng góp **1** vào mỗi số hạng từ b_1 đến b_x . Tổng đóng góp là: $A_x = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{x \text{ số}} = x$.

☑ **Sự đóng góp vào B :** Vì $B = 1b_1 + 2b_2 + \dots + Mb_M$, lớp này đóng góp **1 · 1** vào số hạng đầu, **2 · 1** vào số hạng hai, ..., **$x · 1$** vào số hạng thứ x .

Tổng đóng góp là: $B_x = 1 + 2 + 3 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$.

☑ **Sự đóng góp vào C :** Vì $C = 1^2b_1 + 2^2b_2 + \dots + M^2b_M$.

Tổng đóng góp là: $C_x = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

Bây giờ, ta tính giá trị biểu thức $A - 3B + 3C$ tính riêng cho sự đóng góp của lớp này:

$$\begin{aligned} A_x - 3B_x + 3C_x &= x - 3 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 3 \cdot \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \\ &= x - \frac{3x(x+1)}{2} + \frac{x(x+1)(2x+1)}{2} \\ &= \frac{2x - 3x^2 - 3x + (x^2 + x)(2x+1)}{2} \\ &= \frac{-3x^2 - x + 2x^3 + x^2 + 2x^2 + x}{2} \\ &= \frac{2x^3}{2} = x^3. \end{aligned}$$

Như vậy, mỗi lớp có x học sinh sẽ đóng góp chính xác bằng x^3 vào tổng $A - 3B + 3C$.

Khi xét trên toàn bộ trường gồm n lớp với số học sinh lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_n$, tổng giá trị của biểu thức $A - 3B + 3C$ sẽ là tổng các phần đóng góp của tất cả n lớp:

$$A - 3B + 3C = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$$

Mặt khác, theo đề bài, Sơn tính S là tổng lập phương số học sinh mọi lớp, tức là:

$$S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$$

Vậy ta có $S = A - 3B + 3C$ (điều phải chứng minh).