

CHUYÊN ĐỀ 8: GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Các định nghĩa

a) Giới hạn hữu hạn của dãy số

- Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$.

Chú ý

- Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

- Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

- Ta có thể viết tắt $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ là $\lim u_n$

b) Giới hạn vô cực

- Dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

c) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô

hạn. Tổng của cấp số nhân đó là: $S = u_1 + u_1q + \dots + u_1q^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1-q}$.

2. Định lý về giới hạn hữu hạn

- Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì:

$$\lim(u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim(u_n - v_n) = a - b;$$

$$\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (v_n \neq 0, b \neq 0).$$

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Một số giới hạn cơ bản

- $\lim \frac{1}{n} = 0; \lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước;

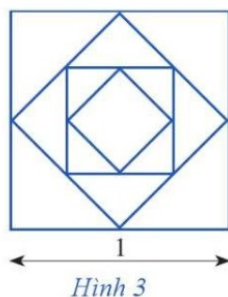
- $\lim \frac{c}{n} = 0; \lim \frac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước;

- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$;

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828459045$
- $\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương cho trước;
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$ là số thực cho trước;
- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$;
- Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = 0, v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$;
- Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim (u_n v_n) = \pm\infty$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như *Hình 3*.



Hình 3

Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;
- b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

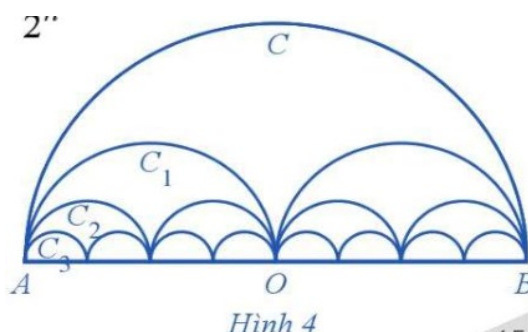
Câu 2: Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kì bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n .

- a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g .

Câu 3: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ... C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (Hình 4).



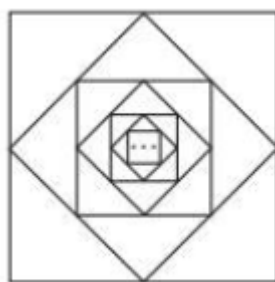
Hình 4

Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

Câu 4: Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



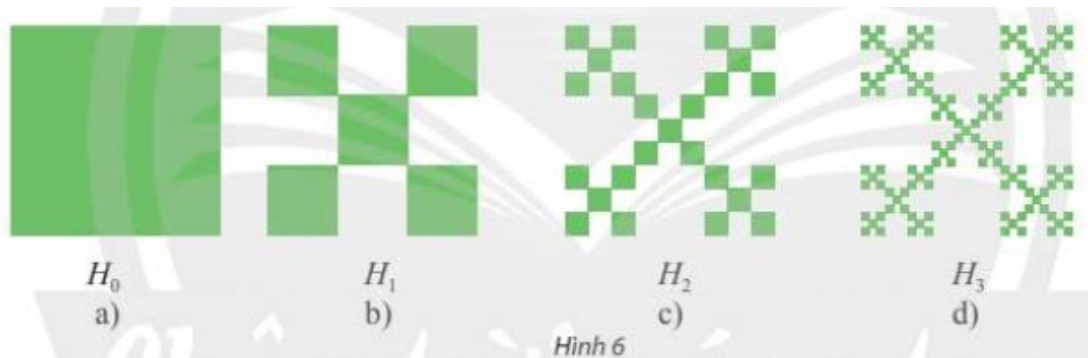
Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Câu 5: Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$;

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

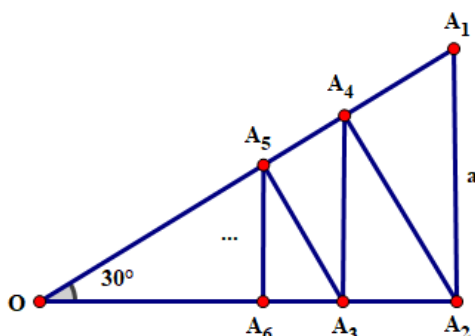
b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Câu 6: Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Câu 7: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $AB = h$ và góc B bằng α (H.5.3). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .

Câu 8: Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại A_2 , $A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1$; $A_3A_4 \perp OA_2$; $A_4A_5 \perp OA_3$; ... Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo a .



Câu 9: Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}\text{Po}$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(\text{mg})$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kỳ bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kỳ bán rã.

- Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .
- Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Câu 10: Từ độ cao 100m, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .
- Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .
- Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

Câu 11: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \dots, A_nB_nC_n, \dots$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

- Tính S_n .
- Tính tổng $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

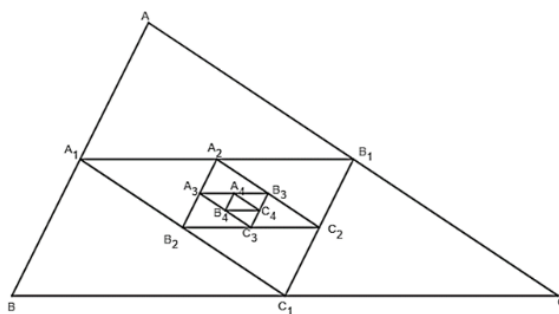
Câu 12: Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$



Hình 18

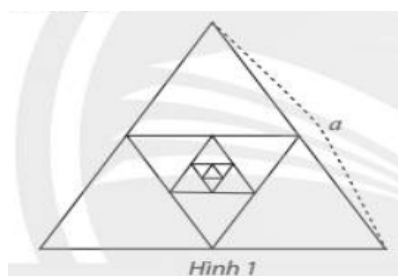
Câu 13: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \dots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \dots$. Gọi

$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$



- a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

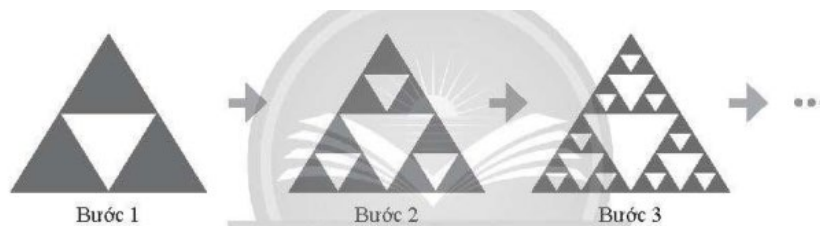
Câu 14: Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$. Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.



Câu 15: Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:
 Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

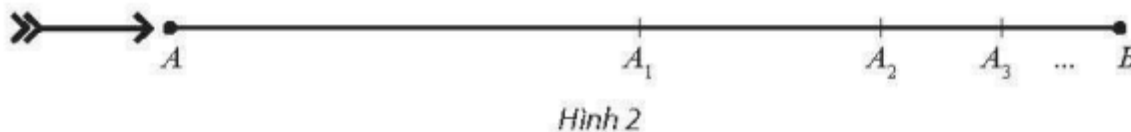
Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n , bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$).
 Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Câu 16: Biết rằng, từ vị trí A , một mũi tên bay với tốc độ 10 m/s hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng 10 m (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B , trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB . Tiếp theo, nó phải đến trung

điểm A_2 của A_1B . Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B . Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B ".

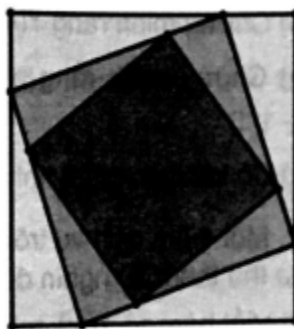


Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Câu 17: Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2 . Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3 . Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$. Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n .

a) Tính s_n .

b) Tính tổng $T = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$



Câu 18: Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1. Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1 , tam giác T_3 đồng dạng với tam giác $T_2, \dots$, tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k} (k > 1)$. Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k .

CHUYÊN ĐỀ 8: GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Các định nghĩa

a) Giới hạn hữu hạn của dãy số

- Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$.

Chú ý

- Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

- Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

- Ta có thể viết tắt $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ là $\lim u_n$

b) Giới hạn vô cực

- Dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

c) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đó là: $S = u_1 + u_1q + \dots + u_1q^{n-1} + \dots = \frac{u_1}{1-q}$.

2. Định lý về giới hạn hữu hạn

- Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì:

$$\lim(u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim(u_n - v_n) = a - b;$$

$$\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (v_n \neq 0, b \neq 0).$$

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Một số giới hạn cơ bản

- $\lim \frac{1}{n} = 0; \lim \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước;

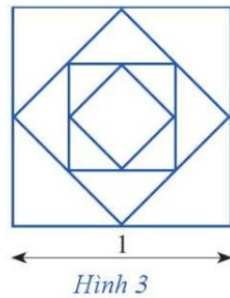
- $\lim \frac{c}{n} = 0; \lim \frac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước;

- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$;

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828459045$
- $\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương cho trước;
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$ là số thực cho trước;
- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$;
- Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = 0, v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$;
- Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim (u_n v_n) = \pm\infty$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như Hình 3.



Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;
- Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Lời giải

a) Gọi S_n là diện tích của hình vuông thứ n .

Ta có: $S_1 = 1; S_2 = \frac{1}{2}; S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Dãy (S_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ có công thức tổng

quát là: $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ nên dãy (S_n) trên lập thành một cấp số nhân lùi hạn nên ta có:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Vậy tổng diện tích của các hình vuông là 2 (đvdt).

Câu 2: Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất

phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

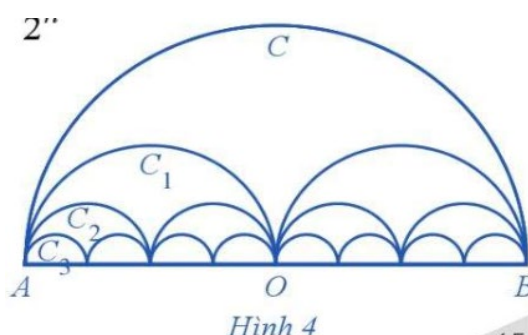
b) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0.$

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ kg} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 \text{ g}$

Để chất phóng xạ bé hơn 10^{-6} (g) thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 31.$

Vậy cần ít nhất 30 chu kỳ tương ứng với 720000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 3: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ... C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (Hình 4).



Hình 4

Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

- Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

Lời giải

+) Ta có: $p_1 = \frac{\pi R}{2}; p_2 = \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2^2}; p_3 = \frac{\pi R}{8} = \frac{\pi R}{2^3}; \dots$

(p_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = \frac{\pi R}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$ có

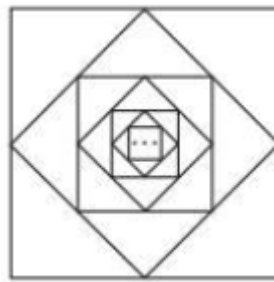
số hạng tổng quát $p_n = \frac{\pi R}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

+) Ta có: $C_1 = \frac{\pi R^2}{4}; C_2 = \frac{\pi R^2}{4^2}; C_3 = \frac{\pi R^2}{4^3}; \dots$

(C_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $C_1 = \frac{\pi R^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ có

số hạng tổng quát $C_n = \frac{\pi R^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Câu 4: Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n, S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Lời giải

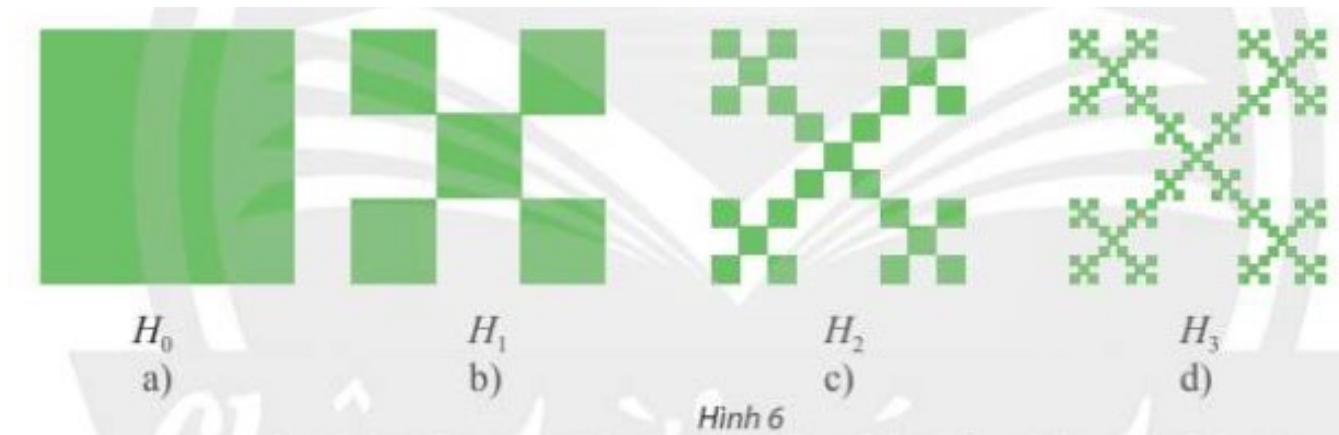
a) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$b) p_n = 4 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$Q_n = 4 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \dots + 4 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 13,66$$

Câu 5: Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:
Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình $H_n (n = 1, 2, 3, \dots)$.



Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$;.....

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Lời giải

$$a) S_n = 5^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{5^n}{9^n} = \left(\frac{5}{9}\right)^n \quad \lim S_n = \lim \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0.$$

$$b) p_n = 5^n \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^n} = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \lim p_n = \lim 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty.$$

Câu 6: Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải

Đặt $r = 5\%$

a)

- Sau khi uống viên thuốc ngày thứ 1, hàm lượng thuốc trong cơ thể là $u_1 = 150mg$
- Sau khi uống viên thuốc ngày thứ 2, hàm lượng thuốc trong cơ thể là
 $u_2 = 5\%u_1 + 150 = 5\%.150 + 150 = 150(1 + r)$
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 3 là
 $u_3 = 5\%u_2 + 150 = 150(1 + r)r + 150 = 150(r^2 + r + 1)$
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 4 là
 $u_4 = 5\%u_3 + 150 = 150(r^2 + r + 1)r + 150 = 150(r^3 + r^2 + r + 1)$
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 5 là
 $u_5 = 5\%u_4 + 150 = 150(r^3 + r^2 + r + 1)r + 150 = 150(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) \approx 157,9mg$

b) Lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng liên tục trong n ngày

$$u_n = 150(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)$$

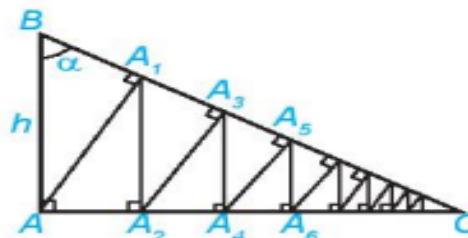
Nếu sử dụng thuốc lâu ngày thì hàm lượng thuốc trong cơ thể hằng ngày là

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [150(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)] = 150 \cdot \frac{1}{1-r} = 150 \cdot \frac{100}{95} = 150 \cdot \frac{20}{19}.$$

Câu 7: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $AB = h$ và góc B bằng α (H.5.3). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .

Lời giải

Độ dài đường gấp khúc với số hạng tổng quát



Hình 5.3

tạo thành cấp số nhân là:

$$u_n = \sin \alpha \times h \times (\sin \alpha)^{n-1}$$

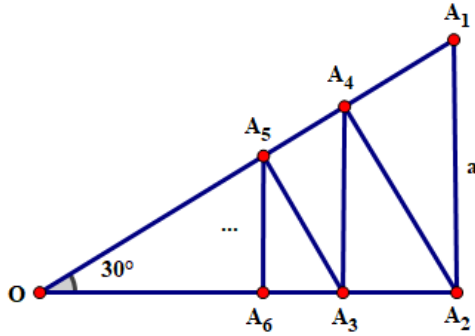
Độ dài đường gấp

khúc: $AA_1 + A_2A_3 + \dots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \sin \alpha \times h, q = \sin \alpha$ nên

$$AA_1 + A_2A_3 + \dots = \frac{\sin \alpha \times h}{1 - \sin \alpha}.$$

Câu 8: Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại A_2 , $A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1$; $A_3A_4 \perp OA_2$; $A_4A_5 \perp OA_3$; ... Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4...$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo a .



Lời giải

Các góc $\widehat{A_1A_2A_3}$, $\widehat{A_2A_3A_4}$, $\widehat{A_3A_4A_5}$, ... đều bằng góc $\widehat{A_1OA_2}$ nên đều có số đo 30° .

$$A_2A_3 = A_1A_2 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$A_3A_4 = A_2A_3 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2;$$

$$A_4A_5 = A_3A_4 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3; \dots$$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4...$ là

$$l = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = a(3 + 2\sqrt{3}).$$

Câu 9: Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}\text{Po}$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(\text{mg})$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kỳ bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kỳ bán rã.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Lời giải

a) Vì cứ sau 1 chu kì bán rã thì khối lượng mẫu chất phóng xạ giảm một nửa nên (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = 21$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = \frac{42}{2^n}$.

b) Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{42}{2^n} = \lim 42 \cdot \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 42 \cdot 0 = 0$.

Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ càng dần về 0, nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ dài thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ là rất nhỏ (đến mức không đáng kể).

Câu 10: Từ độ cao 100m, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo đề bài ta có, $h_n = \frac{1}{4} h_{n-1}$ nên (h_n) là một cấp số nhân với $h_1 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (h_n) : $h_n = u_1 q^{n-1} = 25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{100}{4^n}$.

b) Ta có: $\lim h_n = \lim \frac{100}{4^n} = \lim \left(100 \cdot \frac{1}{4^n}\right) = \lim 100 \cdot \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 100 \cdot 0 = 0$.

Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì độ cao của quả bóng đạt được sau khi nảy ngày càng nhỏ và độ cao đó dần tới 0.

c) Ta có: $S_n = 100 + 2 \left(\frac{100}{4} + \frac{100}{4^2} + \frac{100}{4^3} + \dots + \frac{100}{4^n} \right)$.

Nếu quá trình bóng nảy cứ tiếp tục diễn ra mãi, tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là:

$$\lim S_n = 100 + 2 \left(\frac{100}{4} + \frac{100}{4^2} + \frac{100}{4^3} + \dots + \frac{100}{4^n} + \dots \right).$$

Vì $\frac{100}{4}; \frac{100}{4^2}; \frac{100}{4^3}; \dots; \frac{100}{4^n}; \dots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{100}{4}$ và công bội

$$q = \frac{1}{4} < 1 \text{ nên ta có } \lim S_n = 100 + 2 \cdot \frac{\frac{100}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{500}{3}.$$

Vậy tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là $\frac{500}{3}$ m.

Câu 11: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \dots, A_nB_nC_n, \dots$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính S_n .

b) Tính tổng $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải

Theo cách xác định tam giác $A_2B_2C_2$, ta có $s_2 = \frac{1}{4}s_1$. Tương tự, $s_3 = \frac{1}{4}s_2, \dots, s_n = \frac{1}{4}s_{n-1}$. Vậy

$$s_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} s_1 = 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

Từ đó $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$.

Câu 12: Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$



Hình 18

Lời giải

Gọi u_n là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất.

Ta có: $u_1 = 55,8, u_2 = \frac{1}{10} \cdot u_1; u_3 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot u_1; \dots; u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \cdot u_1$.

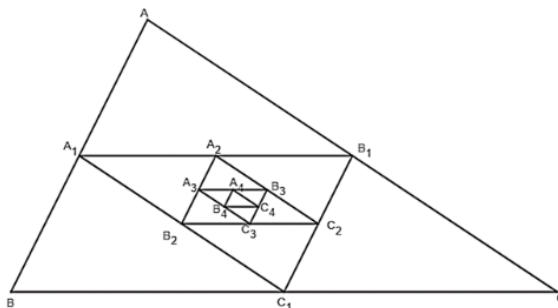
Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 55,8$ và công bội

$$q = \frac{1}{10} \text{ thỏa mãn } |q| < 1.$$

$$\text{Suy ra } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{55,8}{1 - \frac{1}{10}} = 62 \text{ (m)}.$$

Vậy tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần là 62 m.

Câu 13: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.



a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải

a)

+) (p_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Ta có: $p_1 = p_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$$p_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3a) = \frac{1}{2} \cdot p_1$$

$$p_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p_1; \dots;$$

$$p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot p_1; \dots$$

Suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3a) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3a) = 0 \cdot 3a = 0.$$

(S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah;$$

$$S_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}ah \right) = \frac{1}{4} \cdot S_1;$$

$$S_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot S_1; \dots;$$

$$S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot S_1; \dots$$

Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \cdot S_1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}ah \right) = 0 \cdot \frac{1}{2}ah = 0.$$

b)

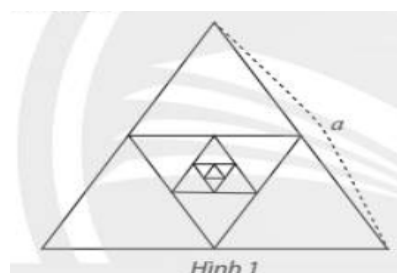
+) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3a$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2}ah$ và công bội $q = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2}ah}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}ah$$

Câu 14: Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$. Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.



Hình 1

Lời giải

Cạnh của các tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$ lần lượt là: $a; \frac{1}{2}a, \frac{1}{2^2}a, \dots$

Tổng chu vi của các tam giác là:

$$C = 3 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{2}a + 3 \cdot \frac{1}{2^2}a + \dots = 3a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = 3a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

Diện tích tam giác H_1 là $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Diện tích tam giác H_2 bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác H_1 ; Diện tích tam giác H_3 bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác H_2 ;...

Tổng diện tích các tam giác là:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

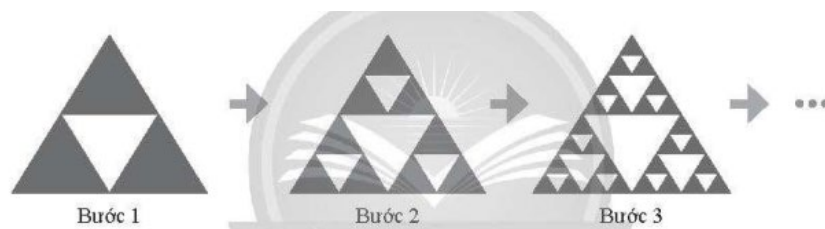
Câu 15: Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n , bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$).

Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 3^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \dots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots \end{aligned}$$

Đây là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{4}$, công bội $q = \frac{3}{4}$, nên

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1$$

Câu 16: Biết rằng, từ vị trí A , một mũi tên bay với tốc độ 10 m/s hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng 10 m (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B , trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB . Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B . Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B . Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B ".



Hình 2

Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Lời giải

Thời gian để mũi tên bay từ A đến A_1 là $\frac{1}{2}$ giây, từ A_1 đến A_2 là $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ giây, từ A_2 đến A_3 là $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$, ...

Tổng thời gian bay của mũi tên là $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots (*)$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội bằng $\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng này bằng $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ (giây).

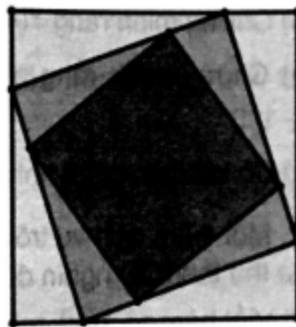
Như vậy, mũi tên đến bia mục tiêu sau 1 giây.

Lập luận của nhà thông thái không đúng, sai lầm ở chỗ cho rằng tổng ở (*) không phải là một số hữu hạn.

Câu 17: Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2 . Lập lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3 . Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$. Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n .

a) Tính s_n .

b) Tính tổng $T = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$



Lời giải

Cạnh của hình vuông H_2 là $a_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}}a$.

Khi đó $s_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}s_1$.

Lí luận tương tự, ta có $s_3 = \frac{5}{8}s_2, \dots, s_n = \frac{5}{8}s_{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} a^2$.

Từ đó $T = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots = a^2 \left[1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} + \dots \right] = \frac{8a^2}{3}$.

Câu 18: Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1. Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1 , tam giác T_3 đồng dạng với tam giác $T_2, \dots$, tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k} (k > 1)$. Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k .

Lời giải

Gọi diện tích các tam giác $T_1; T_2; \dots; T_{n-1}; T_n$ lần lượt là $S_1; S_2; \dots; S_{n-1}; S_n$.

Vì tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$ nên diện tích tam giác T_n bằng $\frac{1}{k^2}$ diện tích tam giác T_{n-1} hay $S_n = \frac{1}{k^2} S_{n-1}$.

Vì $k > 1$ nên $\frac{1}{k^2} < 1$. Vậy $S_1; S_2; \dots; S_{n-1}; S_n; \dots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{k^2}$.

Khi đó, tổng diện tích của tất cả các tam giác nếu n tiến tới vô cùng là:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} + S_n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

CHUYÊN ĐỀ 9_GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Các định nghĩa

a) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

b) Giới hạn một phía

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

c) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới âm vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

d) Giới hạn vô cực (một phía) của hàm số tại một điểm

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow a$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

- Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

e) Giới hạn vô cực của hàm số tại vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

2. Một số kết quả giới hạn cơ bản

☐ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$;

☐ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số;

☐ Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$);

☐ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$;

☐ Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0$;

☐ Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$;

☐ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$;

☐ Với k là số nguyên dương, ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ (k chẵn); $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ (k lẻ)

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 2: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 3: Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30gam / lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{30t}{400+t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

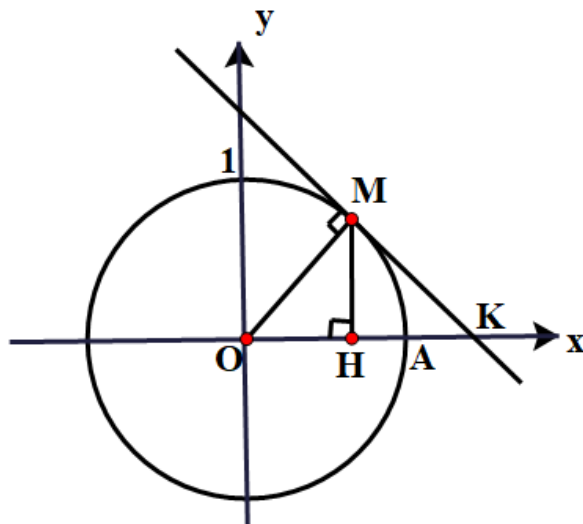
Câu 4: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5). Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay

$$d' = \frac{df}{d-f}$$

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d)$; b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d)$.

Câu 5: Cho điểm $M(t, \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Câu 6: Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

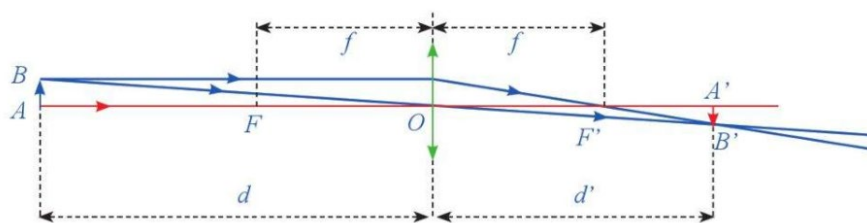
Câu 7: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó $v(\text{m/s})$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 8: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Câu 9: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

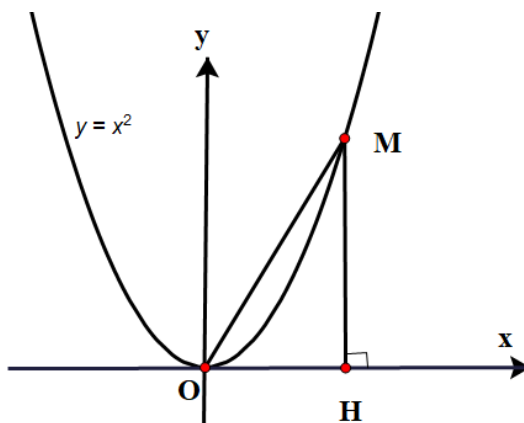
a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Hình 19

Câu 10: Cho điểm M thay đổi trên parabol $y = x^2$; H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành. Gọi x là hoành độ của điểm H . Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} (OM - MH)$.

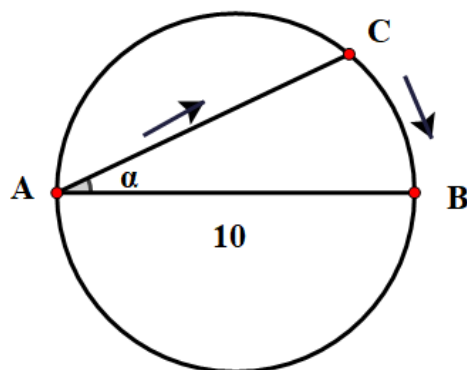


Câu 11: Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10 \text{ m}$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B . Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.



Câu 12: Một bể chứa 5000l nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25l/ phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t) = \frac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

CHUYÊN ĐỀ 9 _GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Các định nghĩa

a) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

b) Giới hạn một phía

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

c) Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới âm vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

d) Giới hạn vô cực (một phía) của hàm số tại một điểm

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow a$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

- Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

e) Giới hạn vô cực của hàm số tại vô cực

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

2. Một số kết quả giới hạn cơ bản

☐ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$;

☐ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số;

☐ Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0);$$

☐ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$;

☐ Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0;$$

☐ Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$;

☐ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$;

☐ Với k là số nguyên dương, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \text{ (k chẵn)}; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \text{ (k lẻ)}$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t \left(1 + \frac{4}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50}{1 + \frac{4}{t}} = 50.$$

Ý nghĩa: Tối đa một nhân viên chỉ có thể lắp được 50 bộ phận mỗi ngày.

Câu 2: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm là:

$$\bar{C}(x) = \frac{50000 + 105x}{x} \text{ (sản phẩm)}.$$

$$\text{b) Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000 + 105x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{50000}{x} + 105 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{50000}{x} + 105 \right) = 105.$$

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn đồng.

Câu 3: Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30gam / lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{30t}{400 + t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Lời giải

a) Sau thời gian t , số lít nước bơm vào hồ là: $15t$ (lít).

Trong $15t$ lít nước biển có lượng muối: $30.15t = 450t$ (gam).

$$\text{Nồng độ muối trong hồ sau thời gian } t \text{ phút: } C(t) = \frac{450t}{6000 + 15t} = \frac{30t}{400 + t}.$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{400 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{400}{t} + 1} = \frac{30}{0 + 1} = 30.$$

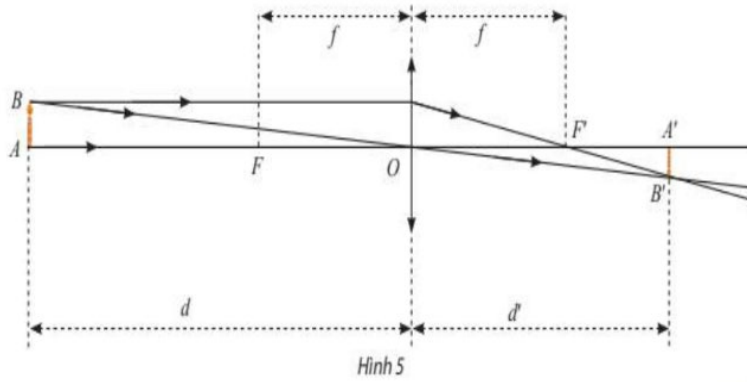
Câu 4: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5). Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay

$$d' = \frac{df}{d - f}$$

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d - f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d)$; b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d)$.

Lời giải



a) Ta có: $\lim_{d \rightarrow f^+} df = f^2 > 0$ $\lim_{d \rightarrow f^+} \frac{1}{d-f} = +\infty$

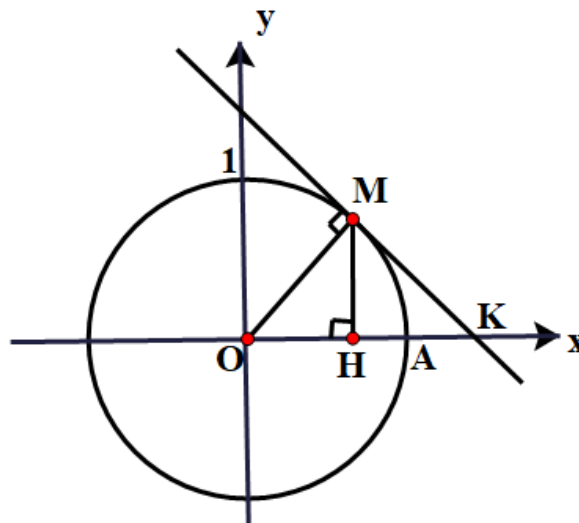
Suy ra: $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = \lim_{d \rightarrow f^+} \left[df \cdot \frac{1}{d-f} \right] = +\infty$.

Vậy khi vật tiến gần tới tiêu điểm thì ảnh càng lớn và tiến tới $+\infty$.

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{df}{d-f} = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{d}} = \frac{f}{1-0} = f$

Vậy khi vật ở rất xa, tiến tới $+\infty$ thì ảnh của vật nằm trên tiêu điểm.

Câu 5: Cho điểm $M(t, \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Lời giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t \rightarrow 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA}$. Ta có $H(t, 0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $OM = (t, \sqrt{1-t^2})$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $d: t(x-t) + \sqrt{1-t^2}(y - \sqrt{1-t^2}) = 0$.

Thay $y = 0$ vào phương trình của d ta nhận được $x = \frac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\frac{1}{t}; 0\right)$.

Ta có: $HA = 1-t$; $HK = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}$; $\frac{HK}{HA} = \frac{1-t^2}{t(1-t)} = \frac{1+t}{t}$; $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1+t}{t} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến 2.

Câu 6: Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Lời giải

a) $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x + 55}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khi số lượng sản phẩm sản xuất được càng lớn thì chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm càng gần với 2 (triệu đồng).

Câu 7: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó $v(\text{m/s})$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{v \rightarrow 20} \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} = \frac{\lim_{v \rightarrow 20} 290,4v}{\lim_{v \rightarrow 20} 0,36v^2 + \lim_{v \rightarrow 20} 13,2v + \lim_{v \rightarrow 20} 264} = \frac{290,4 \cdot 20}{0,36 \cdot 20^2 + 13,2 \cdot 20 + 264} \approx 9.$$

Từ kết quả đó, ta thấy lưu lượng xe vào hầm ở thời điểm vận tốc trung bình của các xe đạt 20 m/s là khoảng 9 xe ô tô trong 1s.

Câu 8: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là

$V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } g(10) &= 45 \cdot 10^2 - 10^3. \text{ Khi đó } \lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45t^2 - t^3 - 45 \cdot 10^2 + 10^3}{t - 10} \\
&= \lim_{t \rightarrow 10} \frac{(45t^2 - 45 \cdot 10^2) - (t^3 - 10^3)}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45(t - 10)(t + 10) - (t - 10)(t^2 + 10t + 100)}{t - 10} \\
&= \lim_{t \rightarrow 10} \frac{(t - 10)(45(t + 10) - (t^2 + 10t + 100))}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} (-t^2 + 35t + 350) = 600.
\end{aligned}$$

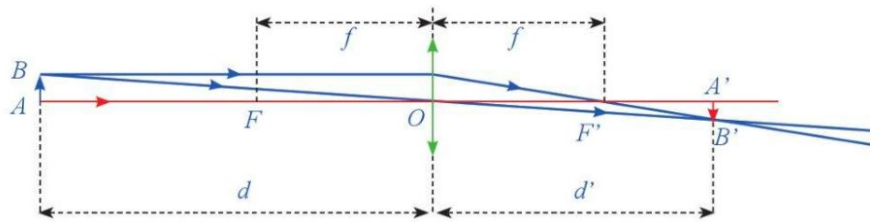
$$\text{Vậy } \lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10} = 600.$$

Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ tăng người bệnh ngay tại thời điểm $t = 10$ ngày là 600 người/ngày.

Câu 9: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Hình 19

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{d'} = \frac{d - f}{df} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d - f}.$$

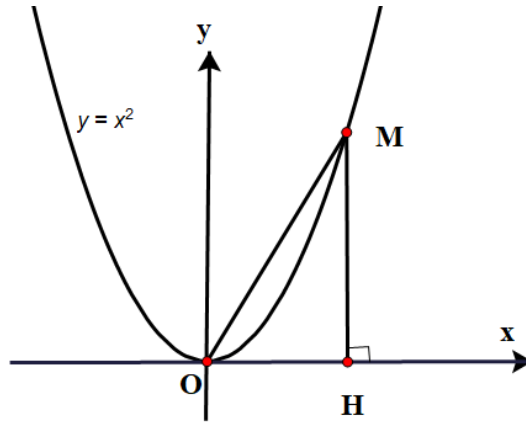
b) Ta có:

$$\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d - f} = +\infty; \lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d - f} = -\infty;$$

$$\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f} \frac{df}{d - f} = \infty$$

Giải thích ý nghĩa: Khi khoảng cách của vật tới thấu kính mà gần với tiêu cự thì khoảng cách ảnh của vật đến thấu kính ra xa vô tận nên lúc đó bằng mắt thường mình không nhìn thấy.

Câu 10: Cho điểm M thay đổi trên parabol $y = x^2$; H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành. Gọi x là hoành độ của điểm H . Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} (OM - MH)$.



Lời giải

$$M(x; x^2); OM = \sqrt{x^2 + x^4}; MH = x^2.$$

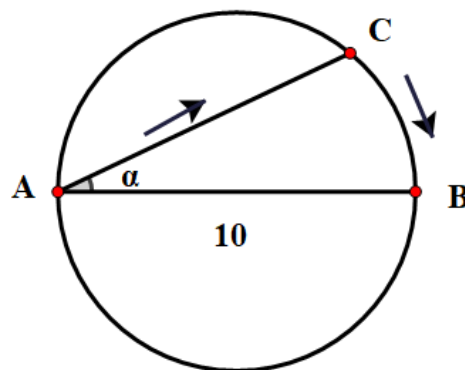
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (OM - MH) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x^4} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x^4} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 11: Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10$ m, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B . Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

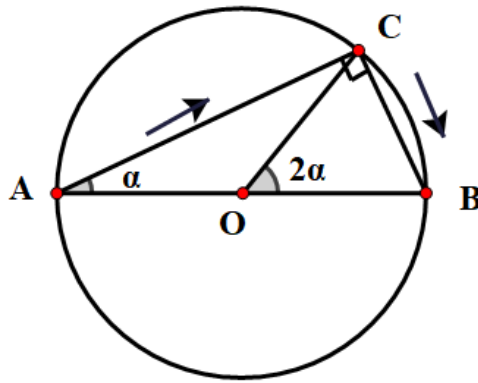
a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.



Lời giải



Kí hiệu O là tâm hình tròn.

a) Do tam giác ABC vuông tại C nên $AC = AB \cos \alpha = 10 \cos \alpha$ (m).

Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$. Suy ra độ dài cung CB là $l = OB \cdot \widehat{BOC} = 5 \cdot 2\alpha = 10\alpha$ (m).

Quãng đường di chuyển (tính theo m) của người đó là

$$S(\alpha) = AC + l = 10 \cos \alpha + 10\alpha = 10(\alpha + \cos \alpha) \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

b) Do các hàm $y = \alpha$ và $y = \cos \alpha$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

$$c) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 10(\alpha + \cos \alpha) = 10 \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cos \alpha \right) = 10(0 + 1) = 10.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 10(\alpha + \cos \alpha) = 10 \left(\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos \alpha \right) = 10 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = 5\pi.$$

Câu 12: Một bể chứa 5000l nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25l/ phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t) = \frac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Sau t phút thì lượng muối trong bể là $30 \cdot 25 \cdot t = 750t$ (g) và thể tích nước trong bể là $5000 + 25t$ (l).

Vậy nồng độ muối của nước trong bể sau t phút là:

$$C(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t} \text{ (g/l)}.$$

$$b) \text{ Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{200 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{200}{t} + 1} = \frac{30}{1} = 30.$$

Theo kết quả đó, ta thấy khi lượng nước trong bể tăng theo thời gian đến vô hạn thì nồng độ muối của nước sẽ tăng dần đến giá trị 30g/l , tức là xấp xỉ nồng độ muối của loại nước muối cho thêm vào bể.

CHUYÊN ĐỀ 10_HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Các định nghĩa

a) Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các định lí

a) Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b) Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục

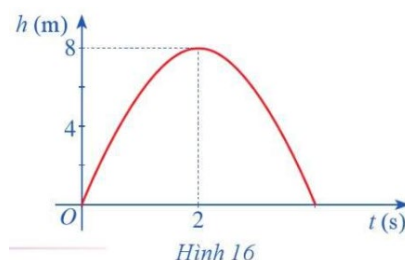
Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;

- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Hình 16 biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên theo thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.



a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

Câu 2: Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Câu 3: Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Câu 4: Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5km)	Giá cước các km tiếp theo đến 30km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

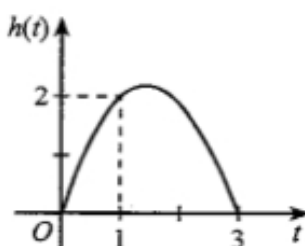
Câu 5: Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

Câu 6: Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = at^2 + bt$

a) Dựa vào đồ thị, tìm a, b

b) Cho hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0; 3)$.

c) Với m thuộc $(0; 3)$, tính $\lim_{t \rightarrow m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.



Hình 5

Câu 7: Biểu giá bán lẻ điện sinh hoạt của EVN được áp dụng theo Quyết định 1062/QĐ-BCT với mức giá bán lẻ điện chưa bao gồm thuế giá trị gia tăng, cụ thể:

kWh	Giá tiền (đồng/ kWh)
1 đến 50	728
50 đến 100	786
101 đến 200	074
201 đến 300	612
301 đến 400	919
401 trở lên	015

Giá tiền được biểu diễn bởi hàm số $T(x) = \begin{cases} 1,728 & \text{khi } 0 < x \leq 50 \\ 1,728 + (x-50) \cdot 1,786 & \text{khi } 50 < x \leq 100 \\ 91,028 + (x-100) \cdot 2,074 & \text{khi } 100 < x \leq 200 \\ 298,428 + (x-200) \cdot 2,612 & \text{khi } 200 < x \leq 300 \\ 559,628 + (x-300) \cdot 2,219 & \text{khi } 300 < x \leq 400 \\ 781,528 + (x-400) \cdot 3,015 & \text{khi } x > 400 \end{cases}$

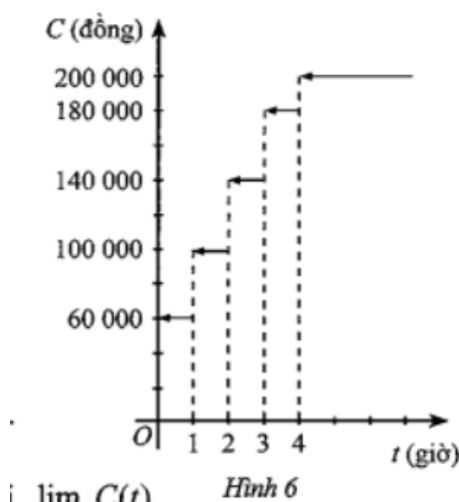
Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(kWh)$.

Câu 8: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

a) Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số đó có liên tục trên $[0; +\infty)$ không?

c) Giá trị $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?



Hình 6

Câu 9: Lực hấp dẫn tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm Trái Đất là

$$r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{khi } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M và R lần lượt là khối lượng và bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Xét tính liên tục của hàm số $F(r)$.

Câu 10: Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

Câu 11: Biết rằng khi nung nóng một vật với nhiệt độ tăng từ 20°C , mỗi phút tăng 4°C trong 70 phút, sau đó giảm mỗi phút 2°C trong 50 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (phút) có dạng:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 4t & \text{khi } 0 \leq t \leq 70 \\ a - 2t & \text{khi } 70 < t \leq 120 \end{cases}$$

(a là hằng số). Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của a .

Câu 12: Một hãng taxi đưa ra giá cước cho loại xe 4 chỗ như sau:

Loại xe	Giá cước cho 1 km đầu tiên	Giá cước cho km thứ 2 đến km thứ 25	Giá cước cho km thứ 26 trở lên
VF 5 plus	20.000 đồng/km	15.000 đồng/km	15.000 đồng/km

(qua 1 km đầu được tính cho km thứ hai, qua km thứ 25 được tính cho km thứ 26).

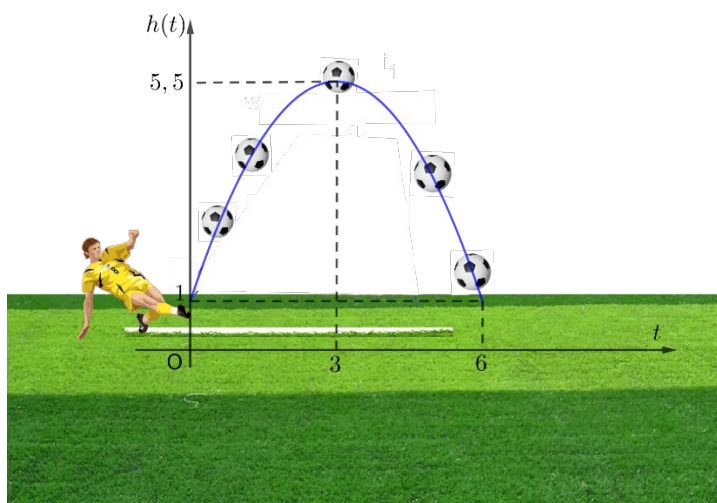
$$\text{Giá cước được biểu diễn bởi hàm số } T(x) = \begin{cases} 20000 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 20000 + (x-1) \cdot 15000 & \text{khi } 1 < x \leq 25 \\ 380000 + (x-25) \cdot 14000 & \text{khi } x > 25. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(\text{km})$.

Câu 13: Biểu thị độ cao $h(t)$ của một quả bóng đá lên trên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right)$.



Câu 14: Một người lái xe ô tô, trong 20 km đầu xe chạy với vận tốc 40 km/h , sau đó cứ đến 10 km tiếp theo xe tăng tốc thêm $x \text{ (km/h)}$, $x > 0$. Biểu thức vận tốc của xe là $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{20}{5+2x}$ có đơn vị đo là giờ (h) . Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định.



CHUYÊN ĐỀ 10_HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Các định nghĩa

a) Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các định lí

a) Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b) Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục

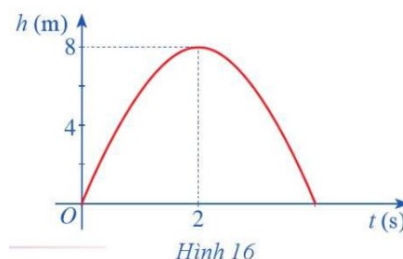
Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;

- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Hình 16 biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên theo thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.



a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

Lời giải

a) Hàm số $h(t) = -2t^2 + 8t$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hàm số khi t tiến dần đến 2 thì $h(t)$ dần đến 8. Vậy $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t) = 8$.

Câu 2: Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải

$C(x) = 60000$ khi $x \in (0; 2)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(0; 2)$.

$C(x) = 100000$ khi $x \in (2; 4)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(2; 4)$.

$C(x) = 200000$ khi $x \in (4; 24)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(4; 24)$.

Ta có:

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2}$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 2.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} C(x) = 100000$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} C(x) = 200000$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4}$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 4.

Câu 3: Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Lời giải

$$\lim_{r \rightarrow R^-} F(r) = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{GMr}{R^3} = \frac{GMR}{R^3} = \frac{GM}{R^2}, \quad \lim_{r \rightarrow R^+} F(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2}$$

Suy ra: $\lim_{r \rightarrow R} F(r) = F(R)$. Hay hàm số $F(r)$ liên tục tại $r_0 = R$.

$F(r) = \frac{GMr}{R^3}$ khi $0 < r < R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(0; R)$.

$F(r) = \frac{GM}{r^3}$ khi $r > R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(R; +\infty)$.

Vậy hàm số $F(r)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

Câu 4: Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5km)	Giá cước các km tiếp theo đến 30km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải

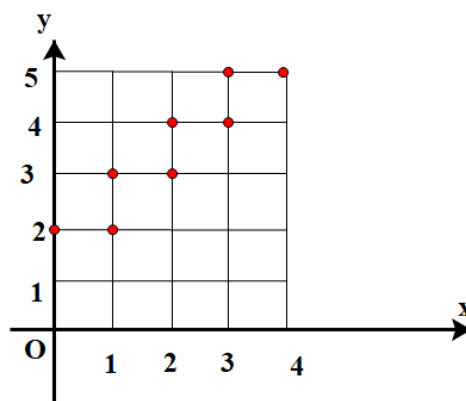
$$a) f(x) = \begin{cases} 10000x & \text{khi } x \leq 0.5 \\ 5000 + 13500(x - 0.5) & \text{khi } 0.5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30) & \text{khi } x > 30 \end{cases}$$

Câu 5: Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

Lời giải

$$\text{Hàm số } P(t) \text{ trên } (0; 4] \text{ có công thức: } P(t) = \begin{cases} 2 & \text{khi } 0 < t \leq 1 \\ 3 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \\ 4 & \text{khi } 2 < t \leq 3 \\ 5 & \text{khi } 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

(P tính theo chục nghìn đồng, t tính theo giờ). Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình 1.



Hình 1

Trên mỗi nửa khoảng $(0; 1]$, $(1; 2]$, $(2; 3]$ và $(3; 4]$, hàm số đều có dạng $P(t) = c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

Ta có $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 2 = 2$; $\lim_{t \rightarrow 1^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 3 = 3$. Do $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t = 1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t = 2$ và $t = 3$.

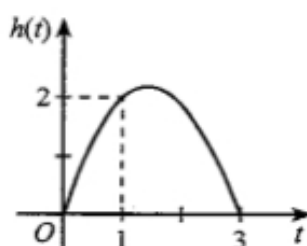
Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0; 1]$, $(1; 2]$, $(2; 3]$ và $(3; 4]$; gián đoạn tại các điểm $t = 1, t = 2$ và $t = 3$.

Câu 6: Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = at^2 + bt$

a) Dựa vào đồ thị, tìm a, b

b) Cho hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0; 3)$.

c) Với m thuộc $(0; 3)$, tính $\lim_{t \rightarrow m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.



Hình 5

Lời giải

a) Dựa vào Hình 5 ta thấy quỹ đạo quả bóng đi qua điểm có tọa độ $(3; 0)$ và $(1; 2)$. Suy ra $a = -1, b = 3$.

b) Từ câu a, ta có: $h(t) = -t^2 + 3t$. Vì $h(t)$ là hàm đa thức nên $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, mà $(0; 3) \subset \mathbb{R}$ nên $h(t)$ liên tục trên $(0; 3)$.

c) Với $m \in (0; 3)$, ta có: $\lim_{t \rightarrow m} h(t) = \lim_{t \rightarrow m} (-t^2 + 3t) = -m^2 + 3m = h(m)$. Khi dần tới thời điểm m bất kì thuộc $(0; 3)$ thì quả bóng dần đạt độ cao $h(m)$.

Câu 7: Biểu giá bán lẻ điện sinh hoạt của EVN được áp dụng theo Quyết định 1062/QĐ-BCT với mức giá bán lẻ điện chưa bao gồm thuế giá trị gia tăng, cụ thể:

kWh	Giá tiền (đồng/ kWh)
1 đến 50	728
50 đến 100	786
101 đến 200	074
201 đến 300	612
301 đến 400	919
401 trở lên	015

$$\text{Giá tiền được biểu diễn bởi hàm số } T(x) = \begin{cases} 1,728 & \text{khi } 0 < x \leq 50 \\ 1,728 + (x-50).1,786 & \text{khi } 50 < x \leq 100 \\ 91,028 + (x-100).2,074 & \text{khi } 100 < x \leq 200 \\ 298,428 + (x-200).2,612 & \text{khi } 200 < x \leq 300 \\ 559,628 + (x-300).2,219 & \text{khi } 300 < x \leq 400 \\ 781,528 + (x-400).3,015 & \text{khi } x > 400 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với x (*kWh*).

Lời giải

+ Tại $x_0 = 50$ ta có:

$$T(50) = 1,728$$

$$\lim_{x \rightarrow 50^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 50^-} 1,728 = 1,728; \quad \lim_{x \rightarrow 50^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 50^+} [1,728 + (x-50).1,786] = 1,728$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 50^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 50^+} T(x) = T(50)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 50$

+ Tại $x_0 = 100$ ta có:

$$T(100) = 1,728 + (100-50).1,786 = 91,028$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} [1,728 + (x-50).1,786] = 91,028$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} [91,028 + (x-100).2,074] = 91,028$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} T(x) = T(100)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 100$.

+ Tại $x_0 = 200$ ta có:

$$T(200) = 91,028 + (200-100).2,074 = 298,428$$

$$\lim_{x \rightarrow 200^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 200^-} [91,028 + (x-100).2,074] = 298,428$$

$$\lim_{x \rightarrow 200^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} [298,428 + (x-200).2,612] = 298,428$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 200^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} T(x) = T(200)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 200$

+ Tại $x_0 = 300$ ta có:

$$T(300) = 298,428 + (300-200).2,612 = 559,628$$

$$\lim_{x \rightarrow 300^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 300^-} [298,428 + (x-200).2,612] = 559,628$$

$$\lim_{x \rightarrow 300^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 300^+} [559,628 + (x-300).2,219] = 559,628$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 300^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 300^+} T(x) = T(300)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 300$.

+ Tại $x_0 = 400$ ta có:

$$T(400) = 559,628 + (400-300).2,219 = 781,528$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} [559,628 + (x-300).2,219] = 781,528$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} [781,528 + (x-400).3,015] = 781,528$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 400^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} T(x) = T(400)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 400$

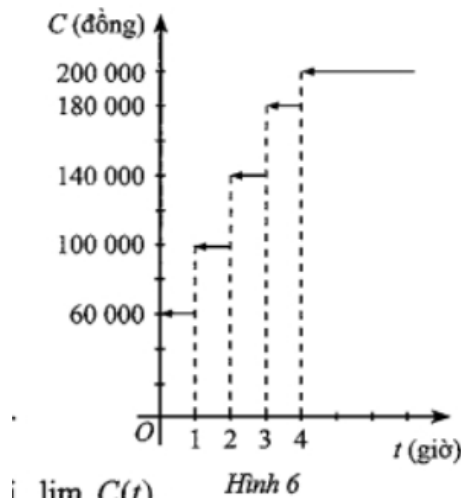
Vậy hàm số $T(x)$ liên tục

Câu 8: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

a) Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số đó có liên tục trên $[0; +\infty)$ không?

c) Giá trị $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?



Lời giải

a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ được thể hiện trong Hình 6.

b) Từ đồ thị ta thấy hàm số bị gián đoạn tại $t = 1$ (giờ); $t = 2$ (giờ); $t = 3$ (giờ); $t = 4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0; +\infty)$.

c) Từ đồ thị ta có: $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) = 180000, \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t) = 140000$

Vì $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) \neq \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$

Nhận thấy khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000 - 140000 = 40000$ (đồng), như vậy chênh lệch chi phí giữa hai người không giảm đi.

Câu 9: Lực hấp dẫn tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm Trái Đất là

$$r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M và R lần lượt là khối lượng và bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Xét tính liên tục của hàm số $F(r)$.

Lời giải

$F(r)$ liên tục trên khoảng $[0; +\infty)$

Câu 10: Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

Lời giải

$$a) f(x) = \begin{cases} 30, & (0 < x \leq 1) \\ 10 + 20x, & (x > 1) \end{cases}$$

b) Hàm số này liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 11: Biết rằng khi nung nóng một vật với nhiệt độ tăng từ 20°C , mỗi phút tăng 4°C trong 70 phút, sau đó giảm mỗi phút 2°C trong 50 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ ($^\circ\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (phút) có dạng:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 4t & \text{khi } 0 \leq t \leq 70 \\ a - 2t & \text{khi } 70 < t \leq 120 \end{cases}$$

(a là hằng số). Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của a .

Lời giải

Tại $t_0 = 70$ ta có: $T(70) = 300$

$$\lim_{x \rightarrow 70^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 70^-} (20 + 4t) = 300; \quad \lim_{x \rightarrow 70^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 70^+} (a - 2t) = a - 140$$

Hàm số liên tục trên tập xác định khi: $\lim_{x \rightarrow 70^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 70^+} T(x) = T(60) \Leftrightarrow a - 140 = 300 \Leftrightarrow a = 440$

Vậy giá trị của $a = 440^\circ\text{C}$.

Câu 12: Một hãng taxi đưa ra giá cước cho loại xe 4 chỗ như sau:

Loại xe	Giá cước cho 1 km đầu tiên	Giá cước cho km thứ 2 đến km thứ 25	Giá cước cho km thứ 26 trở lên
VF 5 plus	20.000 đồng/ km	15.000 đồng/ km	15.000 đồng/ km

(qua 1 km đầu được tính cho km thứ hai, qua km thứ 25 được tính cho km thứ 26).

$$\text{Giá cước được biểu diễn bởi hàm số } T(x) = \begin{cases} 20000 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 20000 + (x-1).15000 & \text{khi } 1 < x \leq 25 \\ 380000 + (x-25).14000 & \text{khi } x > 25. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(\text{km})$.

Lời giải

+ Tại $x_0 = 1$ ta có:

$$T(1) = 20000; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 20000 = 20000$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [20000 + (x-1)15000] = 20000$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = T(1)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$

+ Tại $x_0 = 25$ ta có: $T(25) = 20000 + (25 - 1)15000 = 380000$

$$\lim_{x \rightarrow 25^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25^-} [20000 + (x - 1)15000] = 380000$$

$$\lim_{x \rightarrow 25^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25^+} [380000 + (x - 25)14000] = 380000$$

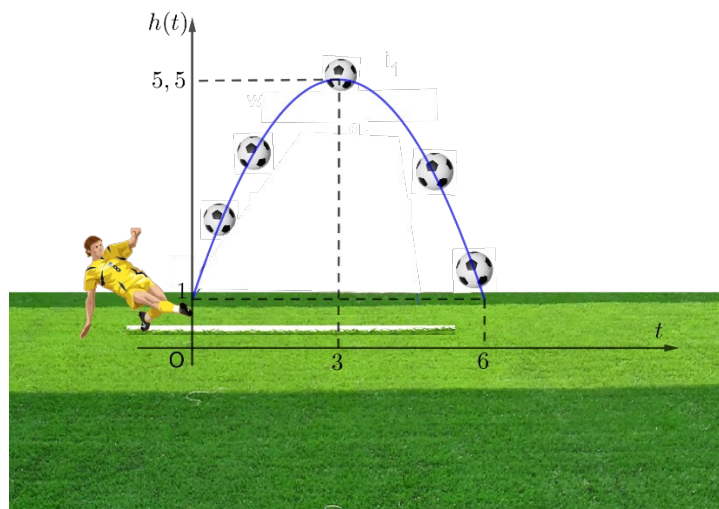
Vì $\lim_{x \rightarrow 25^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25^+} T(x) = T(25)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 25$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục

Câu 13: Biểu thị độ cao $h(t)$ của một quả bóng đá lên trên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right)$.



Lời giải

a) Hàm số $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$ có tập xác định $D = [0, 6]$. Xét trên $(0; 6)$:

+ Tại $t_0 = 0$ ta có: $f(0) = 1$; $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 1$.

Do đó $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 1$ (1).

+ Tại $t_0 = 6$ ta có: $f(6) = 1$; $\lim_{t \rightarrow 6^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 1$.

Do đó $\lim_{t \rightarrow 6^-} f(t) = f(6) = 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $[0, 6]$.

b) $\lim_{t \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 5,5$.

Câu 14: Một người lái xe ô tô, trong 20 km đầu xe chạy với vận tốc 40 km/h, sau đó cứ đến 10 km tiếp theo xe tăng tốc thêm x (km/h), $x > 0$. Biểu thức vận tốc của xe là $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{20}{5 + 2x}$ có đơn vị đo là giờ (h). Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định.



Lời giải

Hàm số $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{20}{5+2x}$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Tại $x_0 = 0$ ta có: $f(0) = 4,5$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} + \frac{20}{5+2x} \right) = 4,5$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 4,5$. Vậy hàm số liên tục trên $D = (0; +\infty)$.