

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được cách xác định mặt phẳng, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.
- + Nắm được công thức tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.
- + Nhận biết được vị trí tương đối giữa đường thẳng với mặt phẳng, giữa mặt phẳng với mặt cầu.

❖ Kỹ năng

- + Viết được phương trình tổng quát của mặt phẳng.
- + Xác định được vectơ pháp tuyến trong các trường hợp.
- + Tính được khoảng cách và góc.
- + Xác định được vị trí tương đối và vận dụng vào giải bài tập.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình mặt phẳng

Vector pháp tuyến

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) .

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương là cặp vectơ chỉ phương của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α) .

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α) .
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là một cặp vectơ chỉ phương của (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vectơ pháp tuyến của (α) .

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

- Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) .
- Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Các trường hợp đặc biệt

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$

$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) // Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) // (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) // (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) // (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

Nếu (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a;0;0), (0;b;0), (0;0;c)$ với $abc \neq 0$ thì ta có phương trình mặt

phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Chú ý: Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

2. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và mặt phẳng

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(A, (\alpha)) = \frac{|Ax_A + By_A + Cz_A + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$+) (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

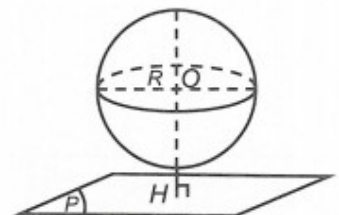
$$+) (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$+) (\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$+) (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng và mặt cầu



$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Để xét vị trí của (α) và (S) ta làm như sau:

+) Nếu $d(I, (\alpha)) > R$ thì (α) không cắt (S) .

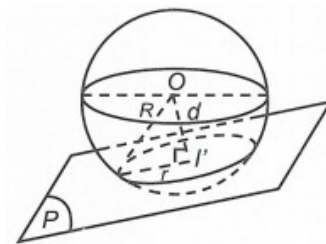
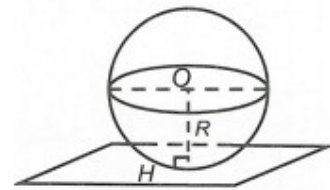
+) Nếu $d(I, (\alpha)) = R$ thì (α) tiếp xúc (S) tại H . Khi đó H được gọi là tiếp điểm đồng thời H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) và (α) được gọi là tiếp diện.

+) Nếu $d(I, (\alpha)) < R$ thì (α) cắt (S) theo đường tròn có phương trình

$$(C): \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Bán kính của (C) là $r = \sqrt{R^2 - d^2[I, (\alpha)]}$.

Tâm J của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (α) .



4. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos \widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta} \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chùm mặt phẳng

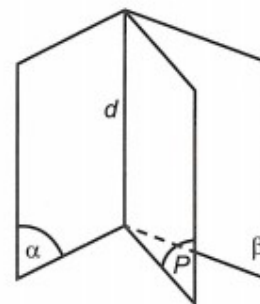
- Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng.
- Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

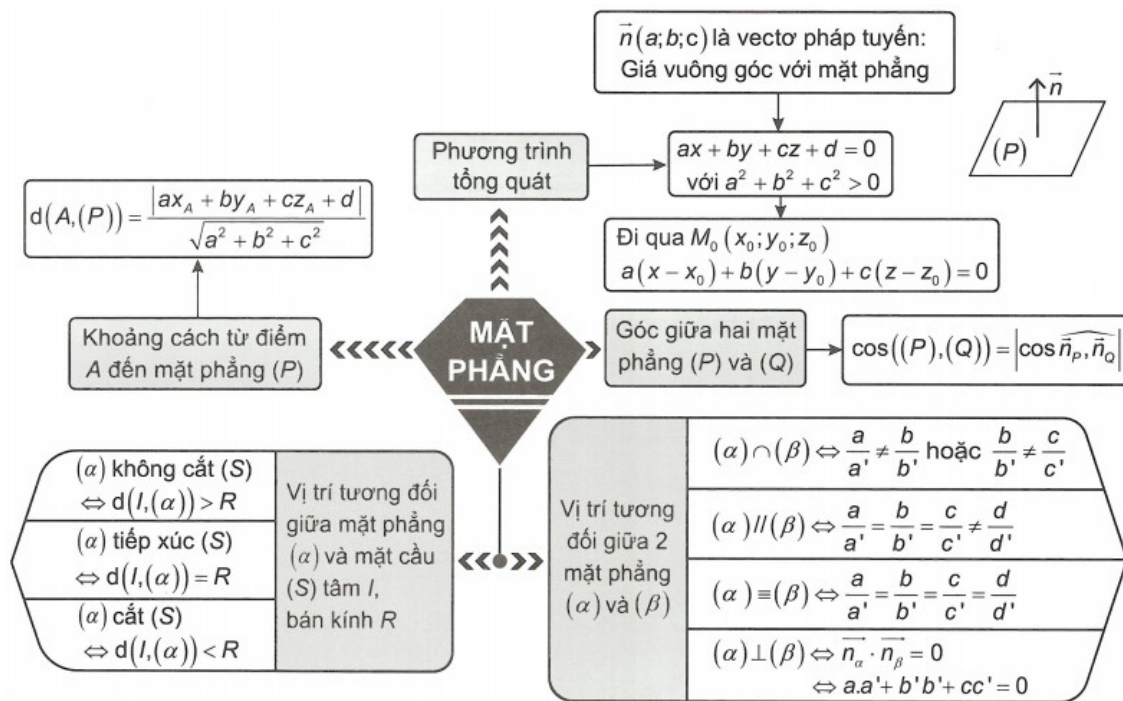
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng

$$m \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \text{ với } m^2 + n^2 \neq 0$$



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định vector pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng

Bài toán 1. Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm thuộc mặt phẳng và tìm được một vector pháp tuyến

Phương pháp giải

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ví dụ: Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{v}(-1; 2; 1)$ là:

$$-1(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - z + 6 = 0.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là

A. $\vec{n} = (3; 6; -2)$. B. $\vec{n} = (2; -1; 3)$. C. $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. D. $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}x - y + \frac{1}{3}z - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z + 6 = 0.$$

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng $\vec{n} = (3; 6; -2)$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho ba điểm $A(2;1;-1), B(-1;0;4), C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

B. $2x - y + 5z - 5 = 0$.

C. $x - 2y - 5 = 0$.

D. $x - 2y - 5z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;1;-1)$ và vuông góc với BC nên nhận $\overrightarrow{BC} = (1; -2; -5)$ làm vector pháp tuyến. Vì vậy ta viết được phương trình mặt phẳng (P) là:

$$x - 2 - 2(y - 1) - 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5z - 5 = 0.$$

Chọn A.

Chú ý: Mặt phẳng (α) đi qua một điểm M , vuông góc với đường thẳng (d) , khi đó vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một vector pháp tuyến của (α) .

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2), B(3;5;-2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có dạng $x + ay + bz + c = 0$.

Khi đó $a + b + c$ bằng

A. -2 .

B. -4 .

C. -3 .

D. 2 .

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có $M(2;1;0)$ và $\overrightarrow{AB} = (2;8;-4) = 2(1;4;-2) = 2\vec{n}$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua M và có một vector pháp tuyến là $\vec{n}$ nên có phương trình: $x + 4y - 2z - 6 = 0$

Suy ra $a = 4, b = -2, c = -6$.

Vậy $a + b + c = -4$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua điểm $A(1;1;1)$ có phương trình là

A. $y - 1 = 0$.

B. $x + y + z - 1 = 0$.

C. $x - 1 = 0$.

D. $z - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua $A(1;1;1)$ nhận $\vec{k} = (0;0;1)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $z - 1 = 0$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho mặt phẳng $(Q): x - y + 2z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) , đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$.

A. $(P): x - y + 2z + 2 = 0$.

B. $(P): x - y + 2z = 0$.

C. $(P): x - y + 2z \pm 2 = 0$.

D. $(P): x - y + 2z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

$(P) // (Q)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x - y + 2z + D = 0$ ($D \neq -2$).

Khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $M(-D; 0; 0)$, $N(0; D; 0)$.

Từ giả thiết: $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2D^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow D = 2$ (do $D \neq -2$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) : $x - y + 2z + 2 = 0$.

Chọn A.

Chú ý: Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có phương trình là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ví dụ 6: Cho điểm $M(1; 2; 5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x + y + z - 8 = 0$. **B.** $x + 2y + 5z - 30 = 0$. **C.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 0$. **D.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow \left. \begin{matrix} OA \perp BC \\ AM \perp BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAM) \Rightarrow BC \perp OM$ (1)

Tương tự $AB \perp OM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM \perp (ABC)$ hay $OM \perp (P)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$x - 1 + 2(y - 2) + 5(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0.$$

Chọn B.

Ví dụ 7: Cho tứ diện $ABCD$ có đỉnh $A(8; -14; -10)$; AD, AB, AC lần lượt song song với Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (BCD) đi qua $H(7; -16; -15)$ là trọng tâm ΔBCD có phương trình là

A. $x + 2y + 5z - 100 = 0$. **B.** $x + 2y + 5z + 100 = 0$.
C. $\frac{x}{7} + \frac{y}{-16} + \frac{z}{-15} = 0$. **D.** $\frac{x}{7} + \frac{y}{-16} + \frac{z}{-15} = 1$.

Hướng dẫn giải

Theo đề ra, ta có (BCD) đi qua $H(7; -16; -15)$, nhận $\overrightarrow{HA} = (1; 2; 5)$ là vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (BCD) là

$$\begin{aligned} (x - 7) + 2(y + 16) + 5(z + 15) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y + 5z + 100 &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $(BCD): x + 2y + 5z + 100 = 0$.

Chọn B.

Bài toán 2. Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm thuộc mặt phẳng và tìm được một cặp vector chỉ phương

 Phương pháp giải

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có cặp vector chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó một vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Ví dụ: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0; 2; -2)$ và nhận vector $\vec{a}(2, 0, 1), \vec{b}(-1, 1, 0)$ là hai vector chỉ phương.

Suy ra (P) có vector pháp tuyến là:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (1; 1; -2).$$

Từ đó ta có $(P): x + y - 2z - 6 = 0$.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hai điểm $A(1; -1; 5), B(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy có phương trình là

- A. $4x - z + 1 = 0$. B. $4x + y - z + 1 = 0$. C. $2x + z - 5 = 0$. D. $x + 4z - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Do mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy nên vector pháp tuyến của (P) là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{j}] = (4; 0; -1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$4(x - 0) + 0(y - 0) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - z + 1 = 0$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1); B(2; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với (P) . Phương trình mặt phẳng (Q) là

- A. $2x + 5y + 3z - 9 = 0$. B. $2x + y - 3z - 7 = 0$.
C. $2x + y - z - 5 = 0$. D. $x - 2y - z - 6 = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$ và $\vec{n}_P = (2; 1; -3)$.

$$\text{Suy ra } \vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_P] = (2; 5; 3).$$

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(1; 2; -1)$ nên $2(x - 1) + 5(y - 2) + 3(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 5y + 3z - 9 = 0$$

Chọn A.

Chú ý: Mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β) :

+) Xác định vector chỉ phương $\vec{u}$ của (d) và vector pháp tuyến $\vec{n}_\beta$ của (β) .

Một vector pháp tuyến của (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n}_\beta]$.

+) Lấy một điểm M thuộc d thì $M \in (\alpha)$.

Ví dụ 3: Mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng

$(P): x - y + z - 7 = 0, (Q): 3x + 2y - 12z + 5 = 0$ có phương trình là

A. $2x - 3y - z = 0$. B. $10x - 15y + 5z + 2 = 0$. C. $10x + 15y + 5z - 2 = 0$. D. $2x + 3y + z = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(P): x - y + z - 7 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -1; 1)$ và

$(Q): 3x + 2y - 12z + 5 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3; 2; -12)$

Do $(\alpha) \perp (P)$ và $(\alpha) \perp (Q)$ nên (α) có vector pháp tuyến là

$\vec{n} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (10; 15; 5)$.

Vậy (α) có phương trình $10x + 15y + 5z = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + z = 0$.

Chọn D.

Chú ý: Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau $(\beta), (\gamma)$: Chọn vector pháp tuyến của (α) là:

$\vec{n} = [\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma]$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + y - z + d = 0$. Hãy xác định a và d .

A. $a = 1, d = 1$. B. $a = 6, d = -6$. C. $a = -1, d = -6$. D. $a = -6, d = 6$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1); \overrightarrow{AC} = (-2; 0; -2)$.

$[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 6; -6)$.

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (1; 1; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y - 1 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$.

Vậy $a = 1, d = 1$.

Chọn A.

Chú ý: Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C . Khi đó ta có thể xác định một vector pháp tuyến của (α) là:

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $ax + by + cz + 5 = 0$ qua hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và vuông góc với $(P): 2x - y + 3z + 4 = 0$.

Giá trị của $a - b + c$ bằng

A. 9.

B. 12.

C. 10.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Gọi $(\alpha): ax + by + cz + 5 = 0$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 5), \overrightarrow{n_p} = (2; -1; 3)$.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}] = (-1; 13; 5)$ làm vector pháp tuyến nên (α) có dạng $-x + 13y + 5z + D = 0$.

Mặt phẳng (α) qua $A(3;1;-1)$ nên $-3 + 13.1 + 5.(-1) + D = 0 \Leftrightarrow D = -5$.

$\Rightarrow (\alpha): -x + 13y + 5z - 5 = 0$ hay $(\alpha): x - 13y - 5z + 5 = 0$.

Suy ra $a = 1; b = -13; c = -5$.

Vậy $a - b + c = 9$.

Chọn A.

Bài toán 3. Lập phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách

 **Phương pháp giải**

Sử dụng các công thức liên quan đến khoảng cách:

Khoảng cách từ điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ là

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: $d[(\alpha), (\beta)] = d[M, (\beta)]$ trong đó điểm $M \in (\alpha)$.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình của các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x + y - z + 6 = 0; x + y - z = 0$.

B. $x + y - z + 6 = 0$.

C. $x - y - z + 6 = 0; x - y - z = 0$.

D. $x + y + z + 6 = 0; x + y + z = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Ta có $A(0;0;3) \in (\beta)$.

Do $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng:

$x + y - z + m = 0$ với $m \neq 3$.

Ta có $d((\alpha), (\beta)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow d(A, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$$\Leftrightarrow |m-3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình của các mặt phẳng cần tìm là

$$x + y - z + 6 = 0 \text{ và } x + y - z = 0.$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): x + 3z + 2 = 0, (Q): x + 3z - 4 = 0.$$

Mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) có phương trình là:

$$\text{A. } x + 3z - 1 = 0. \quad \text{B. } x + 3z - 2 = 0. \quad \text{C. } x + 3z - 6 = 0. \quad \text{D. } x + 3z + 6 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Điểm $M(x; y; z)$ bất kỳ cách đều (P) và $(Q) \Leftrightarrow d(M; (P)) = d(M; (Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + 3z + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|x + 3z - 4|}{\sqrt{1 + 9}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z + 2 = x + 3z - 4 \\ x + 3z + 2 = -x - 3z + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -4 \\ x + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3z - 1 = 0.$$

Vậy M thuộc $(\alpha): x + 3z - 1 = 0$. Nhận thấy (α) song song với (P) và (Q) .

Chọn A.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; 4; 0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 46 = 0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

$$\text{A. } -3. \quad \text{B. } -6. \quad \text{C. } 3. \quad \text{D. } 6.$$

Hướng dẫn giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (P) .

Theo giả thiết, ta có: $AB = 3, AH = 6, BK = 3$.

Do đó A, B ở cùng phía với mặt phẳng (P) .

Lại có: $AB + BK \geq AK \geq AH$. Mà $AB + BK = AH$ nên $H \equiv K$.

Suy ra A, B, H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5; 6; -1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(5; 6; -1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x - 5) + 2(y - 6) - 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 23 = 0$

Theo bài ra, ta có $(P): -4x - 4y + 2z + 46 = 0$ nên $a = -4, b = -4, c = 2$.

Vậy $T = a + b + c = -6$.

Chọn B.

Bài toán 4. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu



Phương pháp giải

Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H .

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R , khi đó ta viết được phương trình mặt phẳng (α) đi qua H

và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$.

Gọi (α) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm $A(1;3;2)$ và $I(1;0;2)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt phẳng (α) nhận $\overrightarrow{IA} = (0;3;0)$ làm vectơ pháp tuyến. Mặt khác, mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;3;2)$ nên có phương trình tổng quát là $y - 3 = 0$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.

B. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

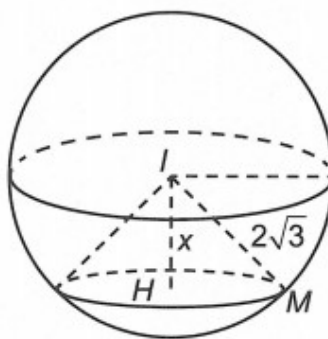
D. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(\alpha) \parallel (P)$ nên $(\alpha): 2x + 2y - z + d = 0$ ($d \neq -3$).

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi (H) là khối nón thỏa mãn đề bài với đường sinh $IM = R = 2\sqrt{3}$.



Đặt $x = h = d(I, (\alpha))$. Khi đó bán kính đường tròn đáy hình nón là $r = \sqrt{12 - x^2}$.

Thể tích khối nón là $V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi (12 - x^2) x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{3} \pi (12 - x^2) x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$ hay $d(I, (\alpha)) = 2$.

$$\text{Ta có } d(I, (\alpha)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 3 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} d - 5 = 6 \\ d - 5 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 11 \\ d = -1 \end{cases}$$

Chọn B.

Chú ý: Công thức tính thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3}.2\pi R.h$$

Trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với mặt cầu (B, C, D là các tiếp điểm). Phương trình mặt phẳng (BCD) là

A. $2x + 2y + z - 1 = 0$.

B. $2x + 2y + z - 3 = 0$.

C. $2x + 2y + z + 1 = 0$.

D. $2x + 2y + z - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R = 2$.

Do AB, AC, AD là ba tiếp tuyến của mặt cầu (S) với B, C, D là các tiếp điểm nên

$$\begin{cases} AB = AC = AD \\ IB = IC = ID = R \end{cases} \Rightarrow IA \text{ là trục của đường tròn ngoại tiếp } \triangle BCD.$$

$$\Rightarrow IA \perp (BCD).$$

Khi đó mặt phẳng (BCD) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (2;2;1)$.

Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow J \in IA$ và $IJ \perp BJ$.

Ta có $\triangle IBA$ vuông tại B và $BJ \perp IA$ nên

$$IB^2 = IJ \cdot IA \Rightarrow IJ = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA}.$$

Đặt $J(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{IJ} = (x; y; z-1); \overrightarrow{IA} = (2;2;1)$.

$$\text{Từ } \overrightarrow{IJ} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \text{ suy ra } J\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right).$$

Mặt phẳng (BCD) đi qua $J\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right)$ và nhận vector pháp tuyến $\vec{n} = (2;2;1)$ có phương trình:

$$2\left(x - \frac{8}{9}\right) + 2\left(y - \frac{8}{9}\right) + \left(z - \frac{13}{9}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

Chọn D.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Xét điểm M di động trên (P) và các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S) . Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $(0; -1; 3)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$.

D. $(0; 3; -1)$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a; b; c) \in (P); A(x; y; z) \in (S)$ nên ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 \\ AI^2 + AM^2 = IM^2 \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 \quad (1) \\ 12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \quad (2) \\ a - 2b + 2c + 11 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta có:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - [12 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] \\ = 12 - [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Vậy mặt phẳng đi qua ba tiếp điểm là:

$$(Q): (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định $(0; 3; -1)$.

Chọn D.

Bài toán 5. Phương trình mặt phẳng đoạn chắn

Phương pháp giải

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ví dụ: Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$ là:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (ABC) là

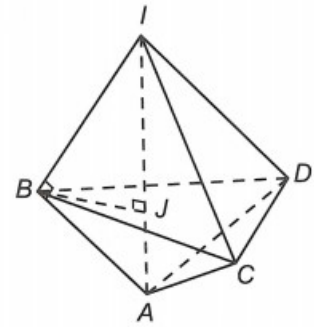
$$\text{A. } \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1. \quad \text{B. } \frac{x}{1} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1. \quad \text{C. } \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0. \quad \text{D. } -\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$ lần lượt là hình chiếu của M lên Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; 0; 0), N(2; 2; 2)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M, N cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b, c \neq 0$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?



A. $b + c = 6$.

B. $bc = 3(b + c)$.

C. $bc = b + c$.

D. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) đi qua $M(3;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $b, c \neq 0$ nên phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mặt phẳng (P) đi qua $N(2;2;2)$ suy ra $\frac{2}{3} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$.

Chọn D.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Phương trình mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 1$.

B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

C. $3x + 12y + 9z - 78 = 0$.

D. $4x + 16y + 12z - 104 = 0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$.

$$G(1;4;3) \text{ là trọng tâm tứ diện } OABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + a + 0 + 0 = 4.1 \\ 0 + 0 + b + 0 = 4.4 \\ 0 + 0 + 0 + c = 4.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \\ c = 12 \end{cases}$$

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x + 2y + z - 14 = 0$.

B. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

C. $(P): x + 2y + 3z - 11 = 0$.

D. $(P): x + y + 3z - 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trực tâm ΔABC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BH \perp AC \\ OB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp OH \quad (1).$$

Chứng minh tương tự, ta có: $BC \perp OH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $OH \perp (ABC)$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}.$$

Vậy để biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất. Mà $OH \leq OM$ nên OH đạt giá trị lớn nhất bằng OM hay $H \equiv M$.

Khi đó $OM \perp (ABC)$ nên (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 3)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Chọn B.

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M(4; -4; 1)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và các trục tọa độ. Khi đó (P) có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} M \in (P) \\ OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} - \frac{4}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |c| = \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8, b = -4, c = 2 \\ a = 8, b = -4, c = -2 \\ a = 16, b = -8, c = 4 \end{cases}$$

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn C.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0)$. Mặt phẳng $x + ay + bz + c = 0$ đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$. Giá trị của $a + 3b - 2c$ là

A. 16.

B. 1.

C. 10.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại $C(0; 0; t)$ với $t > 0$ có phương trình là

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{t} = 1.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{OABC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}. OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng } \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

Vậy $a = b = 1, c = -1$.

Suy ra $a + 3b - 2c = 1 + 3.1 + 2 = 6$.

Chọn D.

 Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y + 2z - 3 = 0$. Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

- A. $\vec{n} = (-1; 1; -2)$. B. $\vec{n} = (1; 1; -2)$. C. $\vec{n} = (-1; 2; -3)$. D. $\vec{n} = (1; 2; -3)$.

Câu 2: Cho ba điểm $A(2; 1; -1), B(-1; 0; 4), C(0; -2; -1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

- A. $x - 2y - 5z - 5 = 0$. B. $2x - y + 5z - 5 = 0$.
C. $x - 2y - 5 = 0$. D. $x - 2y - 5z + 5 = 0$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Trong các mặt phẳng sau, mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) là

- A. $3x + 2y + z - 14 = 0$. B. $2x + y + z - 9 = 0$.
C. $3x + 2y + z + 14 = 0$. D. $2x + y + 3z + 9 = 0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1), B(0; -1; 3)$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) là

- A. $x - 2y + 2z - 1 = 0$. B. $x - 2y - 2z + 1 = 0$. C. $x - 2y - 2z - 1 = 0$. D. $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 1; 1), B(1; 0; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. (Q) là mặt phẳng song song với (P) đồng thời đường thẳng AB cắt (Q) tại C sao cho $CA = 2CB$. Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

- A. $x + y + z - \frac{4}{3} = 0$ hoặc $x + y + z = 0$. B. $x + y + z = 0$.
C. $x + y + z - \frac{4}{3} = 0$. D. $x + y + z - 2 = 0$ hoặc $x + y + z = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ một khoảng bằng 1 đồng thời (P) không đi qua O là

- A. $x + 2y + 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y + 2z = 0$.
C. $x + 2y + 2z - 6 = 0$. D. $x + 2y + 2z + 3 = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (ABC) , cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của (P) là

- A. $6x + 3y + 2z - 24 = 0$. B. $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.
C. $6x + 3y + 2z = 0$. D. $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;3), B(2;1;2), C(4;1;6)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x - y - z - 1 = 0$.

B. $x + y - z - 2 = 0$.

C. $x - y + 2z - 7 = 0$.

D. $x - y - z + 2 = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC .

A. $(P): 6x + 3y + 2z + 18 = 0$.

B. $(P): 6x + 3y + 2z + 6 = 0$.

C. $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

D. $(P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục toạ độ tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 8π .

A. $(\alpha): 3x - z = 0$.

B. $(\alpha): 3x + z = 0$.

C. $(\alpha): x - 3z = 0$.

D. $(\alpha): 3x + z + 2 = 0$.

Bài tập nâng cao

Câu 12: Cho điểm $M'(4;-7;-5), N(3;-9;-10)$ và các đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng đi qua điểm N và lần lượt song song với Ox, Oy, Oz . Mặt phẳng (P') đi qua M' cắt d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A', B', C' sao cho M' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$. Phương trình mặt phẳng (P') là

A. $x + 2y + 5z - 35 = 0$.

B. $x + 2y + 5z + 35 = 0$.

C. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-7} + \frac{z}{-5} = 0$.

D. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-7} + \frac{z}{-5} = 1$.

Câu 13: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;1)$. Xét ba mặt cầu tiếp xúc ngoài đôi một với nhau và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) lần lượt tại A, B, C . Tổng diện tích của ba mặt cầu trên là:

A. $\frac{33\pi}{2}$.

B. 36π .

C. $\frac{31\pi}{2}$.

D. 54π .

Câu 14: Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$, các điểm $A(0;1;1), B(1;0;0)$ với A và B nằm trên mặt phẳng (P) và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$. CD là một đường kính thay đổi của (S) sao cho $CD \parallel (P)$ và bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Dạng 2. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa mặt cầu và mặt phẳng

Bài toán 1. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng



Phương pháp giải

Cho hai mặt phẳng:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$;

$$(P'): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Khi đó:

- (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$.
- $(P) // (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.
- $(P) \equiv (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.
- $(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(P')} = 0$.
 $\Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

Chú ý:

- Nếu $A = 0$ thì tương ứng $A' = 0$.
- Nếu $B = 0$ thì tương ứng $B' = 0$.
- Nếu $C = 0$ thì tương ứng $C' = 0$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-m} \neq \frac{-1}{-2}$$

$$(\text{vô lý vì } \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-1}).$$

Vậy không tồn tại m để hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với nhau.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $2x - y - z - 2 = 0$. B. $x - y - z - 2 = 0$. C. $x + y + z - 2 = 0$. D. $2x + y + z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_P = (2; 1; 1)$.

Mặt phẳng $(Q): x - y - z - 2 = 0$ có một vector pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -1; -1)$.

$$\text{Mà } \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

Vậy mặt phẳng $x - y - z - 2 = 0$ là mặt phẳng cần tìm.

Chọn B.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình

$$mx + (m-1)y + z - 10 = 0 \text{ và mặt phẳng } (Q): 2x + y - 2z + 3 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau?

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

(P): $mx + (m-1)y + z - 10 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (m; m-1; 1)$.

(Q): $2x + y - 2z + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; 1; -2)$.

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2m + m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn C.**Bài toán 2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng** **Phương pháp giải**

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu tâm I ; bán kính R .

- (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) > R$.
- (α) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Khi đó (α) là tiếp diện.
- (α) và (S) cắt nhau $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) < R$.

Khi đó (O) có tâm là hình chiếu của I trên (α) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (\alpha))}$.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

Mặt phẳng nào cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$?

A. $4x - 3y - z - 4\sqrt{26} = 0$.

B. $2x + 2y - z + 12 = 0$.

C. $3x - 4y + 5z - 17 + 20\sqrt{2} = 0$.

D. $x + y + z + \sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Suy ra tâm $I(3; -2; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Ta gọi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới các mặt phẳng ở các đáp án là h , khi đó để mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r = 3$ thì $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Đáp án A loại vì $h = \frac{|18 - 4\sqrt{26}|}{\sqrt{26}} \neq 4$.

Đáp án B loại vì $h = \frac{14}{3} \neq 4$.

Chọn đáp án C vì $h = 4$.

Đáp án D loại vì $h = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \neq 4$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng

(P): $2x + 2y + z + 5 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π là

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{16} = 4$.

Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn nên ta có

$R^2 = a^2 + r^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm I , bán kính $R = 5$ là:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Tìm phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$.

Vì $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình (α) có dạng: $4x + 3y - 12z + d = 0, d \neq 10$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên

$d_{(I, (\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -26 \\ d = 78 \end{cases}$.

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Chọn C.



Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây song song với mặt phẳng (Oxz) ?

A. $(P): x - 3 = 0$.

B. $(Q): y - 2 = 0$.

C. $(R): z + 1 = 0$.

D. $(S): x + z + 3 = 0$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x - y + mz - m + 1 = 0$, với m là tham số thực. Giá trị của m để $(\alpha) \perp (\beta)$ là

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. -4 .

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu số thực m để mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$ song song với mặt phẳng $(Q): 2x + (m + 2)y - 2mz - m = 0$?

- A. 1 . B. 0 . C. Vô số. D. 2 .

Câu 4: Cho mặt cầu (S) có đường kính 10 cm và mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng 4 cm. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. (P) và (S) có vô số điểm chung.
B. (P) tiếp xúc với (S) .
C. (P) cắt (S) theo một đường tròn bán kính 3 cm.
D. (P) cắt (S) .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 12$. Mặt phẳng nào sau đây cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn?

- A. $(P_1): x + y - z + 2 = 0$. B. $(P_2): x + y - z - 5 = 0$.
C. $(P_3): x + y - z + 10 = 0$. D. $(P_4): x + y - z - 10 = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ và mặt phẳng (P) có phương trình $4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng một điểm chung.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$ hoặc $m = -21$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 21$. D. $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 4$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + my + z - 3m - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 .

- A. $m = 1$. B. $m = -1$ hoặc $m = -2$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 2$. D. $m = -1$.

Bài tập nâng cao

Câu 8: Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$ đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O . Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$ bằng

- A. 7 . B. -9 . C. -7 . D. 9 .

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$ và điểm $A(2; 11; -5)$. Biết khi m thay đổi thì luôn tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua A . Tổng bán kính hai mặt cầu đó bằng

- A. $7\sqrt{2}$. B. $15\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $12\sqrt{2}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 4 = 0$ và $(Q): 2x - y + 2z - 4 = 0$ lần lượt tại các điểm A, B . Độ dài đoạn AB là

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

Dạng 3. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Phương pháp giải

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1; -2; 3)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình $x + 3y - 4z + 9 = 0$ là

$$d(A, (P)) = \frac{|1 + 3(-2) - 4 \cdot 3 + 9|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{4\sqrt{26}}{13}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. 3. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Vì $(P) // (Q)$ nên $d((P), (Q)) = d(A, (Q))$ với $A \in (P)$.

$$\text{Chọn } A(0; 0; 5) \in (P) \text{ thì } d(A, (Q)) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}.$$

Chọn D.

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3), B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = -3$. D. $m = \pm 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ (1).

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là

$$d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \quad (2).$$

$$\text{Vì } AB = d(A, (P)) \Leftrightarrow 3 = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}} \Leftrightarrow 9(5 + m^2) = 9(m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn A.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A = (1; 2; 1)$, $B = (2; 1; 3)$,

$C = (3; 2; 2)$, $D = (1; 1; 1)$. Độ dài chiều cao DH của tứ diện bằng

- A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{14}$. C. $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. D. $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{AB} = (1; -1; 2)$, $\overline{AC} = (2; 0; 1) \Rightarrow [\overline{AB}; \overline{AC}] = (-1; 3; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$-1(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 2z - 7 = 0.$$

Độ dài chiều cao DH của tứ diện $ABCD$ là khoảng cách từ D đến (ABC) .

$$\text{Suy ra } DH = d(D, (ABC)) = \frac{|-1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

Chọn A.

Ví dụ 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a; b; c)$ với $a, b, c \neq 0$. Xét (P) là mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A . Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến mặt phẳng (P) bằng

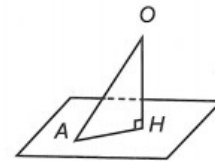
- A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. B. $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. C. $3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D. $4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) .

Khi đó

$$d(O, (P)) = OH \leq OA = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**Chọn A.****📌 Bài tập tự luyện dạng 3**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Điểm M là giao điểm của mặt phẳng (P) với trục Oz . Khoảng cách từ M tới mặt phẳng (Q) bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{7}{3}$. C. 3. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 2: Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, tất cả các điểm M nằm trên Oz có khoảng cách đến mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$ bằng 2 là

A. $M(0; 0; -4)$.

B. $M(0; 0; 0), M(0; 0; -2)$.

C. $M(0; 0; 2)$.

D. $M(0; 0; 2), M(0; 0; -4)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $AM = 4$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 12.

Bài tập nâng cao

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A , bán kính bằng 3 và (S_2) là mặt cầu tâm B , bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{58 + 36\sqrt{61}}{127}$.

B. $\frac{11 + 3\sqrt{61}}{9}$.

C. $\frac{11 + 2\sqrt{61}}{9}$.

D. $\frac{63\sqrt{61} - 89}{169}$.

Dạng 4. Góc giữa hai mặt phẳng



Phương pháp giải

Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình:

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Góc giữa $(\alpha), (\beta)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai vector pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos(\widehat{(\alpha), (\beta)}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chú ý: $0^\circ \leq \widehat{(\alpha), (\beta)} \leq 90^\circ$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình là $x - z - 3 = 0$. Tính góc giữa (P) và mặt phẳng (Oxy) .

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng $(P): x - z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$ và mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là điểm $H(2; -1; -2)$.

Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x - y - 5 = 0$ là

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Hướng dẫn giải

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng (Q) .

Ta có $\overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) và $\vec{n} = (1; -1; 0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{OH}, \vec{n}) \right| = \frac{\left| \overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \overrightarrow{OH} \right| \cdot \left| \vec{n} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 4

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ là

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0; 1; 0), B(1; 0; 0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc 60° .

- A. $(5; 8)$. B. $(8; 11)$. C. $(0; 3)$. D. $(3; 5)$.

Bài tập nâng cao

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $AB = 3, AD = 4, \widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD và BC , α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

- A. $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$. B. $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$. C. $\alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$. D. $\alpha \in (45^\circ; 60^\circ)$.

Dạng 5. Một số bài toán cực trị

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 2; 0), C(3; -1; 2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $P = \left| 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC} \right|$.

- A. $P_{\min} = 20$. B. $P_{\min} = 5$. C. $P_{\min} = 25$. D. $P_{\min} = 27$.

Hướng dẫn giải

Gọi điểm $I(x; y; z)$ sao cho $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 3(1-x) + 5(-1-x) - 7(3-x) = 0 \\ 3(1-y) + 5(2-y) - 7(-1-y) = 0 \\ 3(1-z) + 5(0-z) - 7(2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = 20 \\ z = -11 \end{cases} \Rightarrow I(-23; 20; -11).$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= |3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}| = |3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 5(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 7(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| \\ &= |\overrightarrow{MI} + (3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC})| = |\overrightarrow{MI}| = MI. \end{aligned}$$

$P_{\min}$ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) .

$$\text{Khi đó: } P_{\min} = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-23) - 20 + 2 \cdot (-11) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 27.$$

Chọn D.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 5; -5), B(5; -3; 7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

A. $M(-2; 1; 1)$. B. $M(2; -1; 1)$. C. $M(6; -18; 12)$. D. $M(-6; 18; 12)$.

Hướng dẫn giải

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} - 2(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow I(13; -11; 19).$$

$$\text{Ta có } MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{MA})^2 - 2(\overrightarrow{MB})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = -MI^2 + (IA^2 - 2IB^2).$$

$MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó I là hình chiếu vuông góc của M lên (P) .

Ta tìm được $M(6; -18; 12)$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m; 0; 0), N(0; n; 0), P(0; 0; p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{27}$.

Hướng dẫn giải

Do M, N, P không trùng với gốc tọa độ nên $m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$.

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (MNP) \text{ là: } \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m}x + \frac{1}{n}y + \frac{1}{p}z - 1 = 0.$$

$$\text{Suy ra } d(O, (MNP)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương m^2, n^2, p^2 và ba số dương $\frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{p^2}$ ta có:

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq 3\sqrt[3]{m^2 n^2 p^2} \text{ và } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{m^2 n^2 p^2}}.$$

$$\text{Suy ra } (m^2 + n^2 + p^2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9 \text{ (do } m^2 + n^2 + p^2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $d(O, (MNP)) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m^2 = n^2 = p^2 = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn C.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overline{MN}$ cùng phương với vector $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Hướng dẫn giải

(S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 1$.

$$\text{Ta có: } d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2 > R.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH .

Vì $\overline{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi.

$$\triangle MNH \text{ vuông tại } H \text{ có } \alpha = \widehat{HNM} \text{ nên } HN = MN \cdot \cos \alpha \Rightarrow MN = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot HN$$

$$\text{Do đó } MN \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow HN \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow HN = d(I, (P)) + R = 3.$$

$$\text{Có } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}_P) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ nên } MN = \frac{1}{\cos \alpha} HN = 3\sqrt{2}.$$

Chọn C.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ (với a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0; -1; 2), N(-1; 1; 3)$ và không đi qua điểm $H(0; 0; 2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của tổng $T = a - 2b + 3c + 12$ bằng

- A. -16 . B. 8 . C. 12 . D. 16 .

Hướng dẫn giải

Gọi K là hình chiếu của H lên (P) , E là hình chiếu của H lên MN .

Ta có $d(H;(P)) = HK$ và $d(H;MN) = HE$, $HK \leq HE$ (không đổi).

Vậy $d(H;(P))$ lớn nhất khi $K \equiv E$, với E là hình chiếu của H lên MN .

$$\text{Suy ra } E\left(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ làm vector pháp tuyến và đi qua M có phương trình là $-x - y + z - 3 = 0$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy $T = 16$.

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 5

Bài tập cơ bản

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 6$. D. $P = -2$.

Câu 2: Cho $A(4;5;6); B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$. Khi đó $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là

- A. $\sqrt{77}$. B. $\sqrt{41}$. C. 7. D. $\sqrt{85}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - z + 5 = 0$ và hai điểm $A(1;0;2), B(2;-1;4)$. Tập hợp các điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

- A. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 7 = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 14 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - 7y - 4z + 5 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$

Bài tập nâng cao

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và mặt phẳng

$(P): (m^2 + 2m)x - (m^2 + 4m - 1)y + 2(3m - 1)z + m^2 + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) .

- A. 5. B. $\sqrt{29}$. C. $\sqrt{33}$. D. $\sqrt{21}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 45$ và $M(1;4;5)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng luôn đôi một vuông góc với nhau tại O và cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là A, B, C . Khoảng cách lớn nhất từ M đến mặt phẳng (ABC) là

- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. 4. D. $\sqrt{6}$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Xác định vector pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng

1-A	2-A	3-A	4-D	5-A	6-C	7-A	8-A	9-C	10-A
11-A	12-B	13-A	14-A						

Dạng 2. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng và mặt cầu

1-B	2-A	3-B	4-C	5-A	6-C	7-A	8-B	9-D	10-C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Dạng 3. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1-B	2-D	3-A	4-C						
-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--

Dạng 4. Góc giữa hai mặt phẳng

1-D	2-C	3-A							
-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--	--

Dạng 5. Một số bài toán cực trị

1-A	2-B	3-C	4-B	5-D					
-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--