

Câu 1. (1,0 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Câu 2. (1,0 điểm) Tìm để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

Câu 3. (1,0 điểm)

a) Tìm mô đun của số phức z thỏa mãn $(1+i)z = (2+i)(3-i)$

b) Giải phương trình $16^x - 3.4^{x+1} + 32 = 0$

Câu 4. (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) x dx$.

Câu 5. (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với đường thẳng d . Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d .

Câu 6. (1,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sin x (\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 \cos 2x) = 0$.

b) Trong kì thi THPT quốc gia năm 2016, để xét công nhận tốt nghiệp THPT, thí sinh phải thi 4 môn, gồm 3 môn thi bắt buộc là Toán, Ngữ văn, Ngoại ngữ và 1 môn thi do thí sinh tự chọn trong các môn: Lịch sử, Địa lí, Vật lí, Hóa học, Sinh học. Lớp 12A1 có 10 học sinh chỉ đăng kí xét tốt nghiệp. Tính xác suất để trong 10 học sinh đó có 6 học sinh trùng môn tự chọn.

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 6a$, $AD = 2a$, tam giác SAB đều, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD)

Câu 8. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trực tâm tam giác ABC , D là hình chiếu của B lên đường thẳng AC , M là trung điểm của cạnh BC , đường thẳng MD đi qua điểm $E(-2; -1)$ và phương trình đường tròn đường kính AH là

$\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{16}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm A thuộc đường

thẳng $d: x - y + 1 = 0$, hoành độ của điểm A lớn hơn 3 và tung độ của điểm M nhỏ hơn 2.

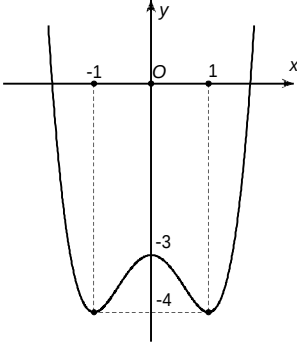
Câu 9. (1,0 điểm) Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x+1} - (2-x)\sqrt{1-x} = \frac{x^3 + 8x}{2-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Câu 10. (1,0 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $c < a; c < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất

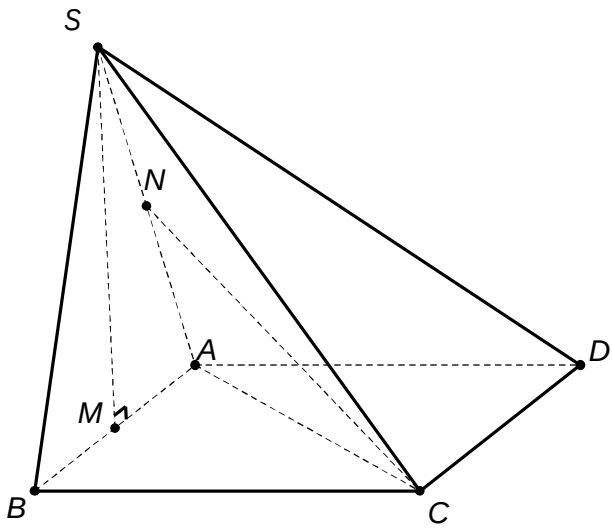
của biểu thức $P = (a-b)^2 \left[\frac{(2a+c)^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{(2b+c)^2}{(a^2+c^2)^2} - \frac{64}{ab+bc+ca} \right]$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm																		
1.		1,0																		
	*TXĐ: $\mathbb{R}$ * Sự biến thiên Ta có $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; x = 0$	0,25																		
	Hàm số đồng biến trên $(-1; 0); (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1); (0; 1)$ Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y(0) = -3$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1; y(\pm 1) = -4$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0,25																		
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-4</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'		0	0	0		y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$	0,25
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$															
y'		0	0	0																
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$															
	Đồ thị 	0,25																		
2.		1,0																		
	Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x}{x+1} = x + m$ (1), ĐK: $x \neq -1$.	0,25																		
	(1) $\Leftrightarrow 2x = (x + m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + m = 0$ (2)	0,25																		
	Để thấy, $x = -1$ không là nghiệm của (2) nên (d) cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt.	0,25																		
	$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{2} \\ m < 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$	0,25																		

3.a		0,5
	$(1+i)z = (2+i)(3-i) \Leftrightarrow (1+i)z = 7+i \Leftrightarrow 2z = (7+i)(1-i) \Leftrightarrow z = 4-3i$	0,25
	$\Rightarrow z = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$	0,25
3.b		0,5
	$16^x - 3.4^{x+1} + 32 = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} - 12.4^x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4 \\ 4^x = 8 \end{cases}$	0,25
	$4^x = 4 \Leftrightarrow x = 1$ $4^x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$	0,25
4		0,5
	Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx$	0,25
	Mà $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2} \end{cases}$	0,25
	Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2} dx$	
	$= \frac{\pi}{8} + \frac{\cos 2x}{4} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{8}.$ Vậy $I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi-2}{8}.$	0,25
5		1,0
	Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -1).$	0,25
	Mà $\Delta // d$ nên Δ nhận véc tơ $\vec{u} = (2; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương.	
	Hơn nữa Δ đi qua điểm $A(1; -2; 3)$ nên phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}.$	0,25
	Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Giả sử $H(-1+2t; 2+t; -3-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(-2+2t; 4+t; -6-t).$	0,25
	Ta có $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(-2+2t) + (4+t) + (-6-t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$	
	Khi đó $H(-3; 1; -2) \Rightarrow d(A; d) = AH = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$	0,25

6.a.		0,5
	$\sin x (\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & (1) \\ \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \cos 2x & (2) \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
	$(2) \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,25
6.b.		0,5
	Mỗi học sinh có 5 lựa chọn cho môn tự chọn. Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 5^{10}$.	0,25
	Gọi A là biến cố “Trong lớp có 6 bạn trùng môn tự chọn”. Chọn 6 học sinh có trùng môn tự chọn có C_{10}^6. Chọn môn tự chọn cho 6 học sinh đó có 5 cách. 4 học sinh còn lại, mỗi em có 4 lựa chọn cho môn tự chọn nên có 4^4 cách. Do đó, số kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = C_{10}^6 \cdot 5 \cdot 4^4$ Vì vậy, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^6 \cdot 5 \cdot 4^4}{5^{10}} = 0,02752512$.	0,25
7		1,0
	 Gọi hình chiếu của S trên AB là M. Ta có $SM \perp AB, (SAB) \cap (ABCD) = AB,$ $(SAB) \perp (ABCD)$ Nên $SM \perp (ABCD)$. Do tam giác SAB đều nên $SM = \frac{\sqrt{3}}{2} SA = 3\sqrt{3}a.$	0,25
	Khi đó thể tích chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SM \cdot S_{ABCD} = 48\sqrt{3}a^3$ (đvtt)	0,25
	Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD); α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB). Vì $AD \perp (SAB)$ nên $\varphi = 90^\circ - \alpha$. Ta lại có $BC \perp (SAB)$ nên $\triangle SAB$ là hình chiếu của $\triangle SAC$ trên mặt phẳng (SAB). Do đó, $\sin \varphi = \cos \alpha = \frac{S_{SAC}}{S_{SAB}}.$	0,25

$$S_{SAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} (6a)^2 = 9\sqrt{3}a^2; AC = 10a, SA = 6a, SC = \sqrt{SM^2 + MC^2} = 10a.$$

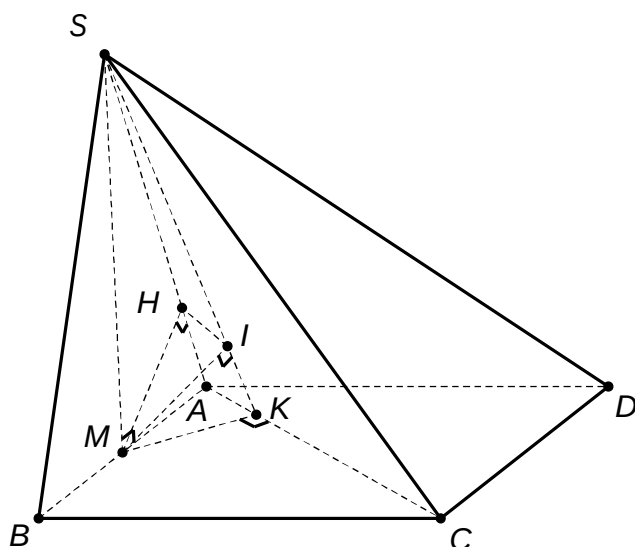
Gọi N là trung điểm của SA . Khi đó,

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot S_{ACN} = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot \sqrt{100a^2 - 9a^2} = 3\sqrt{91}a^2.$$

$$\text{Vì vậy, } \sin \varphi = \cos \alpha = \frac{S_{SAC}}{S_{SAB}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}} = \frac{3\sqrt{273}}{91}$$

0,25

Cách 2.



Kẻ $MH \perp SA (H \in SA) \Rightarrow MH \perp (SAD)$

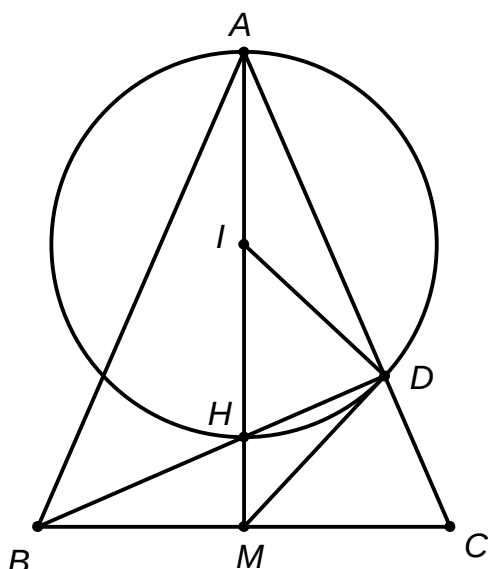
Kẻ $MK \perp AC (K \in AC), MI \perp SK (I \in SK) \Rightarrow MI \perp (SAC)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(SAD) \Rightarrow \varphi = \widehat{(MH; MI)} = \widehat{HMI}$

$$\text{Lại có: } MH = AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{MK}{BC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow MK = \frac{12a}{5} \Rightarrow MI = 12a\sqrt{\frac{3}{91}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{MH}{MI} = \frac{8\sqrt{91}}{91}.$$



Ta có $A \in d$ nên giả sử $A = (a; a + 1)$

Lại có $A \in (C)$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{45}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, t/m \\ a = \frac{7}{4}, l \end{cases}$$

Từ đó tìm được $A(4; 5)$.

0,25

Gọi I là trung điểm của AH . Khi đó $\triangle AID$ cân tại I , $\triangle BMD$ cân tại M .

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{MBD}$; $\widehat{IAD} = \widehat{IDA}$.

Lại có $\widehat{DBM} = \widehat{IAD}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{BCA}$).

Do đó $\widehat{BDM} = \widehat{IDA} \Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{BDI} = \widehat{IDA} + \widehat{BDI} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp DI$.

$\Rightarrow DM$ là tiếp tuyến của đường tròn (C) .

0,25

Phương trình đường thẳng DM là $a(x + 2) + b(y + 1) = 0$, $(a^2 + b^2 > 0)$.

$$d(I; DM) = \frac{\sqrt{45}}{4} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{21}{4}a + \frac{9}{2}b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{45}}{4} \Leftrightarrow |7a + 6b| = \sqrt{5(a^2 + b^2)}$$

$$\Leftrightarrow 44a^2 + 84ab + 31b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 22a = -31b \\ 2a = -b \end{cases}$$

TH1: Với $22a = -31b$ ta chọn $a = 31, b = -22$.

Suy ra, phương trình DM là $31x - 22y + 40 = 0$, phương trình đường thẳng AI là

$$2x - y - 3 = 0, M = AI \cap DM \Rightarrow M\left(\frac{106}{13}; \frac{173}{13}\right) \text{ (loại)}.$$

TH2: Với $2a = -b$ ta chọn $a = 1, b = -2$.

Suy ra, phương trình đường thẳng DM là $x - 2y = 0$, phương trình đường thẳng AI

là $2x - y - 3 = 0, M = AI \cap DM \Rightarrow M(2; 1)$ (thỏa mãn).

Khi đó phương trình đường thẳng BC là $x + 2y - 4 = 0$.

$$\text{Vì } D = (C) \cap DM \Rightarrow \text{Tọa độ điểm } D \text{ là thỏa mãn hệ } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ \left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{16} \end{cases}$$

$\Rightarrow D(4; 2) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AC : x = 4 \Rightarrow C(4; 0)$.

0,25

0,25

	Do M là trung điểm của đoạn $BC \Rightarrow B(0;2)$. Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(4;5), B(0;2), C(4;0)$.	
9		1,0
	$(x+2)\sqrt{x+1} - (2-x)\sqrt{1-x} = \frac{x^3+8x}{2-x^2} \quad (1). \text{ ĐK: } -1 \leq x \leq 1.$ $(1) \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2(x+1) - (2-x)^2(1-x)}{(x+2)\sqrt{x+1} + (2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{x^3+8x}{2-x^2}$ $\Leftrightarrow \frac{2x^3+16x}{(x+2)\sqrt{x+1} + (2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{x^3+8x}{2-x^2}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8x=0 & (2) \\ (x+2)\sqrt{x+1} + (2-x)\sqrt{1-x} = 4-2x^2 & (3) \end{cases}$ $(2) \Leftrightarrow x=0.$	0,25
	Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có $(x+2)\sqrt{x+1} + (2-x)\sqrt{1-x} = [(x+1)+1]\sqrt{x+1} + [(1-x)+1]\sqrt{1-x}$ $\geq 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+1} + 2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x} = 4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x=0.$	0,25
	$4-2x^2 \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $x=0$. Do đó, (3) dẫn đến $x=0$ (thỏa mãn). Vậy (1) có nghiệm duy nhất $x=0$.	0,25
	Cách 2. Ta có thể giải (3) như sau: $(3) \Leftrightarrow (x+2)[2\sqrt{x+1} - (x+2)] + (2-x)[2\sqrt{1-x} - (2-x)] + 2x^2 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{-x^2(x+2)}{2\sqrt{x+1} + (x+2)} + \frac{-x^2(2-x)}{2\sqrt{1-x} + (2-x)} + 2x^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{x+2}{2\sqrt{x+1} + (x+2)} + \frac{2-x}{2\sqrt{1-x} + (2-x)} - 2 = 0 \end{cases} \quad (4)$ Ta có VT (4) = $\frac{x+2}{2\sqrt{x+1} + x+2} - 1 + \frac{2-x}{2\sqrt{1-x} + 2-x} - 1$ $= \frac{-2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1} + x+2} + \frac{-2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 2-x} < 0, \forall x \in [-1;1]$ Do đó, (4) vô nghiệm. Vậy (1) có nghiệm duy nhất $x=0$. Cách 3. Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{1-x} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$. Ta có $a^2 - b^2 = 2x, a^2 + b^2 = 2, a^2 b^2 = 1 - x^2$ Phương trình trở thành	

	$a^3 + a - b^3 - b = \frac{(a^2 - b^2)(9 - a^2b^2)}{2(1 + a^2b^2)}$ $\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + b^2 + ab + 1) = \frac{(a^2 - b^2)(9 - a^2b^2)}{2(1 + a^2b^2)}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (1) \\ 2(1 + a^2b^2)(ab + 3) = (a + b)(9 - a^2b^2) & (2) \end{cases}$ Từ (1) ta có $\sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0$ (2) $\Leftrightarrow 4(1 + a^2b^2)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab)(3 - ab)^2$ (do $3 + ab > 0$) Đặt $t = ab$, do $ab = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \leq \frac{1+x+1-x}{2} = 1$ nên $0 \leq t \leq 1$. Ta được $4(t^4 + 2t^2 + 1) = (2t + 2)(t^2 - 6t + 9)$ $\Leftrightarrow 4t^4 - 2t^3 + 18t^2 - 6t - 14 = 0$ $\Leftrightarrow (t - 1)(4t^3 + 2t^2 + 20t + 14) = 0$ $\Leftrightarrow t = 1 \quad (\text{do } t \in [0; 1])$ Từ đó tìm được $x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.	
10		1,0
	Ta có $a^2 + c^2 \leq a^2 + ac + \frac{c^2}{4} \Rightarrow a^2 + c^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2$ $\Rightarrow \frac{1}{(a^2 + c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^4}; \text{ Tương tự } \frac{1}{(b^2 + c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^4}$ $ab + bc + ca \geq \left(a + \frac{c}{2}\right)\left(b + \frac{c}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{ab + bc + ca} \geq -\frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)\left(b + \frac{c}{2}\right)}$	0,5
	$\Rightarrow P \geq (a - b)^2 \left[\frac{4\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^4} + \frac{4\left(b + \frac{c}{2}\right)^2}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^4} - \frac{64}{\left(a + \frac{c}{2}\right)\left(b + \frac{c}{2}\right)} \right]$ Đặt $a + \frac{c}{2} = x; b + \frac{c}{2} = y$ ($x, y > 0$). Khi đó $P \geq (x - y)^2 \left(\frac{4x^2}{y^4} + \frac{4y^2}{x^4} - \frac{64}{xy} \right)$	0,25
	Ta có $(x - y)^2 \left(\frac{4x^2}{y^4} + \frac{4y^2}{x^4} - \frac{64}{xy} \right) = 4 \frac{(x^2 - 2xy + y^2)}{xy} \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} - 16 \right)$ $= 4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 16 \right]$	0,25

	Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, điều kiện $t \geq 2$. Ta được $P \geq 4(t^4 - 2t^3 - 3t^2 - 10t + 32)$ Xét hàm số $f(t) = 4(t^4 - 2t^3 - 3t^2 - 10t + 32)$ với $t \in [2; +\infty)$ $f'(t) = 4(4t^3 - 6t^2 - 6t - 10); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$ Lập bảng biến thiên ta được $P \geq f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{63}{4}, \forall t \in [2; +\infty)$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = -\frac{63}{4}$ đạt được khi $a = 2b; c = 0$ hoặc $b = 2a; c = 0$.	0,25
--	--	------