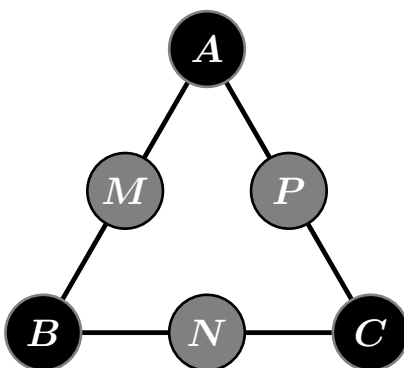


MAI TRẦN NHẬT KHOA

ĐẠI CƯƠNG VỀ CÁC PHÉP ĐẾM

VÀ BÀI TOÁN XÁC SUẤT



MỤC LỤC

PHẦN 1

Chương 1. Các phép đếm sơ cấp cơ bản	1
§1. Quy tắc cộng, quy tắc nhân và nguyên lý bù trừ	2
§2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp không lặp	13
§3. Hoán vị vòng tròn, hoán vị lặp và hoán vị lệch	19
§4. Chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp	27
Chương 2. Xác suất cổ điển và xác suất có điều kiện	29
§1. Không gian mẫu và các loại biến cố	30
§2. Xác suất cổ điển và quy tắc tính xác suất	34
§3. Xác suất có điều kiện, công thức xác suất toàn phần và định lý Bayes	42
Chương 3. Giới thiệu các phương pháp đếm, bổ đề và công thức đặc biệt	56
§1. Bài toán chia kẹo của Euler	57
§2. Bổ đề Kaplansky và bổ đề Menage	69
§3. Công thức Bernoulli	81
§4. Tổ hợp hình học	87
§5. Phương pháp buộc phần tử	94
§6. Bài toán tô màu	99
§7. Phương pháp đếm truy hồi	104
§8. Phương pháp đếm quỹ đạo	108
§9. Dãy số Catalan	115
§10. Hàm sinh	122

PHẦN 2

Bài tập tổng hợp	125
-------------------------	------------

LỜI NÓI ĐẦU

Độc giả thân mến, tôi nhận thấy “Tổ hợp và Xác suất” là một mảng kiến thức lớn được đề cập xuyên suốt trong quá trình tích lũy kiến thức của các bạn học sinh từ cấp tiểu học, trung học cơ sở và trung học phổ thông. Nay tôi viết tài liệu này nhằm cung cấp cho học sinh một số vấn đề đại cương về tổ hợp và xác suất.

Không chỉ hướng đến các bạn có mục tiêu ôn thi tốt nghiệp trung học phổ thông, tài liệu này còn hướng đến những đối tượng có mục tiêu cao hơn như ôn thi học sinh giỏi, tham gia các kỳ thi đánh giá năng lực, đánh giá tư duy,... do các trường đại học tổ chức, hoặc đơn giản là dành cho một số học sinh muốn tìm hiểu thêm kiến thức, rèn luyện tư duy, tiếp cận với các bài toán phức tạp mà không được đề cập trong sách giáo khoa.

Mặc dù đã cố gắng trau chuốt, tỉ mỉ trong việc sưu tầm và biên soạn cũng như viết lời giải, song không thể tránh khỏi những lỗi đánh máy hoặc tính toán, rất mong nhận được sự góp ý từ quý độc giả. Hy vọng tài liệu này sẽ là nguồn tham khảo nhỏ hữu ích.

Thân ái!

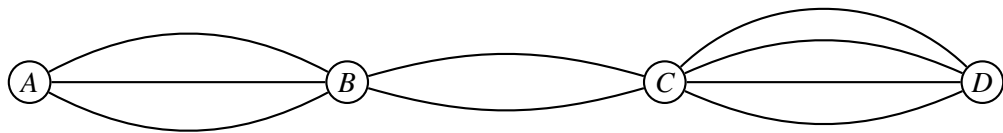
Mai Trần Nhật Khoa

Chương

I

CÁC PHÉP ĐẾM SƠ CẤP CƠ BẢN

CHƯƠNG I. CÁC PHÉP ĐẾM SƠ CẤP CƠ BẢN



Trong chương này, chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với nền tảng cốt lõi của giải tích tổ hợp thông qua các quy tắc đếm sơ cấp bao gồm quy tắc cộng, quy tắc nhân và nguyên lý bù trừ.

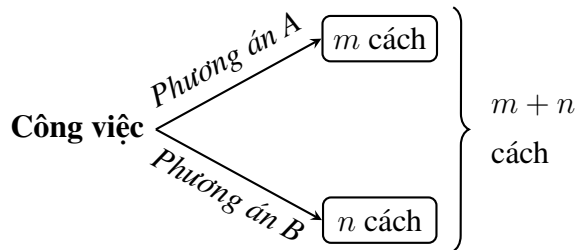
Học sinh cần nắm được tư duy chia trường hợp cũng như nắm được các phép đếm cơ bản này nhằm phục vụ cho những bài toán phức tạp phía sau, đòi hỏi sự nhạy bén trong tư duy.

QUY TẮC CỘNG, QUY TẮC NHÂN VÀ NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

§ 1

① Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc B . Phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A . Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m + n$ cách.



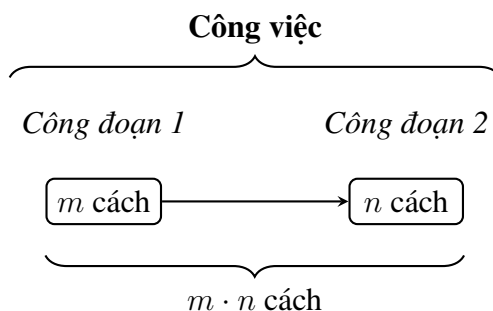
Tổng quát:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo k phương án. Phương án thứ nhất có m_1 cách thực hiện, phương án thứ hai có m_2 cách thực hiện, ..., phương án thứ k có m_k cách thực hiện. Hơn nữa, mỗi cách thực hiện của phương án này không trùng với bất kì cách nào của phương án khác. Khi đó, có thể thực hiện công việc theo $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ cách.

Note. Dấu hiệu để nhận biết quy tắc cộng — trong bài có từ "hay", "hoặc", ...

② Quy tắc nhân

Giả sử một công việc được chia thành hai công đoạn. Công đoạn thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m \cdot n$ cách.



Tổng quát:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn. Công đoạn thứ nhất có n_1 cách thực hiện, công đoạn thứ hai có n_2 cách thực hiện, ..., công đoạn thứ k có n_k cách thực hiện. Khi đó, có thể hoàn thành công việc theo $n_1.n_2...n_k$ cách.

Note. Dấu hiệu để nhận biết quy tắc nhân — trong bài có từ "và", "đồng thời",...

③ Nguyên lý bù trừ

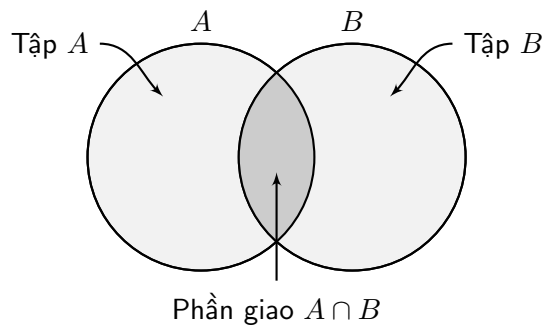
Cho hai tập hợp A và B . Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

hay

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Trong đó $|A| = n(A)$ gọi là *lực lượng* hay *số phần tử* của tập hợp A .



Cho ba tập hợp A, B và C . Khi đó

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + (|A \cap B \cap C|)$$

Tổng quát:

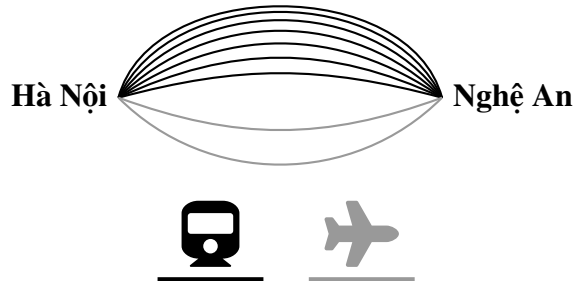
Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hữu hạn phần tử. Khi đó

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

④ Bài tập

✍ Câu 1

Từ Hà Nội vào Nghệ An mỗi ngày có 7 chuyến tàu hoả và 2 chuyến máy bay. Bạn An muốn ngày Chủ nhật này đi từ Hà Nội vào Nghệ An bằng tàu hoả hoặc máy bay. Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn chuyến đi?



Lời giải. Có hai phương án độc lập, đi bằng tàu hoả hoặc đi bằng máy bay. Ta dùng quy tắc cộng, số cách mà An có thể đi chuyển là

$$7 + 2 = 9$$

■

✍ Câu 2

Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau.

- Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn là?
- Số cách chọn một bộ gồm một quần, một áo và một cà vạt là?

Lời giải. a) Theo quy tắc cộng (phương án chọn là độc lập), số cách chọn thoả mãn là

$$4 + 6 + 3 = 13$$

b) Theo quy tắc nhân (công việc cần chọn có liên quan với nhau — "một bộ"), số cách chọn thoả mãn là

$$4.6.3 = 27$$

■

✍ Câu 3

Một trường THPT cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12B. Biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải. Nhà trường có thể chọn học sinh tiên tiến độc lập từ lớp 11A hoặc lớp 12B. Theo quy tắc cộng, số cách chọn khả dĩ là

$$31 + 22 = 53$$



Câu 4

Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn?

Lời giải. Ta chia thành các trường hợp khả dĩ như sau.

Trường hợp 1: Chọn Văn và Toán, theo quy tắc nhân, số cách chọn thoả mãn là

$$10.8$$

Trường hợp 2: Chọn Văn và Tiếng Anh, theo quy tắc nhân, số cách chọn thoả mãn là

$$10.6$$

Trường hợp 3: Chọn Toán và Tiếng Anh, theo quy tắc nhân, số cách chọn thoả mãn là

$$8.6$$

Vậy tổng số cách khả dĩ (theo quy tắc cộng) là

$$10.8 + 10.6 + 8.6 = 188$$



Câu 5

Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là

Lời giải. Theo quy tắc cộng, số cách chọn thoả mãn là

$$8 + 6 + 10 = 24$$



Câu 6

Một bó hoa có 5 bông hoa hồng trắng, 6 bông hoa hồng đỏ và 7 bông hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu?

Lời giải. Theo quy tắc nhân, số cách chọn thoả mãn là

$$5.6.7 = 210$$



Câu 7

Một câu lạc bộ cầu lông có 10 tay vợt nam và 8 tay vợt nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đôi nam nữ để tham gia một giải đấu đôi nam nữ?

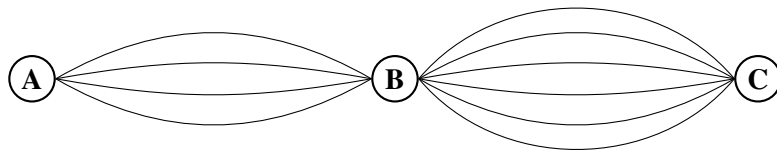
Lời giải. Một đôi gồm nam lẫn nữ (có sự liên quan với nhau), theo quy tắc nhân, số cách chọn thoả mãn là

$$10 \cdot 8 = 80$$



Câu 8

An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?



Lời giải. Để đến nhà Cường, An phải đi qua nhà Bình, đây là công việc có sự liên quan đến nhau, chia làm hai công đoạn. Theo quy tắc nhân, số cách đi của An có thể có là

$$4 \cdot 6 = 24$$



Câu 9

Số điện thoại cho mỗi thuê bao của một nhà mạng có 10 chữ số và có các đầu số là 081, 082, 083, 084, 085, 088, 091 hoặc 094. Giả sử hiện tại, nhà mạng đó đã cấp số cho tổng 35 triệu thuê bao. Hỏi, nếu không có thêm các đầu số mới và không thu hồi các đầu số đã cấp thì nhà mạng đó còn có thể cung cấp bao nhiêu thuê bao nữa?

Lời giải. Giả sử số điện thoại cho thuê bao có đầu số 081 là $\overline{081abcdefg}$. Khi đó a, b, c, d, e, f, g có thể là 1 trong 10 chữ số từ 0; 1; 2; ...; 9.

Vì thế, theo quy tắc nhân, đối với đầu số 081, các vị trí a, b, c, d, e, f, g có thể chọn là

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7 = 10 \text{ (triệu số)}$$

Tương tự như thế cho các đầu số còn lại, theo quy tắc nhân, có tổng

$$10 \cdot 8 = 80 \text{ (triệu số)}$$

Vậy nhà mạng có thể cung cấp thêm

$$80 - 35 = 45 \text{ (triệu thuê bao)}$$



Câu 10

Dùng sáu chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu

- a) Mật khẩu có bốn chữ số khác nhau?
- b) Số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau?
- c) Số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau?

Lời giải. a) Gọi số cần lập có dạng $\overline{abcd}$. Trong đó, a có thể là 1 trong các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 (sáu số).

Tiếp theo, b có thể là 1 trong năm số còn lại,... Tương tự cho c, d .

Theo quy tắc nhân, số mật khẩu có thể có

$$6.5.4.3 = 360$$

b) Với $a \neq 0$, a có thể là 1 trong năm chữ số còn lại. Hơn nữa, b không cần phải khác không và b phải khác a nên b cũng có năm cách chọn.

Tương tự; c, d chỉ còn 4, 3 cách chọn lần lượt. Theo quy tắc nhân, số có thể lập được

$$5.5.4.3 = 300$$

c) Số tự nhiên lẻ với ràng buộc $a \neq 0$ và $d \in \{1; 3; 5\}$. Như thế d chỉ có 3 cách chọn.

Tiếp theo, a còn lại 4 số để chọn (khác d và khác không). Tương tự; b cũng có 4 cách chọn (chỉ cần khác d và a). Cuối cùng, c còn lại 3 cách chọn.

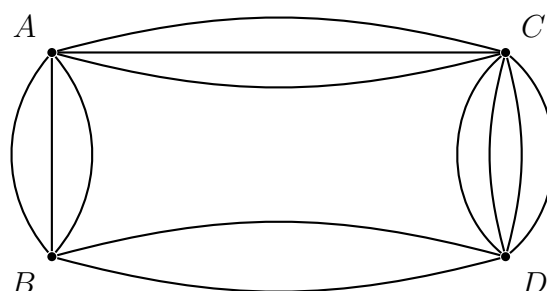
Theo quy tắc nhân, số có thể lập

$$3.4.4.3 = 144$$



Câu 11

Trong một công viên, có các con đường nối bốn địa điểm A, B, C và D như hình dưới. Có bao nhiêu cách chọn một đường đi từ A đến D ? Chỉ tính các đường đi qua mỗi địa điểm nhiều nhất một lần.



Lời giải. Ta chia làm 2 phương án để đi từ A đến D như sau.

Phương án 1: Đi từ A qua B rồi đến D . Có 3 cách đi từ A đến B và 2 cách đi từ B đến D . Theo quy tắc nhân, có tổng $3.2 = 6$ (cách đi).

Phương án 2: Đi từ A đến C rồi đến D . Có 3 cách đi từ A đến C và 4 cách đi từ C đến D . Theo quy tắc nhân, có tổng $3.4 = 12$ (cách đi).

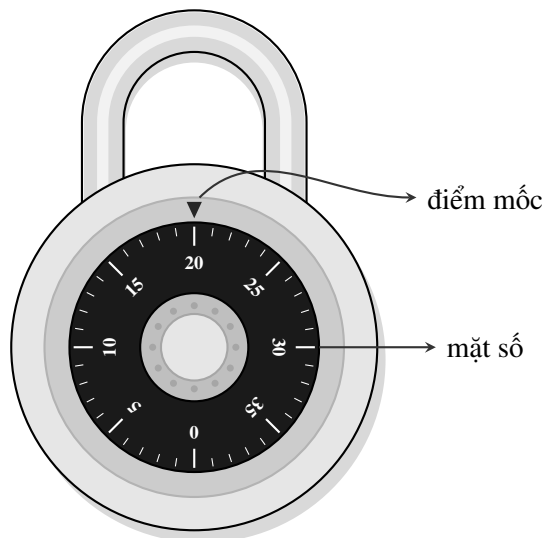
Theo quy tắc cộng, có tổng số cách đi là

$$12 + 6 = 18$$

■

Câu 12

Một khoá tổ hợp với đĩa quay có 40 vạch số (xem hình dưới). Mật mã của khoá là một dãy gồm 3 số, kí hiệu là $a - b - c$, mỗi số là một số tự nhiên từ 0 đến 39. Để mở khoá, cần quay mặt số ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi điểm mốc gặp vạch số a lần thứ ba, rồi quay mặt số theo chiều ngược lại cho đến khi điểm mốc gặp vạch số b lần thứ hai, cuối cùng quay mặt số ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi điểm mốc gặp vạch số c lần đầu tiên. Nếu a, b, c phải khác nhau đôi một, thì có bao nhiêu cách chọn mật mã cho khoá tổ hợp trên?



Lời giải. Gọi số có ba chữ số cần lập cho mật khẩu có dạng $\overline{abc}$.

Để thấy, a có thể chọn các số thuộc tập $\{0; 1; 2; \dots; 39\}$ (40 số).

Tiếp theo, b có thể chọn 39 số còn lại.

Cuối cùng, c có thể chọn 38 số còn lại.

Vậy, theo quy tắc nhân, tổ hợp số có thể có

$$40.39.38 = 59280$$

■

Câu 13

Sử dụng nguyên lý bù trừ, giải các bài toán sau:

a) Một lớp học có 180 sinh viên. Trong đó, có 55 sinh viên chọn môn Anh Văn, 45 sinh viên chọn môn Pháp Văn và 15 sinh viên chọn học cả Anh Văn và Pháp Văn. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không theo học Anh Văn cũng không học Pháp Văn?

b) Giả sử có 1200 sinh viên học tiếng Anh, 850 sinh viên học tiếng Pháp, 100 sinh viên học tiếng Đức, 90 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp, 15 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Đức, 10 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Đức. Nếu tất cả 2050 sinh viên đều học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

Lời giải. a) Gọi tổng số sinh viên của lớp học là $|S| = 180$. Số sinh viên chọn Anh Văn là $|A| = 55$, số sinh viên chọn Pháp Văn là $|B| = 45$. Số sinh viên chọn cả hai môn là $|A \cap B| = 15$.

Theo nguyên lý bù trừ, số sinh viên không học cả Anh và Pháp Văn là

$$|S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 180 - (55 + 45 - 15) = 95$$

b) Gọi $|A|$, $|B|$, $|C|$ lần lượt là số sinh viên chọn tiếng Anh, Pháp và Đức.

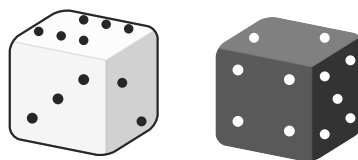
Theo nguyên lý bù trừ, số sinh viên học cả ba thứ tiếng là

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + (|A \cap B \cap C|) \\ \iff 2050 &= (1200 + 850 + 100) - (90 + 10 + 15) + (|A \cap B \cap C|) \\ \iff |A \cap B \cap C| &= 15 \end{aligned}$$

■

Câu 14

Tung đồng thời hai con xúc xắc khác nhau và ghi lại số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra mà tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt là bội của 5?



Lời giải. Kí hiệu $(a; b)$ là tập các kết quả có thể có để tổng $a + b$ là bội của 5. Để đề bài xảy ra nếu và chỉ nếu $a + b = 5$ hoặc $a + b = 10$ với điều kiện $2 \leq a + b \leq 12$.

Xét $a + b = 5$ gồm các kết quả $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(4; 1)$.

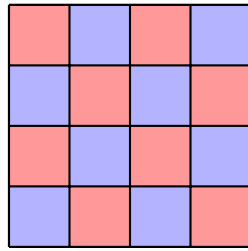
Xét $a + b = 10$ gồm các kết quả $(4; 6)$, $(5; 5)$, $(6; 4)$.

Vậy tổng có $4 + 3 = 7$ bộ số có thể thỏa mãn đề bài.

■

Câu 15 — Phát triển từ kỳ thi American Invitational Mathematics 2001

Cho một bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình vẽ minh hoạ dưới. Biết rằng các ô vuông này sẽ được tô màu bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách tô sao cho không có hình vuông có kích thước 3×3 nào được tô toàn bộ bởi màu đỏ? (Các cách tô là khác nhau qua phép đối xứng, quay)



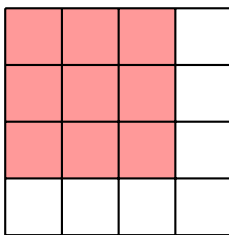
Một cách tô thoả mãn

Lời giải. Bằng cách đếm thông thường thì bài này cực kì phức tạp và rất dễ đếm thiếu trường hợp. Tuy nhiên, để ý thấy thứ đề bài mong muốn là "không có hình vuông có kích thước 3×3 nào được tô toàn bộ bởi màu đỏ", thế nên mệnh đề phủ định (ngược lại) của điều này là "tồn tại ít nhất 1 ô vuông có kích thước 3×3 được tô toàn màu đỏ". Thật vậy, ta sẽ tính số phần tử thuận lợi cho phần bù này, cuối cùng lấy tổng tất cả các cách tô trừ đi kết quả đó thì bài toán sẽ kết thúc.

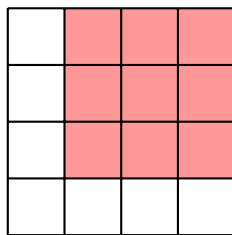
Gọi A, B, C, D lần lượt là tập hợp các cách tô mà hình vuông 3×3 ở các vị trí "Trên—Trái, Trên—Phải, Dưới—Trái, Dưới—Phải", được tô toàn bộ bằng màu đỏ.

Tổng số cách tô màu tùy ý 16 ô vuông (sử dụng 2 màu) là 2^{16} (cách).

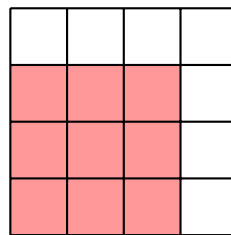
Trong lưới ô vuông 4×4 , ta có đúng 4 vị trí để đặt một hình vuông 3×3 . Hình minh hoạ các biến cố A, B, C, D (các vùng màu đỏ là phần bắt buộc phải tô đỏ).



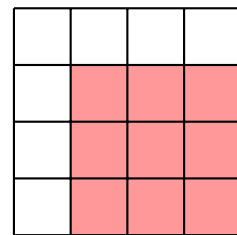
Biến cố A



Biến cố B



Biến cố C



Biến cố D

Theo nguyên lí bù trừ, số cách tô thoả mãn đề bài là

$$2^{16} - |A \cup B \cup C \cup D|$$

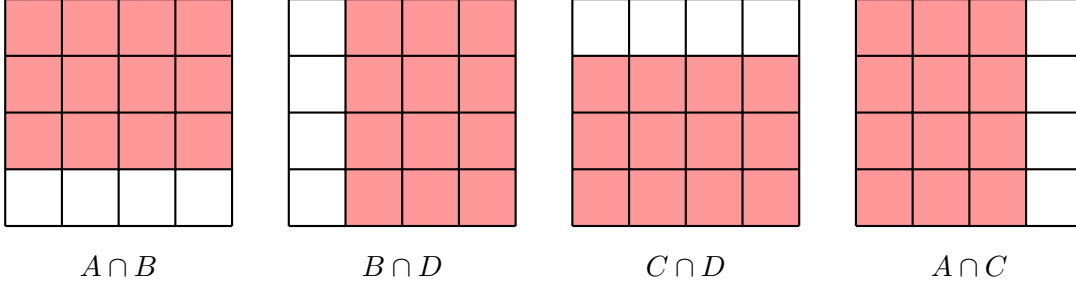
Mặt khác

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\ &\quad - (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) \\ &\quad + (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) \\ &\quad - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

Với biến cố A , ta bắt buộc phải tô đỏ 9 ô thuộc hình vuông 3×3 trên-trái. Khi đó sẽ còn $16 - 9 = 7$ ô trống tự do. Các ô này tô màu nào cũng được nên sẽ có 2^7 cách. Tương tự cho B, C, D . Từ đó

$$|A| = |B| = |C| = |D| = 2^7$$

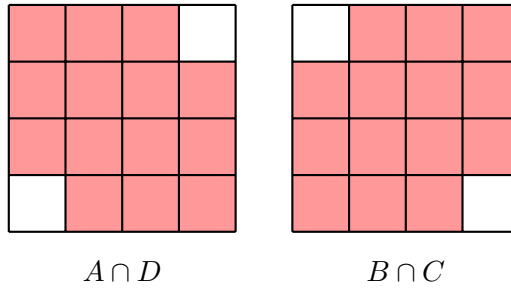
Tiếp theo, xét phần giao giữa 2 biến cố kề nhau (ví dụ $A \cap B$ nghĩa là cả 2 hình vuông 3×3 của A và B đều phải tô đỏ toàn bộ). Khi đó, số ô đỏ bị ép buộc chính là phần HỢP của 2 hình vuông này



Dễ thấy, với 4 biến cố giao kề nhau này, hợp của hai hình vuông 3×3 luôn tạo thành một hình chữ nhật phủ 12 ô. Ta bắt buộc tô đỏ 12 ô này, và còn lại $16 - 12 = 4$ ô tự do, do đó

$$|A \cap B| = |B \cap D| = |C \cap D| = |A \cap C| = 2^4$$

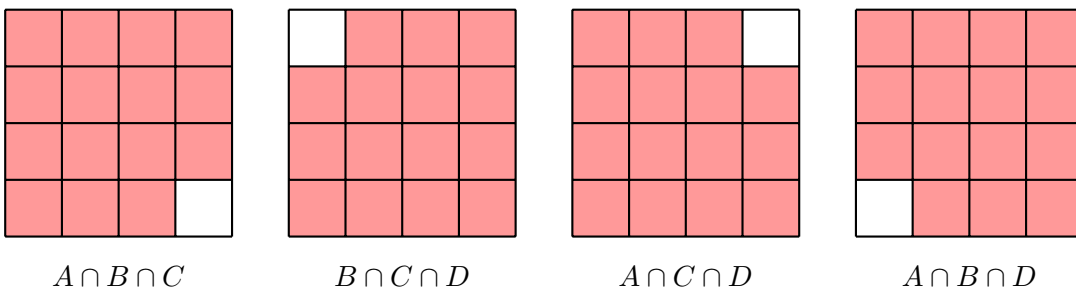
Với phần giao giữa 2 biến cố ở vị trí chéo nhau, số ô bị ép buộc tô đỏ sẽ lớn hơn



Ta thấy vùng màu đỏ bao phủ 14 ô, chỉ còn lại đúng 2 ô trống ở góc được tự do tô màu, nên

$$|A \cap D| = |B \cap C| = 2^2$$

Tiếp theo, xét phần giao giữa 3 biến cố đồng thời



Để thấy, khi kết hợp 3 hình vuông 3×3 , vùng tô đỏ chiếm 15 ô (chừa lại đúng 1 ô ở góc cho việc chọn màu tự do).
 Nên số cách tô vào ô tự do này là

$$|A \cap B \cap C| = |B \cap C \cap D| = |A \cap C \cap D| = |A \cap B \cap D| = 2^1$$

Cuối cùng, phần giao của cả 4 biến cố $|A \cap B \cap C \cap D|$ yêu cầu phủ đỏ toàn bộ 16 ô vuông, tức không còn ô nào tự do, số cách tô là $2^0 = 1$.

Vậy theo nguyên lí bù trừ, số cách tô thoả mãn đề bài là

$$2^{16} - (4 \cdot 2^7) + (4 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2) - (4 \cdot 2^1) + 1 = 65089$$

■

§ 2

HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP KHÔNG LẶP

① Hoán vị

Khi sắp xếp n phần tử của một tập hợp theo một thứ tự, ta được một *hoán vị* của n phần tử đó. Số các hoán vị của n phần tử ($n \geq 1$) bằng $P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$ và kí hiệu là $P_n = n!$ (đọc là n giai thừa).

② Chỉnh hợp

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$) và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi cách lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự gọi là một *chỉnh hợp* chập k của n phần tử đó. Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

③ Tổ hợp

Mỗi tập con gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) của một tập hợp gồm n phần tử được gọi là một *tổ hợp* chập k của n phần tử đó. Số các tổ hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng

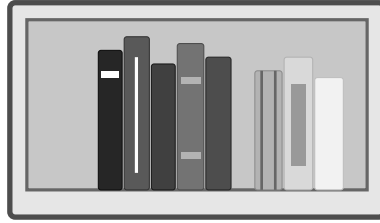
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Note. Phân biệt hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp; hoán vị — xếp tất cả phần tử của một tập hợp, chỉnh hợp — xếp có *thứ tự* từ một lượng phần tử của một tập hợp, tổ hợp — chọn nhưng *không xếp thứ tự* từ một lượng phần tử của một tập hợp.

④ Bài tập

✍️ Câu 1

Có 5 cuốn sách Toán học khác nhau và 3 cuốn sách Sinh học khác nhau. Có bao nhiêu cách xếp các cuốn sách này thành một dãy trên giá sách?



Lời giải. Xếp $5 + 3 = 8$ quyển sách thành một dãy là hoán vị của 8 phần tử hay $8!$ (cách). ■

✍️ Câu 2

Một cuộc khiêu vũ có 10 nam và 6 nữ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải. Chọn có thứ tự — ta dùng chỉnh hợp. Số cách chọn là

$$A_{10}^3 \cdot A_6^3$$

✍️ Câu 3

Trong không gian cho 4 điểm A, B, C, D . Từ các điểm trên ta lập các vectơ khác vectơ không. Hỏi có thể lập được bao nhiêu vectơ?

Lời giải. Vectơ là một đoạn thẳng có hướng nên việc lập các vectơ tương đương với việc chọn có thứ tự 2 trong 4 điểm đã cho, có A_4^2 (cách). ■

✍️ Câu 4

Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra một bó hoa gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ?

Lời giải. Đầu tiên, chọn 1 bông hồng đỏ, có C_4^1 (cách).

Tiếp theo, 6 bông còn lại chọn trong tổng số bông vàng và trắng, có C_8^6 (cách).

Cuối cùng, theo quy tắc nhân, số cách chọn

$$C_4^1 \cdot C_8^6$$

 Câu 5

Từ 10 bạn học sinh, trong đó gồm 6 nam và 4 nữ. Người ta cần lập một đội tình nguyện viên gồm 3 thành viên sao cho trong đó có ít nhất 1 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội như thế?

Lời giải. Tổng số cách lập được một đội 3 thành viên như thế là C_{10}^3 (cách).

Mặt khác, "ít nhất 1 bạn nữ", là $\exists$, ta sẽ dùng biến cố đối lại với tồn tại là với mọi $\forall$. Như thế ta chọn ra một đội chỉ toàn nam, có C_6^3 (cách).

Vậy theo nguyên lý bù trừ, số cách là

$$C_{10}^3 - C_6^3$$

■

 Câu 6

Có bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số là đôi một khác nhau, được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

Lời giải. Số có 5 chữ số khác nhau từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là hoán vị của 5 giai thừa, hay $5!$.

■

 Câu 7

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải. Gọi số cần lập có dạng $\overline{a_1a_2\dots a_8}$ với $a_1 \neq 0$. Nên a_1 có 7 cách chọn số.

Hơn nữa, các số còn lại sẽ đi là hoán vị của 7 chữ số còn lại, có $7!$ cách.

Theo quy tắc nhân, số có thể có

$$7 \cdot 7!$$

■

 Câu 8 — THPT — 2018

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Có bao nhiêu số mà tổng các chữ số của chúng chia hết cho 3?

Lời giải. Gọi số đó có dạng $\overline{abc}$. Trong đoạn $[1; 17]$, ta liệt kê các tập số như sau.

— Số chia hết cho 3 (dư 0) $\{3; 6; 9; 12; 15\}$ (5 số).

— Số chia hết cho 3 (dư 1) $\{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$ (6 số).

— Số chia hết cho 3 (dư 2) $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$ (6 số).

Trường hợp 1: a, b, c mỗi số đều chia hết cho 3 (dư 0). Có $C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1$ (cách).

Trường hợp 2: a, b, c mỗi số đều chia hết cho 3 (dư 1). Có $C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1$ (cách).

Trường hợp 3: a, b, c mỗi số đều chia hết cho 3 (dư 2). Có $C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1$ (cách).

Trường hợp 4: Hoán vị của 3 số a, b, c trong đó a, b, c mỗi số chọn sao cho có số chia hết cho 3 (dư 0), cho 3 (dư 1) và cho 3 (dư 2) — tổng số dư lại là $0 + 1 + 2 = 3$ vẫn chia hết cho 3. Có $3! \cdot (C_5^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1)$.

Vậy tổng có các số là

$$C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 + C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 + C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 + 3! \cdot (C_5^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1)$$

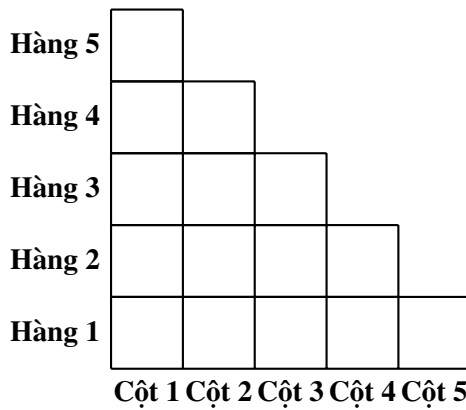
■

🔖 Câu 9 — THPT — 2026

Trong một trò chơi bạn Bình cần vượt qua một thử thách. Theo yêu cầu của thử thách, Bình cần điền tất cả 15 số thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15; 16; 20\}$ vào 15 ô vuông trong hình dưới thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- Mỗi ô điền đúng một số và mỗi số chỉ được sử dụng một lần;
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một hàng không chia hết cho 5;
- Hiệu hai số ở hai ô bất kì khác nhau trên cùng một cột không chia hết cho 5.

Hai cách điền gọi là giống nhau nếu số điền ở mỗi ô tương ứng trong 15 ô là giống nhau (không tính đến thứ tự điền các số vào 15 ô vuông). Gọi H là số cách điền khác nhau để bạn Bình vượt qua được thử thách. Giá trị của $\frac{H}{30}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải. Gọi hai số ở hai ô bất kì là x và y . Để hiệu của chúng không chia hết cho nhau thì x, y phải khác nhau hay $x \neq y$.

Mặt khác, hiệu hai số trên cùng hàng/cột không chia hết cho 5 thì dãy các số này phải được xếp theo đường chéo của bậc thang.

Ta liệt kê các bộ số như sau.

- Chia 5 (dư 0) $\{0; 5; 10; 15; 20\} \implies$ có 5 số.
- Chia 5 (dư 1) $\{1; 6; 11; 16\} \implies$ có 4 số.

— Chia 5 (dư 2) $\{2; 7; 12\} \Rightarrow$ có 3 số.

— Chia 5 (dư 3) $\{3; 8\} \Rightarrow$ có 2 số.

— Chia 5 (dư 4) $\{4\} \Rightarrow$ có 1 số.

Lần lượt hoán vị các số này vào hàng/cột tương ứng. Khi đó $H = 5!.4!.3!.2!.1!$.

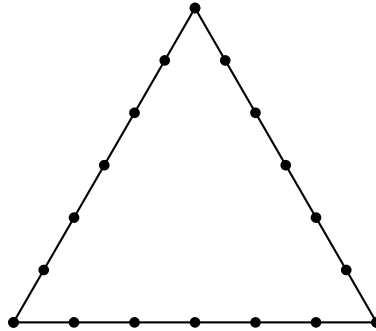
Vì thế

$$\frac{H}{30} = \frac{5!.4!.3!.2!.1!}{30} = 1152$$

■

Câu 10

Trong hình sau đây, mỗi cạnh của tam giác đều được chia thành 6 đoạn thẳng bằng nhau bởi 5 điểm nằm bên trong cùng với hai đầu mút. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là các chấm điểm ở trong hình:



Lời giải. Trong tam giác này có tất cả 18 điểm, chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 18 điểm để tạo thành tam giác (bao gồm cả các điểm cho là thẳng hàng), có C_{18}^3 (cách).

Chọn 3 điểm trên 1 cạnh bất kì (1 cạnh có 7 điểm) để đếm được 3 điểm thẳng hàng, có C_7^3 (cách). Suy ra 3 cạnh có $3.C_7^3$ (cách)

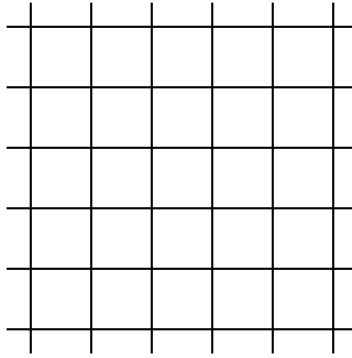
Vậy số tam giác có thể có là

$$C_{18}^3 - 3.C_7^3$$

■

✍️ Câu 11

Hình sau đây được tạo thành từ hai họ đường thẳng vuông góc, mỗi họ gồm 6 đường thẳng song song.



Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật khác nhau được tạo thành?

Lời giải. Trong hình, lần lượt có 6 đường thẳng kẻ ngang và dọc. Hình chữ nhật được tạo thành từ 2 đường kẻ ngang và 2 đường kẻ dọc bất kì (hình vuông là hình chữ nhật). Chọn 2 đường trong 6 đường kẻ ngang và 2 đường trong 6 đường kẻ dọc để tạo thành hình chữ nhật. Có $C_6^2 \cdot C_6^2$ (hình tạo thành). ■

HOÁN VỊ VÒNG TRÒN, HOÁN VỊ LẶP VÀ HOÁN VỊ LỆCH

§ 3

① Hoán vị vòng tròn

Khi xếp n phần tử vào một vòng tròn khép kín, số hoán vị của chúng là

$$(n - 1)!$$

② Hoán vị lặp

Khi ta xếp n phần tử mà trong đó có các nhóm phần tử giống hệt nhau lặp lại $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ lần thì số hoán vị của chúng là

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

③ Hoán vị lệch (Công thức Derangement)

Một hoán vị của n phần tử sao cho không có phần tử nào xuất hiện ở đúng vị trí ban đầu của nó được xác định bởi (sau đây gọi là Công thức Derangement và kí hiệu là D_n)

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ngoài ra, D_n còn được xác định bởi

$$\left[\frac{1 + n!}{e} \right]$$

Trong đó ngoặc vuông là hàm lấy phần nguyên bé nhất không vượt quá số đó, tức là làm tròn xuống hoặc có thể hiểu là bỏ phần thập phân đi, ví dụ $[4, 15] = 4$; $[4, 5] = 4$; $[4, 999] = 4$.

Chứng minh

Gọi D_n là số hoán vị lệch của n phần tử. Ta xét phần tử đầu tiên, để hoán vị lệch, phần tử này không được ở vị trí của nó, do đó ta còn lại $n - 1$ phần tử.

Giả sử phần tử đầu tiên mà ta đang xét chọn đúng vị trí thứ i (với $i \in \{2; 3; \dots; n\}$ hay $i = \overline{2, n}$) còn lại thì ta sẽ có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: Nếu i chọn đúng vào vị trí của phần tử đầu tiên mà ta đang xét, thì khi đó phần tử đầu tiên mà ta đang xét với i đã đổi chỗ cho nhau (thỏa mãn hoán vị lệch), khi đó ta còn lại $n - 2$ phần tử hay chính

là D_{n-2} .

Trường hợp 2: Nếu i không chọn đúng vào vị trí của phần tử đầu tiên mà ta đang xét thì tức là còn lại $n - 1$ phần tử hay chính là D_{n-1} .

Ta có hệ thức truy hồi

$$D_n = (n - 1) (D_{n-1} + D_{n-2})$$

Xét hiệu số

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$$

Chia tất cả các vế cho $n!$ được

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{nD_{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \iff \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Đặt

$$\frac{D_n}{n!} = u_n \implies \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = u_{n-1} \iff u_n - u_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Ta dễ thấy đây là dãy truy hồi có các phần tử trung gian (ở giữa dãy) đôi một triệt tiêu nhau đến u_0 nên

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \iff u_n = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Từ đó suy ra

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Chứng minh xong.

Note. Hoán vị lệch là nhánh nhỏ của phương pháp đếm Truy hồi.

④ Bài tập

Câu 1

Có bao nhiêu cách xếp 6 người ngồi quanh một cái bàn tròn?

Lời giải. Có $6!$ (cách). ■

Câu 2

Giả sử có 4 lon sơn đỏ, 3 lon sơn xanh dương, 2 lon sơn vàng và 1 lon sơn xanh lá. Mỗi lon đủ để sơn đúng một căn phòng. Các lon sơn có cùng màu sắc giống hệt nhau. Có bao nhiêu cách để dùng số sơn đó sơn cho 10 căn phòng.

Lời giải. Số phần tử là 10 (lon sơn), theo hoán vị lặp, ta được: $\frac{10!}{4!.3!.2!.1!}$ (cách) ■

Câu 3

Có bao nhiêu từ (có nghĩa hoặc không nghĩa) có thể được tạo ra bằng cách sắp xếp các chữ cái trong từ **PEPPER**?

Lời giải. Số phần tử là 6 (chữ cái), trong đó **P** lặp lại 3 lần, **E** lặp lại 2 lần, **R** lặp lại 1 lần. Theo hoán vị lặp, ta được

$$\frac{6!}{3!.2!.1!} \text{ (cách)}$$

Câu 4

Từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 11 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 4 lần, các chữ số khác có mặt 1 lần?

Lời giải. Gọi số cần lập có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}$, tổng có 11 chữ số hay chính là 11 phần tử. Trong đó chữ số 1 có mặt 4 lần, các chữ số khác xuất hiện một lần (tức là $11 - 4 = 7$ phần tử còn lại xuất hiện đúng 1 lần). Theo công thức hoán vị lặp thì các số thỏa mãn là

$$\frac{11!}{4!.1!.1!.1!.1!.1!.1!.1!} = \frac{11!}{4!}$$

Câu 5

Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Gọi S là tập hợp các số có 5 chữ số được lập nên từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Biết xác suất để số được chọn có chữ số 5 xuất hiện 3 lần và hai chữ số còn lại không trùng nhau bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $\frac{a+b}{1000}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải. Với không gian mẫu, gọi số cần lập có dạng $\overline{abcde}$. Khi đó, a có thể chọn số từ $\{1; 2; 3; \dots; 7\}$ (7 cách). Tương tự như thế cho b, c, d, e cũng có 7 cách. Lúc này, không gian mẫu

$$n(\Omega) = 7.7.7.7.7 = 7^5$$

Gọi A là biến cố: "số được chọn có chữ số 5 xuất hiện 3 lần và hai chữ số còn lại không trùng nhau".

Gọi số cần lập có dạng $\overline{555ab}$. Với a, b , ta chỉ cần chọn ngẫu nhiên 2 số trong tập $A \setminus \{5\}$, nghĩa là a, b còn 6 sự lựa chọn, đó là $\{1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.

Khi đó số cách chọn phù hợp cho a, b là C_6^2 (cách).

Tuy nhiên, trong số có 5 chữ số cần lập ấy, chữ số 5 lặp lại 3 lần nên

$$n(A) = \frac{5!}{3!} C_6^2$$

Vậy xác suất của biến cố

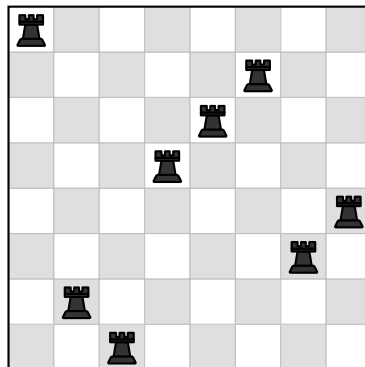
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{5!}{3!} C_6^2}{7^5} = \frac{300}{16807} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a+b}{1000} \approx 17$$

■

Câu 6

Cho một bàn cờ tiêu chuẩn kích thước 8×8 . Đặt chúng lên bàn cờ sao cho chúng không tấn công lẫn nhau; nghĩa là mỗi hàng hoặc mỗi cột chỉ chứa tối đa một quân Xe. Có bao nhiêu cách đặt 8 quân Xe này lên bàn cờ trong các trường hợp sau:

- 8 quân Xe giống hệt nhau;
- 8 quân Xe hoàn toàn khác nhau (giả sử chúng được sơn 8 màu sắc khác nhau);
- 8 quân Xe có màu sắc lặp lại (4 quân sơn màu Xanh dương, 3 quân sơn màu Đỏ và 1 quân sơn màu Xanh lá).



Lời giải.

- a) 8 quân Xe giống hệt nhau thì ta chỉ cần hoán vị 8 phần tử này, có $8!$ (cách)
- b) Đầu tiên, hoán vị 8 phần tử có $8!$ (cách), sau đó sơn 8 màu khác nhau cho chúng, có $8!$ (cách).

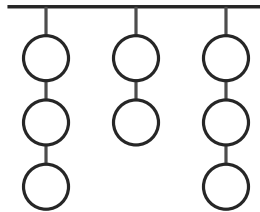
Vậy số cách thoả mãn là: $(8!)^2 = (8!)^2$

- c) Theo hoán vị lặp, ta được: $\frac{(8!)^2}{4!.3!.1!}$ (cách)

■

✍ Câu 7 — Trích trong sách A Path To Combinatorics For Undergraduates — AIME 1990

Trong một cuộc thi bắn cung tên, tám mục tiêu được sắp xếp thành ba cột treo, hai cột treo 2 bên mỗi bên có ba mục tiêu, cột treo chính giữa có hai mục tiêu. Một xạ thủ phải bắn trúng cả tám mục tiêu theo quy tắc sau: trước tiên, xạ thủ chọn một cột để bắn trúng một mục tiêu. Sau đó, xạ thủ phải bắn trúng mục tiêu chưa bị bắn trúng thấp nhất còn lại trong cột đã chọn. Nếu tuân theo các quy tắc này, có bao nhiêu thứ tự khác nhau mà tám mục tiêu có thể bị bắn trúng?



Lời giải. Hoán vị lặp tồn tại là bởi: ta có 8 lần bắn, với 2 cột có 3 bìa sẽ lặp lại 3 lần, với cột có 2 bìa sẽ lặp lại 2 lần. Nghĩa là, gọi các bìa ở cột 1 được kí hiệu là $(M; M; M)$, cột 2 kí hiệu là $(N; N)$, cột 3 kí hiệu là $(P; P; P)$. Theo công thức hoán vị lặp, ta được số cách là

$$\frac{8!}{3!.3!.2!} = 560 \text{ (cách)}$$

■

✍ Câu 8 — Trích trong sách A Path To Combinatorics For Undergraduates — AIME 1984

Một khoa toán có 23 thành viên. Họ muốn chia thành 5 nhóm (mỗi nhóm 3 người) và 2 nhóm (mỗi nhóm 4 người). Có bao nhiêu cách chia như thế?

Lời giải. Theo công thức hoán vị lặp, ta được số cách

$$\frac{23!}{(3!)^5 \cdot (4!)^2}$$

Tuy nhiên, nếu ta chỉ chia thành 5 nhóm và 2 nhóm như thế lại tồn tại hoán vị, do chúng không phân biệt với nhau. Nghĩa là số cách lúc này thực sự là

$$\frac{23!}{5!.2!} = \frac{23!}{5!.2! \cdot (3!)^5 \cdot (4!)^2}$$

Nếu chia thành 5 nhóm khác nhau (mỗi nhóm 3 người) và 2 nhóm khác nhau (mỗi nhóm 4 người) thì các nhóm mới

thực sự phân biệt, lúc ấy, số cách sẽ dừng lại là

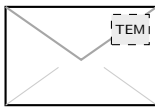
$$\frac{23!}{(3!)^5 \cdot (4!)^2}$$

Đáp án cuối phải là

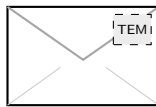
$$\frac{23!}{5! \cdot 2! \cdot (3!)^5 \cdot (4!)^2}$$

Câu 9

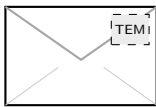
Có 6 bì thư được đánh số thứ tự từ 1 đến 6 và 6 cái tem cũng được đánh số từ 1 đến 6. Người ta dán các tem thư vào các bì thư (mỗi thư chỉ dán 1 tem). Hỏi có bao nhiêu cách dán tem thư sao cho không có bì thư nào được dán tem có số trùng với số trên bì thư?



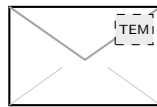
Bì thư 1



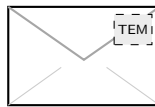
Bì thư 2



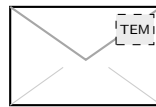
Bì thư 3



Bì thư 4



Bì thư 5



Bì thư 6

Lời giải. Đầu tiên, nhận thấy đây là bài toán hoán vị lệch do có dữ kiện "không có bì thư nào được dán tem có số trùng với số trên bì thư".

Khi đó số cách thoả mãn là

$$\left[\frac{1 + n!}{e} \right] = \left[\frac{1 + 6!}{e} \right] \approx [265, 241] = 265$$

Câu 10

Tại một bãi giữ xe máy có 5 khách gửi xe. Khi gửi xe, mỗi khách được phát một phiếu gửi xe được đánh số từ 1 đến 5 tương ứng với xe của họ. Khi khách quay lại lấy xe, nhân viên giữ xe lấy nhầm xấp phiếu và phát ngẫu nhiên 5 phiếu cho 5 khách (mỗi người nhận đúng 1 phiếu). Có bao nhiêu cách phát phiếu sao cho không có khách nào nhận đúng phiếu gửi xe của mình?

Lời giải. Nhận thấy đây là bài toán hoán vị lệch (không có khách nào nhận đúng phiếu gửi xe của mình). Nên áp dụng công thức ta được

$$\left[\frac{1 + 5!}{e} \right] \approx [44, 513] = 44$$

Câu 11

Một thầy giáo có 4 mã đề được đánh số từ 1 đến 4. Giả sử có 4 em học sinh cũng có ngày sinh tương ứng từ 1 đến 4. Có bao nhiêu cách phát đề sao cho không có em học sinh nào nhận được đề có mã trùng với ngày sinh của mình?

Lời giải. Khi đó số cách thoả mãn là

$$\left[\frac{1 + 4!}{e} \right] \approx [9, 196] = 9$$

✍ Câu 12 — Chuyên KHTN — Hà Nội — 2026

Có 6 bì thư được đánh số thứ tự từ 1 đến 6 và 6 cái tem cũng được đánh số từ 1 đến 6. Người ta dán các tem thư vào các bì thư (mỗi thư chỉ dán 1 tem). Hỏi có bao nhiêu cách dán tem thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán tem có số trùng với số trên bì thư?

Lời giải. Biến cố đối của: "ít nhất một bì thư được dán tem có số trùng với số trên bì thư", là "không có bì thư nào được dán tem có số trùng với số trên bì thư đó". Bài toán trở thành bài toán hoán vị lệch.

Khi đó số cách thoả mãn là

$$6! - \left\lfloor \frac{1 + 6!}{e} \right\rfloor \approx 6! - [265, 241] = 6! - 265 = 455$$

✍ Câu 13

Có 4 cái ổ khoá và 4 chìa khoá khác nhau. Mỗi chìa khoá chỉ mở được một ổ khoá. Có bao nhiêu cách để sau 4 lần mở khoá không có ổ khoá nào được mở?

Lời giải. Số cách thoả mãn là

$$\left\lfloor \frac{1 + 4!}{e} \right\rfloor \approx [9, 196] = 9$$

✍ Câu 14

Một lớp học có 7 học sinh nộp bài kiểm tra lên bàn giáo viên. Giáo viên muốn phát trả lại卷子 cho các em nhưng vô tình xáo trộn hoàn toàn các bài làm và phát ngẫu nhiên. Có bao nhiêu cách phát bài sao cho không có học sinh nào nhận đúng bài kiểm tra của mình?

Lời giải. Số cách thoả mãn là

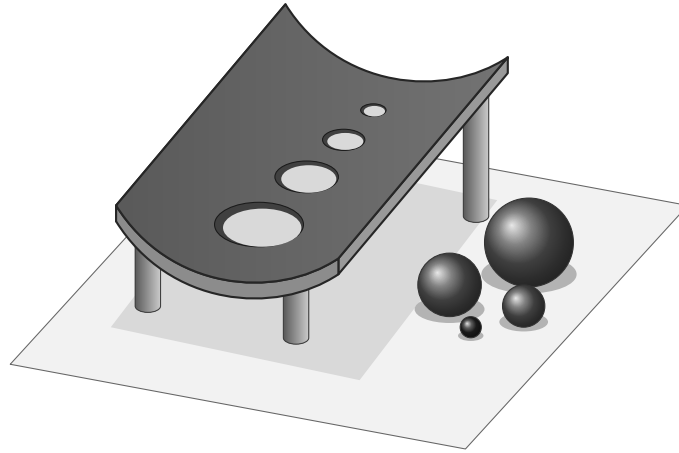
$$\left\lfloor \frac{1 + 7!}{e} \right\rfloor \approx [1854, 480] = 1854$$

✍ Câu 15 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Đồng Nai — 2026

Hệ thống gồm các vật như sau được gọi là *máng n*:

- Một máng nghiêng có n lỗ dọc theo đáy. Tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \dots, n$.
- n quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n , trong đó có thể có nhiều quả bóng có cùng đường kính.

(hình vẽ dưới đây mô tả *máng 4*)



Xét *máng n*, thả lần n quả bóng từ đỉnh máng xuống, lần lượt từng quả. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào đồng thời đóng lỗ này lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả lần, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là *dãy đẹp*.

Hai *dãy đẹp* giống nhau khi và chỉ khi thứ tự bán kính của bóng lọt lỗ là như nhau.

Có thể tạo được bao nhiêu *dãy đẹp* khác nhau đối với *máng 5* biết rằng có đúng một quả có đường kính là 4 và một quả có đường kính là 5?

Lời giải. Xét *máng 5*, gọi dãy đẹp có dạng $\overline{xyz45}$ với ràng buộc $x \leq y \leq z$.

Hơn nữa, vì có hai quả có đường kính lần lượt là 4, 5 nên ba quả bóng còn lại sẽ chọn từ tập các giá trị $\{1; 2; 3\}$.

$$— x \leq 1 \implies x = 1.$$

$$— y \leq 2 \implies y \in \{1; 2\}.$$

$$— z \leq 3 \implies z \in \{1; 2; 3\}.$$

Ta liệt kê các bộ thỏa mãn. Gồm $\{1; 1; 1; 4; 5\}$, $\{1; 1; 2; 4; 5\}$, $\{1; 1; 3; 4; 5\}$, $\{1; 2; 2; 4; 5\}$, $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vì thế, số dãy đẹp có thể có

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} + 5! = 320$$

§ 4

CHỈNH HỢP LẶP VÀ TỔ HỢP LẶP

① Chỉnh hợp lặp

Một bộ sắp thứ tự k phần tử được lấy từ tập hợp có n phần tử (có thể lặp lại) của tập hợp A được gọi là một *chỉnh hợp lặp* chập k của n phần tử của A . Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Note. Số k có thể lớn hơn n .

② Tổ hợp lặp

Một bộ gồm k phần tử không phân biệt thứ tự được lấy từ tập hợp A gồm n phần tử (có thể được lấy lặp lại) được gọi là một *tổ hợp lặp* chập k của n phần tử của A . Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử là

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Note. Số k có thể lớn hơn n .

Có thể hiểu tổ hợp lặp một cách cụ thể như sau: Cho tập hợp A có n loại phần tử, loại 1 có m_1 phần tử, loại 2 có m_2 phần tử, ..., loại n có m_n phần tử. Một tập con gồm k phần tử của A với $0 \leq k \leq m_i, \forall i = 1, \dots, n$ được gọi là một tổ hợp lặp chập k của n phần tử (phân biệt) của A .

③ Bài tập

 Câu 1

Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài bằng 7?

Lời giải. Dãy nhị phân gồm 2 kí tự 0 và 1, có độ dài bằng 7 nghĩa là có 7 vị trí. Mỗi vị trí chọn 1 trong 2 kí tự để đặt vào, đối với cả 7 vị trí, có $2^7 = 128$ (dãy) — chỉnh hợp lặp. ■

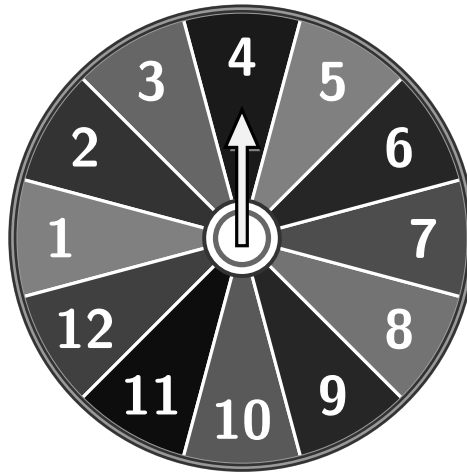
 Câu 2

Có 4 loại bút bi: xanh, đỏ, vàng, tím và mỗi loại có ít nhất 6 cây bút (các bút cùng loại là giống nhau). Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để mua 6 cây bút.

Lời giải. Áp dụng công thức tổ hợp lặp, số cách

$$C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84$$

■

**XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN VÀ
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN**

Chương này cung cấp cho các bạn học sinh miền kiến thức về các quy tắc tính xác suất, làm quen với một số khái niệm, không gian mẫu, biến cố, phép thử,... Từ đó dẫn đến một bài toán xác suất.

Các bạn học sinh cần vận dụng được những quy tắc đếm sơ cấp cơ bản đã được đề cập ở Chương I để định hướng tư duy và giải quyết triệt để mảng kiến thức không dễ liên quan đến vấn đề "Xác suất"!

§ 1

KHÔNG GIAN MẪU VÀ CÁC LOẠI BIẾN CỐ

① Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

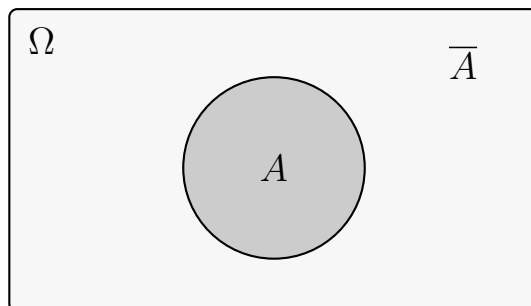
Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên được gọi là *không gian mẫu*, kí hiệu là Ω (đọc là omega).

② Biến cố

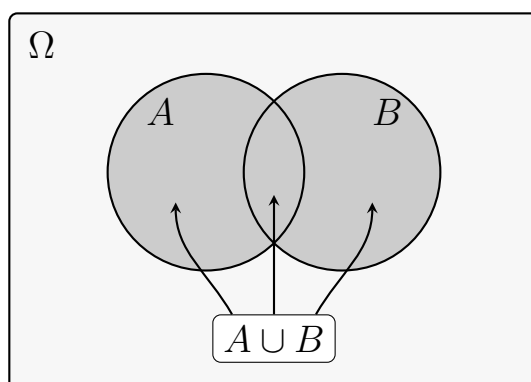
Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một *biến cố*, kí hiệu là $A, B, C, \dots$. Một kết quả thuộc A được gọi là kết quả làm cho A xảy ra hoặc *kết quả thuận lợi* cho A . *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là Ω và *biến cố không thể* là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là $\emptyset$.

③ Một số loại biến cố

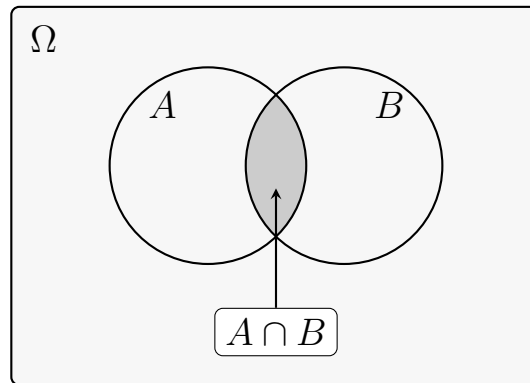
Biến cố đối của biến cố A (kí hiệu là $\bar{A}$) xảy ra khi và chỉ khi A bị phủ định — nghĩa là A không xảy ra.



Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: “ A hoặc B xảy ra”, được gọi là *biến cố hợp* của A và B và được kí hiệu là $A \cup B$. Nếu A, B là tập con của không gian mẫu Ω thì biến cố $A \cup B$ là tập con của không gian mẫu.

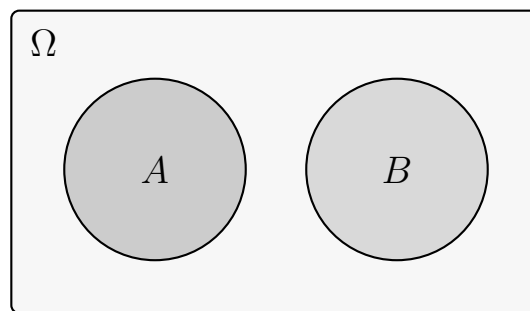


Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: “ A và B đều xảy ra”, được gọi là *biến cố giao* của A và B và được kí hiệu là $A \cap B$. Nếu A, B là tập con của không gian mẫu Ω thì biến cố $A \cap B$ là tập con của không gian mẫu.



Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* nếu A và B không đồng thời xảy ra.

Note. Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.



Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Note. Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\overline{A}$ và B , A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

④ Bài tập

Câu 1

Minh muốn gọi điện cho Ngọc nhưng Minh quên mất chữ số cuối cùng của số điện thoại. Minh chọn ngẫu nhiên một chữ số cho chữ số cuối cùng để gọi thử.

- a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.
b) Gọi A là biến cố chữ số Minh chọn được là số chia hết cho 3. Viết tập hợp mô tả biến cố A .

Lời giải. a) Chữ số cuối cùng của số điện thoại thuộc tập không gian mẫu $\Omega = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

b) Tập mô tả biến cố A là $A = \{0; 3; 6; 9\}$.

■

Câu 2

Một tổ trong lớp 11B có 4 học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung, Phương và 5 học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải. Trong giờ học, giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó lên bảng để kiểm tra bài. Xét các biến cố sau.

H: “học sinh đó là nữ”;

K: “học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H”.

- a) Mô tả không gian mẫu.
b) Nêu nội dung của biến cố hợp $M = H \cup K$. Mỗi biến cố H, K, M là tập con nào của không gian mẫu?

Lời giải. a) Không gian mẫu bao gồm tên của 9 bạn học sinh là

$$\Omega = \{\text{Hương, Hồng, Dung, Phương, Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải}\}$$

b) Nội dung của biến cố hợp $M = H \cup K$ là: “học sinh đó là nữ hoặc học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H”.

Mặt khác

$$H = \{\text{Hương, Hồng, Dung, Phương}\}$$

và

$$K = \{\text{Hương, Hồng, Hoàng, Hải}\}$$

Do đó

$$M = H \cup K = \{\text{Hương, Hồng, Dung, Phương, Hoàng, Hải}\}$$

■

 Câu 3

Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P : “số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4”, Q : “số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6”.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $S = PQ$ là gì? Mỗi biến cố P, Q, S là tập con nào của không gian mẫu?

Lời giải. a) Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 25\}$.

b) Nội dung của biến cố giao $S = PQ$ là: "số ghi trên tấm thẻ vừa chia hết cho 4 vừa chia hết cho 6".

Mặt khác

$$P = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$$

và

$$Q = \{6; 12; 18; 24\}$$

Do đó

$$S = P \cap Q = \{12; 24\}$$

■

§ 2

XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN VÀ QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

① Xác suất của biến cố

Giả sử một phép thử có không gian mẫu gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và A là một biến cố. Xác suất của biến cố A là một số, kí hiệu là $P(A)$ và được xác định bởi

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó: $n(A) = |\Omega_A|$ và $n(\Omega) = |\Omega|$ lần lượt là kí hiệu số phần tử (lực lượng) của tập A và Ω . Hay có thể hiểu $n(A) = |\Omega_A|$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố A và $n(\Omega) = |\Omega|$ là số kết quả có thể xảy ra.

Note.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

— $P(A) = 0$ nghĩa là xác suất để biến cố A xảy ra là không thể.

— $P(A) = 1$ nghĩa là xác suất để biến cố A xảy ra là chắc chắn.

Biến cố đối của biến cố A (kí hiệu là $\overline{A}$) và xác suất của biến cố đối này có mối liên hệ với biến cố A

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

② Quy tắc nhân xác suất đối với hai biến cố độc lập

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Note. Dấu hiệu để áp dụng quy tắc nhân — trong đề bài có chữ "và", "đồng thời",...

③ Quy tắc cộng xác suất

Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc (tức là $A \cap B = \emptyset$) thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Note. Dấu hiệu để áp dụng quy tắc cộng — trong đề bài có chữ "ít nhất", "hoặc", ...

④ Bài tập

✍ Câu 1

Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là?

Lời giải. Gọi A là biến cố: "bốn lần gieo đều xuất hiện mặt sấp".

Để có không gian mẫu khi gieo một đồng xu (chỉ có mặt sấp hoặc ngửa)

$$n(\Omega) = 2.2.2.2 = 2^4 = 16$$

Chỉ có một kết quả xảy ra cho biến cố A , đó là $n(A) = \{S; S; S; S\}$.

Vậy xác suất của biến cố A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{16}$$

■

✍ Câu 2

Gieo một con xúc xắc hai lần. Xác suất để ít nhất xuất hiện mặt sáu chấm là?

Lời giải. Gọi A là biến cố: "ít nhất xuất hiện mặt sáu chấm khi gieo một con xúc xắc hai lần".

Để có không gian mẫu khi gieo một con xúc xắc (gồm số chấm từ 1 đến 6)

$$n(\Omega) = 6.6 = 36$$

Xét biến cố đối $\overline{A}$: "cả hai lần gieo đều không xuất hiện mặt 6 chấm, nghĩa là số chấm tối đa dừng lại ở 5 và số chấm tối thiểu dừng lại ở 1".

Từ đó

$$n(\overline{A}) = 5.5 = 25$$

Vậy xác suất của biến cố A

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

■

✍ Câu 3

Gieo một con xúc xắc hai lần. Tính xác suất để biến cố có tổng hai mặt bằng 8?

Lời giải. Gọi A là biến cố: "tổng khi gieo một con xúc xắc hai lần bằng 8".

Gọi cặp $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = 8$.

Để có không gian mẫu

$$n(\Omega) = 6.6 = 36$$

Xét biến cố A , các cặp thoả mãn có thể có là

$$(x; y) \in \{(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)\}$$

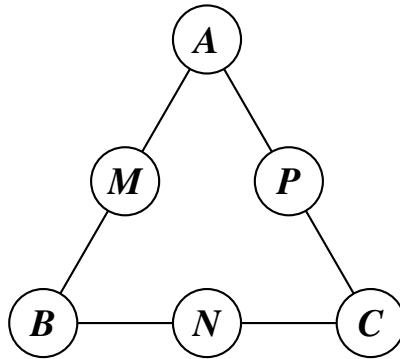
Vậy xác suất của biến cố A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

■

🔖 Câu 4 — THPT — 2025

Bạn Nam tham gia cuộc thi giải mật thư. Theo quy tắc của cuộc thi, người chơi cần chọn ra sáu số từ tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ như hình vẽ sao cho mỗi vị trí chỉ được xếp một số. Mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên sáu số trong tập S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí được yêu cầu. Gọi xác suất để bạn Nam giải được mật thư ở lần chọn và xếp đó là a . Giá trị của $\frac{4}{a}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải. Chọn có thứ tự 6 số trong 9 số để xếp vào các cạnh của tam giác $\Rightarrow n(\Omega) = A_9^6$.

Mặt khác, nếu bộ ba số xuất hiện ở các cạnh của tam giác lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} M = \frac{A+B}{2} \\ N = \frac{B+C}{2} \\ P = \frac{A+C}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Để điều kiện trên thoả mãn thì bộ số đặt vào các vị trí A, B, C là bộ số cùng lẻ hoặc cùng chẵn (thì mới chia hết cho 2).

Và để thấy mỗi vị trí chỉ được xếp một số, tức là

$$\begin{cases} M \neq A, B, C, P, N \\ N \neq A, B, C, P, M \\ P \neq A, B, C, M, N \end{cases} \iff \frac{A+B}{2} \neq C \iff A+B \neq 2C$$

Hay có thể nói bộ ba số (A, B, C) không thể lập thành cấp số cộng nữa.

Trường hợp 1: Bộ số đó là lẻ.

Các bộ số thoả mãn: (1; 3; 7), (1; 3; 9), (1; 5; 7), (1; 7; 9), (3; 5; 9), (3; 7; 9).

Trường hợp 2: Bộ số đó là chẵn.

Các bộ số thoả mãn: (2; 4; 8), (2; 6; 8).

Vậy có tất cả 8 bộ số thoả mãn, mà mỗi bộ số ấy lại có 3 giai thừa các đối chỗ nên xác suất của biến cố

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8 \cdot 3!}{A_9^6} = a \Rightarrow \frac{4}{a} = \frac{4}{\frac{8 \cdot 3!}{A_9^6}} = 5040$$

■

Câu 5 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Huế — 2026

An và Bình rất giỏi Toán, cùng tham gia một trò chơi, đầu tiên An bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất chứa sáu thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 6, tiếp theo Bình bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai chứa bốn thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 4. Gọi số An bốc được là a và số của Bình là b , sau đó hai người cùng tính giá trị của tích phân $I = \int_0^a x^b dx$. Nếu kết quả I là một số nguyên thì An thắng, ngược lại Bình thắng. Tính xác suất để An thắng cuộc (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Với a thuộc tập từ 1, 2, 3, ..., 6 và b thuộc tập từ 1, 2, 3, 4. Ta có không gian mẫu

$$n(\Omega) = 6 \cdot 4 = 24$$

Xét tích phân

$$I = \int_0^a x^b dx = \left. \frac{x^{b+1}}{b+1} \right|_0^a = \frac{a^{b+1}}{b+1} - \frac{0^{b+1}}{b+1} = \frac{a^{b+1}}{b+1}$$

Trường hợp 1: $b = 1$ thì $I = \frac{a^{1+1}}{1+1} = \frac{a^2}{2}$ (1). Nếu An thắng thì I phải nguyên nên tương đương với việc (1) chia hết cho 2 hay $a \vdots 2$. Suy ra $a \in \{2; 4; 6\}$.

Trường hợp 2: $b = 2$ thì $I = \frac{a^3}{3}$ hay $a \vdots 3$. Suy ra $a \in \{3; 6\}$.

Trường hợp 3: $b = 3$ thì $I = \frac{a^4}{4}$ hay $a \vdots 4$. Suy ra $a \in \{3; 6\}$. Suy ra đây cũng chính là trường hợp 1 (chia hết cho 2) $a \in \{2; 4; 6\}$.

Trường hợp 4: $b = 4$ thì $I = \frac{a^5}{5}$ hay $a \vdots 5$. Suy ra $a \in \{5\}$.

Vậy xác suất của biến cố

$$\frac{3 + 2 + 3 + 1}{6 \cdot 4} = \frac{3}{8} \approx 0,38$$

■

 Câu 6

An và Bình thi đấu với nhau trong một trận bóng bàn, người thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An giành chiến thắng mỗi séc là 0,4. Tính xác suất để An thắng chung cuộc.

Lời giải. Xác suất để An giành chiến thắng cả 3 séc là

$$0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = (0,4)^3$$

■

 Câu 7

Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Xác suất người thứ nhất bắn trúng là 80%. Xác suất người thứ hai bắn trúng là 70%. Xác suất để cả hai người cùng bắn trúng là?

Lời giải. Xác suất để cả hai người cùng bắn trúng là

$$80\% \cdot 70\% = 56\%$$

■

 Câu 8

Một thí sinh tham gia kì thi THPT Quốc gia. Đề bài thi môn Toán gồm 50 câu hỏi trắc nghiệm, bạn đó làm được chắc chắn đúng 40 câu. Do không còn đủ thời gian nên bạn bắt buộc phải khoanh bừa 10 câu còn lại. Hỏi xác suất để bạn đó được 9,2 điểm là bao nhiêu?

Lời giải. Trong 4 phương án A,B,C,D. Xác suất chọn được câu đúng là $\frac{1}{4}$ và xác suất chọn được câu sai là $\frac{3}{4}$.

Bạn này đã có sẵn 8 điểm, cần được 9.2 điểm thì bạn ấy cần lại trúng 6 trong 10 câu còn lại, có C_{10}^6 (cách).

Vậy xác suất của biến cố

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot C_{10}^6$$

■

 Câu 9

Hai đôi thủ ngang tài nhau, cùng thi đấu với nhau để tranh chức vô địch. Người thắng cuộc là người đầu tiên thắng được 6 ván đấu. Hết buổi sáng, người I đã thắng 5 ván, còn người II chỉ mới thắng 3 ván. Buổi chiều hai người sẽ tiếp tục thi đấu. Xác suất để người I vô địch bằng

Lời giải. Xét biến cố "người I thua — nghĩa là người II thắng liên tiếp ba ván buổi chiều", có xác suất

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Vậy xác suất để người I thắng

$$P = 1 - p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

■

Câu 10

Một phần mềm tạo đề thi trắc nghiệm 50 câu hỏi bằng cách hoán vị 4 đáp án trắc nghiệm trong cùng câu hỏi với nhau. Xác suất để có hai đề thi được tạo ra chỉ có sự giống nhau ở năm câu hỏi gần nhất với giá trị nào sau đây?

Lời giải. Xác suất chọn được hai câu hỏi có sự giống nhau là

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Suy ra xác suất chọn được hai câu hỏi khác nhau là

$$1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$$

Chọn 5 câu hỏi có sự giống nhau trong 50 câu, có C_{50}^5 (cách).

Vậy xác suất

$$\left(\frac{1}{24}\right)^5 \cdot \left(\frac{23}{24}\right)^{45} \cdot C_{50}^5$$

■

Câu 11

Trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2016 có môn thi bắt buộc là môn Tiếng Anh. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với bốn phương án trả lời A, B, C, D . Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm; mỗi câu trả lời sai bị trừ 0,1 điểm. Bạn Hoa vì học rất kém môn Tiếng Anh nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Tính xác suất để bạn Hoa đạt được 4 điểm môn Tiếng Anh trong kì thi trên.

Lời giải. Gọi x, y lần lượt là số câu đúng và số câu sai mà bạn Hoa khoanh được.

Ta có hệ phương trình (với tổng số câu và tổng số điểm đạt được) như sau.

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0,2x - 0,1y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$$

Một mặt, xác suất chọn được câu đúng và sai lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{3}{4}$.

Mặt khác, chọn 30 câu đúng trong 50 câu, có C_{50}^{30} (cách).

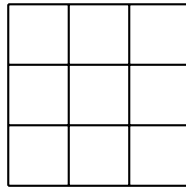
Vậy xác suất

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{30} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \cdot C_{50}^{30}$$



✍️ Câu 12 — Liên trường Hà Nội

Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ dưới. Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ vào 9 ô vuông trong bảng (mỗi ô điền một số khác nhau). Gọi Y là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ". Biết xác suất $P(Y) = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó tổng của $a + b$ bằng bao nhiêu?



Hình vẽ minh họa

Lời giải. Tổng số cách điền 9 số từ tập X (có 10 số) vào 9 ô là $n(\Omega) = A_{10}^9 = 10!$.

Tập X có 5 số chẵn $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ và 5 số lẻ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Để thỏa mãn Y , ta không được có hàng nào hoặc cột nào chứa toàn số chẵn.

Trong 9 số được chọn, số lượng số chẵn k có thể là 4 hoặc 5.

Trường hợp 1: Chọn 5 lẻ, 4 chẵn. Có $C_5^5 \cdot C_5^4 = 5$ cách chọn bộ số.

Với 4 số chẵn, có $6 \cdot P_4^3 \cdot 6! = 103680$ cách sắp xếp có ít nhất 1 hàng/cột toàn chẵn.

Số cách thỏa Y là $5 \cdot (9! - 103680) = 1296000$.

Trường hợp 2: Chọn 4 lẻ, 5 chẵn. Có $C_5^4 \cdot C_5^5 = 5$ cách chọn bộ số.

Số cách sắp xếp có ít nhất 1 hàng/cột toàn chẵn tính theo bù trừ là 233280.

Số cách thỏa Y là

$$5 \cdot (9! - 233280) = 648000$$

Tổng số cách thỏa biến cố Y là

$$1296000 + 648000 = 1944000$$

Xác suất

$$P(Y) = \frac{1944000}{10!} = \frac{15}{28}$$

Vậy $a = 15, b = 28 \implies a + b = 43$.

Lời giải by **Tuyensinh247**



XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN

ĐỊNH LÝ BAYES

§ 3

① Xác suất có điều kiện

Cho 2 biến cố A và B . Xác suất của biến cố A tính trong điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của A trong điều kiện B . Kí hiệu $P(A|B)$.

Công thức tính xác suất có điều kiện đối với 2 biến cố A, B bất kì

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)}$$

hay

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)}$$

Nếu hai biến cố A, B độc lập thì

$$P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A), P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$$

Nếu hai biến cố A, B xung khắc thì

$$P(A|B) = 0 \quad \text{vì} \quad P(A \cap B) = 0$$

Note.

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

và

$$P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B), P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$$

Cách ghi AB hay $A \cap B$ là như nhau.

Dấu hiệu làm bài: trong đề bài có chữ "biết...".

Ý nghĩa của xác suất có điều kiện là thu hẹp phạm vi tìm kiếm.

Đối với hai biến cố A, B bất kì; ta có công thức nhân xác suất

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

② Công thức xác suất toàn phần và định lý Bayes

Công thức Xác suất Toàn phần được xác định bởi

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

hay

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

Một cách tổng quát nhất, ta được (áp dụng tương tự cho biến cố B)

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

Định lý Bayes là một trường hợp đặc biệt của Xác suất có điều kiện và áp dụng cho hai biến cố A, B ; ta được

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

Một cách tổng quát nhất

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

③ Bài tập

Câu 1

Điền ngẫu nhiên các số thuộc tập $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ vào các ô của bảng ô vuông có kích cỡ 3×3 sao cho mỗi số được điền vào đúng một ô, hai ô khác nhau được điền hai số khác nhau. Tính xác suất của biến cố số 0 được điền vào ô chính giữa của bảng ô vuông, biết rằng mỗi hàng và mỗi cột của bảng đều có ít nhất một số chẵn.

	0	

Lời giải. Gọi A là biến cố: “Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một số chẵn”; B là biến cố: Số 0 được điền vào ô chính giữa”; C là biến cố: “Ô chính giữa của bảng là một số chẵn”. Số cách xếp 4 số lẻ vào 9 ô sao cho không có hàng hoặc cột nào toàn số lẻ

$$n(A) = C_9^4 - (3.C_6^1 + 3.C_6^1) = 90$$

Số cách xếp sao cho ô giữa là số chẵn và thoả mãn A (4 số lẻ nằm ở 8 ô xung quanh và không tạo thành hàng hoặc cột toàn lẻ)

$$n(C \cap A) = C_8^4 - (2.C_5^1 + 2.C_5^1) = 50$$

Từ đó

$$P(C|A) = \frac{n(C \cap A)}{n(A)} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

Vì 5 số chẵn $\{0; 2; 4; 6; 8\}$ có vai trò như nhau trong việc lấp đầy các vị trí chẵn, nên xác suất số 0 nằm ở vị trí đó khi đã biết vị trí đó là chẵn là

$$P(B|C) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B|A) = P(B|C) \cdot P(C|A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$$

■

Câu 2 — ĐỀ MINH HOẠ — 2025

Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải. Gọi A là biến cố: "quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang".

Gọi B là biến cố: "biết quả bóng đó có màu đỏ".

— Xét số phần tử của $n(AB)$: "quả bóng lấy ra từ hộp II là từ hộp I chuyển sang và nó có màu đỏ".

Lấy 1 quả trong 6 quả bóng đỏ từ hộp I, sau đó lấy 1 quả màu đỏ trong chính quả vừa lấy đó. Số cách thực hiện như vậy:

$$\Rightarrow C_6^1 \cdot C_1^1$$

— Xét số phần tử của $n(B)$: "biết quả bóng lấy ra từ hộp II có màu đỏ".

Trường hợp 1: Từ hộp I lấy 1 quả đỏ trong 6 quả đỏ (lúc này hộp II có tổng $7 + 1$ quả đỏ, do ta mới lấy 1 quả đỏ từ hộp I qua); sau đó lấy 1 quả đỏ từ hộp II, có

$$\Rightarrow C_6^1 \cdot C_{7+1}^1$$

Trường hợp 2: Từ hộp I lấy 1 quả vàng trong 4 quả vàng (lúc này hộp II vẫn còn 6 quả đỏ, do ta chỉ lấy 1 quả vàng từ hộp I); sau đó lấy 1 quả đỏ từ hộp II, có

$$\Rightarrow C_4^1 \cdot C_7^1$$

Vậy xác suất của biến cố

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{C_6^1 \cdot C_1^1}{C_6^1 \cdot C_{7+1}^1 + C_4^1 \cdot C_7^1} = \frac{3}{38} \approx 0,08$$

■

Câu 3

Theo dõi thời tiết hai huyện kề nhau A và B người ta nhận thấy trong cùng một ngày, nếu huyện B không mưa thì khả năng huyện A không mưa là 65%, còn nếu huyện A không mưa thì khả năng huyện B không mưa là 60%. Hơn nữa, xác suất cả hai huyện A và B có mưa trong cùng một ngày là 10%. Hãy tính xác suất để ít nhất một trong hai huyện có mưa trong một ngày (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải. Gọi A là biến cố: “huyện A có mưa” và B là biến cố: “huyện B có mưa”.

Đặt $P(A) = x$, $P(B) = y$ và $P(AB) = 0,1$.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} P(\overline{A}|\overline{B}) = 0,65 &\Rightarrow P(A|\overline{B}) = 0,35 = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x - 0,1}{1 - y} = 0,35 \\ &\Leftrightarrow x + 0,35y = 0,45 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,6 &\Rightarrow P(B|\overline{A}) = 0,4 = \frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} \\ &\Leftrightarrow \frac{y - 0,1}{1 - x} = 0,4 \\ &\Leftrightarrow 0,4x + y = 0,5 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x = \frac{55}{172}, \quad y = \frac{16}{43}$$

Vì thế $P(A \cup B) = x + y - 0,1 \approx 0,59$.

■

Câu 4

Một tủ kho có một chùm chìa khoá gồm 9 chiếc, bề ngoài chúng giống hệt nhau nhưng trong đó chỉ có đúng 2 chiếc mở được kho. Anh ta thử ngẫu nhiên từng chìa (chìa nào không trúng thì bỏ ra). Tính xác suất để mở được kho ở lần thứ ba. Biết kết quả có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, tính $T = a + b$?

Lời giải. Gọi A_i là biến cố: “Mở được khóa ở lần thử chìa thứ i ”, với $i \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$.

Gọi B là biến cố: “Mở được khóa ở lần thử chìa thứ 3”.

Ta có B : “Lần 1 mở không được và lần 2 mở không được và lần 3 mở được”.

Do đó

$$B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

Mà

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) \\ &= P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) \cdot P(A_3 | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) \end{aligned}$$

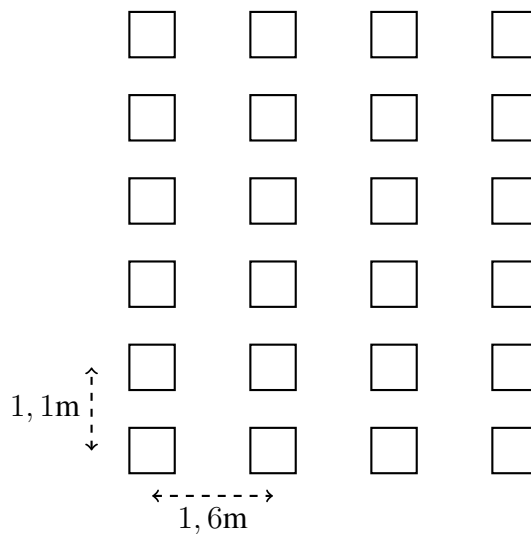
Mặt khác

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1}) &= \frac{7}{9}, \quad P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) = \frac{6}{8}, \quad P(A_3 | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = \frac{2}{7} \\ \Rightarrow P(B) &= \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{6} = \frac{a}{b} \\ \Rightarrow a + b &= 1 + 6 = 7 \end{aligned}$$

■

Câu 5 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Nghệ An — 2025

Cúm A (Influenza A) là bệnh nhiễm trùng đường hô hấp cấp tính do các virus cúm mùa gây nên. Virus cúm A có thể lây truyền trực tiếp trong không khí thông qua đường hô hấp. Giả sử Virus cúm A có khả năng lây nhiễm đối với người ngồi trong vòng bán kính 2m là 85% và đối với người ngồi cách hơn 2m là 5%. An là một học sinh bị nhiễm cúm A nhưng bản thân không hay biết. An đi dự thi cuối kỳ. Phòng thi của An có 24 bạn được xếp vào 24 chỗ ngồi của một phòng thi có 4 dãy, mỗi dãy có 6 chỗ ngồi. Khoảng cách giữa hai người theo hàng ngang là 1,6m và theo hàng dọc là 1,1m. Do không biết trước An bị cúm A nên các thí sinh được xếp ngẫu nhiên vào phòng thi. Một bạn cùng phòng của An sau khi dự thi đi kiểm tra thấy không bị nhiễm cúm A. Tính xác suất để thí sinh đó ngồi gần An trong vòng 2m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Gọi G là biến cố: “ngồi gần trong 2m”, N là biến cố “bị nhiễm cúm A”.

$$\begin{aligned} P(G|\overline{N}) &= \frac{P(G) \cdot P(\overline{N}|G)}{P(\overline{N})} \\ &= \frac{P(G) \cdot P(\overline{N}|G)}{P(G) \cdot P(\overline{N}|G) + P(\overline{G}) \cdot P(\overline{N}|\overline{G})} \quad (*) \end{aligned}$$

Với $P(\overline{N}|G) = 0,15$ và $P(\overline{N}|\overline{G}) = 0,95$.

Gọi I là vùng 8 chiếc ghế ở giữa lớp học, II là vùng bao gồm 4 chiếc ghế mà mỗi chiếc ghế ở một góc lớp và III là vùng còn lại (8 ghế).

Khi đó, xác suất để bạn học sinh ngồi ở vùng I, II, III lần lượt là

$$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}; \quad \frac{4}{24} = \frac{1}{6}; \quad \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

và xác suất để học sinh đó ngồi gần An lần lượt là

$$\begin{aligned} &\frac{8}{23}; \quad \frac{3}{23}; \quad \frac{5}{23} \\ \Rightarrow P(G) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{23} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{23} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{23} = \frac{17}{69} \end{aligned}$$

Thế vào (*) ta được

$$P(G|\overline{N}) \approx 0,05$$

■

Câu 6

Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 cái kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên một cái kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm một cái kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất Hà lấy được cả hai cái kẹo màu cam là $\frac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu cái kẹo?

Lời giải. Gọi tổng số kẹo là $n \implies$ số kẹo vàng là $(n - 6)$.

Lần thứ nhất — Xác suất lấy được kẹo cam là

$$\frac{6}{n}$$

Lần thứ hai — Xác suất lấy được kẹo cam là

$$\frac{5}{n - 1}$$

Theo bài ra, ta có

$$\frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n - 1} = \frac{1}{3} \iff n = 10$$

■

Câu 7

Có hai đồng xu có hình thức giống nhau, trong đó có một đồng xu cân đối đồng chất và một đồng xu không cân đối có xác suất khi tung đồng xu xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{3}$. Một người lấy ngẫu nhiên một đồng xu trong hai đồng xu đã cho, tung đồng xu có 3 lần thì đều thấy xuất hiện mặt ngửa, xác suất để người đó lấy được đồng xu cân đối là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải. Gọi A là biến cố: “chọn được đồng xu cân đối”, $\overline{A}$ là biến cố: “chọn được đồng xu không cân đối”.

$$\implies P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

Gọi B là biến cố: “tung đồng xu 3 lần đều xuất hiện mặt ngửa”.

Ta có

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \\ &= 0,5 \cdot (0,5)^3 + 0,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Theo định lý Bayes

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \\ &= \frac{0,5 \cdot (0,5)^3}{0,5 \cdot (0,5)^3 + 0,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3} \approx 0,3 \end{aligned}$$



Câu 8

Lớp 12A có x học sinh nam và 15 học sinh nữ, lớp 12B có 25 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên ba em học sinh từ lớp 12A và hai học sinh từ lớp 12B để lập thành một tổ năm em học sinh đi dự đại hội chi đoàn. Chọn ngẫu nhiên một trong năm em học sinh này bầu làm tổ trưởng. Biết xác suất để học sinh lớp 12A được làm tổ trưởng, nếu biết học sinh nữ được làm tổ trưởng và có xác suất không bé hơn 0,6. Hãy tìm giá trị lớn nhất của x ?

Lời giải. Gọi X là biến cố: “chọn được học sinh lớp 12A làm tổ trưởng”, Y là biến cố: “chọn được học sinh nữ làm tổ trưởng”.

$$\begin{aligned} P(X|Y) &= \frac{P(X) \cdot P(Y|X)}{P(Y)} \\ &= \frac{P(X) \cdot P(Y|X)}{P(Y|X) \cdot P(X) + P(Y|\bar{X}) \cdot P(\bar{X})} \geq 0,6 \end{aligned}$$

Với

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{3}{5} \implies P(\bar{X}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ P(Y|X) &= \frac{15}{15+x} \\ P(Y|\bar{X}) &= \frac{10}{25+10} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Thế vào ta được

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{x+15}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{x+15} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7}} \geq 0,6 \iff \frac{15}{x+15} \geq \frac{9}{x+15} + \frac{4}{35} \iff x \leq 37,5 \implies x_{\text{Max}} = 37$$



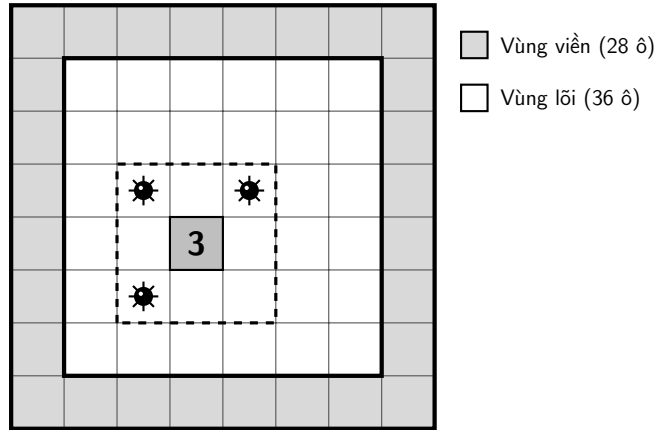
Câu 9

Trò chơi Dò Mìn được chơi trên một bảng kích thước (gồm 64 ô). Hệ thống sắp xếp ngẫu nhiên 24 quả mìn vào 24 ô khác nhau trên bảng: 40 ô còn lại là các ô an toàn. Bảng được chia làm hai vùng:

— Vùng viền: gồm 28 ô nằm ở mép ngoài cùng của bảng.

— Vùng lõi: gồm 36 ô nằm hoàn toàn bên trong.

Một người chơi chọn mở ngẫu nhiên một ô trên bảng. Giả sử ô được mở là một ô an toàn và có đúng 3 quả mìn nằm trong các ô kề cạnh hoặc kề góc với nó. Hỏi xác suất để ô người chơi vừa mở nằm trong vùng lõi là bao nhiêu ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Bảng Dò Mìn kích thước 8×8 gồm 64 ô, trong đó có 24 quả mìn và 40 ô an toàn. Ta chia 64 ô này thành 3 loại dựa trên vị trí và số ô kề xung quanh.

— Vùng lõi: gồm 36 ô. Mỗi ô lõi tiếp xúc với 8 ô kề.

— Vùng viền (khác góc): gồm 24 ô. Mỗi ô viền tiếp xúc với 5 ô kề.

— Góc: gồm 4 ô. Mỗi ô góc tiếp xúc với 3 ô kề.

Gọi E là biến cố: “Ô được mở an toàn và nằm kề đúng 3 quả mìn”.

Gọi A, B, C lần lượt là các biến cố: “Ô người chơi mở nằm trong vùng lõi”, “Ô người chơi mở ở vùng viền (khác góc)” và “Ô người chơi mở ở góc”.

xác suất để ô được mở nằm trong vùng lõi khi biết nó an toàn và kề 3 quả mìn là

$$P(A|E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)} = \frac{n(AE)}{n(AE) + n(BE) + n(CE)}$$

— $n(AE)$ (Ô mở thuộc vùng lõi):

Số cách chọn 1 ô an toàn trong vùng lõi: 36 cách.

Số cách đặt 3 quả mìn vào 8 ô kề nó: C_8^3 cách.

Bảng còn lại $64 - 1$ (ô đang mở) $- 8$ (ô kề) $= 55$ ô. Số cách đặt 21 quả mìn còn lại vào 55 ô này: C_{55}^{21} cách.

$$\Rightarrow n(AE) = 36 \cdot C_8^3 \cdot C_{55}^{21}$$

— $n(BE)$ (Ô mở thuộc vùng viền, khác góc):

Số cách chọn 1 ô an toàn ở vùng viền (khác góc): 24 cách.

Số cách đặt 3 quả mìn vào 5 ô kề nó: C_5^3 cách.

Bảng còn lại $64 - 1 - 5 = 58$ ô. Số cách đặt 21 quả mìn còn lại vào 58 ô này: C_{58}^{21} cách.

$$\implies n(BE) = 24 \cdot C_5^3 \cdot C_{58}^{21}$$

— $n(CE)$ (Ô mở thuộc 4 góc):

Số cách chọn 1 ô an toàn ở góc: 4 cách.

Số cách đặt 3 quả mìn vào 3 ô kề nó: C_3^3 cách.

Bảng còn lại $64 - 1 - 3 = 60$ ô. Số cách đặt 21 quả mìn còn lại vào 60 ô này: C_{60}^{21} cách.

$$\implies n(CE) = 4 \cdot C_3^3 \cdot C_{60}^{21}$$

Vì thế

$$P(A|E) = \frac{36 \cdot C_8^3 \cdot C_{55}^{21}}{36 \cdot C_8^3 \cdot C_{55}^{21} + 24 \cdot C_5^3 \cdot C_{58}^{21} + 4 \cdot C_3^3 \cdot C_{60}^{21}} \approx 0,67$$

■

Câu 10

Nhân dịp kỉ niệm 95 năm ngày thành lập Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh (26/03/1931 – 26/3/2025), các bạn học sinh lựa chọn tham gia hoạt động tình nguyện hoặc biểu diễn văn nghệ. Lớp 12C1 có 50% số học sinh tham gia hoạt động tình nguyện và còn lại 50% số học sinh tham gia biểu diễn văn nghệ. Biết rằng các bạn nữ đều tham gia biểu diễn văn nghệ. Trong số các bạn nam có 20% tham gia biểu diễn văn nghệ và 80% tham gia hoạt động tình nguyện. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Biết rằng học sinh này tham gia biểu diễn văn nghệ, tính xác suất để học sinh này là nữ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải. Gọi M là biến cố: “Học sinh được chọn là nam” $\implies \overline{M}$ là biến cố: “Học sinh được chọn là nữ”.

Gọi N là biến cố: “Học sinh tham gia biểu diễn văn nghệ” $\implies \overline{N}$ là biến cố: “Học sinh tham gia tình nguyện”.

Theo bài ra

$$\begin{aligned} P(\overline{N}) &= P(M) \cdot P(\overline{N}|M) + P(\overline{M}) \cdot P(\overline{N}|\overline{M}) \\ &\iff 0,5 = P(M) \cdot 0,8 + 0 \cdot P(\overline{M}) \\ &\implies P(M) = 0,625 \end{aligned}$$

Theo định lý Bayes

$$P(\overline{N}|M) = \frac{0,375 \cdot 1}{0,5} = 0,75$$

■

 Câu 11

Hệ nhóm máu ABO gồm bốn nhóm máu là A, B, O và AB với tỉ lệ phân bố trong cộng đồng khác nhau ở từng chủng tộc. Ở Việt Nam, tỉ lệ này là: nhóm máu A khoảng 20%, nhóm máu B khoảng 30%, nhóm máu O khoảng 45% và nhóm máu AB khoảng 5%. Biết rằng một người có nhóm máu AB có thể nhận máu của bất kì nhóm máu nào. Nếu người đó có nhóm máu: A, B hoặc O thì chỉ có thể nhận được máu từ người cùng nhóm máu với mình hoặc người có nhóm máu O . Lấy ngẫu nhiên một người cho máu và một người nhận máu. Biết rằng quá trình truyền máu thực hiện thành công, xác suất người nhận máu thuộc nhóm máu B là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải. Gọi M là biến cố: “quá trình truyền máu thành công”, N là biến cố: “người nhận máu thuộc nhóm B”.

Theo bài: $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$; $P(O) = 0,45$; $P(AB) = 0,05$.

Trường hợp 1: người nhận là A thì nhận từ A hoặc O

$$\Rightarrow P = 0,2 \cdot (0,2 + 0,45) = 0,13$$

Trường hợp 2: người nhận là B thì nhận từ B hoặc O

$$\Rightarrow P = 0,3 \cdot (0,3 + 0,45) = 0,225$$

Trường hợp 3: người nhận là O thì nhận từ O

$$\Rightarrow P = 0,45 \cdot 0,45 = 0,2025$$

Trường hợp 4: người nhận là AB thì nhận tất cả

$$\Rightarrow P = 0,05 \cdot (0,2 + 0,3 + 0,45 + 0,05) = 0,05$$

Vậy xác suất có điều kiện

$$P(N|M) = \frac{0,225}{0,13 + 0,225 + 0,2025 + 0,05} \approx 0,37$$

■

Câu 12

Ba người bạn An, Bảo và Châu đều muốn đi xem một trận bóng đá. Khả năng mỗi người đi được phụ thuộc vào các yếu tố sau:

— An: Nếu trời không mưa, An có 70% khả năng đi xem bóng đá. Nếu trời mưa, khả năng giảm xuống còn 40%. Theo dự báo thời tiết, khả năng trời mưa trong ngày diễn ra trận đấu là 30%. Việc An đi xem bóng đá hoàn toàn phụ thuộc vào thời tiết.

— Bảo: Việc Bảo đi xem bóng đá hoàn toàn phụ thuộc vào việc An có đi hay không. Nếu An đi, Bảo có 80% khả năng đi. Nếu An không đi, Bảo chắc chắn sẽ không đi.

— Châu: Châu là một người rất độc lập. Khả năng Châu đi xem bóng đá không phụ thuộc vào việc An và Bảo có đi hay không. Châu có 60% khả năng đi xem bóng đá.

Gọi xác suất để ít nhất 2 trong ba người bạn cùng đi xem bóng đá là P . Tính giá trị của $2500P$?

Lời giải. Lần lượt gọi tên các biến cố A, B, C, D, E có nội dung: Trời mưa, An đi, Bảo đi và Châu đi.

Trường hợp 1: An đi, Bảo đi và Châu đi

$$\Rightarrow P(C) \cdot P(D|C) \cdot P(E) = (0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,7) \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,2928$$

Trường hợp 2: An đi, Bảo đi và Châu không đi

$$\Rightarrow P(C) \cdot P(D|C) \cdot P(\overline{E}) = (0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,7) \cdot 0,8 \cdot 0,4 = 0,1952$$

Trường hợp 3: An đi, Bảo không đi và Châu đi

$$\Rightarrow P(C) \cdot P(\overline{D}|C) \cdot P(E) = (0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,7) \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,0732$$

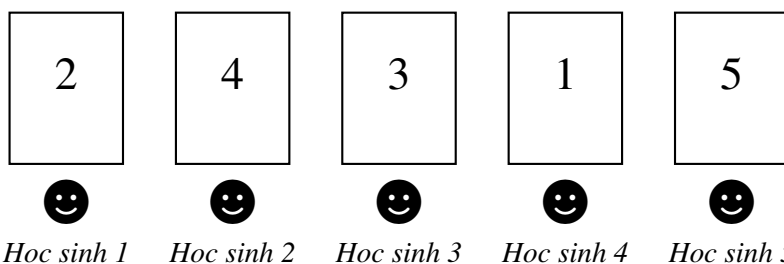
Tổng tất cả các trường hợp, ta được

$$0,5612 = \frac{1403}{2500} \Rightarrow 2500P = 1403$$



Câu 13

Các học sinh từ số 1 đến số 5 mỗi em đang cầm một thẻ số có ghi đúng số của mình. Thu lại tất cả các thẻ số của các em này, trộn lên rồi phát lại ngẫu nhiên cho mỗi em một thẻ. Sau đó, chỉ tặng quà cho học sinh có số lớn nhất trong những học sinh nhận lại đúng thẻ số của mình. Ví dụ, nếu các em nhận lại thẻ số như dưới đây, thì chỉ học sinh số 5 mới nhận được quà.



Lời giải. Gọi B là biến cố: "Có học sinh nhận được quà".

Gọi A là biến cố: "Học sinh nhận quà có số thứ tự là chẵn".

Khi ấy ta cần tính $P(A|B)$. Ta dễ thấy không gian mẫu "Có học sinh nhận được quà" hoàn toàn tương đương với "ít nhất một người nhận đúng thẻ của mình". Theo công thức Derangements, số trường hợp không có ai nhận đúng thẻ là

$$D_5 = 5! \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{k!} = 44$$

Do đó, số phần tử của không gian mẫu B là

$$n(B) = 5! - 44 = 120 - 44 = 76$$

Ta xét tới số phần tử có lợi cho $n(AB)$. Lưu ý rằng học sinh nhận được quà phải có số thứ tự là chẵn, tức là ta xét với trường hợp em học sinh có số thứ tự là 2 và 4.

Trường hợp 1: Em học sinh có số thứ tự là 2 nhận quà. Bây giờ ta cố định học sinh số 2 này (nhận đúng thẻ 2), và dĩ nhiên các em học sinh có số 3, 4, 5 phải nhận sai thẻ của mình. Vì nếu 3, 4, 5 nhận đúng thì số sẽ lớn hơn 2, khi đó 2 sẽ không nhận được quà. (Học sinh số 1 nhận đúng hay sai không quan trọng vì 1 nhỏ hơn 2).

Tổng số hoán vị của 4 em còn lại là $4!$ (vì 2 đã cố định nhận đúng thẻ nên ta chỉ xét 4 em). Để đếm số trường hợp "3, 4, 5 đều nhận sai thẻ", ta dùng nguyên lí bù trừ: lấy tổng số cách trừ đi số cách "tồn tại ít nhất 1 học sinh trong nhóm 3, 4, 5 nhận đúng thẻ".

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là biến cố người 3, 4, 5 nhận đúng thẻ trong không gian 4 phần tử này.

— 1 người nhận đúng thẻ, 3 người còn lại hoán vị: $C_3^1 \cdot 3!$.

— 2 người nhận đúng thẻ, 2 người còn lại hoán vị: $C_3^2 \cdot 2!$.

— 3 người nhận đúng thẻ, 1 người còn lại hoán vị: $C_3^3 \cdot 1!$.

Theo nguyên lí bù trừ, tổng kết *Trường hợp 1* ta có số cách thoả mãn là

$$TH_1 = 4! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 4! - (C_3^1 \cdot 3! - C_3^2 \cdot 2! + C_3^3 \cdot 1!) = 24 - (18 - 6 + 1) = 11$$

Trường hợp 2: Em học sinh có số thứ tự là 4 nhận quà. Bây giờ ta cố định học sinh số 4 này và dĩ nhiên học sinh số 5 phải nhận sai thẻ của mình (nếu 5 nhận đúng thì 4 không có quà). Các học sinh 1, 2, 3 nhận thẻ nào cũng được.

Tổng số hoán vị cho 4 bạn (trừ bạn số 4 đã cố định) là $4!$. Ta loại bỏ đi những trường hợp "số 5 cũng nhận đúng thẻ". Nếu số 5 cũng nhận đúng, ta cố định luôn 4 và 5, vậy 3 bạn còn lại hoán vị tùy ý có $3!$ cách.

Nên số cách thoả mãn *Trường hợp 2* là

$$TH_2 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18$$

Vậy xác suất của biến cố cần tìm là

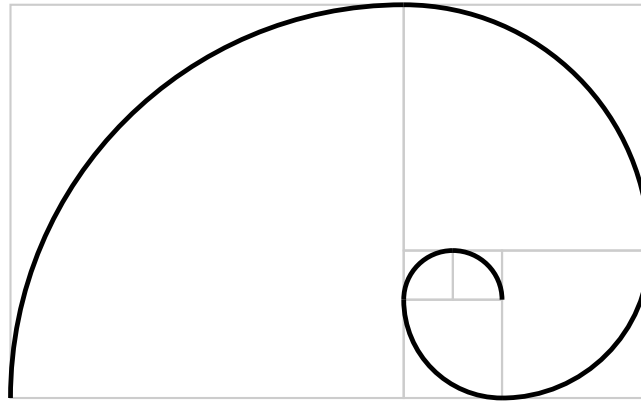
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{TH_1 + TH_2}{76} = \frac{11 + 18}{76} = \frac{29}{76}$$

■

GIỚI THIỆU CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM, BỔ ĐỀ

Chương

IIIVÀ CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT



Chương này cung cấp cho các bạn học sinh những lời tiếp cận một bài toán đếm — xác suất theo những cách khá "riêng". Đồng thời khái quát thành một số công thức, bổ đề hay gặp về mảng Tổ hợp & Xác suất này. Hơn nữa, chương II còn đề cập đến các phương pháp đếm giúp tiếp cận một bài toán Đếm — Xác suất trở nên đơn giản!

§ 1

BÀI TOÁN CHIA KẸO CỦA EULER

==-- Bài toán chia kẹo của Euler VÀ Phương pháp Vách ngăn thực chất là một, do đó mình chỉ đề cập đến "Bài toán chia kẹo của Euler"!

① Bài toán gốc thứ nhất

Bài toán 1: Có bao nhiêu cách chia n chiếc kẹo giống hệt nhau cho k đứa trẻ, sao cho mỗi đứa trẻ có ít nhất 1 chiếc kẹo?

Điều này tương đương với việc tìm số nghiệm nguyên $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1 \end{cases}$$

Khi đó, số cách chia thỏa mãn là

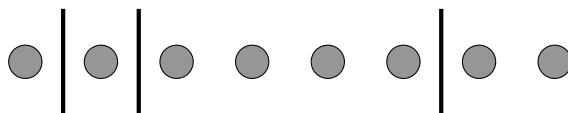
$$C_{n-1}^{k-1}$$

Chứng minh

Xếp n chiếc kẹo thành một hàng ngang. Giữa n chiếc kẹo này sẽ có $n - 1$ khoảng trống. Để chia thành k phần mà phần nào cũng có ít nhất 1 kẹo, thì tương ứng ta cần đặt $k - 1$ cái vách vào các khoảng trống đó. Từ đó ta có công thức trên.

Ví dụ: Có bao nhiêu cách chia 8 cái kẹo cho 4 em học sinh sao cho mỗi em có ít nhất 1 cái kẹo?

Giữa 8 viên kẹo này, có 7 khoảng trống. Muốn chia số kẹo này cho 4 em học sinh, ta cần 3 vách ngăn đặt vào 7 khoảng trống này (khi đó số kẹo được chia thành 4 phần).



Khi ấy, số cách chia thỏa mãn là $C_{8-1}^{4-1} = C_7^3$.

② Bài toán gốc thứ hai

Bài toán 2: Có bao nhiêu cách chia n chiếc kẹo giống hệt nhau cho k đứa trẻ, sao cho có thể có đứa trẻ không nhận được kẹo?

Điều này tương đương với việc tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Để chứng minh Bài toán số 2 này. Ta sẽ đưa nó về Bài toán quen thuộc số 1. Rõ thấy, điều kiện chia kẹo ban đầu của Euler là $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k \geq 1$. Bây giờ ta sẽ biến đổi số "0" thành số "1" như sau.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \cdots + (x_k + 1) = n + k \cdot 1 \\ x_i + 1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \cdots + (x_k + 1) = n + k \\ x_i + 1 \geq 1 \end{cases}$$

Thế nên theo Bài toán 1, thì ta có số cách chia thoả mãn là

$$C_{n+k-1}^{k-1}$$

Note. Lưu ý rằng trong các bài toán phần lớn chỉ số nhỏ hơn sẽ là k và chỉ số lớn hơn là n . Trong đó cần hiểu n là số vật phẩm cần chia và k là số đối tượng nhận. Hơn nữa, cần thực sự lưu ý, trong hai bài toán đang xét, các viên kẹo là *hoàn toàn giống nhau* — không tồn tại hoán vị.

③ Bài tập

Câu 1

Có bao nhiêu cách chia 10 cái kẹo giống hệt nhau cho 3 bạn học sinh sao cho bạn nào cũng có ít nhất một cái kẹo?

Lời giải. Theo Bài toán chia kẹo số 1, ta có cách chia thoả mãn là

$$C_{n-1}^{k-1} = C_{10-1}^{3-1} = C_9^2 = 36$$

■

Câu 2

Có bao nhiêu cách chia 10 cái kẹo giống hệt nhau chia cho 3 bạn học sinh sao cho có thể có bạn không nhận được kẹo?

Lời giải. Theo Bài toán chia kẹo số 2, ta có cách chia thoả mãn là

$$C_{k+n-1}^{k-1} = C_{10+3-1}^{3-1} = C_{12}^2 = 66$$

■

Câu 3 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Phú Thọ — 2025

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng tất cả các chữ số của số đó bằng 7?

Lời giải. Gọi số tự nhiên cần lập có dạng $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ với điều kiện để nó có 4 chữ số thì $a \geq 1, b, c, d \geq 0$. Tới đây ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Nếu theo bài toán chia kẹo Euler thông thường thì $x_i \geq 1$, nghĩa là $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$. Trong bài toán này, chỉ có $x_1 \geq 1$ nên ta phải biến đổi như sau.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) \geq 7 + 3 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 + 1, x_3 + 1, x_4 + 1 \geq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) \geq 10 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 + 1, x_3 + 1, x_4 + 1 \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy theo Bài toán chia kẹo số 1 (mỗi em nhận ít nhất một chiếc kẹo), ta được số bộ số thoả mãn là

$$C_{n-1}^{k-1} = C_{10-1}^{4-1} = C_9^3 = 84$$

Note. Lưu ý rằng trong nhiều bài toán, ta phải linh hoạt sử dụng Bài toán 1 hay 2 của Euler để tối ưu, không gượng ép phải quy về 1 hay 2. ■

Câu 4

Có bao nhiêu bộ số tự nhiên x_i thoả mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 44$?

Lời giải. Cần nhớ rằng số tự nhiên là số các chữ số thoả mãn $x_i \geq 0$ với $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Thế nên ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 44 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Sẽ tồn tại một số tự nhiên $\mathbb{N}$ nào đó làm cho dấu bằng xảy ra, nghĩa là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \mathbb{N} = 44 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Tôi đây, bài toán chính thức quay về dạng chia kẹo cho các em học sinh sao cho có thể có em không nhận được kẹo. Áp dụng Bài toán chia kẹo số 2. Ta được số bộ số thoả mãn sẽ là

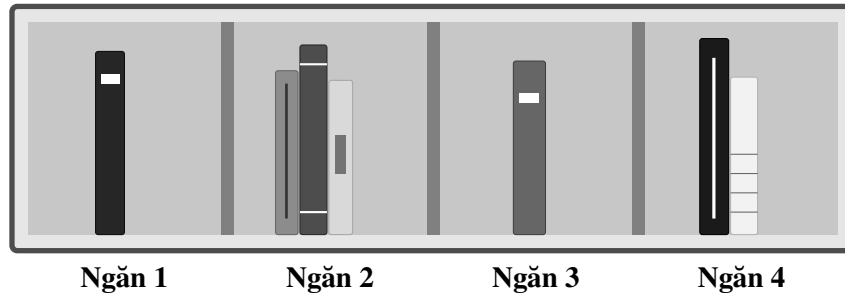
$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{44+6-1}^{6-1} = C_{49}^5$$

■

Câu 5 — THPT — 2025

Có bốn ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự 1, 2, 3, 4 và bảy quyển sách khác nhau. Bạn An xếp hết bảy quyển sách nói trên vào bốn ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn. Khi đã xếp xong bảy quyển sách, hai cách xếp của bạn An được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

- + Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- + Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.



Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn An. Giá trị của $\frac{T}{50}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải. Vì có dữ kiện "ít nhất", nên ta quy về bài toán: có 7 chiếc kẹo chia cho 4 em học sinh sao cho mỗi em có ít nhất một chiếc.

Hơn nữa, cần lưu ý rằng 7 chiếc kẹo (tương ứng 7 quyển sách) là hoàn toàn khác nhau nên ta phải nhân thêm 7 giai thừa cách đổi chỗ cho 7 quyển sách khác nhau này. Ở bài toán chia kẹo mà ta đề cập, những viên kẹo là hoàn toàn giống nhau nên không có chuyện cần nhân thêm giai thừa cách đổi chỗ.

Vậy theo Bài toán chia kẹo số 1, ta được số cách xếp thỏa mãn sẽ là

$$T = 7! \cdot C_{7-1}^{4-1} = 7! \cdot C_6^3 \Rightarrow \frac{T}{50} = \frac{7! \cdot C_6^3}{50} = 2016$$

■

Câu 6

Nhân dịp đầu năm mới, gia đình bác An có chuẩn bị 11 bao lì xì giống nhau nhưng được đánh số ẩn từ 1 đến 11 bằng bút dạ quang để dễ phân biệt. Sau đó, bác An ra ngân hàng rút 15 tờ tiền có mệnh giá 100000 đồng và 12 tờ tiền có mệnh giá 500000 đồng. Gọi T tổng số cách xếp sao cho bao lì xì nào cũng có ít nhất 1 tờ tiền và mỗi bao chứa đủ cả 2 mệnh giá trên. Tính giá trị của $\frac{T}{11}$?

Lời giải. Vì có dữ kiện "ít nhất", nên ta quy về bài toán chia kẹo số 1.

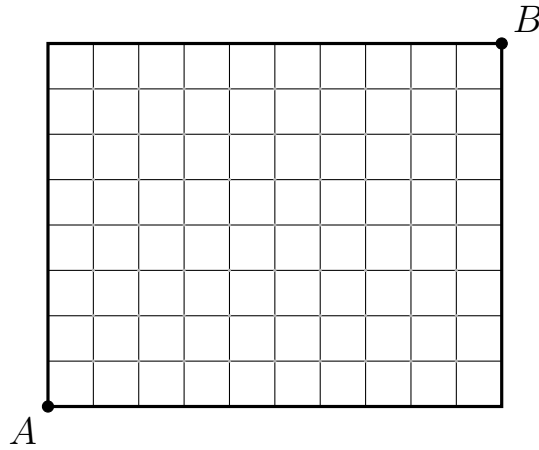
Ta lần lượt bỏ từng tờ tiền có 2 mệnh giá đó vào 11 bao lì xì giống hệt nhau. Theo quy tắc nhân, ta được

$$T = C_{15-1}^{11-1} \cdot C_{12-1}^{11-1} = C_{14}^{10} \cdot C_{11}^{10} \Rightarrow \frac{T}{11} = \frac{C_{14}^{10} \cdot C_{11}^{10}}{11} = 1001$$

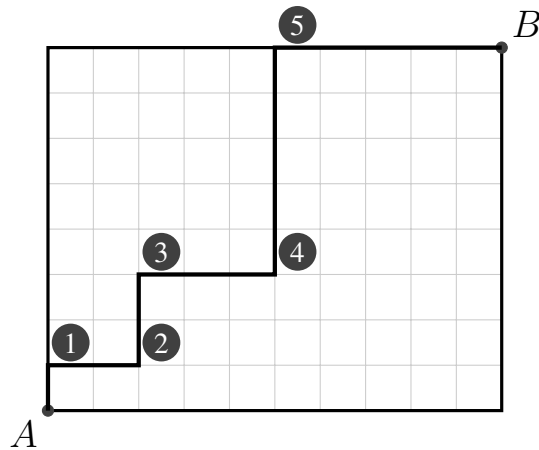
■

Câu 7

Một mạng lưới thành phố được chia thành các tuyến đường ô vuông có kích cỡ 8×10 với độ dài như nhau (tham khảo hình vẽ). Anh lái xe Taxi đang ở vị trí A và muốn chở khách đến địa điểm B . Tài xế chỉ có thể đi lên hoặc rẽ phải khi đi qua từng giao lộ để đi đến điểm B sao cho quãng đường đi được ngắn nhất. Do nhu cầu khách hàng muốn tham quan một phần khu phố và muốn chuyển hướng đúng 5 lần trong khu phố này. Gọi T là tổng số cách đi của anh Taxi trên. Tính giá trị của T .



Lời giải. Ví dụ 1 cách đi thoả mãn



Điểm đặc biệt là cho dù bạn có đi như thế nào thì quy luật vẫn sẽ là: Tổng số ô đi qua phải luôn là 10 và Tổng số ô đi lên luôn là 8.

Với cách đi trên thì ta gọi quãng đường đi lên từ A đến 1, từ 2 đến 3, từ 4 đến 5 lần lượt là a, b, c .

Gọi quãng đường đi sang phải từ 1 đến 2, từ 3 đến 4, từ 5 đến B lần lượt là x, y, z .

Hơn nữa, mỗi bước đi đều phải đi lên hoặc đi sang phải ít nhất 1 ô nên ta sẽ sử dụng Bài toán chia kẹo số 1 của Euler.

Đầu tiên, xét quãng đường đi lên a, b, c , mà tổng số ô đi lên là 10. Nên bài toán trở thành chia 10 chiếc kẹo cho 3 em sao cho em nào cũng có ít nhất một cái kẹo. Ta được số cách thoả mãn

$$C_{10-1}^{3-1} = C_9^2$$

Tiếp theo, xét quãng đường đi qua phải $x; y; z$ với tổng số ô sang phải là 8 Tương tự, ta được

$$C_{8-1}^{3-1} = C_7^2$$

Cuối cùng, do mới chỉ xét 1 trường hợp là đi lên ngay từ đầu (từ A đến 1), ta cũng cần phải xét thêm trường hợp 2 là đi sang phải ngay từ đầu (từ A qua ô bên cạnh chẳng hạn). Nên tổng 2 trường hợp, ta có số cách đi thoả mãn đề bài

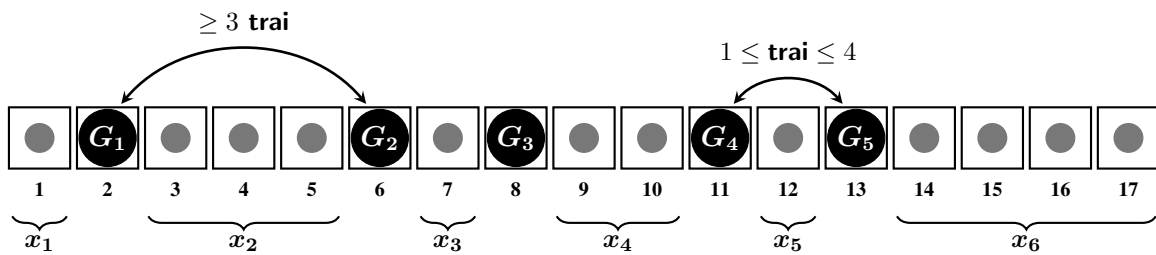
$$C_9^2 \cdot C_7^2 + C_9^2 \cdot C_7^2 = 2(C_9^2 \cdot C_7^2) = 1512$$

■

📌 Câu 8 — VMO — 2012

Cho một nhóm có 5 cô gái, kí hiệu là $G_1, G_2, \dots, G_5$ và 12 chàng trai được xếp vào 17 chiếc ghế được sắp thành một hàng ngang sao cho các điều kiện sau đồng thời thoả mãn:

- Mỗi ghế có đúng một người ngồi;
- Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 ;
- Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;
- Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.



Có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy?

Lời giải. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_6$ lần lượt là số chàng trai ở bên trái G_1 , ở giữa G_1, G_2 , ở giữa G_3, G_4 , ở giữa G_4, G_5 và ở bên phải G_5 .

Theo bài ra, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \\ x_2 \geq 3 \\ 1 \leq x_5 \leq 4 \\ x_i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Điều kiện của Bài toán chia kẹo số 1 của Euler là $x_i \geq 1$ nên ta sẽ biến đổi hệ phương trình ràng buộc này trở về dạng quen thuộc bằng thao tác

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_3 - 2) + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \\ x_3 - 2 \geq 3 - 2 \\ 1 \leq x_5 \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 14 \\ x_3 - 2 \geq 1 \\ 1 \leq x_5 \leq 4 \end{cases}$$

Tới đây, chính là Bài toán chia kẹo số 1 của Euler.

Xét điều kiện $1 \leq x_5 \leq 4$ ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $x_5 = 1$ thì

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1 + x_6 = 14 \iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 13$$

Suy ra trường hợp này có $C_{13-1}^{5-1} = C_{12}^4$ (cách).

Tương tự cho 3 trường hợp còn lại lần lượt là: $C_{12-1}^{5-1} = C_{11}^4$, $C_{11-1}^{5-1} = C_{10}^4$, $C_{10-1}^{5-1} = C_9^4$.

Đối với bài toán chia kẹo thì các viên kẹo là giống hệt nhau nên không tồn tại hoán vị, tuy nhiên đây là các chàng trai (7 bạn) nên ta phải hoán vị cho 7 chàng trai này. Còn các cô gái sở dĩ đã được đánh số thứ tự G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 , tức là đã được cố định nên ta không hoán vị nữa.

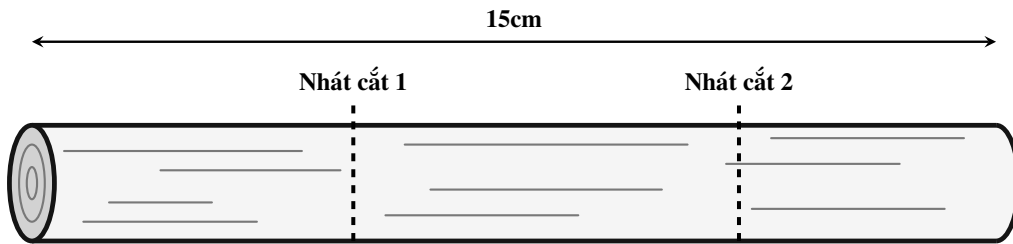
Vậy số cách xếp thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên là

$$12! (C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4) = 12! \sum_{k=9}^{12} C_k^4$$

■

✍ Câu 9 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Bắc Ninh — 2026

Trong giờ thực hành, một học sinh được giao một thanh gỗ dài 15cm (có 14 vạch chia đều trên thanh gỗ). Học sinh đó thực hiện ngẫu nhiên hai nhát cắt tại các vạch chia cm để chia thanh gỗ thành 3 đoạn. Tính xác suất để 3 đoạn gỗ thu được có thể ghép thành 3 cạnh của một tam giác (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).



Lời giải. Thanh gỗ có 14 vạch, ta chọn ngẫu nhiên trong 14 vạch chia đó để thực hiện 2 nhát cách. Không gian mẫu

$$n(\Omega) = C_{14}^2$$

Gọi A là biến cố: "3 đoạn gỗ thu được có thể ghép thành 3 cạnh của một tam giác".

Suy ra biến cố đối của A là $\bar{A}$: "3 đoạn gỗ thu được không thể ghép thành 3 cạnh của một tam giác".

Gọi $a; b; c$ lần lượt là 3 cạnh của tam giác cần lập thành. Và dĩ nhiên

$$a + b + c = 15 \implies a + b = 15 - c$$

Theo bất đẳng thức trong tam giác thì

$$\begin{cases} a + b \geq c \\ a + c \geq b \\ b + c \geq a \end{cases}$$

Xét điều kiện thứ nhất và kết hợp với điều "đĩ nhiên". Ta được

$$\begin{cases} a + b \geq c \\ a + b = 15 - c \end{cases} \implies 15 - c \geq c \iff 2c \leq 15 \iff c \leq 7,5$$

Thanh gỗ dài 15cm, ta thực hiện 2 nhát cắt thì biến thanh gỗ thành 15cm thành 3 thanh gỗ nhỏ hơn có độ dài trung bình là 7,5 cm. Biến cố đối của điều này khi và chỉ khi các cạnh của tam giác (3 thanh gỗ nhỏ) phải lớn hơn 7,5, là 8. Số cách chọn thoả mãn (theo bài toán chia kẹo Euler số 1)

$$3C_{8-1}^{3-1} = 3C_7^2$$

Sở dĩ nhân thêm 3 là vì áp dụng cho cả 3 cạnh.

Vậy xác suất của biến cố

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{3C_7^2}{C_{14}^2} \approx 0,31$$

■



Câu 10 — Trích trong sách A Path To Combinatorics For Undergraduates — AIME 1984

Trồng 3 cây phong, 4 cây sồi và 5 cây bạch dương thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có hai cây bạch dương nào nằm cạnh nhau?

Lời bình: Đây là bài toán thú vị kết hợp giữa hoán vị lặp và chia kẹo Euler.

Lời giải. Xét không gian mẫu, theo công thức hoán vị lặp, ta được: $n(\Omega) = \frac{12!}{3!4!5!}$ (cách).

Gọi A là biến cố: “không có hai cây bạch dương nào cạnh nhau”.

Ta xét 7 cây còn lại, đó là 3 cây phong và 4 cây sồi. Chúng lặp lại lần lượt là 3 lần và 4 lần. Nên số cách xếp 7 cây còn lại ấy là: $\frac{7!}{3!4!}$ (cách).

Giữa 7 cây này, có 8 khoảng trống, chọn 5 khoảng trống trong 8 khoảng trống ấy để trồng 5 cây bạch dương vào (điều này đảm bảo không có hai cây bạch dương nào cạnh nhau). Có: C_8^5 (cách).

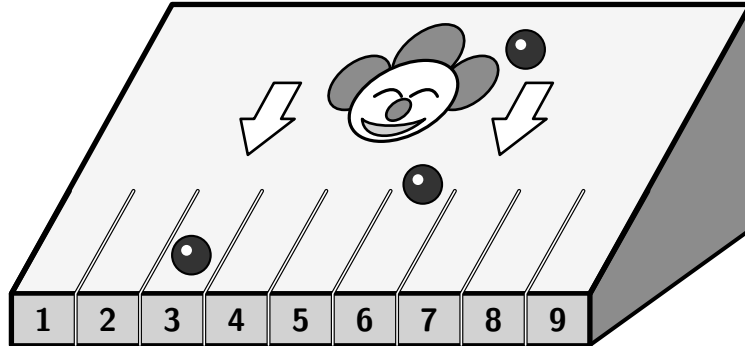
Vậy xác suất của biến cố

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{7!}{3!4!} \cdot C_8^5}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7}{99}$$

■

Câu 11

Trong một trò chơi tổ chức ở hội chợ, ba viên bi lần lượt được thả ngẫu nhiên xuống một mặt phẳng nghiêng vào các ô được đánh số từ 1 đến 9 như hình vẽ (giả sử khả năng viên bi rơi vào mỗi ô là như nhau). Bạn An sẽ trúng thưởng nếu tổng của ba số mà viên bi rơi vào nhỏ hơn 7. Gọi xác suất để An trúng thưởng trong lần chơi đó là phân số tối giản có dạng $T = \frac{a}{b}$. Giá trị của $729T$ bằng?



Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số mà các viên bi rơi trúng với $x_1, x_2, x_3 \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$ hay

$$x_i \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}, i = 1, 2, 3$$

Khi đó, không gian mẫu

$$n(\Omega) = 9.9.9 = 729$$

Mặt khác, theo đề bài thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 < 7 \\ x_i \geq 1 \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, dấu bằng thực sự xảy ra nếu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + k = 7 \\ x_i \geq 1 \end{cases}$$

Gọi A là biến cố: "tổng của ba số viên bi rơi vào nhỏ hơn 7".

Nghiệm của phương trình này hoàn toàn tương đương với việc: "chia 7 chiếc kẹo giống nhau cho 4 đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ nhận ít nhất một viên kẹo"(theo bài toán chia kẹo Euler số 1).

Do đó

$$n(A) = C_{7-1}^{4-1} = C_6^3 = 20$$

Vậy xác suất của biến cố A

$$T = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{729} \implies 729T = 20$$

■

✍️ Câu 11 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Hà Tĩnh — 2026

Xếp 8 quyển sách giống nhau vào một giá sách gồm 10 ngăn. Gọi P là xác suất để xếp 8 quyển sách vào 10 ngăn sao cho số quyển sách trong mỗi ngăn không quá 2 quyển sách, có 4 ngăn hoặc 6 ngăn chứa đúng 1 quyển sách và các ngăn liền kề với ngăn chứa 2 quyển sách là ngăn không có quyển sách nào. Tính giá trị của $12155P$.

Lời bình: Đây là bài toán thú vị kết hợp giữa hoán vị lặp và chia kẹo Euler.

Lời giải. Đầu tiên, xếp 8 quyển sách vào 10 ngăn (chia 8 chiếc kẹo cho 10 em bé) sao cho có thể có ngăn không chứa quyển sách nào. Theo công thức chia kẹo Euler thì không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{10+8-1}^{10-1} = C_{17}^9$ (cách).

Gọi x, y, z lần lượt là số ngăn chứa 0, 1, 2 quyển sách.

Hoán vị lặp tồn tại là bởi: việc xếp 8 quyển sách vào 10 ngăn sách hoàn toàn tương đương với việc tìm số hoán vị (lặp) của dãy số gồm x số 0, y số 1 và z số 2.

Theo bài ra, ta có điều kiện ràng buộc

- (1): Tổng số ngăn $x + y + z = 10$;
- (2): Tổng số sách $0x + 1y + 2z = 8$;
- (3): $y \in \{4; 6\}$.

Trường hợp 1: Với $y = 4$. Giải hệ phương trình trên ta được $x = 4, z = 2$.

Tức là trường hợp này ta cần xét xem “các ngăn liền kề với ngăn chứa 2 quyển sách là ngăn không có quyển sách nào”. Để điều đó xảy ra, khi và chỉ khi các số 2 phải nằm cách nhau ít nhất 1 số 0.

Ta xếp 4 số 0 thành một hàng ngang, giữa chúng có 3 khoảng trống cộng với 2 khoảng trống ở đầu mút là có 5 khoảng trống. Ta chọn 2 trong 5 khoảng trống đó để đặt số 2, có C_5^2 (cách). Tiếp theo trong 3 khoảng trống còn lại, ta đặt 4 số 1, có $C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2$ (cách).

Trường hợp 2: Với $y = 6$. Giải hệ phương trình trên ta được $x = 3, z = 1$.

Giống trường hợp 1, ta cũng xét “các ngăn liền kề với ngăn chứa 2 quyển sách là ngăn không có quyển sách nào”.

Ta xếp 3 số 0 thành một hàng ngang, giữa có 2 khoảng trống cộng với 2 khoảng trống ở đầu mút là có 4 khoảng trống. Ta chọn 1 trong 4 khoảng trống đó để đặt số 2, có C_4^1 (cách). Tiếp theo trong 3 khoảng trống còn lại, ta đặt 6 số 1, có $C_{6+3-1}^{3-1} = C_8^2$ (cách).

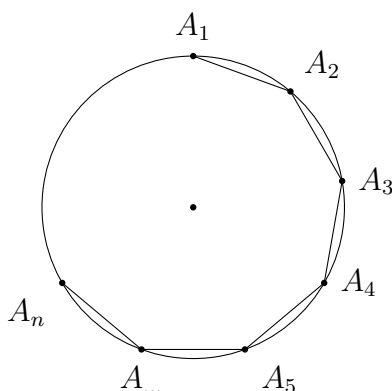
Vậy xác suất của biến cố

$$\frac{C_5^2 \cdot C_6^2 + C_4^1 \cdot C_8^2}{C_{17}^9} = \frac{131}{12155} \implies 12144P = 131$$



Câu 12

Cho đa giác đều (H) nội tiếp trong một đường tròn bán kính bằng $10cm$. Chọn ngẫu nhiên 5 đỉnh của (H) để tạo thành một ngũ giác. Biết xác suất để ngũ giác thu được có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác (H) bằng $\frac{455}{1938}$. Hãy tính chu vi của đa giác (H) (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị của cm).



Lời giải. Giả sử đa giác (H) có n đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 5 đỉnh, ta có không gian mẫu C_n^5 .

Muốn ngũ giác thu được có đúng 2 cạnh là cạnh của (H) , thì miền đa giác này phải được chia thành 3 vùng. Chọn 2 đỉnh liền kề của (H) , có C_5^2 (cách). Bài toán trở thành: “chia $n - 5$ viên kẹo vào 3 vùng của đa giác”, có $C_{n-5-1}^{3-1} = C_{n-6}^2$ (cách).

Hơn nữa, với mỗi đỉnh, chúng lại lặp lại nên có $\frac{n}{5}$ ngũ giác thỏa mãn.

Theo đề bài thì

$$\frac{\frac{n}{5} \cdot C_5^2 \cdot C_{n-6}^2}{C_n^5} = \frac{455}{1938} \iff n = 20$$

Vậy chu vi của đa giác có $n = 20$ đỉnh và bán kính $R = 10$

$$C = n \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \left(\frac{360 \cdot \frac{1}{20}}{2} \right) = 20 \cdot 2 \cdot 10 \cdot \sin (9) \approx 63cm$$

■

§ 2

BỔ ĐỀ KAPLANSKY VÀ BỔ ĐỀ MENAGE

① Bổ đề Kaplansky cho dãy hàng ngang

Cho n phần tử được xếp thành một hàng ngang. Số cách chọn ra k phần tử sao cho không có hai phần tử nào đứng cạnh nhau được xác định bởi

$$C_{n-k+1}^k$$

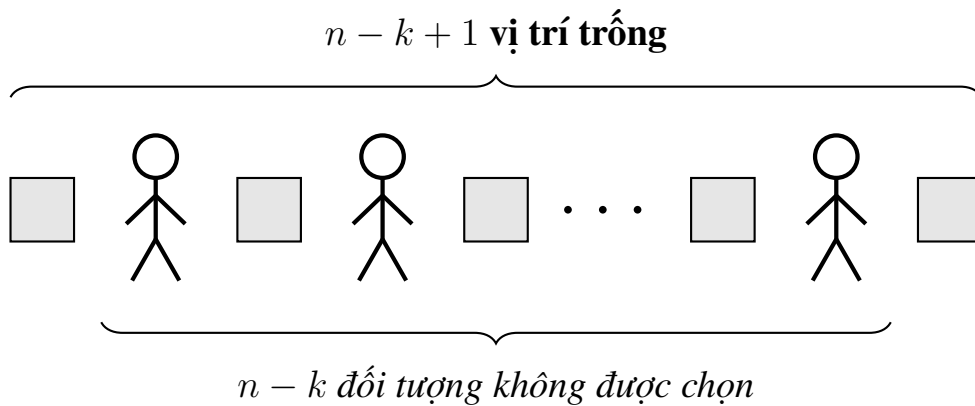
Chứng minh

Sau đây ta sẽ sử dụng *phương pháp vách ngăn* (chia kẹo Euler) để chứng minh bổ đề này. Cụ thể

Ta xem các phần tử *không được chọn* là các vách ngăn.

Gọi các phần tử được chọn là k và khi đó các phần tử không được chọn sẽ là $n - k$.

Đầu tiên, ta xếp $n - k$ phần tử không được chọn thành một hàng ngang (đại diện là các người que) và các ô vuông đại diện cho các khoảng trống.



Giữa $n - k$ phần tử không được chọn sẽ có $n - k - 1$ khoảng trống xen giữa (là các ô vuông) và cộng thêm 2 khoảng trống ở 2 đầu mút (2 ô vuông ngoài rìa) thì ta thực sự có $n - k - 1 + 2 = n - k + 1$ vị trí còn trống.

Tiếp theo, ta đặt k phần tử được chọn vào các vị trí còn trống này. Cần lưu ý rằng mỗi vị trí trống chỉ được đặt 1 phần tử (vì bổ đề 1 chỉ ra rằng không có 2 phần tử nào kề nhau được chọn), thế nên số cách chọn thoả mãn phải là

$$C_{n-k+1}^k$$

Chứng minh xong.

② Bổ đề Kaplansky cho vòng tròn khép kín

Cho n phần tử được xếp thành một vòng tròn. Số cách chọn ra k phần tử sao cho không có hai phần tử nào đứng cạnh nhau được xác định bởi

$$\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$$

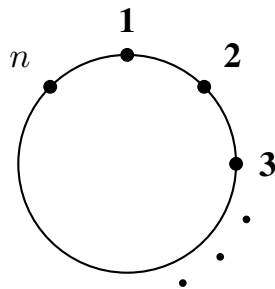
Chứng minh

Ta đánh số thứ tự cho các phần tử $1, 2, 3, \dots, n$ xung quanh một vòng tròn.

Khi chọn ra k phần tử thuộc vào tập $1, 2, 3, \dots, n$ thì ta luôn có hai trường hợp xảy ra. Cụ thể như sau.

Trường hợp 1: Phần tử được đánh số thứ tự là 1 được chọn.

Bổ đề 2 chỉ ra rằng không có 2 phần tử nào kề nhau được chọn nên các phần tử kề đối tượng được đánh số thứ tự là 1 sẽ không được chọn, nghĩa là đang đề cập phần tử được đánh số thứ tự là 2 và n . Lúc này, ta phải chọn ra k phần tử từ $k-1$ và $n-3$ phần tử còn lại.



Tới đây, từ một vòng tròn ta đã biến nó thành hàng ngang vì phần tử được đánh số thứ tự là 1, 2 và n đã bị loại bỏ.

Theo bổ đề 1, ta dễ dàng có số cách chọn thoả mãn là

$$C_{(n-3)-(k-1)+1}^k = C_{n-k-1}^{k-1}$$

Trường hợp 2: Phần tử được đánh số thứ tự là 1 không được chọn.

Lúc này, còn lại $n-1$ phần tử và ta chỉ cần chọn ra k phần tử trong số ấy.

Theo bổ đề 1, ta dễ dàng có số cách chọn thoả mãn là

$$C_{(n-1)-k+1}^k = C_{n-k}^k$$

Tới đây, vấn đề cần chứng minh chuyển thành vấn đề cần chứng minh mới, là

$$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k (*)$$

Cần nhớ lại công thức tính tổ hợp chập k của n phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Hơn thế, công thức rút gọn giai thừa

$$n! = n.(n-1)!$$

Một mặt

$$C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)![(n-k-1)-(k-1)]!} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}$$

Mặt khác

$$C_{n-k}^k = \frac{(n-k)!}{k!(n-k-k)!} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k)(n-k-1)!}{k(k-1)!(n-2k)!} = \frac{n-k}{n} C_{n-k-1}^{k-1}$$

Từ đó suy ra được

$$C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{k}{n-k} C_{n-k}^k$$

Vậy nên (*) bằng

$$\frac{k}{n-k} C_{n-k}^k + C_{n-k}^k = C_{n-k}^k \left(\frac{k}{n-k} + 1 \right) = C_{n-k}^k \left(\frac{k+n-k}{n-k} \right) = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$$

Chứng minh xong.

Note. Lưu ý rằng trong các bài toán phần lớn chỉ số nhỏ hơn sẽ là k và chỉ số lớn hơn là n .

③ Bổ đề Kaplansky Suy rộng cho dãy hàng ngang

Cho n phần tử được xếp thành một hàng ngang. Số cách chọn ra k phần tử sao cho giữa hai phần tử được chọn liên tiếp có ít nhất s phần tử trống được xác định bởi

$$C_{n-(k-1)s}^k$$

④ Bổ đề Kaplansky Suy rộng cho vòng tròn khép kín

Cho n phần tử được xếp thành một vòng tròn. Số cách chọn ra k phần tử sao cho giữa hai phần tử được chọn liên tiếp có ít nhất s phần tử trống được xác định bởi

$$\frac{n}{n-ks} C_{n-ks}^k$$

⑤ **Bổ đề Menage**

Số cách xếp n cặp vợ chồng vào một bàn tròn có $2n$ ghế sao cho các ông ngồi xen kẽ các bà và không có cặp vợ chồng nào cạnh ngồi cạnh nhau được xác định bởi

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot C_{2n-k}^k \cdot (n-k)!$$

Note. 3 bổ đề ③, ④, ⑤ mời bạn đọc tự chứng minh.

⑥ Bài tập

Câu 1

Có 10 cái ghế xếp thành một hàng ngang. Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn A, B, C, D vào 10 ghế này sao cho không có 2 bạn nào ngồi gần nhau?

Lời giải. Đầu tiên, xếp 4 bạn có 4 giai thừa cách đổi chỗ.

Tiếp theo, sử dụng bổ đề Kaplansky số 1, ta được

$$C_{n-k+1}^k = C_{10-4+1}^4$$

Khi ấy, số cách xếp thỏa mãn đề bài là

$$4!.C_7^4$$

■

Câu 2

Một hội nghị có 10 đại biểu ngồi quanh một bàn tròn. Cần chọn ra một nhóm gồm 3 đại biểu để lập ban thư ký. Tính số cách chọn sao cho trong ban thư ký không có bất kỳ 2 đại biểu nào ngồi cạnh nhau tại bàn tròn.

Lời giải. Áp dụng bổ đề Kaplansky số 2 cho bàn tròn, ta được số cách chọn thỏa mãn là

$$\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k = \frac{10}{10-3}C_{10-3}^3 = \frac{10}{7}C_7^3 = 50$$

■

Câu 3 — Trích trong sách Principles and Techniques in Combinatorics

Hai mươi lăm hiệp sĩ của Vua Arthur đang ngồi tại chiếc bàn tròn quen thuộc của họ. Ba người trong số họ được chọn ngẫu nhiên - với mọi tổ hợp ba người đều có khả năng được chọn như nhau - và được cử đi tiêu diệt một con rồng hung dữ. Gọi P là xác suất để có ít nhất hai trong số ba người được chọn đã ngồi cạnh nhau tại bàn tròn. Nếu P được viết dạng phân số tối giản, hãy tính tổng của tử số và mẫu số.

Lời giải. Biến cố đối của "ít nhất hai người ngồi cạnh nhau", chính là "không có hai người nào ngồi cạnh nhau".

Chọn ngẫu nhiên 3 người trong 25 người, ta có không gian mẫu

$$n(\Omega) = C_{25}^3$$

Hơn thế, để chọn ra 2 người mà không có ai ngồi cạnh nhau chính là bổ đề Kaplansky số 2, ta dễ có số cách chọn thỏa mãn

$$n(A) = \frac{25}{25-3}C_{25-3}^3$$

Vậy xác suất của biến cố "ít nhất hai trong ba người được chọn ngồi cạnh nhau", được xác định bởi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\frac{25}{25-3}C_{25-3}^3}{C_{25}^3} = \frac{11}{46} \Rightarrow 11 + 46 = 57$$

■

Câu 4

Đọc theo một hàng lang có 20 bức trưng bày được xếp thành một hàng ngang đánh số thứ tự từ 1 đến 20. Ban tổ chức sự kiện cần chọn ra 5 bức để đặt 5 chiếc giỏ rỗng sao cho không có hai chiếc giỏ nào được đặt ở hai bức kế nhau. Sau khi cố định vị trí của 5 chiếc giỏ, ban tổ chức tiếp tục lấy 15 bông hồng (giống hệt nha) để cắm vào 5 giỏ này sao cho mỗi giỏ có ít nhất một bông hoa. Hỏi ban tổ chức có tất cả bao nhiêu cách thực hiện việc chọn bức và cắm hoa?

Lời giải. Trước tiên, ta chọn 5 bức từ 20 bức xếp thành hàng ngang sao cho không có 2 bức nào liền kề. Đây chính là bổ đề Kaplansky số 1.

Áp dụng bổ đề, ta được

$$C_{20-5+1}^5$$

Tiếp theo, ta cần chia 15 bông hoa vào 5 giỏ sao cho mỗi giỏ có ít nhất 1 bông. Đây chính là bài toán chia kẹo của Euler.

Áp dụng công thức chia kẹo Euler, ta được

$$C_{15-1}^{5-1}$$

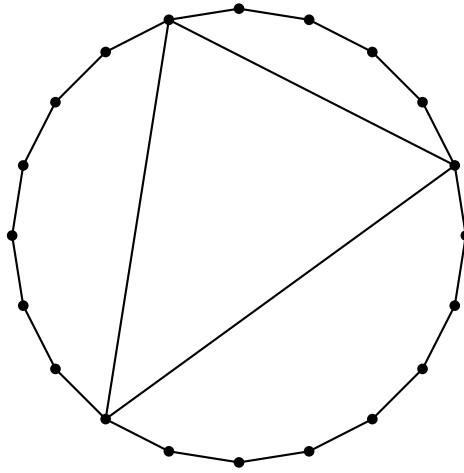
Cuối cùng, vì có dữ kiện "chọn bức và cắm hoa" nên theo quy tắc nhân, ta được số cách thỏa mãn đề bài

$$C_{20-5+1}^5 \cdot C_{15-1}^{5-1} = 4372368$$

■

Câu 5

Cho đa giác đều (H) có 20 đỉnh. Người ta muốn lập một tam giác có 3 đỉnh đều là 3 đỉnh của (H) . Hỏi có bao nhiêu cách lập được một tam giác như thế sao cho không có cạnh nào của tam giác trùng với cạnh của đa giác đã cho?



Lời giải. Tương tự, ta được

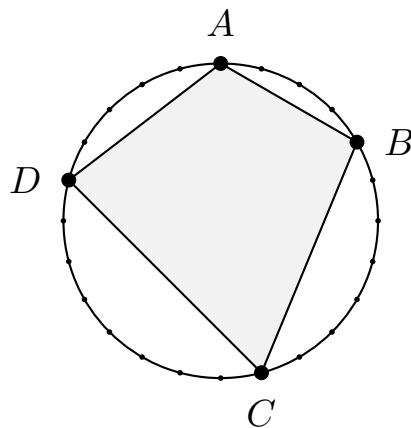
$$\frac{20}{20-3} C_{20-3}^3 = 800$$

■

Câu 6

Cho đa giác đều (H) có 24 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H) . Tính số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của (H) .

Lời giải.



Cần phải làm rõ dữ kiện "không có cạnh nào là cạnh của (H) ", câu này tương đương với việc ta cần lập một tứ giác có 2 đỉnh không kề nhau. Nếu giả sử có 2 đỉnh kề nhau thì nó cũng sẽ là cạnh của đa giác (H) nên sẽ không thỏa mãn đề bài. Tới đây, ta được phép sử dụng bổ đề Kaplansky số 2. Số tứ giác lập được là

$$\frac{24}{24-4} C_{24-4}^4 = 5814$$

■

Câu 7 — Kỳ thi chọn Học sinh Giỏi Thành Phố Hà Nội niên khoá 2020-2021

Cho đa giác đều 30 đỉnh $A_1 A_2 \dots A_{30}$. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 30 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ đồng thời không có cạnh nào là cạnh của đa giác.

Lời giải. Tương tự, ta được

$$\frac{30}{30-3} C_{30-3}^3 = 3250$$

■

Câu 8 — Kỳ thi chọn Học sinh Giỏi Thành Phố Hà Nội niên khoá 2025-2026

Cho đa giác lồi có 10 đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_{10}$. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho, trong đó không có hai đỉnh nào của tam giác là hai đỉnh kề nhau của đa giác?

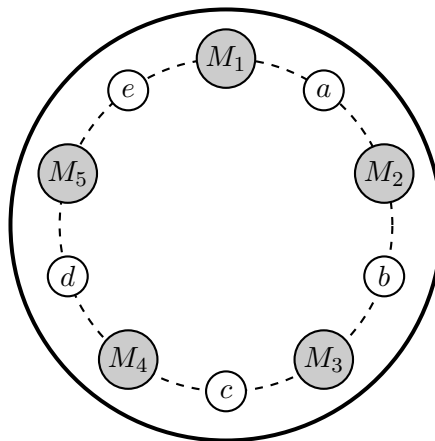
Lời giải. Tương tự, ta được

$$\frac{10}{10-3} C_{10-3}^3 = 50$$

■

Câu 9

Xếp ngẫu nhiên 5 cặp vợ chồng vào 10 ghế trống được đặt xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau. Có bao nhiêu cách để xếp sao cho không có bất kỳ cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau? (như hình minh họa dưới, gọi $M_1, M_2, \dots$ lần lượt là vị trí mà các ông chồng hoặc bà vợ ngồi, xen kẽ đó gọi $a, b, \dots$ là các vị trí trống tương ứng).



Lời giải. Để giải quyết bài toán, ta thực hiện theo hai bước: xếp chỗ cho 5 người chồng trước, sau đó xếp chỗ cho 5 người vợ vào các khoảng trống xen kẽ.

— Xếp chỗ cho 5 người chồng

Vì đây là bàn tròn (các ghế không phân biệt), số cách xếp 5 người chồng M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 vào bàn tròn là hoán vị vòng quanh

$$(5-1)! = 4! = 24 \text{ (cách)}$$

— Xếp chỗ cho 5 người vợ (Sử dụng Bổ đề Ménage)

Khi 5 người chồng đã ngồi vào vị trí, họ tạo ra 5 khoảng trống xen kẽ (tương ứng với a, b, c, d, e như trong hình minh họa). Các khoảng trống này giờ đây đã được phân biệt bởi vị trí của các người chồng ngồi cạnh nó.

Giả sử khoảng trống thứ i nằm giữa ông chồng M_i và M_{i+1} (với quy ước $M_6 \equiv M_1$). Bài toán yêu cầu không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau, đồng nghĩa với việc người vợ W_i không được ngồi vào khoảng trống thứ $i - 1$ và thứ i .

Áp dụng với $n = 5$, ta tính được số Menage

$$\begin{aligned} U_5 &= \sum_{k=0}^5 (-1)^k \frac{10}{10-k} C_{10-k}^k (5-k)! \\ &= 13 \end{aligned}$$

Do đó, có 13 cách xếp 5 người vợ thỏa mãn yêu cầu.

Theo quy tắc nhân, tổng số cách xếp ngẫu nhiên 5 cặp vợ chồng vào bàn tròn sao cho nam nữ xen kẽ và không có vợ chồng nào ngồi cạnh nhau là

$$4! \times U_5 = 24 \times 13 = 312 \text{ (cách)}$$

■

Câu 10

Cho một đa giác (H) có 60 đỉnh nội tiếp một đường tròn O . Người ta lập một tứ giác tùy ý có bốn đỉnh là các đỉnh của (H) . Xác suất để lập được một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) là bao nhiêu?

Lời giải. Cần phải làm rõ dữ kiện "tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H) ", câu này hoàn toàn tương đương với việc ta cần lập một tứ giác có 2 đỉnh không kề nhau. Giả sử nếu có 2 đỉnh kề nhau thì nó cũng sẽ là cạnh của đa giác (H) , lúc ấy sẽ không có đường chéo nên không thỏa mãn đề bài. Tới đây, ta được phép sử dụng bổ đề Kaplansky số 2.

Chọn 4 đỉnh ngẫu nhiên từ 60 đỉnh. Ta có không gian mẫu

$$n(\Omega) = C_{60}^4$$

Vậy xác suất của biến cố

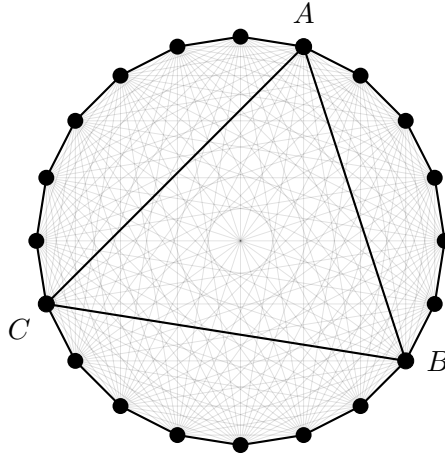
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{60-4} \frac{C_{60-4}^4}{C_{60}^4} = \frac{26235}{32509}$$

■

Câu 11 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Hải Phòng — 2026

Một đa giác đều 20 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác. Xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, $a + b$ bằng?

Lời giải.



Muốn lập được tam giác có ba cạnh cùng màu (đỏ) thì nghĩa là 3 đỉnh của tam giác ấy không có 2 đỉnh nào kề nhau. Giả sử nếu có 2 đỉnh của tam giác kề nhau thì nó sẽ vướng vào 1 cạnh màu (xanh) của đa giác nên sẽ không thỏa đề bài. Tới đây, ta được phép sử dụng bổ đề Kaplansky số 2. Với C_{20}^3 là không gian mẫu: "chọn ngẫu nhiên 3 điểm thuộc đa giác".

Vậy xác suất của biến cố

$$\frac{\frac{20}{20-3}C_{20-3}^3}{C_{20}^3} = \frac{40}{57} = \frac{a}{b} \Rightarrow a + b = 40 + 57 = 97$$

■

📌 Câu 12 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Thái Nguyên — 2026

Cho đa giác đều 32 cạnh. Chọn ngẫu nhiên một tứ giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác. Xác suất để tứ giác đó có cả 4 cạnh đều không là cạnh của đa giác ban đầu bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $S = a - b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải. Tương tự, ta được

$$\frac{\frac{32}{32-4}C_{32-4}^4}{C_{32}^4} = \frac{a}{b} = \frac{585}{899} \Rightarrow a - b = 585 - 899 = -314$$

■

📌 Câu 13 — Kỳ thi SPT đợt 1 — Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 1 — 2026

Cho bảng ô vuông kích thước 2×15 (xem hình vẽ).

Chọn ngẫu nhiên 5 hình vuông để tô màu. Tính xác suất để không có 2 hình vuông nào được tô màu chung đỉnh.

Lời giải. Lưới ô vuông có tất cả $2 \cdot 15 = 30$ (hình vuông).

Để có không gian mẫu "chọn 5 hình vuông từ 30 hình vuông"

$$n(\Omega) = C_{30}^5$$

Gọi A là biến cố: "không có 2 hình vuông nào được tô màu chung đỉnh". Câu này tương đương với việc chọn 5 hình vuông, chúng phải nằm ở 5 cột hoàn toàn không kề nhau và mỗi cột chỉ được chọn đúng 1 hình vuông.

Áp dụng bổ đề Kaplansky để chọn 5 cột không kề nhau từ 15 cột

$$C_{15-5+1}^5$$

Với mỗi cột trong 5 cột đã chọn, ta có 2 cách chọn hình vuông để tô màu (chọn ô ở hàng trên hoặc ô ở hàng dưới)

$$2^5$$

Theo đó, số phần tử thuận lợi cho biến cố A

$$n(A) = 2^5 \cdot C_{15-5+1}^5$$

Vậy xác suất của biến cố A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2^5 \cdot C_{15-5+1}^5}{C_{30}^5} = \frac{352}{3393}$$

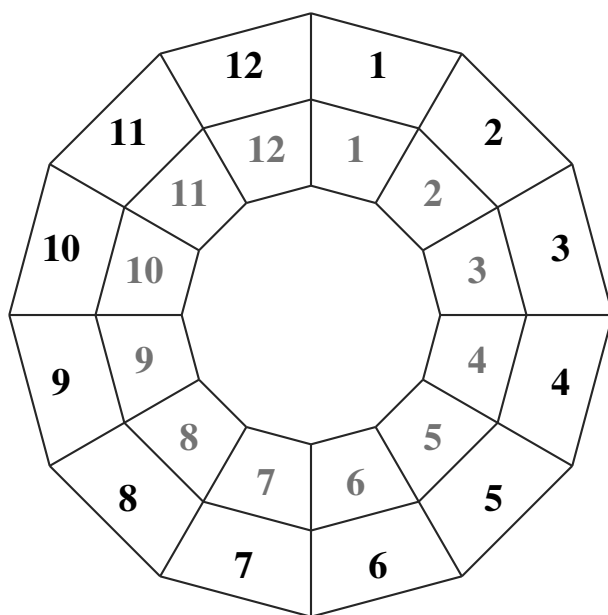
■

✍ Câu 14 — Kỳ thi SPT đợt 2 — Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 1 — 2026

Cho 24 hình tứ giác được sắp xếp thành hai lớp:

+ 12 hình tứ giác ở bên trong tạo thành một vòng.

+ 12 hình tứ giác còn lại xếp chồng ra phía ngoài.



Chọn ngẫu nhiên 5 hình tứ giác. Tính xác suất để trong 5 hình được chọn không có hai hình nào chung đỉnh.

Lời giải. Gọi A là biến cố: "trong 5 hình chọn được không có hai hình nào chung đỉnh".

Để có không gian mẫu "chọn ngẫu nhiên 5 hình từ 24 hình tứ giác"

$$n(\Omega) = C_{24}^5$$

Áp dụng bổ đề Kaplansky cho 12 hình tứ giác

$$\frac{12}{12-5} C_{12-5}^5$$

Tại mỗi cặp tứ giác có 2 sự lựa chọn (trong hoặc ngoài), đối với 5 nhóm như thế, có 2^5 (cách chọn).

Từ đó, số phần tử thuận lợi cho biến cố A

$$n(A) = 2^5 \cdot \frac{12}{12-5} C_{12-5}^5$$

Vậy xác suất của biến cố A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2^5 \cdot \frac{12}{12-5} C_{12-5}^5}{C_{24}^5} = \frac{48}{1771}$$

① Công thức Bernoulli

Cho biến cố A có xác suất thành công là p và xác suất thất bại là q . Trong n lần thực hiện phép thử **độc lập**, xác suất để biến cố A xảy ra k lần là

$$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Note.

Trong đề bài có đủ kiện **độc lập** thì đó cũng là dấu hiệu để áp dụng công thức Bernoulli.

Trong trường hợp phải liệt kê nhiều trường rồi sau đó tính tổng các trường hợp. Thì ta có thể dùng tổng sigma (khai triển nhị thức Newton).

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Với $q = 1 - p$ là vì p và q là hai biến cố đối nhau.

② Công thức Bernoulli mở rộng

Công thức Bernoulli trên chỉ áp dụng cho phép thử có 2 kết quả là Thành công hoặc Thất bại. Bây giờ, ta xét nếu bài toán có nhiều phép thử **độc lập**. Giả sử một phép thử T có i kết quả xảy ra lần lượt là $T_1, T_2, T_3, \dots, T_i$, với xác suất tương ứng là $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i$. Nếu ta thực hiện phép thử đó n lần **độc lập** thì xác suất để kết quả $T_1, T_2, T_3, \dots, T_i$ xuất hiện lần lượt $k_1, k_2, k_3, \dots, k_i$ là

$$P(k_1, k_2, k_3, \dots, k_i) = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_i!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \dots p_i^{k_i}$$

③ Bài tập

Câu 1

Một xạ thủ lần lượt bắn 6 viên đạn vào một mục tiêu với xác suất bắn trúng trong mỗi lần bắn là 0,8. Tìm xác suất sao cho có không quá 2 viên trúng mục tiêu?

Lời giải. Do xạ thủ bắn 6 viên đạn một cách độc lập nên ta có thể dùng công thức Bernoulli.

Gọi p là xác suất để xạ thủ đó bắn trúng bia, nghĩa là $p = 0,8$ và xác suất để xạ thủ đó bắn trượt là $p = 1 - q = 1 - 0,8$.

Hơn nữa, với 6 lần bắn như thế tức là $n = 6$. Cần lưu ý rằng "không quá 2 viên", nghĩa là $k \in \{0; 1; 2\}$.

Nên theo công thức Bernoulli thì xác suất cần tính được xác định bởi

$$C_6^0 \cdot 0,8^0 \cdot (1 - 0,8)^{6-0} + C_6^1 \cdot 0,8^1 \cdot (1 - 0,8)^{6-1} + C_6^2 \cdot 0,8^2 \cdot (1 - 0,8)^{6-2} = \frac{53}{3125}$$

Hay có thể viết dưới dạng tổng sigma

$$\sum_{k=0}^2 C_6^k \cdot 0,8^k \cdot (1 - 0,8)^{6-k} = \frac{53}{3125}$$

Nhập $k = x$ trong máy tính. ■

Câu 2

Gieo một cân xúc xắc cân đối và đồng chất 6 lần. Tính xác suất để có 3 lần xuất hiện mặt 6 chấm, 2 lần xuất hiện mặt 5 chấm và 1 lần xuất hiện mặt 4 chấm.

Lời giải. Gieo xúc xắc 6 lần, suy ra $n = 6$.

Xét phép thử T_1 (mặt 6 chấm) có:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{6} \\ k_1 = 3 \end{cases}$$

Xét phép thử T_2 (mặt 5 chấm) có:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{6} \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

Xét phép thử T_3 (mặt 4 chấm) có:

$$\begin{cases} p_3 = \frac{1}{6} \\ k_3 = 1 \end{cases}$$

Theo công thức Bernoulli mở rộng, ta được xác suất của biến cố

$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

 Câu 3

Trong một đề kiểm tra 15 phút môn Toán có 20 câu trắc nghiệm. Mỗi câu trắc nghiệm có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án trả lời đúng. An giải chắc chắn đúng 10 câu, 10 câu còn lại lựa chọn ngẫu nhiên đáp án. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm và trả lời sai không bị trừ điểm. Xác suất để An đạt được đúng 8 điểm là P . Khi đó, $100P$ bằng? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải. An đã có sẵn 5 điểm (vì đã đúng 10 câu), nên muốn được 8 điểm thì An phải đúng thêm 6 câu trong 10 câu còn lại (vì mỗi câu 0,5 điểm).

Gọi p là xác suất để An lựa chọn đúng thì suy ra $p = \frac{1}{4}$ (vì chỉ có 1 câu đúng trong 4 câu) và xác suất để An lựa chọn sai là $q = 1 - \frac{1}{4}$.

Các bạn cũng không cần quan tâm k và n bằng bao nhiêu đâu, chỉ cần để ý số nào bé hơn là k và lớn hơn là n .

Theo công thức Bernoulli thì

$$P = C_{10}^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-6} \Rightarrow 100P \approx 1,6$$

 Câu 4

Một bài kiểm tra gồm 50 câu hỏi trắc nghiệm với 4 phương án lựa chọn (chỉ có 1 đáp án đúng, và mỗi đáp án đúng được 0,2 điểm). Bạn Minh làm đúng 40 câu đầu và khoanh bừa 10 câu cuối do không đủ thời gian. Tính xác suất để bạn Minh được ít nhất 9,4 điểm trong bài kiểm tra này?

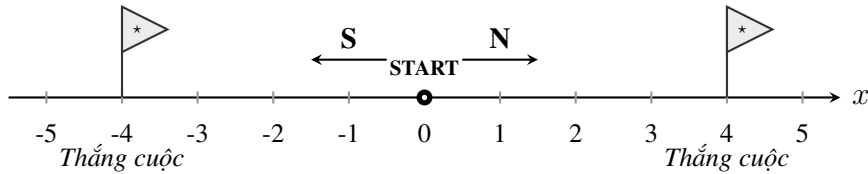
Lời giải. Bạn Minh đang có sẵn 40 câu tức là 8 điểm (mỗi câu 0,2 điểm). Muốn được ít nhất 9,4 điểm thì Minh cần đúng thêm ít nhất 7 câu trong 10 câu còn lại. Tức là $k \in \{7; 8; 9; 10\}$.

Theo công thức Bernoulli thì

$$\sum_{k=7}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-k} = \frac{919}{262144}$$

Câu 6

Trên mặt sàn có vẽ một trục số (hình minh họa). Ban đầu, Nam đứng tại vị trí 0 trên trục số và tung một đồng xu cân đối, đồng chất một cách độc lập. Nếu đồng xu ra mặt ngửa (kí hiệu là N) thì di chuyển 1 đơn vị theo chiều dương. Nếu đồng xu ra mặt sấp (kí hiệu là S) thì di chuyển 1 đơn vị theo chiều âm. Nam thực hiện 8 lần tung đồng xu một cách độc lập. Nếu Nam di chuyển được ít nhất 4 đơn vị theo chiều dương thì sẽ thắng cuộc. (Chẳng hạn, nếu kết quả 8 lần tung đồng xu là $N - S - N - N - N - N - N - N$ thì Nam thắng). Tính xác suất thắng của Nam?



Lời giải. Vì Nam tung đồng xu 8 lần nên nếu ta gọi k là số lần Nam tung đồng xu ra mặt ngửa N thì số lần tung ra mặt sấp S sẽ là $(8 - k)$.

Nam di chuyển được ít nhất 4 đơn vị theo chiều dương thì sẽ thắng tức là

$$\begin{aligned} k - (8 - k) &\geq 4 \iff 2k \geq 12 \\ &\iff k \geq 6 \end{aligned}$$

Mà $k \geq 6$ nghĩa là $k \in \{6; 7; 8\}$.

Mặt khác, xác suất để mặt ngửa xuất hiện là $\frac{1}{2}$.

Theo công thức Bernoulli thì

$$\sum_{k=6}^8 C_8^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{8-k} = \frac{37}{256}$$

■

Câu 7

Một loại vé số gồm 4 chữ số, mỗi chữ số lấy từ 0 đến 9 (các chữ số có thể giống nhau). Kết quả quay thưởng cũng là một dãy 4 chữ số ngẫu nhiên (đồng xác suất và độc lập với vé). Quy ước trúng thưởng như sau:

- Giải khuyến khích: vé trùng với đúng 2 chữ số ở kết quả (đúng vị trí).
- Giải nhì: vé trùng với đúng 3 chữ số ở kết quả (đúng vị trí).
- Giải đặc biệt: vé trùng với đúng cả 4 chữ số ở kết quả (đúng vị trí).

Bạn Minh mua một tờ vé số và thấy rằng tờ vé số đó trúng giải. Tính xác suất để Minh trúng giải Nhì?

Lời giải. Minh chỉ có giải khi trùng 2 chữ số, 3 chữ số và 4 chữ số hay nói cách khác $k \in \{2; 3; 4\}$.

Hơn nữa, vé gồm 4 chữ số hay tức là $n = 4$.

Gọi $p = \frac{1}{10}$ là xác suất mà bạn ấy có thể trúng thưởng tại vị trí bất kì trong 4 chữ số đó. Suy ra $q = 1 - \frac{1}{10}$.

Gọi B là biến cố: "tờ vé số đó trúng giải".

Gọi A là biến cố: "Minh trúng giải Nhì". Lưu ý rằng trúng giải Nhì tương đương với việc $k = 3$.

Vậy theo định lý Bayes và công thức Bernoulli thì

$$P(A|B) = \frac{C_4^3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{4-3}}{\sum_{k=2}^4 C_4^k \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{4-k}} = \frac{36}{523}$$

■

Câu 6

Hộp I có 13 bi đỏ và 8 bi xanh, hộp II ban đầu không chứa bi nào. Tiến hành gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất bốn lần liên tiếp. Ở mỗi lần gieo, nếu số chấm thu được là 1 hoặc 2 thì ta lấy một viên bi đỏ từ hộp I sang hộp II, nếu số chấm là 3 hoặc 4 hoặc 5 thì ta lấy hai viên bi đỏ và một viên bi xanh từ hộp I sang hộp II, nếu số chấm bằng 6 thì ta lấy ba viên bi đỏ và một viên bi xanh từ hộp I sang hộp II. Tính xác suất để sau bốn lần gieo xúc xắc hộp II có 3 viên bi xanh, nếu biết rằng hộp I có số viên bi đỏ và số viên bi xanh bằng nhau (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Gọi T là kết quả của các lần gieo xúc xắc. Ta lần lượt có xác suất

— Gieo ra mặt 1 hoặc 2 chấm, suy ra $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Theo bài ra, khi này ta lấy 1 viên bi đỏ từ hộp I bỏ sang hộp II (và 0 lấy bi xanh).

— Gieo ra mặt 3,4 hoặc 5 chấm, suy ra $p_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Theo bài ra, khi này ta lấy 2 viên bi đỏ và 1 bi xanh từ hộp I bỏ sang hộp II.

— Gieo ra mặt 6 chấm, suy ra $p_3 = \frac{1}{6}$. Theo bài ra, khi này ta lấy 3 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh từ hộp I bỏ sang hộp II.

Gọi x, y lần lượt là số bi đỏ và bi xanh đã chuyển từ hộp I sang hộp II sau 4 lần gieo. Theo đề bài, để hộp I còn lại số bi đỏ và số bi xanh bằng nhau thì

$$\begin{aligned} 13 - x &= 8 - y \iff x - y = 13 - 8 \\ &\iff x - y = 5(*) \end{aligned}$$

Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là số lần xuất hiện kết quả p_1, p_2, p_3 trong 4 lần gieo ($k_1 + k_2 + k_3 = 4$)(**).

Kết hợp với các phép thử T , ta có hệ phương trình (số bi đỏ và số bi xanh đã chuyển từ hộp I sang hộp II).

$$\begin{cases} 1k_1 + 2k_2 + 3k_3 = x \\ 0k_1 + 1k_2 + 1k_3 = y \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = x \\ k_2 + k_3 = y \end{cases}$$

Thế vào (*), được

$$\begin{aligned}(k_1 + 2k_2 + 3k_3) - (k_2 + k_3) = 5 &\iff k_1 + (2k_2 - k_2) + (3k_3 - k_3) = 5 \\ &\iff k_1 + k_2 + 2k_3 = 5\end{aligned}$$

Từ điều này và (**), được

$$\begin{aligned}\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 4 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 5 \end{cases} &\iff 2k_3 - k_3 = 5 - 4 \\ &\iff k_3 = 1 \\ &\implies k_1 + k_2 = 3\end{aligned}$$

Tiếp theo, cần tìm các bộ số $(k_1, k_2, 1)$ thỏa mãn $k_1 + k_2 = 3$. Các bộ số thỏa mãn là $(1; 2; 1), (2; 1; 1), (3; 0; 1), (0; 3; 1)$.

Theo công thức Bernoulli mở rộng, xác suất của biến cố H : "hộp I và hộp II có số bi đỏ bằng số bi xanh" được xác định bởi

$$\begin{aligned}P(H) &= \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \\ &\quad + \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \\ &\quad + \frac{4!}{3! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \\ &\quad + \frac{4!}{0! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1\end{aligned}$$

Gọi K là biến cố: "hộp II có 3 bi xanh". Hơn nữa, từ các bộ số kia, ta thấy chỉ có bộ số $(1; 2; 1)$ là có 3 bi xanh (vì điều kiện bi xanh trước đó $k_2 + k_3 = 3 = 2 + 1$).

Nên

$$P(K \cap H) = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

Cuối cùng, theo định lý Bayes ta có xác suất của biến cố

$$P(K|H) = \frac{P(K \cap H)}{P(H)} = \frac{54}{125} \approx 0,43$$

■

§ 4

TỔ HỢP HÌNH HỌC

① Một số kết quả

Cho n điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

— Số đường thẳng đi qua 2 điểm

$$C_n^2$$

— Số vectơ nối hai điểm bất kì

$$n^2$$

— Số vectơ khác $\vec{0}$ nối hai điểm bất kì

$$A_n^2$$

— Số tam giác tạo thành

$$C_n^3$$

— Nếu trong n điểm không có 4 điểm nào đồng phẳng thì số tứ diện tạo được tạo thành

$$C_n^4$$

Cho đa giác lồi n đỉnh.

— Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác

$$C_n^3$$

— Số tam giác vuông (khi n chẵn)

$$\frac{nC_n^2}{2}$$

— Số tam giác vuông (khi n lẻ)

$$0$$

— Số tam giác tù (khi n chẵn)

$$\frac{nC_n^2 - 2}{2}$$

— Số tam giác tù (khi n lẻ)

$$\frac{nC_n^2 - 1}{2}$$

$\Rightarrow$ Số tam giác nhọn bằng số tam giác trừ đi tổng số tam giác vuông cộng với số tam giác tù.

— Số tam giác nhọn (khi n chẵn)

$$C_n^3 - n \left(C_{\frac{n}{2}}^2 + C_{\frac{n}{2}-2}^2 \right)$$

— Số tam giác nhọn (khi n lẻ)

$$C_n^3 - n C_{\frac{n-1}{2}}^2$$

② Bài tập

Câu 1 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Nghệ An — 2026

Trong một trò chơi, có 26 chiếc đèn được bố trí cách đều nhau trên một vòng tròn lớn. Khi người chơi bấm nút, hệ thống máy tính sẽ chọn ngẫu nhiên 3 chiếc đèn để thắp sáng đồng thời. Nếu tâm của vòng tròn nằm hoàn toàn bên trong tam giác tạo bởi 3 bóng đèn được thắp sáng đó thì người chơi được nhận một phần quà. Mỗi người chơi thực hiện 5 lần bấm nút. Tính xác suất để một người chơi may mắn giành được ít nhất 2 phần quà (*không làm tròn kết quả ở các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười*).

Lời giải. Theo dữ kiện đề bài: "tâm của vòng tròn nằm hoàn toàn bên trong tam giác tạo bởi 3 bóng đèn", điều này tương đương với việc ta cần lập được tam giác nhọn.

Đầu tiên, chọn ngẫu nhiên 3 bóng đèn (3 điểm) để tạo thành một tam giác bất kì, ta có không gian mẫu

$$n(\Omega) = C_{26}^3$$

Như đã biết, số tam giác nhọn bằng số tam giác trừ đi (số tam giác vuông + số tam giác tù) và được xác định bởi

$$C_{26}^3 - \left(4C_{\frac{26}{2}}^2 + 26C_{\frac{26-2}{2}}^2 \right)$$

Thế nên, xác suất để chọn được tam giác nhọn trong 1 lần bấm nút là

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{26}^3 - \left(4C_{\frac{26}{2}}^2 + 26C_{\frac{26-2}{2}}^2 \right)}{C_{26}^3} = \frac{11}{50}$$

Gọi A là biến cố: "một người chơi may mắn giành được ít nhất 2 phần quà".

Suy ra biến cố đối của A là: "một người chơi may mắn giành được 0 hoặc 1 phần quà".

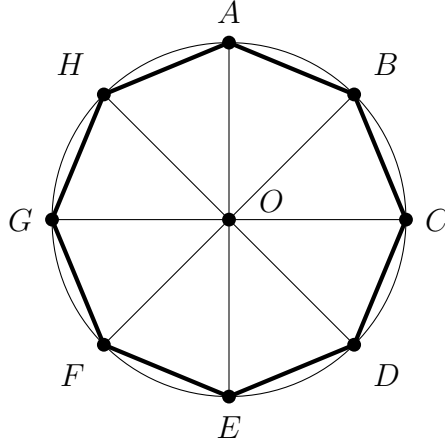
Với số phép thử là $n = 5$ thì theo công thức Bernoulli ta có xác suất của biến cố A được xác định bởi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \sum_{k=0}^1 C_5^k \left(\frac{11}{50} \right)^k \left(1 - \frac{11}{50} \right)^{5-k} \approx 0,3$$

■

Câu 2 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Cao Bằng — 2026

Cho một hình bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O . Gắn ngẫu nhiên tám số tự nhiên $\{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ vào tám đỉnh của bát giác đều này (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám đỉnh của bát giác đã cho. Gọi xác suất để thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?



Lời giải. 2 điều kiện xảy ra đồng thời: lập được tam giác vuông và lập thành cấp số cộng. Ta dùng công thức nhân xác suất.

Gọi A là biến cố: "lập được tam giác vuông từ bát giác đều nội tiếp đường tròn".

Thế nên không gian mẫu sẽ là: "chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của bát giác để tạo thành tam giác bất kì".

$$n(\Omega) = C_8^3$$

— Số tam giác vuông được tạo thành theo công thức

$$n(A) = 4C_{\frac{n}{2}}^2 = 4C_{\frac{8}{2}}^2 = 24$$

Gọi B là biến cố: "số được đánh thứ tự trên 3 đỉnh của tam giác lập được lần lượt tạo thành một cấp số cộng".

— Ta liệt kê các trường hợp:

Trường hợp 1: Cấp số cộng có công sai $d = 1$, ta có các bộ số thỏa mãn là: $(9; 10; 11)$, $(10; 11; 12)$, $(11; 12; 13)$, $(12; 13; 14)$, $(13; 14; 15)$, $(14; 15; 16)$. Có 6 bộ.

Trường hợp 2: Cấp số cộng có công sai $d = 2$, ta có các bộ số thỏa mãn: $(9; 11; 13)$, $(10; 12; 14)$, $(11; 13; 15)$, $(12; 14; 16)$. Có 4 bộ.

Trường hợp 3: Cấp số cộng có công sai $d = 3$, ta có các bộ số thỏa mãn: $(9; 12; 15)$, $(10; 13; 16)$. Có 2 bộ.

Tổng có: $6 + 4 + 2 = 12$ bộ.

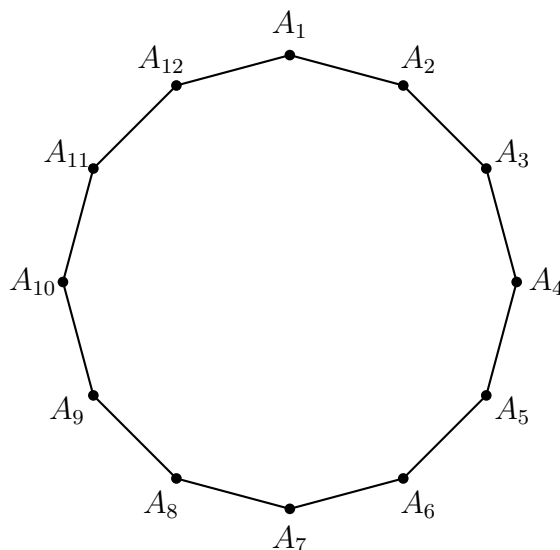
Vậy xác suất của biến cố

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \cdot \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{24}{C_8^3} \cdot \frac{12}{C_8^3} = \frac{9}{98} = \frac{m}{n} \implies m + n = 107$$

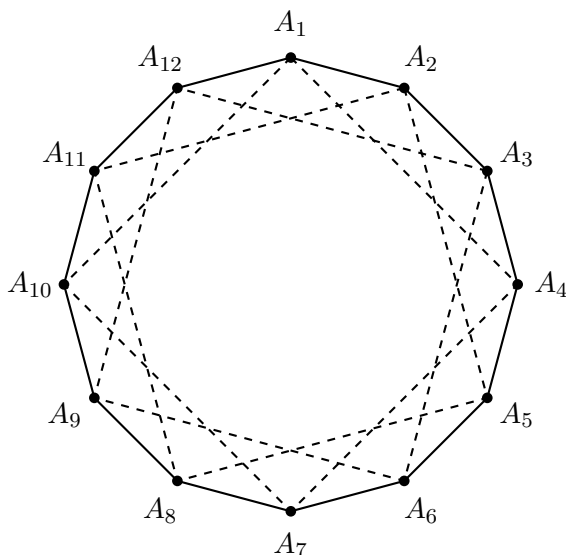
■

Câu 3 — THPT — 2026

Một khung hình trang trí có dạng một đa giác đều 12 cạnh $A_1A_2\dots A_{12}$ được gắn cố định trên một trần nhà. Bạn Dũng có 12 bóng đèn gồm bốn bóng màu đỏ và tám bóng màu xanh, có công suất đôi một khác nhau. Bạn Dũng lắp ngẫu nhiên 12 bóng đèn vào 12 đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ sao cho mỗi đỉnh có đúng một bóng đèn. Gọi P là xác suất để mỗi hình vuông (có bốn đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho) đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ. Giá trị của $3190P$ bằng bao nhiêu?



Lời giải.



Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh từ 12 đỉnh để tạo thành hình vuông, có không gian mẫu

$$n(\Omega) = C_{12}^4$$

Dễ thấy, số hình vuông có thể tạo thành từ 12 đỉnh của đa giác đã cho là

$$\frac{12}{4} = 3 \quad (\text{hình})$$

Gọi A là biến cố: "mỗi hình vuông đều có ít nhất một bóng đèn màu đỏ".

Bạn Dũng có 4 bóng đèn màu đỏ nên số cách xếp thỏa "có ít nhất một bóng đèn đỏ cho mỗi hình vuông", là các bộ

$$\{(1; 1; 2), (1; 2; 1), (2; 1; 1)\}$$

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố A

$$C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^2 + C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1$$

Vậy xác suất biến cố

$$P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^2 + C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{12}^4} \Rightarrow 3190P = 1856$$

■

§ 5

PHƯƠNG PHÁP BUỘC PHẦN TỬ

① Phương pháp buộc phần tử là gì?

Phương pháp buộc phần tử được sử dụng để giải quyết các bài toán sắp xếp một nhóm đối tượng mà đề bài mong muốn nhóm đối tượng này phải đứng cạnh nhau.

Ví dụ: Cho một dãy các đối tượng được đánh số thứ tự riêng biệt thuộc vào tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các đối tượng này thành một hàng ngang sao cho tập các chữ số $X = \{1; 2; 3\}$ luôn đứng cạnh nhau?

— Đầu tiên, ta xem các phần tử thuộc vào tập X là một khối thống nhất. Nghĩa là từ 3 phần tử, ta xem tập X chỉ là 1 phần tử duy nhất.

— Tiếp theo, từ các phần tử còn lại thuộc vào tập $Y \subset S = \{4; 5; 6; \dots; 10\}$ (7 phần tử) cộng thêm một khối thống nhất $\{1; 2; 3\}$, tức khi này tổng số phần tử phải là $7 + 1 = 8$. Hơn nữa, 8 phần tử này có thể đổi vị trí cho nhau nên ta phải hoán vị 8 phần tử này, có $8!$ (cách).

— Cuối cùng, vì 3 chữ số trong tập X có thể đổi vị trí cho nhau, nên ta hoán vị 3 phần tử này, có $3!$ (cách).

Vậy theo quy tắc nhân, số cách xếp thỏa mãn yêu cầu đề bài là $8! \cdot 3!$ (cách).

Bước	Hành động	Cách tính
Bước 1	Buộc k phần tử lại thành nhóm X .	Coi $X = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$
Bước 2	Sắp xếp X và $n - k$ phần tử còn lại.	Lúc này ta còn $(n - k)$ phần tử gốc + 1 phần tử X . Tổng cộng có $n - k + 1$ phần tử. Số cách xếp là $(n - k + 1)!$.
Bước 3	Hoán vị nội bộ nhóm X .	Có $k!$ cách sắp xếp các phần tử bên trong X .
Bước 4	Tổng hợp	Kết quả: $P = k! \times (n - k + 1)!$.

② Bài tập

Câu 1

Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một dãy ghế dài (mỗi ghế chỉ có đúng một bạn ngồi), có bao nhiêu cách xếp sao cho A và F luôn ngồi cạnh nhau?

Lời giải. Ta xem $\boxed{AF}$ là một khối thống nhất, khi đó còn lại 4 phần tử là B, C, D, E cộng với khối thống nhất này. Tổng phải có $4 + 1 = 5$ phần tử. Ta xếp 5 phần tử này vào dãy ghế dài, có $5!$ (cách).

Mặt khác, A và F cùng có thể đổi chỗ cho nhau, nên ta hoán vị 2 phần tử này, có $2!$ (cách).

Vậy, số cách xếp thỏa mãn: $5! \cdot 2!$ (cách). ■

Câu 2

Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một dãy ghế dài (mỗi ghế chỉ có đúng một bạn ngồi), có bao nhiêu cách xếp sao cho A, B và C luôn ngồi cạnh nhau?

Lời giải. Ta xem $\boxed{ABC}$ là một khối thống nhất, khi đó còn lại 3 phần tử là D, E, F cộng với khối thống nhất này. Tổng phải có $3 + 1 = 4$ phần tử. Ta xếp 4 phần tử này vào dãy ghế dài, có $4!$ (cách).

Mặt khác, ABC cũng có thể đổi chỗ cho nhau, nên ta hoán vị 3 phần tử này, có $3!$ (cách).

Vậy, số cách xếp thỏa mãn: $4! \cdot 3!$ (cách). ■

Câu 3

Bạn Khoa muốn xếp 9 quyển sách Toán, 12 quyển sách Lý và 3 quyển sách Hoá lên một kệ sách sao cho các quyển sách cùng loại thì được xếp cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp như thế?

Lời giải. Ta lần lượt số 3 khối phần tử thống nhất: $\boxed{\text{TTT} \dots}_{9}; \boxed{\text{LLL} \dots}_{12}; \boxed{\text{HHH}}.$

Bản thân mỗi phần tử trong khối thống nhất này sẽ tồn tại hoán vị riêng cho chúng, nghĩa là: $9! \cdot 12! \cdot 3!$ (cách).

Bản thân mỗi khối thống nhất này lại sẽ tồn tại hoán vị riêng cho chúng, tức là: $3!$ (cách).

Vậy, số cách xếp thỏa mãn: $9! \cdot 12! \cdot 3! \cdot 3!$ (cách). ■

Câu 4

Bạn Khoa có 3 quyển sách Toán, 2 quyển sách Lý và 4 quyển sách Hoá. Có bao nhiêu cách xếp sao cho các quyển sách Toán và Lý phải đứng cạnh nhau?

Lời giải. Ta có 2 khối thống nhất: $\boxed{\text{TTT}}; \boxed{\text{LL}}$ và 1 khối rời: $\boxed{\text{H} | \text{H} | \text{H} | \text{H}}.$

Bây giờ, ta cần hoán vị cho $4 + 1 + 1$ phần tử (gồm 4 Hoá và 2 khối thống nhất Toán và Lý - đối với khối thống nhất thì ta xem số phần tử buộc lại thành 1). Có $(4 + 1 + 1)!$ (cách).

Tiếp theo, bản thân các quyền Toán và Lý trong khối thống nhất ấy lại tồn tại các hoán vị, có: $3!.2!$ (cách).

Vậy, số cách xếp thỏa mãn: $(4 + 1 + 1)!.3!.2!$ (cách). ■

Câu 5

Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số được tạo thành từ các chữ số thuộc vào tập $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau?

Lời giải. Gọi số cần lập có dạng: $\overline{a_1a_2a_3 \dots a_6}$, trong đó $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \dots \neq a_6$.

Ta xét trường hợp mà số cần lập không có chữ số 0 đứng đầu.

Nếu muốn $\{3\}$ và $\{4\}$ đứng cạnh nhau. Ta xem chúng là một khối thống nhất 34.

Khi đó, số phần tử cần sắp xếp là $\frac{4}{\{0;1;2;5\}} + \frac{1}{\{34\}} = 5$. Có $5!$ (số).

Hơn nữa, $\{3\}$ và $\{4\}$ có thể hoán vị cho nhau nên có $2!$ (số).

Vậy ở trường hợp này, lập được $5!.2!$ (số).

Ta xét trường hợp mà số cần lập có chữ số 0 đứng đầu và có dạng: $\overline{0a_2a_3 \dots a_6}$.

Nếu muốn $\{3\}$ và $\{4\}$ đứng cạnh nhau. Ta xem chúng là một khối thống nhất 34.

Cần lưu ý rằng, với chữ số 0 đứng ở đầu thì số phần tử cần sắp xếp là $\frac{3}{\{1;2;5\}} + \frac{1}{\{34\}} = 4$. Có $4!$ (số).

Hơn nữa, $\{3\}$ và $\{4\}$ có thể hoán vị cho nhau nên có $2!$ (số).

Vậy ở trường hợp này, lập được $4!.2!$ (số).

Theo nguyên lí bù trừ, số các số lập được là: $5!.2! - 4!.2! = 2!(5! - 4!)$. ■

Câu 6

Trong một lần làm bài tập về nhà bộ môn Giải tích. Bạn Khoa vô tình thấy được các kí hiệu:

- Tích phân $\int_a^b f(x)dx$;
- Tổng $\sum_i^n f(x)$;
- Tích $\prod_j^n f(x)$.

Bạn Khoa thắc mắc có bao nhiêu hoán vị của các kí hiệu thuộc vào tập

$$\Omega = \left\{ \int_a^b f(x)dx; \int_a^b f(x)dx; \sum_i^n f(x); \sum_i^n f(x); \prod_j^n f(x); \prod_j^n f(x) \right\}$$

Sao cho không có hai kí hiệu nào giống nhau đứng cạnh nhau? (xem các kí hiệu được viết theo một hàng ngang)

Lời giải. Đánh số thứ tự cho các kí hiệu lần lượt như sau.

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)dx = 1 \\ \sum_i^n f(x) = 2 \\ \prod_j^n f(x) = 3 \end{cases} \implies \Omega' = \{1; 1; 2; 2; 3; 3\}$$

Bài toán tương đương với việc tìm số hoán vị của tập $\Omega' = \{1; 1; 2; 2; 3; 3\}$ sao cho không có hai số nào giống nhau đứng cạnh nhau.

Số các hoán vị tùy ý: $\frac{6!}{2!.2!.2!}$ (hoán vị lặp).

Gọi A_i ($i \in [1; 3]$) là số hoán vị có cặp $(i; i)$ đứng cạnh nhau.

Theo nguyên lí bù trừ, số hoán vị thỏa đề bài: $\frac{6!}{2!.2!.2!} - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Xét số phần tử của tập A_1 là $|A_1| = (1; 1)$ (ít nhất 1 cặp đứng kề nhau):

Ta buộc hai số $(1; 1)$ thành một khối $\boxed{1; 1}$. Khi ấy, còn lại các số $\{2; 2; 3; 3\}$. Thế nên, ta cần hoán vị $4 + 1 = 5$ phần tử này. Tuy nhiên, nếu hoán vị như thế thì lập hoán vị sẽ xuất hiện (các số 2 và 3 đều lặp lại 2 lần). Suy ra

$$|A_1| = \frac{5!}{2!.2!}$$

Hơn nữa, có tới 3 phần tử như thế, tức $|A_1| = |A_2| = |A_3| \implies |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3 \cdot \frac{5!}{2!.2!}$. Tương tự, xét số phần tử giao $|A_1 \cap A_2|$ (ít nhất 2 cặp đứng kề nhau):

Ta buộc hai bộ số $(1; 1), (2; 2)$ thành một khối $\boxed{1; 1}, \boxed{2; 2}$. Khi ấy, còn lại các số $\{3; 3\}$. Thế nên, ta cần hoán vị $2 + 2 = 4$ phần tử này. Tuy nhiên, nếu hoán vị như thế thì lập hoán vị sẽ xuất hiện (số 3 lặp lại 2 lần). Suy ra

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{2!}$$

Hơn nữa, có tới 3 phần giao như thế, tức

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| \implies |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 3 \cdot \frac{4!}{2!}$$

Xét số phần tử giao $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ (ít nhất 3 cặp đứng kề nhau):

Buộc cả 3 cặp, có $3!$ (cách).

Vậy theo nguyên lí bù trừ, số hoán vị thoả mãn là

$$\begin{aligned} \frac{6!}{2!.2!.2!} - (A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= [(|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)] \\ &= \frac{6!}{2!.2!.2!} - \left[\left(3 \cdot \frac{5!}{2!.2!} \right) - \left(3 \cdot \frac{4!}{2!} \right) + 3! \right] = 30 \end{aligned}$$

■

① Dãy hàng ngang

Số cách tô k màu cho n ô vuông trải thành hàng ngang sao cho không có hai ô vuông cạnh nhau được tô cùng màu được xác định bởi

$$k(k-1)^{n-1}$$

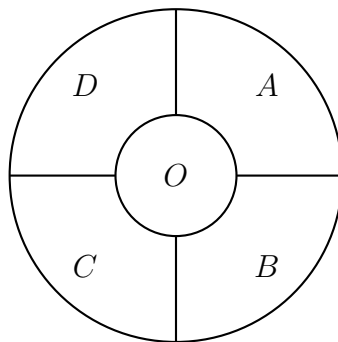
② Dãy bàn tròn

2.1. Biểu thể tô màu chu trình vòng tròn.

Số cách tô k màu cho n ô vuông xếp thành một vòng tròn khép kín sao cho không có hai ô vuông cạnh nhau được tô cùng màu được xác định bởi

$$(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

2.2. Biểu thể tô màu chu trình bánh xe (có tâm)



Để giải quyết bài toán này, ta cũng dùng công thức đã đề cập ở **2.1**. Tuy nhiên, với tâm O như trên thì ta cần tô màu cho nó trước. Giả sử có k màu tô cho n vùng, thì khi tô màu cho tâm O trước – ta còn lại $k-1$ (màu). Tiếp theo, áp dụng quy tắc nhân, ta được $k \cdot S$ (cách tô) – với S là số cách tô màu cho các vùng còn lại (tức là không tính tâm O). Cuối cùng, một cách tổng quát nhất, ta được công thức tô màu cho biểu thể "bánh xe", này là

$$k[(k-2)^n + (-1)^n(k-2)]$$

Chứng minh. Giả sử có k màu và được tô vào n ô trống. Hỏi số cách tô màu ngẫu nhiên sao cho không có hai ô cạnh nhau nào cùng màu?

Xét ô thứ nhất, có k màu có thể chọn.

Xét ô thứ hai, có $(k - 1)$ màu để lựa chọn (không trùng với ô thứ nhất).

Xét ô thứ ba, cũng có $(k - 1)$ màu để lựa chọn (không trùng với ô thứ hai, nhưng có thể trùng với ô thứ nhất).

Cứ như thế cho đến ô thứ n thì cũng có $(k - 1)$ màu để lựa chọn.

Thế nên số cách tô màu là

$$k(k - 1)(k - 1) \dots (k - 1) = k(k - 1)^{n-1}$$

(Sở dĩ số mũ là $n - 1$ vì ngoài ô thứ nhất ra, $n - 1$ ô còn lại mỗi ô đều có $k - 1$ cách chọn màu).

Bài toán ở trên đang xét khi các ô được trải đều thành hàng ngang.

Bây giờ ta xét mô hình bàn tròn.

Giả sử có n ô trống xếp thành vòng tròn và k màu. Hỏi số cách tô sao cho các ô cạnh nhau khác màu?

Gọi $f(n)$ là thứ đề bài mong muốn, "số cách tô màu n ô trống trên một vòng tròn sao cho không có hai ô cạnh nhau nào cùng màu".

Những bài toán về bàn tròn, ta thường quy về bài toán gốc là đường thẳng. Nếu ta cắt vòng tròn tại một điểm để biến vòng tròn thành hàng ngang thì ta cũng có số cách tô màu là

$$k(k - 1)^{n-1}$$

Giả dụ trên bàn tròn có $1, 2, 3, \dots, n$ ô trống thì khi ta biến nó thành hàng ngang, sẽ có hai trường hợp xảy ra

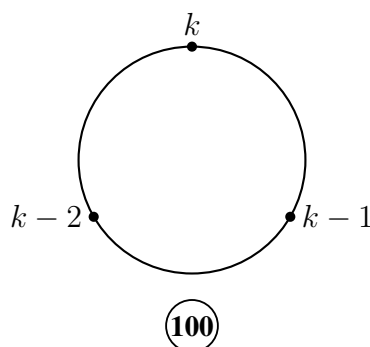
Trường hợp 1: Màu ô 1 khác màu ô n . Đây là thứ đề bài mong muốn - chính là $f(n)$.

Trường hợp 2: Màu ô 1 **cùng** màu ô n . Vì chúng có cùng 1 màu nên ta sẽ chập 2 ô trống ấy lại coi như 1 ô, khi đó trên bàn tròn có $1, 2, 3, \dots, n - 1$ ô trống, và số cách tô hợp lệ lúc này chính là $f(n - 1)$.

Thế nên

$$f(n) + f(n - 1) = k(k - 1)^{n-1}$$

Khi có 3 điểm trở lên thì mới gọi là "vòng tròn" nên $n \geq 3$.



Và khi đó

$$f(3) = k(k-1)(k-2)$$

Vì ô thứ nhất có k màu, ô thứ hai có $(k-1)$ màu (khác ô thứ nhất), ô thứ ba có $(k-2)$ màu (khác ô thứ nhất và thứ hai).

Từ công thức

$$f(n) + f(n-1) = k(k-1)^{n-1}$$

Suy ra

$$f(n) = k(k-1)^{n-1} - f(n-1)$$

Mặt khác

$$f(3) = k(k-1)(k-2) = [(k-1) + 1](k-1)[(k-1) - 1] = (k-1)[(k-1)^2 - 1] = (k-1)^3 - (k-1)$$

Tương tự

$$f(4) = k(k-1)^3 - f(3) = (k-1)^4 + (k-1)$$

Và

$$f(5) = k(k-1)^4 - f(4) = (k-1)^5 - (k-1)$$

Dễ thấy quy luật của dãy truy hồi: Số hạng cuối là $-(k-1)$ khi n lẻ và là $+(k-1)$ khi n chẵn. Tức là dấu của số hạng cuối phụ thuộc vào $(-1)^n$.

Vậy

$$f(n) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

Note. Bài toán tô màu cũng thuộc phương pháp đếm Truy hồi.

③ Bài tập

Câu 1

Giả sử trong một buổi thi thử THPTQG, có một dãy bàn gồm 5 ghế xếp thành một hàng ngang. Giám thị có 4 loại mã đề khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách phát mã đề cho 5 bạn học sinh ngồi vào 5 ghế đó sao cho hai bạn ngồi cạnh nhau luôn có mã đề để khác nhau?

Lời giải.

Áp dụng công thức tô màu cho dãy hàng ngang (với số màu $k = 4$ và số vùng $n = 5$), ta được

$$k(k-1)^{n-1} = 4(4-1)^{5-1} = 324 \text{ (cách)}$$

■

Câu 2 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Quảng Ninh — 2026

Trong một cuộc thi, có 7 thí sinh đã được xếp ngồi cố định quanh một bàn tròn và giám thị có 3 mã đề khác nhau (giả sử số lượng đề thi của mỗi mã là nhiều tùy ý). Hỏi có bao nhiêu cách phát đề cho các thí sinh, mỗi thí sinh 1 đề sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau thì khác mã đề?

Lời giải.

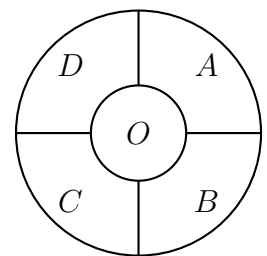
Áp dụng công thức tô màu cho dãy bàn tròn biến thể 2.1. (với số màu $k = 3$ và số vùng $n = 7$), ta được

$$(k-1)^n + (-1)^n(k-1) = (3-1)^7 + (-1)^7(3-1) = 126 \text{ (cách)}$$

■

Câu 3 — Thi thử tốt nghiệp Sở Đồng Tháp — 2026

Bác Huy định tô màu hình vẽ là hình tròn được chia thành 5 phần O, A, B, C, D bằng 6 màu khác nhau (mỗi phần tô một màu) sao cho hai phần hình cạnh nhau thì không được tô cùng màu (2 phần có chung biên được gọi là cạnh nhau: C và D được gọi là cạnh nhau; C và A gọi là không cạnh nhau...). Bác Huy có bao nhiêu cách tô màu thỏa mãn yêu cầu trên?



Lời giải.

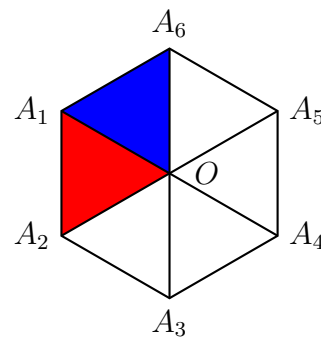
Áp dụng công thức tô màu cho dãy bàn tròn biến thể 2.2. (với số màu $k = 6$ và số vùng $n = 4$ – không tính tâm O), ta được

$$k[(k-2)^n + (-1)^n(k-2)] = 6[(6-2)^4 + (-1)^4(6-2)] = 1560 \text{ (cách)}$$

■

✍️ Câu 4

Hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ được chia thành 6 tam giác $OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5, OA_5A_6, OA_6A_1$, trong đó O là tâm của lục giác đã cho. Ta tô màu các miền tam giác đều bởi một trong 3 màu: xanh, đỏ, vàng sao cho mỗi hình tam giác đều chỉ được tô bởi một màu và hai miền tam giác đều kề nhau thì có màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?



Lời giải. Áp dụng công thức tô màu cho dãy bàn tròn biến thể **2.1**. (với số màu $k = 3$ và số vùng đa giác $n = 6$), ta được

$$(k - 1)^n + (-1)^n(k - 1) = (3 - 1)^6 + (-1)^6(3 - 1) = 66 \text{ (cách)}$$

■

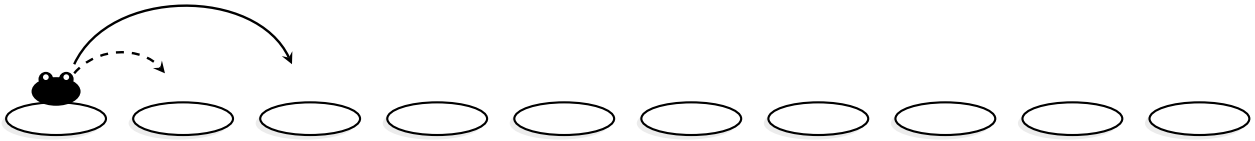
§ 7

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM TRUY HỒI

① Bài tập

✍ Câu 1

Trên mặt hồ có 10 lá cây hoa súng xếp thành một hàng ngang. Trên lá ngoài cùng có một con ếch.



Mỗi bước, con ếch sẽ nhảy qua lá kế bên lá nó đang đứng hoặc nhảy bỏ qua lá đó để sang lá tiếp theo. Con ếch không bao giờ nhảy lùi. Hỏi con ếch có bao nhiêu cách để nhảy sang lá ngoài cùng bên phải?

Lời giải. Gọi số cách con ếch nhảy đến lá thứ n là f_n .

Trước khi kết thúc ở lá thứ n (với $n \geq 3$), con ếch có hai lựa chọn

Nhảy từ lá thứ $n - 1$ sang lá thứ n . Số cách tương ứng là f_{n-1} .

Nhảy từ lá thứ $n - 2$ sang lá thứ n . Số cách tương ứng là f_{n-2} .

Ta có hệ thức truy hồi

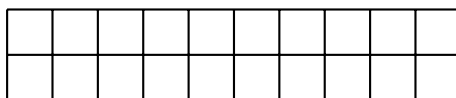
$$\begin{cases} f_1 = 1, f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (\text{với } n \geq 3) \end{cases}$$

Tính lần lượt ta được dãy số: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

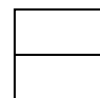
Để dàng tìm được $f_{10} = 55$ (cách).

✍ Câu 2

Lát nền một lối đi hình chữ nhật có kích thước 2×10 (mét) bằng các viên gạch hình chữ nhật có kích thước 1×2 (mét). Các viên gạch có thể đặt nằm dọc hoặc nằm ngang. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lát nền cho kín lối đi đó?



Lối đi (2×10)

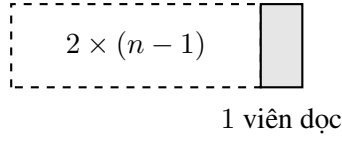


Gạch dọc 2 gạch ngang

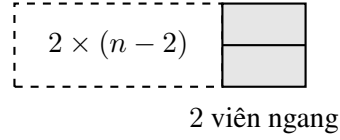
Lời giải. Gọi S_n là số cách lát kín lối đi hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ bằng các viên gạch kích thước 1×2 .

Để lát kín phần cuối cùng của lối đi độ dài n , ta xét các trường hợp có thể xảy ra ở đoạn kết thúc

Trường hợp 1: Kết thúc bằng 1 viên gạch đặt thẳng đứng (chiếm kích thước 1×2). Phần lối đi còn lại phía trước có kích thước $2 \times (n - 1)$, suy ra có S_{n-1} cách lát.



Trường hợp 2: Kết thúc bằng 2 viên gạch đặt nằm ngang chồng lên nhau (chiếm kích thước 2×2). Phần lối đi còn lại phía trước có kích thước $2 \times (n - 2)$, suy ra có S_{n-2} cách lát.



Tổng số cách lát là tổng của hai trường hợp trên

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

Mặt khác, xét các trường hợp ban đầu

Nếu $n = 1$ (lối đi 2×1), chỉ có 1 cách lát duy nhất là dùng 1 viên gạch đặt đứng.

Nếu $n = 2$ (lối đi 2×2), có 2 cách lát thoả mãn: 2 viên gạch đặt đứng hoặc 2 viên gạch đặt ngang chồng lên nhau.

Thế nên, ta có hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} S_1 = 1, S_2 = 2 \\ S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

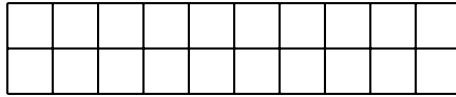
Sử dụng hệ thức truy hồi trên để tính đến $n = 10$, ta tìm được $S_{10} = 89$.

Vậy có tất cả 89 cách lát kín lối đi 2×10 . ■

Câu 3

Bạn cần lát kín một nền đường hình chữ nhật kích thước 2×10 bằng các viên gạch có sẵn. Có hai loại gạch để lựa chọn:

- Gạch đơn (kích thước 2×1): Có thể đặt đứng hoặc nằm ngang. Tuy nhiên, nếu đặt nằm ngang thì bắt buộc phải đặt 2 viên chồng lên nhau để lấp đầy chiều cao 2 đơn vị của con đường.
- Gạch đôi (kích thước 2×2): Là một khối vuông duy nhất.



Nền đường



Gạch đơn



Gạch đôi

Hỏi: Có tất cả bao nhiêu cách khác nhau để lát kín con đường này?

Lời giải. Gọi S_n là số cách lát kín nền đường kích thước $2 \times n$.

Theo điều kiện của đề bài, để lát kín phần cuối cùng của con đường độ dài n , ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1: Kết thúc bằng 1 viên gạch đơn đặt thẳng đứng (chiếm kích thước 2×1). Phần đường còn lại có kích thước $2 \times (n - 1)$, suy ra có S_{n-1} cách lát.

Trường hợp 2: Kết thúc bằng 2 viên gạch đơn đặt nằm ngang chồng lên nhau (chiếm kích thước 2×2). Phần đường còn lại có kích thước $2 \times (n - 2)$, suy ra có S_{n-2} cách lát.

Trường hợp 3: Kết thúc bằng 1 viên gạch đôi (chiếm kích thước 2×2). Phần đường còn lại cũng có kích thước $2 \times (n - 2)$, suy ra có thêm S_{n-2} cách lát.

Tổng số cách lát là $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-2}$. Rút gọn lại, được

$$S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$$

Mặt khác

Nếu $n = 1$ (đường 2×1), chỉ có 1 cách lát duy nhất là dùng 1 viên gạch đơn đặt đứng.

Nếu $n = 2$ (đường 2×2), có 3 cách lát thoả mãn: 2 viên gạch đơn đứng, 2 viên gạch đơn ngang, hoặc 1 viên gạch đôi.

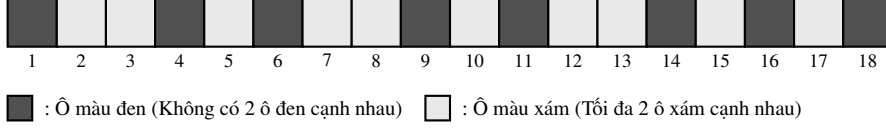
Thế nên, ta có hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} S_1 = 1, S_2 = 3 \\ S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Sử dụng hệ thức truy hồi trên để tính đến $n = 10$, ta tìm được $S_{10} = 683$. ■

Câu 4

Có tất cả 18 hình vuông nhỏ đặt cạnh nhau thành một hàng ngang. Ta tiến hành tô màu cho các hình vuông, mỗi hình vuông hoặc tô màu đen hoặc tô màu xám, sao cho không có hai ô màu đen cạnh nhau và không có nhiều hơn hai ô màu xám cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu cho 18 ô vuông nhỏ này?



Lời giải. Gọi x_n là số cách tô kết thúc bằng màu đen.

Gọi y_n là số cách tô kết thúc bằng đúng 1 ô màu xám.

Gọi z_n là số cách tô kết thúc bằng đúng 2 ô màu xám.

Theo điều kiện của đề bài, nếu ô thứ n màu đen thì ô thứ $n - 1$ là màu xám (1 hoặc 2 ô xám tùy ý, do không có 2 ô đen liền kề). Nghĩa là

$$x_n = y_{n-1} + z_{n-1}$$

Nếu ô thứ n màu xám thì ô thứ $n - 1$ có thể là đen hoặc là xám. Nghĩa là

$$\begin{cases} y_n = x_{n-1} \\ z_n = y_{n-1} \end{cases}$$

Tổng số cách tô là $S_n = x_n + y_n + z_n$. Bằng các phép thế, ta có thể chứng minh được dãy số thỏa mãn hệ thức

$$S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$$

Mặt khác

— Nếu $n = 1$, có 2 cách tô thỏa mãn, là (Đ, X).

— Nếu $n = 2$, có 3 cách tô thỏa mãn, là (ĐX, XD, XX).

— Nếu $n = 3$, có 4 cách tô thỏa mãn, là (ĐXD, ĐXX, XXĐ, XDX).

Thế nên, ta có hệ thức truy hồi:

$$\begin{cases} S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 4 \\ S_n = S_{n-2} + S_{n-3} \quad (n \geq 4) \end{cases}$$

Từ đó, tìm được $S_{18} = 265$. ■

§ 8

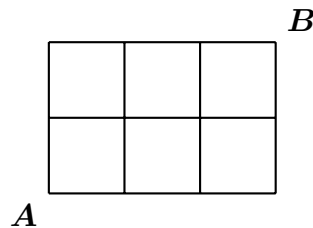
PHƯƠNG PHÁP ĐẾM QUỲ ĐẠO

① Bài toán đường đi ngắn nhất trên lưới ô vuông

Không gian 2 chiều: Cho một lưới ô vuông có kích thước $m \times n$. Giả sử có một con kiến “thông minh” muốn đi từ A đến B với đường đi ngắn nhất, thì số hoán vị thoả mãn là

$$\frac{(m+n)!}{m!.n!} = C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$$

Ví dụ: Cho lưới ô vuông có kích thước 2×3 như hình vẽ. Một con kiến xuất phát từ điểm A muốn bò tới điểm B sao cho con đường này đảm bảo là ngắn nhất. Mỗi lần di chuyển, nó chỉ được phép bò lên trên hoặc bò sang phải của lưới ô vuông này. Hỏi có bao nhiêu con đường ngắn nhất như thế ?



Điểm đặc biệt là dù bạn có đi như thế nào thì quy luật vẫn là: 2 bước lên trên và 3 bước sang phải. Vậy theo công thức hoán vị lặp, số con đường thoả mãn là

$$\frac{(2+3)!}{2!.3!} = C_{2+3}^2 = C_{2+3}^3$$

Không gian 3 chiều: Cho một lưới ô vuông có dạng là một khối hộp chữ nhật có kích thước $m \times n \times p$. Giả sử có một con kiến “thông minh” muốn đi từ A đến B với đường đi ngắn nhất, thì số hoán vị thoả mãn là

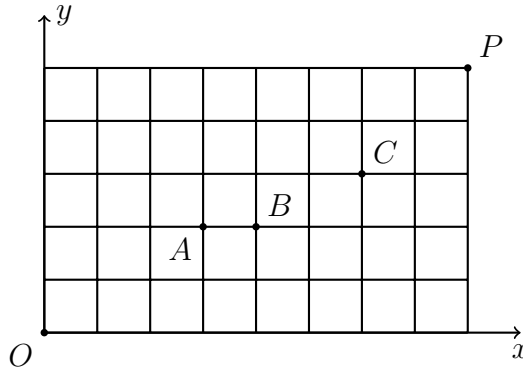
$$\frac{(m+n+p)!}{m!.n!.p!} = C_{m+n+p}^m \cdot C_{n+p}^n \cdot C_p^p$$

Note. Những lời giải cho các ví dụ dưới đây được trình bày theo công thức $\frac{(m+n)!}{m!.n!}$ và $\frac{(m+n+p)!}{m!.n!.p!}$, các bạn muốn sử dụng công thức tổ hợp — tùy ý.

② Bài tập

✍ Câu 1

Tìm số đường đi ngắn nhất từ điểm O đến điểm P trên lưới ô vuông (xem hình dưới). Trong các trường hợp sau: (giả sử chỉ có thể đi lên hoặc đi sang phải)



- (i) Tuyến đường đó phải đi qua điểm A ;
- (ii) Tuyến đường đó phải đi qua đoạn đường AB ;
- (iii) Tuyến đường đó phải đi qua cả hai điểm A và C ;
- (iv) Đoạn đường AB không thể đi qua được.

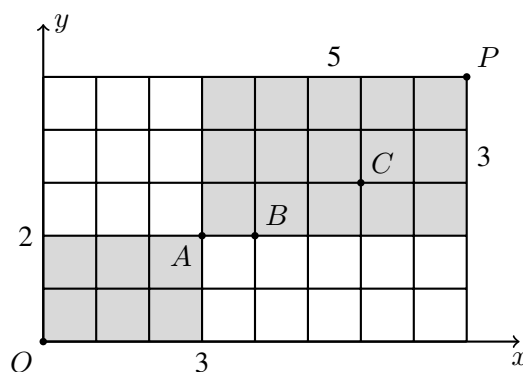
Lời giải. Với hệ trục tọa độ (Oxy) như trên hình vẽ. Tọa độ các điểm lần lượt là

$$O(0; 0), A(3; 2), B(4; 2), C(6; 3), P(8; 5)$$

Các tọa độ này cho biết điều gì ? Với hoành độ của các điểm, ví dụ lấy điểm $A(3; 2)$ có hoành độ là $x = 3$, nghĩa là ta phải sang phải 3 bước và với tung độ $y = 2$, nghĩa là phải đi lên trên 2 bước để đến được điểm này.

Với (i) – tuyến đường đi từ $O \rightarrow P$ mà phải đi qua điểm A . Tức là tuyến đường ngắn nhất cần xét là $O \rightarrow A \rightarrow P$. Ta chia thành 2 tuyến đường là $(O \rightarrow A), (A \rightarrow P)$.

Hai tuyến đường này chia lưới ô vuông to thành 2 lưới ô vuông nhỏ có kích thước 2×3 và 3×5 (xem hình vẽ).



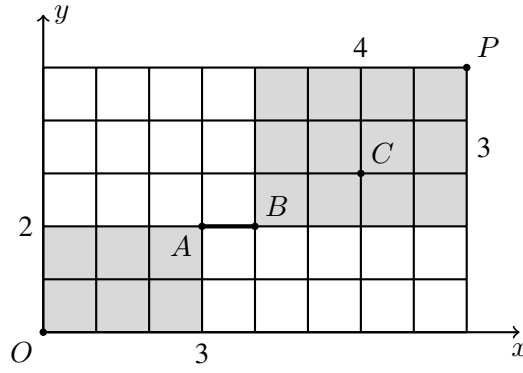
Vậy theo công thức mình đã đề cập, đường đi ngắn nhất chính là hoán vị lặp của 2 tuyến đường chia nhỏ này, tức

$$\begin{cases} O \rightarrow A : \frac{(2+3)!}{2!.3!} = C_{2+3}^2 = C_{2+3}^3 \\ A \rightarrow P : \frac{(3+5)!}{3!.5!} = C_{3+5}^3 = C_{3+5}^5 \end{cases}$$

Theo quy tắc nhân, các tuyến đường ngắn nhất: $O \rightarrow A \rightarrow P = (O \rightarrow A) \times (A \rightarrow P) = \frac{(2+3)!}{2!.3!} \times \frac{(3+5)!}{3!.5!} = 560$

Với (ii) – tuyến đường đi từ $O \rightarrow P$ mà phải đi qua đoạn AB . Tức là tuyến đường ngắn nhất cần xét là $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P$. Ta chia thành 3 tuyến đường nhỏ, là $(O \rightarrow A), (A \rightarrow B), (B \rightarrow P)$.

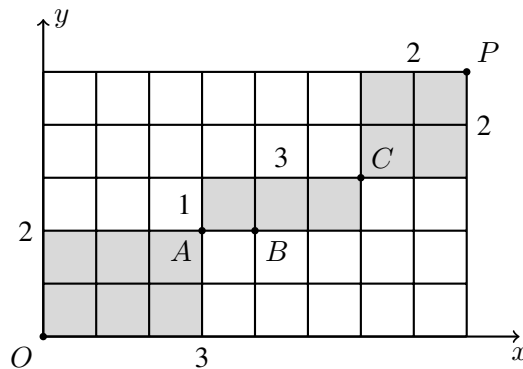
Quan sát hình vẽ cho 3 tuyến đường.



Dễ thấy, có 2 tuyến đường nhỏ tạo thành lưới ô vuông mới là $(O \rightarrow A) : 2 \times 3$ và $(B \rightarrow P) : 3 \times 4$. Hơn nữa tuyến đường $(A \rightarrow B)$ không thể tạo thành lưới ô vuông (vì chỉ là một đường thẳng), hay nói cách khác, số cách đi từ A đến B chỉ có duy nhất 1 con đường.

Vậy các tuyến đường có thể có (và ngắn nhất) là: $\frac{(2+3)!}{2!.3!} \times 1 \times \frac{(3+4)!}{3!.4!} = 350$

Tương tự, với (iii), tuyến đường cần xác định là $O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow P = (O \rightarrow A) \times (A \rightarrow C) \times (C \rightarrow P)$.



Các tuyến đường nhỏ lần lượt tạo thành lưới có kích thước: $(2 \times 3), (1 \times 3)$ và (2×2) .

Vậy số các con đường ngắn nhất: $\frac{(2+3)!}{2!.3!} \times \frac{(1+3)!}{1!.3!} \times \frac{(2+2)!}{2!.2!} = 240$

Với (iv) – đoạn đường AB không thể đi qua được. Ta có thể dùng phần bù trong trường hợp này, nghĩa là lấy toàn bộ số con đường ngắn nhất đi từ $O \rightarrow P$ trừ đi số con đường ngắn nhất mà đi đoạn AB (chính là ý (ii) đã tính ở trên – là tuyến đường $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P$).

Mặt khác, tuyến đường ngắn nhất đi từ $O \rightarrow P$ chính là lưới ô vuông có kích thước 5×8 .

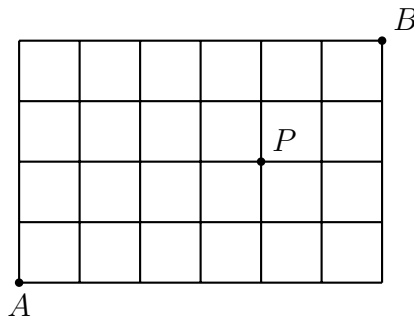
Vậy số con đường ngắn nhất thỏa mãn (iv) là

$$\frac{(5+8)!}{5!.8!} - \frac{(2+3)!}{2!.3!} \times 1 \times \frac{(3+4)!}{3!.4!} = 937$$

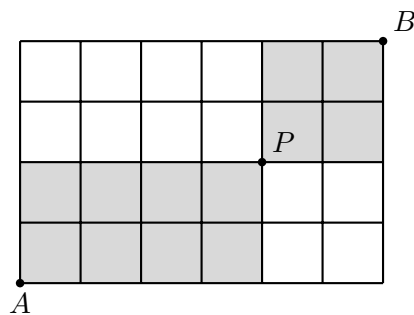
■

Câu 2

Tìm số lượng đường đi ngắn nhất từ điểm A đến B trong mạng lưới đường phố như trong hình vẽ nếu điểm P bị đóng không thể đi qua.



Lời giải.



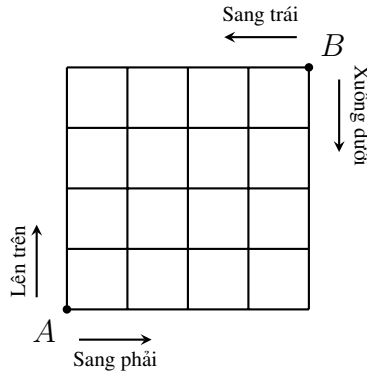
Ta sẽ dùng phần bù cho bài này. Cụ thể ta sẽ lấy tổng cách đi ngắn nhất từ $A \rightarrow B$ trừ đi cách đi từ $A \rightarrow P$ và $P \rightarrow B$. Nghĩa là

$$\frac{(4+6)!}{4!.6!} - \frac{(2+4)!}{2!.4!} \times \frac{(2+2)!}{2!.2!} = 120$$

■

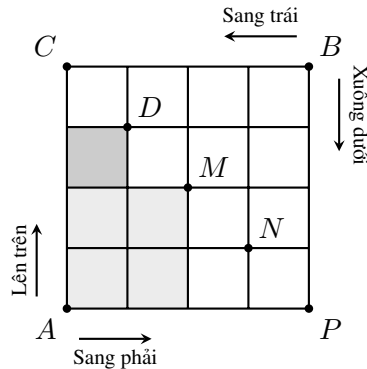
Câu 3 — Thi thử Tốt nghiệp Sở Thái Nguyên — 2025

Hai rô bốt giao hàng tự động giống nhau cùng xuất phát từ vị trí A và B của một khu đô thị được quy hoạch ở bàn cờ (như hình vẽ).



Mỗi tuyến phố trong khu đô thị coi như một cạnh của một hình vuông. Rô bốt xuất phát từ vị trí A chỉ có thể di chuyển sang phải hoặc lên trên, rô bốt xuất phát từ vị trí B chỉ có thể di chuyển sang trái hoặc xuống dưới (với xác suất như nhau mỗi khi có sự lựa chọn). Hai rô bốt đều di chuyển đến điểm xuất phát của nhau. Biết rằng tốc độ di chuyển của hai rô bốt là như nhau, xác suất để hai rô bốt gặp nhau tại một điểm nào đó trong hành trình của mình bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?

Lời giải.



Không gian mẫu là: “số con đường mà A tới B và số con đường mà B tới A ”.

Rõ thấy, số con đường từ $A \rightarrow B \iff B \rightarrow A$ phủ kín lưới ô vuông có kích thước 4×4 . Nghĩa là

$$n(\Omega) = \left[\frac{(4+4)!}{4!.4!} \right]^2$$

Mặt khác, với lưới ô vuông có kích thước 4×4 , mà tốc độ của 2 rô bốt này là như nhau nên để chúng gặp nhau tại một điểm nào đó thì điều này dẫn đến việc mỗi con rô bốt phải đi được trước đó 4 bước trước khi gặp nhau.

Chúng sẽ chắc chắn gặp nhau tại các điểm $\{C, D, M, N, P\}$ (thỏa mãn mỗi rô bốt đi đúng 4 bước thì gặp nhau tại đúng các điểm đó). Vì các con đường $A \rightarrow C \iff B \rightarrow C$, $A \rightarrow D \iff B \rightarrow D$, $A \rightarrow M \iff B \rightarrow M$, hơn nữa các điểm $\{C, D\}$ đối xứng qua $\{M\}$ lần lượt là $\{P, N\}$ nên ta chỉ cần xét các con đường: $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$, $A \rightarrow M$.

— Xét số con đường đi từ $A \rightarrow C$: ta chỉ có duy nhất 1 cách đi (vì 2 điểm này là đường thẳng, không tạo thành lưới).

Từ đây, suy ra $B \rightarrow C$ cũng có 1 cách đi duy nhất.

Và hơn nữa, do tính đối xứng nên $A \rightarrow P \iff B \rightarrow P$ cũng có 1 cách đi duy nhất.

— Xét số con đường đi từ $A \rightarrow D$: rõ thấy, 2 điểm này tạo thành một lưới ô vuông nhỏ có kích thước 1×3 . Thế nên số con đường là

$$\frac{(1+3)!}{1!.3!}$$

Từ đây, suy ra $B \rightarrow D$ cũng có $\frac{(1+3)!}{1!.3!}$ (con đường).

Và hơn nữa, do tính đối xứng nên $A \rightarrow N \iff B \rightarrow N$ cũng có $\frac{(1+3)!}{1!.3!}$ (con đường).

— Xét số con đường đi từ $A \rightarrow M$: rõ thấy, 2 điểm này tạo thành một lưới ô vuông nhỏ có kích thước 2×2 . Thế nên số con đường là

$$\frac{(2+2)!}{2!.2!}$$

Từ đây, suy ra $B \rightarrow M$ cũng có $\frac{(2+2)!}{2!.2!}$ (con đường).

Cần lưu ý rằng trường hợp này không có tính đối xứng (vì là tâm đối xứng).

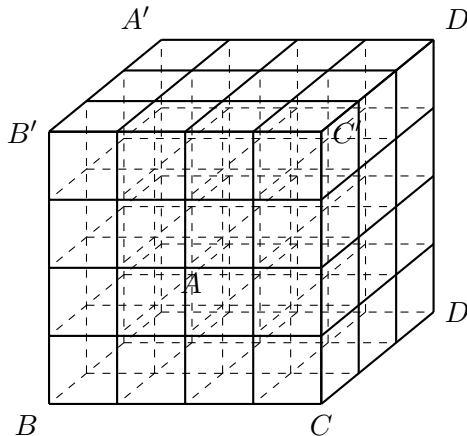
Vậy xác suất của biến cố

$$\frac{2.(1.1) + 2. \left[\frac{(1+3)!}{1!.3!} \right]^2 + \left[\frac{(2+2)!}{2!.2!} \right]^2}{\left[\frac{(4+4)!}{4!.4!} \right]^2} \approx 0,37$$

■

Câu 4

Trong không gian, cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $3 \times 4 \times 4$ tạo thành một lưới các khối lập phương đơn vị (tham khảo hình vẽ). Một con kiến thông minh di chuyển trên lưới đi từ A đến C' với đường đi ngắn nhất. Biết có T cách di chuyển có thể. Tính giá trị của $\frac{T}{10}$.



Lời giải. Theo công thức đường đi ngắn nhất trong không gian 3 chiều, ta được

$$A \longrightarrow C' = \frac{(3+4+4)!}{3!.4!.4!} = T \implies \frac{T}{10} = 1155$$

■

§ 9

DÃY SỐ CATALAN

① Dãy số Catalan

Bài toán. Cho mạng lưới ô vuông có kích thước $n \times n$. Ta xét các đường đi từ điểm $O(0; 0)$ đến điểm có toạ độ $M(n, n)$. (chỉ đi sang phải hoặc đi lên)

Xét điều kiện ràng buộc: đường đi này bằng mọi cách không được vượt quá đường phân giác tạo bởi đường thẳng $y = x$ (tức là có thể chạm vào đường thẳng này, miễn không vượt quá).

Khi ấy, ta nói số các đường đi thoả mãn điều kiện trên gọi là dãy số **Catalan** (sau đây ký hiệu là C_n).

Hơn thế, số các con đường thoả mãn bằng

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Chứng minh. Để chứng minh công thức này, chúng ta sẽ lấy số đường đi tự do trừ đi số đường đi vi phạm điều kiện. Từ đó, thực sự được số cách đi thoả mãn điều kiện đề bài.

Đi qua phải n bước, lên trên n bước. Khi đó, số cách đi tự do là

$$C_{2n}^n$$

Một cách đi gọi là *vi phạm* nếu và chỉ nếu tồn tại cách đi mà vượt qua đường chéo chính (đường thẳng $y = x$) ít nhất một lần. Ta gọi $y = x + 1$ là vùng mà khiến cách đi của ta bị *vi phạm*.

Ta xét một đường đi *vi phạm* lần đầu tiên tại một điểm bất kỳ.

Sử dụng phép biến hình, cụ thể là phép lấy đối xứng. Từ điểm phạm luật ta lấy đối xứng qua đường thẳng $y = x + 1$.

Đối xứng điểm $O(0; 0)$ qua đường thẳng $y = x + 1$ là điểm $O'(-1; 1)$.

Ta muốn đi từ $O(0; 0)$ đến điểm $M(n; n)$. Như thế, số đường đi *vi phạm* cũng tương đương với việc đi từ $O'(-1; 1)$ đến $M(n; n)$.

Xét vectơ

$$\overrightarrow{O'M} = (n+1; n-1)$$

Để ý rằng, hoành độ và tung độ của vectơ này lần lượt là số bước sang phải và số bước đi lên. Từ đó, tổng số bước phải là

$$(n + 1) + (n - 1) = 2n$$

Suy ra, số đường đi *vi phạm* là

$$C_{2n}^{n-1}$$

Vậy số đường đi thoả điều kiện đề bài

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

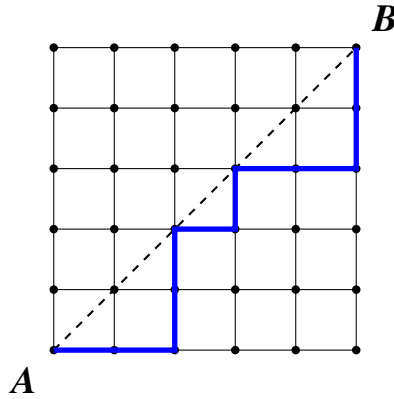
Chứng minh xong.

Dấu hiệu: Đường đi không vượt quá đường chéo, phân hoạch đa giác,...

② Bài tập

✍ Câu 1

Cho một lưới ô vuông 5×5 . Một con kiến bò từ điểm A ở góc dưới bên trái của lưới lên điểm B ở góc trên bên phải. Hỏi có bao nhiêu cách bò của con kiến sao cho nó chỉ nằm ở nửa dưới so với ô đường chéo của lưới ô vuông? (có thể đi lên đường chéo, và nó chỉ được di chuyển sang phải hoặc lên trên). Dưới đây là một cách đi thoả mãn (đường màu xanh)



Lời giải.

Áp dụng trực tiếp công thức Catalan (vì nhận thấy đây là bài toán đếm số đường đi không vượt qua đường chéo - chính là đường thẳng $y = x$). Ta được

$$\frac{1}{5+1} C_{2 \times 5}^5 = 42$$

■

✍ Câu 2

Có bao nhiêu cách bắt tay nhau của $2n$ người ngồi quanh một cái bàn tròn mà không có cặp nào bắt chéo tay với cặp nào?

Lời giải. Áp dụng trực tiếp công thức Catalan, được

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

■

✍ Câu 3

Có bao nhiêu hàm số

$$f : \{1; 2; 3; \dots; n\} \rightarrow \{1; 2; 3; \dots; n\}$$

sao cho f là một hàm không giảm và với mọi k ta có $f(k) \leq k$?

Lời giải.

Trên một lưới tọa độ kích cỡ $n \times n$. Lấy tùy ý giá trị của ánh xạ (hàm số) f sao cho nó cũng chính là các bước đi trên

lưới toạ độ ấy.

Với điều kiện

$$f(k) \leq k \iff f(x) \leq x \iff y \leq x$$

Điều này hoàn toàn tương đương với việc đường đi không vượt quá đường thẳng $y = x$.

Áp dụng trực tiếp công thức Catalan, được

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$



Câu 3

Trên hệ trục toạ độ Oxy , một con châu chấu đang đứng tại điểm O , nó bắt đầu nhảy, tại mỗi bước nhảy, nó nhảy một cách ngẫu nhiên theo chỉ một trong hai cách sau với xác suất như sau:



— **Bước lên:** Sang phải 1 đơn vị theo trục x và lên trên 1 đơn vị theo trục y .

— **Bước xuống:** Sang phải 1 đơn vị theo trục x và xuống dưới 1 đơn vị theo trục y .

Xác suất để con châu chấu đến được điểm $B(10; 2)$ sau 10 lần nhảy mà không nhảy xuống điểm có tung độ âm là bao nhiêu phần trăm (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)?

Lời giải.

Ta sẽ sử dụng tư duy của phần **Chứng minh công thức Catalan** để giải quyết bài toán này.

Gọi a, b lần lượt là tổng số bước lên và xuống mà con châu chấu thực hiện khi đã đến điểm $B(10; 2)$. Hay a, b cũng thoả vectơ $\overrightarrow{OB} = (10; 2)$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ a - b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$$

Theo đó, số cách đi tự do là

$$C_{6+4}^4 = C_{6+4}^6$$

Lưu ý: lúc này số cách đi tự do cũng là đường đi ngắn nhất (lập hoán vị) nên ta có số cách chọn như thế theo công thức đường đi ngắn nhất trên lưới ô vuông.

Vì điều kiện của đề bài là: "không nhảy xuống điểm có tung độ âm", tương đương với $y \geq 0$, nên để tính số cách đi *vi phạm*, ta cần xét $y = -1$ (vì mỗi bước nhảy là 1 đơn vị).

Lấy đối xứng điểm $O(0; 0)$ qua đường thẳng $y = -1$ thu được $O'(0; -2)$.

Gọi a, b lần lượt là tổng số bước lên và xuống mà con châu chấu thực hiện khi đã đến điểm $B(10; 2)$. Hay a, b thỏa vectơ $\overrightarrow{O'B} = (10; 4)$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$$

Theo đó, số cách đi *vi phạm* là

$$C_{7+3}^3 = C_{7+3}^7$$

Lưu ý: lúc này số cách đi tự do cũng là đường đi ngắn nhất (lập hoán vị) nên ta có số cách chọn như thế theo công thức đường đi ngắn nhất trên lưới ô vuông.

Ngoài ra, do có hai sự lựa chọn như thế nên sau 10 bước đi thì không gian mẫu

$$n(\Omega) = 2^{10}$$

Vậy xác suất của biến cố là

$$\frac{C_{6+4}^4 - C_{7+3}^3}{2^{10}} = \frac{C_{6+4}^6 - C_{7+3}^7}{2^{10}} = \frac{45}{512} \approx 8,8\%$$

■

Câu 5 — Bài toán hành trình Dyck

Xét hệ trục tọa độ Oxy . Xuất phát từ điểm $O(0; 0)$ đến điểm $(2n; 0)$ có bao nhiêu khả năng để bước sao cho mỗi bước có là các vectơ $x(1; -1)$ hoặc $y(1; 1)$ và không đi xuống dưới trục hoành (x là xuống và sang phải, y là lên và sang phải)?

Lời giải.

Tương tự bài toán con châu chấu đã đề cập. Số đường đi thỏa mãn hành trình này là

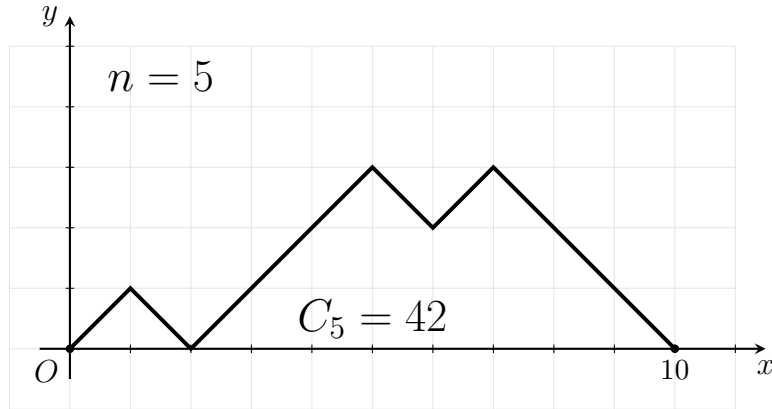
$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Để làm rõ hơn, ta đến với bài toán số 6.

■

Câu 6

Một lớp học có 10 học sinh đang đứng xếp hàng mua vé xem phim. Giá mỗi vé là 50.000 đồng. Trong đó có 5 người chỉ mang tờ tiền mệnh giá 50.000 đồng và 5 người còn lại chỉ mang tờ tiền mệnh giá 100.000 đồng. Cho rằng, ban đầu trong quầy không có tiền. Gọi T là số cách xếp số người đó sao cho không có người nào phải chờ trả tiền thừa (công việc không bị gián đoạn). Tìm giá trị của T ?



Minh hoạ khi $n = 5$

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số người trả tiền và số tiền mà nhân viên nhận được.

Ta sẽ lấy tờ tiền mệnh giá $50k$ làm mốc. Bởi ban đầu nhân viên không có tiền trong quầy, muốn trả lại tiền thừa cho những người đưa $100k$ thì phải có tờ $50k$.

Xét những người có tờ mệnh giá $50k$ trả tiền cho nhân viên (và nhân viên cũng nhận thêm một tờ tiền). Nghĩa là x tăng thêm 1 và y cũng tăng thêm 1.

Xét những người có tờ mệnh giá $100k$ trả tiền cho nhân viên (và nhân viên cũng nhận thêm một tờ $100k$ và phải đưa lại $50k$ tiền thừa). Nghĩa là x tăng thêm 1 và y giảm đi 1.

Lúc này, bài toán trở về **Hành trình Dyck** với các vectơ $x(1; -1)$ và $y(1; 1)$.

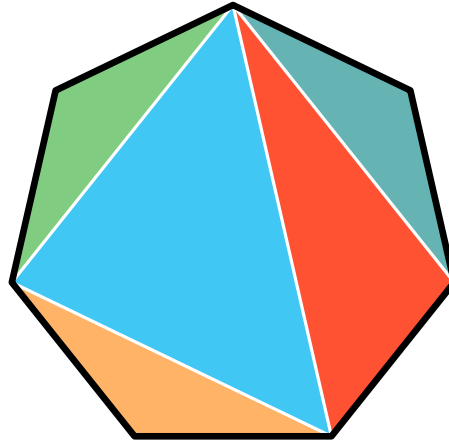
Ta được số cách thoả mãn phải là

$$T = \frac{1}{5+1} C_{2 \times 5}^5 \implies T = 42$$

■

Câu 7

Cho một đa giác lồi có 7 cạnh $A_1A_2A_3\dots A_7$. Người ta chia đa giác này thành các tam giác bằng cách vẽ các đường chéo không cắt nhau trong đa giác. Gọi T là số cách để chia đa giác lồi này thành các tam giác theo cách trên. Tính giá trị của T .



Lời giải. Để thấy, muốn chia một đa giác n cạnh thành các tam giác thì số đường chéo cần vẽ thêm tuân theo quy luật là $n - 3$.

Khi ấy, cần vẽ thêm $7 - 3 = 4$ đường chéo. Lúc này, đa giác được chia thành 5 tam giác.

Với điều kiện: "các đường chéo không cắt nhau". Tối đây, ta được phép sử dụng Catalan

$$\frac{1}{5+1} C_{2 \times 5}^5 = 42$$

■

① Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hàm sinh của dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ là hàm số được xác định bởi

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Định nghĩa 2. Cho dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Hàm số cho bởi công thức

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

được gọi là hàm sinh dạng mũ của dãy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

② Một số đẳng thức liên quan đến Hàm Sinh

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n-1}^i x^i$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-ax)^2} = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^r} = 1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots$$

Hai mệnh đề thường được sử dụng

Mệnh đề 1. Cho hàm sinh $G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^n$.

(a) Đặt a_r là hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ thì $a_r = C_{r+n-1}^r$;

(b) $(1 - x^m)^n = 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \dots + (-1)^n x^{mn}$;

(c) $(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + \dots)^n$.

Mệnh đề 2 (Công thức xác định hệ số tích của hai hàm sinh). Cho hai hàm sinh của hai dãy $(a_n), (b_n)$ lần lượt là

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

Đặt

$$\begin{aligned} G(x) = A(x)B(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ là

$$a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \dots + a_{r-2}b_2 + a_{r-1}b_1 + a_rb_0 \quad (*)$$

Note. Trong các ví dụ ứng dụng hàm sinh để giải bài toán đếm nâng cao, chúng ta rất hay sử dụng đẳng thức (*).

③ Ứng dụng Hàm Sinh vào bài toán đếm

Ý tưởng chung của phương pháp sử dụng hàm sinh giải bài toán đếm là đi tìm hệ số của x^r trong khai triển của hàm sinh với r là số phần tử được chọn ra trong n đối tượng với những điều kiện ràng buộc cho trước.

④ Bài tập



Bạn An xếp 12 quyển sách giống nhau lên 3 ngăn kệ A, B, C . Hỏi bạn An có bao nhiêu cách xếp 12 quyển sách sao cho ngăn A có ít nhất 4 quyển, ngăn B và ngăn C mỗi ngăn đều có ít nhất 2 quyển, nhưng ngăn C không được nhiều hơn 5 quyển?

Lời giải. Theo phương pháp hàm sinh, số cách xếp 12 quyển sách vào 3 ngăn kệ A, B, C thỏa mãn đề bài chính là hệ số của x^{12} trong khai triển hàm sinh tổng $G(x) = A(x)B(x)C(x)$.

Ngăn A có ít nhất 4 quyển (trong khi đó ngăn B và C mỗi ngăn có ít nhất 2 quyển nên ngăn A có tối đa 8 quyển). nên hàm sinh cho ngăn A là

$$x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^4 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Ngăn B có ít nhất 2 quyển (trong khi đó ngăn A có ít nhất 4 quyển và ngăn C có ít nhất 2 quyển nên ngăn B có tối đa 6 quyển) nên hàm sinh cho ngăn B là

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^2 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Ngăn C có ít nhất 2 quyển và không nhiều hơn 5 quyển nên hàm sinh cho ngăn C là

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = x^2(1 + x + x^2 + x^3) = x^2 \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

Thế nên

$$\begin{aligned} G(x) &= A(x)B(x)C(x) = x^4 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot x^2 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot x^2 \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x} = \frac{x^8(1 - x^5)^2(1 - x^4)}{(1 - x)^3} \\ &= x^8(1 - 2x^5 + x^{10})(1 - x^4) \left(\frac{1}{1 - x} \right)^3 \\ &= (x^8 - x^{12} - 2x^{13} + 2x^{17} + x^{18} - x^{22}) \left(\frac{1}{1 - x} \right)^3 \end{aligned}$$

Do cần tìm hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$ nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của

$$U(x) = (x^8 - x^{12} - 2x^{13} + 2x^{17} + x^{18} - x^{22})$$

với bậc ≤ 12 . Do đó $U(x)$ chỉ có các hệ số a_8, a_{12} tương ứng với các số hạng $x^8, -x^{12}$ là thỏa mãn.

Và hệ số của x^r trong khai triển $V(x) = \left(\frac{1}{1 - x} \right)^3$ là $b_r = C_{r+2}^r$.

Vậy hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$ là:

$$a_8 b_4 + a_{12} b_0 = 1 \cdot C_6^4 - 1 \cdot C_2^0 = 15 - 1 = 14.$$



BÀI TẬP TỔNG HỢP



CÂU 1

Thi thử Tốt nghiệp Sở Cà Mau — 2026

Một trường THPT X có 13 học sinh đạt được giải học sinh giỏi cấp tỉnh năm 2026. Trong đó học sinh giỏi môn Toán có 3 nữ và 5 nam, học sinh giỏi môn Vật lí thì có 5 nam. Lãnh đạo trường chọn ngẫu nhiên ra 3 học sinh để dự lễ tuyên dương. Tính xác suất để chọn ra được 3 học sinh có đủ hai môn Toán và Vật lí, đồng thời phải có học sinh nam và học sinh nữ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Trả lời:



CÂU 2

Thi thử Tốt nghiệp Sở Thanh Hoá — 2026

Một công ty tổ chức sự kiện tổng kết cuối năm. Trong buổi dự tiệc có 4320 người tham gia. Để làm tăng tính thú vị và hấp dẫn của buổi tiệc, người ta tạo ra các lá thăm ghi các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ được lập từ các số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Mỗi người tham gia dự tiệc sẽ chọn cho mình một lá thăm và tất cả các lá thăm được bốc hết. Gần cuối buổi tiệc, ban tổ chức công bố những người chọn được số thoả mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ sẽ được nhận phần thưởng đặc biệt từ công ty. Anh Huy là nhân viên công ty có tham gia dự tiệc và bốc thăm trúng thưởng. Hỏi anh Huy có xác suất trúng thưởng là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:



CÂU 3

Thi thử Tốt nghiệp Sở Đà Nẵng — 2026

Một giải đấu eSports có 8 đội tuyển tham gia thi đấu loại trực tiếp, bắt đầu từ Tứ kết (8 đội được chia thành 4 cặp, đội thắng trong mỗi cặp sẽ tiến vào Bán kết, đội thua bị loại). Ban Tổ chức đánh số hạt giống các đội theo thứ tự từ mạnh đến yếu là 1 đến 8. Việc bốc thăm chia 4 cặp đấu Tứ kết được thực hiện ngẫu nhiên. Biết rằng khi thi đấu, đội có số hạt giống nhỏ hơn sẽ đánh bại đội có số hạt giống lớn hơn, tuy nhiên, có hai ngoại lệ: Đội số 8 luôn đánh bại Đội số 1 và Đội số 7 luôn đánh bại Đội số 2. Tính xác suất để Đội hạt giống số 3 giành chức vô địch giải đấu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:



CÂU 4

Thi thử Tốt nghiệp Sở Hải Phòng — 2026

Trong một kỳ thi bằng hình thức vấn đáp, ban tổ chức chuẩn bị một bộ câu hỏi gồm 12 câu hỏi khác nhau, mỗi câu được đựng trong một phong bì kín giống hệt nhau. Có ba thí sinh A, B và C cùng tham gia. Quy tắc chọn câu hỏi như sau: mỗi thí sinh lần lượt chọn ngẫu nhiên 4 phong bì từ bộ 12 câu hỏi đó để xác định phần thi của mình (sau khi mỗi thí sinh chọn xong, các câu hỏi được hoàn trả lại để thí sinh tiếp theo vẫn chọn từ bộ 12 câu ban đầu). Biết rằng xác suất để xảy ra đồng thời hai điều kiện:

+ Có ít nhất một câu hỏi mà cả ba thí sinh A, B, C đều chọn giống nhau.

+ Tổng số câu hỏi khác nhau mà cả ba thí sinh đã chọn được là đúng 9 câu.

được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương). Tính giá trị của biểu thức: $S = a + b$.

Trả lời:

5	8	9	3
---	---	---	---



CÂU 5

Thi thử Tốt nghiệp Sở Quảng Trị — 2026

Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 18\}$ gồm 18 số tự nhiên từ 1 đến 18. Lấy ngẫu nhiên 3 số khác nhau thuộc S . Xác suất để 3 số lấy ra lập thành cấp số cộng hoặc cấp số nhân là $\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + b$.

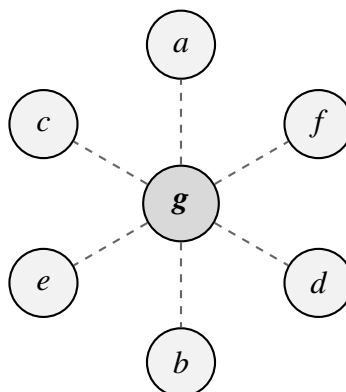
Trả lời:

4	4	9	
---	---	---	--



CÂU 6

Cho tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 14\}$ và 7 ô tròn a, b, c, d, e, f, g được bố trí như hình dưới. Mỗi ô tròn nhỏ chỉ được xếp đúng một số từ X .



Biết rằng có tất cả T cách chọn ra 7 số khác nhau từ tập X để xếp vào 7 ô tròn, sao cho có ít nhất một hàng (gồm 3 ô thẳng hàng đi qua tâm g) được sắp xếp theo chiều tăng dần hoặc giảm dần. Hãy xác định ba chữ số có nghĩa đầu tiên của T .

Trả lời:



CÂU 7

Sudoku là trò chơi giải đố số, với mục tiêu điền các số từ 1 đến 9 vào một bảng sao cho:

- Mỗi hàng có đầy đủ các số từ 1 đến 9 mà không bị lặp lại.
- Mỗi cột có đầy đủ các số từ 1 đến 9 mà không bị lặp lại.
- Mỗi ô vuông nhỏ cũng có đầy đủ các số từ 1 đến 9 mà không bị lặp lại.
- Người chơi phải điền số vào các ô trống sao cho thoả mãn các điều kiện trên.

	6	
2		
	?	

Trong bảng sudoku dưới đây, xác suất để dấu "?", là số 7 trên tất cả các bảng sudoku có thể có là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời:



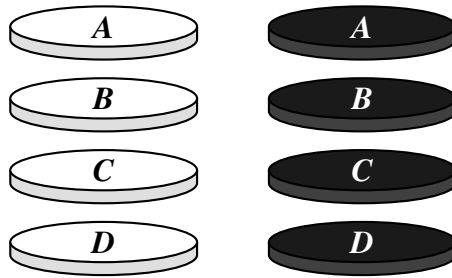
CÂU 8

Ban đầu cho ba rổ bi riêng biệt đựng những viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Rổ I đựng 6 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, rổ II đựng 6 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh, rổ III đựng 5 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Tiến hành lấy ngẫu nhiên một viên bi ở rổ I bỏ sang rổ III, lấy ngẫu nhiên một viên ở rổ II bỏ sang rổ III. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi ở rổ III. Hãy tính xác suất để viên bi lấy ra ở rổ III là của rổ I lúc ban đầu, nếu biết viên bi lấy ra ở rổ III có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Trả lời:

CÂU 9

Có 4 đĩa tròn màu trắng và 4 đĩa tròn màu đen, mỗi loại được ghi các chữ cái A, B, C, D . Trong số 8 đĩa này, chọn ra 4 đĩa và xếp chúng thành một cột hình trụ theo các quy tắc sau. Tính số cách xếp thỏa mãn:



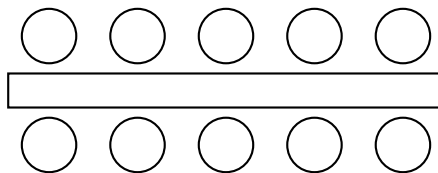
— Nếu trong 4 đĩa được chọn có các đĩa cùng chữ cái, thì đĩa màu đen phải được xếp phía dưới đĩa màu trắng có cùng chữ cái đó (không bắt buộc phải nằm sát nhau).

— Nếu trong 4 đĩa được chọn không có đĩa nào cùng chữ cái, thì đĩa có chữ D phải được xếp ở vị trí dưới cùng.

Trả lời:

CÂU 10

Một tổ có 10 học sinh, trong đó có 5 nam và 5 nữ. Trong buổi thí nghiệm, các em ngồi vào bàn có 2 dãy, mỗi dãy 5 ghế đối diện (các ghế đã được đánh số từ 1 đến 10 theo thứ tự từ trái qua phải, từ trên xuống dưới theo chiều kim đồng hồ).



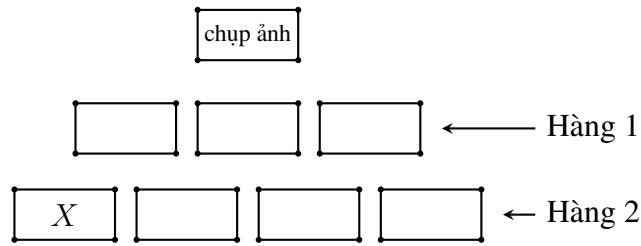
Kết quả của việc sắp xếp sao cho nam nữ ngồi đối diện và xen kẽ nhau là A cách thì $\frac{A}{100}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:



CÂU 11

Có 3 học sinh nữ, 3 học sinh nam và 2 giáo viên. Một người trong số họ sẽ đứng chụp ảnh, 7 người còn lại sẽ ngồi vào các ghế ở hàng 1 và hàng 2 (mỗi người một ghế) như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp thỏa mãn các điều kiện sau:



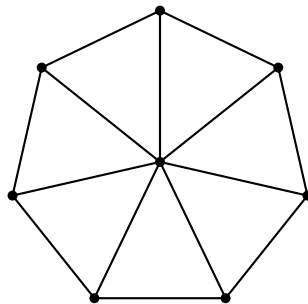
- Người chụp ảnh phải là 1 học sinh.
- Hai giáo viên phải ngồi vào hai ghế được đánh dấu X ở hàng 2.
- Ở mỗi hàng (hàng 1 và hàng 2) đều phải có ít nhất một học sinh nam ngồi.

Trả lời: 15120



CÂU 12

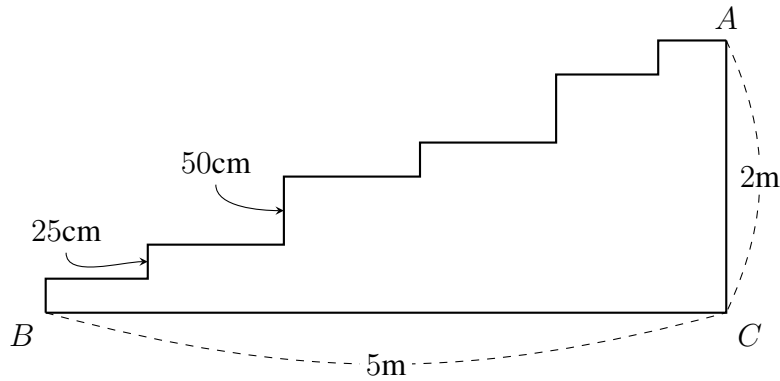
Như hình vẽ dưới, có một bảng gồm 7 tam giác bằng nhau ghép lại. Người ta muốn tô màu bảng này bằng 7 màu sắc khác nhau là đỏ, da cam, vàng, lục, lam, chàm, tím. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho phần tô màu cam nằm cạnh (tiếp giáp) với cả phần tô màu đỏ và phần tô màu vàng? (Biết rằng các cách xếp có thể trùng nhau qua phép quay thì được tính là một cách duy nhất).



Trả lời: 48

CÂU 13

Một kiến trúc sư đang thiết kế cầu thang như hình vẽ. Với $AC = 2\text{m}$ và $BC = 5\text{m}$, hãy tìm số cách thiết kế cầu thang thỏa mãn các điều kiện sau:



- Có 2 bậc có chiều cao là 50cm, tất cả các bậc còn lại có chiều cao là 25cm.
- Chiều rộng của mỗi bậc là bội số của 50cm, và chiều rộng của các bậc không nhất thiết phải bằng nhau.

Trả lời: **1 8 9 0**

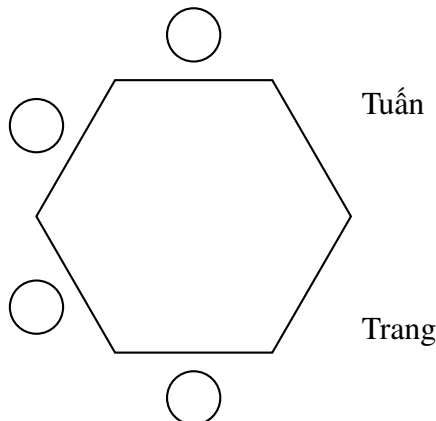
CÂU 14

Sáu người bao gồm Tuấn và Trang, ngồi quanh một chiếc bàn hình lục giác đều như hình vẽ. Họ thực hiện một trò chơi với một con xúc xắc theo quy tắc sau:

Người đang giữ xúc xắc sẽ tung nó.

- Nếu số chấm xuất hiện là nhỏ hơn 3, họ sẽ đưa xúc xắc cho người bên cạnh theo chiều kim đồng hồ.
- Nếu số chấm lớn hơn hoặc bằng 3, họ sẽ đưa xúc xắc cho người bên cạnh theo chiều ngược kim đồng hồ.

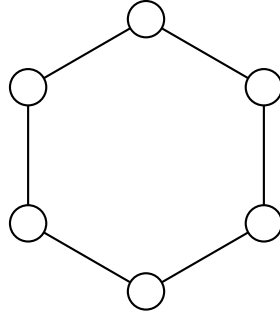
Bắt đầu từ người Tuấn giữ xúc xắc, sau 5 lần thực hiện quy trình trên, xác suất để người Trang là người giữ xúc xắc là a ? (Biết Trang ngồi ngay bên cạnh Tuấn theo chiều kim đồng hồ, tham khảo hình vẽ). Hãy tính $\frac{576}{a}$.



Trả lời: **1 9 4 4**

CÂU 15

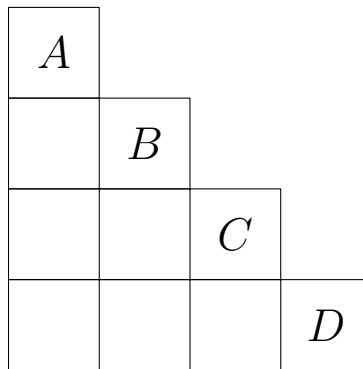
Bạn có 6 đồng xu được đặt trên các đỉnh của một hình lục giác đều. Mỗi đồng xu được gán một giá trị là một số nguyên dương trong tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$ và mỗi giá trị chỉ được dùng một lần. Có bao nhiêu cách để gán giá trị cho các đồng xu sao cho tổng các giá trị của ba đồng xu bất kỳ tạo thành một tam giác đều là bằng nhau?



Trả lời:

CÂU 16

Từ tập hợp số tự nhiên $1; 2; 3; \dots; 25; 26$, cần chọn ra 10 số phân biệt để gán vào 10 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\frac{T}{4}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời:

CÂU 17

Một nhóm bạn lên kế hoạch đi du lịch hè, cả nhóm quyết định đi tham quan 5 địa điểm A, B, C, D, E . Nhóm trưởng đề nghị mỗi thành viên trong nhóm sắp xếp thứ tự 5 địa điểm tham quan theo sở thích và đã nhận được đề xuất của hai thành viên Nam và Thắng (mỗi thành viên thực hiện sắp xếp một cách độc lập). Tính xác suất để hai người này có ít nhất một địa điểm trùng nhau về vị trí trong thứ tự đã xếp (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời:

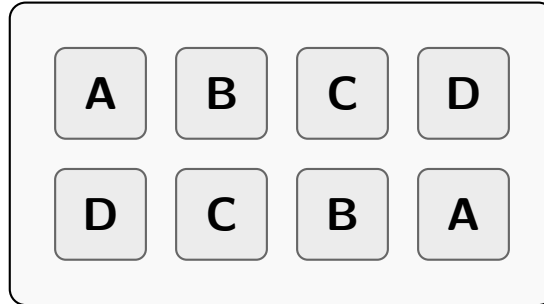


CÂU 18

Đại Học Bách Khoa Hà Nội tổ chức phỏng vấn 8 học sinh, trong đó có hai học sinh trường A , hai học sinh trường B , hai học sinh trường C và hai học sinh trường D . Để tránh tình trạng gian lận, trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội yêu cầu sắp xếp chỗ như sau:

— Xếp 8 bạn thành 2 hàng ngang, mỗi hàng bốn bạn.

— Hai bạn cùng trường không ngồi cạnh nhau và cũng không ngồi đối diện nhau.



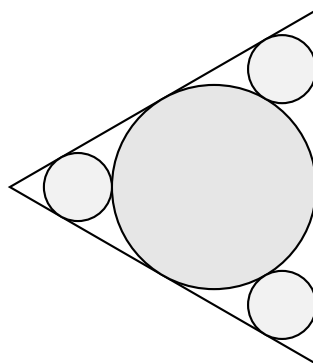
Số cách mà Đại Học Bách Khoa Hà Nội có thể sắp xếp bằng bao nhiêu?

Trả lời:



CÂU 19

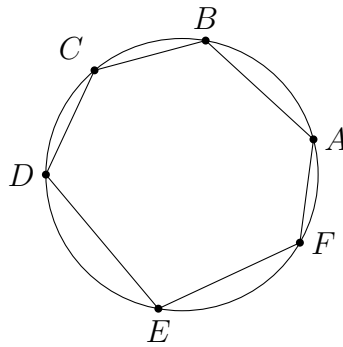
Cho tập $X = \{1; 2; \dots; 9\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt, rồi đặt 1 số đặt vào vòng tròn lớn, 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ. Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng nhỏ bất kỳ luôn bé hơn số tự nhiên ở vòng lớn chính giữa, đồng thời tổng cả ba số tự nhiên trên vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số tự nhiên ở vòng tròn lớn (biết rằng hai cách xếp được gọi là giống nhau khi xoay tam giác quanh tâm đường tròn lớn một góc nào đó thì được các số giống nhau nằm cùng vị trí). Giá trị $250\,236P$ bằng bao nhiêu?



Trả lời:

CÂU 20

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F nằm trên đường tròn như hình vẽ.



Ta có thể tạo nên các đẳng thức vectơ có dạng như hình dưới đây. Biết rằng mỗi ô chỉ điền một chữ cái. Ở vế trái của đẳng thức, các chữ cái được điền vào ô đôi một khác nhau. Xác suất để thu được một đẳng thức đúng là bao nhiêu (tính tổng tử số và mẫu số khi kết quả được viết dưới dạng phân số tối giản).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$$

Trả lời:

1	2	9	7
---	---	---	---

----- **HẾT** -----