

Câu 1. (5,00 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 8xy}} \geq 1.$$

Câu 2. (5,00 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn: Với mỗi số nguyên dương m , nếu $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ là toàn bộ các ước dương của m thì

$$f(d_1)f(d_2)\cdots f(d_n) = m.$$

Câu 3. (5,00 điểm)

Cho các số nguyên a, b, c và số nguyên tố p thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = p$. Chứng minh rằng abc là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên.

Câu 4. (5,00 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao kẻ từ B, C cắt (O) lần lượt tại E, F và cắt nhau tại H . Gọi (C_1) là đường tròn qua E, H và tiếp xúc CH tại H ; (C_2) là đường tròn qua F, H và tiếp xúc BH tại H . Gọi G là giao điểm của (C_1) và (C_2) khác điểm H .

a) Chứng minh rằng: $AG \perp GH$.

b) Chứng minh rằng: Điểm G nằm trên đường tròn (O) .

Câu 1. (5,00 điểm)

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{x_1 + 2^2 x_2 + 3^2 x_3 + \dots + (n-1)^2 x_{n-1}}{n^2(n^2 - 1)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ với $u_n = (n+1)^4 x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 2. (5,00 điểm)

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên thuộc tập $S = [-6; 6]$. Biết rằng $\left| P(3 + \sqrt{3}) \right| < \frac{1}{300}$. Chứng minh $P(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 3. (5,00 điểm)

Gọi X là tập hợp các số nguyên dương không vượt quá 2025. Xét tất cả các tập hợp A là tập con của X thỏa mãn “Nếu x, y là hai phần tử bất kỳ của A thì $|x - y| \notin \{20; 30\}$ ”. Hỏi số phần tử nhiều nhất trong những tập hợp A đó là bao nhiêu?

Câu 4. (5,00 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn không cân. Đường tròn (I) bàng tiếp góc A tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng đi qua trung điểm M của đoạn thẳng BC song song với AC cắt đường thẳng IC tại J .

- Chứng minh ba điểm E, J, F thẳng hàng.
- Gọi P là giao điểm của đường thẳng AD và đường tròn (I) khác D . Đường tròn ngoại tiếp tam giác (BDP) cắt đường thẳng DE tại Q khác D . Chứng minh tam giác MQI vuông.