TRẦN QUỐC NGHĨA

2021



Tài liệu học tập HKII

TOÁN

10

Tóm tắt lí thuyết
Phân dạng bài tập

TOÁN HỌC BẮC – TRUNG – NAM

GV. TRẦN QUỐC NGHĨA
ĐT: 098 373 4349

TÀI LIỆU HỌC TẬP HỌC KÌ II

TOÁN 10

NĂM HỌC 2020 – 2021

Trường THPT .....

Họ và tên học sinh: .....

Lớp: ..... *ĐT:*.....

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 10 HỌC KÌ II

NĂM HỌC 2020-2021

Chủ đề 4. BẤT ĐẲNG THỨC BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. BẤT ĐẲNG THỨC 3

Dạng 1. Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất 3
Dạng 2. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy (AM-GM) 7
Dạng 3. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy Schwarz 12
Dạng 4. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT C.B.S 14
Dạng 5. Chứng minh BĐT dựa vào tọa độ vectơ 16
Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối 18
Dạng 7. Sử dụng phương pháp làm trội 20
Dạng 8. Ứng dụng BĐT để giải PT, HPT, BPT 22
Bài tập trắc nghiệm chủ đề 1: Bất đẳng thức 24

2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT 27

Dạng 1. Dùng tam thức bậc hai 27
Dạng 2. Dùng BĐT Cauchy 29
Dạng 3. Dùng BĐT C.B.S 32
Dạng 4. Dùng BĐT chứa dấu giá trị tuyệt đối 34
Dạng 5. Dùng tọa độ vectơ 36
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 38
BÀI TẬP TỔNG HỢP PHẦN 1 VÀ 2 40
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN 1 VÀ 2 43

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ BPT BẬC NHẤT MỘT ẨN .....

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình 46
Dạng 2. Bất phương trình tương đương 49
Dạng 3. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn 50
Dạng 4. Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 51
Dạng 5. Bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số 53
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 56

4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT BPT QUI VỀ BPT BẬC NHẤT MỘT ẨN

Dạng 1. Xét dấu biểu thức 60
Dạng 2. Giải bất phương trình tích 63
Dạng 3. Giải bất phương có ẩn ở mẫu 64
Dạng 4. Dấu nhị thức trên một miền 66
Dạng 5. Giải PT, BPT chứa dấu giá trị tuyệt đối 67
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 68

5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ BPT BẬC NHẤT HAI ẨN 71

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn 71
Dạng 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 72
Dạng 3. Một ví dụ áp dụng vào kinh tế 73
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 76

6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 81

Dạng 1. Xét dấu biểu thức 81
Dạng 2. Giải bất phương trình bậc hai 83
Dạng 3. Giải bất phương trình tích, thương 85
Dạng 4. Giải hệ bất phương bậc hai 87
Dạng 5. Phương trình & Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối 88
Dạng 6. Phương trình & Bất phương trình chứa căn thức 90
Dạng 7. Bài toán chứa tham số trong phương trình & bất phương trình 94
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 100
BÀI TẬP TỔNG HỢP 102
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP PHẦN 3-4-5 106

7. TRÍCH ĐỀ THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG 115

A – BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI 115
B - BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI 117
C - BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC 118

Chủ đề 5. THỐNG KÊ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT 123

B. MỘT SỐ VÍ DỤ 126

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 134

1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT 134
2. BIỂU ĐỒ 135
3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ - MỐT 141
4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN 142

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN 144

Bài 1: BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT 144

Bài 2: BIỂU ĐỒ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT 147

Bài 3: SỐ TRUNG BÌNH CỘNG – MỐT – SỐ TRUNG VỊ 147

Bài 4: PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN 150

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 5 151

E. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM 164

PHẦN C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 164

PHẦN D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN 164

Chủ đề 6. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Vấn đề 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC 168

Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và rad 168

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến góc (cung) lượng giác 169

Dạng 3. Dựng các ngọn cung lượng giác trên đường tròn LG 170

Dạng 4. Độ dài của một cung tròn 172

Dạng 5. Tính các giá trị lượng giác của một cung khi biết một giá trị lượng giác của nó 173

Dạng 6. Rút gọn–Chứng minh 175

Dạng 7. Các dạng toán khác 179

Vấn đề 2. CUNG LIÊN KẾT 181

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác của một cung bằng cách rút về cung phần tư thứ nhất 181

Dạng 2. Tính giá trị biểu thức lượng giác 182

Dạng 3. Rút gọn–Chứng minh 183

Dạng 4. Hệ thức lượng trong tam giác 187

Vấn đề 3. CÔNG THỨC CỘNG 189

Dạng 1. Sử dụng trục tiếp các công thức để tính hay đơn giản biểu thức 189

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức 193

Dạng 3. Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số 196

Dạng 4. Hệ thức lượng trong tam giác 197

Vấn đề 4. CÔNG THỨC NHÂN 199

Dạng 1. Sử dụng trục tiếp các công thức để tính hay đơn giản biểu thức 199

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức 203

Dạng 3. Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số 205

Vấn đề 5. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI 206

Dạng 1. Biến đổi các biểu thức thành tổng 206

Dạng 2. Biến đổi các biểu thức thành tích 208

Dạng 3. Áp dụng công thức biến đổi để tính hay rút gọn một biểu thức lượng giác 209

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác 211

Dạng 5. Hệ thức lượng trong tam giác 215

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 219

A - ĐỀ BÀI 219

Bài 1: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC 219

Bài 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG 224

Bài 3: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 238

B - BẢNG ĐÁP ÁN 254

Chủ đề 7. TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

Vấn đề 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 255

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT 255

B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 257

Dạng 1. Tính toán các đại lượng 257
Dạng 2. Chứng minh hệ thức 260
Dạng 3. Dạng tam giác 262
Dạng 4. Giải tam giác và ứng dụng thực tế 264

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3 269

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3 274

Chủ đề 8. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG OXY

1. ĐƯỜNG THẲNG 289

Dạng 1. Chuyển đổi PTTQ ↔ PTTS ↔ PTCT 289
Dạng 2. Vị trí tương đối: đường–đường, điểm–đường 290
Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng dạng cơ bản) 294
Dạng 4. Phương trình đoạn chắn 299
Dạng 5. Khoảng cách – Góc 300
Dạng 6. Cách lập phương trình đường thẳng liên quan đến góc và khoảng cách 304
Dạng 7. Tìm hình chiếu và điểm đối xứng 307
Dạng 8. Phương trình đường thẳng đối xứng 309
Dạng 9. Bài toán phân giác 311
Dạng 10. Bài toán tìm điểm trên đường thẳng. Một ứng dụng của phương trình tham số 315
Dạng 11. Giải các bài toán về đường trong tam giác 317
Dạng 12. Giải các bài toán về đường thẳng liên quan đến tứ giác 323
Dạng 13. Diện tích tam giác 325
Dạng 14. Tìm điểm M trên đường d thỏa điều kiện 327
Dạng 15. Tìm GTNN của hàm số 329
Dạng 16. Phương trình đường thẳng có tham số 330
BÀI TẬP TỔNG HỢP 333

2. ĐƯỜNG TRÒN 340

Dạng 1. Phương trình đường tròn (C) 340
Dạng 2. Lập phương trình đường tròn (C) 343
Dạng 3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn 349
Dạng 4. Vị trí tương đối giữa hai đường tròn 352
Dạng 5. Tiếp tuyến với đường tròn 354
BÀI TẬP TỔNG HỢP 361

3. ELIP 368

Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip 368
Dạng 2. Lập phương trình elip 369
Dạng 3. Tìm điểm trên elip– Tương giao 371
BÀI TẬP TỔNG HỢP 375

TRÍCH ĐỀ ĐH-CĐ-THPTQG 377

A - ĐƯỜNG THẲNG 377
B - ĐƯỜNG TRÒN 385
C – ELIP 391

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 395

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG. 395
A - CÁC KHÁI NIỆN CƠ BẢN 395
B - PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 397
C - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI 401
D - GÓC 407
E - KHOẢNG CÁCH - HÌNH CHIẾU - ĐỐI XỨNG 409
§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN 413
A - CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN 413
B - PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN 416
C - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI – TIẾP TUYẾN 418
§3. ELIP 422
A - CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN 422
B - PHƯƠNG TRÌNH ELIP 424
C - ĐIỂM THUỘC ELIP 427
D - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI 428
BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM 429

Chủ đề 4 BẤT ĐẲNG THỨC BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. BẤT ĐẲNG THỨC

Tóm tắt lí thuyết

1. Tính chất:

Điều kiện		Nội dung	
Cộng hai vế với số bất kì		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
Bắc cầu		$a < b$ và $b < c \Leftrightarrow a < c$	(2)
Nhân hai vế	$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(3a)
	$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(3b)
Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều		$\left.\begin{array}{l} a<b \\ c<d \end{array}\right\} \Leftrightarrow a+c<b+d$	(4)
Nhân 2 vế BĐT khi biết nó dương: $a > 0, c > 0$		$\left.\begin{array}{l} 0<a<b \\ 0<c<d \end{array}\right\} \Leftrightarrow ac<bd$	(5)
Nâng lên lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(6a)
	Mũ chẵn	$0 \le a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(6b)
Lấy căn hai vế	$a \ge 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(7a)
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(7b)
Nghịch đảo	a, b cùng dấu	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(8a)
	a, b khác dấu	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	(8b)

✍ ***Lưu ý:***
- ✓ ***Không*** *có qui tắc chia hai về bất đẳng thức cùng chiều.*
- ✓ *Ta chỉ nhân hai vế bất đẳng thức khi biết chúng dương.*
- ✓ *Cần nắm vững các hằng đẳng thức đáng nhớ và cách biến đổi.*

2. Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác:

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta có:

- $a, b, c > 0$
- $|a-b| < c < a+b$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối:

- $-|x| \le x \le |x|$, *với mọi số thực x*
- $|x| \ge 0; |x| \ge x; |x| \ge -x$, *với mọi số thực x*
- $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ *với* $a \ge 0$
- $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ *hoặc* $x \ge a$ *với* $a \ge 0$
- *Định lí:* $\forall a, b$ *ta có:* $\big||a|-|b|\big| \le |a+b| \le |a|+|b|$.

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cô-si hay AM-GM)

- ***Định lí***: *Với hai số không âm a, b ta có:*

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}} \text{ hay } \boxed{a+b \ge 2\sqrt{ab}} \text{ hay } \boxed{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b.

- ***Hệ quả 1***: *Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.*

Tức là với hai số dương a, b có a + b = S không đổi thì:

$$2\sqrt{ab} \le S \Leftrightarrow ab \le \frac{S^2}{4} \Rightarrow (ab)_{\max} = \frac{S^2}{4}, \text{ đạt được khi } a = b$$

Ý nghĩa hình học: *Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.*

- ***Hệ quả 2***: *Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.*

Tức là với hai số dương a, b có a. b = P không đổi thì:

$$a+b \ge 2\sqrt{P} \Rightarrow (a+b)_{\min} = 2\sqrt{P}, \text{ đạt được khi } a = b$$

Ý nghĩa hình học: *Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.*

- ***Mở rộng***:

① *Với các số a, b, c không âm, ta có:*

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \text{ hay } a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \text{ hay } \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

② *Với n số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ không âm, ta có:* $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

5. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki (chứng minh trước khi dùng)

❖ ***Dạng tổng quát:***

Cho 2n số thực tùy ý $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$,khi đó:

✓ ***Dạng 1***: $\boxed{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

✓ ***Dạng 2***: $\boxed{|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

✓ ***Dạng 3***: $\boxed{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \ge 0$.

❖ ***Hệ quả:***

✓ *Nếu* $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=c$ *là hằng số thì:*

$$\min\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)=\frac{c^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}$$

✓ *Nếu* $x_1^2+x_1^2+...+x_n^2=c^2$ *là hằng số thì:*

$$\max\left(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\right)=|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}\geq 0$$

$$\max\left(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\right)=-|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}\leq 0$$

❖ ***Trường hợp đặc biệt:***

Cho a, b, x, y là những số thực, ta có:

✓ ***Dạng 1***: $\boxed{(ax+by)^2\leq\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$. *Dấu "="* $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

✓ ***Dạng 2***: $\boxed{|ax+by|\leq\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}}$. *Dấu "="* $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

✓ ***Dạng 3***: $\boxed{ax+by\leq\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}}$. *Dấu "="* $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\geq 0$.

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để chứng minh $A>B$ *bằng định nghĩa, ta lựa chọn theo các hướng sau:*

Hướng 1. *Chứng minh* $A-B>0$

Hướng 2. *Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.*

Hướng 3. *Xuất phát từ một bất đẳng thức đúng.*

Hướng 4. *Biến đổi vế trái hoặc vế phải thành vế còn lại.*

Chú ý: *Với các hướng 1 và hướng 2 công việc thường là biến đổi* $A-B$ *thành tổng các đại lượng không âm. Và với các bất đẳng thức* $A-B\geq 0$ *chúng ta cần chỉ ra dấu "=" xảy ra khi nào ?*

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.1 Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a^2+b^2\geq 2ab$

② $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$

③ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

④ Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

⑤ $a^3+b^3\geq a^2b+b^2a=ab(a+b)$

⑥ $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\geq\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.1 Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$ ② $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc-ca)$

③ $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$ ④ $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a(a^2b-a+c+1)$

⑤ $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$ ⑥ $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

⑦ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$, với a, b, $c>0$ ⑧ $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, với a, b, $c\ge 0$

1.2 Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, với a, $b\ge 0$ ② $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$

③ $a^4+3\ge 4a^2$ ④ $a^3+b^3+c^3\ge abc$, với a,b,c ≥ 0

⑤ $a^4+b^4\le\frac{a^6}{b^2}+\frac{b^6}{a^2}$, với a, b $\ne 0$ ⑥ $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$

⑦ $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$, với a, $b>1$ ⑧ $(a^5+b^5)(a+b)\ge(a^4+b^4)(a^2+b^2)$, với $ab>0$

1.3 Cho a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$. Chứng minh $\boxed{a^2+b^2\ge 2ab}$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge 8abc$ ② $(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4)\ge 256abcd$

③ $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4abcd$

1.4 Cho a, b, $c\in\mathbb{R}$. Chứng minh $\boxed{a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca}$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $(a+b+c)\le 3(a^2+b^2+c^2)$ ② $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$

③ $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ ④ $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

⑤ $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$, với a, b, $c>0$ ⑥ $a^4+b^4+c^4\ge abc$, với $a+b+c=1$

1.5 Cho a, b, c, $d>0$. Chứng minh rằng: $\boxed{\text{nếu } \frac{a}{b}<1 \text{ thì } \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}}$ (3). Áp dụng bất đẳng thức (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$ ② $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

③ $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$

1.6 Cho $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\boxed{a^3+b^3 \ge a^2b+b^2a = ab(a+b)}$ (4). Áp dụng bất đẳng thức (4) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{a^3+b^3}{ab}+\dfrac{b^3+c^3}{bc}+\dfrac{c^3+a^3}{ca} \ge 2(a+b+c)$

② $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{1}{abc},\ a,\ b,\ c>0$

③ $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1} \le 1$, với $abc=1$

④ $\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1} \le 1$, với $a,\ b,\ c>0$ và $abc=1$

⑤ $\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(c^3+a^3\right)} \ge 2(a+b+c),\ a,\ b,\ c \ge 0$

1.7 Cho $a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức sau (BĐT Min-côp-xki):

$$\boxed{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}} \quad (5).$$

Áp dụng (5):

① Cho $a,\ b \ge 0$ thỏa $a+b=1$. Chứng minh: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \ge \sqrt{5}$

② Tìm GTNN của $P=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$, với $a,b \ne 0$

③ Cho $x,\ y,\ z>0$ thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh: $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$

Dạng 2. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy (AM-GM)

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Các dạng của bất đẳng thức Cauchy (AM-GM):

- *Với* $x, y \ge 0$ *thì* $\begin{cases} x+y \ge 2\sqrt{xy} & ① \\ x^2+y^2 \ge 2xy & ② \end{cases}$. *Dấu "=" xảy ra khi* $x = y$.
- *Với* $x, y \in \mathbb{R}$ *thì* $\begin{cases} \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy & ③ \\ (x+y)^2 \ge 4xy & ④ \end{cases}$. *Dấu "=" xảy ra khi* $x = y$.
- *Với* $x, y, z \ge 0$ *thì* $\begin{cases} x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} & ⑤ \\ \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \ge xyz & ⑥ \end{cases}$. *Dấu "=" khi* $x = y = z$

B. BÀI TẬP MẪU

Loại 1: Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân và ngược lại:

VD 1.2 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $(a+b)^2 \ge 4ab$ ② $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$ ③ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ ④ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$

Loại 2: Tách cặp nghịch đảo

VD 1.3 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\ (\forall a,b>0)$ ② $\frac{x}{2}+\frac{18}{x}\geq 6\ (\forall x>0)$

③ $\frac{x}{2}+\frac{2}{x-2}\geq 3\ \ (\forall x>2)$ ④ $a+\frac{1}{a}\geq\frac{10}{3}\ \ (\forall a\geq 3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Loại 3: Sử dụng bổ đề suy luận từ BĐT Cauchy (AM-GM):

Dạng 1: $\boxed{(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4 \ \ hay\ \ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}}$ (1). *Dấu "=" xảy ra khi x = y*

Dạng 2: $\boxed{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9 \ \ hay\ \ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}}$ (2). *Dấu "=" xảy ra khi x=y=z*

VD 1.4 Cho $a,\ b>0$. Chứng minh $\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}}$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ (\forall a,b,c>0)$

② $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}\right)\ \ (\forall a,b,c>0)$

Loại 4: Đặt ẩn phụ để áo dụng BĐT Cauchy:

VD 1.5 Cho $a,\ b,\ c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức (BĐT Nesbit) sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

HD: Đặt $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y \\ a+b=z \end{cases}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Loại 1: Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân và ngược lại:

1.8 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a^2+b^2\ge 2ab$ ② $(a+b)(1+ab)\ge 4ab$

③ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ ④ $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$

⑤ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 8$ ⑥ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{16}{a+b+c+d}$

⑦ $(1+a+b)(a+b+ab)\ge 9ab$ ⑧ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8\ge 64ab(a+b)^2$

⑨ $3a^3+7b^3\ge 9ab^2$ ⑩ $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

⑪ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ ⑫ $\frac{a+4}{\sqrt{a+3}}\ge 2,\forall a>-3$

1.9 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ ② $ab+bc+ca\ge\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

③ $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$ ④ $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

⑤ $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge a+b+1$ ⑥ $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

1.10 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$ ② $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c$

③ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ④ $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$

⑤ $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$ ⑥ $\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge a^2+b^2+c^2$

Loại 2: Tách cặp nghịch đảo

1.11 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a+\frac{1}{a^2}\ge\frac{9}{4}\quad(\forall a\ge 2)$ ② $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\quad(\forall a\in\mathbb{R})$

③ $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}}\ge 6\quad(\forall x>1)$ ④ $a+\frac{1}{a(a-b)}\ge 3\quad(\forall a>b>0)$

Loại 3: Sử dụng bổ đề suy luận từ BĐT Cauchy (AM-GM):

1.12 Cho $a,\ b>0$. Chứng minh $\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}}$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau, với $a,\ b,\ c>0$:

① $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$ ② $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$

③ $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le 1$ với $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$

④ $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}\right)$

1.13 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

1.14 Cho a, b, $c>0$. Chứng minh $\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}}$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\ge\frac{9}{a+b+c}$ $(\forall a,b,c>0)$

② $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$ $(\forall a,b,c>0)$

③ $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\le\frac{3}{4}$ $(\forall x>y>z>0; x+y+z=1)$

④ $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$ $(\forall a,b,c>0)$

⑤ $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$ $(\forall a,b,c>0)$

Loại 4: Đặt ẩn phụ để áp dụng BĐT Cauchy:

1.15 Cho $x>2014$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$\frac{\sqrt{x-2013}}{x+2}+\frac{\sqrt{x-2014}}{x}\le\frac{1}{2\sqrt{2015}}+\frac{1}{2\sqrt{2014}}$. *HD: Đặt* $\begin{cases}a=\sqrt{x-2013}\ge 0\\ b=\sqrt{x-2014}\ge 0\end{cases}$

1.16 Cho $x,y,z>0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\le\frac{3}{4}$. *HD: Đặt* $\begin{cases}a=2x+y+z>0\\ b=x+2y+z>0\\ c=x+y+2z>0\end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy Schwarz

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thực chất bất đẳng thức Cauchy Schwarz là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Bunhiacôpski mà ở đây dễ dàng hình dung, tạm gọi là bất đẳng thức cộng mẫu số.

1. *Cho* $a, b \in \mathbb{R}$ *và* $x, y > 0$. *Áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho bộ hai số:* $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}, \frac{b}{\sqrt{y}}\right)$; $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}\right)$

ta được:

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)(x+y) \overset{\text{Bunhiacôpski}}{\geq} \left(\frac{a}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}} \quad \textbf{(1)}$$

2. *Cho* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *và* $x, y, z > 0$. *Áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho bộ ba số:* $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}, \frac{b}{\sqrt{y}}, \frac{c}{\sqrt{z}}\right)$;

$\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ *ta được:*

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z) \overset{\text{Bunhiacôpski}}{\geq} \left(\frac{a}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}+\frac{c}{\sqrt{z}}.\sqrt{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}} \quad \textbf{(2)}$$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.6 Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$, với $a, b, c > 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.7 Với $a,\ b,\ c \ge 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

① $\dfrac{a}{a+2bc}+\dfrac{b}{b+2ac}+\dfrac{c}{c+2ab}\ge 1$ ② $\dfrac{a}{2a+bc}+\dfrac{b}{2b+ac}+\dfrac{c}{2c+ab}\le 1$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.17 Chứng minh:

① $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\ge 1$, với $a,\ b,\ c>0$

② $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge \dfrac{3}{2}$, với $a,\ b,\ c>0$

③ $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$

④ $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+c)^2}\ge \dfrac{9}{4(a+b+c)}$, với $a,\ b,\ c>0$

⑤ $\dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$, với $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c=3$.

1.18 Với $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

① $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$ ② $\dfrac{a^3}{b+c-a}+\dfrac{b^3}{c+a-b}+\dfrac{c^3}{a+b-c}\ge a^2+b^2+c^2$

Dạng 4. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT C.B.S

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$	*Cho* $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$
① $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$	❶ $(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$
② $\lvert ax+by\rvert \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$	❷ $\lvert ax+by+cz\rvert \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$
③ $ax+by \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\ge 0$	❸ $ax+by+cz \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\ge 0$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.8 Chứng minh rằng:

① Nếu $x^2+y^2=1$ thì $\lvert x+y\rvert \le \sqrt{2}$.

② Nếu $4x-3y=15$ thì $x^2+y^2 \ge 9$.

Giải

① Ta có: $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \le 2(x^2+y^2) = 2$ nên $\lvert x+y\rvert \le \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $4x-5y=15 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-5$.

Do đó: $x^2+y^2 = x^2+\left(\frac{4}{3}x-5\right)^2 = x^2+\frac{16}{9}x^2-\frac{40}{3}x+25$

$= \frac{25}{9}x^2-\frac{40}{3}x+25 = \left(\frac{5}{3}x-4\right)^2+9 \ge 9$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} \frac{5}{3}x-4=0 \\ 4x-3y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12/5 \\ y=-9/5 \end{cases}$.

VD 1.9 Chứng minh rằng: Nếu $2x+3y=7$ thì $2x^2+3y^2 \ge \frac{49}{5}$.

Giải

Ta có: $7^2 = (2x+3y)^2 = \left(\sqrt{2}.x\sqrt{2}+\sqrt{3}.x\sqrt{3}\right) \le (2+3)(2x^2+3y^2) = 5(2x^2+3y^2)$

$\Rightarrow 2x^2+3y^2 \ge \frac{49}{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi ta có: $\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=7 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{7}{5}$.

VD 1.10 Chứng minh rằng: ① Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|3x+4y|\le 5$

② Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|x+2y|\le\sqrt{5}$ ③ Nếu $3x+4y=1$ thì $x^2+y^2\ge\frac{1}{25}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.19 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|3x+4y|\le 5$

② Nếu $x^2+2y^2=8$ thì $|2x+3y|\le 2\sqrt{17}$

③ Nếu $x^2+4y^2=1$ thì $|x-y|\le\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ Nếu $36x^2+16y^2=9$ thì $|y-2x|\le\frac{5}{4}$

1.20 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① Nếu $x\in[1;3]$ thì $A=6\sqrt{x-1}+8\sqrt{3-x}\le 10\sqrt{2}$

② Nếu $x\in[1;5]$ thì $B=3\sqrt{x-1}+4\sqrt{5-x}\le 10$

③ Nếu $x\in[-2;1]$ thì $C=\sqrt{1-x}+\sqrt{2+x}\le\sqrt{6}$

④ Nếu $x\in[4;13]$ thì $D=2\sqrt{x-4}+\sqrt{13-x}\le 3\sqrt{5}$

Dạng 5. Chứng minh BĐT dựa vào tọa độ vectơ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. $\vec{a}=(x;y)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

2. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

3. $AB+BC\geq AC$, *dấu "=" xảy ra khi B nằm giữa A và C.*

4. $|\vec{u}|-|\vec{v}|\leq|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *cùng hướng*

5. $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *cùng hướng*

6. $|\vec{u}.\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{v}|$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.11 Chứng minh rằng: $\forall x,y,z$ ta luôn có $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{y^2+yz+z^2}$

Giải:

Trong mặt phẳng (Oxy), xét: $\vec{a}=\left(x+\frac{y}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ và $\vec{b}=\left(-x-\frac{z}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

Suy ra $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{y}{2}-\frac{z}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$.

$|\vec{a}|=\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2}$; $|\vec{b}|=\sqrt{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}z^2}$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{y-z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}$

Ta có $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2}+\sqrt{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{3}{4}z^2}\geq\sqrt{\left(\frac{y-z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}$

$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{y^2+yz+z^2}$ (đpcm)

VD 1.12 Với mọi x, y, z thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82}$.

Giải:

Trong mặt phẳng (Oxy)

Đặt: $\vec{a}=\left(x;\frac{1}{x}\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$;

$\vec{b}=\left(y;\frac{1}{y}\right)\Rightarrow|\vec{b}|=\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}$

$\vec{c}=\left(z;\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \left|\vec{c}\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{z^2}}$

Suy ra $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(x+y+z;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$

Ta có $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\geq\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$

Lại có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\geq\frac{3}{\frac{x+y+z}{3}}=9$

Vậy $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82}$

VD 1.13 CMR: $\sqrt{\left(a+c\right)^2+b^2}+\sqrt{\left(a-c\right)^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$

VD 1.14 Chứng minh rằng với mọi x, y, z ta có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\geq\sqrt{3}\left(x+y+z\right).$$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.21 Chứng minh bất đẳng thức sau:

① $\sqrt{a^2+4b^2+6a+9}+\sqrt{a^2+4b^2-2a-12b+10}\geq 5$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$

② $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}\geq\sqrt{b^2+cb+c^2}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$

③ $\sqrt{(a-b)^2+c^2}+\sqrt{(a+b)^2+c^2}\geq 2\sqrt{a^2+c^2}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$

④ $-1\leq\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}<1$, với $x\in\mathbb{R}$

⑤ $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$, với $a>c>0,\ b>c$

Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. $-|x|\leq x\leq|x|$, *với mọi số thực* x

2. $|x|\geq 0;|x|\geq x;|x|\geq -x$, *với mọi số thực* x

3. $|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a$ *với* $a\geq 0$

4. $|x|\geq a\Leftrightarrow x\leq -a$ *hoặc* $x\geq a$ *với* $a\geq 0$

5. *Định lí:* $\forall a,\ b$ *ta có:* $\big||a|-|b|\big|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.15 ① Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có $|a\pm b|\ge|a|-|b|$.

② Biết rằng $|a|>2|b|$. Chứng minh rằng $|a|<2|a-b|$.

Giải

Ta có: $|a|=|(a\pm b)\mp b|\le|a\pm b|+|b|\Rightarrow|a|-|b|\le|a\pm b|$

Ta biến đổi: $|a|>2|b|=2|a-(a-b)|>2(|a|-|a-b|)\Leftrightarrow|a|<2|a-b|$

VD 1.16 Chứng minh rằng:

① Nếu $x\ge y\ge 0$ thì $\dfrac{x}{x+1}\ge\dfrac{y}{y+1}$. ② Với hai số a, b tuỳ ý, ta có $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

Giải

Với $x\ge y\ge 0$, ta có: $\dfrac{x}{x+1}\ge\dfrac{y}{y+1}\Leftrightarrow x(y+1)\ge y(x+1)\Leftrightarrow a\ge y$ (luôn đúng).

Vì $|a-b|\le|a|+|b|$, áp dụng kết quả câu a), ta có:

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

VD 1.17 Với các số a, b tùy ý. Chứng minh rằng: $|a-b|\le|a|+|b|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.22 Với các số a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng:

① $|a+b+c|\le|a|+|b|+|c|$ ② $|a-b|+|b-c|\ge|a-c|$

③ $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} \le \dfrac{|b|}{1+|b|}$ ④ $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$

1.23 Chứng minh rằng: nếu $x \ge y \ge 0$ thì $\dfrac{x}{x+1} \ge \dfrac{y}{y+1}$

1.24 Chứng minh rằng: $x+|x| \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Áp dụng: Chứng minh rằng $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ xác định với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.25 Chứng minh rằng:

① Nếu $|a|<1$, $|b-1|<10$, $|a-c|<10$ thì $|ab-c|<20$.

② Nếu $|a|<1$, $|b|<1$ thì $|a+b|<|1+ab|$.

Dạng 7. Sử dụng phương pháp làm trội

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để chứng minh $A<B$, ta làm trội A thành C ($A \le C$), trong đó C là dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn, sau đó chứng minh $C \le B$ (biểu thức C đóng vai trò trung gian để so sánh A và B).

- *Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ là cố gắng biểu diễn mỗi nhân tử a_k của S_n dưới dạng hiệu 2 số hạng liên tiếp nhau $a_k = m_k - m_{k+1}$. Khi đó:*

$$S_n = (m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + (m_n - m_{n+1}) = m_1 - m_{n+1}$$

- *Phương pháp chung để tính tích hữu hạn $P_n = a_1.a_2.a_3.\ldots a_n$ là cố gắng biểu diễn mỗi nhân tử a_k của P_n dưới dạng thương 2 số hạng liên tiếp nhau $a_k = \dfrac{m_k}{m_{k+1}}$. Khi đó:*

$$P_n = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_3} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n+1}} = \frac{m_1}{m_{n+1}}$$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.18 CMR: $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} < 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Giải

Ta có: $\dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$

……

$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Do đó VT (1)= $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1$ với $n\in\mathbb{N}^*$

VD 1.19 CMR: $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\geq\frac{4}{3}$ (1) với $n\in\mathbb{N}^*$

Giải

Ta có: $1+\frac{1}{k^2+2k}=\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+1}{k+2}$

$\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}$

$1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}$

……

$1+\frac{1}{n^2+2n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}$

Do đó, VT (1): $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{2n+2}{n+2}=2-\frac{2}{n+2}\geq\frac{4}{3}$

Vậy $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\geq\frac{4}{3}$ với $n\in\mathbb{N}^*$

VD 1.20 Cho $k>0$, chứng minh: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Áp dụng: CM: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.26 Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

① $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}<1$ ② $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$

③ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2}$

1.27 Cho $k>0$, chứng minh $\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. *Áp dụng*: CM: $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<2$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Dạng 8. Ứng dụng BĐT để giải PT, HPT, BPT

- ***Loại 1: Tổng hai số không âm***: $\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\g(x)=0\end{cases}$
- ***Loại 2: Phương pháp đối lập***:
  - ✓ *Giải phương trình* $f(x)=g(x)$ *(*)*
  - ✓ *Nếu chứng minh được* $\begin{cases}f(x)\ge M\\g(x)\le M\end{cases}$ *thì* (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=M\\g(x)=M\end{cases}$
- ***Loại 3: Sử dụng tính chất:***
  - ✓ *Giải phương trình* $f(x)+g(x)=M+N$ *(*)*
  - ✓ *Nếu chứng minh được* $\begin{cases}f(x)\le M\\g(x)\le N\end{cases}$ *thì* (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=M\\g(x)=N\end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.21 Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$.

Giải

Nhận xét rằng: VT $=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}\ge 2$.

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: VT $=2\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$.

VD 1.22 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}|x-y|+|x+y|=2 & (1)\\ xy=1 & (2)\end{cases}$.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$4=(x-y)^2+(x+y)^2+2|x^2-y^2|\ =2(x^2+y^2)+2|x^2-y^2|\ge 2(x^2+y^2)\ge 4xy=4$

Vậy, hệ tương đương với: $\begin{cases}2|x^2-y^2|=0\\ x=y\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\x=y=-1\end{array}\right.$.

Vậy, hệ có 2 nghiệm $(1;1)$ và $(-1;-1)$.

VD 1.23 Giải phương trình sau: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=x^2-10x+27$

VD 1.24 Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.28 Giải các phương trình sau:

① $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{-3x^2+3x+1}$.

② $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

③ $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+4$

④ $\sqrt{2x-1}+\sqrt{19-2x}=\dfrac{6}{-x^2+10x-24}$

⑤ $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=1-x^2+2x$.

⑥ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

⑦ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{2x^2+4x+3}=2-2x-x^2$

⑧ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=\sqrt{24x^2-2x-x^2}$

Bài tập trắc nghiệm chủ đề 1: Bất đẳng thức

TN1.1 Nếu $a>b$ và $c>d$. thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?
A. $ac>bd$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $a-d>b-c$. **D.** $-ac>-bd$.

TN1.2 Nếu $m>0$, $n<0$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?
A. $m>-n$. **B.** $n-m<0$. **C.** $-m>-n$. **D.** $m-n<0$.

TN1.3 Nếu a,b và c là các số bất kì và $a>b$ thì bất đẳng nào sau đây đúng?
A. $ac>bc$. **B.** $a^2<b^2$. **C.** $a+c>b+c$. **D.** $c-a>c-b$.

TN1.4 Nếu $a>b$ và $c>d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?
A. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $ac>bd$. **D.** $a+c>b+d$.

TN1.5 Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a?
A. $6a>3a$. **B.** $3a>6a$. **C.** $6-3a>3-6a$. **D.** $6+a>3+a$.

TN1.6 Nếu a,b,c là các số bất kì và $a<b$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?
A. $3a+2c<3b+2c$. **B.** $a^2<b^2$. **C.** $ac>bc$. **D.** $ac<bc$.

TN1.7 Nếu $a>b>0$, $c>d>0$ thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?
A. $ac>bc$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $a^2>b^2$. **D.** $ac>bd$.

TN1.8 Nếu $a>b>0$, $c>d>0$. thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?
A. $a+c>b+d$. **B.** $ac>bd$. **C.** $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. **D.** $\frac{a}{b}>\frac{d}{c}$.

TN1.9 Sắp xếp ba số $\sqrt{6}+\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$ và $\sqrt{3}+\sqrt{16}$ theo thứ tự từ bé đến lớn thì thứ tự đúng là
A. $\sqrt{19},\sqrt{3}+\sqrt{16},\sqrt{6}+\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{16},\sqrt{19},\sqrt{6}+\sqrt{13}$.
C. $\sqrt{19},\sqrt{6}+\sqrt{13},\sqrt{3}+\sqrt{16}$. **D.** $\sqrt{6}+\sqrt{13},\sqrt{3}+\sqrt{16},\sqrt{19}$.

TN1.10 Nếu $a+2c>b+2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $-3a>-3b$. **B.** $a^2>b^2$. **C.** $2a>2b$. **D.** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

TN1.11 Nếu $2a>2b$ và $-3b<-3c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $a<c$. **B.** $a>c$. **C.** $-3a>-3c$. **D.** $a^2>c^2$.

TN1.12 Một tam giác có độ dài các cạnh là $1,2,x$ trong đó x là số nguyên. Khi đó, x bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

TN1.13 Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây có thể nhận giá trị âm?
A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1. **C.** a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

TN1.14 Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây luôn luôn dương.
A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1. **C.** a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

TN1.15 Trong các số $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $2+\sqrt{3}$, 4
A. số nhỏ nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $2+\sqrt{3}$ **B.** số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là 4.
C. số nhỏ nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$. **D.** số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$.

TN1.16 Cho hai số thực a,b sao cho $a>b$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a^4>b^4$. **B.** $-2a+1<-2b+1$. **C.** $b-a<0$. **D.** $a-2>b-2$.

TN1.17 Nếu $0<a<1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\frac{1}{a}>\sqrt{a}$. **B.** $a>\frac{1}{a}$. **C.** $a>\sqrt{a}$. **D.** $a^3>a^2$.

TN1.18 Cho a,b,c,d là các số thực trong đó $a,c\neq 0$. Nghiệm của phương trình $ax+b=0$ nhỏ hơn nghiệm của phương trình $cx+d=0$ khi và chỉ khi

A. $\frac{b}{a}<\frac{c}{d}$. **B.** $\frac{b}{a}>\frac{c}{d}$. **C.** $\frac{b}{d}>\frac{a}{c}$. **D.** $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$.

TN1.19 Nếu $a+b<a$ và $b-a>b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab>0$. **B.** $b<a$. **C.** $a<b<0$. **D.** $a>0$ và $b<0$.

TN1.20 Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây **không đúng** ?

A. $a^2<ab+ac$. **B.** $ab+bc>b^2$

C. $b^2+c^2<a^2+2bc$. **D.** $b^2+c^2>a^2+2bc$.

TN1.21 Cho a là số thực bất kì, $P=\frac{2a}{a^2+1}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi a ?

A. $P>-1$. **B.** $P>1$. **C.** $P<-1$. **D.** $P\leq 1$.

TN1.22 Cho $Q=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ với a,b,c là ba số thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $Q\geq 0$ chỉ đúng khi a,b,c là những số dương.

B. $Q\geq 0$ chỉ đúng khi a,b,c là những số không âm.

C. $Q>0$. với a,b,c là những số bất kì.

D. $Q\geq 0$ với a,b,c là những số bất kì.

TN1.23 Số nguyên a lớn nhất sao cho $a^{200}<3^{300}$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

TN1.24 Cho hai số thực a,b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a+b|=|a|+|b|$ **B.** $|a+b|\leq|a|+|b|$ **C.** $|a+b|<|a|+|b|$ **D.** $|a+b|>|a|+|b|$

TN1.25 Cho hai số thực a,b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|-ab|<|a|.|b|$. **B.** $\left|\frac{a}{b}\right|>\frac{|a|}{|-b|}$ với $b\neq 0$.

C. Nếu $|a|<|b|$ thì $a^2<b^2$. **D.** $|a-b|>|a|-|b|$.

TN1.26 Cho hai số thực a,b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a-b|\leq|a|+|b|$. **B.** $|a-b|=|a|+|b|$. **C.** $|a-b|=|a|-|b|$. **D.** $|a-b|>|a|-|b|$.

TN1.27 Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực x ?

A. $|x|>x$. **B.** $|x|>-x$. **C.** $|x|^2>x^2$. **D.** $|x|\geq x$.

TN1.28 Nếu a,b là những số thực và $|a|\leq|b|$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a^2\leq b^2$. **B.** $\frac{1}{|a|}\leq\frac{1}{|b|}$ với $ab\neq 0$. **C.** $-b\leq a\leq b$. **D.** $a\leq b$.

TN1.29 Cho $a>0$. Nếu $x<a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $|x|<a$. **B.** $-x\le|x|$. **C.** $|x|<|a|$. **D.** $\dfrac{1}{|x|}>\dfrac{1}{a}$.

TN1.30 Nếu $|x|<a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $x<-a$. **B.** $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}$. **C.** $-|x|<-a$. **D.** $x<a$.

TN1.31 Cho $a\ge1, b\ge1$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng** ?

A. $a\ge2\sqrt{a-1}$. **B.** $ab\ge2a\sqrt{b-1}$. **C.** $ab<2b\sqrt{a-1}$. **D.** $2\sqrt{b-1}\le b$.

TN1.32 Điền dấu $(>,<,\ge,\le)$ thích hợp vào ô trống để được một bất đẳng thức đúng

A. Nếu a,b dương thì $\dfrac{ab}{a+b}\square\dfrac{a+b}{4}$.

B. Với a,b bất kỳ $2\left(a^2-ab+b^2\right)\square\ a^2+b^2$.

C. Nếu a,b,c dương thì $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\square\ 1$.

TN1.33 Cho a,b là các số thực. Xét tính đúng–sai của các mệnh đề sau:

A. $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge\dfrac{a^2+b^2}{2}$. ☐

B. $a^2+b^2+1\ge a+b+ab$. ☐

C. $a^2+b^2+9>3(a+b)+ab$. ☐

TN1.34 Cho a,b,c,d là các số dương. Hãy điền dấu $(>,<,\ge,\le)$ thích hợp vào ô trống

A. Nếu $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{a+b}{a}\square\dfrac{c+d}{c}$.

B. Nếu $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{a+b}{b}\square\dfrac{c+d}{d}$.

C. $a+b+c\ \square\ \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

D. $2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\ \square\ 2ab+a+b$.

TN1.35 Cho $a^2+b^2+c^2=1$. Hãy xác định tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

A. $ab+bc+ca\ge0$. ☐ **B.** $ab+bc+ca\ge-\dfrac{1}{2}$. ☐

C. $ab+bc+ca<1$. ☐ **D.** $ab+bc+ca\le1$. ☐

2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Tóm tắt lí thuyết

Khái niệm GTLN, GTNN của hàm số (biểu thức):

Xét hàm số $y = f(x)$ *với tập xác định D:*

- *M là GTLN của* $f(x)$ *trên D* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

  Kí hiệu: $\max f(x) = M$ khi $x = x_0$.

- *m là GTNN của* $f(x)$ *trên D* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

  Kí hiệu: $\min f(x) = m$ khi $x = x_0$.

- ***Chú ý**: - Biểu thức có thể không có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.*
  - Biểu thức có thể có cả hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Dùng tam thức bậc hai

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $P = m + \left[f(x) \right]^2 \ge m \Rightarrow \min P = m \Leftrightarrow f(x) = 0$
- $P = M - \left[f(x) \right]^2 \le M \Rightarrow \max P = M \Leftrightarrow f(x) = 0$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.1 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau: $P = a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b - 12$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.2 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau: $I = a^2 + b^2 + ab - 3a - 3b + 2014$

VD 1.3 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau: $H = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$

VD 1.4 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau: $G = x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 2x + 12y + 6z + 24$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.1 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $A = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 9$

② $B = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (x-y+4)^2$

③ $C = x^2y^2 + x^2 - 6xy + 4x - 3$

④ $D = x^2 + 15y^2 + xy + 8x + y + 2017$

⑤ $E = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$

⑥ $F = x^2y^2 + 2x^2 + 24xy + 16x + 191$

1.2 Cho a, b, c đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2$

② $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$

Dạng 2. Dùng BĐT Cauchy

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Hệ quả:

- *Nếu* $x,\ y>0$ *có* $S=x+y$ *không đổi thì* $P=xy$ *lớn nhất khi* $x=y$.
- *Nếu* $x,\ y>0$ *có* $P=xy$ *không đổi thì* $S=x+y$ *nhỏ nhất khi* $x=y$.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.5 Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau: $y=(2x+1)(2-3x)$, với $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.

Giải

Ta có: $y=(2x+1)(2-3x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-x\right)=\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}-x\right)$

Với $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{2}{3}$ thì $x+\frac{1}{2}\ge 0$ và $\frac{2}{3}-x\ge 0$, do đó sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$y\le\frac{1}{6}\left[\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-x\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{6}.\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{25}{864}$$

Từ đó suy ra $y_{\max}=\frac{25}{864}$, đạt được khi: $x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{12}$

VD 1.6 Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau: $y=(2x+1)(2-3x)$, với $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.

Giải

Ta có: $y=(2x+1)(2-3x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-x\right)=\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}-x\right)$

Với $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{2}{3}$ thì $x+\frac{1}{2}\ge 0$ và $\frac{2}{3}-x\ge 0$, do đó sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$y\le\frac{1}{6}\left[\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-x\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{6}.\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{25}{864}$$

Từ đó suy ra $y_{\max}=\frac{25}{864}$, đạt được khi: $x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{12}$

VD 1.7 Tìm giác trị nhỏ nhất của hàm số: $y=x+\frac{2}{x-1}$ với $x>1$.

Giải : Vì $x>1$ nên $x-1$ và $\frac{2}{x-1}$ là hai số dương.

Do đó: $y=x+\frac{2}{x-1}=1+x-1+\frac{2}{x-1}\ge 1+2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}=1+2\sqrt{2}$

Từ đó, suy ra $y_{\min}=1+2\sqrt{2}$, đạt được khi: $x-1=\frac{2}{x-1}\Rightarrow x=1+2\sqrt{2}$ (do $x>1$)

VD 1.8 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$

Giải

Với $1\le x\le 4$, ta có: $A^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\right)^2=3+2\sqrt{(x-1)(4-x)}$

Ta có: $3\le 3+2\sqrt{(x-1)(4-x)}\le 3+x-1+4-x=6\Leftrightarrow \sqrt{3}\le A\le \sqrt{6}$

Từ đó, suy ra:

- $A_{\max}=\sqrt{6}$, đạt được khi: $x-1=4-x\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.
- $A_{\min}=\sqrt{3}$, đạt được khi: $(x-1)(4-x)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=4$.

VD 1.9 Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

① $G=(x-3)(7-x)$, với $3\le x\le 7$ ② $H=(2x-1)(3-x)$, với $0,5\le x\le 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.10 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $K=\dfrac{(x+201)^2}{x}$, với $x>0$ ② $L=\dfrac{(4+x)(2+x)}{x}$, với $x>0$

③ $P=x^2+\dfrac{2}{x^3}$, với $x>0$ ④ $Q=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-2}$, với $x>2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.11 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

① $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$ ② $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{x+8}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.3 Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

① $A=3x^2\left(8-x^2\right)$ với $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$ ② $B=x(2-x)$ với $0\le x\le 2$

③ $C=(2x-1)(3-x)$ với $0,5\le x\le 3$ ④ $D=x\left(3-\sqrt{3}x\right)$ với $0\le x\le\sqrt{3}$

⑤ $E=4x(8-5x)$ với $0\le x\le 8/5$ ⑥ $F=4(x-1)(8-5x)$ với $1\le x\le 8/5$

1.4 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $A=x+\dfrac{4}{x}$, với $x>0$ ② $B=\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{36}{x+2}$, với $x>-2$

③ $C=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$, với $x>1$ ④ $D=x+\dfrac{2}{3x-1}$, với $x>\dfrac{1}{3}$

⑤ $E=2x+\dfrac{3}{x}$, với $x>0$ ⑥ $F=x+\dfrac{1}{x-1}$, với $x>1$

⑦ $G=\dfrac{(x+2)(8+x)}{x}$, với $x>0$ ⑧ $H=\dfrac{4x^2+9}{2x}$, với $x>0$

⑨ $I=\dfrac{9x^2-21x+25}{3x}$, với $x>0$ ⑩ $J=\dfrac{x^2+2x+4}{x}$, với $x>0$

1.5 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

① $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ ② $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$ ③ $y=2\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$

④ $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}$ ⑤ $y=4\sqrt{x+3}+5\sqrt{4-x}$ ⑥ $y=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{6-x}$

1.6 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$, với $a,\ b,\ c>0$

Dạng 3. Dùng BĐT C.B.S

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

✓ *Nếu* $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=c$ *là hằng số thì:*

$$\min\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)=\frac{c^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}$$

✓ *Nếu* $x_1^2+x_1^2+...+x_n^2=c^2$ *là hằng số thì:*

$$\max\left(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\right)=|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}\ge 0$$

$$\max\left(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\right)=-|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}\le 0$$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.12 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhát của biểu thức: $S=3x+4y$, biết $x^2+y^2=1$.

Giải

Ta có: $S^2=\left(3x+4y\right)^2\le\left(3^2+4^2\right)\left(x^2+y^2\right)=25\Leftrightarrow|3x+4y|\le 5\Leftrightarrow -5\le 3x+4y\le 5$.

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{3}{4}\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=3y\\ 9x^2+9y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=3y\\ 9x^2+16x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=3y\\ x=\pm\frac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}\\ x=-\frac{3}{5},\ y=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$$

Từ đó, suy ra:

- $S_{\max}=5$, đạt được khi $x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}$.
- $S_{\min}=5$, đạt được khi $x=-\frac{3}{5},\ y=-\frac{4}{5}$.

VD 1.13 Từ đó áp dụng tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=7a^2+11b^2$, biết $a,\ b$ thỏa mãn $3a-5b=8$.

Giải : Từ giả thiết, ta có $8=3a-5b=\frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{7}\,a-\frac{5}{\sqrt{11}}\sqrt{11}\,b$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai cặp số $\left(\frac{3}{\sqrt{7}};-\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$ và $\left(\sqrt{7}a;\sqrt{11}\,b\right)$, ta có

$$8^2=\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{7}\,a-\frac{5}{\sqrt{11}}\sqrt{11}\,b\right)^2\le\left(\frac{9}{7}+\frac{25}{11}\right)(7a^2+11b^2)\quad\Leftrightarrow\quad 7a^2+11b^2\ge\frac{2464}{137}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{3}{7a}=-\frac{5}{11b}\\ 3a-5b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}35a+33b=0\\ 3a-5b=8\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{52}{107}$ và $b=-\frac{140}{107}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2464}{137}$, khi $\begin{cases}a=\frac{52}{107}\\ b=-\frac{140}{107}\end{cases}$.

VD 1.14 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

① $P = 2x + y$, biết $x^2 + y^2 = 5$ ② $P = 4x + 2y$, biết $2x^2 + 3y^2 = 6$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.7 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

① $P = 3x + 4y$, biết $x^2 + y^2 = 1$ ② $P = 4\sqrt{3x+2} + \sqrt{9-x}$

③ $P = 2x + 7y$, biết $3x^2 + 8y^2 = 1$ ④ $P = 2x + y$, biết $2x^2 + 5y^2 = 8$

1.8 Hai số dương $x,\ y$ thỏa mãn $3x + 2y = 6xy$. Tìm GTNN của tổng $x + y$.

Dạng 4. Dùng BĐT chứa dấu giá trị tuyệt đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng các bất đẳng thức sau:

① $P = m + |f(x)|^2 \geq m \Rightarrow \min P = m \Leftrightarrow f(x) = 0$

② $P = M - |f(x)|^2 \leq M \Rightarrow \max P = M \Leftrightarrow f(x) = 0$

③ $|a| + |b| \geq |a - b|$. *Dấu "=" xảy ra* $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

④ $|a + b| \leq |a| + |b|$. *Dấu "=" xảy ra* $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

⑤ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$. *Dấu "=" xảy ra* $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ c \leq 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.15 Tìm giá trị nhỏ nhất cảu các biểu thức sau

① $A = |x + 2| + |x + 5|$. ② $B = |x - 3| + |x - 1| + |x + 1| + |x + 3|$.

Giải

① Ta có $A = |x + 2| + |-x - 5| \geq |(x + 2) + (-x - 5)| = 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x + 2)(-x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3, khi $-5 \leq x \leq -2$.

② Ta có $B = |x - 3| + |x - 1| + |x + 1| + |x + 3| = |3 - x| + |x + 3| + |1 - x| + |x + 1|$

$\geq |(3 - x) + (x + 3)| + |(1 - x) + (x + 1)| = 6 + 2 = 8$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 8, khi $x = 0$.

VD 1.16 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

① $P = 5 + |x - 2019|$ ② $P = |x - 2019| + |x - 2020|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.17 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+\sqrt{x+2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}$.

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.9 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

① $P=|x+1|+|2x+5|+|3x-18|$ ② $Q=|x+2|+|x+1|+|2x-5|$

③ $Q=|x-1|+|y-2|+|z-3|$ với $|x|+|y|+|z|=2014$

Dạng 5. Dùng tọa độ vectơ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. $\vec{a}=(x;y)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

2. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

3. $AB+BC\geq AC$, *dấu "=" xảy ra khi B nằm giữa A và C.*

4. $|\vec{u}|-|\vec{v}|\leq|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *cùng hướng*

5. $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *cùng hướng*

6. $|\vec{u}.\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{v}|$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.18 [HKI-THPT DĨ AN – BD năm 1819] Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x^2-10x+793}+\sqrt{x^2+14x+292}.$$

Giải

Ta có $x^2-10x+793=(x-5)^2+768>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$x^2+14x+292=(x+7)^2+243>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra P xác định với mọi $\forall x\in\mathbb{R}$.

$P=\sqrt{x^2-10x+793}+\sqrt{x^2+14x+292}=\sqrt{(5-x)^2+768}+\sqrt{(x+7)^2+243}$

Chọn $\vec{u}=(5-x;16\sqrt{3})\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{(5-x)^2+768}$ và $\vec{v}=(x+7;9\sqrt{3})\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{(x+7)^2+243}$

Suy ra $\vec{u}+\vec{v}=(12;25\sqrt{3})\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{12^2+(25\sqrt{3})^2}=\sqrt{2019}$

Khi đó: $P=|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{2019}$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow\dfrac{5-x}{x+7}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}\Rightarrow 9(5-x)=16(x+7)\Leftrightarrow x=-\dfrac{67}{25}.$

Vậy $P_{\min}=\sqrt{2019}$ khi $x=-\dfrac{67}{25}$.

VD 1.19 Tìm GTNN: $P=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.20 Tìm GTNN: $P=\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-2x+2}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.10 Tìm GTLN, GTNN:

① Tìm GTNN: $P=\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+\sqrt{x^2-2bx+2b^2}$, $a<0,b>0$

② Tìm GTNN: $P=\sqrt{a^2-6a+13}+\sqrt{a^2+2a+2}$

③ Tìm GTLN: $P=\sqrt{x^2+10x+26}+\sqrt{x^2+4x+4}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 2: GTLN-GTNN

TN1.1 Cho $f(x)=x-x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. **B.** $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$. **D.** $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

TN1.2 Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.

B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.

D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

TN1.3 Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2a-1\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ với $x.y$ lớn nhất

A. $a=\frac{1}{4}$. **B.** $a=\frac{1}{2}$ **C.** $a=-\frac{1}{2}$ **D.** $a=1$.

TN1.4 Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$. **B.** có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.

C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$. **D.** không có giá trị lớn nhất.

TN1.5 Cho $a-b=2$. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị nhỏ nhất là -1. **B.** có giá trị lớn nhất là -1.

C. có giá trị nhỏ nhất khi $a=b$. **D.** không có giá trị nhỏ nhất.

TN1.6 Cho $x^2+y^2=1$, gọi $S=x+y$. Khi đó ta có

A. $S\le-\sqrt{2}$. **B.** $S\ge\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}\le S\le\sqrt{2}$. **D.** $-1\le S\le 1$.

TN1.7 Cho x,y là hai số thực thay đổi sao cho $x+y=2$. Gọi $m=x^2+y^2$. Khi đó ta có:

A. giá trị nhỏ nhất của m là 2. **B.** giá trị nhỏ nhất của m là 4.

C. giá trị lớn nhất của m là 2. **D.** giá trị lớn nhất của m là 4.

TN1.8 Với mỗi $x>2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}, \frac{2}{x+1}, \frac{2}{x-1}, \frac{x+1}{2}, \frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

A. $\frac{2}{x}$. **B.** $\frac{2}{x+1}$. **C.** $\frac{2}{x-1}$. **D.** $\frac{x}{2}$.

TN1.9 Giá trị nhỏ nhất của biểu thức x^2+3x với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{27}{4}$ **D.** $-\frac{81}{8}$

TN1.10 Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2+3|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{9}{4}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{2}$.

TN1.11 Giá trị nhỏ nhất củabiểu thức $x^2-6|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. -9. **B.** -6. **C.** 0. **D.** 3.

TN1.12 Cho biểu thức $P=-a+\sqrt{a}$ với $a\geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. GTLN của P là $\frac{1}{4}$. **B.** GTLN của P là $\frac{1}{4}$.

C. GTLN của P là $\frac{1}{2}$. **D.** P đạt GTLN tại $a=\frac{1}{4}$.

TN1.13 Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+9}$ bằng

A. $\frac{11}{4}$. **B.** $\frac{4}{11}$. **C.** $\frac{11}{8}$. **D.** $\frac{8}{11}$.

TN1.14 Cho biểu thức $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

TN1.15 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\frac{2}{x}$ với $x>0$ là

A. 4. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

TN1.16 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x+\frac{3}{x}$ với $x>0$ là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

TN1.17 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x-1}$ với $x>1$ là

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 3.

TN1.18 Cho $x\geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

TN1.19 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x+\frac{1}{x}$ với $x>0$ là

A. 2. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

TN1.20 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ với $x>0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{2}$.

TN1.21 Điền số thích hợp vào chỗ chấm để được mệnh đề đúng

A. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ với $1\leq x\leq 3$ là…. ……..

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^2-5x+1$ là ……

BÀI TẬP TỔNG HỢP PHẦN 1

1.11 Chứng minh rằng: $x^4-\sqrt{x^5}+x-\sqrt{x}+1>0, \forall x\ge 0$. HD đặt $t=\sqrt{x}$.

1.12 Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$.

1.13 Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2\ge 2$ b) $a^4+b^4\ge 2$ c) $a^8+b^8\ge 2$

1.14 Cho $a>0,\ b>0$. Chứng minh $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$

1.15 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $5(x-1)<x^5-1<5x^4(x-1)$, nếu $x-1>0$. ② $x^5+y^5-x^4y-xy^4\ge 0$, biết $x+y\ge 0$

③ $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$, biết $a,\ b,\ c>-\frac{1}{4}$, $a+b+c=1$.

1.16 Chứng minh rằng nếu $a>b$ và $ab>0$ thì $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

1.17 Chứng minh rằng $a^2+ab+b^2\ge 0$ với mọi số thực $a,\ b$.

1.18 Chứng minh rằng:

① $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\le\frac{a^3+b^3}{2}$, nếu $a\ge 0$ và $b\ge 0$.

② $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{3}\le\frac{a^6+b^6}{6}$, nếu $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

1.19 Chứng minh rằng, nếu $x\ge y\ge 0$ thì $\frac{x}{x+1}\ge\frac{y}{y+1}$

1.20 Chứng minh rằng:

① Nếu $a,\ b$ là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ ② Nếu $a,\ b$ là hai số trái dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le -2$

1.21 Chứng minh rằng nếu $a,\ b,\ c>0$ thì: $\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a}\ge 3abc$.

1.22 Chứng minh rằng nếu $a,\ b,\ c>0$ thì: $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$.

1.23 CMR nếu $a,\ b,\ c,\ d$ không âm thì: $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4\ge abcd$.

1.24 Chứng minh rằng nếu $a,\ b$ không âm thì: $\frac{a+b}{1+a+b}\le\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

1.25 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, với $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$.

② $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

1.26 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}}\ge 4$, với $a\in\mathbb{R}$. ② $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$, với $a\in\mathbb{R}$.

1.27 So sánh: $\sqrt{a+2}+\sqrt{a+4}$ và $\sqrt{a}+\sqrt{a+6}$, với $a\ge 0$.

1.28 Cho $a,\ b,\ c\ge 0$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$.

1.29 Cho $a,\ b,\ c\in(0;\ 1)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai: $a(1-b)>\frac{1}{4},\ b(1-c)>\frac{1}{4},\ c(1-a)>\frac{1}{4}$.

1.30 Giả sử $a,\ b,\ c$ là ba số dương sao cho: $ax+b(1-x)>cx(1-x)$ với mọi giá trị của x. Chứng minh rằng khi đó, với mọi giá trị của x ta cũng có: $ax+c(1-x)>bx(1-x)$ và $bx+c(1-x)>ax(1-x)$.

1.31 Cho các số thực $x,\ y,\ z>0$. Chứng minh: $16xyz(x+y+z)\le 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}$

1.32 Cho các số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+b)(1+a)}\ge\frac{3}{4}$$

1.33 Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c=6$. Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right)\ge\frac{729}{512}$

1.34 Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi.
Chứng minh rằng: $\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}$

1.35 Cho $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ là 5 số dương tùy ý. Chứng minh rằng: $\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb}\ge\frac{3}{p+q}$

1.36 Cho $a,\ b,\ c$ là ba số khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

1.37 Áp dụng BĐT Cô-si để tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

① $y=\frac{x}{2}+\frac{18}{x}$ $(\forall x>0)$ ② $y=\frac{x}{2}+\frac{18}{x}$ $(\forall x>1)$ ③ $y=\frac{3x}{2}+\frac{1}{x+1}$ $(\forall x>-1)$

④ $y=\frac{x}{3}+\frac{5}{2x-1}$ $\left(\forall x>\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $y=\frac{x}{1-x}+\frac{5}{x}$ $(\forall:0<x<1)$ ⑥ $y=\frac{x^3+1}{x^2}$ $(\forall x>0)$

1.38 Áp dụng BĐT Cô-si để tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

① $y=(x+3)(5-x)$ với $(-3\le x\le 5)$ ② $y=x(6-x)$ với $(0\le x\le 6)$

③ $y=(x+3)(5-2x)$ $(-3\le x\le\frac{5}{2})$ ④ $y=(2x+5)(5-x)$ $(-5/2\le x\le 5)$

⑤ $y=(6x+3)(5-2x)$ $(-1/2\le x\le 5/2)$ ⑥ $y=x^2\sqrt{9-x^2}$ $(-3\le x\le 3)$

1.39 Giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình sau:

① $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$ *ĐS:* $x=1$

② $|4x-1|+2|2x-1|=1$ *ĐS:* $¼\le x\le ½$

③ $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=2$ *ĐS:* $x\ge 3$

④ $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$ *ĐS:* $x=1\vee x=7$

⑤ $2x^4+(1-2x)^4=\frac{1}{27}$ *ĐS:* $x=1/3$

⑥ $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$ *ĐS:* $x=1/2$

⑦ $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\le 2$ *ĐS:* $x=1$

⑧ $|3x+1|\le|2x-1|+|x+2|$ *ĐS:* $x\in\mathbb{R}$

⑨ $|2x+3|\ge|3x+5|-|x+2|$ *ĐS:* $x\in\mathbb{R}$

⑩ $\begin{cases}\sqrt{xy}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{x}\\ 2\sqrt{xy-x}+\sqrt{x}=1\end{cases}$ *ĐS:* $(1;\,1)$

⑪ $\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-x}=2\\ x^2+y^2-x-y=2\end{cases}$ *ĐS:* $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),(0;-1),(-1;0)$

1.40 Cho $a,\ b>0$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

1.41 Cho $a\ge 3$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=a+\frac{1}{a}$.

1.42 Cho $a\ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=a+\frac{1}{a^2}$.

1.43 Cho $a,\ b>0$ và $a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=ab+\frac{1}{ab}$.

1.44 Cho $a,\ b>0$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

1.45 Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

1.46 Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

1.47 Cho $a,\ b,\ c0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của: $S=a+b+c+\frac{1}{abc}$

1.48 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

1.49 Cho $a,\ b,\ c$ khác 0. Tìm GTNN của $T=\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$

1.50 Cho 3 số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$.

1.51 Cho hai số thực a và b thỏa điều kiện $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=a^8+b^8$.

1.52 Cho $x,\ y$ là hai số thay đổi và thỏa mãn điều kiện $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=(3-x)(4-y)(2x+3y)$.

1.53 Cho 3 số dương $a,\ b,\ c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$

1.54 Với $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN 1

TN1.22 Cho $a>b>0$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^3+b^3>(a+b)(a-b)^2$. **B.** $(a+b)^2>4ab$.

C. $a(a+2b)>b(b+2a)$. **D.** Cả 3 đáp án trên.

TN1.23 Cho 2 số a và b. Câu nào sau đây **sai**?

A. $4(1-a)^2\ge 2-4a^2$. **B.** $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|}<\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

C. $\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}$. **D.** $4ab(a-b)^2\le(a^2-b^2)^2$.

TN1.24 Cho a, b, c với $a\le b$ và $a\le c$. Câu nào sau đây đúng?

A. $a^2\le bc$. **B.** $2a^2-b^2\le c^2$. **C.** $2a-b\le c$. **D.** Cả 3 đáp án trên.

TN1.25 Cho a, b, c, d với $a>b>0$ và $c>d>0$. Bất đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $a+c>b+d$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $ac>bd$. **D.** $a^2+c^2>b^2+d^2$.

TN1.26 Cho 3 số a, b, c không âm. Bất đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $(a+b-c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$. **B.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge 4\sqrt{ab}$.

C. $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$. **D.** $(a+b)(ab+1)\ge 4ab$.

TN1.27 Xét các mệnh đề sau đây:

I. $a^3-b^3\le\dfrac{3}{2}(a-b)(a^2+b^2)$. II. $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. III. $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$.

Mệnh đề nào đúng?

A. I và II. **B.** II và III. **C.** I và III. **D.** I, II và III.

TN1.28 Bất đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}\le 2$. **B.** $\dfrac{\sqrt{a^6+1}}{a^6+5}\ge\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab+1}\le\dfrac{1}{2}$. **D.** Cả 3 đáp án trên.

TN1.29 Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác. Xét các bất đẳng thức sau đây:

I. $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

II. $a^2+b^2+c^2>2(ab+bc+ca)$.

III. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$.

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Chỉ III. **D.** I và III.

TN1.30 Cho a, b, c là 3 số không âm. Xét bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{ab}+1)\ge 4\sqrt{ab}$. **B.** $a^3+b^3\le(a+b)ab$.

C. $a^2+b^2+c^2\le ab+bc+ca$. **D.** Cả A và C.

TN1.31 Câu **10.** Câu nào sau đây đúng với mọi số x và y ?

A. $4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\le\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^2$. **B.** $x^4-y^4\ge 2(x^2-y^2)xy$.

C. $x+\dfrac{1}{y}\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. **D.** Cả A và B.

TN1.32 Cho a, b, c dương. Bất đẳng thức nào đúng?

A. $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 8$. **B.** $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$.

C. $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 9$. **D.** Cả A và C.

TN1.33 Cho a, b, c dương. Câu nào sau đây **sai** ?

A. $a^3+b^3\ge ab(a+b)$. **B.** $(a+b)(b+c)(c+a)\le 8abc$.

C. $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$. **D.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

TN1.34 Cho a, b, c dương. Bất đẳng thức nào đúng?

A. $\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}+\frac{c^2+1}{c}\ge 6$. **B.** $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 9$.

C. $\left(\frac{1}{b}+a\right)\left(\frac{1}{c}+b\right)\left(\frac{1}{a}+c\right)\ge 8$. **D.** Cả A và C.

TN1.35 Cho $x^2+y^2=1$. Câu nào sau đây **sai** ?

A. $|12x+5y|\le 13$. **B.** $|12x+5y|\le 17$.

C. $|12x+5y|\le 169$. **D.** $|12x+5y|\le 289$.

TN1.36 Cho bốn số a, b, x, y thỏa mãn $x^2+y^2=2$, $a=3x$, $b=3y$. Tìm bất đẳng thức đúng.

A. $|ax+by|\le 3$. **B.** $|ax+by|\le 9$.

C. $\left|a(x+y)+b(x-y)\right|\le 3\sqrt{6}$. **D.** $\left|a(x+y)+b(x-y)\right|\le 54$.

TN1.37 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-2x^2+15x-25$ trên $\left[\frac{5}{2};5\right]$

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{25}{8}$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{4}$.

TN1.38 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{2}{x-1}$ $(x>1)$.

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $1-\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}+1$.

TN1.39 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^8-32x^4$ trên $[0;\ 2]$.

A. 64. **B.** 0. **C.** 32. **D.** $\sqrt[4]{8}$.

TN1.40 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a+\frac{16}{a}$ với $a>0$.

A. 16. **B.** 8.

C. 4. **D.** 2.

TN1.41 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{7-x}+\sqrt{x+2}$ với $-2\le x\le 7$.

A. 18 và 9. **B.** 18 và 3.

C. 9 và $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$ và 3.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM PHẦN 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	C	D	D	A	B	C	A	C	B	B	D	B	D	A	A	D	A	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	D	C	B	C	A	D	A	B	D	C					D	D	A	D	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	A	B	B	C	A	A	D	C	D	D	B	A	D	C		B	C	C	B

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76				
A	C	D	D	A	D	B	B	D	A	C	B	D	A	B	D				

TN1.32 A. $\geq$; B. $\geq$; C. $\geq$.

TN1.33 A. sai; B. đúng; C. đúng.

TN1.34 A. $<$; B. $>$; C. $\geq$; D. $\leq$.

TN1.35 A. sai; B. đúng; C. sai; D. đúng.

TN1.56 $2\sqrt{2}$ khi $x=2$; $-\frac{17}{8}$ khi $x=\frac{5}{4}$

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ BPT BẬC NHẤT MỘT ẨN

Tóm tắt lí thuyết

1. Điều kiện xác định của bất phương trình:

Điều kiện của bất phương tình là điều kiện mà ẩn số phải thõa mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương tình có nghĩa. Cụ thể, ta có các trường hợp sau:

① *Dạng* $\dfrac{1}{Q(x)}$ $\rightarrow$ *Điều kiện:* $Q(x)\neq 0$

② *Dạng* $\sqrt[2n]{P(x)}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ $\rightarrow$ *Điều kiện:* $P(x)\geq 0$

Dạng $\sqrt[2n+1]{P(x)}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ $\rightarrow$ *Điều kiện:* $P(x)$ *có nghĩa*

③ *Dạng* $\dfrac{1}{\sqrt{Q(x)}}$ $\rightarrow$ *Điều kiện:* $Q(x)>0$

2. Hai bất phương trình tương đương:

Hai bất phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một tập nghiệm.
Chú ý: Hai bất phương trình cùng vô nghiệm thì tương đương.

3. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất dạng: $ax+b<0$

Điều kiện		*Kết quả tập nghiệm*
$a>0$		$S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$
$a<0$		$S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$
$a=0$	$b\geq 0$	$S=\varnothing$
	$b<0$	$S=\mathbb{R}$

Các dạng: $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$ *làm tương tự.*

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xem phần tóm tắt lí thuyết

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.1 Tìm điều kiện xác định của mỗi bất phương trình sau:

① $\frac{1}{x}<1-\frac{1}{x+1}$ ② $\frac{1}{x^2-4}\le\frac{2x}{x^2-4x+3}$ ③ $2|x|-1+\sqrt[3]{x-1}<\frac{2x}{x+1}$

④ $2\sqrt{1-x}>3x+\frac{1}{x+4}$ ⑤ $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}\le x^2$ ⑥ $x+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{x}$

VD2.2 Chứng minh các bất phương trình sau đây vô nghiệm:

① $x^2+\sqrt{x+8}\le -3$ ② $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{7+x^2}>1$ ③ $\sqrt{1+2(x-3)^2}+\sqrt{5-4x+x^2}<\frac{3}{2}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN

2.1 Cho bất phương trình: $\sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1$

① Tìm điều kiện của bất phương trình đã cho.

② Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn điều kiện đó.

2.2 Tìm tập hợp tất cả cả giá trị của x thỏa mãn điều kiện bất phương trình: $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5} \ge -10$. Từ đó suy ra rằng bất phương trình đã cho vô nghiệm.

2.3 Tìm điều kiện của mỗi bất phương trình sau:

① $2x-3-\dfrac{1}{x-5} < x^2-x$ ② $x^3 \le 1$

③ $\sqrt{x^2-x-2} < \dfrac{1}{2}$ ④ $\sqrt[3]{x^4+x-1}+x^2-1 \ge 0$

2.4 Chứng minh các bất phương trình sau đây vô nghiệm:

① $x^2+\dfrac{1}{x^2+1} < 1$ ② $\sqrt{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2$ ③ $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1} < 2\sqrt[4]{x^6+1}$

D. BÀI TẬP NÂNG CAO

2.5 Tìm điều kiện của mỗi bất phương trình sau:

① $\sqrt{x-2} \ge \sqrt{2-x}$ ② $\sqrt{2x-3} < 1+\sqrt{2x-3}$

③ $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}} < \dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$ ④ $3x+\dfrac{1}{x-2} \ge 2+\dfrac{1}{x-2}$

⑤ $\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-3} > 2$ ⑥ $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)} > \dfrac{1}{x-4}$

2.6 Chứng minh các bất phương trình sau đây vô nghiệm:

① $\sqrt{x-2}+1 < 0$ ② $(x-1)^2+x^2 \le -3$

③ $x^2+(x-3)^2+2 > (x-3)^2+x^2+5$ ④ $\sqrt{1+2(x+1)^2}+\sqrt{10-6x+x^2} < 2$

2.7 Chứng minh các bất phương trình sau đây luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

① $x^4+x^2+1 > 0$ ② $\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1} \ge 0$ ③ $x^2+(x-1)^2+\dfrac{1}{x^2+1} > x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Bất phương trình tương đương

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Bất phương trình tương đương:

- ✓ *Hai BPT tương đương nhau khi chúng có chung tập nghiệm.*
- ✓ *Hai BPT cùng vô nghiệm thì tương đương nhau.*

2. Các phép biến đổi tương đương:

Cho BPT $f(x)<g(x)$, *có TXĐ* D *và* $h(x)$ *cũng xđ trên* D.

- ✓ $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$
- ✓ $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x).h(x)<g(x).h(x)$ *nếu* $h(x)>0,\ \forall x\in D$
- ✓ $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x).h(x)>g(x).h(x)$ *nếu* $h(x)<0,\ \forall x\in D$

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.3 Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương ?

① $-4x+1>0$ và $4x-1<0$

② $2x^2+5\le 2x-1$ và $2x^2-2x+6\le 0$

③ $x+1>0$ và $x+1+\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{x^2+1}$

④ $\sqrt{x-1}\ge x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1}\ge x(2x+1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD2.4 Trong hai bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $2x-1\ge 0$?

① $2x-1+\dfrac{1}{x-3}\ge\dfrac{1}{x-3}$ ② $2x-1-\dfrac{1}{x+3}\ge-\dfrac{1}{x+3}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.8 Các cặp bất phương trình sau đây tương đương không ? Vì sao ?

① $2x-1>0$ và $2x-1+\dfrac{1}{x-2}>\dfrac{1}{x-2}$ ② $2x-1>0$ và $2x-1+\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{1}{x+2}$

③ $x-3<0$ và $x^2(x-3)<0$ ④ $x-3>0$ và $x^2(x-3)>0$

⑤ $x-2>0$ và $(x-2)^2>0$ ⑥ $x-5>0$ và $(x-2)(x^2-2x+2)>0$

2.9 Trong bốn cặp bất phương trình sau đây, hãy chọn ra các cặp bất phương trình tương đương (nếu có):

① $x-2>0$ và $x^2(x-2)<0$ ② $x-2<0$ và $x^2(x-2)>0$

③ $x-2\le 0$ và $x^2(x-2)\le 0$ ④ $x-2\le 0$ và $x^2(x-2)\ge 0$

Dạng 3. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ***Bước 1.*** *Đặt điều kiện cho bất phương trình có nghĩa (nếu có)*
- ***Bước 2.*** *Chuyển vế và giải.*
- ***Bước 3.*** *Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.5 Giải các bất phương trình sau:

① $(x+2)(2x-1)-2\le x^2+(x-1)(x+3)$ ② $(2x-1)(x+3)-3x+1\le (x-1)(x+3)+x^2-5$

③ $\dfrac{x+2}{3}-x+1>x+3$ ④ $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x-2}{3}<\dfrac{1-2x}{4}$

⑤ $\left(1-\sqrt{2}\right)x<3-2\sqrt{2}$ ⑥ $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\ge\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.10 Giải các bất phương trình sau:

① $\frac{3x+5}{2}-1\le\frac{x+2}{3}+x$ ② $2(x-1)+x>\frac{x+3}{3}+3$

③ $\left(x+\sqrt{2}\right)^2\le\left(x-\sqrt{2}\right)^2+2$ ④ $x(7-x)+6(x-1)<x(2-x)$

⑤ $\frac{x+2}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{4}\ge 3+\frac{x}{2}$ ⑥ $(x+1)(2x-1)+x\le 3+2x^2$

⑦ $x+\sqrt{x}>\left(2\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ ⑧ $(x+1)(x+2)(x+3)-x>x^3+6x^2-5$

2.11 Giải các bất phương trình sau:

① $\sqrt{(x-4)^2(x+1)}>0$ ② $\sqrt{(x+2)^2(x-3)}>0$

③ $(x+2)\sqrt{x+3}\sqrt{x+4}\le 0$ ④ $(x+2)\sqrt{(x+3)(x+4)}<0$

⑤ $\sqrt{(x-1)^2(x-2)}\ge 0$ ⑥ $\sqrt{2x-8}-\sqrt{4x-21}>0$

Dạng 4. Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ***Bước 1.*** *Đặt điều kiện cho hệ bất phương trình có nghĩa (nếu có)*
- ***Bước 2.*** *Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm thu được.*
- ***Bước 3.*** *Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.6 Giải các hệ bất phương trình sau: ① $\begin{cases}6x+\frac{5}{7}<4x+7\\ \frac{8x+3}{2}<2x+5\end{cases}$ ② $\begin{cases}15x-2>2x+\frac{1}{3}\\ 2(x-4)<\frac{3x-14}{2}\end{cases}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.12 Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} 5x-2>4x+5 \\ 5x-4<x+2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x+1>3x+4 \\ 5x+3\ge 8x-9 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} \dfrac{5x+2}{3}\ge 4-x \\ \dfrac{6-5x}{13}<3x+1 \end{cases}$

④ $\begin{cases} (1-x)^2>5+3x+x^2 \\ (x+2)^3<x^3+6x^2-7x-5 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7}<x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4}>2x-5 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x-1\le 2x-3 \\ 3x<x+5 \\ \dfrac{5-3x}{2}\le x-3 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}>4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+25 \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} 15x-2>2x+\dfrac{1}{3} \\ 2(x-4)<\dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} -2x+\dfrac{3}{5}>\dfrac{2x-7}{3} \\ x-\dfrac{1}{2}<\dfrac{5(3x-1)}{2} \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{3-x}{3}\le \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x-1}{3} \\ 3-\dfrac{2x+1}{5}>x+\dfrac{4}{3} \end{cases}$ ⑪ $\begin{cases} 3x+\dfrac{3}{5}<x+2 \\ \dfrac{6x-3}{2}<2x+1 \end{cases}$ ⑫ $\begin{cases} \dfrac{4x+5}{6}<x-3 \\ 2x+3>\dfrac{7x-4}{3} \end{cases}$

2.13 Tìm tất cả các nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} 42x+5>28x+49 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+25 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 45x-2>6x+\dfrac{1}{3} \\ 2(3x-4)<\dfrac{9x-14}{2} \end{cases}$

Dạng 5. Bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất dạng: $ax + b < 0$

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$
$a < 0$		$S = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \varnothing$
	$b < 0$	$S = \mathbb{R}$

2. Giải và biện luận bất phương trình dạng: $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) > 0$ hoặc $\dfrac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} > 0$

- *Đặt $x_1 = -\dfrac{b_1}{a_1}$, $x_2 = -\dfrac{b_2}{a_2}$. Tính $x_1 - x_2$.*
- *Lập bảng xét dấu chung $a_1.a_2$; $x_1 - x_2$.*
- *Từ bảng xét dấu, ta chia bài toán thành nhiều trường hợp. Trong mỗi trường hợp ta xét dấu của $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$ hoặc $\dfrac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$ nhờ qui tắc đan dấu.*

3. Giải và biện luận hệ BPT bậc nhất dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \quad (1) \\ a_2x + b_2 > 0 \quad (2) \end{cases}$

- *Giải (1); (2) tìm tập nghiệm S_1, S_2 tương ứng $\Rightarrow$ Tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2$.*
- *Hệ có nghiệm khi $S = S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.*
- *Hệ vô nghiệm khi $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$.*
- *Hệ có nghiệm duy nhất khi hệ có dạng $\begin{cases} f(x;m) \geq a \\ g(x;m) \leq b \end{cases} \Leftrightarrow a = b$*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.7 Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số m:

① $mx + 1 > x + m^2$ ② $2mx \geq x + 4m - 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD2.8 Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m \le 0 \\ -x+3<0 \end{cases}$ có nghiệm ?

VD2.9 Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x-7 \le 0 \\ mx \ge m+12 \end{cases}$ vô nghiệm ?

VD2.10 Tìm m để bất phương trình $mx-3m+2>0$ có tập nghiệm là khoảng $(0;+\infty)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.14 Giải và biệt luận các bất phương trình sau:

① $m(x-m)\le 4x+5$ ② $mx+6>2x+3m$ ③ $(x+1)k+x<3x+4$

④ $(a+1)x+a+3\ge 4x+1$ ⑤ $m(x-m)>2(4-x)$ ⑥ $3x+m^2\ge m(x+3)$

⑦ $k(x-1)+4x\ge 5$ ⑧ $b(x-1)\le 2-x$

2.15 Tìm m để mỗi bất phương trình sau vô nghiệm:

① $m^2x+4m-3<x+m^2$ ② $m^2x+1\ge m+(3m-2)x$

③ $3-mx<2(x-m)-(m+1)^2$ ④ $mx-m^2>mx-4$

2.16 Tìm m để mỗi bất phương trình sau có nghiệm:

① $m(x-m)\le x-1$ ② $mx+6>2x+3m$

③ $(m+1)x+m<3m+4$ ④ $mx+1>m^2+x$

2.17 Tìm m để mỗi hệ bất phương trình sau có nghiệm:

① $\begin{cases}3x-2>-4x+5\\3x+m+2<0\end{cases}$ ② $\begin{cases}x-2\le 0\\m+x>1\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x+4m^2\le 2mx+1\\3x+2>2x-1\end{cases}$ ④ $\begin{cases}4x-5>-3x+2\\3x+2m+2<0\end{cases}$

2.18 Tìm m để mỗi hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

① $\begin{cases}2x+7<8x-1\\-2x+m+5\ge 0\end{cases}$ ② $\begin{cases}(x-3)^2\ge x^2+7x+1\\2m-5x\le 8\end{cases}$ ③ $\begin{cases}mx+9<3x+m^2\\4x+1<-x+6\end{cases}$ ④ $\begin{cases}2x+7<8x-1\\m+5<2x\end{cases}$

2.19 Tìm m để mỗi bất phương trình sau có tập nghiệm là D cho trước:

① $x+m\ge 1$ có tập nghiệm $D=[-2;+\infty)$

② $2x-m<3(x-1)$ có tập nghiệm $D=(4;+\infty)$

③ $mx-16\ge 2(x-m^3)$ có tập nghiệm $D=[-38;+\infty)$

④ $m^3(x+2)\le m^2(x-1)$ có tập nghiệm $D=\mathbb{R}$

⑤ $m(x+m)\le 1$ có tập nghiệm $D=\varnothing$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 3

TN2.1 Cho các mệnh đề sau:

(I) $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $2x-1>0$.

(II) $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $2x-1>0$.

(III) $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ là một tập nghiệm của bất phương trình $2x-1>0$.

(IV) $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ là một tập nghiệm của bất phương trình $2x-1\ge 0$.

Số mệnh đề đúng là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

TN2.2 Cho bất phương trình $\sqrt{2-3x}<3$. Hãy chỉ ra giá trị của x không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho trong các giá trị sau :

A. $x=-\frac{5}{3}$ **B.** $x=-\frac{1}{3}$ **C.** $x=\frac{1}{3}$ **D.** $x=\frac{5}{3}$

TN2.3 Cho bất phương trình $x+\frac{3}{x-2}\ge 2+\frac{3}{x-2}$ (1). Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau. Tập nghiệm của phương trình là

A. $S=[2;+\infty)$. **B.** $S=(2;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $S=(-\infty;2)$.

TN2.4 Cho bất phương trình $\sqrt{x-3}\ge\sqrt{3-x}$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau. Tập nghiệm của bất phương trình là

A. $S=(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $S=\{3\}$. **D.** $S=\varnothing$.

TN2.5 Cho bất phương trình $\sqrt{2x+1}+1>0$. Hãy chỉ ra khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

B. Bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x thuộc $(0;+\infty)$.

C. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$.

D. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right)$.

TN2.6 Cho bất phương trình $|x|+2x\ge 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $[0;+\infty)$.

TN2.7 Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+(x-1)^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge x^2$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

TN2.8 Cho bất phương trình $(3-2x)\sqrt{3x+2}\ge 0$ (1). Hãy chỉ ra kết luận **sai** trong các kết luận sau.

Bất phương trình (1) có nghiệm đúng với mọi x sao cho

A. $-\frac{2}{3}\le x<0$. **B.** $0\le x<\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{2}{3}\le x<\frac{3}{2}$. **D.** $x\le\frac{3}{2}$.

TN2.9 Hãy chọn kết luận đúng trong các kết luận sau.

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\le 0$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[1;2]$. **C.** $\varnothing$. **D.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

TN2.10 Trong các bất phương trình cho sau đây, hãy chỉ ra các bất phương trình tương đương với bất phương trình $4x+1>0$.

$(1): 4x-\frac{2}{x-1}>\frac{x+1}{x-1}$ $(2): \left(2\sqrt{x}+1\right)^2>4\sqrt{x}$

$(3): 4x+\frac{x^2-1}{x+1}>x-2$ $(4): 4x+\frac{1}{x^2+1}>\frac{-x^2}{x^2+1}$

A. (1) và (2). **B.** (2) và (3). **C.** (3) và (4). **D.** (1) và (4).

TN2.11 Hãy chỉ ra sai lầm ở bước nào trong các bước giải bất phương trình $\frac{2}{x+1}>\frac{1}{x}$ (*):

A. Điều kiện của bất phương trình: $x\ne -1$ và $x\ne 0$.

B. $(*)\Leftrightarrow 2x>x+1$.

C. $\Leftrightarrow x>1$.

D. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;+\infty)$.

TN2.12 Hãy chỉ ra **sai** lầm ở bước nào trong các bước giải bất phương trình $x^2-2x-3>(x+1)(2x+5)$ (*)

A. $(*)\Leftrightarrow (x+1)(x-3)>(x+1)(2x+5)$.

B. $\Leftrightarrow x-3>2x+5$.

C. $x<-8$.

D. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;8)$.

TN2.13 Hãy chỉ ra **sai** lầm ở bước nào trong các bước giải bất phương trình $\sqrt{x^2+1}\le x+2$ (*)

A. $(*)\Leftrightarrow x^2+1\le (x+2)^2$. **B.** $\Leftrightarrow x^2+1\le x^2+4x+4$.

C. $\Leftrightarrow 4x\ge -3$. **D.** $\Leftrightarrow x\ge\frac{-4}{3}$.

TN2.14 Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai** ?

A. Tập nghiệm của $2x-3>0$ là $S=\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

B. Tập nghiệm của $3-2x>0$ là $S=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

C. Tập nghiệm của $2x-3<0$ là $S=\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

D. Tập nghiệm của $-3-2x>0$ là $S=\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

TN2.15 Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5(x+1)<4 \\ (m^2+1)x-2<m^2x \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-3)$ **B.** $S=\varnothing$ **C.** $S=(3;+\infty)$ **D.** $S=(-3;2)$

TN2.16 Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-4<x+2 \\ x+2\le 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $S=(3;+\infty)$ **B.** $S=\varnothing$ **C.** $S=[-2;3)$ **D.** $(-\infty;-2]$

TN2.17 Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1\ge 3(x-3) \\ \dfrac{2-x}{2}<x-3 \\ \sqrt{x-3}\ge 2 \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $S=\varnothing$ **B.** $S=[7;+\infty)$ **C.** $S=\left(\dfrac{8}{3};8\right)$ **D.** $[7;8]$

TN2.18 Hệ bất phương trình $\begin{cases} |2x-3|<1 \\ |1-2x|>3 \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$ **B.** $S=(2;+\infty)$

C. $S=\left(\dfrac{4}{3};2\right)$ **D.** $S=\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

TN2.19 Cho bất phương trình $ax\le 3$ (*). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai** ?

A. Khi $a=0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\varnothing$.

B Khi $a>0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{a}\right]$.

C. Khi $a<0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\left[\dfrac{3}{a};+\infty\right)$.

D. Khi $a=0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\mathbb{R}$.

TN2.20 Cho bất phương trình $ax\le 0$ (*). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai** ?

A. Khi $a>0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=(-\infty;0]$.

B. Khi $a<0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=[0;+\infty)$.

C. Khi $a=0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\mathbb{R}$.

D. Khi $a=0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\varnothing$.

TN2.21 Cho bất phương trình $ax>1$ (*). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai** ?

A. Khi $a>0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\left(\dfrac{1}{a};+\infty\right)$.

B. Khi $a<0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{a}\right)$.

C. Khi $a=0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\varnothing$.

D. Khi $a=0$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\mathbb{R}$.

TN2.22 Cho bất phương trình $(m-1)x\ge m^2-1$ (*). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai** ?

A. Khi $m>1$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\varnothing$.

B. Khi $m<1$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=(-\infty;m+1]$.

C. Khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\mathbb{R}$.

D. Khi $m>1$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=[m+1;+\infty)$.

TN2.23 Chọn khẳng định **sai**. Bất phương trình $m^2x<4x-1$ vô nghiệm khi

A. $m=0$ **B.** $m=2$

C. $m=-2$ **D.** $m=2$ hoặc $m=-2$

TN2.24 Cho bất phương trình $mx+2\ge x+2m$ (*). Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. Khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=\mathbb{R}$.

B. Khi $m=2$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S=[2;+\infty)$.

C. $(*)\Leftrightarrow (m-1)x\ge 2(m-1)\Leftrightarrow x\ge 2$.

D. (*) Có nghiệm với mọi giá trị của m.

TN2.25 Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. Bất phương trình bậc nhất một ẩn luôn có nghiệm.

B. Bất phương trình $ax+b<0$ vô nghiệm khi $a=0$ và $b\ge 0$.

C. Bất phương trình $ax+b<0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $a=0$ và $b<0$.

D. Bất phương trình $ax+b<0$ vô nghiệm khi $a=0$.

TN2.26 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+3\ge 2-x\\ x-m<0\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng trong các kết luận sau.

Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{-1}{3}\right)$. **B.** $m\in\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

C. $m\in\left(\dfrac{-1}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\varnothing$.

TN2.27 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}mx+2m>0\\ \dfrac{2x+3}{5}>1-\dfrac{3x}{5}\end{cases}$. Xét các mệnh đề sau:

(I) Khi $m<0$ thì hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

(II) Khi $m=0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(III) Khi $m\ge 0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$.

(IV) Khi $m>0$ thì hệ bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Chủ đề 4 DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT BPT QUI VỀ BPT BẬC NHẤT MỘT ẨN

Tóm tắt lí thuyết

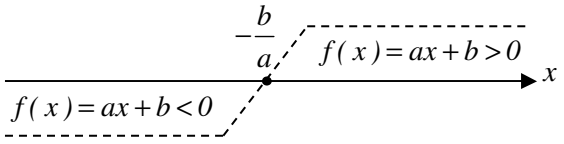
1. Dấu của nhị thức bậc nhất: $f(x) = ax + b$

a) Sử dụng bảng xét dấu: (trái trái- phải cùng: với hệ số a)

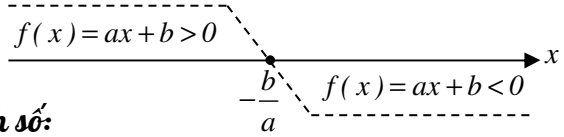
x		$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$a > 0$		$-$	0	$+$	
	$a < 0$		$+$	0	$-$	

b) Sử dụng trục số:

- *Nếu $a > 0$ thì:*



- *Nếu $a < 0$ thì:*



2. Bất phương trình tích số:

- *Dạng: $P(x).Q(x) > 0$. Trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là các nhị thức bậc nhất.*
- *Phương pháp: Lập bảng xét dấu $P(x).Q(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm.*

3. Bất phương trình chứa ẩn số ở mẫu:

- *Dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2). Trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là nhị thức bậc nhất.*
- *Phương pháp: Lập bảng xét dấu $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm.*

✍ ***Lưu ý**: Nếu bất phương trình chưa có dạng như bpt (2) thì ta đưa về bpt (2) theo các bước: "**Chuyển vế $\rightarrow$ Qui đồng không khử mẫu**".*

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Xét dấu biểu thức

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	*trái dấu với a*		0	*cùng dấu với a*	

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.11 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=3x+2$ ② $f(x)=-2x+5$ ③ $f(x)=\dfrac{4-3x}{2x+1}$

④ $f(x)=\dfrac{-4}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}$ ⑤ $f(x)=\dfrac{(4x-1)(x+2)}{-3x+5}$ ⑥ $f(x)=(4x-1)(x+2)(3x-5)(7-2x)$

VD2.12 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=4x^2-1$ ② $f(x)=2x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}$ ③ $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

④ $f(x)=\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3+x}$ ⑤ $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+8x-9}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^4-2x^2}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.20 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=(2x-1)(x+3)$ ② $f(x)=(-3x-3)(x+2)(x+3)$

③ $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{(x-5)(1-x)}$ ④ $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$

2.21 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=4x^2-1$ ② $f(x)=x^2-x-2\sqrt{2}$ ③ $f(x)=-x^2+x+6$

④ $f(x)=-x^3+7x-6$ ⑤ $f(x)=1-\dfrac{2-x}{3x-2}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{1}{x+2}$

Dạng 2. Giải bất phương trình tích

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để giải bất phương trình dạng: $P(x)>0;\ P(x)\ge 0;\ P(x)<0;\ P(x)\le 0$

Trong đó $P(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_nx+b_n)$.

Bước 1*: Tìm các nghiệm của các nhị thức* a_1x+b_1, a_2x+b_2, …, a_nx+b_n

Bước 2*: Sắp xếp các nghiệm tìm được theo thứ tự tăng dần, xét dấu.*

Bước 3*: Dựa vào bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.13 Giải các bất phương trình sau: ① $(x+1)(x-1)(3x-6)>0$ ② $(2x-7)(4-5x)\ge 0$

VD2.14 Giải các bất phương trình: ① $x^3+4x^2+x-6\le 0$ ② $-2x^2+7x^2-2x-3>0$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.22 Giải các bất phương trình sau:

① $x^2-x-20>2(x-11)$ ② $3x(2x+7)(9-3x)\ge 0$ ③ $(x+1)(x-1)(3x-6)>0$

④ $(2x-7)(4-5x)\ge 0$ ⑤ $3x(2x+7)(9-3x)\ge 0$ ⑥ $\left(-\sqrt{2}x+2\right)(x+1)(2x-3)>0$

2.23 Giải các bất phương trình sau:

① $x^3+8x^2+17x+10<0$ ② $x^3+6x^2+11x+6>0$ ③ $2x^3-5x^2-2x+2<0$

④ $\left(x^2-2x-3\right)^2\ge(3x-3)^2$ ⑤ $2x^3-3x^2-5x+6>0$ ⑥ $x^3+2x^2-5x-6<0$

⑦ $3x^3+8x^2+3x-2\le 0$ ⑧ $x^3-3x^2-10x+24\ge 0$ ⑨ $x^3+4x^2-17x-60\ge 0$

2.24 Giải và biệt luận các bất phương trình sau:

① $mx+4>2x+m^2$ ② $2mx+1\ge x+4m^2$ ③ $x\left(m^2-1\right)<m^4-1$ ④ $2(m+1)x\le(m+1)^2(x-1)$

Dạng 3. Giải bất phương có ẩn ở mẫu

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để giải bất phương trình dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)}>0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}<0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\le 0$

Trong đó $P(x),\ Q(x)$ *là tích của những nhị thức bậc nhất..*

***Bước 1**: Tìm các nghiệm của* $P(x)=0,\ Q(x)=0$.

***Bước 2**: Sắp xếp các nghiệm tìm được theo thứ tự tăng dần, xét dấu.*

***Chú ý** dùng kí hiệu || (không xác định) tại những vị trí* $Q(x)=0$.

***Bước 3**: Dựa vào bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.15 Giải các bất phương trình sau:

① $\frac{(2x-5)(x+2)}{3-4x}>0$ ② $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{(x-1)^2}$ ③ $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}<\frac{3}{x+3}$ ④ $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}<\frac{3}{x+3}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.25 Giải các bất phương trình sau:

① $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}<1$ ② $\dfrac{3}{1-x}\ge\dfrac{5}{2x+1}$ ③ $\dfrac{(3-x)(x-2)}{x+1}\le 0$ ④ $\dfrac{3-2x}{(3x-1)(x-4)}<0$

⑤ $\dfrac{-3x+1}{2x+1}\le -2$ ⑥ $\dfrac{x+2}{3x+1}\le\dfrac{x-2}{2x-1}$ ⑦ $\dfrac{x}{x-5}\ge\dfrac{1}{2}$ ⑧ $\dfrac{4x+3}{2x-5}\le 6$

⑨ $\dfrac{2x-5}{3x+2}<\dfrac{3x+2}{2x-5}$ ⑩ $\dfrac{-4}{3x+1}<\dfrac{3}{2-x}$ ⑪ $\dfrac{2x^2+x}{1-2x}\ge 1-x$ ⑫ $\dfrac{2}{x-1}\le\dfrac{5}{2x-1}$

⑬ $x+1>\dfrac{4}{x+1}$ ⑭ $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{2}{x-x^2}$ ⑮ $\dfrac{5x-6}{x+6}\le 1$ ⑯ $\dfrac{x-1}{x-3}\ge 2$

⑰ $\dfrac{x+2}{3x+1}>\dfrac{x-2}{2x-1}$ ⑱ $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}>\dfrac{3}{x+3}$ ⑲ $\dfrac{(x+2)^4(x+6)}{(x-7)^3(x-2)^2}\ge 0$ ⑳ $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4}{x^2(x-7)^5}\ge 0$

Dạng 4. Dấu nhị thức trên một miền

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Với $f(x)=ax+b$, *ta lưu ý các kết quả sau:*

① $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\ge 0\end{cases}$ ② $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\le 0\end{cases}$

③ $f(x)\ge 0,\forall x\ge\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0\\f(\alpha)\ge 0\end{cases}$ ④ $f(x)\le 0,\forall x\ge\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 0\\f(\alpha)\le 0\end{cases}$

⑤ $f(x)\ge 0,\forall x\le\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 0\\f(\alpha)\ge 0\end{cases}$ ⑥ $f(x)\le 0,\forall x\le\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0\\f(\alpha)\le 0\end{cases}$

⑦ $f(x)\ge 0,\forall x\le(\alpha;\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}f(\beta)\ge 0\\f(\alpha)\ge 0\end{cases}$ ⑧ $f(x)\le 0,\forall x\le(\alpha;\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}f(\beta)\le 0\\f(\alpha)\le 0\end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.16 Cho bất phương trình: $(m+1)x-m+2>0$. Tìm m để:

① Nghiệm đúng với mọi x.

② Nghiệm đúng với mọi $x\ge 2$

③ Nghiệm đúng với mọi $x<1$

④ Nghiệm đúng $\forall x\in[1;3]$

Dạng 5. Giải PT, BPT chứa dấu giá trị tuyệt đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.*
- *Dạng ①:* $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$
- *Dạng ②:* $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A: \text{có nghĩa} \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A < -B \\ A > B \end{array}\right. \end{cases}$
- *Dạng ③:* $a|f(x)| + b|g(x)| > h(x)$*: dùng PP chia khoảng.*

Lưu ý: *Với* $B > 0$, *ta luôn có:* $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$; $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A < -B \\ A > B \end{array}\right.$

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.17 Giải các bất phương trình sau:

① $|-2x+1| + x - 3 < 5$ ② $2|x-3| - |3x+1| \leq x + 5$ ③ $\left|\frac{2}{x-4}\right| < 1$ ④ $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| > 2$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.26 Giải các phương trình, bất phương trình sau:

① $|x+1|+|x-1|=4$ ② $\left|2x-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-x\right|>3x-2$ ③ $|2x-5|\le x+1$

④ $|2x-4|\ge x+1$ ⑤ $\dfrac{|2x-1|}{(x+1)(x-2)}>\dfrac{1}{2}$ ⑥ $\left|\dfrac{2-x}{x+1}\right|\ge 2$

⑦ $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right|<\left|\dfrac{10}{x-1}\right|$ ⑧ $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-1}\le\dfrac{1}{3-x}\\ |x|\le 1\end{cases}$ ⑨ $\dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6}\ge 3$

⑩ $\dfrac{3}{|x-4|-1}\le|x+3|$ ⑪ $|3x-5|<2$ ⑫ $\left|\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x+1\right|\le\sqrt{3}+\sqrt{2}$

⑬ $|x-1|2>2x-3$ ⑭ $|x+1|\le|x|-x+2$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 4

TN2.28 Cho $f(x)=2x+1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $f(x)>0,\forall x>2$. **B.** $f(x)>0,\forall x>-\dfrac{1}{2}$.

C. $f(x)>0,\forall x>0$. **D.** $f(x)>0,\forall x<\dfrac{1}{2}$

TN2.29 Cho $f(x)=\left(m^2+1\right)x-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $f(x)>0$ với mọi x thuộc $(0;+\infty)$.

B. $f(x)>0$ với mọi x thuộc $\left(\dfrac{1}{m^2+1};+\infty\right)$.

C. Khi $m=0$ thì $f(x)>0$ với mọi x thuộc $(1;+\infty)$.

D. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>0$ được chứa trong $(0;+\infty)$ với $\forall m$.

TN2.30 Cho $f(x)=3-5x$ và m là một số bất kì khác 0. Hãy chọn ra số âm trong các số sau

A. $f(0)$. **B.** $f(-1)$.

C. $f\left(\dfrac{3}{5}-m^2\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{3}{5}+m^2\right)$.

TN2.31 Cho $f(x)=(2x+1)(x-3)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $f(x)>0$ với mọi $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $f(x)<0$ với mọi $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $f(x)<0$ với mọi $x\in\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$. **D.** $f(x)>0$ với mọi $x\in(3;+\infty)$.

TN2.32 Cho $f(x)=(3x+4)(2-3x)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $f(x)>0$ với mọi x thuộc $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$.

B. $f(x)>0$ với mọi x thuộc $\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

C. $f(x)<0$ với mọi $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$.

D. $f(x)>0$ với mọi $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

TN2.33 Cho $f(x)=\frac{(x+1)(2-x)}{2x-7}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $f(x_0)=0$ Khi và chỉ khi $x_0=-1$, $x_0=-2$ hoặc $x_0=\frac{7}{2}$.

B. $f(x)>0$ với mọi x thuộc $(-1;2)$.

C. Trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;2)$, $\left(2;\frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$, $f(x)$ không đổi dấu và $f(x)$ đổi dấu khi qua mỗi giá trị $x=-1$, $x=-2$ và $x=\frac{7}{2}$.

D. $f(x)>0,\forall x\in(-1;2)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$, $f(x)<0,\forall x\in(-\infty;-1)\left(2;\frac{7}{2}\right)$.

TN2.34 Cho $f(x)=|3x+2|-|1-4x|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. Trên $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ thì $f(x)=(-3x-2)-(1-4x)$.

B. Trên $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$ thì $f(x)=(3x+2)-(4x-1)$.

C. Trên $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$ thì $f(x)=7x+1$.

D. Trên $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ thì $f(x)=3-x$.

TN2.35 Tập nghiệm của bất phương trình $(1-2x)(2x-5)(x+1)<0$

A. $S=\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

B. $S=\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

C. $S=\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

D. $(-1;+\infty)$

TN2.36 Tập nghiệm của bất phương trình $x\left(x^2+3x+2\right)\ge 0$ là

A. $S=(-\infty;-2]$

B. $S=[-2;-1]$

C. $(-\infty;-2)\cup[2;+\infty)$

D. $S=[-2;-1]\cup[0;+\infty)$

TN2.37 Tập nghiệm của bất phương trình $x\left(x^2+3x+2\right)\ge 0$ là

A. $S=[0;1]$

B. $S=(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$

C. $S=[0;1]\cup[2;+\infty)$

D. $S=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

TN2.38 Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{|3x-1|(x+2)^2}{x-5}\geq 0$ là

A. $S=\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]\cup(5;+\infty)$ **B.** $S=(5;+\infty)$

C. $S=\left[-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup(5;+\infty)$ **D.** $\left\{-2;\dfrac{1}{3}\right\}\cup(5;+\infty)$

TN2.39 Tập nghiệm của bất phương trình $|x-3|+2x+1<0$ là

A. $S=(-\infty;-4)$ **B.** $S=\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$ **C.** $S=\varnothing$ **D.** $S=(-\infty;3)$

TN2.40 Cho bất phương trình $\sqrt{(x+4)(x-2)}-1<0$ (*). Xét các mệnh đề sau:

(I) Tập nghiệm của bất phương trình (*) là tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}(x-4)(x-2)\geq 0\\(x+4)(x-2)<1\end{cases}$.

(II) Tập nghiệm của (*) là $S=\left(-1-\sqrt{10};-1+\sqrt{10}\right)$.

(III) Bất phương trình (*) vô nghiệm .

(IV) Tập nghiệm của (*) là $\left(-1-\sqrt{10};-4\right]\cup\left[2;-1+\sqrt{10}\right)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ BPT BẬC NHẤT HAI ẨN

Tóm tắt lí thuyết

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

① $ax+by+c<0$; ② $ax+by+c\le 0$; ③ $ax+by+c>0$; ④ $ax+by+c\ge 0$;

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

Là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ: $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+3y-6<0 \\ x\ge 0 \\ 2x-3y-1\le 0 \end{cases}$

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để xác định miền nghiệm của $ax+by+c<0$ (tương tự cho 3 dạng còn lại) ta thực hiện các bước sau:

***Bước 1**: Vẽ đường thẳng $d: ax+by+c=0$*

***Bước 2**: Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên d và xác định giá trị của $d_M = ax_0+by_0+c$. Nếu:*

- ✓ *$d_M<0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ d) chứa điểm M là miền nghiệm của $ax+by+c<0$.*
- ✓ *$d_M>0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ d) chứa điểm M không là miền nghiệm của $ax+by+c>0$.*

***Bước 3**: Gạch bỏ miền không là nghiệm, miền còn lại không gạch chính là miền nghiệm của $ax+by+c>0$.*

***Chú ý**: Miền nghiệm $ax+by+c\ge 0$ và $ax+by+c\le 0$ bao gồm tất cả những điểm nằm trên đường thẳng $d: ax+by+c=0$.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bpt bậc nhất hai ẩn sau:

① $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ ② $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.1 Xác định miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

① $-3x+y+2\le 0$ ② $2x+y>1$

③ $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$ ④ $\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(1-\sqrt{3}\right)y\ge 2$

⑤ $x-2+2(y-1)>2x+4$ ⑥ $2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2\le 0$

Dạng 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn ta lần lượt tìm miền nghiệm của từng bất phương trình.
Dựa vào đồ thị suy ra miền nghiệm của hệ là ***miền không bị gạch bỏ****.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.2 Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

① $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x+3y-6<0 \\ x\ge 0 \\ 2x-3y-1\le 0 \end{cases}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.2 Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau đây:

① $\begin{cases} 2x-1\le 0 \\ -3x+5\le 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3-y<0 \\ 2x-3y+1>0 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 3x-2y-6\ge 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y\le -3 \\ x+y>5 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x-3y<0 \\ x+2y>-3 \\ y+x<2 \end{cases}$

Dạng 3. Một ví dụ áp dụng vào kinh tế

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

*Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống - Ngành Quy hoạch tuyến tính. Dưới đây là một phương pháp giải một bài toán "**Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức bậc nhất 2 ẩn**"*

Bài toán: *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $F=ax+by$. Với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn cho trước.*

Giải:
- *Xác định miền nghiệm S của hệ bất phương trình đã cho Ta thường được S là một đa giác.*
- *Tính giá trị của F ứng với (x, y) là tọa độ các đỉnh của đa giác.*
- *Kết luận: + Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trì tìm được.*
  + Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.3 Tìm GTLN và NN của $F = 3x + 9y$, với $(x;\ y)$ là nghiệm của hệ bất phương $\begin{cases} x - y + 1 \le 0 \\ 2x - y + 4 \ge 0 \\ x + y + 1 \ge 0 \\ 2x + y - 4 \le 0 \end{cases}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.3 Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ thỏa hệ: $\begin{cases} 2x-y\ge 2 \\ x-2y\le 2 \\ x+y\le 5 \end{cases}$

a) Hãy xác định (S) để thấy (S) là một tam giác.

b) Trong (S) hãy tìm điểm $(x;\ y)$ làm cho biểu thức $f(x,\ y)=y-x$ có giá trị nhỏ nhất.

2.4 Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

2.5 Một xưởng có máy cắt và máy tiện dùng để sản xuất trục sắt và đinh ốc. Sản xuất 1 tấn trục sắt thì lần lượt máy cắt chạy trong 3 giờ và máy tiện chạy trong 1 giờ, tiền lãi là 2 triệu. Sản xuất 1 tấn đinh ốc thì lần lượt máy cắt và máy tiện chạy trong 1 giờ, tiền lãi là 1 triệu. Một máy không thể sản xuất cả 2 loại. Máy cắt làm không quá 6giờ/ngày, máy tiện làm không quá 4giờ/ngày. Một ngày xưởng nên sản xuất bao nhiêu tấn mỗi loại để tiền lãi cao nhất.

2.6 Trong 1 cuộc thi pha chế, mỗi đội được dùng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha nước cam và nước táo. Pha 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam được 60 điểm, mỗi lít nước táo được 80 điểm. Cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt điểm cao nhất.

2.7 Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

2.8 Một người có thể tiếp nhận mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Một ngày mỗi người cần 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày số đơn vị vitamin B phải không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Hãy xác định số đơn vị vitamin A, B phải dùng mỗi ngày sao cho giá thành rẻ nhất, biết rằng giá mỗi đơn vị vitamin A là 9 đồng và vitamin B là 12 đồng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 5

TN2.41 Cho bất phương trình $2x+4y<5$ có tập nghiệm là S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(1;1)\in S$. **B.** $(1;10)\in S$. **C.** $(1;-1)\in S$. **D.** $(1;5)\in S$.

TN2.42 Cho bất phương trình $x-2y+5>0$ có tập nghiệm là S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(2;2)\in S$. **B.** $(1;3)\in S$. **C.** $(-2;2)\notin S$. **D.** $(-2;4)\in S$.

TN2.43 Cho bất phương trình $-2x+\sqrt{3}y+\sqrt{2}\le 0$ có tập nghiệm là S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(1;1)\in S$ **B.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\in S$ **C.** $(1;-2)\notin S$ **D.** $(1;0)\notin S$

TN2.44 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x+y>0\\2x+5y<0\end{cases}$ có tập nghiệm là S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(1;1)\in S$ **B.** $(-1;-1)\in S$ **C.** $\left(1;-\frac{1}{2}\right)\notin S$ **D.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)\in S$

TN2.45 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x>0\\x+\sqrt{3}y+1\le 0\end{cases}$ có tập nghiệm là S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(1;-1)\in S$. **B.** $\left(1;-\sqrt{3}\right)\in S$. **C.** $\left(-1;\sqrt{5}\right)\notin S$. **D.** $\left(-4;\sqrt{3}\right)\in S$.

TN2.46 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x>0\\x+\sqrt{3}y+1>0\end{cases}$ có tập nghiệm là S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(-1;2)\in S$. **B.** $\left(\sqrt{2};0\right)\in S$. **C.** $\left(1;-\sqrt{3}\right)\in S$. **D.** $\left(\sqrt{3};0\right)\in S$.

TN2.47 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x-y>3\\1-\frac{1}{2}x+y>0\end{cases}$ có tập nghiệm S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $(1;-2)\in S$. **B.** $(2;1)\in S$. **C.** $(5;-6)\in S$. **D.** $S=\varnothing$.

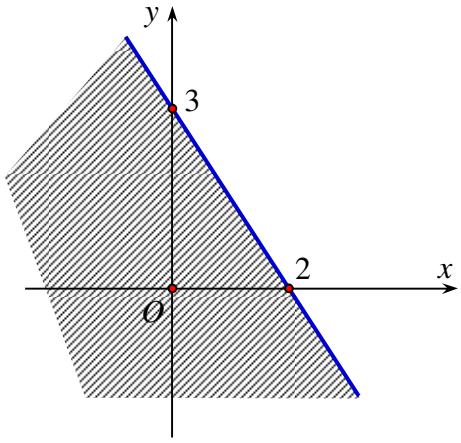
TN2.48 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-\frac{3}{2}y\ge 1\\4x-3y\le 2\end{cases}$ có tập nghiệm S. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

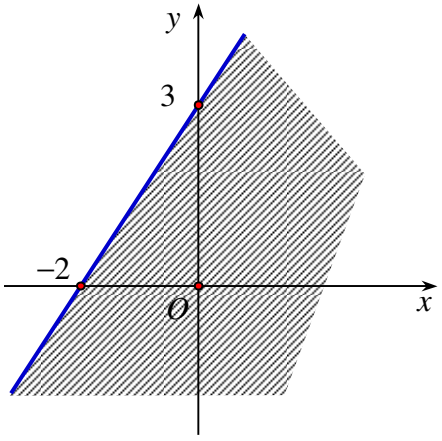
A. $\left(-\frac{1}{4};-1\right)\notin S$. **B.** $S=\{(x;y)\,|\,4x-3=2\}$.

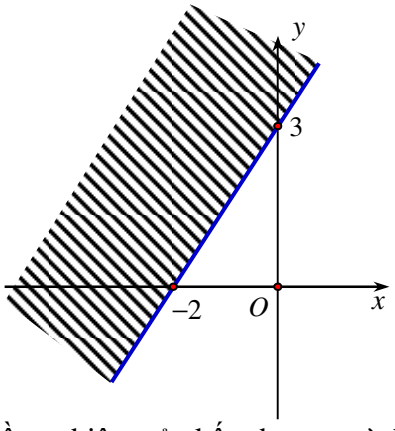
C. Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ và kể cả bờ d, với d là là đường thẳng $4x-3y=2$.

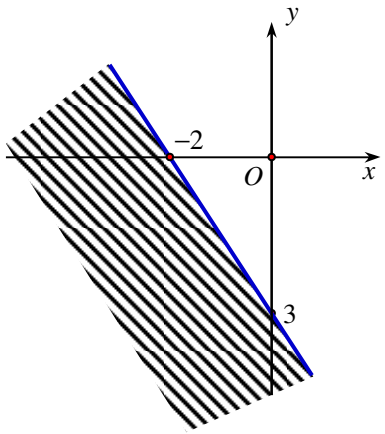
D. Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kể cả bờ d, với d là là đường thẳng $4x-3y=2$.

TN2.49 Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y>-6$ là

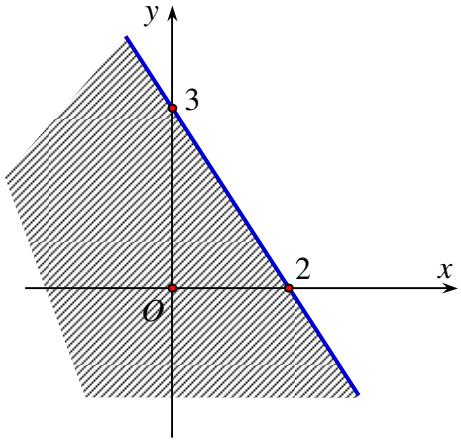
A.


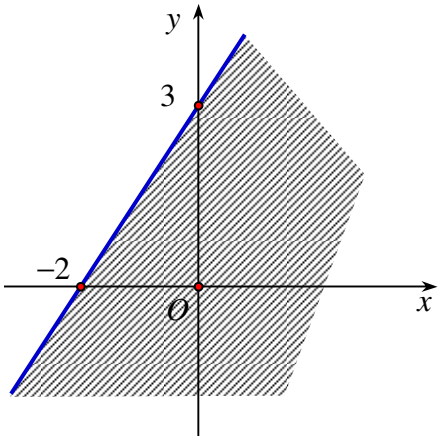
B.


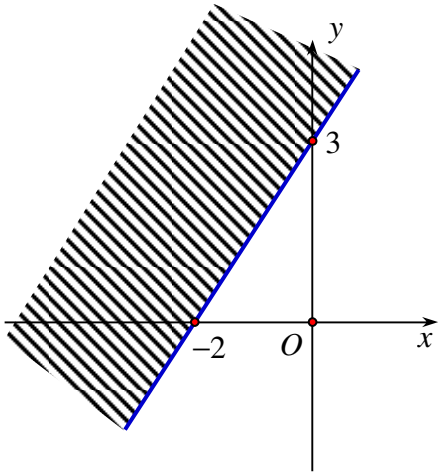
C.


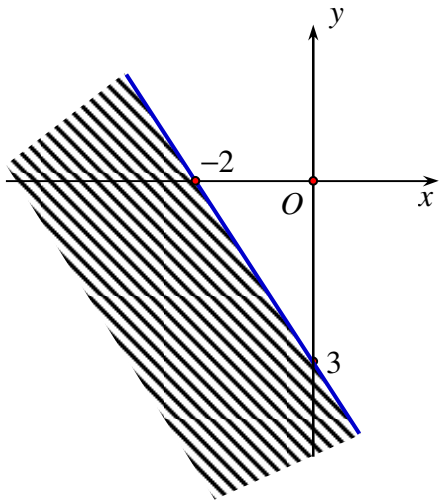
D.


TN2.50 Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>6$ là

A.


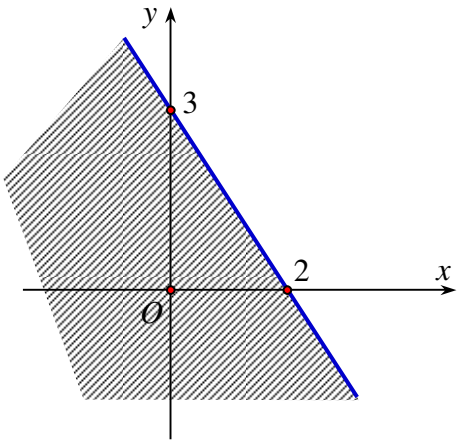
B.


C.


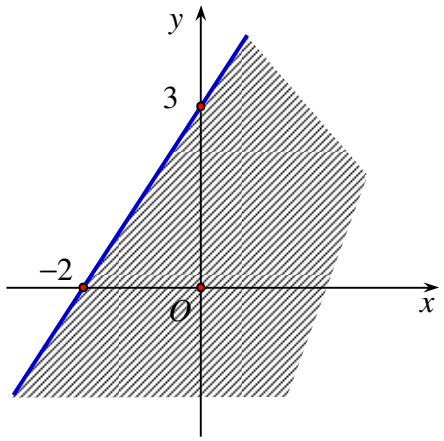
D.


TN2.51 Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y<-6$ là

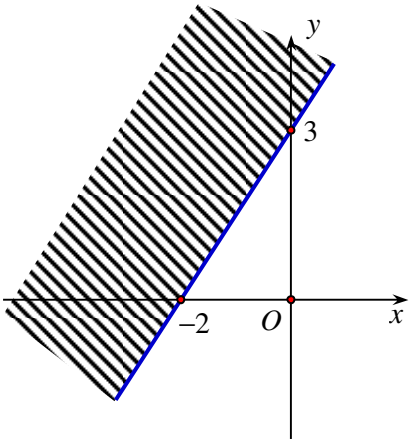
A.



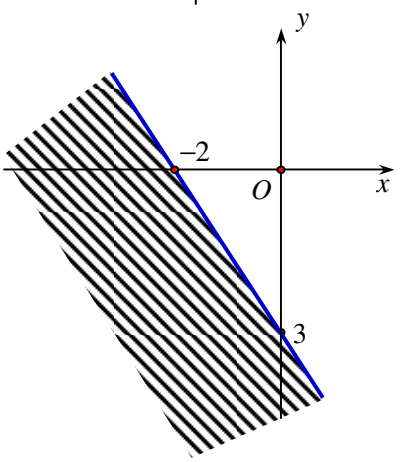
B.



C.

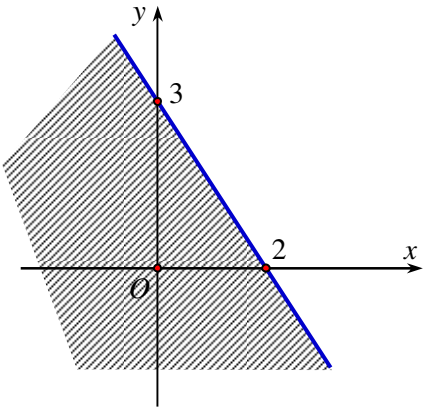


D.

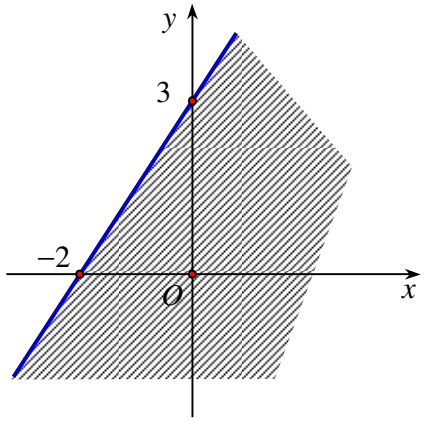


TN2.52 Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>-6$ là

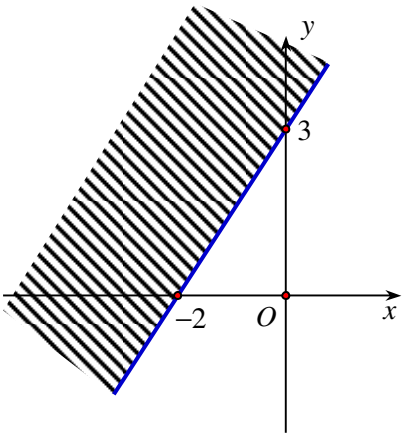
A.



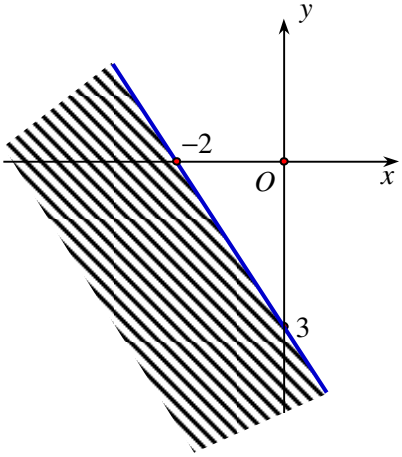
B.



C.



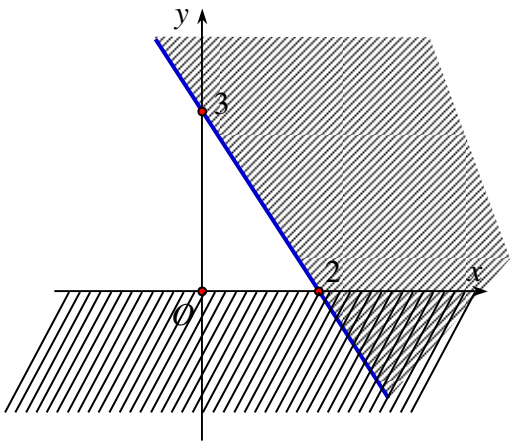
D.



TN2.53 Cho hệ $\begin{cases} 2x+3y<5 \ (1) \\ x+\dfrac{3}{2}y<5 \ (2) \end{cases}$. Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), S_2 là tập nghiệm của bất phương trình (2) và S là tập nghiệm của hệ thì

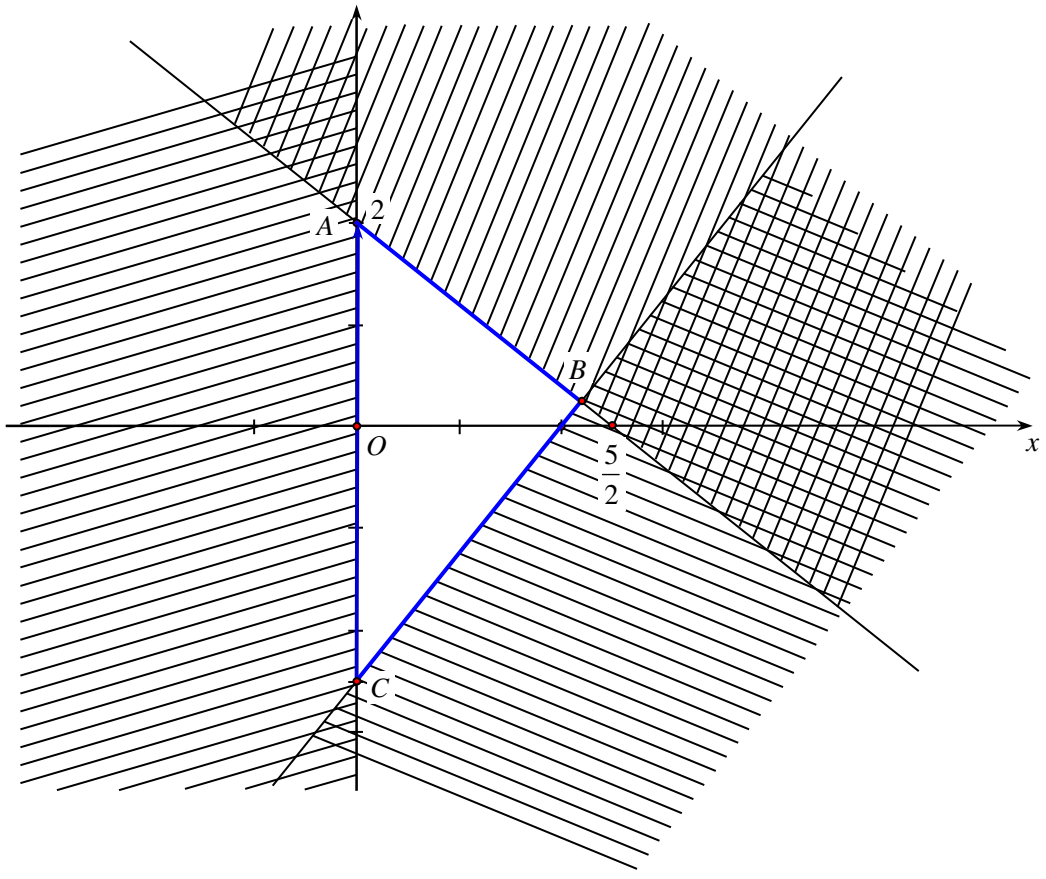
A. $S_1 \subset S_2$. **B.** $S_2 \subset S_1$. **C.** $S_2 \subset S$. **D.** $S_1 \neq S$.

TN2.54 Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D ?



A. $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<-6 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y>-6 \end{cases}$.

TN2.55 Miền tam giác ABC kể cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bết phương trình nào trong bốn bệ A, B, C, D ?



A. $\begin{cases} y \ge 0 \\ 5x-4y \ge 10 \\ 5x+4y \le 10 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x \ge 0 \\ 4x-5y \le 10 \\ 5x+4y \le 10 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x \ge 0 \\ 5x-4y \le 10 \\ 4x+5y \le 10 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x > 0 \\ 5x-4y \le 10 \\ 4x+5y \le 10 \end{cases}$.

TN2.56 Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y \le 2 \\ 3x+5y \le 15 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là miền tứ giác $ABCO$ kể cả các cạnh với $A(0;3)$, $B\left(\frac{25}{8};\frac{9}{8}\right)$, $C(2;0)$ và $O(0;0)$.

B. Đường thẳng $\Delta: x+y=m$ có giao điểm với tứ giác $ABCO$ kể cả khi $-1 \le m \le \frac{17}{4}$.

C. Giá trị lớn nhất của biểu thức $x+y$, với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho là $\frac{17}{4}$.

D. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+y$, với x và y thõa mãn hệ bất phương trình đã cho là 0.

TN2.57 Biểu thức $L=y-x$, với x và y thõa mãn hệ bất phương trình ở bài tập 13, đạt giá trị lớn nhất là a và đạt giá trị nhỏ nhất là b. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

A. $a=\frac{25}{8}$ và $b=-2$. **B.** $a=3$ và $b=-2$. **C.** $a=3$ và $b=0$. **D.** $a=3$ và $b=\frac{-9}{8}$.

6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Tóm tắt lí thuyết

Định lí về dấu tam thức bậc hai:

$$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$$

$\Delta<0$	$a.f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$	$f(x)$ *cùng dấu với* a
$\Delta=0$	$a.f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$f(x)$ *cùng dấu với* a
$\Delta>0$	$a.f(x)<0,\forall x\in(x_1;\ x_2)$	*Trong trái*
	$a.f(x)>0,\forall x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;+\infty)$	*Ngoài cùng*

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Xét dấu biểu thức

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Dấu của tam thức bậc hai: $\Delta=b^2-4ac$ / $\Delta'=b'^2-ac$

① ***TH1:*** $\Delta<0$: $f(x)$ *vô nghiệm*

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	*cùng dấu với* a	

② ***TH2:*** $\Delta=0$: $f(x)$ *có nghiệm kép* $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	*cùng dấu với* a	0	*cùng dấu với* a

③ ***TH3:*** $\Delta>0$: $f(x)$ *có 2 nghiệm* $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	***cùng***	0	***trái***	0	***cùng***

"Trong trai, ngoai cung"

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.4 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=-x^2+3x-5$ ② $f(x)=3x^2+2x+5$ ③ $f(x)=9x^2-24x+16$ ④ $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$

⑤ $f(x)=(3x^2-10x+3)(4x-5)$ ⑥ $f(x)=\dfrac{(3x^2-x)(3-x^2)}{4x^2+x-3}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN

2.9 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=5x^2-3x+1$ ② $f(x)=-2x^2+3x+5$ ③ $f(x)=x^2+12x+36$

④ $f(x)=(2x-3)(x+5)$ ⑤ $f(x)=3x^2-2x+1$ ⑥ $f(x)=-x^2+4x-1$

⑦ $f(x)=x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{4}$ ⑧ $f(x)=3x^2+x+5$ ⑨ $f(x)=2x^2+5x+2$

⑩ $f(x)=4x^2-3x-1$ ⑪ $f(x)=-3x^2+5x+1$ ⑫ $f(x)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2-2x+1+\sqrt{2}$

D. BÀI TẬP NÂNG CAO

2.10 Xét dấu các biểu thức sau:

① $f(x)=\left(3x^2-10x+3\right)(4x-5)$ ② $f(x)=\left(3x^2-4x\right)\left(2x^2-x-1\right)$

③ $f(x)=\left(4x^2-1\right)\left(-8x^2+x-3\right)$ ④ $f(x)=\left(3x^2-4x\right)\left(2x^2-x-1\right)$

⑤ $f(x)=\frac{3x-2}{x^3-3x^2+2}$ ⑥ $f(x)=\frac{x-7}{4x^2-19x+12}$

⑦ $f(x)=\frac{11x+3}{-x^2+5x-7}$ ⑧ $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{\sqrt{6}x^2+3x+\sqrt{2}}$

⑨ $f(x)=\frac{x^2-3x-2}{-x^2+x-1}$ ⑩ $f(x)=\frac{x^3-5x+4}{x^4-4x^3+8x-5}$

⑪ $f(x)=\frac{15x^2-7x-2}{6x^2-x+5}$ ⑫ $f(x)=\frac{x^4-17x^2+60}{x\left(x^2-8x+5\right)}$

Dạng 2. Giải bất phương trình bậc hai

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ***Bước 1***. *Cho* $f(x)=0$ *tìm nghiệm* x_1, x_2 *(nếu có)*
- ***Bước 2***. *Lập bảng xét dấu* $f(x)$ *dựa vào dấu của tam thức bậc hai (chú ý sắp xếp các nghiệm theo thứ tự).*
- ***Bước 3***. *Từ bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.5 Giải các bất phương trình sau:

① $3x^2+2x+5>0$ ② $-2x^2+3x+5>0$ ③ $-3x^2+7x-4<0$

④ $9x^2-24x+16\ge 0$ ⑤ $x^2-4x+3\ge 0$ ⑥ $-2x^2+5x-3\ge 0$

⑦ $-x^2+6x-9>0$ ⑧ $16x^2+40x+25>0$ ⑨ $2x^2+4x+3<0$

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN

2.11 Giải các bất phương trình sau:

① $4x^2-x+1<0$ ② $-3x^2+x+4\ge 0$ ③ $x^2-x-6\le 0$

④ $x^2-2x+3>0$ ⑤ $-5x^2+4x+12<0$ ⑥ $16x^2+40x+25<0$

⑦ $3x^2-4x+4\ge 0$ ⑧ $x^2-x-6\le 0$ ⑨ $x^2+9>6x$

⑩ $6x^2-x-2\ge 0$ ⑪ $\frac{1}{3}x^2-3x+6<0$ ⑫ $2x^2-7x-15\ge 0$

⑬ $2(x+2)^2-3,5\ge 2x$ ⑭ $x(x+5)\le 2(x^2+2)$

Dạng 3. Giải bất phương trình tích, thương

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Giải bất phương trình dạng: $f(x).g(x)>0$ ***hoặc*** $\frac{f(x)}{g(x)}>0$

- ***Bước 1***. *Tìm điều kiện xác định* D_1 *nếu có.*
- ***Bước 2***. *Cho* $f(x)=0;\ g(x)=0$ *tìm nghiệm* $x_i\,(i=1..n)$
- ***Bước 3***. *Lập bảng xét dấu của* $f(x),\ g(x)$ *suy ra dấu của* $f(x).g(x)$ *và* $\frac{f(x)}{g(x)}$.
- ***Bước 4***. *Từ bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm* S_1.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=D_1\cap S_1$.

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.6 Giải các bất phương trình sau:

① $(1-2x)\left(x^2+x-30\right)<0$

② $\frac{\left(2-x^2\right)\left(x^2-2x+1\right)}{-x^2+3x+4}>0$

③ $\frac{2x^2+3x-2}{x^2-5x+6}\ge 0$

④ $\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10}\le 2$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.12 Giải các bất phương trình sau:

① $x^4-3x^2\le 0$ ② $(2x+1)(x^2+x-30)\ge 0$

③ $3x^4-x^3+4x^2-x+3\ge 0$ ④ $(1-2x)(x^2+x-30)<0$

⑤ $x^4-5x^2+4<0$ ⑥ $x^4-2x^2-63\le 0$

⑦ $x^4-3x^2+2>0$ ⑧ $x^6+19x^3-216\ge 0$

2.13 Giải các bất phương trình sau:

① $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+5x+6}\le 0$ ② $\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-5x+4}\ge 0$ ③ $\dfrac{x-2}{x^2-9x+20}>0$

④ $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7}>0$ ⑤ $\dfrac{5x^2+3x-8}{x^2-7x+6}<0$ ⑥ $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1}<0$

⑦ $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}\le 0$ ⑧ $\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5}>0$ ⑨ $\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+4x+5}>0$

2.14 Giải các bất phương trình sau:

① $\dfrac{1}{x-4}<\dfrac{3}{3x^2+x-4}$ ② $\dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\le -1$ ③ $\dfrac{1}{x^2-5x+4}<\dfrac{1}{x^2-7x+10}$

④ $\dfrac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2}\ge 1$ ⑤ $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\ge\dfrac{x+1}{x}$ ⑥ $\dfrac{2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}\ge\dfrac{2x-1}{x^3+1}$

⑦ $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\le 0$ ⑧ $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7}<\dfrac{1}{x-3}$ ⑨ $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{x}$

⑩ $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$ ⑪ $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{2}{x+2}$ ⑫ $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x+1}{x-1}<2$

⑬ $\dfrac{14x}{x+1}<\dfrac{9x-30}{x-4}$ ⑭ $\dfrac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)}\ge\dfrac{1}{x-2}$

2.15 Giải các bất phương trình sau:

① $(x^2+x+1)(x^2+x+3)\ge 15$ ② $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\ge 5$

③ $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5$ ④ $2x^2+2x-\dfrac{15}{x^2+x+1}+1<0$

2.16 Tìm các giá trị nguyên không âm của x thỏa mãn bất phương trình: $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2x}{2x-x^2}$

2.17 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

① $y=\sqrt{(2x+5)(1-2x)}$ ② $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}$

③ $y=\sqrt{\dfrac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1}$ ④ $y=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}}$

Dạng 4. Giải hệ bất phương bậc hai

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Giải hệ bpt bậc hai một ẩn: $\begin{cases} f(x)=ax^2+bx+c>0 \quad (1) \\ g(x)=a'x^2+b'x+c'>0 \ (2) \end{cases}$

- ***Bước 1***. *Giải* (1), (2) *được tập nghiệm tương ứng* S_1, S_2.
- ***Bước 2***. *Tập nghiệm của hệ là* $S=S_1\cap S_2$.

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.7 Giải các hệ bất phương trình sau: ① $\begin{cases} 3x^2-7x+2>0 \\ -2x^2+x+3>0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x+1>5 \\ 2x^2-9x+7\le 0 \end{cases}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.18 Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} 2x^2+9x+7>0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 4x^2-5x-6\le 0 \\ -4x^2+12x-5<0 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} -2x^2-5x+4\le 0 \\ -x^2-3x+10\ge 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2x^2+x-6>0 \\ 3x^2-10x+3>0 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-11x+28\ge 0 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x^2\ge 0,25 \\ x^2-x\le 0 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} 3x^2-4x+1>0 \\ 3x^2-5x+2\le 0 \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} x^2-8x+7<0 \\ x^2-8x+20>0 \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{4}>0 \\ -2x^2+5x-5>0 \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} (x-1)(2x+3)>0 \\ (x-4)\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\le 0 \end{cases}$ ⑪ $\begin{cases} x^2\ge 4x \\ (2x-1)^2<9 \end{cases}$ ⑫ $\begin{cases} 2x-3<(x+1)(x-2) \\ x^2-x\le 6 \end{cases}$

2.19 Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} x^2-9<0 \\ (x-1)(3x^2+7x+4)\ge 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2-4>0 \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\ge\dfrac{1}{x} \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x^2+3x+2<0 \\ \dfrac{x}{x+1}\ge 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^2-4x-5<0 \\ x^2-6x+8>0 \\ 2x-3\ge 0 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} \dfrac{(2x+1)(4-x)}{x^2+2x-3}\le 0 \\ (x^2-16x+21)^2<36x^2 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} \left(\dfrac{x^2-7x+4}{x-2}\right)^2>4 \\ \dfrac{x^2-5}{x-1}\le 0 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} x^2-12x-64<0 \\ x^2-8x+15>0 \\ -0,75\le x\le 6,5 \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} \dfrac{(4x^2-3x+8)^2-(5x^2+4x)^2}{2x^2+x-3}\ge 0 \\ (x^2-8x)<(x+10)^2 \end{cases}$

2.20 Tìm giá trị của a sao cho $\forall x$ ta luôn có: $-1\le\dfrac{x^2+5x+a}{2x^2-3x+2}<7$

Dạng 5. Phương trình & Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.*
- *Xem lại cách giải phương trình trị tuyệt đối (Chương 3)*
- *Các dạng thường gặp sau:*

Dạng ①: $|A|>B\Leftrightarrow A<-B$ *hoặc* $A>B$

Dạng ②: $|A|<B\Leftrightarrow -B<A<B$

Dạng ③: $|A|>|B|\Leftrightarrow (A-B)(A+B)>0$

Dạng ④: $a|A|+b|B|>C$ *: dùng phương pháp chia khoảng.*

Lưu ý:

- $|A|=A\Leftrightarrow A\ge 0$
- $|A|=-A\Leftrightarrow A\le 0$

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.8 Giải các phương trình, bất phương trình sau:

① $x^2-x+|3x-2|>0$ ② $|x^2-8x+15|=x-3$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.21 Giải các phương trình sau:

① $|x^2-5x+4|=x^2+6x+5$ ② $|x-1|=2x-1$ ③ $\left|\dfrac{x^2-2}{x+1}\right|=2$

④ $|2x+3|=|4-3x|$ ⑤ $|x^2-2x-3|=2x+2$ ⑥ $x^2-|2x-1|=0$

⑦ $|x^2-2x-3|=x^2-2x+5$ ⑧ $|2x-3|=|x-1|$

2.22 Giải các bất phương trình sau:

① $|-x^2+x-1|\le 2x+5$ ② $|x^2-x|\le|x^2-1|$ ③ $|x^2-5x+4|\le x^2+6x+5$

④ $4x^2+4x-|2x+1|\ge 5$ ⑤ $3x^2-|5x+2|>0$ ⑥ $\dfrac{|2x-1|}{x^2-3x-4}<\dfrac{1}{2}$

2.23 Giải các bất phương trình sau:

① $|x-1|+|x+2|<3$ ② $2|x-3|-|3x+1|\le x+5$

2.24 Tìm tất cả các giá trị x thỏa mãn:

① $|x^2+x+1|=2x-1$ và $x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $|x^2+2x-4|+2x+6=0$ và $x+\sqrt{18}<1$

③ $|x+3|+x^2+3x=0$ ④ $|x^2-20x-9|=|3x^2+10x+21|$

Dạng 6. Phương trình & Bất phương trình chứa căn thức

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn ta thường dùng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để khử căn.*
- *Xem lại cách giải phương trình có dấu căn (Chương 3)*
- *Các dạng bất phương trình có chứa ẩn trong căn thức thường gặp:*

Dạng ①: $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B \end{cases}$

Dạng ②: $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

Dạng ③: $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases} \right.$

> ***Lưu ý:*** *Đối với các phương trình, bất phương trình không có dạng chuẩn như lí thuyết, ta thực hiện:*
> - *B1: Đặt điều kiện cho căn có nghĩa.*
> - *B2: Chuyển vế sao cho 2 vế đều không âm.*
>
> *để khử căn.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.9 Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\sqrt{x^2-1} \ge x+2$ ② $\sqrt{x^2-3x-10} < x-2$ ③ $\sqrt{x^2-2x-15} < x-3$

④ $\sqrt{x(x+3)} \le 6-x^2-3x$ ⑤ $(x^2+x-2)\sqrt{2x^2-1} < 0$ ⑥ $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} < \sqrt{x-2}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.25 Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{2x^2+4x-1}=x+1$ ② $9x+\sqrt{3x-2}=0$ ③ $\sqrt{-x^2+2x+4}=x-2$

④ $\sqrt{x^2-2x-3}=2x+3$ ⑤ $\sqrt{5x^2-6x-4}=2(x-1)$ ⑥ $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$

⑦ $\sqrt{x^2-4}=2\left(x-\sqrt{3}\right)$ ⑧ $\sqrt{4x^2+101x+64}=2(x+10)$

2.26 Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{x^2+2x}=-2x^2-4x+3$ ② $\sqrt{(x+1)(x+2)}=x^2+3x-4$

③ $\sqrt{x^2+3x+12}=x^2+3x$ ④ $2x^2-3-5\sqrt{2x^2+3}=0$

⑤ $18-2\sqrt{81-7x^3}=x^3$ ⑥ $2x^2+3x+3=5\sqrt{2x^3+3x+9}$

⑦ $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3(x+1)$

2.27 Giải các phương trình sau:

① $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$ ② $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6=0$

③ $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$ ④ $x^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=1$

2.28 Giải các bất phương trình sau:

① $\sqrt{x^2+x-6}<x-1$ ② $\sqrt{2x-1}\le 2x-3$ ③ $\sqrt{2x^2-1}>1-x$

④ $\sqrt{x^2-5x-14}\ge 2x-1$ ⑤ $\sqrt{x^2+6x+8}\le 2x+3$ ⑥

⑦ $\sqrt{2x^2+7x+5}>x+1$ ⑧ $\sqrt{x^2-x-12}\ge x-1$ ⑨ $\sqrt{x^2-4x-12}\le x-4$

⑩ $\sqrt{x^2+4x-5}\le x+3$

2.29 Giải các bất phương trình sau:

① $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}\le 3$ ② $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}>2$ ③ $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}<2$

④ $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+7}\ge 2$ ⑤ $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x}$ ⑥ $\sqrt{2x+1}\le 2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$

⑦ $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}$ ⑧ $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\ge\sqrt{2x-8}$ ⑨ $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}$

⑩ $4x+2>\sqrt{5x^2+61x}$ ⑪ $\sqrt{-x^2-8x-12}>x+4$ ⑫ $\sqrt{5x^2+61x}<4x+2$

⑬ $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$ ⑭ $\sqrt{x+3}<1-x$ ⑮ $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$

2.30 Giải các bất phương trình sau:

① $6\sqrt{(x-2)(x-32)}\le x^2-34x+48$ ② $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}<6$

③ $x^2-4x-6\ge\sqrt{2x^2-8x+12}$ ④ $2x(x-1)+1>\sqrt{x^2-x+1}$

⑤ $\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 7-2x-x^2$ ⑥ $(x+1)(x+4)<5\sqrt{x^2+5x+28}$

⑦ $\sqrt{(4+x)(6-x)}\le x^2-2x-12$ ⑧ $-4\sqrt{(4-x)(x+2)}\le x^2-2x-12$

⑨ $\sqrt{x(x+3)}\le -x^2-3x+6$ ⑩ $\sqrt{(x+1)(x+2)}<x^2+3x-4$

2.31 Giải các bất phương trình sau:

① $\sqrt{\frac{4x}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{4x}}>\frac{3}{2}$

② $2\sqrt{\frac{3x-1}{x}}\ge\frac{x}{3x-1}+1$

③ $2\sqrt{\frac{6x-1}{x}}<\frac{2x}{6x-1}+1$

④ $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\frac{1}{2x}+4$

2.32 Giải các bất phương trình sau:

① $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+\sqrt{(x-1)(3-x)}\le 2$

② $x(x+4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2<2$

③ $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

2.33 Giải các bất phương trình sau (nhân lượng liên hợp):

① $\sqrt{x+8}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\ge 3$

② $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}\right)\ge 2x-11$

③ $\left(\sqrt{3x+6}+\sqrt{3x-3}\right)\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}\right)\le 3$

④ $\frac{16x^2}{\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2}\ge 4(3x-2)$

⑤ $4(x+1)^2<(2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$

2.34 Giải các bất phương trình sau:

① $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$

② $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

③ $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}\le\sqrt{x^2+4x-5}$

④ $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$

2.35 Giải các bất phương trình sau:

① $(x-2)\sqrt{x^2+4}\le x^2-4$

② $(2x+1)\sqrt{x+1}<4x^2-1$

③ $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$

④ $(x-3)\sqrt{x^2+4}\le x^2-9$

⑤ $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$

⑥ $\frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}}\le 2x+3$

2.36 Giải các bất phương trình sau:

① $\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-3x-10}}>1$

② $\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{2x+5}\ge\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x-4}$

③ $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$

④ $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\ge\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$

2.37 Giải các bất phương trình sau:

① $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$

② $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$

2.38 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

① $y=\sqrt{|x^2+3x-4|-x+8}$

② $y=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{|2x-1|-x-2}}$

③ $y=\sqrt{\frac{1}{x^2-7x+5}-\frac{1}{x^2+2x+5}}$

④ $y=\sqrt{\sqrt{x^2-5x-14}-x+3}$

Dạng 7. Bài toán chứa tham số trong phương trình & bất phương trình

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$:

Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra kết quả sau:

Cho $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

① $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ ② $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

③ $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$ ④ $f(x)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

✍ *Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số ta xét 2 trường hợp:*

- ✓ *Trường hợp 1: $a=0$, giải tìm giá trị m rồi thay vào $f(x)$ kiểm tra*
- ✓ *Trường hợp 2: $a\neq 0$: Áp dụng 1 trong 4 công thức trên.*

Từ đó ta có thể suy ra ***điều kiện vô nghiệm của bất phương trình****:*

⑤ *Để BPT $f(x)>0$ vô nghiệm* $\Leftrightarrow f(x)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

⑥ *Để BPT $f(x)\geq 0$ vô nghiệm* $\Leftrightarrow f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$

⑦ *Để BPT $f(x)<0$ vô nghiệm* $\Leftrightarrow f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

⑧ *Để BPT $f(x)\leq 0$ vô nghiệm* $\Leftrightarrow f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

2. Giải và biện luận bất phương trình bậc hai: $f(x)=ax^2+bx+c>0$

- ***Bước 1***. *Xét $a=0$ (nếu hệ số a có tham số)*
- ***Bước 2***. *Lập Δ, cho $\Delta=0$ để tìm nghiệm, nếu có nghiệm thì nghiệm là $m_i=\ldots$*
- ***Bước 3***. *Lập bảng xét dấu a và Δ trên cùng một bảng xét dấu (biến số là m).*
- ***Bước 4***. *Dựa vào bảng xét dấu, biện luận nghiệm của bất phương trình.*

B. BÀI TẬP MẪU

VD2.10 Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu: $2x^2-\left(m^2-m+1\right)x+2m^2-3m-5=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD2.11 Tìm m để các biểu thức $(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$ luôn luôn dương.

Giải

- Với $m=-2$, tam thức bậc hai trở thành $1>0$: đúng với mọi x.
- Với $m\neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2+2(m+2)x+m+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ (m+2)^2-(m+2)(m+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ -m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2.$$

VD2.12 Tìm m để biểu thức sau luôn dương.

① $(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$. ② $(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1$.

VD2.13 Tìm m để các biểu thức sau luôn âm

① $f(x)=mx^2-x-1$. ② $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$.

VD2.14 Tìm m để $x^2+2(m+1)x-m+3\geq 0$ đúng với mọi $x\geq 0$.

VD2.15 Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $(m-2)x^2+2(m+1)x+2m>0$.

VD2.16 Tìm m để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$: $y = f(x) = 2x - 3 + \sqrt{(m-1)x^2 + 3(m-1)x + m}$

VD2.17 Giải và biện luận bpt: $2x^2 + (m-9)x + m^2 + 3m + 4 \geq 0$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

2.39 Tìm m để mỗi phương trình sau đây có nghiệm:

① $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ ② $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-3=0$

③ $x^2+(m-2)x-2m+3=0$

2.40 Tìm m để mỗi phương trình sau đây vô nghiệm:

① $(3-m)x^2-2(m+3)x+m+2=0$ ② $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$

2.41 CMR: mỗi phương trình sau vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào:

① $x^2-2(m+1)x+2m^2+m+3=0$ ② $(m^2+1)x^2+2(m+2)x+6=0$

③ $(2m^2+1)x^2-4mx+2=0$ ④ $x^2+2(m+1)x+2(m^2+m+1)=0$

⑤ $x^2+2(m-3)x+2m^2-7m+10=0$ ⑥ $x^2-(\sqrt{3}m-1)x+m^2-3m+2=0$

2.42 Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đây luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m:

① $x^2+(m+1)x+m-\frac{1}{3}=0$ ② $x^2-2(m-1)x+m-3=0$

③ $x^2+(m+1)x+\frac{3}{4}m+\frac{1}{2}=0$ ④ $(m-1)x^2+(3m-2)x+3-2m=0$

2.43 Tìm m để mỗi bất phương trình sau đây vô nghiệm:

① $x^2+6x+m+7\le 0$ ② $-x^2+2(m-1)x+1\ge 0$

③ $(m-2)x^2+2x-4\ge 0$ ④ $mx^2-4(m+1)x+m-5<0$

⑤ $(m-2)x^2+2(m-2)+m+4\le 0$ ⑥ $(m-4)x^2+(m+1)x+2m-1\ge 0$

⑦ $(m-1)x^2+2(m-1)x+3m-2>0$ ⑧ $(3m+1)x^2-(3m-4)x-2m+1<0$

⑨ $(m^2+2m-3)x^2+2(m-1)x+1<0$ ⑩ $m(m+8)x^2-2(m+8)x+8m+1\ge 0$

2.44 Tìm m để mỗi hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$:

① $y=f(x)=\sqrt{(m^2+4m-5)x^2-2(m-1)x+2}$ ② $y=f(x)=\sqrt{(3m+1)x^2-(3m+1)x+m+4}$

③ $y=f(x)=\dfrac{4x+5}{\sqrt{(2-3m)x^2+2mx+m-1}}+x-2$ ④ $y=f(x)=3x^2+mx-7-\sqrt{\dfrac{3x^2-4x}{x^2+mx+m}-2}$

⑤ $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{mx^2+(m+2)x+2}}{x-1}+m^2-3m+2017$

⑥ $y=f(x)=5x^2+2m-\sqrt{(m+1)x^2-2(m-1)+2-2m}$

2.45 Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương:

① $x^2-4x+m-5$ ② $x^2-(m+2)x+8m+1$

③ $x^2+4x+(m-2)^2$ ④ $(3m+1)x^2-(3m+1)x+m+4$

2.46 Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm:

① $(m+2)x^2+5x-4$ ② $(m-4)x^2+(m+1)x+2m-1$

③ $mx^2-12x-5$ ④ $-x^2+4(m+1)x+1-m^2$

2.47 Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x (có tập nghiệm là $\mathbb{R}$):

① $-x^2+2m\sqrt{2}x-2m^2-1<0$ ② $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+3>0$

③ $(m^2+3)x^2+2(m+1)x+1>0$ ④ $(m^2+2)x^2-2(m+1)x+1>0$

⑤ $(m-1)x^2+2(m-1)x-4m<0$ ⑥ $(m-4)x^2-(m-6)x+m-5\le 0$

⑦ $(m+1)x^2-(m-1)x-1-2m<0$ ⑧ $(m+1)x^2-2(m-1)x-m+2>0$

⑨ $(m-2)x^2-2(m-3)x+m-1<0$ ⑩ $(m-1)x^2-2(m+1)x+3(m-2)>0$

2.48 Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau có nghiệm:

① $\begin{cases}x^2+2x-15<0\\(m+1)x\ge 3\end{cases}$ ② $\begin{cases}x^2-5x+6<0\\mx+4<0\end{cases}$ ③ $\begin{cases}4x+1<7x-2\\x^2-2mx+1\le 0\end{cases}$ ④ $\begin{cases}x^2-3x-4\le 0\\(m-1)x-2\ge 0\end{cases}$

2.49 Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

① $\begin{cases}x^2+10x+16\le 0\\mx\ge 3m+1\end{cases}$ ② $\begin{cases}x^2-3x-4\le 0\\(m-1)x-2\ge 0\end{cases}$

2.50 Tìm các giá trị của m để:

① $x^2+2(m+1)x-m+3\ge 0$ đúng $\forall x\le 0$ ② $x^2-(m+1)x+1>0$ đúng $\forall x>0$

③ $(3-m)x^2-2(m+1)x+1>0$ đúng $\forall x<0$ ④ $x^2-2(m-2)x+m-2\le 0$ đúng $\forall x\in[0;1]$

⑤ $x^2-2mx+3m-2>0$ đúng $\forall x\in(1;2)$

2.51 Tìm tham số m để bất phương trình: $mx^2-2(m-1)x-m-5\le 0$

① Có nghiệm ② Có duy nhất một nghiệm

③ Có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2.

2.52 Tìm tham số m để bất phương trình: $(1-m)x^2+2mx+m-6\ge 0$

① Có nghiệm

② Có duy nhất một nghiệm

③ Có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1.

2.53 Tìm các giá trị của m sao cho phương trình: $x^4+(1-2m)x^2+m^2-1=0$

① Vô nghiệm ② Có 2 nghiệm phan biệt. ③ Có 4 nghiệm phân biệt.

2.54 Tìm các giá trị của a sao cho phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$(a-1)x^4-ax^2+a^2-1=0$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỦ ĐỀ 6

TN2.58 Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2-x-12$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $f\left(-\frac{2371}{801}\right)<0$.

B. $f\left(-\frac{35683}{12110}\right)<0$.

C. $f\left(\frac{1583492}{4100013}\right)>0$.

D. $f(x)<0$ với mọi x thuộc $(-\infty;-3)$.

TN2.59 Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2-x-12$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. $f(x)>0$ với mọi $x\ge 0$.

B. Tồn tại giá trị của x mà $f(x)<0$.

C. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>0$ là $\mathbb{R}$.

D. Phương trình $f(x)=0$, vô nghiệm.

TN2.60 Cho tam thức bậc hai $f(x)=4\sqrt{5}x-x^2-20$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $f(-2016)<0$.

B. $f(2017)>0$.

C. $f\left(2\sqrt{5}<0\right)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

TN2.61 Xét các khẳng định sau:

(I) $\frac{x^2}{2}-x-24<0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

(II) $(x+6)(8-x)>0$ với mọi x thuộc $(6;8)$.

(III) $(x+6)(8-x)\ge 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}\setminus(6;8)$.

(IV) $x^2-2x-48<0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

(V) $-x^2+2x+48<0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}\setminus[6;8]$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

TN2.62 Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a\ne 0$, $\Delta=b^2-4ac$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

A. Nếu $a<0$ và tồn tại số x_0 sao cho $f(x_0)>0$ thì $\Delta>0$.

B. Nếu tồn tại số x_0 sao cho $af(x_0)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Nếu tồn tại số x_0 sao cho $af(x_0)>0$ thì $\Delta<0$.

D. Nếu với mọi số x đều có $af(x_0)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Cho biểu thức $f\left(mx^2-5x-1\right)$. *Chọn kết quả đúng trong mỗi bài tập 6 và 7.*

TN2.63 Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho biểu thức $f(x)=\left(mx^2-5x-1\right)>0,\ x\in\mathbb{R}$.

A. $m>0$.

B. $m\in\left(-\frac{25}{4};0\right)$.

C. $m<-\frac{25}{4}$.

D. Không có giá trị nào của m.

TN2.64 Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho biểu thức $f(x)=\left(mx^2-5x-1\right)<0,\ x\in\mathbb{R}$.

A. $m<0$. **B.** $m=0$.

C. $m<-\dfrac{25}{4}$. **D.** Không có giá trị nào của m.

TN2.65 Cho biểu thức $f(x)=x^2+2mx-1$. Xét các khẳng định sau:

(I) Không có giá trị nào của m để $f(x)<0$ với mọi giá trị của x.

(II) Không có giá trị nào của m để $f(x)>0$ với mọi giá trị của x.

(III) Với mỗi giá trị của m đều tồn tại x_0 sao cho $f(x)<0$.

(IV) Với mỗi giá trị của m đều tồn tại x_0 sao cho $f(x)>0$.

Các khẳng định đúng là:

A. (I) và (II). **B.** (I) và (IV). **C.** (II) và (III). **D.** (III) và (IV).

TN2.66 Tập nghiệm S của bất phương trình $3x^2-5x-8<0$ là

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\left(-1;\dfrac{8}{3}\right)$. **C.** $S=\mathbb{R}\setminus\left[-1;\dfrac{8}{3}\right]$. **D.** $S=\mathbb{R}$.

TN2.67 Trong các bất phương trình sau, bất phương trình có tập nghiệm $S=[0;5]$ là

A. $x^2+5x>0$. **B.** $x^2+5x\le 0$ **C.** $x^2+5x<0$. **D.** $-x^2+5x\ge 0$.

TN2.68 Trong các bất phương trình sau, bất phương trình vô nghiệm là

A. $x^2-2x+m^2+2\le 0$. **B.** $x^2-2x-\left(m^2+2\right)<0$.

C. $x^2-2x+m^2+2>0$. **D.** $x^2+2x-\left(m^2+2\right)>0$.

TN2.69 Bất phương trình luôn có tập nghiệm $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m là

A. $x^2-2mx+2m^2-m+1<0$. **B.** $x^2-2mx+2m^2-m-1>0$.

C. $x^2-2mx+2m^2-m+1>0$. **D.** $x^2-2mx+2m^2-m-1<0$

TN2.70 Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(2x^2-3x+2\right)\left(1-x^2\right)<0$ là

A. $S=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-1;1)$.

C. $S=\varnothing$. **D.** $S=\mathbb{R}$.

TN2.71 Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(x-1-x^2\right)\left(4-x^2\right)\ge 0$ là

A. $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(-2;2)$. **C.** $S=[-2;2]$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus(-2;2)$.

TN2.72 Tập nghiệm S của bất phương trình $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-5x+4}\le 0$ là

A. $S=[2;3]$. **B.** $S=(2;3)\cup\{-2\}$. **C.** $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. **D.** $S=[2;3]\cup\{-2\}$.

TN2.73 Tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{2x^2-x-1}\ge 1$ là

A. $S=\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1;\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$. **B.** $S=\left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[1;\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$.

C. $S=\left[\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$. **D.** $S=\left[-\infty;\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right]$.

TN2.74 Tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{2x^2-x-1}<\frac{5}{2}$ là

A. $S=\left[\frac{1-\sqrt{59}}{4};\frac{1+\sqrt{59}}{4}\right]$. **B.** $S=\left[\frac{1-\sqrt{59}}{4};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[1;\frac{1+\sqrt{59}}{4}\right]$.

C. $S=\left(\frac{1-\sqrt{59}}{4};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[1;\frac{1+\sqrt{59}}{4}\right)$. **D.** $S=\left[-\infty;\frac{1-\sqrt{59}}{4}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{59}}{4};+\infty\right]$.

TN2.75 Tập nghiệm S của bất phương trình $|x-2x^2+3|\le 2$ là

A. $S=\left[\frac{1-\sqrt{41}}{4};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[1;\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right]$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=\left[-1;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$. **D.** $S=\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4};-1\right]\cup\left[\frac{3}{2};\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP PHẦN 2

2.55 Giải các bất phương trình sau:

① $\frac{3x-1}{\sqrt{3}}-x+2>2x-3$ ② $\frac{2x+5}{3}-3\le\frac{3x-7}{4}+x+2$

③ $\left(1+\sqrt{3}\right)x\le 4+2\sqrt{3}$ ④ $\left(x-\sqrt{5}\right)^2\ge\left(x+\sqrt{5}\right)^2-10$

2.56 Giải các bất phương trình sau:

① $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$ ② $\sqrt{x^6-4x^3+4}>x-\sqrt[3]{2}$

③ $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$

2.57 Giải các phương trình sau:

① $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ ② $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

③ $\left|2\sqrt{2|x|-1}-1\right|=3$ ④ $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=-\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$

2.58 Giải các phương trình sau:

① $\left|x^2-2x-3\right|-2>\left|2x-1\right|$ ② $2|x+1|<|x-2|+3x+1$

③ $\left|\sqrt{x-3}-1\right|+\left|\sqrt{x+5}-1\right|>2$ ④ $|x-6|>\left|x^2-5x+9\right|$

⑤ $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|<3$ ⑥ $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

⑦ $\frac{3}{|x+3|-1}\ge|x+2|$ ⑧ $\frac{9}{|x-5|-3}\ge x-2$

2.59 Giải các hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} 2x^2+9x+9>0 \\ 5x^2-7x-3\le 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x^2+11x-4\le 0 \\ x^2-8x-20\le 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2(x-1)-3(x-4)>x+5 \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4}\ge 0 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1 \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\le 2 \end{cases}$

2.60 Tìm tất cả các nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau:

① $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}>4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+25 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 15x-2>2x+\dfrac{1}{3} \\ 2(x-4)<\dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

2.61 Giải các bất phương trình sau:

① $\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x$ ② $7\left|4-\sqrt{x+9}\right|>x-9$

③ $x+13+\left|24-6\sqrt{6-x}\right|>0$ ④ $\sqrt{x(x+6)+9}-\sqrt{x^2-6x+6}>1$

2.62 Giải và biện luận các bất phương trình sau theo tham số m:

① $mx-1>3x+m^2$ ② $m(m-2)x+1\ge m-1$

③ $\dfrac{3x}{(m-7)^2}<\dfrac{x-1}{m-7}$ ④ $x^2+2mx+5\ge 0$

⑤ $mx^2+4x+1\le 0$ ⑥ $(m-3)x^2-2(m+1)x-(2m-3)\le 0$

2.63 Tìm a và b để bất phương trình sau có tập nghiệm là $[0;2]$:

$$(x-2a+b-1)(x+a-2b+1)\le 0$$

2.64 Tìm a và b $(b>-1)$ để hai bất phương trình sau tương đương:

$$(x-a+b)(x+2a-b)\le 0 \text{ và } |x+a-2|\le b+1$$

2.65 Giải các bất phương trình, hệ bất phương trình sau (ẩn m):

① $2m^2-m-5>0$ ② $-m^2+m+9>0$

③ $(2m-1)^2-4(m+1)(m-2)\ge 0$ ④ $m^2-(2m-1)(m+1)<0$

⑤ $\begin{cases} (2m-1)^2-4(m^2-m)\ge 0 \\ \dfrac{1}{m^2-m}>0 \\ \dfrac{2m-1}{m^2-m}>0 \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} (m-2)^2-(m+3)(m-1)\ge 0 \\ \dfrac{m-2}{m+3}<0 \\ \dfrac{m-1}{m+3}>0 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} 2m-1>0 \\ m^2-(m-2)(2m-1)<0 \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} m^2-m-2<0 \\ (2m-1)^2-4(m^2-m-2)\le 0 \end{cases}$

2.66 Tìm các giá trị của tham số m để các tam thức bậc hai sau có dấu không đổi (dấu không phụ thuộc vào x):

① $f(x)=2x^2-(m+2)x+m^2-m-1$ ② $f(x)=(m^2-m-1)x^2-(2m-1)x+1$

2.67 Tìm các giá trị của tham số m để mỗi phương trình sau đây có nghiệm:

① $2x^2+2(m+2)x+3+4m+m^2=0$ ② $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0$

2.68 Tìm các giá trị của tham số m để mỗi phương trình sau đây có hai nghiệm phân biệt trái dấu:

① $(m^2-1)x^2+(m+3)x+(m^2+m)=0$ ② $x^2-(m^3+m-2)x+m^2+m-5=0$

2.69 Tìm các giá trị của tham số m để mỗi phương trình sau đây có hai nghiệm dương phân biệt:

① $x^2-2x+m^2+m+3=0$ ② $(m^2+m+3)x^2+(4m^2+m+2)x+m=0$

③ $(m^2+m+1)x^2+(2m-3)x+m-5=0$ ④ $x^2-6mx+2-2m+9m^2=0$

⑤ $(m-2)x^2-2mx+m+3=0$

2.70 Cho: $mx^2-(2m+1)x+m+3=0$. Tìm m để phương trình có:

① hai nghiệm trái dấu ② hai nghiệm âm ③ 2 nghiệm dương phân biệt

2.71 Cho tam thức: $f(x)=x^2-2mx+5m-4$.

① Tìm m để $f(x)>0$ với mọi x.

② Tìm m để phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

2.72 Cho tam thức: $f(x)=(m-3)x^2-2(m+1)x+m+3$.

① Tìm m để $f(x)<0$ với mọi x.

② Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

2.73 Cho phương trình: $(m+1)x^2-2(m+2)x+m+7=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

① $x_1<2<x_2$ ② $x_1<x_2<2$ ③ $2<x_1<x_2$

2.74 Tìm m sao cho 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình:

① $(m-5)x^2-2(m-1)x+2m=0$ thỏa $x_1<-1<x_2$

② $(m+3)x^2-2(m+9)x+5(m-1)=0$ thỏa $1<x_1<x_2$

③ $(2m+1)x^2+2x+m+1=0$ thỏa $x_1<x_2<4$

④ $(m+1)x^2-2(m+9)x+5(m-1)=0$ thỏa $x_1<1<x_2$

⑤ $x^2-2mx+3m-2=0$ thỏa $x_1<2<x_2$

⑤ $(m+3)x^2+2(m-3)x+m-2=0$ thỏa $x_1<x_2<6$

⑥ $(m-2)x^2+2(4-3m)x+10m-11=0$ thỏa $-4<x_1<x_2$

2.75 Cho tam thức: $f(x)=(m-2)x^2-2mx+m-1$. Định m để:

① $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$. ② Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1\le x_2<2$

2.76 Cho phương trình: $(m-4)x^4+2(m-2)x^2+m-1=0$

① Tìm m sao cho phương trình vô nghiệm.

② Tìm m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

2.77 Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x>0$ và $y>0$?

$$\begin{cases}2x-(m^2+m+1)y=-m^2-9\\ m^4x+(2m^2+1)y=1\end{cases}$$

2.78 Tìm m để các bất phương trình sau đây luôn đúng với mọi x:

① $5x^2-x+m>0$ ② $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3\ge 0$

③ $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ ④ $m(m+2)x^2+2mx+2>0$

⑤ $mx^2-10x-5<0$ ⑥ $(m^2+4m-5)x^2-2(m-1)x+2<0$

⑦ $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ ⑧ $\dfrac{3x^2-5x+4}{(m-4)x^2+(1+m)x+2m-1}>0$

⑨ $-4<\dfrac{2x^2+mx-4}{-x^2+x-1}<6$ ⑩ $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$

2.79 Tìm m để mỗi hệ bất phương trình sau đây có nghiệm:

① $\begin{cases}7x-2\ge -4x+19\\ 2x-3m+2<0\end{cases}$ ② $\begin{cases}\sqrt{2}x+1>x-\sqrt{2}\\ m+x>2\end{cases}$

2.80 Tìm m để các bất phương trình sau đây vô nghiệm:

① $5x^2-x+m\le 0$ ② $mx^2-10x-5\ge 0$

2.81 Tùy theo giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm phương trình: $(m+3)x^4-(2m-1)x^2-3=0$

2.82 Tùy theo giá trị của m, hãy xác định số nghiệm phương trình: $|x^2-2x-3|=m$

2.83 Tìm tất cả các giá trị của m để ứng với mỗi giá trị đó phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$|1-mx|=1+(1-2m)x+mx^2$$

2.84 Cho phương trình: $(m-\sqrt{5})x^2-3mx+m+1=0$. Với giá trị nào của m thì phương tình đã cho:

① Có nghiệm ?

② Có hai nghiệm trái dấu ?

2.85 Cho phương trình: $(m-2)x^4-2(m+1)x^2+2m-1=0$. Tìm m để phương trình trên có:

① Một nghiệm.

② Hai nghiệm phân biệt.

③ Bốn nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN 2

TN2.76 Tìm điều kiện xác định của bpt $\sqrt{2x-6}+3<\sqrt{2-x}$.

A. $x\ge 3$. **B.** $x\le 2$. **C.** $2\le x\le 3$. **D.** $x\le 2$ hoặc $x\ge 3$.

TN2.77 Tìm điều kiện xác định của bpt $\sqrt{4-2x}<\sqrt{x-2}+5$.

A. $x=2$. **B.** $x\le 2$. **C.** $x\ge 2$. **D.** $-2\le x\le 2$.

TN2.78 Tìm điều kiện xác định của bpt $\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-2x+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$.

A. $1<x<6$. **B.** $x<6$ và $x\ne 1$. **C.** $1\le x\le 6$. **D.** $x<1$ hoặc $x>6$.

TN2.79 Tìm điều kiện xác định của bpt $\dfrac{5x}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{5x-10}}<0$.

A. $x>3$. **B.** $2<x<3$. **C.** $x\ne 2$ và $x\ne 3$. **D.** $x>2$ và $x\ne 3$.

TN2.80 Tìm điều kiện xác định của bất phương trình: $\sqrt{x^2-6x+9}+\dfrac{\sqrt{x-7}}{x-5}\le\dfrac{1}{x^2-11x+24}$.

A. $x\ne 5$ và $x\ne 8$. **B.** $x\ge 7$. **C.** $x\ge 7$ và $x\ne 8$. **D.** $x>7$ và $x\ne 8$.

TN2.81 Xét các cặp bất phương trình sau: I. $\dfrac{x+3}{x^2}>0$ và $x+3>0$.

II. $x-5>0$ và $(x-5)(x^2-2x+3)>0$. III. $x+1>0$ và $(x+1)(x^2-2x+3)>0$.

Cặp bất phương trình nào tương đương?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** II và III. **D.** I và III.

TN2.82 Giải bất phương trình sau: $\sqrt{2x-5}+4x\ge 10+\sqrt{5-2x}$.

A. $x\ge\dfrac{5}{2}$. **B.** $x\le\dfrac{5}{2}$. **C.** $x=\dfrac{5}{2}$. **D.** Vô nghiệm

TN2.83 Giải bất phương trình sau: $\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}+x<-x-3$.

A. $x<-\dfrac{5}{3}$. **B.** $x>-\dfrac{5}{3}$ và $x\ne 1$. **C.** $x>\dfrac{5}{3}$. **D.** $x<\dfrac{5}{3}$ và $x\ne 1$.

TN2.84 Giải bất phương trình sau: $(2\sqrt{3}-4)x<1-\sqrt{3}$.

A. $x\ge-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **B.** $x\ge\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $x\le-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $x\le\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

TN2.85 Giải bất phương trình sau: $(x-\sqrt{5})^2<40+(x+3\sqrt{5})^2$.

A. $x>2\sqrt{5}$. **B.** $x<2\sqrt{5}$. **C.** $x>-2\sqrt{5}$. **D.** $x<-2\sqrt{5}$.

TN2.86 Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x^4(x-5)}\ge 0$

A. $x\ge 5$. **B.** $x\ge 0$. **C.** $x=5$ hoặc $x=0$. **D.** $x\ge 5$ hoặc $x=0$.

TN2.87 Giải bất phương trình sau: $\sqrt{(x-1)(x-2)}\le 0$.

A. $x=1$ hoặc $x=2$. **B.** $x\le 1$. **C.** $x\le 2$. **D.** $x\ge 2$.

TN2.88 Giải bất phương trình sau: $|10-5x|\sqrt{4-x}\le 0$.

A. $x=2$. **B.** $x=4$ hoặc $x=2$. **C.** $x\le 4$. **D.** $x=4$.

TN2.89 Tập hợp nghiệm của bất phương trình sau: $\left(x^2+4\right)\left|2x+5\right|\ge 0$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

TN2.90 Tập hợp nghiệm của bất phương trình sau: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}>\frac{1-3x}{x^2-x}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

TN2.91 Giải bất phương trình sau: $\frac{2x-5}{x-4}\ge\frac{2x+4}{x-3}$.

A. $x\le 1$ hoặc $3<x<4$. **B.** $3<x<4$.

C. $1\le x<3 \ \vee \ x>4$. **D.** $x\le 1$ hoặc $3\le x\le 4$

TN2.92 Giải bất phương trình sau: $\frac{x-3}{x+1}+\frac{x}{x-1}\le 2$.

A. $-1\le x\le\frac{5}{3}$. **B.** $x<-1$ hoặc $1<x\le\frac{5}{3}$.

C. $-1<x<1$ hoặc $x\ge\frac{5}{3}$. **D.** $x\le -1$ hoặc $1<x\le\frac{5}{3}$.

TN2.93 Giải bất phương trình sau: $\frac{3x^2-5x+6}{x-4}<3x+1$.

A. $x>-3$. **B.** $-3<x<4$. **C.** $x>4$. **D.** $x>4$ hoặc $x<-3$.

TN2.94 Giải bất phương trình sau: $\frac{-3x^2-5x+6}{(x-3)(x+2)}>-3$.

A. $x<-2$ hoặc $-\frac{2}{3}<x<3$. **B.** $x<-2$ hoặc $x>3$.

C. $-2<x<-\frac{2}{3}$ hoặc $x>3$. **D.** $-2<x<3$.

TN2.95 Bất phương trình $(4m-5)x+3\ge 4mx+5m$ có tập hợp nghiệm là tập con của $(-\infty;0]$ khi và chỉ khi:

A. $m\ge-\frac{3}{5}$. **B.** $m\ge\frac{3}{5}$. **C.** $m\le-\frac{3}{5}$. **D.** $m\le\frac{3}{5}$.

TN2.96 Bất phương trình $\left(m^2-2\right)x-m^2<7x+4m+3$

A. Vô nghiệm khi và chỉ khi $m=-3$.

B. Có tập nghiệm là $\left(-\infty;\frac{m+1}{m-3}\right)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>3\end{array}\right.$.

C. Có tập nghiệm à $\left(\frac{m+1}{m-3};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $-3<m<3$.

D. Cả 3 đáp án trên.

TN2.97 Tập hợp nghiệm của bất phương trình $|2x-6|<2x+5$ là:

A. $\left[-\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$. **D.** Đáp số khác.

TN2.98 Giải phương trình: $|x-3|+|x+2|=5$.

A. Vô nghiệm. **B.** $\{-2;3\}$. **C.** $[-2;3)$. **D.** $[-2;3]$.

TN2.99 Giải bất phương trình: $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x-1}>2$.

A. $0<x<\frac{3}{8}$ hoặc $x>1$. **B.** $x<0$ hoặc $x>1$.

C. $x<0$ hoặc $\frac{3}{8}<x<1$. **D.** $0<x<\frac{3}{8}$.

TN2.100 Cho bất phương trình: $(m+3)(x-4)>m^2+4m+3$ (1). Xét các mệnh đề sau:

I. Nếu $m<-3$: (1) có nghiệm là $x<m-3$.

II. Nếu $m>-3$: (1) có nghiệm là $x>m-3$.

III. Nếu $m=-3$: (1) vô số nghiệm.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** I và II. **D.** I, II và III.

TN2.101 Giải bất phương trình: $\frac{3x-4}{x+2}\le\frac{2x-4}{x-2}$.

A. $-2<x\le 8$. **B.** $x\ge 8$ hoặc $x<-2$.

C. $-2<x<2$ hoặc $2<x\le 8$. **D.** $x\ge 8$.

TN2.102 Giải bất phương trình: $\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}>\frac{2x^2+2x}{x+5}$.

A. $-5<x<1$. **B.** $-5<x<-\frac{3}{2}$ hoặc $x>1$.

C. $x<-5$ hoặc $x>1$. **D.** $x<-5$ hoặc $-\frac{3}{2}<x<1$.

TN2.103 Giải bất phương trình: $x^4-5x^3+5x^2+5x-6\le 0$.

A. $-1\le x\le 1$ hoặc $2\le x\le 3$. **B.** $x\le -1$ hoặc $1\le x\le 2$ hoặc $x\ge 3$.

C. $-1\le x\le 3$. **D.** $-1\le x\le 2$ hoặc $x\ge 3$.

TN2.104 Miền nghiệm của bất phương trình: $(x-4)\sqrt{x^2-5x}>\frac{x^3-549}{\sqrt{x^2-5x}}$ là:

A. $-\frac{61}{9}<x<9$. **B.** $-\frac{61}{9}<x<0$ hoặc $5<x<9$.

C. $x<-\frac{61}{9}$ hoặc $x>9$. **D.** $x<-\frac{61}{9}$ hoặc $0<x<5$.

TN2.105 Miền nghiệm của bất phương trình: $-1<\frac{-x^2+2x+7}{x^2+1}<4$ là:

A. $-4<x<-\frac{3}{5}$ hoặc $x>1$ **B.** $-4<x<1$.

C. $-\frac{3}{5}<x<1$. **D.** $x<-4$ hoặc $x>1$.

TN2.106 Giải bất phương trình: $(x^2-9)(4-x)>x^2-7x+12$:

A. $-4\le x\le 4$. **B.** $-4<x<3$ hoặc $x>4$

C. $x<-4$ hoặc $x>3$. **D.** $x<-4$ hoặc $3<x<4$.

TN2.107 Giải phương trình: $\sqrt{3x-5}=x-5$

A. $x=10$. **B.** $x=3$. **C.** $x=3$ hoặc $x=10$. **D.** Vô nghiệm.

TN2.108 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+2x+2}\le 2x+3$.

A. $x\le -\frac{7}{3}$ hoặc $x\ge -1$. **B.** $x\le -\frac{7}{3}$ hoặc $x\ge -\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{7}{3}\le x\le -1$. **D.** $x\ge -1$.

TN2.109 Định m để bất phương trình $-x^2+2(m-4)x+2m-11<0$ có miền nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m<1$ hoặc $m>5$. **B.** $1<m<5$.

C. $m<-5$ hoặc $m>-1$. **D.** $-5<m<-1$.

TN2.110 Giải bất phương trình $-4\le \frac{x^2-2mx+m}{x^2+x+2}\le 3$ có miền nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

A. $-\frac{13}{2}\le m\le 12$. **B.** $m\le -\frac{13}{2}$ hoặc $m\ge 12$. **C.** $-3\le m\le \frac{3}{2}$. **D.** $m\le -3$ hoặc $m\ge \frac{3}{2}$.

TN2.111 Định m để phương trình $x^2+(m+1)x+2m-2>0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3<0$.

A. $m>-1$ và $m\ne 3$ **B.** $m>3$. **C.** $m<-1$. **D.** $-1<m<3$.

TN2.112 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+2x+2}\le 2x+3$.

A. $x\le -\frac{7}{3}$ hoặc $x\ge -1$. **B.** $x\le -\frac{7}{3}$ hoặc $x\ge -\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{7}{3}\le x\le -1$. **D.** $x\ge -1$.

TN2.113 Với điều kiện nào của m để phương trình $mx^2+2(3m-2)x+8m-16=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>1$.

A. $-2<m<2$. **B.** $m\ne 0$ và $m\ne 2$. **C.** $m<0$ hoặc $m>2$. **D.** $0<x<2$.

TN2.114 Tập nghiệm của phương trình: $|x^2+7x+4|=|x+11|$ là

A. $\{-7;1\}$. **B.** $\{-5;-3\}$. **C.** $\{-3;-1\}$. **D.** $\{-7;-5;-3;1\}$.

TN2.115 Giải bất phương trình: $|x^2+5x|\ge x+5$.

A. $-5\le x\le -1$ hoặc $x\ge 1$. **B.** $-5\le x\le 1$. **C.** $x\le -1$ hoặc $x\ge 1$. **D.** $-1\le x\le 1$.

TN2.116 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-5x+6<0 & (1)\\ \frac{2}{x-2}+\frac{5x}{x+3}>5 & (2)\end{cases}$

A. $2<x<3$. **B.** $2<x<\frac{26}{3}$. **C.** $x<-3$ hoặc $2<x<\frac{26}{3}$. **D.** $x<-3$ hoặc $3<x<\frac{26}{3}$.

TN2.117 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x-4)^2+(x-2)^2 \ge 0 & (1) \\ -x^2+x+6>0 & (2) \end{cases}$

A. $2<x<3$. **B.** $-2<x<3$.
C. $x \le 2$ hoặc $x \ge 3$. **D.** $x \le -2$ hoặc $x \ge 3$.

TN2.118 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+8}{4x^2+4x+2}>0 & (1) \\ \dfrac{x^2+x+2}{x^2-8x+15}<0 & (2) \end{cases}$

A. $x<2$ hoặc $x>5$. **B.** $2<x<3$ hoặc $x>4$.
C. $3<x<4$. **D.** $3<x<5$.

TN2.119 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{2x+9}{x+3}>0 & (1) \\ \dfrac{x^2+x+2}{x^2-8x+15}<0 & (2) \end{cases}$

A. $-9<x<-3$ hoặc $x>3$. **B.** $-3<x<3$.
C. $-3<x<1$. **D.** Vô nghiệm.

TN2.120 Giải bất phương trình: $1<\dfrac{x^2-4x+9}{x^2+2x+3}<3$.

A. $x<1$. **B.** $-5<x<1$. **C.** $-5<x<0$. **D.** $0<x<1$.

TN2.121 Miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2-5x+4 \ge 0 \\ x^2-8x+15 \le 0 \\ -x^2+10x-9 \ge 0 \end{cases}$.

A. $x<1 \vee x>4$. **B.** $4 \le x \le 5$. **C.** Vô nghiệm. **D.** $3 \le x \le 9$.

TN2.122 Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2+7x+10 \ge 0 \\ x^3+2x^2-x-2 \le 0 \end{cases}$.

A. $-5 \le x \le -2$. **B.** $-5 \le x \le -2$ hoặc $-1 \le x \le 1$.
C. $x \le -2$ hoặc $-1 \le x \le 1$. **D.** Vô nghiệm.

TN2.123 Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x^2+5x+4 \le 0 \\ (m-5)x-7 \ge 0 \end{cases}$.

A. $-4 \le x \le 5$. **B.** $-4 \le m \le 4$. **C.** $m \le 5$. **D.** Không tồn tại m.

TN2.124 Định m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm: $\begin{cases} x^2-6x+5 \ge 0 \\ x^2+(2m+3)x+m^2+3m \le 0 \end{cases}$.

A. $1<m<2$. **B.** $m<1$ hoặc $m>2$. **C.** $m<1$. **D.** Không tồn tại m.

TN2.125 Tìm các giá trị của a sao cho với mọi x, ta luôn có: $1 \le \dfrac{2x^2+3x+a}{x^2+2x+2}<5$.

A. $a \le \dfrac{9}{4}$ hoặc $a \ge \dfrac{71}{12}$. **B.** $\dfrac{9}{4} \le a \le \dfrac{71}{12}$. **C.** $a \le \dfrac{9}{4}$. **D.** Không tồn tại a.

TN2.126 Giải phương trình $|3x-5|=x+6$.

A. $x=\dfrac{11}{2}$. **B.** $x=-\dfrac{1}{4}$.

C. $x=\dfrac{11}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $x=-\dfrac{11}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1}{4}$.

TN2.127 Số nghiệm của phương trình $|x^2-5x+4|=-4x+4$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

TN2.128 Tập nghiệm của phương trình $|x^2-3x+5|-|-4x+5|=0$ là:

A. $\{-1;0;2\}$. **B.** $\{-1;0\}$. **C.** $\{2;5\}$. **D.** $\{-1;0;2;5\}$.

TN2.129 Giải bất phương trình $\left|\dfrac{4x-9}{2x+3}\right|\le 7$.

A. $x\le -3$ hoặc $x>-\dfrac{3}{2}$. **B.** $x\le -3$ hoặc $x\ge -\dfrac{2}{3}$.

C. $x\le -\dfrac{3}{2}$ hoặc $x\ge -\dfrac{2}{3}$. **D.** $\mathbb{R}$.

TN2.130 Giải bất phương trình $|9x+5|\ge x^2-2x+5$.

A. $-1\le x\le 1$. **B.** $-2\le x\le -1$ hoặc $-5\le x\le 11$.

C. $x\le -2$ hoặc $x\ge 11$. **D.** Vô nghiệm.

TN2.131 Giải phương trình $\sqrt{3x^2-16x+5}=5-x$.

A. $x=-2$. **B.** $x=5$. **C.** $-2\le x\le 5$. **D.** $x=2\vee x=5$.

TN2.132 Giải phương trình: $|x^2+5x+6|=x+3$.

A. $x=-1$ hoặc $x=-3$. **B.** $x=-1$.

C. $x=1$ hoặc $x=3$. **D.** $x=1$ hoặc $x=-3$.

TN2.133 Giải phương trình $\sqrt{59-x^2}=x^2-3$.

A. $x=-5$ hoặc $x=10$. **B.** $x=10$.

C. $x=-\sqrt{10}$ hoặc $x=\sqrt{10}$. **D.** $x=-\sqrt{5}$ hoặc $x=\sqrt{5}$.

TN2.134 Tìm nghiệm của bất phương trình: $\dfrac{2x^2+x}{1-2x}\ge 1-x$.

A. $\dfrac{1}{4}\le x<\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{2}$.

C. $x<\dfrac{1}{4}$ hoặc $x\ge\dfrac{1}{2}$. **D.** $x\le\dfrac{1}{4}$ hoặc $x\ge\dfrac{1}{2}$.

TN2.135 Với giá trị nào của m thì bất phương trình sau vô nghiệm: $(m+3)x^2+2(m+2)x>4$.

A. $m<-4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m\le -4$. **D.** Không tồn tại m.

TN2.136 Với giá trị nào của m thì bất phương trình sau vô nghiệm: $2(m-1)x\ge -mx^2-4$.

A. $1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$. **B.** $m<1-\sqrt{2}$ hoặc $m>1+\sqrt{2}$.

C. $3-2\sqrt{2}<m<3+2\sqrt{2}$. **D.** $m<3-2\sqrt{2}$ hoặc $m>3+2\sqrt{2}$.

TN2.137 Định m để bất phương trình $(m-7)x-2m>4+(m-2)x$ có tập hợp nghiệm là tập hợp con của $(-\infty;1]$.

A. $m\le -5$. **B.** $m<5$. **C.** $m>1$. **D.** $m\ge 1$.

TN2.138 Định m để bất phương trình $(2m-7)x+2\le 2mx-4m$ có tập hợp nghiệm là tập hợp con của $[-2;+\infty)$.

A. $m\ge 4$. **B.** $m\le 4$. **C.** $m\le -4$. **D.** $m\ge -4$.

TN2.139 Để giải bất phương trình $\dfrac{2-3x}{4x+5}+3<0$ có học sinh lí luận qua các giai đoạn sau:

I. $\dfrac{2-3x}{4x+5}+3<0\Leftrightarrow \dfrac{2-3x+3(4x+5)}{4x+5}<0\Leftrightarrow \dfrac{9x+7}{4x+5}<0.$ (1)

II. (1) $\Leftrightarrow (9x+7)(4x+5)<0.$ (2)

III. (2) $\Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}<x<-\dfrac{7}{9}.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $\left(-\dfrac{5}{4};-\dfrac{7}{9}\right)$.

Lí luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ giai đoạn nào?

A. Sai từ giai đoạn I. **B.** Sai từ giai đoạn II. **C.** Sai từ giai đoạn III. **D.** Cả I, II, III đều đúng.

TN2.140 Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}\dfrac{x+5}{x+4}\ge 2\\ \dfrac{x-3}{x+6}<-2\end{cases}$.

A. $x<-4$ hoặc $x\ge -3$. **B.** $-4<x<-3$. **C.** $x\le -4$ hoặc $x\ge -3$. **D.** $-6\le x<-3$.

TN2.141 Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}(x-5)^2-(x+4)^2\le 0\\ \dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\le 0\end{cases}$.

A. $\dfrac{1}{2}\le x<2$. **B.** $x\le \dfrac{1}{2}$ hoặc $x\ge 2$.

C. $x\le -2$ hoặc $0\le x<2$. **D.** $x<-2$ hoặc $x\ge \dfrac{1}{2}$.

TN2.142 Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}\dfrac{-1}{x+2}\le \dfrac{4}{2x-5}\\ \dfrac{x+3}{x-5}-\dfrac{2}{x-2}\ge 0\end{cases}$.

A. $x<2$ hoặc $x>5$. **B.** $-2<x\le -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x>\dfrac{5}{2}$.

C. $x<2$ hoặc $x>\dfrac{5}{2}$. **D.** $-2<x\le -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x>5$.

TN2.143 Giải bất phương trình: $-5\le \dfrac{2x+5}{x-8}\le 4$.

A. $x\le 5$ hoặc $x>8$. **B.** $x<8$ hoặc $x>\dfrac{37}{2}$.

C. $x\le 5$ hoặc $x\ge \dfrac{37}{2}$. **D.** $x<-8$ hoặc $x>8$.

TN2.144 Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} > 3 \\ \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{5x}{x+3} \ge 6 \end{cases}$.

A. $2 < x \le 4$. **B.** Vô nghiệm.

C. $x \le 5$ hoặc $x \ge \dfrac{37}{2}$. **D.** $x < -3$ hoặc $2 < x \le 4$ hoặc $x \ge \dfrac{9}{2}$.

TN2.145 Gọi x_1 và x_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $|3x+5| = |x-5|$. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng

A. -25. **B.** 5. **C.** 25. **D.** -5.

TN2.146 Giải bất phương trình: $5\sqrt{x^2+5x+28} > x^2+5x+4$.

A. $-9 < x < 4$. **B.** $x < -9$ hoặc $x > 4$. **C.** $0 < x < 8$. **D.** $x < 0$ hoặc $x > 8$.

TN2.147 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$ với $2 \le x \le 6$.

A. 0 và 4. **B.** 2 và 4. **C.** 2 và $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$ và 4.

Giả thiết sau dùng cho 3 câu 148, 149, 150. Cho năm hàm số:

$f_1(x^2+2x+3)$, $f_2(x) = |x| + \dfrac{1}{|x|}$, $f_3(x) = \left|x + \dfrac{1}{x}\right|$, $f_4(x) = x + \dfrac{1}{x}$ và $f_5(x) = 1 - x^2 + 2x$. *Hãy chọn khẳng định đúng:*

TN2.148 Hàm số **không** có giá trị nhỏ nhất là

A. $f_1(x)$. **B.** $f_2(x)$. **C.** $f_3(x)$. **D.** $f_5(x)$.

TN2.149 Hàm số có giá trị lớn nhất bằng -2 trên khoảng $(-\infty;0)$ là

A. $f_1(x)$. **B.** $f_2(x)$. **C.** $f_3(x)$. **D.** $f_4(x)$.

TN2.150 Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 là

A. $f_1(x)$. **B.** $f_4(x)$. **C.** $f_5(x)$. **D.** $f_3(x)$.

TN2.151 Hãy chỉ ra khẳng định sai trong các khẳng định sau. Mọi nghiệm của bất phương trình $2x+1>0$ đều là nghiệm của bất phương trình $mx-m+1>0$ khi

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{2}{3}$. **C.** $m<0$ hoặc $m>\dfrac{2}{3}$. **D.** $0<m<\dfrac{2}{3}$.

TN2.152 Cho năm phương trình:

$x^2+(m+2)x+m=0$ (1) $x^2-2(m+1)x+m-5=0$ (2)

$2(m^2+1)x^2-2mx+1=0$ (3) $x^2-2(m-2)x+3m^2-5m+12=0$ (4)

$x^2+(\sqrt{3}m+1)x+m^2-\sqrt{3}m+7=0$ (5)

Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

Trong năm phương trình trên, các phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là

A. (1). **B.** (1) và (2) **C.** (1), (2) và (5). **D.** (1) và (5).

TN2.153 Với năm phương trình đã cho ở bài **TN2.152**, hãy chọn khẳng định đúng. Các phương trình có ít hơn hai ngiệm với mọi giá trị của m là

A. (3). **B.** (3) và (5). **C.** (3), (4) và (5). **D.** (3) và (4).

TN2.154 Cho ba biểu thức

$f_1(x)=x^2+4x+m-1$

$f_2(x)=-\sqrt{2}x^2+2x+m-2$

$f_3(x)=(3m+2)x^2-(3m+4)x+m+1$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. Với mọi m thuộc $\left(\frac{2-2\sqrt{7}}{3};\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$ ta đều có $f_3(x)$ luôn là số âm khi x thay đổi.

B. Khi $m>5$ thì $f_1(x)>0$ với mọi giá trị của x.

C. Không có giá trị nào của m để $f_1(x)<0$ với mọi giá trị của x.

D. Chỉ khi $m>2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì mới tồn tại x_0 để $f_2(x_0)>0$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM PHẦN 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	B	C	C	D	C	D	C	C	B	B	A	C	D	B	D	C	A	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	A	A	C	D	C	C	D	A	D	D	A	C	B	C	D	B	D	A	C

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	A	B	C	B	D	D	B	C	A	B	D	A	A	C	B	B	C	B	A

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	C	D	C	D	B	D	A	C	A	D	D	D	C	A	C	A	B	D	C

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	C	A	D	C	D	A	B	D	D	A	C	B	A	D	D	B	D	A	C

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
C	D	A	B	A	D	A	D	B	C	A	D	C	D	C	A	B	C	D	C

121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	A	B	A	B	C	A	B	B	D	D	A	C	A	D	C	A	D	D	B
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154						
A	D	C	B	C	A	C	D	D	C	C	B	C	A						

7. TRÍCH ĐỀ THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

A – BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI

3.1 **[ĐHA-03]** Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

3.2 **[ĐHA-05]** Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$$

3.3 **[ĐHD-05]** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$$

3.4 **[ĐHA-06]** Cho hai số thực $x\ne 0,\ y\ne 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ *ĐS: MaxA = 16 khi x = y = 1/2*

3.5 **[ĐHB-06]** Cho x, y là các số thực thay đổi.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$

3.6 **[ĐHA-07]** Cho x, y, z là số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện xyz = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

3.7 **[ĐHB-07]** Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$.

3.8 **[ĐHA-07]** Cho x, y, z là các biến số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(x^3+z^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(z^3+x^3\right)}+2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right)$$

3.9 **[ĐHB-08]** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trịn nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{2\left(x^2+6xy\right)}{1+2xy+2y^2}$

3.10 **[ĐHD-08]** Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$.

3.11 **[CĐ-08]** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$.

3.12 **[DBĐHB-08]** Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{yz}{3x}$. Chứng minh rằng: $x\le\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}$

3.13 **[ĐHA-09]** Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x(x+y+z)=3yz$, ta có: $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3$

3.14 **[ĐHB-09]** Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$

3.15 **[ĐHD-09]** Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$

3.16 **[ĐHB-10]** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

3.17 **[ĐHD-10]** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$.

3.18 **[CĐ-10]** Cho hai số thực dương thay đổi x, y thỏa mãn điều kiện $3x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

3.19 **[ĐHAA1-11]** Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;\,4]$ và $x\ge y$, $x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{2x+3y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}$

3.20 **[ĐHB-11]** Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

3.21 **[ĐHD-11]** Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$.

3.22 **[ĐHB-12]** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^5+y^5+z^5$

3.23 **[ĐHD-12]** Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$

3.24 **[ĐHAA1-12]** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{32a^3}{(b+3c)^3}+\dfrac{32b^3}{(a+3c)^3}-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

3.25 **[ĐHB-13]** Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a-b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

3.26 **[ĐHD-13]** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy\le y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$

3.27 **[ĐHAA1-14]** Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y-z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$

3.28 **[ĐHB-14]** Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn điều kiện $(a+b)c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}$

3.29 **[ĐHD-14]** Cho hai số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $1\le x\le 2;\ 1\le y\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$

3.30 **[THPTQG-15]** Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $[1;3]$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$.

B - BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. Bất phương trình

3.31 Giải bất phương trình: $|x^2-2x-3|\le 3x-3$

ĐH Văn hóa HN - 98 <u>ĐS</u>: $2\le x\le 5$

3.32 Giải bất phương trình: $|x-5|-x^2+7x-9\ge 0$

ĐH DL Thăng Long - 99 <u>ĐS</u>: $3-\sqrt{5}\le x\le 4+\sqrt{2}$

3.33 Giải bất phương trình: $|x^2-2x-3|\ge 5(x-3)$

ĐH Văn hóa HN - 00 <u>ĐS</u>: $x\le 3\vee x\ge 4$

3.34 Giải bất phương trình: $x^2-3>\sqrt{x^2-2x+1}$

ĐH An Giang - 01 <u>ĐS</u>: $x<(-1-\sqrt{17})/2\vee x>2$

II. Bất phương trình có chứa tham số

3.35 Tìm m để: $x^2+2|x-m|+m^2+3m+1<0$ có nghiệm ?

HV Kỹ Thuật Quân sự - 96 <u>ĐS</u>: $-1<m<-1/2$

3.36 Tìm a để bất phương trình: $x^2+|x-a|<3$ có nghiệm âm ?

HV Kỹ Thuật Quân sự - 00 <u>ĐS</u>: $-13/4<a<3$

C - BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

1. Bất phương trình

3.37 Giải bất phương trình: $\sqrt{x-3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}$

TH Kỹ Thuật Y Tế 3 - 97 — ĐS: $x\ge 3$

3.38 Giải bất phương trình: $x\le\frac{1}{2}\vee x=1$

ĐHDL Văn Lang - 97 — ĐS: $x\le -5/6\vee x\ge 3$

3.39 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$

ĐH SP Vinh Khối D - 99 — ĐS: $x<-7/9$

3.40 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}>3-\sqrt{x+4}$

ĐH Bách Khoa - 99 — ĐS: $x>0$

3.41 Giải bất phương trình: $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x-1}\le 3\sqrt{x}$

ĐH An Ninh Khối D - 99 — ĐS: $x\ge 1/4$

3.42 Giải bất phương trình: $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+7}\le\sqrt{x+2}$

CĐ Kinh Tế Kĩ Thuật CN II - 07 — ĐS: $-2\le x\le 3$

3.43 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3}\ge\sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}$

ĐH Tây Nguyên - 99 — ĐS: $4\le x\le 5\vee 6\le x\le 7$

3.44 Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}>\sqrt{x-3}$

ĐH Tây Nguyên - 99 — ĐS: $3\le x<\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

3.45 Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\ge\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$

ĐH Huế Khối D - 99 — ĐS: $x=-3\vee -2\le x\le 4$

3.46 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{3}{2}$

ĐH Ngân Hàng - 99 — ĐS: $x\ge 1$

3.47 Giải bất phương trình: $\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2}<x+21$

ĐH Mỏ Địa Chất HN - 99 — ĐS: $-9/2\le x<7/2\wedge x\ne 0$

3.48 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-|x|}<x$

ĐH Mỹ Thuật Công Nghiệp - 99 — ĐS: $x\ge 1$

3.49 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}\le\sqrt{4x^2-18x+18}$

ĐH Dược Hà Nội - 00 — ĐS: $x\le -5\vee x=3\vee 5\le x\le 17/3$

3.50 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$

ĐH BK Hà Nội Khối D - 00 — ĐS: $x=-5\vee x=-1$

3.51 Giải bất phương trình: $\left(x^2+x-2\right)\sqrt{2x^2-1}<0$

CĐSP Nhà Trẻ Mẫu Giáo - 00 ĐS: $-2<x<-\sqrt{2}/2\vee\sqrt{2}/2<x<1$

3.52 Giải bất phương trình: $x+\sqrt{x^2+4x}>1$

HV Chính Trị QG TpHCM - 00 ĐS: $x>1/6$

3.53 Giải bất phương trình: $x+1\ge\sqrt{2\left(x^2-1\right)}$

ĐHDL Duy Tâm Khối D - 00 ĐS: $x=-1\vee1\le x\le3$

3.54 Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+1)(4-x)}>x-2$

ĐH Mỏ địa chất HN - 00 ĐS: $-1\le x<7/2$

3.55 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}>\sqrt{5-2x}$

ĐH Thủy Lợi - 00 ĐS: $2<x\le5/2$

3.56 Giải bất phương trình: $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-9}\le\sqrt{5x-27}$

ĐHDL Phương Đông - 00 ĐS: $x\ge(229+8\sqrt{411})/59$

3.57 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

ĐHDL Kỹ Thuật CN - 00 ĐS: $5/2\le x<3$

3.58 Giải bất phương trình: $\left|x^2-\sqrt{x-3}\right|<\left|x^2-2\right|+\left|2-\sqrt{x-3}\right|$

ĐH An Giang - 01 ĐS: $x>1$

3.59 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}>2x-5$

ĐH Thái Nguyên Khối D - 01 ĐS: $x\le1\vee2\le x<(17+\sqrt{13})/6$

3.60 Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$

ĐH Kinh Tế Quốc Dân - 01 ĐS: $-4/3\le x<4\vee x\le-5$

3.61 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\le4$

ĐHDL Bình Dương - 01 ĐS: $1\le x\le65/16$

3.62 Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}\le\sqrt{4x+9}$

ĐHDL Bình Dương - 01 ĐS: $3\le x\le4$

3.63 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+4}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}$

ĐHDL Thăng Long Khối D - 01 ĐS: $x>\sqrt{52/3}$

3.64 Giải bất phương trình: $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$

ĐH Y Dược TpHCM - 01 ĐS: $x\le-13/6\vee x\ge3$

3.65 Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

ĐHDL Hồng Đức - 01 ĐS: $-5\le x<4\vee x>4$

3.66 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge2\sqrt{x^2-5x+4}$

ĐH Y Dược TpHCM - 01 ĐS: $x=1\vee x\ge4$

3.67 Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\ge x$

ĐH Ngoại Thương - 01 ĐS: $0\le x\le1$

3.68 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$

ĐH Kiến Trúc Hà Nội - 01 ĐS: $x\le 1/2 \vee x=1$

3.69 Giải bất phương trình: $\dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}>x-4$

ĐH Vinh - 01 ĐS: $-1\le x<8$

3.70 Giải bất phương trình: $\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$

ĐH Khối D - 02 ĐS: $x\le -1/2 \vee x=2 \vee x\ge 3$

3.71 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+12}\ge\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}$

Dự bị ĐH Khối B - 02 ĐS: $3\le x\le 4$

3.72 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+11}\ge\sqrt{x-4}+\sqrt{2x-1}$

CĐ Điều Dưỡng - 04 ĐS: $4\le x\le 5$

3.73 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}\ge x+2$

ĐH Hùng Vương - Hệ CĐ - 04 ĐS: $x\le -3$

3.74 Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

ĐH Khối A - 04 ĐS: $x>10-\sqrt{34}$

3.75 Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$

Dự bị ĐH Khối D - 05 ĐS: $2/3\le x\le 1 \vee 14/3\le x\le 5$

3.76 Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$

ĐH Khối A - 05 ĐS: $2\le x<10$

3.77 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-6x+1}-4x+1\le 0$

Dự bị ĐH Khối B - 05 ĐS: $x=1/4 \vee x\ge 1/2$

3.78 Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+5}+2x\ge 3$

CĐ KT Y Tế I - 06 ĐS: $x\ge 2/3$

3.79 Giải phương trình: $\dfrac{1}{1-x^2}+1>\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$

Dự bị ĐH Khối A - 08 ĐS: $-1<x<\sqrt{2}/2 \vee 2\sqrt{5}/5<x<1$

3.80 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2}\le\sqrt{5x+1}$

CĐ Khối A, B, D - 09 ĐS: $2\le x\le 3$

3.81 Giải bất phương trình: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}}\ge 1$

ĐH Khối A - 10 ĐS: $x=(3-\sqrt{5})/2$

II. Phương pháp đặt ẩn phụ

3.82 Giải bất phương trình: $x\left(x-4\right)\sqrt{-x^2+4x}+\left(x-2\right)^2<2$

ĐHQG TpHCM - 99 ĐS: $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

3.83 Giải bất phương trình: $(x^3+1)+(x^2+1)+3x\sqrt{x+1}>0$

ĐH Xây Dựng - 99 ĐS: $x\ge -1$

3.84 Giải bất phương trình: $\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x-1}{x}}\ge 3$

ĐH Mở Hà Nội - 99 ĐS: $-1/8\le x<0$

3.85 Giải bất phương trình: $(x+1)(x+4)<5\sqrt{x^2+5x+28}$

HV Quan hệ Quốc Tế - 00 ĐS: $-9<x<4$

3.86 Giải bất phương trình: $2x^2+4x+3\sqrt{3-2x-x^2}>1$

ĐHDL Phương Đông - 00 ĐS: $-3\le x\le 1$

3.87 Giải bất phương trình: $3\sqrt{x}+\frac{3}{2\sqrt{x}}<2x+\frac{1}{2x}-7$

ĐH Thái Nguyên - 00 ĐS: $0<x<4-3\sqrt{7}/2\vee x>4+3\sqrt{7}/2$

3.88 Giải bất phương trình: $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

ĐH An Ninh - 00 ĐS: $6/7\le x<6$

3.89 Giải bất phương trình: $2\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\ge 3\sqrt[4]{(3x-2)(x+2)}$

ĐH Hải Phòng - 01 ĐS: $2/3\le x\le 34/47\vee x\ge 2$

3.90 Giải bất phương trình: $-4\sqrt{(4-x)(2+x)}>x^2-2x-8$

CĐ Nông Lâm - 01 ĐS: *vn*

3.91 Giải bất phương trình: $x(x+1)-\sqrt{x^2+x+4}+2\ge 0$

ĐH Cần Thơ Khối D - 01 ĐS: $x\le -1\vee x\ge 0$

3.92 Giải bất phương trình: $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$

ĐHDL Thăng Long - 01 ĐS: $-1\le x<0\vee 1<x\le 2$

3.93 Giải bất phương trình: $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$

ĐH Mỏ - Địa chất - 01 ĐS: $x=0\vee x=2\vee x=-(2+\sqrt{14})/3$

3.94 Giải bất phương trình: $2x^2+\sqrt{x^2-5x-6}>10x+15$

ĐH Y Hà Nội - 01 ĐS: $x<(5-\sqrt{53})/2\vee x>(5+\sqrt{53})/2$

3.95 Giải bất phương trình: $\sqrt{5x^2+10x+1}\ge 7-2x-x^2$

CĐ KT Cao Thắng - 07 ĐS: $x\le -3\vee x\ge 1$

3.96 Giải bất phương trình: $(x+1)(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}<2-(x-1)^2$

Dự bị ĐH Khối D - 08 ĐS: $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$

3.97 Giải bất phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\ge 3\sqrt{x}$

ĐH Khối B - 12 ĐS: $0\le x\le 1/4\vee x\ge 4$

III. Phương pháp dùng hàm số

3.98 Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\le 2-\frac{x^2}{4}$

CĐSP TPHCM - 98 ĐS: $-1\le x\le 1$

3.99 Giải bất phương trình: $\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+1}<x$

CĐ Kinh Tế Đối Ngoại - 00 ĐS: $0<x\le 1$

3.100 Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{x^2-3x+4}>\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3x^2-5x-1}$

ĐH Cảnh Sát Nhân Dân - 01 ĐS: $x\le -\sqrt{2}\vee(5+\sqrt{37})/6\le x<2$

IV. Bất phương trình có chứa tham số

3.101 Giải và biện luận bất phương trình: $\sqrt{x-m}-\sqrt{x-2m}>\sqrt{x-3m}$ (m là tham số)

ĐHQG TpHCM - 97 ĐS: $m\le 0$: vn; $m>0$: $3m\le x<\frac{\left(6+2\sqrt{3}\right)m}{3}$

3.102 Cho bất phương trình: $\left(x^2+1\right)^2+m\le x\sqrt{x^2+2}+4$

a. Giải hệ phương trình khi $m=3$.

b. Xác định m để bất phương trình đã cho thỏa $\forall x\in(0;1)$.

ĐHQG TpHCM - 97 ĐS: a. $0\le x\le\sqrt{\sqrt{2}-1}$; b. $m\le\sqrt{3}$

3.103 Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: $x-m\sqrt{x-1}>m+1$ (m là tham số)

HV Kỹ Thuật Mật Mã - 99 ĐS: $\forall m$

3.104 Cho bất phương trình: $mx-\sqrt{x-3}\le m+1$

a. Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b. Xác định m để bất phương trình đã cho có nghiệm.

ĐHDL Hùng Vương - 99 ĐS: a. vn ; b. $m<\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

3.105 Tìm tất cả các giá trị của a để hệ sau có nghiệm $(x;\ y)$ thỏa $x\ge 4$: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}\le a\end{cases}$

ĐHSP Hà Nội - 01 ĐS: $a\ge 5$

3.106 Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}x^2-5x+4\le 0\\ 3x^2-mx\sqrt{x}+16=0\end{cases}$

Dự bị ĐH Khối D - 04 ĐS:

3.107 Tìm m để phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

Dự bị ĐH Khối B - 07 ĐS: $m\le 2/3$

3.108 Tìm m để bất phương trình: $(x-2-m)\sqrt{x-1}\le m-4$ có nghiệm.

CĐ Khối A,A1,B,D - 13 ĐS: $m\ge 2$

Chủ đề 5 THỐNG KÊ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

1. Khái niệm về thống kê

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lý số liệu.

2. Mẫu số liệu

- **Dấu hiệu** là một vấn đề hay hiện tượng nào đó mà người điều tra quan tâm tìm hiểu. Mỗi đối tượng điều tra gọi là một **đơn vị điều tra**. Mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là giá trị của dấu hiệu trên đơn vị điều tra đó.
- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một **mẫu**. Số phần tử của một mẫu được gọi là **kích thước mẫu**. Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một **mẫu số liệu** (mỗi giá trị như thế còn gọi là một số liệu của mẫu).
- Nếu thực hiện điều tra trên trên mọi đơn vị điều tra thì đó là điều tra toàn bộ. Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là điều tra mẫu.

3. Bảng phân bố tần số - tần suất. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

- Tần số của giá trị x_i là số lần lặp lại của giá trị x_i trong mẫu số liệu.
- Tần suất f_i của giá trị x_i là tỷ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N hay $f_i = \frac{n_i}{N}$.

  Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.
- Bảng phân bố tần số (gọi tắt là bảng tần số) được trình bày ngang như sau:

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	...	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	...	n_m	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

  Trên hàng tần số, người ta dành một ô để ghi kích thước mẫu N hàng tổng các tần số (tức $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$).
- Bổ sung thêm một hàng tần suất vào bảng trên, ta được bảng phân bố tần số - tần suất (gọi tắt là bảng tần số - tần suất).

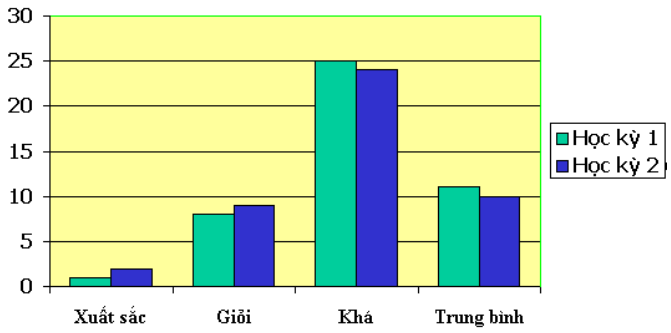
Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	...	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	...	n_m	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$
Tần suất %	f_1	f_2	f_3	...	f_m	

  ✍ **Chú ý:** Người ta cũng thể hiện bảng phân bố tần số - tần suất dưới dạng bảng dọc.
- Nếu kích thước mẫu số liệu khá lớn, thì người ta thường chia số liệu thành nhiều lớp dưới dạng $[a;b]$ hay $[a;b)$ (thường có độ dài các lớp bằng nhau). Khi đó tần số của lớp $[a;b]$ là số giá trị $x_i \in [a;b]$ (hay $x_i \in [a;b)$) xuất hiện trong lớp đó. Tần suất của lớp $[a;b]$ là $f = \frac{n}{N}$ trong đó n là tần số của lớp $[a;b]$ và N là kích thước mẫu.
  - ✓ Bảng phân bố tần suất ghép lớp được xác định tương tự như trên.
  - ✓ Giá trị đại diện của lớp $[a;b]$ là $c = \frac{a+b}{2}$.

2. BIỂU ĐỒ

1. *Biểu đồ tần suất hình cột*

- Để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp, người ta dựng các cột thẳng đứng (xếp liền nhau hoặc rời nhau) có chiều rộng cột bằng độ dài của lớp, chiều cao cột bằng tần số, tâng suất của lớp tương ứng.

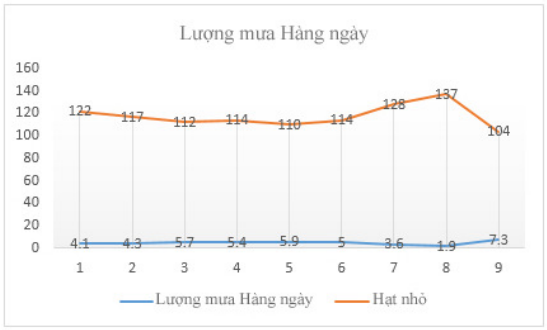


Biểu đồ 1: Xếp loại học sinh.

- **Lưu ý:** Thể hiện sự biến động của một đối tượng

2. *Đường gấp khúc tần suất*

- Trên mặt phẳng tọa độ xác định các điểm (C_i, f_i) $i = 1, 2, 3, \ldots$ trong đó C_i, là giá trị đại diện (giá trị trung bình cộng của hai mút lớp thứ i) của lớp thứ. i. , f_i là tần suất của lớp thứ i.



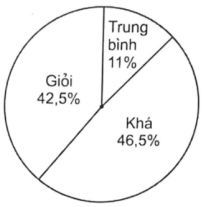
Biểu đồ 2: Lượng mưa hằng ngày.

- Đường gấp khúc nối các điểm theo $(C_i; f_i)$ thứ tự $i = 1, 2, 3, \ldots$ là đường gấp khúc tần suất.
  - **Lưu ý:** Thể hiện sự diễn biến của các đối tượng khác nhau về đơn vị qua nhiều đơn vị thời gian.

3. *Biểu đồ hình quạt*

Vẽ đường tròn tâm O rồi vẽ các hình quạt có đỉnh O, góc ở đỉnh tỉ lệ với tần suất của các lớp. Hình biểu diễn trực quan bằng bảng phân bố tần suất như vậy gọi là biểu đồ tần suất hình quạt.

- ***Lưu ý:*** Thể hiện quy mô và cơ cấu của đối tượng (theo tỷ lệ % tương đối)



Biểu đồ 3: Xếp loại học sinh lớp 10A1 cuối năm học.

3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ - MỐT

1. *Số trung bình*

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$
- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số: $\overline{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{N}$
- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp: $\overline{x} = \dfrac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + ... + n_k c_k}{N}$

  (c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i)

2. *Số trung vị*

- Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị M_e** là:
  - ✓ Số đứng giữa nếu N lẻ;
  - ✓ Trung bình cộng của hai số đứng giữa nếu N chẵn.

3. Mốt

- **Mốt** của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O.
- **Chú ý:**
  - ✓ Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
  - ✓ Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
  - ✓ Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng mốt làm đại diện. Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.

4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

1. Ý nghĩa và cách sử dụng phương sai:

- Phương sai của một bảng số liệu là số đặc trưng cho độ phân tán của các số liệu so với số trung bình của nó. Phương sai của bảng thống kê dấu hiệu x, kí hiệu là s_x^2.
- Khi hai dãy số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình bằng nhau hoặc sấp xỉ nhau, dãy có phương sai càng nhỏ thì mức độ phân tán (so với trung bình) của các số liệu thống kê càng ít.

2. Công thức tính:

- **Cách 1:** Tính theo tần số
  - ✓ $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ đối với bảng phân bố tần số.
  - ✓ $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(c_i - \overline{x}\right)^2$ đối với bảng phân bố tần số ghép lớp.
- **Cách 2:** Tính theo tần suất
  - ✓ $s_x^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ đối với bảng phân bố tần suất.
  - ✓ $s_x^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(c_i - \overline{x}\right)^2$ đối với bảng phân bố tần suất ghép lớp.

  Trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i trong bảng phân bố tần số, tần suất (hay là tần số, tần suất của lớp thứ i trong bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp); n là số liệu thống kê $\left(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n\right)$; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê; c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i.
- **Cách 3:** Sử dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$

  Trong đó $\overline{x^2}$ là trung bình cộng của các bình phương số liệu thống kê, tức là
  - ✓ $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2$ đối với bảng phân bố tần số, tần suất.
  - ✓ $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i^2$ đối với bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp.

3. Độ lệch chuẩn

- Độ lệch chuẩn: s_x là căn bậc hai của phương sai s_x^2: $\boxed{s_x = \sqrt{s_x^2}}$
- Độ lệch chuẩn cũng được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với trung bình).
- Cách sử dụng độ lệch chuẩn hoàn toàn giống như cách sử dụng phương sai. Khi cần chú ý đến đơn vị đo, ta dùng độ lệch chuẩn s_x (vì s_x có cùng đơn vị đo với dấu hiệu X được nghiên cứu).

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. [0D5-2] Điểm kiểm tra của 2 nhóm học sinh lớp 10 được cho như sau:
Nhóm 1: (9 học sinh) 1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 9
Nhóm 2: (11 học sinh) 1, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10
Hãy lập các bảng phân bố tần số và tuần suất ghép lớp với các lớp [1, 4]; [5, 6]; [7, 8]; [9, 10] của 2 nhóm.

Lời giải

Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp là

Lớp điểm	**Tần số *ni***	**Tần suất *fi***
[1; 4]	3	33%
[5; 6]	3	33%
[7; 8]	2	22%
[9; 10]	1	11%
N	**9**	**100%**

Lớp điểm	**Tần số *ni***	**Tần suất *fi***
[1; 4]	5	45%
[5; 6]	1	9%
[7; 8]	4	36%
[9; 10]	1	9%
N	**11**	**100%**

Ví dụ 2. Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đơn vị là milimét) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp của mẫu số liệu trên.

Lời giải

Bảng phân bố tần suất:

Lớp chiều cao	Tần suất
[100;199)	10%
[200;299)	38%
[300;399)	35%
[400;499)	13%
[500;599)	5%
N	100%

Ví dụ 3. [0D5-2] Chiều cao của 40 vận động viên bóng chuyền được cho trong bảng sau:

Lớp chiều cao (cm)	Tần số
[168 ; 172)	4
[172 ; 176)	4
[176 ; 180)	6
[180 ; 184)	14
[184 ; 188)	8
[188 ; 192]	4
Cộng	40

Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp ?

Lời giải

Bảng phân bố tần suất:

Lớp chiều cao	Tần suất
[168;172)	10%
[172;176)	10%
[176;180)	15%
[180;184)	35%
[184;188)	20%
[188;192]	10%
N	**100%**

Lớp chiều cao	Tần suất	Giá trị đại diện ci
[168;172)	10%	170
[172;176)	10%	174
[176;180)	15%	178
[180;184)	35%	182
[184;188)	20%	186
[188;192]	10%	190
N	**100%**	

Ví dụ 4. [0D5-2] Thống kê điểm thi tốt nghiệp môn Toán của 926 em học sinh Trường THPT A cho ta kết quả sau đây:

Điểm bài thi (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số (n)	17	38	. . .	124	176	183	119	. . .	50	25
Tần suất %	. . .	. . .	12,10	. . .	. . .	. . .	8,63	8,86		

Chuyển bảng trên thành dạng cột và điền tiếp vào các ô còn trống.

Lời giải

Ta có $N = 926$ do đó ta có kết quả sau

Điểm bài thi (x)	Tần số (n)	Tần suất %
1	17	1.84
2	38	4.10
3	112	12.10
4	124	13.39
5	176	19.01
6	183	19.76
7	119	12.85
8	82	8.86
9	50	5.40
10	25	2.70

Ví dụ 5. [0D5-2] Kết quả làm bài kiểm tra của học sinh lớp hai lớp gồm lớp thực nghiệm (TN) và học sinh lớp đối chứng (ĐC) được thể hiện thông qua Bảng thống kê sau đây:

Lớp	Số HS	Số bài kiểm tra đạt điểm tương ứng										Điểm TB
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10 C_1	46	0	1	2	6	10	12	8	7	0	0	***6.3***
10 C_2	46	0	0	0	2	4	6	12	10	8	4	***7.4***

Hãy lập bảng phân bố tần suất của mẫu số liệu trên (trong một bảng).

Lời giải

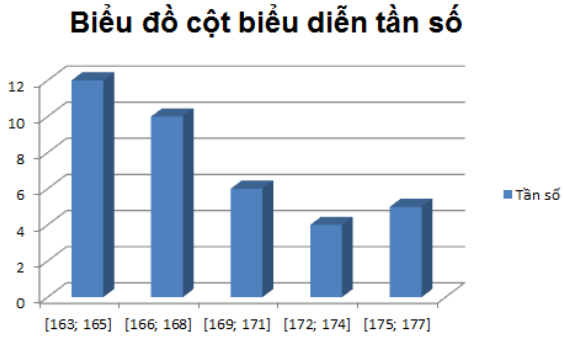
Bảng phân bố tần suất điểm của bài kiểm tra:

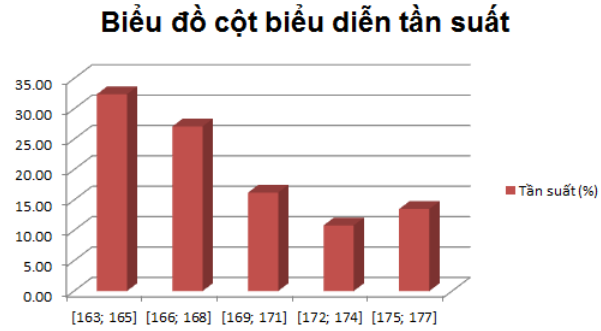
Lớp	Số HS	Số % bài kiểm tra đạt điểm tương ứng									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 C_1	46	0	0	2,2	8,7	21,7	26,1	21,7	8,7	8,7	2,2
10 C_2	46	0	0	0	4,3	8,7	13	26,1	21,7	17,4	8,7

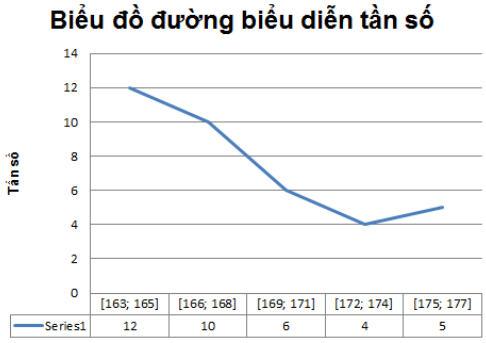
Ví dụ 6. Cho bảng phân bố tần số như sau

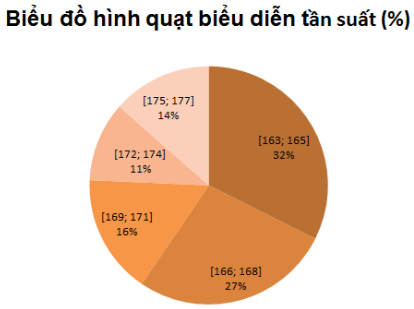
Lớp	Tần số	Tần suất
[163; 165]	12	32,4
[166; 168]	10	27,1
[169; 171]	6	16,2
[172; 174]	4	10,8
[175; 177]	5	13,5
	37	100%

Chúng ta vẽ biểu đồ của nó như sau



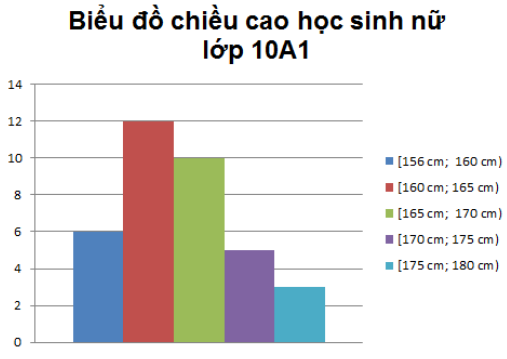






Ví dụ 7. Chiều cao của 36 học sinh nữ của lớp 10A1 trường Lương Thế Vinh được cho bởi bảng phân bố tần số sau:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[156 cm; 160 cm)	6	17
[160 cm; 165 cm)	12	33
[165 cm; 170 cm)	10	28
[170 cm; 175 cm)	5	14
[175 cm; 180 cm)	3	8
	36	



Ví dụ 8. Thống kê điểm kiểm tra toán của lớp 10C, giáo viên bộ môn thu được số liệu:

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	1	5	6	7	11	5	4	2	2	N = 45

Lời giải

a) Tính: Số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{45}\sum_{i=0}^{10} n_i x_i \approx 5,5$.

Phương sai: $s^2 = \frac{1}{45}\sum_{i=0}^{10} n_i x_i^2 - \frac{1}{45^2}\left(\sum_{i=0}^{10} n_i x_i\right)^2 \approx 4,7$.

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} \approx 2,2$.

Ví dụ 9. Cho hai bảng phân bố tần số mô tả kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A và 10B của một trường (Hai lớp làm cùng một đề) như sau:

Bảng 1: iểm thi của lớp 10A

Điểm	1	3	4	5	6	7	8	
Tần số	1	3	4	8	10	3	1	N=30

Bảng 2:Điểm thi của lớp 10B

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Tần số	1	2	3	4	6	7	3	3	1	N=30

a) Tính phương sai của bảng 1 và bảng 2.

b) Nhận xét lớp nào có điểm thi môn Toán đồng đều hơn, vì sao?

Lời giải

a) Tính phương sai của bảng 1 và bảng 2.

Gọi $\bar{x}, \bar{y}$ lần lượt là số TBC của các số liệu trong bảng 1,bảng 2 ta có:

$\bar{x} = \frac{1}{30}(1.2+3.3+...+1.8) = 5,2.$

$\bar{y} = \frac{1}{30}(1.1+2.2+...+1.9) = 5,2.$

$S_x^2 = \frac{1}{30}[(2-5,2)^2+3(3-5,2)^2+...+(8-5,2)^2] \approx 1,83$

$S_y^2 = \frac{1}{30}[(1-5,2)^2+2(2-5,2)^2+...+(9-5,2)^2] \approx 3,69$

b) Nhận xét lớp nào có điểm thi môn Toán đồng đều hơn,vì sao?

Vì $\bar{x} = \bar{y}$ =5,2 nhưng $S_x^2 < S_y^2$ nên điểm thi môn Toán của lớp 10A đồng đều hơn lớp 10**B.**

Ví dụ 10. Khi điều tra "Năng suất lúa hè thu năm 1998" của 31 tỉnh, người ta thu thập được các số liệu ghi trong bảng dưới đây. Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh

30	30	25	25	35	45	40	40	35	45	
25	45	30	30	30	40	30	25	45	45	
35	35	30	40	40	40	35	35	35	35	35

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu trên.

Lời giải

Năng suất lúa (tạ/ha)	Tần số	Tần suất (%)
25	4	12,9
30	7	22,6
35	9	29,0
40	6	19,4
45	5	16,1
Cộng	31	100(%)

Số trung bình: $\overline{x}=\frac{1}{31}\sum_{i=0}^{5}n_ix_i=\frac{25.4+30.7+35.9+40.6+45.5}{31}\approx 35,2$.

$s_x^2=\frac{1}{31}[4(25-35,2)^2+7(30-35,2)^2+9(35-35,2)^2+6(40-35,2)^2+5(45-35,2)^2]\approx 39,5$.

$s=\sqrt{s^2}\approx 6,28$.

Ví dụ 11. Để chuẩn bị may đồng phục cho học sinh, người ta đo chiều cao của 36 học sinh trong một lớp học và thu được các số liệu thống kê ghi trong bảng sau:

Chiều cao của 36 học sinh:

Lớp đo chiều cao (cm)	Tần số	Tần suất(%)
[150; 156)	6	16,7
[156; 162)	12	33,3
[162; 168)	13	36,1
[168; 174)	5	13,9
Cộng	36	100(%)

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu trên.

Lời giải

- **Cách 1:** Tính theo tần số:

  Số trung bình cộng là $\overline{x}=\frac{6.153+12.159+13.165+5.171}{36}\approx 162$ (cm)

  Mỗi số liệu thống kê thuộc một lớp được thay thế bởi các giá trị đại diện của lớp đó.

  Phương sai $s_x^2=\frac{6(153-162)^2+12(159-162)^2+13(165-162)^2+5(171-162)^2}{36}\approx 31$

  Độ lệch chuẩn $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{31}\approx 5,6$ (cm).

- **Cách 2:** Tính theo tần suất:

  Số trung bình cộng là $\overline{x}=\frac{16,7.153+33,3.159+36,1.165+13,9.171}{100}\approx 162$ (cm)

  Phương sai

  $s_x^2=\frac{16,7(153-162)^2+33,3(159-162)^2+36,1(165-162)^2+13,9(171-162)^2}{100}\approx 31$

  Độ lệch chuẩn $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{31}\approx 5,6$ (cm).

- **Cách 3:** Sử dụng công thức $s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2$

  Ta tính $\overline{x^2}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}n_ic_i^2\right)=\frac{6.153^2+12.159^2+13.165^2+5.171^2}{36}=26221$.

Ví dụ 12. Cho bảng số liệu sau:

Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C

Lớp thời gian chạy (giây)	Tần số	Tần suất(%)
[6,0; 6,5)	2	6,06
[6,5; 7,0)	5	15,15
[7,0; 7,5)	10	30,30
[7,5; 8,0)	9	27,27
[8,0; 8,5)	4	12,12
[8,5; 9,0]	3	9,10
Cộng	33	100(%)

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê cho ở bảng trên.

b) Giả sử xét thêm lớp 10D cũng thuộc trường Trung học phổ thông C có thành tích chạy 50 m trung bình là 7,5 giây, có phương sai là 0,5. So sánh thành tích chạy 50 m kể trên của hai lớp 10A và 10D.

Lời giải

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê

- Cách 1: Tính theo tần số ghép lớp

$\overline{x}=\frac{1}{33}\left(2.6,25+5.6,75+10.7,25+9.7,75+4.8,25+8,75\right)\approx 7,5$ (giây).

$s_x^2=\frac{1}{33}\left[2.\left(6,25-7,5\right)^2+5.\left(6,75-7,5\right)^2+10.\left(7,25-7,5\right)^2+9.\left(7,75-7,5\right)^2+4.\left(8,25-7,5\right)^2+\right.$

$s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{0,43}\approx 0,66$.

- Cách 2: Tính theo tần suất ghép lớp

$\overline{x}=\frac{1}{100}\left(6,06.6,25+15,15.6,75+30,30.7,25+27,27.7,75+12,12.8,25+9,10.8,75\right)\approx 7,5$

$s_x^2=\frac{1}{100}\left[6,06.\left(6,25-7,5\right)^2+15,15.\left(6,75-7,5\right)^2+30,30.\left(7,25-7,5\right)^2+27,27.\left(7,75-7,5\right)^2+\right.$

$s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{0,43}\approx 0,66$.

- Cách 3: Sử dụng công thức $s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2$

$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}n_i{c_i}^2\right)=\frac{2.6,25^2+5.6,75^2+10.7,25^2+9.7,75^2+4.8,25^2+3.8,75^2}{33}=56,79$

$\left(\overline{x}\right)^2=\left(7,507575\right)^2\approx 56,36$

Suy ra $s_x^2\approx 56,79-56,36\approx 0,43.$

$s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{0,43}\approx 0,66$

b) Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\overline{x_A}=\overline{x_D}=7,5\\ s_D^2=0,5\end{cases}$ và $s_A^2=0,43$ do đó $s_D^2>s_A^2$.

Suy ra thành tích chạy 50 m của học sinh ở hai lớp nhanh như nhau, nhưng thành tích của các học sinh ở lớp 10A đồng đều hơn.

Ví dụ 13. Cho bảng các số liệu thống kê sau: Chiều cao của 120 học sinh lớp 11 ở Trường trung học phổ thông M

Lớp chiều cao (cm)	Tần số		Tần suất	
	Nam	Nữ	Nam	Nữ
[135, 145)	5	8	8,33	13.33
[145, 155)	9	15	15,00	25,00
[155, 165)	19	16	31,67	26.67
[165, 175)	17	14	28.33	23,33
[175, 185]	10	7	16,67	11,67
Cộng	**60**	**60**	**100(%)**	**100(%)**

a) Tính số trung bình của dãy số liệu về chiều cao của các học sinh nam, nữ và của tất cả 120 học sinh cho ở bảng trên.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu trên về chiều cao của nam và nữ.

c) Giả sử trường trung học phổ thông M còn có một nhóm học sinh nam lớp 10 chuyên toán (kí hiệu là nhóm T) có chiều cao trung bình là $\overline{x}=163$ cm, có độ lệch chuẩn là $s_x=13$. So sánh chiều cao của ba nhóm học sinh đã cho (nhóm nam, nhóm nữ, nhóm T).

Lời giải

a) Tính số trung bình của dãy số liệu về chiều cao của các học sinh nam, nữ và của tất cả 120 học sinh cho ở bảng trên

- Chiều cao trung bình của các học sinh nam:
  - ✓ Cách 1: Dùng tần số $\overline{x_1}=\frac{1}{60}\left(140.5+150.9+160.19+170.17+180.10\right)=163\,(\text{cm}).$
  - ✓ Cách 2: Dùng tần suất
    $\overline{x_1}=\frac{1}{100}\left(140.8,33+150.15+160.31,67+170.28,33+180.16,67\right)=163\,(\text{cm}).$
- Chiều cao trung bình của các học sinh nữ:
  - ✓ Cách 1: Dùng tần số $\overline{x_1}=\frac{1}{60}\left(140.8+150.15+160.16+170.14+180.7\right)=159,5\,(\text{cm}).$
  - ✓ Cách 2: Dùng tần suất
    $\overline{x_1}=\frac{1}{100}\left(140.13,33+150.25+160.26,67+170.23,33+180.11,67\right)=159,5\,(\text{cm}).$
- Chiều cao trung bình của tất cả 120 học sinh:
  $\overline{x}=\frac{1}{120}\left(60.159,5+60.163\right)\approx 161\,(\text{cm})$

b) Dãy các số liệu chiều cao của các học sinh nam có:

$$s_{x_1}^2=\frac{1}{60}\left((140-163)^2.5+(150-163)^2.9+(160-163)^2.19+(170-163)^2.17+(180-163)^2.10\right)\approx 134,3$$

$$s_{x_1}=\sqrt{s_{x_1}^2}=\sqrt{134,3}\approx 11,59$$

Dãy các số liệu chiều cao của các học sinh nữ có:

$$s_{x_2}^2=\frac{1}{60}\left((140-159,5)^2.8+(150-159,5)^2.15+(160-159,5)^2.16+(170-159,5)^2.14+(180-159,5)^2.7\right)$$

$\Rightarrow s_{x_2}^2=148$. Suy ra $s_{x_2}=\sqrt{s_{x_2}^2}=\sqrt{148}\approx 12,17$

c) Nhóm T có $\overline{x_3}=163$, $s_{x_3}^2=169; s_{x_3}=13$.

Học sinh ở nhóm nam và nhóm T có chiều cao như nhau và có cùng lớn hơn chiều cao của học sinh nữ (vì $\overline{x_1}=\overline{x_3}>\overline{x_2}$).

Vì $\overline{x_1}=\overline{x_3}=163\,(\text{cm})$ và $s_{x_1}<s_{x_3}$ nên chiều cao của các học sinh nam đồng đều hơn chiều cao của học sinh nhóm T.

Ví dụ 14. Hai xạ thủ cùng tập bắn, một người đã bắn 30 viên đạn vào bia. Kết quả được ghi lại ở các bảng sau:

Điểm số của xạ thủ A

8	9	10	9	9	10	8	7	6	8
10	7	10	9	8	10	8	9	8	6
10	9	7	9	9	9	6	8	6	8

Điểm số của xạ thủ B

9	9	10	6	9	10	8	8	5	9
9	10	6	10	7	8	10	9	10	9
9	10	7	7	8	9	8	7	8	8

a) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê trên.

b) Xét xem trong lần bắn này, xạ thủ nào bắn chụm hơn?

Lời giải

a) Điểm số của xạ thủ A có $\overline{x} \approx 8,3; s_x^2 \approx 1,6; s_x \approx 1,27$.

Điểm số của xạ thủ B có $\overline{y} \approx 8,4; s_y^2 \approx 1,77; s_x \approx 1,33$.

b) $\overline{x} \approx \overline{y} = 8,4$ điểm, $s_y^2 > s_x^2$, như vậy mức độ phân tán của các điểm số (so với số trung bình) của xạ thủ A là bé hơn. Vì vậy trong lần tập bắn này xạ thủ A bắn chụm hơn.

Ví dụ 15. Cho các số liệu thống kê ghi ở bảng sau

Số người xem trong 60 buổi chiếu phim của một rạp chiếu phim nhỏ

4	12	18	23	29	31	37	40	46	52
5	13	19	24	30	32	38	41	47	53
6	14	21	25	32	33	39	42	48	54
9	15	20	26	32	34	32	43	49	55
8	10	21	27	32	35	40	44	50	56
11	17	22	28	30	36	41	45	51	59

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp [0; 10); [10; 20); [20; 30); [30; 40); [40; 50); [50; 60).

b) Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê đã cho.

Lời giải

a) Số người xem trong 60 buổi chiếu phim của một rạp chiếu phim nhỏ

Lớp người xem	Tần số	Tần suất(%)
[0; 10)	5	8,33
[10; 20)	9	15,00
[20; 30)	11	18,33
[30; 40)	15	25,00
[40; 50)	12	20,00
[50; 60)	8	13,34
Cộng	60	100(%)

b) $\overline{x} \approx 32$ (người), $s_x^2 \approx 219,7; s_x \approx 15$ (người).

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

Sử dụng giả thiết sau cho câu 1, câu 2:

Số học sinh giỏi của 30 lớp ở một trường THPT A được thống kê lại như sau:

0	2	1	0	0	3	0	0	1	1	0	1	6	6	0
1	5	2	4	5	1	0	1	2	4	0	3	3	1	0

Câu 1. Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

A. Dấu hiệu là 30 lớp, đơn vị điều tra là mỗi lớp của trường THPT A .

B. Dấu hiệu là học sinh giỏi, đơn vị điều tra 30 lớp.

C. Dấu hiệu trường THPT A, đơn vị điều tra là 30 lớp.

D. Dấu hiệu là học sinh giỏi, đơn vị điều tra là 30 lớp của trường THPT A .

Câu 2. Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

A. $0;1;2;3;4;5$. **B.** $0;1;2;3;5;6$. **C.** $0;2;3;4;5;6$. **D.** $0;1;2;3;4;5;6$.

Sử dụng giả thiết sau cho câu 3, câu 4:

Để may đồng phục cho khối học sinh lớp năm của trường tiểu học A . Người ta chọn ra một lớp 5A , thống kê chiều cao của 45 học sinh lớp 5A (tính bằng cm) được ghi lại như sau:

102	102	113	138	111	109	98	114	101
103	127	118	111	130	124	115	122	126
107	134	108	118	122	99	109	106	109
104	122	133	124	108	102	130	107	114
147	104	141	103	108	118	113	138	112

Câu 3. Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

A. Dấu hiệu là chiều cao của mỗi học sinh, đơn vị điều tra là một học sinh của lớp 45 học sinh. Kích thước mẫu là $N = 45$.

B. Dấu hiệu là trường tiểu học A, đơn vị điều tra là một học sinh của lớp 5A . Kích thước mẫu là $N = 45$.

C. Dấu hiệu 45 học sinh, đơn vị điều tra là một học sinh của lớp 5A . Kích thước mẫu là $N = 45$.

D. Dấu hiệu là chiều cao của mỗi học sinh, đơn vị điều tra là một học sinh của lớp 5A . Kích thước mẫu là $N = 45$.

Câu 4. Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

A. 102;113;138;109;98;114;101;103;127;118;111;130;124;115;122;126;107; 134;108;99;106 ;104 ;133;147;141;138;143 .

B. 102;113;138;109;98;114;111;103;127;118;111;130;124;115;122;126;107; 134;108;99;106;104;133;147;141;138;112 .

C. 102;113;138;109;98;114;101;103;127;118;111;130;124;115;112;126;107; 134;108;99;106;104;133;147;141;138;112 .

D. 102;113;138;109;98;114;101;103;127;118;111;130;124;115;122;126;107; 134;108;99;106;104;133;147;141;138;112 .

Câu 5. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10 được cho ở bảng sau:

Điểm thi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	3	2	1	1	3	7	4	8	9	3	1

Cho biết đơn vị điều tra và kích thước của mẫu số liệu trên?

A. Đơn vị điều tra: môn Toán, kích thước của mẫu số liệu: 42

B. Đơn vị điều tra: môn Toán, kích thước của mẫu số liệu: 40

C. Đơn vị điều tra: một học sinh lớp 10, kích thước của mẫu số liệu: 40

D. Đơn vị điều tra: một học sinh lớp 10, kích thước của mẫu số liệu: 42

Sử dụng giả thiết sau cho câu 6, câu 7:

Số con của 40 gia đình ở huyện A được thống kê lại như sau

2	4		3	2	0	2	2	3	4	5
2	2		5	2	1	2	2	2	3	2
5	2		7	3	4	2	2	2	3	2
3	5		2	1	2	4	4	3	4	3

Câu 6. Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

A. Dấu hiệu 40 gia đình, đơn vị điều tra là mỗi gia đình ở huyện A, kích thước mẫu là N=40

B. Dấu hiệu huyện A, đơn vị điều tra là mỗi gia đình ở huyện A, kích thước mẫu là N=40

C. Dấu hiệu là số con, đơn vị điều tra là mỗi gia đình ở huyện A, kích thước mẫu là N=36

D. Dấu hiệu là số con, đơn vị điều tra là mỗi gia đình ở huyện A, kích thước mẫu là N=40

Câu 7. Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

A. 1;2;3;4;5 **B.** 1;2;3;5;7 **C.** 1;2;3;4;5;7;9 **D.** 1;2;3;4;5;7

Câu 8. Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10 trường THPT A, người điều tra chọn ngẫu nhiên 30 học sinh nữ lớp 10 và đề nghị các em cho biết số cân nặng của mình. Kết quả thu được ghi lại trong bảng sau (đơn vị là kg):

43	50	43	48	45	40	38	48	45	50	43	45	48	43	38
40	43	48	40	43	45	43	50	40	50	43	45	50	43	45

Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

A. Đơn vị điều tra: số cân nặng học sinh nữ. Kích thước mẫu: 30

B. Đơn vị điều tra: Một học sinh nữ. Kích thước mẫu: 10

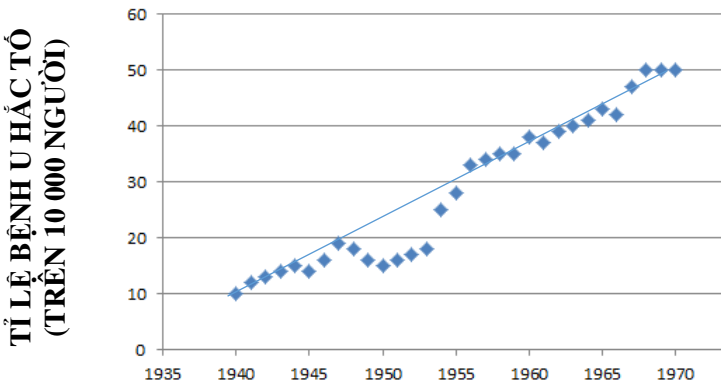
C. Đơn vị điều tra: lớp 10. Kích thước mẫu: 30

D. Đơn vị điều tra: Một học sinh nữ. Kích thước mẫu: 30

2. BIỂU ĐỒ

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 9, 10, 11:

Biểu đồ phân tán dưới đây biểu diễn tỉ lệ u hắc tố (tính theo đơn vị 100 000 người) từ năm 1940 đến 1970.



Câu 9. Dựa vào biểu đồ 1 em hãy cho biết năm 1969 có bao nhiêu ca mắt bệnh u hắc tố?
A. 5. **B.** 50. **C.** 50 000. **D.** 500 000.

Câu 10. Dựa vào biểu đồ 1 em hãy cho biết khoảng biến thiên giao độ của số ca nhiễm bệnh u hắc tố giữa hai năm 1945 và 1950 gần nhất với số nào dưới đây?
A. 50 000. **B.** 100 000. **C.** 170 000. **D.** 360 000.

Câu 11. Trung bình cộng số ca mắc bệnh u hắc tính qua các năm gần nhất so với đáp án nào dưới đây?
A. 13 000. **B.** 3 300. **C.** 3,3. **D.** 1,3.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 12, 13, 14, 15:

Cho biểu đồ. Chọn phát biểu đúng.



Câu 12. Gia đình có đông con nhất là gia đình có
A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** Không xác định.

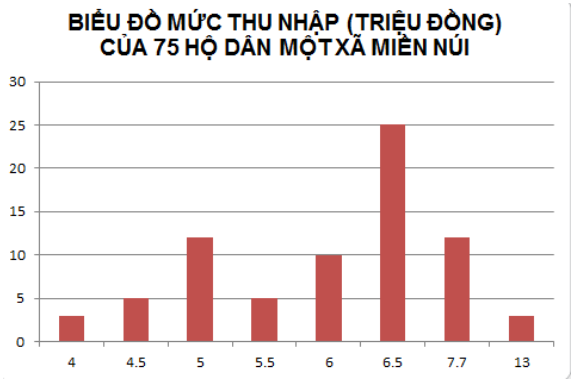
Câu 13. Số gia đình có từ 2 con trở lên là
A. 20. **B.** 25 **C.** 40. **D.** 45.

Câu 14. Số gia đình có từ 3 con trở lên là
A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 5.

Câu 15. Số gia đình có ít hơn 2 con là
A. 10. **C.** 55. **C.** 45. **D.** 80.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 16, 17:

Cho biểu đồ mức thu nhập trong năm 2000 của 75 hộ dân trong một xã ở vùng núi cao. Chọn phát biểu đúng.

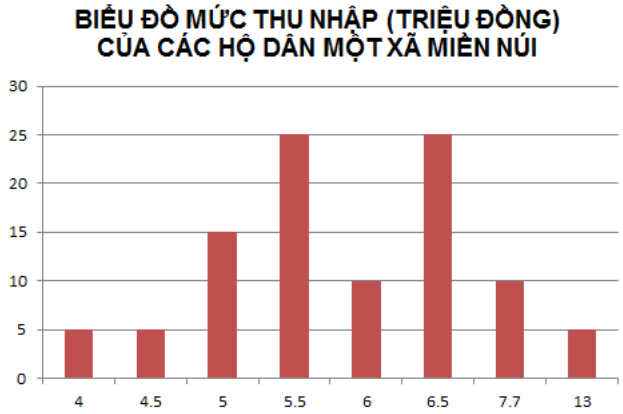


Câu 16. Hộ gia đình có thu nhập (triệu đồng) cao nhất là
A. 75. **B.** 13. **C.** 6.5. **D.** 30.

Câu 17. Mức thu nhập (triệu đồng) nhiều gia đình đạt được nhất là
A. 75. **B.** 13. **C.** 6.5. **D.** 30.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 18, 19, 20, 21, 22:

Cho biểu đồ



Câu 18. Tổng số hộ dân của xã miền núi là

A. 30. **B.** 100. **C.** 52. **D.** 52,2 .

Câu 19. Tổng thu nhập (triệu đồng) của xã miền núi đó là

A. 52,2 . **B.** 5220 . **C.** 619 . **D.** 619,5 .

Câu 20. Số hộ dân có thu nhập trên 10 triệu là

A. 100 . **B.** 10 . **C.** 5 . **D.** 13 .

Câu 21. Số hộ dân có thu nhập dưới 6 triệu là

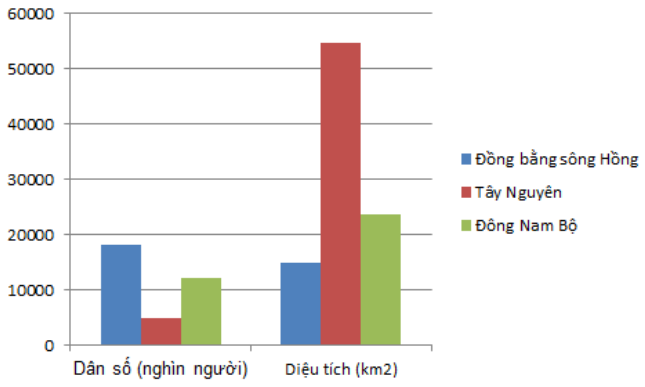
A. 50 . **B.** 60 . **C.** 5,5 . **D.** 25 .

Câu 22. Thu nhập (triệu đồng) bình quân của mỗi hộ dân là

A. 3,5 . **B.** 6 . **C.** 6,2 . **D.** 6,195 .

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 23, 24:

Cho biểu đồ biểu diễn diện tích và dân số một số vùng của nước t**A.**



Câu 23. Mật độ dân số theo thứ tự giảm dần là:

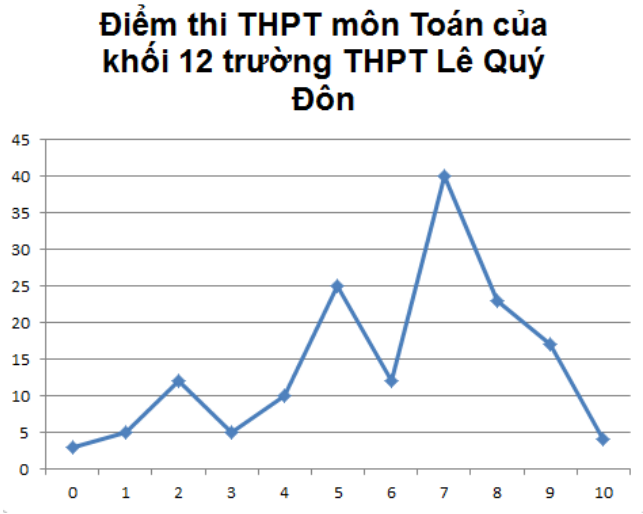
A. Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Hồng, Tây Nguyên.
B. Đồng bằng sông Hồng, Đông Nam Bộ, Tây Nguyên.
C. Đông Nam Bộ, Tây Nguyên, Đồng bằng sông Hồng.
D. Đồng bằng sông Hồng, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ.

Câu 24. Vùng có mật độ dân cư thấp nhất là:

A. Đông Nam Bộ. **B.** Đồng bằng sông Hồng.
C. Tây nguyên. **D.** Ba vùng có mật độ dân cư như nhau.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 25, 26, 27:

Cho biểu đồ biểu diễn điểm thi môn Toán HK II năm học 2017 – 2018 của trường THPT Lê Quý Đôn.



Câu 25. Chọn khẳng định đúng

A. Không có học sinh đạt điểm 10.

B. Số học sinh đạt điểm 7 nhiều hơn tổng số học sinh đạt điểm 5 cộng số học sinh đạt điểm 9.

C. Tổng số học sinh bị điểm kém (không vượt quá 3) là 25.

D. Tổng số học sinh đạt điểm giỏi (từ 8 điểm trở lên) là 40.

Câu 26. Số học sinh đạt điểm 10 là

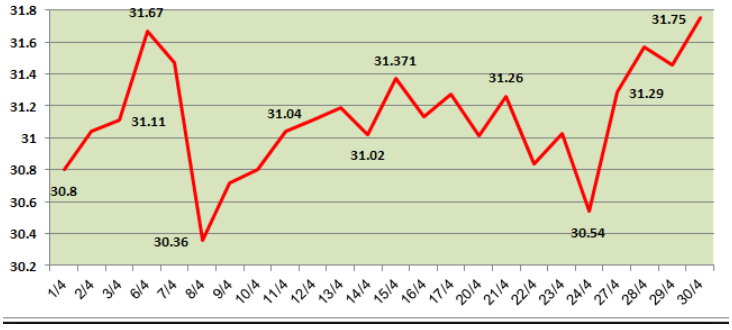
A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 27. Tổng số học sinh khối 12 của trường THPT Lê Quý Đôn là

A. 155. **B.** 156. **C.** 157. **D.** 158.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 28, 29:

Cho biểu đồ giá bán vàng trong tháng 4 năm 2017. (lưu ý giá mua vào thấp hơn giá bán ra 100 000 đồng một lượng)



Câu 28. Chọn phát biểu đúng

A. Giá vàng có xu hướng tăng đều.

B. Giá một lượng vàng trong tháng 4 thấp nhất là 30 540 000 đồng.

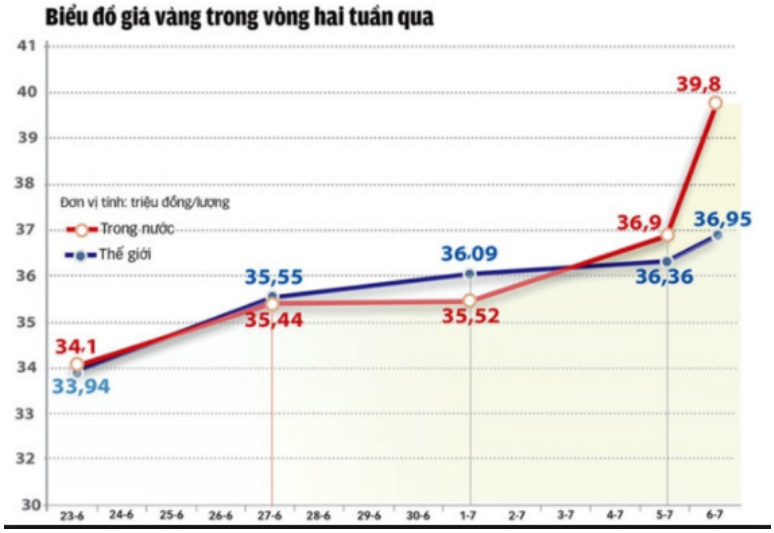
C. Nếu mua một lượng vàng tại thời điểm giá vàng thấp nhất và bán ra tại thời điểm giá vàng cao nhất thì được lãi 1 380 000 đồng.

D. Nếu mua một lượng vàng tại thời điểm giá vàng thấp nhất và bán ra tại thời điểm giá vàng cao nhất thì được lãi 1 310 000 đồng..

Câu 29. Một người mua một lượng vàng vào ngày 11/4 sau đó bán ra vào ngày 21/4 thì

A. Lãi 220 000 đồng. **B.** Lỗ 220 000 đồng. **C.** Lãi 210 000 đồng. **D.** Lãi 230 000 đồng.

Câu 30. Cho biểu đồ



Chọn phát biểu đúng.

A. Giá vàng trong nước luôn cao hơn giá vàng thế giới.
B. Giá vàng trong nước tăng còn giá vàng thế giới giảm.
C. Giá vàng trong nước giảm còn giá vàng thế giới tăng.
D. Giá vàng trong nước và thế giới cùng tăng.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 31, 32, 33, 34, 35:

Cho biểu đồ xếp loại học sinh lớp 10A



Câu 31. Nếu lớp 10A có 40 học sinh thì số học sinh giỏi là

A. 7 . **B.** 9. **C.** 24 . **D.** 17,5% .

Câu 32. Nếu lớp 10A có 40 học sinh thì số học sinh khá là

A. 7 . **B.** 9. **C.** 24 . **D.** 22,5% .

Câu 33. Nếu lớp 10A có 40 học sinh thì số học sinh trung bình là

A. 7 . **B.** 9. **C.** 24 . **D.** 60% .

Câu 34. Nếu lớp 10A có 40 học sinh thì số học sinh không đạt loại giỏi là

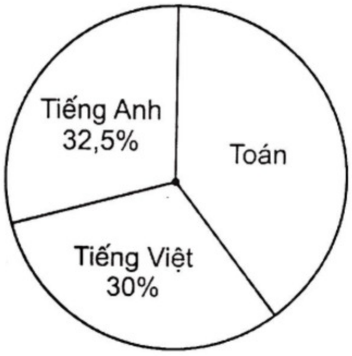
A. 7 . **B.** 33 . **C.** 24 . **D.** 82% .

Câu 35. Nếu lớp 10A có 40 học sinh thì số học sinh giỏi ít hơn số học sinh khá là

A. 7 . **B.** 9. **C.** 2 . **D.** 17,5% .

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 36, 37, 38, 39, 40:

Cho biểu đồ phân loại sách trên một kệ sách



Câu 36. Nếu trên kệ sách tổng cộng có 40 quyển sách thì số quyển sách Toán trên kệ là

A. 40. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 25.

Câu 37. Nếu trên kệ sách có 13 quyển sách Tiếng Anh thì số quyển sách Toán trên kệ là

A. 40. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 25.

Câu 38. Nếu trên kệ sách có 12 quyển sách Tiếng Việt thì số quyển sách Toán trên kệ là

A. 40. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 25.

Câu 39. Nếu trên kệ sách có 25 quyển sách Toán thì số quyển sách Tiếng Anh trên kệ là

A. 40. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 25.

Câu 40. Nếu tổng số quyển sách Tiếng Anh và Tiếng Việt nhiều hơn số quyển sách Toán là 10 quyển thì tổng số quyển sách trên kệ là

A. 40. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 25.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 41, 42, 43, 44:

Cho biểu đồ diện tích cây trồng ở một tỉnh miền núi



Câu 41. Nếu tổng diện tích (ha) cây trồng là 36 000 ha thì diện tích (ha) trồng cây lương thực là

A. 2592000. **B.** 4680. **C.** 5400. **D.** 25920.

Câu 42. Nếu tổng diện tích (ha) cây trồng là 36 000 ha thì diện tích (ha) trồng cây công nghiệp là

A. 2592000. **B.** 4680. **C.** 5400. **D.** 25920.

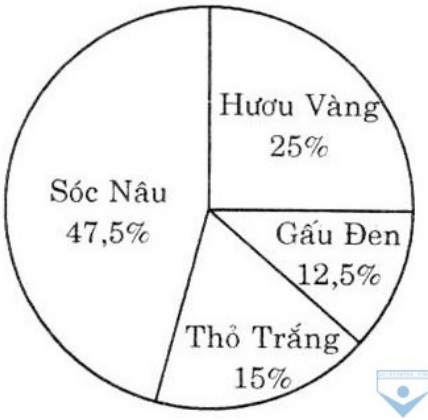
Câu 43. Nếu tổng diện tích (ha) cây trồng là 36 000 ha thì diện tích (ha) trồng cây thực phẩm là

A. 2592000 . **B.** 4680 . **C.** 5400 . **D.** 25920 .

Câu 44. Nếu tổng diện tích (ha) cây trồng là 36 000 ha thì diện tích (ha) trồng cây thực phẩm nhiều hơn diện tích trồng cây công nghiệp là

A. 720 . **B.** 21240 . **C.** 5400 . **D.** 480 .

Câu 45. Cho biểu đồ số cổ động viên các đội bóng nhí của trường Tiểu học Lương Thế Vinh mùa giải 2017- 2018. Biết tổng số cổ động viên là 200 học sinh.



Chọn khẳng định sai

A. Số cổ động viên của đọi Gấu Đen bằng một nửa số cổ động viên của đội Hươu Vàng.

B. Số cổ đọn viên của đội Sóc Nâu là nhiều nhất.

C. Số cổ động viên của đội Gấu Đen là ít nhất.

D. Số cổ động viên của đội Hươu Vàng là 25 cổ động viên.

3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ - MỐT

Câu 46. Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu được gọi là

A. Số trung bình. **B.** Số trung vị. **C.** Mốt. **D.** Độ lệch chuẩn.

Câu 47. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình, số trung vị và mốt lần lượt là

A. 15,20; 15,50, 15. **B.** 15,21; 16; 17.

C. 15,23; 14; 16. **D.** 15,25; 16,5; 14.

Câu 48. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng số liệu sau

Sản lượng	20	21	22	23	24	
Tần số	5	8	11	10	6	N = 40

Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng:

A. 22,1. **B.** 22,2. **C.** 22,3. **D.** 22,4.

Câu 49. Cho mẫu số liệu thống kê {6,5,5,2,9,10,8}. Mốt của mẫu số liệu là

A. 5. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 6

Câu 50. 41 học sinh của một lớp kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30). Kết quả như sau

Số lượng(Tần số)	3	6	4	4	6	7	3	4	2	2
Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25

Điểm trung bình, số trung vị và mốt của dấu hiệu lần lượt là

A. 16,61; 17,5; 18. **B.** 17,4; 16, 17.

C. 22; 15; 20. **D.** 18,81; 18; 19.

Câu 51. Trên con đường A, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ của 30 chiếc ô tô (đơn vị km/h)

Vận tốc	60	61	62	63	65	67	68	69	70	72
Tần số	2	1	1	1	2	1	1	1	2	2

Vận tốc	73	75	76	80	82	83	84	85	88	90
Tần số	2	3	2	1	1	1	1	3	1	1

Vận tốc trung bình, số trung vị và mốt của mẫu số liệu trên là

A. 73; 77,5; 75. **B.** 73,63; 72,5; 75 và 85.

C. 74; 73; 85. **D.** 74,02; 73,5; 80.

4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 52, 53, 54:

Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh đại học năm vừa qua của trường A người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho ở bảng phân bố sau đây.

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

Câu 52. Số trung bình là:

A. $6,23$. **B.** $6,24$. **C.** $6,25$. **D.** $6,26$.

Câu 53. Phương sai (chính xác đến hàng phần trăm) là:

A. $3,96$. **B.** $3,99$. **C.** $3,98$. **D.** $3,97$.

Câu 54. Độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm) là:

A. $1,99$. **B.** $1,98$. **C.** $1,97$. **D.** $1,96$.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 55, 56, 57:

Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo.

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất theo các lớp như sau:
[29,5; 40,5); [40,5; 51,5); [51,5; 62,5); [62,5; 73,5); [73,5; 84,5); [84,5; 95,5).

Câu 55. Tính số trung bình cộng:

A. $63,23$. **B.** $63,28$. **C.** $63,27$. **D.** $63,25$.

Câu 56. Tính phương sai

A. $279,78$. **B.** $269,78$. **C.** $289,78$. **D.** $279,75$.

Câu 57. Tính độ lệch chuẩn

A. $16,73$. **B.** $16,74$. **C.** $16,67$. **D.** $16,67$.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 58, 59, 60:

Đo chiều cao (cm) của 40 học sinh nam ở một trường THPT, người ta thu được mẫu số liệu sau:

176	167	165	164	144	176	162	175	149	144
176	166	166	163	156	170	161	176	148	143
175	174	175	146	157	170	165	176	152	142
163	173	175	147	160	170	169	176	168	141

Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp theo chiều cao của học sinh với các lớp:

[141;146], [147;152], …, [171;176].

Câu 58. Dựa vào bảng phân bố tần số ghép lớp trên, tính chiều cao trung bình

A. $\overline{x}=162,4$. **B.** $\overline{x}=160,4$.

C. $\overline{x}=162,3$. **D.** $\overline{x}=161,4$.

Câu 59. Dựa vào bảng phân bố tần số ghép lớp trên, tính phương sai.

A. $s^2=116,19$. **B.** $s^2=116,14$. **C.** $s^2=116,15$. **D.** $s^2=116,17$.

Câu 60. Dựa vào bảng phân bố tần số ghép lớp trên, tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho.

A. $s=10,74$. **B.** $s=10,78$. **C.** $s=10,72$. **D.** $s=10,71$.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 61, 62, 63:

Có 100 học sinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi môn toán, kết quả được cho trong bảng sau: (thang điểm là 20)

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

Câu 61. Tính số trung bình

A. $\overline{x}=15,22$. **B.** $\overline{x}=15,23$. **C.** $\overline{x}=15,21$. **D.** $\overline{x}=15,2$.

Câu 62. Tính phương sai

A. $s^2=3,93$. **B.** $s^2=3,97$. **C.** $s^2=3,98$. **D.** $s^2=3,96$.

Câu 63. Tính độ lệch chuẩn.

A. $s=1,95$. **B.** $s=1,92$. **C.** $s=1,99$. **D.** $s=1,912$.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 64, 65, 66:

Người ta đã thống kê số gia cầm bị tiêu hủy trong vùng dịch của 6 xã A,B,...,F như sau (đơn vị: nghìn con):

Xã	A	B	C	D	E	F
Số lượng gia cầm bị tiêu hủy	12	27	22	15	45	5

Câu 64. Số trung bình:

A. $\overline{x}=22$. **B.** $\overline{x}=27$. **C.** $\overline{x}=21$. **D.** $\overline{x}=23$.

Câu 65. Phương sai

A. $s^2=164,233$. **B.** $s^2=164,133$. **C.** $s^2=164,333$. **D.** $s^2=164,373$.

Câu 66. Độ lệch chuẩn

A. $s=12,8$. **B.** $s=12,9$. **C.** $s=12,7$. **D.** $s=12,5$.

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 67, 68, 69:

Điểm kiểm tra môn toán của hai học sinh An và Bình được ghi lại như sau:

An	9	8	4	10	3	10	9	7
Bình	6	7	9	5	7	8	9	9

Câu 67. Tính điểm trung bình của An.

A. $7,5$. **B.** $7,9$. **C.** $7,8$. **D.** $7,6$.

Câu 68. Tính phương sai và độ lệch chuẩn về điểm của Bình (chính xác đến hàng phần trăm).

A. phương sai: $s_B^2 = 3$; Độ lệch chuẩn: $s = 1,73$.

B. phương sai: $s_B^2 = 4$; Độ lệch chuẩn: $s = 2$.

C. phương sai: $s_B^2 = 2$; Độ lệch chuẩn: $s = 1,41$.

D. phương sai: $s_B^2 = 1$; Độ lệch chuẩn: $s = 1$.

Câu 69. Học sinh nào có kết quả ổn định hơn? Vì sao?

A. Bình có kết quả ổn định hơn. **B.** An có kết quả ổn định hơn.

C. Như nhau. **D.** Không so sánh được.

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Bài 1: BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

Câu 1. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X. Người ta thu được mẫu số liệu sau:

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Có bao nhiêu gia đình tiêu thụ trên 110kw/h một tháng?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Câu 2. Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần suất của một mẫu số liệu như sau:

Giá trị (x)	0	1	2	3	4	
Tần số						N=
Tần suất	12,5%	0%	50%	25%	2,5%	100%

Tuy nhiên em đó quên ghi kích thước N. Khi đó giá trị nhỏ nhất có thể có của N là

A. 4 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 24

Câu 3. Để điều tra các con trong mỗi gia đình ở một chung cư gồn 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được mẫu số liệu sau đây:

2	4	2	1	3	5	1	1	2	3
1	2	2	3	4	1	1	2	3	4

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên:

A. 6 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 5

Câu 4. Bảng phân bố tần số sau đây ghi lại số ghế trống trong các chuyến bay từ Hà Nội đến TPHCM:

Nhóm	Khoảng	Tần số
1	[0; 4]	3
2	[5; 9]	8
3	[10;1 4]	15
4	[15; 19]	18
5	[20; 24]	12
6	[25; 29]	6

Tỷ lệ phần trăm số chuyến bay có nhiều nhất 19 ghế trống xấp xỉ là

A. 75% **B.** 73%

C. 71% **D.** Không thể xác định được từ bảng trên

Câu 5. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp, chiều cao 40 học sinh lớp 10:

Các lớp số đo của chiều cao X (cm)	[150;156)	[156;162)	[162;168)	[168;174]	Cộng
Tần số n_i	7	12	17	4	40

Mệnh đề đúng là

A. Giá trị trung tâm của lớp [150;156) là 155 **B.** Tần số của lớp [156;162) là 19

C. Tần số của lớp [168;174) là 36 **D.** Số 168 không phụ thuộc lớp [162;168).

Câu 6. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Các lớp giá trị của X	[50;52)	[52;54)	[54;56)	[56;58)	[58;60]	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	15	5	100

Mệnh đề đúng là mệnh đề:

A. Giá trị trung tâm của lớp [50;52) là 53 **B.** Tần số của lớp [58;60) là 95

C. Tần số của lớp [52;54) là 35 **D.** Số 50 không phụ thuộc lớp [54;56).

Câu 7. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Các lớp giá trị của X	[50;54)	[54;58)	[58;62)	[62;66]	Cộng
Tần số n_i	15	65	15	5	100

Mệnh đề sai là mệnh đề:

A. Số 54 không phụ thuộc lớp [50;54). **B.** Số 58 thuộc lớp [58; 62)

C. Tần suất của lớp [58;62) là 50% **D.** Giá trị trung tâm của lớp [62;66) là 64

Câu 8. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Các lớp giá trị của X	[60;64)	[64;68)	[68;72)	[72;76]	Cộng
Tần số n_i	65	15	5	15	100

Mệnh đề sai là mệnh đề:

A. Số 68 không phụ thuộc lớp [64;68). **B.** Số 72 thuộc lớp [72; 76]

C. Tần suất của lớp [68;72) là 10% **D.** Giá trị trung tâm của lớp [64;68) là 66

Câu 9. Cho bảng phân bố tần số rời rạc:

x_i	x_1	x_2	x_3	……x_k	Cộng
n_i	n_1	n_2	n_3	……n_i	n

Mốt là

A. Số nhỏ nhất trong các số x_i với $i = \overline{1,k}$ **B.** Số lớn nhất trong các số x_i với $i = \overline{1,k}$

C. Số x_i có tần số nhỏ nhất **D.** Số x_i có tần số lớn nhất

Câu 10. Cho bảng phân bố tần số rời rạc:

x_i	1	2	3	4	5	6	Cộng
n_i	10	5	15	10	5	5	50

Mệnh đề sai là mệnh đề:

A. Tần suất của 4 là 20 %
B. Tần suất của 2 là 20 %
C. Tần số của 5 là 45
D. Tần suất của 5 là 90 %

Câu 11. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X. Người ta thu được mẫu số liệu sau:

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Giá trị nhỏ nhất của dấu hiệu là bao nhiêu:

A. 20 **B.** 30 **C.** 40 **D.** 60

Câu 12. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X. Người ta thu được mẫu số liệu sau:

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Số gia đình có mức tiêu thụ 80 kw/ h một tháng là

A. 15 **B.** 20 **C.** 3 **D.** 4

Câu 13. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Các lớp giá trị của X	[50;52)	[52;54)	[54;56)	[56;58)	[58;60]	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	15	5	100

Mệnh đề đúng là mệnh đề:

A. Giá trị trung tâm của lớp [50;52) là 53
B. Tần số của lớp [58;60) là 95
C. Tần số của lớp [52;54) là 35
D. Số 56 không phụ thuộc lớp [54;56).

Câu 14. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X.

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Giá trị lớn nhất của dấu hiệu là bao nhiêu:

A. 40 **B.** 160 **C.** 120 **D.** 180

Cho bảng phân bố tần số ghép lớp: (Dùng cho câu 15, 16, 17)

Các lớp giá trị của X	[50;52)	[52;54)	[54;56)	[56;58)	[58;60]	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	....	5	100

Câu 15. Tần số của lớp [56;58) là

A. 10 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 25

Câu 16. Tần suất của lớp [56;58) là

A. 5% **B.** 10% **C.** 15 % **D.** 20%

Câu 17. Số các số liệu thống kê là

A. 60 **B.** 80 **C.** 90 **D.** 100

Cho bảng phân bố tần số rời rạc: (dùng cho câu 18, 19, 20)

x_i	1	2	3	4	5	6	Cộng
f_i (%)	20	10	30	20	....	10	100%
n_i	...	5	...	...	...	...	

Câu 18. Tần số của số 4 là

A. 15 **B.** 10 **C.** 25 **D.** 20

Câu 19. Tần suất của số 5 là

A. 10% **B.** 15% **C.** 20% **D.** 25%

Câu 20. Số các số liệu thống kê là

A. 40 **B.** 60 **C.** 50 **D.** 100

Bài 2: BIỂU ĐỒ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

Câu 21. Cho bảng phân bố ghép lớp:

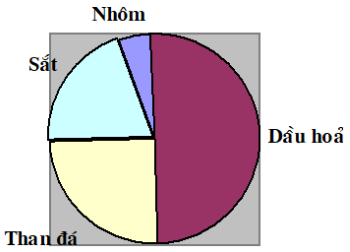
Các lớp giá trị của X	[7;13)	[13;19)	[19;25)	[25;31]	Cộng
Tần số n_i	5	10	20	15	50

Mệnh đề sai là mệnh đề:

A. Tần suất của lớp [25;31] là 15 **B.** Tần suất của lớp [7;13) là 0,1

C. Bảng đã cho là bảng tần số ghép lớp. **D.** Tần suất của lớp là [13;19) là 10%

Cho biểu đồ hình quạt thống kê giá trị xuất khẩu của một nước như sau: (Dùng cho câu 22, 23)



Câu 22. Nguyên liệu nào xuất khẩu nhiều nhất:

A. Dầu hoả **B.** Than đá **C.** Sắt **D.** Nhôm

Câu 23. Cho biết giá trị xuất của dầu hoả là 800 triệu USD. Hỏi giá trị xuất khẩu than đá là bao nhiêu triệu USD

A. 100 **B.** 200 **C.** 250 **D.** 400

Bài 3: SỐ TRUNG BÌNH CỘNG – MỐT – SỐ TRUNG VỊ

Câu 24. Ba nhóm học sinh gòm 410 người, 15 người, 25 người. Khối lượng trung bình của mỗi nhóm lần lượt là 50 kg, 38 kg, 40 kg. Khối lượng trung bình của cả 3 nhóm học sinh là

A. 41,6 kg **B.** 42,4 kg **C.** 41,8 kg **D.** 40,5

Câu 25. Cho dãy số liệu thống kê: 48, 36, 33, 38, 32, 48, 42, 33, 39. Số trung vị của dãy là
A. 32 **B.** 36 **C.** 38 **D.** 40

Câu 26. Cho X, Y, Z là ba mẫu số liệu đôi một không có phần tử chung. Số trung bình của các mẫu số liệu, X, Y, Z, $X \cup Y$, $X \cup Z$, $Y \cup Z$ được cho trong mẫu dưới đây:

Mẫu	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Số trung bình	37	23	41	29	39,5	33

Khi đó số trung bình của mẫu $X \cup Y \cup Z$ là
A. 38 **B.** 33,5 **C.** 33,66 **D.** 34

Câu 27. Cho bảng phân bố tần số rời rạc: Tuổi của 169 đoàn viên thanh niên.

Tuổi x_i	18	19	20	21	22	Cộng
Tần số n_i	10	50	70	29	10	169

Số trung vị của bảng phân bố đã cho là
A. 18 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 22

Câu 28. Cho mẫu số liệu thống kê {6, 5, 5, 2, 9, 10, 8}. Mốt của mẫu số liệu thống kê trên là
A. 5 **B.** 10 **C.** 2 **D.** 6

Câu 29. Tiền lương trong một tuần lao động (nghìn đồng) của một nhóm người như sau:

196	158	174	166	156	147	128
190	206	183	148	166	175	120
165	189	174	148	225	192	173
154	140	180	172	135		

Số trung bình và số trung vị là
A. 189,2 – 169 **B.** 167,8 – 169
C. 169 – 106 **D.** 176,5 – 177

Câu 30. Cho mẫu số liệu thống kê {28, 16, 13, 18, 12, 28, 13, 19}. Số trung vị của mẫu số liệu thống kê trên là
A. 14 **B.** 16
C. 18 **D.** 20

Câu 31. Điểm thi học kì của một học như sau: 4, 6, 2, 7, 3, 5, 9, 8, 7, 10, 9. Số trung bình và số trung vị là
A. 6,22 – 7 **B.** 7– 6 **C.** 6,6 – 7 **D.** 6 – 6

Câu 32. Cho mẫu số liệu thống kê {8, 10, 12, 14, 16}. Số trung bình của mẫu số liệu thống kê trên là
A. 12 **B.** 14 **C.** 13 **D.** 12,5

Câu 33. Cho bảng phân bố tần số rời rạc: Chiều cao (cm) của 50 học sinh:

Chiều cao x_i (cm)	152	156	160	164	168	Cộng
Tần số n_i	5	10	20	5	10	50

Số trung vị của bảng phân bố tần số trên là
A. 160 **B.** 156 **C.** 164 **D.** 152

Câu 34. Cho dãy số liệu thống kê: 21, 23, 24, 25, 22, 20. Số trung bình cộng của dãy số liệu thống kê trên là
A. 23,5 **B.** 22 **C.** 22,5 **D.** 14

Câu 35. Một trăm học sinh của tỉnh A (gồm 11 lớp 12) tham dự kì thi giỏi toán của tỉnh (thang điểm 20) và điểm trung bình của họ là 10. Biết rằng số học sinh lớp 11 nhiều hơn 50 % số học sinh lớp 12 và điểm trung bình của khối 12 cao hơn điểm trung bình của khối 11 là 50 %. Điểm trung bình của khối 12 là

A. 10 **B.** 11,25 **C.** 12,5 **D.** 15

Câu 36. Cho bảng phân bố tần số rời rạc:

x_i	2	3	4	5	6	Cộng
n_i	5	15	10	6	7	43

Mốt của bảng phân bố đã cho là

A. 2 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 5

Câu 37. Điểm thi tiếng anh của một lớp học được thống kê trong bảng sau: (tối đa 100 điểm).

Nhóm	Khoảng	Tần số
1	[40; 4 9]	3
2	[50; 59]	6
3	[60; 69]	19
4	[70; 79]	23
5	[80; 89]	9
Cộng		N = 60

Điểm trung bình là

A. 69,1 **B.** 65,33 **C.** 71,2 **D.** 69,33

Câu 38. Số điểm trắc nghiệm hệ số (IQ) của một nhóm học sinh như sau: 52, 41, 13, 43, 46, 39, 21. Số trung vị và số trung bình là

A. 41– 36 **B.** 41–36,43 **C.** 36,43– 41 **D.** 36,4 – 43

Câu 39. Cho dãy số liệu thống kê: 11, 13, 14, 15, 12, 10. Số trung bình cộng của dãy số liệu đó là

A. 13,5 **B.** 12 **C.** 12,5 **D.** Một đáp số khác

Câu 40. Ba nhóm học sinh gồm 10 người, 15 người, 25 người. Khối lượng trung bình của mỗi nhóm lần lượt là 50 kg, 30 kg, 40 kg. Khối lượng trung bình của cả 3 nhóm là

A. 40 **B.** 42,4 **C.** 26 **D.** 37

Cho bảng phân bố tần số sau: Điểm số của 50 học sinh (thang điểm 20). (dùng cho các câu 41, 42, 43)

Điểm số x_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Cộng
Tần số n_i	1	1	3	5	8	13	19	14	14	10	2	50

Câu 41. Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số là

A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 15,23

Câu 42. Số trung vị của bảng phân bố tần số là

A. 14 **B.** 15 **C.** 15,5 **D.** 16

Câu 43. Mốt của bảng phân bố tần số là

A. 16 **B.** 17 **C.** 15 **D.** 14

Bài 4: PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Câu 44. Cho mẫu số liệu thống kê $\{\ 2, 4, 6, 8, 10\ \}$. Phương sai của mẫu số liệu trên:
A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 40

Câu 45. Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Phương sai của dãy số liệu trên:
A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 46. Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu thống kê được gọi là
A. Mốt **B.** Số trung bình **C.** Số trung vị **D.** Độ lệch chuẩn

Câu 47. Nếu đơn vị của số liệu là kg thì phương sai có đơn vị:
A. kg **B.** kg^2 **C.** không có đơn vị **D.** $\frac{\text{kg}}{2}$

Câu 48. Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu trên:
A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2

Câu 49. Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Độ lệch chuẩn của dãy số liệu trên gần bằng
A. 2,3 **B.** 3,3 **C.** 4,3 **D.** 5,3

Câu 50. Tỉ số giữa tần số và kích thước mẫu
A. Mốt **B.** Phương sai **C.** Tần suất **D.** Số trung vị

Câu 51. Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu được gọi là
A. Tần suất **B.** Mốt **C.** Số trung bình **D.** Độ lệch chuẩn

Cho bảng phân bố tần số sau: Chiều cao (cm) của 20 học sinh (Dùng cho câu 52, 53).

Chiều cao x_i	150	155	160	165	Cộng
Tần số n_i	2	5	8	5	20

Câu 52. Phương sai của bảng số liệu thống kê trên là
A. 18,5 **B.** 19,5 **C.** 20,5 **D.** 21,5

Câu 53. Độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê gần bằng
A. 4,30 **B.** 4,42 **C.** 4,53 **D.** 4,63

Câu 54. Một dàn nhạc giao hưởng có 35 nhạc công có độ tuổi như sau:

Nhóm	Khoảng	Tần số
1	[20; 24]	2
2	[25; 29]	7
3	[30; 34]	15
4	[35; 39]	8
5	[40; 44]	3

Độ lệch chuẩn là
A. 4,98 **B.** 4,88 **C.** 5,1 **D.** 5,02

Câu 55. Số ôtô đi qua một cây cầu trong một tuần đếm được như sau: 83, 74, 71, 79, 83, 69, 92. Phương sai và độ lệch chuẩn của dãy số đó là
A. 79– 7,5 **B.** 74– 7,46
C. 79– 7,46 **D.** 74– 7,5

Cho bảng phân bố tần số ghép lớp ghi chiều cao của các cây hoa trong vườn như sau (Dùng cho câu 56, 57, 58):

Chiều cao (m)	[0; 0,5)	[0,5; 1)	[1; 1,5]
Số cây	8	16	8

Câu 56. Chiều cao trung bình ($\overline{x}$) của cây hoa là

A. $\overline{x}$ =0,5 **B.** $\overline{x}$ = 0,75 **C.** $\overline{x}$ = 0,6 **D.** $\overline{x}$ = 0,7

Câu 57. Phương sai của mẫu là

A. 0,35 m **B.** 0,125 m^2 **C.** 0,75 m^2 **D.** 0,5 m^2

Câu 58. Độ lệch chuẩn của mẫu trên là

A. 0,35 **B.** 0,4 **C.** 0,3 **D.** 0,2

Câu 59. Cho mẫu số liệu thống kê {8, 10, 2, 4, 6}. Độ lệch chuẩn của mẫu là

A. 2,8 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 2,4

Câu 60. Hệ số biến thiên của mẫu số liệu thống kê {8, 10, 2, 4, 6} là

A. 28,2 % **B.** 0,28% **C.** 47,1% **D.** 0,47%

Điều tra số con của một tổ dân phố gồm 50 gia đình của một thành phố ta được bảng số liệu sau (Dùng cho câu 61, 62, 63):

0	5	2	3	3	7	2	1	6	2
3	1	2	0	5	2	1	3	6	2
1	0	3	6	4	3	2	1	2	5
2	3	4	2	1	3	5	2	0	1
3	4	2	0	2	4	3	1	3	1

Câu 61. Số trung vị bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2,5

Câu 62. Số trung bình bằng

A. 2,58 **B.** 2,59 **C.** 3,01 **D.** 2,56

Câu 63. Độ lệch chuẩn bằng

A. 1,72 **B.** 2,96 **C.** 2,58 **D.** 1,75

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 5

Câu 64. Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10 được cho ở bảng sau:

Điểm thi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	3	2	1	1	3	7	4	8	9	3	1

Cho biết đơn vị điều tra và kích thước của mẫu số liệu trên?

A. Đơn vị điều tra: môn Toán, kích thước của mẫu số liệu:42

B. Đơn vị điều tra: môn Toán, kích thước của mẫu số liệu:42

C. Đơn vị điều tra: một hsinh lớp 10, kích thước của mẫu số liệu:40

D. Đơn vị điều tra: một hsinh lớp 10, kích thước của mẫu số liệu:42

Câu 65. Công việc nào sau đây không phụ thuộc vào công việc của môn thống kê?

A. Thu nhập số liệu. **B.** Trình bày số liệu

C. Phân tích và xử lý số liệu **D.** Ra quyết định dựa trên số liệu

Câu 66. Để điều tra các con trong mỗi gia đình ở một chung cư gồm 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 2 và thu được mẫu số liệu sau:

2 4 3 1 2 3 3 5 1 2

1 2 2 3 4 1 1 3 2 4

Dấu hiệu ở đây là gì?

A. Số gia đình ở tầng 2. **B.** Số con ở mỗi gia đình.

C. Số tầng của chung cư. **D.** Số người trong mỗi gia đình.

Câu 67. Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩmcủa 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút).

10 12 13 15 11 13 16 18 19 21

23 21 15 17 16 15 20 13 16 11

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

A. 23 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 200

Câu 68. Thống kê về điểm thi môn toán trong một kì thi của 450 em học sinh. Người ta thấy có 99 bài được điểm 7. Hỏi tần suất của giá trị $x_i = 7$ là bao nhiêu?

A. 7% **B.** 22% **C.** 45% **D.** 50%

Câu 69. Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Thanh Hóa từ năm 1961 đến hết năm 1990 được cho trong bảng sau:

Các lớp nhiệt độ (^{0} C)	Tần số	Tần suất(%)
[15;17)	5	50
[17;19)	2	20
[19;21]	*	30
Cộng		100%

Hãy điền số thích hợp vào *:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 70. Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70;80)	3
[80;90)	6
[90;100)	12
[100;110)	6
[110;120)	3
Cộng	30

Tần suất ghép lớp của lớp [100;110) là

A. 20% **B.** 40% **C.** 60% **D.** 80%

Câu 71. Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc:

Mẫu thứ x_i	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số n_i	2100	1860	1950	2000	2090	10000

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Tần suất của 3 là 20% **B.** Tần suất của 4 là 20%

C. Tần suất của 4 là 2% **D.** Tần suất của 4 là 50%

Câu 72. Chiều dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của chiều dài (cm)	Tần số
[10;20)	8
[20;30)	18
[30;40)	24
[40;50)	10

Số lá có chiều dài từ 30 cm đến 50 cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 50,0% **B.** 56,0% **C.** 56,7% **D.** 57%

Cho bảng tần số, tần suất ghép lớp như sau: dùng cho: Câu 75, Câu 76, Câu 77

Lớp	**Tần Số**	Tần Suất
[160;162]	6	16,7%
[163;165]	12	33,3%
[166;*]	**	27,8%
[169;171]	5	***
[172;174]	3	8,3%
	N =36	100%

Câu 73. Hãy điền số thích hợp vào*

A. 167 **B.** 168 **C.** 169 **D.** 164

Câu 74. Hãy điền số thích hợp vào**

A. 10 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 13

Câu 75. Hãy điền số thích hợp vào***

A. 3,9% **B.** 5,9% **C.** 13,9% **D.** 23,9%

Câu 76. Thống kê điểm môn toán trong một kì thi của 400 em học sinh thấy có 72 bài được điểm 5. Hỏi giá trị tần suất của giá trị x_i =5 là

A. 72% **B.** 36% **C.** 18% **D.** 10%

Câu 77. Thống kê điểm môn toán trong một kì thi của 500 em học sinh thấy số bài được điểm 9 tỉ lệ 2%. Hỏi tần số của giá trị x_i =9 là bao nhiêu?

A. 10 **B.** 20 **C.** 30 **D.** 5

Câu 78. Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩmcủa 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau(thời gian tính bằng phút).

10 12 13 15 11 13 16 18 19 21
23 21 15 17 16 15 20 13 16 11

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

A. 10 **B.** 12 **C.** 20 **D.** 23

Câu 79. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong 1 tháng (tính theo kw/h) của 1 khu chung cư có 50 gia đình, người ta đến 15 gia đình và thu được mẫu số liệu sau:

80 75 35 105 110 60 83 71
94 102 36 78 130 120 96

Có bao nhiêu gia đình tiêu thụđiện trên 100 kw/h trong một tháng

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 80. Điểm thi học kì 1 của lớp 10A được cho như bảng sau:

8	6,5	7	5	5,5	8	4	5	7
8	4,5	10	7	8	6	9	6	8
6	6	2,5	8	8	7	4	10	6
9	6,5	9	7,5	7	6	6	3	6
6	9	5,5	7	8	6	5	6	4

Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu cho ở bảng trên là

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Câu 81. Thống kê về điểm thi môn toán trong một kì thi của 850 em học sinh. Người ta thấy có 105 bài được điểm 7. Hỏi tần suất của giá trị $x_i = 7$ là bao nhiêu?

A. 7% **B.** 12% **C.** 45% **D.** 50%

Câu 82. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử. Hãy điền số thích hợp vào *

Tuổi thọ(giờ)	Tần số	Tần suất(%)
1150	3	10
1160	6	20
1170	*	40
1180	6	**
1190	3	10
Cộng	30	100%

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12

Câu 83. Hãy điền số thích hợp vào ** ở bảng trên:

A. 10 **B.** 20 **C.** 30 **D.** 40

Câu 84. Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường:

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70;80)	3
[80;90)	6
[90;100)	12
[100;110)	6
[110;120)	3
Cộng	30

Mệnh đề nào đúng:

A. giá trị trung tâm của lớp $[70;80)$ là 83 **B.** tần số của lớp $[80;90)$ là 85

C. tần số của lớp $[110;120)$ là 5 **D.** số 105 thuộc lớp $[100;110)$

Cho bảng tần số, tần suất ghép lớp như sau: dùng cho: Câu 87, Câu 88, Câu 89

Doanh thu của 50 cữa hàng của một công ty trong một tháng (đv: triệu đồng)

STT	Khoảng	Tần số	Tần suất %
1	26,5-48,5	2	4
2	48,5-70,5	8	16
3	70,5-92,5	12	24
4	92,5-114,5	12	24
5	114,5-136,5	*	16
6	136,5-158,5	7	***
7	158,5-180,5	1	2
		N = **	100%

Câu 85. Hãy điền số thích hợp vào *

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Câu 86. Hãy điền số thích hợp vào **

A. 50 **B.** 70 **C.** 80 **D.** 100

Câu 87. Hãy điền số thích hợp vào ***

A. 10 **B.** 12 **C.** 14 **D.** 16

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 88, 89, 90:

Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

Lập bảng phân bố tần sô- tần suất.

Câu 88. Tìm số trung bình

A. 111 **B.** 113,8 **C.** 113,6 **D.** 113,9

Câu 89. Tìm số trung vị

A. $M_e = 111$ **B.** $M_e = 116$ **C.** $M_e = 114$ **D.** $M_e = 117$

Câu 90. Tìm số mốt

B. $M_0 = 111$ **B.** $M_0 = 113$ **C.** $M_0 = 114$ **D.** $M_0 = 117$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 91, 92, 93, 94, 95:

Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh đại học năm vừa qua của trường A, người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia kì thi tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho ở bảng phân bố tần số sau đây.

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

Câu 91. Tìm mốt

A. $M_O = 7$ **B.** $M_O = 5$ **C.** $M_O = 8$ **D.** $M_O = 4$

Câu 92. Tìm số trung vị

A. $M_e = 7,5$ **B.** $M_e = 6,5$ **C.** $M_e = 5,5$ **D.** $M_e = 6$

Câu 93. Tìm số trung bình

A. 6,25 **B.** 6,24 **C.** 6,23 **D.** 6,26

Câu 94. Tìm phương sai

A. 3,97 **B.** 3,99 **C.** 3,98 **D.** 3,96

Câu 95. Tìm độ lệch chuẩn

A. 1,99 **B.** 1,98 **C.** 1,97 **D.** 1,96

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 96, 97, 98:

Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo.

81 37 74 65 31 63 58 82 67 77 63 46 30 53 73
51 44 52 92 93 53 85 77 47 42 57 57 85 55 64

Hãy lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp theo:

[29.5; 40.5),[40.5; 51.5),[51.5; 62.5),[62.5; 73.5),[73.5; 84.5),[84.5; 95.5]

Câu 96. Tính số trung bình cộng:
A. 63,23 **B.** 63,28 **C.** 63,27 **D.** 63,25

Câu 97. Tính phương sai:
A. 269,78 **B.** 279,78 **C.** 289,79 **D.** 279,75

Câu 98. Tính độ lệch chuẩn
A. 16,76 **B.** 16,74 **C.** 16,73 **D.** 16,79

Câu 99. Cho mẫu số liệu gồm bốn số tự nhiên khác nhau và khác 0, biết số trung bình là 6 và số trung vị là 5. Tìm các giá trị của mẫu số liệu đó sao cho hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đạt giá trị nhỏ nhất.
A. 3;4;6;11 **B.** 2;4;7;11 **C.** 3;5;6;11 **D.** 2;4;6;12

Câu 100. Thời gian chạy 50m của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

Thời gian (giây)	8,3	8,4	8,5	8,7	8,8
Tần số	2	3	9	5	1

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là
A. 8,54 **B.** 4 **C.** 8,50 **D.** 8,53

Câu 101. Điểm kiểm tra của 24 học sinh được ghi lại trong bảng sau:

7	2	3	5	8	2
8	5	8	4	9	6
6	1	9	3	6	7
3	6	6	7	2	9

Tìm mốt của điểm điều tra.
A. 2 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 9

Câu 102. Số trái cam hái được từ 4 cây cam trong vườn là2; 8; 12; 16. Số trung vị là
A. 5 **B.** 10 **C.** 14 **D.** 9,5

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 103, 104:

Cho bảng phân bố tần số khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trứng gà:

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	10
40	6
45	4
50	2
Cộng	30

Câu 103. Tìm số trung vị.
A. 37,5 **B.** 40 **C.** 35 **D.** 75

Câu 104. Tìm số mốt.
A. 40 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

Câu 105. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình là
A. $\overline{x}=15,20$ **B.** $\overline{x}=15,21$ **C.** $\overline{x}=15,23$ **D.** $\overline{x}=15,25$

Câu 106. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung vị là

A. $M_e = 15$ **B.** $M_e = 15,50$ **C.** $M_e = 16$ **D.** $M_e = 16,5$

Câu 107. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Phương sai là

A. $s_x^2 = 3,95$ **B.** $s_x^2 = 3,96$ **C.** $s_x^2 = 3,97$ **D.** đáp số khác

Câu 108. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Độ lệch chuẩn

A. $s_x = 1,97$ **B.** $s_x = 1,98$ **C.** $s_x = 1,96$ **D.** $s_x = 1,99$

Câu 109. Cho bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp khi đo chiều cao(cm) của 40 học sinh nam tại một trường THPT:

Lớp	**Tần số**	**Tần suất (%)**
[141;146]	6	15.0
[147;152]	4	10.0
[153;158]	2	5.0
[159;164]	6	15.0
[165;170]	10	25.0
[171;176]	12	30.0
	N = 40	

Chiều cao trung bình là

A. $\overline{x} = 162,4$ **B.** $\overline{x} = 160,4$ **C.** $\overline{x} = 162,3$ **D.** $\overline{x} = 161,4$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 110, 111, 112:

Chiều cao của 45 học sinh lớp 5 (tính bằng cm) được ghi lại như sau: (lập bảng ghép lớp: [98; 103); [103; 108); [108; 113); [113; 118); [118; 123); [123; 128); [128; 133); [133; 138); [138; 143); [143; 148])

102	102	113	138	111	109	98	114	101
103	127	118	111	130	124	115	122	126
107	134	108	118	122	99	109	106	109
104	122	133	124	108	102	130	107	114
147	104	141	103	108	118	113	138	112

Câu 110. Số trung bình cộng là

A. $\overline{x} = 116,4$ **B.** $\overline{x} = 115,4$ **C.** $\overline{x} = 116,3$ **D.** $\overline{x} = 166,4$

Câu 111. Phương sai là

A. $s_x^2 = 155,4$ **B.** $s_x^2 = 151,4$ **C.** $s_x^2 = 151,14$ **D.** $s_x^2 = 152,4$

Câu 112. Độ lệch chuẩn là

A. $s_x = 13,2$ **B.** $s_x = 11,2$ **C.** $s_x = 12,3$ **D.** $s_x = 13,3$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 113, 114, 115:

Số tiết tự học tại nhà trong 1 tuần (tiết/tuần) của 20 học sinh lớp 10 trường THPT A được ghi lại như sau:

9 15 11 12 16 12 10 14 14 15 16 13 16 8 9 11 10 12 18 18

Câu 113. Số trung bình cộng là

A. $\overline{x} = 12,90$ **B.** $\overline{x} = 12,95$ **C.** $\overline{x} = 12,80$ **D.** $\overline{x} = 12,59$

Câu 114. Phương sai là

A. $s_x^2 = 8,65$ **B.** $s_x^2 = 8,56$ **C.** $s_x^2 = 8,55$ **D.** $s_x^2 = 8,66$

Câu 115. Độ lệch chuẩn là

A. $s_x = 2,49$ **B.** $s_x = 2,99$ **C.** $s_x = 2,94$ **D.** $s_x = 2,90$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 116, 117, 118, 119, 120, 121:

Điểm trung bình kiểm tra cua 2 nhóm học sinh lớp 10 được cho như sau:

Nhóm 1:(9 học sinh) 1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 9

Nhóm 2:(11 học sinh) 1, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp: [1, 4] ; [5, 6] ; [7, 8] ; [9, 10] của 2 nhóm:

Câu 116. Tính số trung bình cộng nhóm 1.

A. $\overline{x_{n_1}} = 5,39$ **B.** $\overline{x_{n_1}} = 5,93$ **C.** $\overline{x_{n_1}} = 6,39$ **D.** $\overline{x_{n_1}} = 6,93$

Câu 117. Tính số trung bình cộng nhóm 2.

A. $\overline{x_{n_2}} = 5,32$ **B.** $\overline{x_{n_2}} = 5,23$ **C.** $\overline{x_{n_2}} = 6,32$ **D.** $\overline{x_{n_2}} = 6,23$

Câu 118. Tính phương sai của nhóm 1.

A. $s_{n_1}^2 = 5,65$ **B.** $s_{n_1}^2 = 5,56$ **C.** $s_{n_1}^2 = 5,55$ **D.** $s_{n_1}^2 = 6,65$

Câu 119. Tính phương sai của nhóm 2.

A. $s_{n_2}^2 = 6,39$ **B.** $s_{n_2}^2 = 6,93$ **C.** $s_{n_2}^2 = 5,93$ **D.** $s_{n_2}^2 = 6,99$

Câu 120. Tính độ lệch chuẩn của nhóm 1.

A. $s_{n_1} = 2,49$ **B.** $s_{n_1} = 2,83$ **C.** $s_{n_1} = 2,88$ **D.** $s_{n_1} = 2,38$

Câu 121. Tính độ lệch chuẩn của nhóm 2.

A. $s_{n_2} = 2,59$ **B.** $s_{n_2} = 2,63$ **C.** $s_{n_2} = 2,36$ **D.** $s_{n_2} = 2,66$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 122, 123, 124:

Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau:

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp:

$[40;50); [50;60); [60;70); [70;80); [80;90); [90;100]$

Câu 122. Số điểm trung bình là

A. $\overline{x} = 66,88$ **B.** $\overline{x} = 68,68$ **C.** $\overline{x} = 88,66$ **D.** $\overline{x} = 68,88$

Câu 123. Số phương sai là

A. $s_x^2 = 192,03$ **B.** $s_x^2 = 190,23$ **C.** $s_x^2 = 193,20$ **D.** $s_x^2 = 192,23$

Câu 124. Độ lệch chuẩn là

A. $s_x = 17,39$ **B.** $s_x = 19,73$ **C.** $s_x = 13,79$ **D.** $s_x = 17,97$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 125, 126, 127:

Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo:

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp:

[29.5; 40.5),[40.5; 51.5),[51.5; 62.5),[62.5; 73.5),[73.5; 84.5),[84.5; 95.5]

Câu 125. Số trung bình cộng là

A. $\overline{x} = 62,33$ **B.** $\overline{x} = 63,23$ **C.** $\overline{x} = 66,23$ **D.** $\overline{x} = 68,88$

Câu 126. Số phương sai là

A. $s_x^2 = 279,78$ **B.** $s_x^2 = 297,78$

C. $s_x^2 = 299,78$ **D.** $s_x^2 = 229,78$

Câu 127. Độ lệch chuẩn là

A. $s_x = 16,73$ **B.** $s_x = 17,63$

C. $s_x = 13,67$ **D.** $s_x = 16,37$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 129, 130, 131, 132:

Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đv:mm) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp.

Câu 128. Số trung bình cộng là

A. $\overline{x} = 315$ **B.** $\overline{x} = 351$

C. $\overline{x} = 531$ **D.** $\overline{x} = 135$

Câu 129. Phương sai là

A. $s_x^2 = 9757$ **B.** $s_x^2 = 9775$

C. $s_x^2 = 9577$ **D.** $s_x^2 = 7957$

Câu 130. Độ lệch chuẩn là

A. $s_x = 78,98$ **B.** $s_x = 97,88$

C. $s_x = 89,78$ **D.** $s_x = 98,87$

Sử dụng giả thiết sau cho các câu 133, 134:

Tiền công nhật của 65 nhân viên trong xí nghiệp tư nhân được thông kê như sau(đv:ngàn đồng)

Các lớp tiền lương	Số nhân viên
$[50;60)$	8
$[60;70)$	10
$[70;80)$	16
$[80;90)$	14
$[90;100)$	10
$[100;110)$	5
$[110;120)$	2

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp.

Câu 131. Tiền công trung bình là

A. $\overline{x}=79,77$ **B.** $\overline{x}=77,97$ **C.** $\overline{x}=97,97$ **D.** $\overline{x}=99,77$

Câu 132. Phương sai là

A. $s_x^2=234,3$ **B.** $s_x^2=243,2$ **C.** $s_x^2=442,2$ **D.** $s_x^2=324,2$

Câu 133. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X. Người ta thu được mẫu số liệu sau:

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Có bao nhiêu gia đình tiêu thụ dưới 60 kw/h một tháng?

A. 5 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11

Câu 134. Thống kê điểm thi toán trong một kì thi của 400 em học sinh. Người ta thấy có 72 bài điểm 5. Hỏi tần suất của giá trị $x_i=5$ là bao nhiêu?

A. 72% **B.** 36% **C.** 18% **D.** 26%

Câu 135. Thống kê điểm thi toán trong một kì thi của 400 em học sinh. Người ta thấy có số bài điểm 10 chiếm tỉ lệ 2,5%. Hỏi tần số của giá trị $x_i=10$ là bao nhiêu?

A. 10 **B.** 20 **C.** 30 **D.** 40

Câu 136. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X. Người ta thu được mẫu số liệu sau:

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu thống kê trên:

A. 12 **B.** 24 **C.** 36 **D.** 80

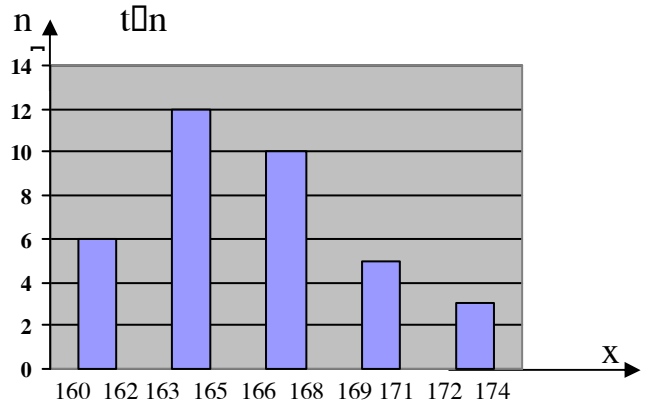
Câu 137. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo kw/h) của 30 gia đình ở khu phố X. Người ta thu được mẫu số liệu sau:

80	85	65	65	50	45	100	45	100	70
100	100	80	70	65	80	50	90	120	160
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

Kích thước mẫu là bao nhiêu

A. 30 **B.** 60 **C.** 90 **D.** 120

Biểu đồ tần số hình cột của chiều cao của 36 học sunh (cm) như sau (Dùng cho các câu (115, 116, 117)



Câu 138. Có bao nhiêu học sinh có chiều cao nằm trong khoảng [166cm; 168cm]?

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

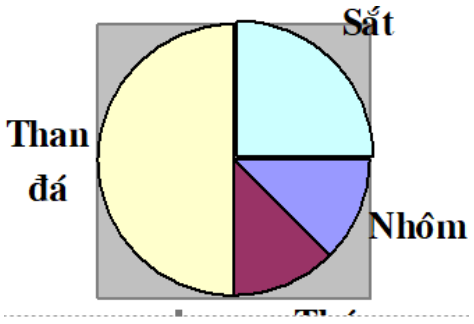
Câu 139. Có bao nhiêu học sinh có chiều cao nằm trong khoảng [160cm; 168cm]?

A. 6 **B.** 12 **C.** 10 **D.** 28

Câu 140. Tần suất của lớp [163; 165] là

A. 12 % **B.** 33,3 % **C.** 50 % **D.** Một đáp số khác

Biểu đồ hình quạt thống kê giá trị xuất khẩu của một nước cho bởi hình dưới đây (Dùng cho câu 118, 119, 120):



Câu 141. Nguyên liệu xuất khẩu nhiều nhất:

A. Sắt **B.** than đá **C.** nhôm **D.** thép

Câu 142. Cho biết giá trị xuất khẩu của sắt là 200 triệu USD. Giá trị xuất khẩu của than đá là

A. 200 triệu USD **B.** 400 triệu USD **C.** 500 triệu USD **D.** 100 triệu USD

Câu 143. Cho biết giá trị xuất khẩu của than đá là 600 triệu USD. Giá trị xuất khẩu của nhôm là

A. 300 triệu USD **B.** 200 triệu USD **C.** 150 triệu USD **D.** 600 triệu USD

Câu 144. Một điều tra xã hội học cho biết độ tuổi của người thích nhạc cổ điển như sau:

Nhóm	Khoảng điểm	Tần số
1	[20; 29]	7
2	[30; 39]	13
3	[40; 49]	15
4	[50; 59]	25
5	[60; 69]	10

Tuổi trung bình là

A. 53,25 **B.** 49,5 **C.** 47,01 **D.** 50,27

Cho bảng phân bố tần số sau: Chiều cao (cm) của 50 học sinh (Dùng cho các câu 122, 123, 124).

Chiều cao x_i	152	156	160	164	168	Cộng
Tần số n_i	5	10	20	5	10	50

Câu 145. Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số là

A. 152 **B.** 156 **C.** 160 **D.** 160,4

Câu 146. Mốt củabảng phân bố tần số là

A. 152 **B.** 156 **C.** 160 **D.** 164 và 168

Câu 147. Số trung vị của bảng phân bố tần số là

A. 160 **B.** 156 **C.** 152 **D.** 158

Cho bảng phân bố tần số sau: Cỡ áo bán ra tại một cửa hàng trong một tháng ((Dùng cho các câu 125, 126, 127):

Cỡ áo x_i	36	37	38	39	40	41	42	Cộng
Số áo bán được n_i	13	45	110	184	126	40	5	523

Câu 148. Số trung bình cộng của bảng phân bố tần số là

A. 38,97 **B.** 37,97 **C.** 40,97 **D.** 39

Câu 149. Mốt củabảng phân bố tần số là

A. 37 **B.** 38 **C.** 39 **D.** 40

Câu 150. Số trung vị của bảng phân bố tần số là

A. 38,97 **B.** 38 **C.** 39 **D.** 40

Câu 151. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp:

Lớp các giá trị x	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16]	Cộng
Tần số n_i	10	25	65	100%

Số trung bình cộng là

A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 14,1

Câu 152. Người ta xác định cân nặng của 10 em học sinh và xếp yheo thứ tự tăng dần. Số trung vị cân nặng của 10 học sinh cho bởi số liệu này là

A. Khối lượng của học sinh thứ năm

B. Khối lượng của học sinh thứ sáu

C. Không tìm được số trung vị

D. Khối lượng trung bình của học sinh thứ năm và thứ sáu

Câu 153. Độ lệch chuẩn là

A. Bình phương của phương sai **B.** Một nữa của phương sai

C. Căn số học bậc hai của phương sai **D.** Tỉ số của phương sai vàkích thước mẫu

Bảng số liệu sau đây cho ta lãi hàng tháng của một của hàng năm 2005 (đơn vị triệu đồng) (Dùng cho các câu 131, 132, 133)

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	19	15	17	20	17

Câu 154. Số trung bình của mẫu số liệu trên là

A. 15,67 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Câu 155. Số trung vị của mẫu số liệu trên là

A. 15 **B.** 16,67 **C.** 16 **D.** 17

Câu 156. Phương sai của mẫu số liệu trên là

A. 121,98 **B.** 11,04 **C.** 48,39 **D.** 140,21

Thời gian hoàn thành một sản phẩm của 45 công nhân được cho trong bảng sau (Dùng cho các câu 134, 135, 136):

124	134	152	104	162	104	125	135	140
112	151	126	142	129	117	138	128	143
119	125	141	134	138	129	115	146	134
153	100	108	124	109	138	107	112	111
109	154	123	108	106	142	106	108	119

Câu 157. Số trung bình là

A. 124,3 **B.** 125,3 **C.** 126,3 **D.** 127,3

Câu 158. Độ lệch chuẩn bằng

A. 15,15 **B.** 16,15 **C.** 17,15 **D.** 18,15

Kết quả thi học sinh giỏi của 100 học sinh (thang điểm 20) được cho trong bảng sau (Dùng cho các câu 136, 137, 138):

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Câu 159. Trung bình của mẫu là

A. 15 **B.** 15,23 **C.** 15,5 **D.** 16

Câu 160. Số trung vị của mẫu là

A. 14,23 **B.** 15,28 **C.** 15,5 **D.** 16,5

Câu 161. Mốt của mẫu là

A. 19 **B.** 9 **C.** 16 **D.** 15,5

E. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

PHẦN C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	D	D	D	D	D	A	D	A	A	D	D	C	C	B	C	B	D	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	D	B	C	C	C	B	C	C	D	A	B	C	B	C	D	D	D	C	A

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	B	C	A	D	C	C	A	A	A	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	D	C	C	C	A	A	C	A											

PHẦN D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	D	C	D	D	C	C	D	A	C	C	D	B	C	C	D	B	A	C

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	C	B	C	D	B	A	B	C	C	A	A	C	C	C	D	C	C	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	C	A	B	A	A	B	D	A	C	B	D	D	A	C	B	B	A	A	C

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	A	A	D	D	B	B	B	B	A	B	C	B	A	C	C	A	B	C	B

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	D	B	D	C	A	C	D	C	C	A	B	C	D	A	A	B	C	A	D

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
C	B	C	A	C	B	B	D	A	A	B	C	B	A	C	A	B	A	B	D

121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	A	B	C	B	A	A	A	B	D	A	B	B	C	A	A	A	C	D	B

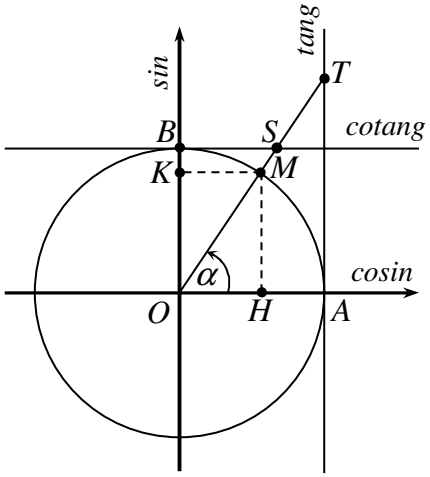
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
B	B	C	C	D	C	A	A	C	C	D	D	C	A	D	A	C	B	B	C

161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
C																			

Chủ đề 6 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Tóm tắt lí thuyết

I. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác



1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho $(OA, OM) = \alpha$. *Giả sử* $M(x; y)$.

- $\cos\alpha = x = \overline{OH}$
- $\sin\alpha = y = \overline{OK}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT}\ \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BS}\ \ (\alpha \neq k\pi)$

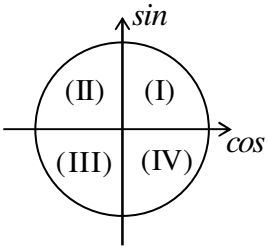
Nhận xét:

- $\forall a, -1 \le \cos\alpha \le 1;\ \ -1 \le \sin\alpha \le 1$
- $\tan\alpha$ *xác định khi* $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ • $\cot\alpha$ *xác định khi* $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Dấu của các giá trị lượng giác

"Nhất cả, nhị sin, tam tan, tứ cos"

Góc / HSLG	(I)	(II)	(III)	(IV)
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cot	+	–	+	–



3. Một số lưu ý:

① *Quan hệ giữa độ và rađian:* $1° = \dfrac{\pi}{180}\ (rad)$ *và* $1(rad) = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^0$

② *Với* $\pi \approx 3{,}14$ *thì* $1° \approx 0{,}0175\ (rad)$, *và* $1\ (rad) \approx 57^0 17' 45''$

③ *Độ dài* l *của cung tròn có số đo* α *(rad), bán kính R là* $l = R\alpha$.

④ *Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu* A, *điểm cuối là* B: *sđ* $\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑤ *Mỗi cung lượng giác* $\overset{\frown}{CD}$ *ứng với một góc lượng giác* (OC, OD) *và ngược lại.*

II. Cung liên kết

"Cos đối, sin bù, phụ chéo, khác π tan"

- **Cung đối nhau:** α **và** $-\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

- **Cung hơn kém** $k2\pi$

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$ $\quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ $\quad \tan(\alpha + k2\pi) = \tan\alpha$ $\quad \cot(\alpha + k2\pi) = \cot\alpha$

- **Cung bù:** $\pi - \alpha$ **và** α

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

- **Cung khác** π **:** $\pi + \alpha$ **và** α

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\quad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

- ***Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$:***

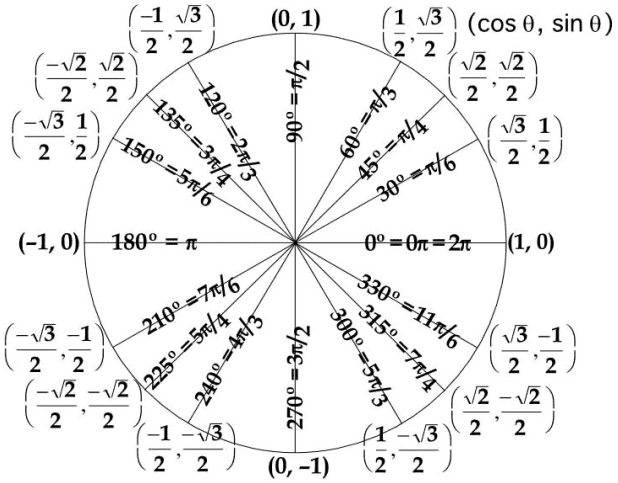
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

- ***Cung phụ $\frac{\pi}{2}-\alpha$ và α:***

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

III. Các giá trị lượng giác của một số góc (cung) đặc biệt

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	‖



IV. Công thức lượng giác:

- ***Hệ thức cơ bản:***

1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ***2)*** $\tan x.\cot x=1$ ***3)*** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

4) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ***5)*** $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ ***6)*** $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$

- ***Công thức cộng:***

7) $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$ ***8)*** $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$

9) $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$ ***10)*** $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$

11) $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$ ***12)*** $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

- **Công thức nhân hai:**

13) $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$ **15)** $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ **16)** $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

14) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^4 a - \sin^4 a = (\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)$

- **Công thức nhân ba:** *(chứng minh trước khi dùng)*

17) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ **18)** $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

19) $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$ **20)** $\cot 3a = \dfrac{3\cot^2 a - 1}{\cot^3 a - 3\cot a}$

- **Công thức hạ bậc:**

21) $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$ **22)** $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ **23)** $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$ **24)** $\cot^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$

- **Công thức biến đổi tích thành tổng:**

25) $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$ **26)** $\cos a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$

27) $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$ **28)** $\sin a.\sin b = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

- **Công thức biến đổi tổng thành tích:** *(Các công thức 33–36 phải chứng minh)*

29) $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ **30)** $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

31) $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ **32)** $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

33) $\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$ **34)** $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$

35) $\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(b+a)}{\sin a.\sin b}$ **36)** $\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$

- **Một số hệ quả:**

37) $\sin a\cos a = \dfrac{1}{2}\sin 2a$ **38)** $\sin^2 a\cos^2 a = \dfrac{1}{4}\sin^2 2a$

39) $1 + \cos ka = 2\cos^2\dfrac{ka}{2}$ **40)** $1 - \cos ka = 2\sin^2\dfrac{ka}{2}$

41) $1 + \sin ka = \left(\sin\dfrac{ka}{2} + \cos\dfrac{ka}{2}\right)^2$ **42)** $1 - \sin ka = \left(\sin\dfrac{ka}{2} - \cos\dfrac{ka}{2}\right)^2$

43) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **44)** $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

45) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **46)** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

47) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$

48) $\sin^6 x + \cos 6x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$

Phương pháp giải toán

Vấn đề 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và rad

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Dùng công thức* $\boxed{a=\frac{180.\alpha}{\pi}}$ *hoặc* $\boxed{\alpha=\frac{\pi.a}{180}}$.

  Trong đó : *a : là số đo bằng độ của góc hoặc cung*

  α *: số đo bằng rad của góc hoặc cung*
- *Có thể dùng máy tính bỏ túi để đổi đơn vị đo được nhanh hơn.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.1 Đổi số đo của các cung sau sang radian: $54°$, $30°45'$, $30°$, $45°$, $-60°$, $90°$, $-120°$, $-210°$.

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.2 Đổi số đo của các cung sau sang độ: $\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}\ \frac{\pi}{18}; \frac{4\pi}{3}; 5,34; 2,34\pi$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.1 Đổi số đo của các góc sau ra radian:

a) $15°$ b) $12°30'$ c) $22°30'$ d) $71°52'$

1.2 Đổi số đo của các cung sau ra độ, phút, giây:

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) 1 c) $\frac{3\pi}{16}$ d) $\frac{3}{4}$

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến góc (cung) lượng giác

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Số đo tổng quát của cung lượng giác có dạng:* $\alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- *Cho góc có số đo* β *tùy ý ta luôn đưa về được dạng* $\alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. *Trong đó* $-\pi < \alpha \le \pi$
  Khi đó $|\alpha|$ *còn được gọi là số đo hình học của góc.*
- *Nếu cho góc (cung) có số đo* β, *muốn xem nó có phải là số đo của một góc (cung) có số đo tổng quát trên hay không, ta giải phương trình* $\beta = \alpha + k2\pi$ *tìm k trên tập* $\mathbb{Z}$.
- *Nếu hai góc (cung) lượng giác* $x_1 = \alpha_1 + m2\pi$ *và* $x_2 = \alpha_2 + n2\pi$ *khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác có điểm cuối trùng nhau khi và chỉ khi* $x_1 - x_2 = k2\pi$ *có nghiệm với* $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.3 Tìm số đo hình học của góc: a) $x = \dfrac{10\pi}{7}$ b) $y = -2345°$

.....

.....

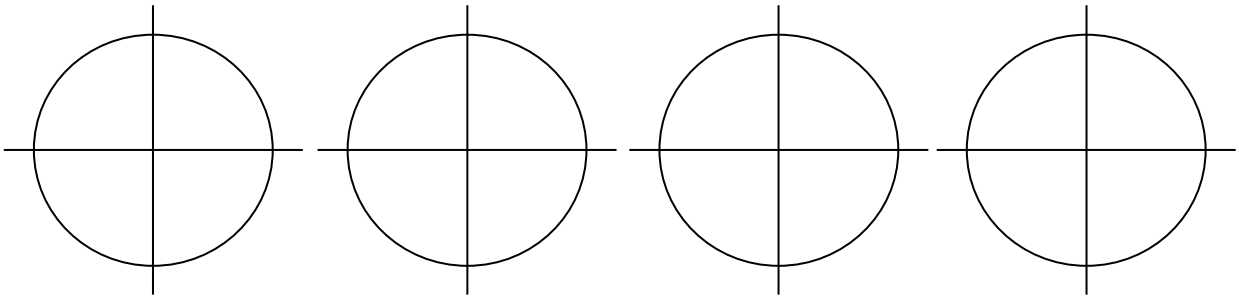
.....

.....

.....

.....

VD 1.4 Trên đường tròn lượng giác với điểm $A(1; 0)$ là gốc, xác định vị trí tia OM của góc lượng giác $\alpha = (OA, OM)$ trong các trường hợp sau: $\alpha = -750°$, $\alpha = 120°$, $\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$, $\alpha = -\dfrac{8\pi}{3}$.



VD 1.5 Cho điểm B trên đường tròn lượng giác với gốc là điểm $A(1; 0)$ sao cho $(OA, OB) = 60°$. Tìm thêm 3 góc lượng giác (OA, OB) có giá trị dương và 3 góc lượng giác (OA, OB) có giá trị âm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.6 Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc A các cung lượng giác có số đo $\frac{37\pi}{4}$, $\frac{m\pi}{3}$ có điểm cuối trùng nhau hay không ?

.....

.....

.....

.....

VD 1.7 Cho $x=-\frac{7\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Tìm các góc (cung) x thỏa $0<x<\pi$

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.3 Cho sđ $(Ox,\ Oy)=\frac{\pi}{8}+kp\ (k\in\mathbb{Z})$

a) Tính k để sđ $(Ox,\ Oy)=-\frac{63\pi}{8}$.

b) Giá trị $-\frac{65\pi}{8}$ có phải là một số đo của $(Ox,\ Oy)$ không ? Tại sao ?

1.4 Cho $sđ(Ox,\ Oy)=33°20'+k360°$ với $k\in\mathbb{Z}$.

a) Định k để $sđ(Ox,\ Oy)$ lần lượt là $1113°20'$ và $-686°40'$.

b) Giá trị $946°40'$ có phải là $sđ(Ox,\ Oy)$ không ? Tại sao ?

1.5 Cho $x=\frac{\pi}{5}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Tìm các góc (cung) x thỏa một các điều kiện sau:

a) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}\le x\le 4\pi$ c) $-2<x<3$

Dạng 3. Dựng các ngọn cung lượng giác trên đường tròn LG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

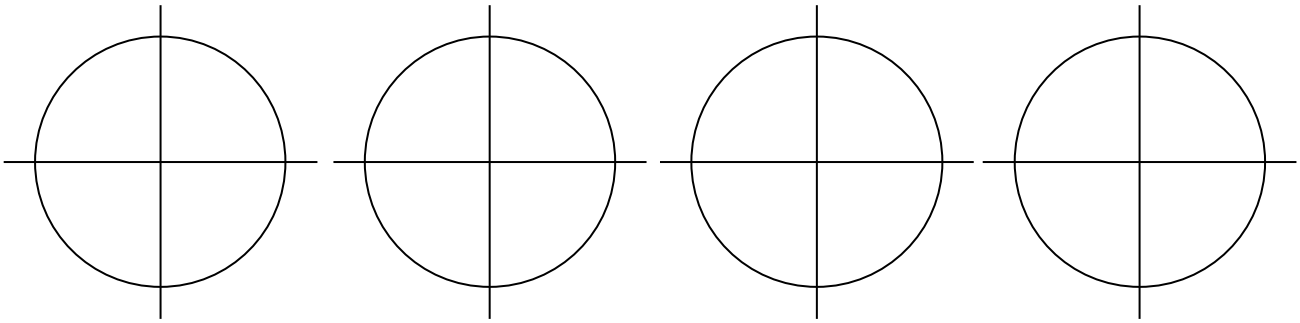
- *Biểu diễn cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ trên đường tròn lượng giác, tức là đi xác định điểm cuối $M_0, M_1, M_2, \ldots$ của cung đó trên đường tròn lượng giác. Ta có thể lập bảng:*

k	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$\overset{\frown}{AM}$	…	M_{-3}	M_{-2}	M_{-1}	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	…

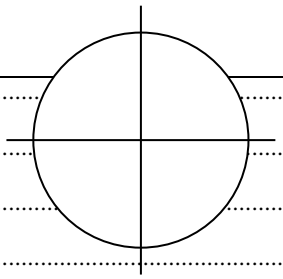
- ***Chú ý**: Cung $\overset{\frown}{AM}=\alpha+\frac{k2\pi}{n}$ thì sẽ biểu diễn được đúng **n** điểm*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.8 Trên đường tròn lượng giác có gốc A. Hãy xác định các điểm M biết cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo: $k\pi$; $\frac{k\pi}{2}$; $\frac{k\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$



VD 1.9 Biểu diễn các cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác, từ đó tìm công thức số đo chung của các cung đó: $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $l\pi$; $\frac{\pi}{4}+m\frac{\pi}{2}$ $(k,l,m\in\mathbb{Z})$



.....

.....

.....

.....

VD 1.10 Tìm công thức tính số đo của các cung lượng giác, biết số đo của chúng thỏa mãn các điều kiện sau, với: a) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\ (k,m\in\mathbb{Z}) \\ x\neq m\pi \end{cases}$ b) $\begin{bmatrix} x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\ (k,m\in\mathbb{Z}) \\ x\neq m\pi \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

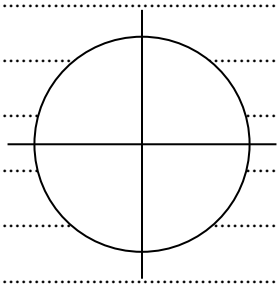
.....

.....

.....

.....

.....



C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.6 Trên đường tròn lượng giác gốc A, dựng điểm cuối các cung lượng giác có số đo $(k\in\mathbb{Z})$:

a) $\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}$ b) $\overset{\frown}{AM}=\pi+k\frac{\pi}{4}$ c) $\overset{\frown}{AM}=60°+k120°$

d) $\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}$ e) $\overset{\frown}{AM}=-150°+k.90°$ f) $\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}$

1.7 Trên đường tròn lượng giác, biểu diễn các cung có số đo: $\frac{3\pi}{4}$; $-60°$; $-315°$; $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{3}$.

Tìm các ngọn cung trùng nhau, tại sao ?

1.8 Trên đường tròn định hướng, cho ba điểm A, M, N sao cho $sđ\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{4}$, $sđ\overset{\frown}{AN}=\frac{2\pi}{3}$. Gọi P là điểm thuộc đường tròn đó để tam giác MNP là tam giác cân tại P. Hãy tìm $sđ\overset{\frown}{AP}$.

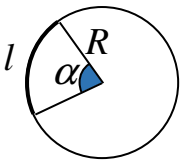
1.9 Tìm công thức tính số đo của các cung lượng giác, biết số đo của chúng thỏa mãn các điều kiện sau, với $(k,m\in\mathbb{Z})$:

a) $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+m\pi \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=m\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=m\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Dạng 4. Độ dài của một cung tròn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Dùng công thức* $\boxed{l=R.\alpha}$
  Trong đó: *R: bán kính đường tròn*
  α: số đo bằng rad của cung
  l: độ dài cung
- *Chú ý: Áp dụng vào các bài toán có liên qua đến thực tế*



B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.11 Trên đường tròn có bán kính bằng 20cm, tìm độ dài của các cung có số đo sau:

$15°$; $25°$; $\frac{3\pi}{5}$; $2,45$ (*tính chính xác đến hàng phần ngàn*)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.12 Hai người số ở trên cùng một kinh tuyến, lần lượt ở $25°$ vĩ nam và $10°$ vĩ đô nam. Tính khoảng cách theo đường chim bay giữa hai người đó. Biết bán kính của Trái Đất là 6378 km.

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.10 Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (độ và rad) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680mm.

1.11 Một xe ôtô biết bánh xe có đường kính 120 cm. Nếu xe đó chạy được 100 km thì bánh xe quay được bao nhiêu vòng ?

1.12 Một chiếc đòng hồ có kim giờ dài 2,1m ; kim phút dài 2,5m.

a) Hỏi sau 45 phút mũi kim giờ, mũi kim phút vạch nên được các cung tròn có độ dài bao nhiêu mét?

b) Giả sử hai kim cùng xuất phát cùng vị trí khi tia Ox chỉ số 12. Hỏi sau bao lâu thì hai kim trùng nhau lần 1? trùng nhau lần 2 ?

Dạng 5. Tính các giá trị lượng giác của một cung khi biết một giá trị lượng giác của nó

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Sử dụng 6 hệ thức cơ bản đã nêu trong phần tóm tắt lí thuyết.*
- *Chú ý sử dụng bảng dấu của hàm số lượng giác để loại đi những giá trị không hợp lí.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.13 Cho $\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$

.....

.....

.....

.....

VD 1.14 Cho $\tan\alpha = -2$. Tính: a) $A = \frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}$ b) $B = \frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{1 + 4\sin^2\alpha}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.15 Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=m$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính: a) $A=\sin\alpha-\cos\alpha$ b) $B=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.13 Tính các giá trị lượng giác của cung α biết:

a) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$

b) $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$

c) $\tan a=-2$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

d) $\cot\alpha=3$ và $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$

e) $\sin\alpha=0,8$ và $\frac{\pi}{2}<a<\pi$

f) $\tan\alpha=3$ và $180°<a<270°$

g) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$

h) $\cot\alpha=\frac{2}{3}$ và $0°<\alpha<90°$

1.14 Cho $\sin x+\cos x=m$ với $90°<x<180°$. Tính theo m:

a) $\sin x.\cos x$ b) $\sin x-\cos x$ c) $\sin^3 x+\cos^3 x$

d) $\sin^4 x+\cos^4 x$ e) $\sin^6 x+\cos^6 x$ f) $\tan^2 x+\cot^2 x$

1.15 Cho $\sin x.\cos x=n$. Tính theo n:

a) $\sin x.\cos x$ b) $\sin x-\cos x$ c) $\sin^3 x+\cos^3 x$

d) $\sin^4 x+\cos^4 x$ e) $\sin^6 x+\cos^6 x$ f) $\tan^2 x+\cot^2 x$

1.16 Cho $\tan x - \cot x = m$. Tính theo m:

a) $\left|\tan x + \cot x\right|$ b) $\tan^2 x + \cot^2 x$ c) $\tan^3 x - \cot^3 x$

1.17 a) Cho $\tan x = -2$ và $90° < x < 180°$. Tính $A = \dfrac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$

b) Cho $\tan x = -2$. Tính $B = \dfrac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$.

c) Cho $\sin x = \dfrac{1}{3}$. Tính $C = \dfrac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x}$

d) Cho $\cot x = -3$. Tính $D = \dfrac{\sin^2 x + 3\sin x.\cos x - 2\cos^2 x}{1 + 4\sin^2 x}$

e) Cho $\tan x = \dfrac{1}{2}$. Tính $E = \dfrac{3\sin^3 x - 2\sin x + \cos x}{\cos^3 x + 2\sin x.\cos^2 x}$

f) Cho $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ và $180° < x < 270°$. Tính $F = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$.

g) Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $G = \dfrac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$.

h) Cho $\tan x = -3$. Tính $H = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x.\cos x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 3\sin x.\cos x + 4\cos^2 x}$

Dạng 6. Rút gọn-Chứng minh

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Sử dụng linh hoạt các công thức cở bản từ 1 đến 6, các phép biến đổi đại số, sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để rút gọn và chứng minh.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.16 Chứng minh:

a) $3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) = 1$ b) $\dfrac{1}{\sin^4 x} - \cot^4 x = \dfrac{2}{\sin^2 x} - 1$

VD 1.17 Chứng minh giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:
a) $A=\cos^4 x\left(2\cos^2 x-3\right)+\sin^4 x\left(2\sin^2 x-3\right)$ b) $B=3\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)+4\left(\cos^6 x-2\sin^6 x\right)+6\sin^4 x$

VD 1.18 Chứng minh:
a) $\dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{\cot^2 x-\cos^2 x}=\tan^6 x$
b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=-2\cot x,\ (\pi<x<2\pi)$
c) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=1+2\tan^2\alpha$.
d) $\cos^2 x\left(\cos^2 x+2\sin^2 x+\sin^2 x\tan^2 x\right)=1$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.18 Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

$A=\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}$

$B=\dfrac{\sin x+\tan x}{\tan x}-\sin x.\cos x$

$C=\tan x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$D=\dfrac{\cos x.\tan x}{\sin^2 x}-\cos x.\cot x$

$E=(1+\sin x)\tan^2 x(1-\sin x)$

$F=1-\dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x}-\dfrac{\cos^2 x}{1+\tan x}$

$G=(\cot x+\tan x)^2-(\tan x-\cot x)^2$

$H=\sin^3 x(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x)$

$I=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x$

$F=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x}-1$

$K=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$L=\dfrac{1}{\sin x-\sqrt{\cot^2 x-\cos^2 x}}\ (\pi<x<2\pi)$

$M=\sqrt{\sin^2 x(1+\cot x)+\cos^2 x(1+\tan x)}$

$N=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left[1-\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$

$P=\dfrac{2\cos^2 x-1}{\cos x-\sqrt{\tan^2 x-\sin^2 x}},\left(\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\right)$

1.19 Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$

c) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x.\sin^2 x$

d) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x.\cos^2 x$

e) $\sin^4 x-\cos^4 x=2\sin^2 x-1$

f) $\dfrac{\cot^2 x-\sin^2 x}{\cot^2 x-\tan^2 x}=\sin^2 x.\cos^2 x$

g) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

h) $\dfrac{\tan x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cot x}=\cos x$

i) $\dfrac{\tan x}{1-\tan^2 x}\cdot\dfrac{\cot^2 x-1}{\cot x}=1$

j) $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

k) $\tan x.\tan y=\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}$

l) $\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=1+2\tan^2 x$

m) $\dfrac{1+2\sin x.\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}$

n) $\dfrac{1-2\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\tan^2 x-\cot^2 x$

o) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$

p) $\dfrac{\tan^2 x-\tan^2 y}{\tan^2 x.\tan^2 y}=\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x.\sin^2 y}$

q) $\dfrac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

r) $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x-\cos x+1}$

s) $\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos^3 x}=\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1$

t) $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{1+\cot^2 x}{1-\cot^2 x}$

u) $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\tan x.\cot x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

v) $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)^2=4\tan^2 x$

w) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\dfrac{\sin x+\cos x}{\tan^2 x-1}=\sin x+\cos x$

x) $\left(1+\tan x+\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1+\tan x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=2\tan x$

y) $\sin^2 x.\tan x+\cos^2 x.\cot x+2\sin x.\cos x=\tan x+\cot x$

z) $1+\sin x+\cos x+\tan x=(1+\cos x)(1+\tan x)$

1.20 Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x, y:

a) $(\cot x+\tan x)^2-(\cot x-\tan x)^2$

b) $\cos^2 x.\cot^2 x+3\cos^2 x-\cot^2 x+2\sin^2 x$

c) $2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$

d) $3\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)+4\left(\cos^6 x-2\sin^6 x\right)+6\sin^4 x$

e) $2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x+3\sin^2 x$

f) $2\left(\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^8 x+\cos^8 x\right)$

g) $\sin^2 x(1+\cot x)+\cos^2 x(1-\tan x)$

h) $\sin^6 x+\cos^6 x-2\sin^4 x-\cos^4 x+\sin^2 x$

i) $\sin^2 x.\tan^2 x+2\sin^2 x-\tan^2 x+\cos^2 x$

j) $\sin x+\sqrt{\sin^4 x+\cos^2 x.\sin^2 x}$, $\pi<x<2\pi$

k) $\dfrac{\cot^2 x-\cos^2 x}{\cot^2 x}+\dfrac{\sin x.\cos x}{\cot x}$

l) $\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

m) $\dfrac{2}{\tan x-1}+\dfrac{\cot x+1}{\cot x-1}$

n) $\sin^8 x+\cos^8 x+6\sin^4 x.\cos^4 x+4\sin^2 x.\cos^2 x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+1$

Dạng 7. Các dạng toán khác

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Tính giá trị lượng giác của một cung (góc) có số đo khá lớn ta thường biến đổi chúng về dạng $x=\alpha+k2\pi$ hoặc $x=a^\circ+k360^\circ$ rồi sau đó áp dụng:*

  "α và $\alpha+k2\pi$ có điểm ngọn trùng nhau nên có giá trị lượng giác như nhau"

- *Xét dấu một biểu thức lượng giá là ta biểu diễn điểm cuối của cung lượng giác đó lên đường tròn lượng giác rồi xem nó thuộc góc phần tư thứ mấy để suy ra dấu (dùng bảng xét dấu trong phần tóm tắt lí thuyết) của nó.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.19 Tính giá trị của góc (cung) lượng giác sau:

$$225^\circ;\ -1575^\circ;\ 750^\circ;\ 510^\circ;\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{11\pi}{6};\ -\frac{10\pi}{3};\ -\frac{17\pi}{3}$$

	225°	-1575°	750°	510°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{10\pi}{3}$	$-\frac{17\pi}{3}$
sin								
cos								
tan								
cot								

VD 1.20 Tính giá trị lượng giác của các góc sau với k nguyên dương: a) $-\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi$ b) $\frac{\pi}{4}+k\pi$

VD 1.21 Xét dấu các biểu thức sau:

a) $\sin 156°$; $\cos(-80°)$; $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right)$; $\tan 556°$

b) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{8}\right)$; $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.21 Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ biết:

a) $\alpha=-675°$ b) $\alpha=-390°$ c) $\alpha=-\frac{17\pi}{3}$ d) $\alpha=\frac{17\pi}{2}$

1.22 Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $\cos(\alpha+\pi)$ b) $\tan(\alpha-\pi)$ c) $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)$

d) $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{8}\right)$ e) $\cot\left(\alpha-\frac{2\pi}{5}\right)$ f) $\sin\left(\alpha-\frac{6\pi}{7}\right)$

1.23 Xét dấu các biểu thức sau:

a) $\sin 50°.\cos(-30°)$ b) $\cot 120°.\sin(-120°)$ c) $\sin 200°.\cos(-20°)$

d) $\sin(-190°).\cos(400°)$ e) $\tan\frac{6\pi}{5}.\tan\frac{-\pi}{7}$ f) $\cot\frac{4\pi}{5}.\cot\frac{11\pi}{3}$

1.24 Tìm α, biết:

a) $\cos\alpha=1$

$\Leftrightarrow$

b) $\cos\alpha=0$

$\Leftrightarrow$

c) $\cos\alpha=-1$

$\Leftrightarrow$

d) $\sin\alpha=1$

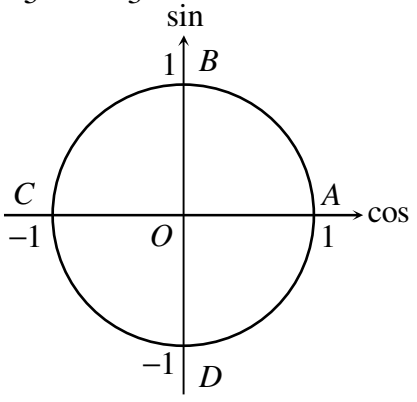
$\Leftrightarrow$

e) $\sin\alpha=0$

$\Leftrightarrow$

f) $\sin\alpha=-1$

$\Leftrightarrow$



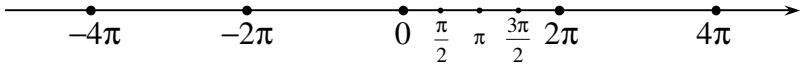
Vấn đề 2. CUNG LIÊN KẾT

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác của một cung bằng cách rút về cung phần tư thứ nhất

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Dựa vào định nghĩa và các công thức quy gọn góc đã biết, kết hợp với dấu của các giá trị lượng giác để suy ra kết quả.*



- *Nếu gặp biểu thức phức tạp, ta cần rút gọn trước khi tính.*
- *Ghi nhớ các trường hợp thường gặp sau đây:*

$$-\alpha;\ \frac{\pi}{2}-\alpha;\ \frac{\pi}{2}+\alpha;\ \pi-\alpha;\ \pi-\alpha;\ \alpha+k2\pi;\ \alpha-k2\pi$$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.22 Tính a) $\sin 930°$; b) $\cos 1140°$ c) $\tan 750°$

.....

.....

.....

VD 1.23 Cho $\sin x=-0,96$ với $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$. Tính: a) $\cos(\pi-x)$; b) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; c) $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.25 Tính các giá trị lượng giác của cung α biết:

a) $\alpha=3180°$ b) $\alpha=-1380°$ c) $\alpha=480°$ d) $a=2010°$

e) $\alpha=\frac{31\pi}{3}$ f) $\alpha=\frac{27\pi}{6}$ g) $\alpha=\frac{15\pi}{4}$ h) $\alpha=-\frac{11\pi}{3}$

1.26 Tính:

a) $\sin 150°$; $\cos 135°$; $\tan\frac{2\pi}{3}$; $\cot\frac{-\pi}{4}$

b) $\sin\frac{29\pi}{6}$; $\cos\frac{2017\pi}{3}$; $\tan\left(-\frac{159\pi}{4}\right)$; $\cot\left(-\frac{115\pi}{6}\right)$

c) $\sin 210°$; $\cos 225°$; $\tan 240°$; $\cot\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

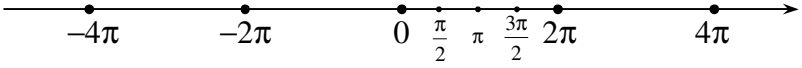
d) $\sin 330°$; $\cos 420°$; $\tan 300°$; $\cot 750°$

e) $\sin 300°$; $\cos 330°$; $\tan 315^0$; $\cot 315°$

Dạng 2. Tính giá trị biểu thức lượng giác

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Dựa vào định nghĩa và các công thức quy gọn góc đã biết, kết hợp với dấu của các giá trị lượng giác để suy ra kết quả.*



- *Nếu gặp biểu thức phức tạp, ta cần rút gọn trước khi tính.*
- *Ghi nhớ các trường hợp thường gặp sau đây:*

$$-\alpha;\ \frac{\pi}{2}-\alpha;\ \frac{\pi}{2}+\alpha;\ \pi-\alpha;\ \pi-\alpha;\ \alpha+k2\pi;\ \alpha-k2\pi$$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.24 Tính $A=\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{9}+\cos^2\frac{11\pi}{18}+\cos^2\frac{13\pi}{18}+\cos^2\frac{2\pi}{9}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.25 Tính $B=\dfrac{\left(\cot 44^\circ+\tan 226^\circ\right).\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ}-\cot 72^\circ.\cot 18^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.27 Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau:

$A = 2\sin\dfrac{13\pi}{3} + \cos\dfrac{16\pi}{6} - 3\tan\dfrac{5\pi}{4}$ $B = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) - 2\sin\dfrac{2\pi}{3} + 4\sin\dfrac{\pi}{5}.\sin\pi$

$C = 2\sin 390° - 3\tan 225° + \cot 120°$ $D = \dfrac{\sin 130° - \cos 220°}{\cos 50°.\cot 320°}$

$E = \dfrac{1}{\tan 368°} + \dfrac{2\sin 2550°.\cos(-188°)}{2\cos 638° + \cos 98°}$ $F = \dfrac{\sin(-234°) - \cos 216°}{\sin 144° - \cos 126°} \cdot \tan 36°$

$G = 2\tan 1095° + \cot 975° + \tan(-195°)$ biết $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$

1.28 Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau:

$A = \tan 20°.\ \tan 45°.\ \tan 70°$ $B = \cot 25°.\cot 45°.\cot 65°$

$C = \tan 5°.\tan 45°.\ \text{an}\, 265°$ $D = \tan 1°.\cot 2°.\tan 3°.\cot 4°\ldots\ \cot 88°.\tan 89°$

$E = \sin^2 70° + \sin^2 45° + \sin^2 20°$ $F = \tan 20°.\tan 70° + \sqrt{3}\cot 20°\cot 70°$

$G = \tan 1°\tan 2°\tan 3°\ldots\tan 88°\tan 89°$ $H = \cot 585° - 2\cos 1440° + 2\sin 1125°.$

$I = \cos 0° + \cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 160° + \cos 180°$

$J = \tan 10°.\tan 20°.\tan 30°.\tan 40°.\tan 50°.\ \tan 60°.\tan 70°.\tan 80°$

$K = \sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \ldots + \sin^2 170° + \sin^2 180°$

$L = \sin 825° - \cos(-15°) + \cos 75°.\sin(-195°) + \tan 155°.\tan 245°$

Dạng 3. Rút gọn-Chứng minh

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Sử dụng cung liên kết để đưa về các giá trị lượng giá của cùng một cung (góc) để rút gọn.*
- *Chú ý sử dụng các biến đổi đại số đã biết.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.26 Rút gọn các giá trị lượng giác sau: $\sin\left(a - \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\left(a - \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\tan\left(a - \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\cot\left(a - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

VD 1.27 Rút gọn: $A=\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\tan\left(\pi-x\right)}{\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\pi-x\right)}-2\cos x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.28 Rút gọn: $B=\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\pi-\alpha\right)\cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)}-\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(2\pi-\beta\right)\tan\left(\pi-\alpha\right)}+\cot\beta\left(\cot\beta-\tan\beta\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.29 Rút gọn: $C=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)-3\sin\left(\alpha-5\pi\right)-2\sin\alpha-\cos\alpha$

VD 1.30 Chứng minh: a) $\sin^2 10°+\sin^2 20°+...+\sin^2 70°+\sin^2 80°=4$

b) $\cos 4455°-\cos 945°+\tan 1035°-\cot\left(-1500°\right)+1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.29 Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

$A=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(2\pi-x\right)+\cos\left(3\pi+x\right)$

$B=2\cos x-3\cos(\pi-x)+5\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)+\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$C=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(5\pi-x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$D=\cos\left(5\pi-x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot\left(3\pi-x\right)$

$E=\sin(\pi+x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi-x)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$F=\cos(\pi-x)+\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right).\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(2\pi-x)+\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)$

$H=2\cos x-3\cos(\pi+x)-5\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$I=\cos(\pi-x)-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi-x)$

$J=3\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)-2\cos(3\pi-x)+\tan\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\cot\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

$K=\dfrac{\sin(\pi+x).\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).\tan(7\pi+x)}{\cos(5\pi-x).\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).\tan(2\pi+x)}$

$L=\sin(13\pi+x)-\cos\left(x-\frac{9\pi}{2}\right)+\cot(12\pi-x)+\tan\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

$M=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)+\cot\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)$

$N=\cos(1710°x)-2\sin(x-2250°)+\cos(x+90°)+2\sin(720°x)+\cos(540°-x)$

$O=\dfrac{\tan\left(\frac{19\pi}{2}-x\right).\cos(36\pi-x).\sin(x-5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2}-x\right).\cos(x-99\pi)}$

$P=\sin(\pi+x)+\sin(2\pi+x)+\sin(3\pi+x)+\ldots+\sin(100\pi+x)$

1.30 Chứng minh:

a) $\sin\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^m\sin\alpha & \text{khi } k=2m\\ (-1)^m\cos\alpha & \text{khi } k=2m+1\end{cases}\ (k,m\in\mathbb{Z})$

b) $\tan\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\tan\alpha & \text{khi } k=2m\\ -\cot\alpha & \text{khi } k=2m+1\end{cases}\ (k,m\in\mathbb{Z})$

1.31 Chứng minh:

a) $\sin\left(x+\frac{85\pi}{2}\right)+\cos(207\pi+x)+\sin^2(33\pi+x)+\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=1$

b) $\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)+\ldots+\sin(x+100a)=0$

1.32 Tìm $\cos x$ nếu biết: $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 4. Hệ thức lượng trong tam giác

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Cho ΔABC, ta có các kết quả sau:*
  - ✓ $\boxed{A+B+C=\pi} \Rightarrow 0<A,B,C<\pi$
  - ✓ $\boxed{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$
  - ✓ *$A+B$ và C; $B+C$ và A; $A+C$ và B là các cặp góc bù nhau.*
  - ✓ *$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2}$; $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}$ và $\frac{A}{2}$; $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$ và $\frac{B}{2}$ là các cặp góc phụ nhau.*
- *Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác khi cần thiết.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.31 Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A+B)=\sin C$

b) $\cos(A+B)+\cos C=0$

c) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

d) $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

e) $\cos C+\cos(A+B+2C)=0$

f) $\cos(A-B)+\cos(2B+C)=0$

VD 1.32 Cho A, B, C, a, b, c lần lượt làcác góc và các cạnh của tam giác. Chứng minh:

a) $a^2.\cot^2 A - b^2.\cot^2(A+C) = b^2 - a^2$ b) $b\left[\cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\right] = (a+c)\sin B$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.33 Chứng minh rằng trong ΔABC ta có:

a) $\sin A+\cos\dfrac{3A+B+C}{2}=0$

b) $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B+C}{2}=1$

c) $\tan\left(2A+B+C\right)=\tan A$

d) $\cot\left(A+B\right)+\cot C=0$

e) $\dfrac{1-\sin^2\left(A+B\right)}{1-\cos^2\left(A+B+2C\right)}+1=\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{A+B-C}{2}\right)}$

f) $\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)=\cot\left(B+\dfrac{C}{2}\right)$

1.34 Cho A, B, C, a, b, c lần lượt là ba góc và ba cạnh của ΔABC. CMR:

a) $a^2\cot^2 A-b^2\cot^2\left(A+C\right)=b^2-a^2$

b) $a^2\cot^2 A+b^2\cot^2 B+c^2\cot^2 C=a^2\cot^2\left(B+C\right)+b^2\cot^2\left(C+A\right)+c^2\cot^2\left(A+B\right)$

c) $a\cos\dfrac{A+C-B}{2}=b\sin\left(B+C\right)$

d) $a.\sin\left(A+B+2C\right)=c.\cos\dfrac{3A+B+C}{2}$

e) $b\left(\cos\dfrac{B+C-A}{2}+\cos\dfrac{A+B-C}{2}\right)+\left(a+c\right)\sin\left(A+2B+C\right)=0$

Vấn đề 3. CÔNG THỨC CỘNG

Dạng 1. Sử dụng trực tiếp các công thức để tính hay đơn giản biểu thức

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Tính giá trị của một biểu thức*
- *Rút gọn hoặc đơn giản một biểu thức*
- *Cần chú ý phân tích các số đo cung lượng giác qua các cung liên quan đặc biệt đã biết như:* $0°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 90°$.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.33 Không dùng máy tính, hãy tính những giá trị sau:

a) $A=\cos 25°\cos 5°-\sin 25°\sin 5°$ b) $B=\cos 38°\cos 22°-\sin 38°\sin 22°$

c) $C=\sin 36°\cos 6°-\sin 126°\cos 84°$ d) $D=\cos 75°$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.34 a) Cho $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\cos\beta=-\frac{3}{4}$, $-\frac{3\pi}{2}<\beta<-\pi$.

Tính $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$

b) Cho $\sin\alpha=-\frac{9}{11}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

VD 1.35 a) Cho $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$. Tính $\cos(\alpha-\beta)$.

b) Tính $\tan 2\alpha$ và $\tan 2\beta$, biết $\tan(\alpha+\beta)=8$ và $\tan(\alpha-\beta)=5$

VD 1.36 Rút gọn:

a) $M=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ b) $N=\sin(14°+2x)\cos(16°-2x)+\cos(14°+2x)\sin(16°-2x)$

c) $P=\sin x\cos 5x-\cos x\sin 5x$ d) $Q=\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(x-y)\cos(x+y)$

e) $R=\frac{\tan 3x+\tan x}{1+\tan x\tan 3x}$ f) $S=\frac{\tan(a-45°)+1}{1-\tan(a-45°)}$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.35 Tính giá trị lượng giác của các cung có số đo sau.

a) $-15°$; b) $\frac{5\pi}{12}$; c) $\frac{13\pi}{12}$; d) $\frac{19\pi}{12}$

1.36 Tính:

a) $\sin 3045°$; b) $\cos\frac{85\pi}{12}$; c) $\tan\frac{103\pi}{12}$; d) $\cot\frac{299\pi}{12}$

1.37 a) Biết $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

b) Biết $\tan a=\sqrt{2}$ và $0°<a<90°$. Tính $\cos(a+30°)$.

c) Biết $\sin a=\frac{4}{5}$, $0°<a<90°$, $\sin b=\frac{8}{17}$, $90°<a<180°$.

Tính $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$.

d) Cho 2 góc nhọn a và b với $\tan a=\frac{1}{2}$, $\tan a=\frac{1}{3}$. Tính $a+b$.

e) Biết $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=m$ với $m\neq -1$. Tính $\tan\alpha$.

f) Biết $\cot\left(\frac{5\pi}{2}-a\right)=m$. Tính $\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$.

g) Cho $a-b=\frac{\pi}{3}$. Tính: $A=(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2$

$B=(\cos a+\sin b)^2+(\cos b-\sin a)^2$

h) Cho $\cos a=\frac{1}{3}$ và $\cos b=\frac{1}{4}$. Tính $\cos(a+b).\cos(a-b)$.

i) Cho $a,\ b>0$, $a+b=\frac{\pi}{4}$ và $\tan a.\tan b=3-2\sqrt{2}$. Tính:

* $\tan a+\tan b$ * $\tan a$, $\tan b$ rồi suy ra a và b.

j) Cho $x+y=60°$ và $\tan x+\tan y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Tính $\tan x$, $\tan y$.

k) Tính $\tan(a+45°)$ theo $\tan\alpha$. <u>*Áp dụng*</u>: Tính $\tan 15°$.

1.38 Tính:

a) $A=\frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}$

b) $B=\sin 15°+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 15°$

c) $C=\cos(-53)°.\sin(-337°)+\sin 307°.\sin 113°$

d) $D=\cos 68°.\cos 78°+\cos 22°.\cos 12°+\cos 190°$

e) $E=\sin 160°.\cos 110°+\sin 250°.\cos 340°+\tan 110°.\tan 340°$

f) $F=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

1.39 Đơn giản các biểu thức:

a) $A=\frac{\cos(a+b)+\sin a\sin b}{\cos(a-b)-\sin a\sin b}$

b) $B=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}$

c) $C=\frac{\sin(a-b)+2\cos a\sin b}{2\cos a\cos b-\cos(a-b)}$

d) $D=\frac{\cos(45°+x)-\cos(45°-x)}{\sin(45°+x)-\sin(45°-x)}$

1.40 Đơn giản các biểu thức:

a) $A=\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}-\tan b$

b) $B=\cos(x+y).\cos(x-y)+\sin^2 x$

c) $C=\cos(a+b).(1+\tan a\tan b)-\cos(a-b).(1-\tan a\tan b)$.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng các công thức cộng thích hợp để:

- *Biến đổi vế này thành vế kia*
- *Bến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng.*
- *Biến đổi đẳng thức tương đương với một đẳng thức đúng, …*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.37 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin\left(x+60°\right).\sin\left(x-60°\right)=\sin^2 x-\dfrac{3}{4}$

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+a\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)=\sin a$

c) $\dfrac{\cos\left(a-b\right)}{\cos\left(a+b\right)}=\dfrac{\cot a\cot b+1}{\cot a\cot b-1}$

d) $\dfrac{\cos\left(a+b\right).\cos\left(a-b\right)}{\cos^2 a\cos^2 b}=1-\tan^2 a.\tan^2 b$

g) $\sin\left(a+b\right).\sin\left(a-b\right)=\sin^2 a-\sin^2 b$

h) $\sin^2\left(a-b\right)+\sin^2 b+2\sin\left(a-b\right).\sin b.\cos a=\sin^2 a$

VD 1.38 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.41 Chứng minh:

a) $\sin x+\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin x-\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\frac{1+\tan a}{1-\tan a}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$ d) $\frac{1-\tan a}{1+\tan a}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$

e) $\sin(a+b).\cos(a-b)=\sin a.\cos a+\sin b.\cos b$

f) $\sin(a+b).\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a$

g) $\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\sin^2 a$

h) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\sqrt{2}\sin a$

i) $\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$

j) $\tan(a-b)-\tan a-\tan b=\tan a.\tan b.\tan(a+b)$

k) $\frac{\tan a+\tan b}{\tan(a+b)}-\frac{\tan a-\tan b}{\tan(a-b)}=-2\tan a\tan b$

1.42 Chứng minh rằng: $\tan x+\tan 2x-\tan 3x=-\tan x.\tan 2x.\tan 3x$

Áp dụng tính: $A=\tan 62°.\tan 54°-\tan 62°.\tan 26°-\tan 54°.\tan 26°$

1.43 Chứng minh:

a) $\tan a.\tan b=\frac{1}{3}$, nếu $\cos(a+b)=2\cos(a-b)$

b) $\tan(a+b)=2\tan a$, nếu $3\sin b=\sin(2a+b)$ và a, $a+b\neq 90°+k180°$.

c) $\tan(a+b)=3\tan b$, nếu $\sin(a+2b)=2\sin a$

d) Nếu $\sin b=\sin(2a+b)$ thì $\tan(a+b)=\tan 2a$

d) Nếu $\cos(a+b)=0$ thì $\sin(a+2b)=\sin a$

e) Nếu $\tan a.\tan b=1$ thì $\left[\begin{array}{l}\sin 2a=\sin 2b\\ \cos 2a=-\cos 2b\end{array}\right.$.

Dạng 3. Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Chứng minh một biểu thức lượng giác M không phụ thuộc vào giá trị đối số x của góc đang xét ta rút gọn biểu thức M cho đến khi trong biểu thức không còn x.*
- *Như vậy: biểu thức M không phụ thuộc vào đối số x.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.39 Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.44 Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

a) $A=\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

b) $B=\sin^2 x+\sin^2(60°+x)+\sin^2(x-60°)$

c) $C=\cos^2 x+\cos^2(120°+x)+\cos^2(120°-x)$

d) $D=\cos^2 x+\sin(30°+x).\sin(30°-x)$

e) $E=\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

f) $F=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

g) $G=\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).\tan x$

Dạng 4. Hệ thức lượng trong tam giác

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Cho ΔABC, ta có các kết quả sau:*
  - ✓ $\boxed{A+B+C=\pi} \Rightarrow 0<A,B,C<\pi$
  - ✓ $\boxed{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$
  - ✓ *$A+B$ và C; $B+C$ và A; $A+C$ và B là các cặp góc bù nhau.*
  - ✓ *$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2}$; $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}$ và $\frac{A}{2}$; $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$ và $\frac{B}{2}$ là các cặp góc phụ nhau.*
- *Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác khi cần thiết.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.40 Cho tam giác ABC. Chúng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A$

b) $\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\cos C$

c) $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

d) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

VD 1.41 Cho ΔABC thỏa: $\frac{a}{\sin B\sin C}=\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}$. Chứng minh rằng: ΔABC vuông.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.45 Chứng minh rằng trong ΔABC ta có:

a) $\sin A=\sin B.\cos C+\sin C.\cos B$

b) $\cos A=\sin B.\sin C-\cos B.\cos C$

c) $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

d) $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

e) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A.\sin B.\cos C$

f) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A.\cos B.\cos C$

g) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

h) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ (ΔABC không vuông)

i) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$

j) $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$

k) $\tan A=\frac{a\sin B}{c-a\cos B}$ (với $\widehat{A}\neq 90°$)

1.46 a) Cho ΔABC thỏa: $a=2b.\cos C$. Chứng minh rằng: ΔABC cân.

b) Cho ΔABC thỏa: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3\sqrt{3}S_{\Delta ABC}$. Chứng minh rằng: ΔABC đều.

Vấn đề 4. CÔNG THỨC NHÂN

Dạng 1. Sử dụng trực tiếp các công thức để tính hay đơn giản biểu thức

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Áp dụng công thức nhân 2, nhân 3, hạ bậc, … thích hợp ta có thể tính giá trị của các biểu thức lượng giác hay có th rút gọn các biểu thức lượng giác.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.42 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\sin 5a\cos 5a$ b) $B=\sin a.\cos a.\cos 2a.\cos 4a$

c) $C=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$ d) $D=\left(\sin 5a.\cos 2a-\sin 2a.\cos 5a\right)\left(\cos 2a\cos a-\sin 2a\sin a\right)$

VD 1.43 Tính giá trị của các biểu thức

a) $A=\sin 6°.\cos 12°.\cos 24°.\cos 48°$ b) $B=\dfrac{\tan 15°}{1-\tan^2 15°}$

c) $C=\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$ d) $D=3\cos 10°-4\cos^3 10°$

e) $E=\sin 120°\left(1-4\cos^2 20°\right)$ f) $F=4\sin^3 40°+3\cos 130°$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.44 Cho $t=\tan\dfrac{x}{2}$, với $x\neq\pi+k2\pi$. Chứng minh: $\boxed{\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}}$; $\boxed{\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$; $\boxed{\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}}$

Áp dụng tính $A=\dfrac{\sin x}{3-2\cos x}$; $B=\dfrac{\tan x+\sin x}{\tan x-\sin x}$; $C=\dfrac{\sin x+\cos x}{3\sin x-2\cos x}$ theo t.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.47 a) Tính $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\tan 2a$ biết:

i) $\cos a = -\frac{5}{13}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$ ii) $\tan a = 2$.

b) Cho $\sin 2a = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin a$ và $\cos a$.

c) Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

d) Cho $\cos x = \frac{4}{5}$ và $0 < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \frac{x}{2}$.

e) Cho $\tan x = \frac{24}{7}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \frac{x}{2}$.

f) Cho $\tan x = m$. Tính theo m: i) $\tan 22°30'$ ii) $\tan 112°30'$

g) Cho $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. Tính $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

h) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\tan \frac{x}{2}$.

i) Cho $\sin a.\cos a = \frac{1}{5}$. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan \frac{a}{2}$.

j) Cho $\tan a + \cot a = m$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2a$, $\sin 4a$. Tham số m phải thỏa điều kiện gì?

i) Cho $\tan x = 2 - \sqrt{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan 2x$. Từ đó suy ra x.

j) Cho $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos 2x$. Từ đó suy ra x.

1.48 Tính:

a) $A = \cos 36° \cos 72°$ b) $B = \cos 75°.\cos 15°$ c) $C = \sin \frac{\pi}{8}.\cos \frac{\pi}{8}.\cos \frac{\pi}{4}$

d) $D=\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 60^\circ.\cos 80^\circ$ e) $E=\sin 10^\circ.\sin 50^\circ.\sin 70^\circ$

f) $F=\cos 100^\circ.\cos 140^\circ.\cos 160^\circ$

g) $G=16\sin 10^\circ.\sin 30^\circ.\sin 50^\circ.\sin 70^\circ.\sin 90^\circ$

h) $H=\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$

1.49 Tính:

a) $A=\dfrac{\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$ b) $B=\tan^2\dfrac{\pi}{12}+\tan^2\dfrac{5\pi}{12}$

c) $C=\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ d) $D=\cos 36^\circ-\sin 18^\circ$

1.50 Tính theo $t=\tan\dfrac{x}{2}$ các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{\tan x+\cot x}{2\tan x-4\cot x}$ b) $B=\dfrac{2+3\cos x}{4-5\sin x}$ c) $C=\dfrac{\tan x+\sin x-\cos x}{\tan x-\sin x+\cos x}$

1.51 Tính theo $\cos 2x$ các biểu thức sau:

a) $A=\sin^4 x+\cos^4 x$ b) $B=\dfrac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}\ \dfrac{1+\tan^2 \mathrm{x}}{1-\tan^2 \mathrm{x}}$

1.52 Cho: $\dfrac{1}{\tan^2 x}+\dfrac{1}{\cot^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}=7$. Tính $\sin^2 2x$.

1.53 Đơn giản các biểu thức:

$A=\sin x.\cos x.\cos 2x$ $B=\sin^4 x-\cos^4 x$ $C=\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x.\cos 16x$ $D=\dfrac{\cos 4x-\tan x}{\cos 2x}$

$E=\sin^4 x-6\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x$ $F=\dfrac{\sin 2x}{\sin x}-\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

$G=\dfrac{1+\sin x-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)}{4\cos\dfrac{x}{2}}$ $H=\dfrac{\cot\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}}{\cot\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{x}{2}}$ $I=\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x}\cdot\tan^2\dfrac{x}{2}-\cos^2 x$

$J=\dfrac{\sin 3x.\cos 5x-\sin 2x.\cos 3x}{\cos x}$ $K=\dfrac{\sin^2 2x+4\cos^4 x}{4-\sin^2 2x-4\sin^2 x}$ $L=\dfrac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}$

$M=\dfrac{4\left(\sin x.\cos^3 x-\sin^3 x.\cos x\right)}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}$ $N=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\cos x+2\sin x+2}$ $O=\dfrac{2\cos^2 a-1}{2\tan(45^\circ-a).\sin^2(45^\circ+a)}$

$P=\dfrac{2}{\sin 4x}-\cot 2x$ $Q=\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x}$ $R=\sin 6x-2\sqrt{3}\cos^2 3x+\sqrt{3}$

$S=\sin(-x).\sin(\pi-x).\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x$ $T=\sin^3 x.\cos 3x+\cos^3 x.\sin 3x$

$U=5\sin^4 2x-4\sin^2 2x.\cos^2 2x-\cos^4 2x+3\cos 4x$

1.54 Rút gọn:

a) $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}},(0\le x\le 2\pi)$ b) $B=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}}},(0\le x\le\pi)$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng các công thức cộng, công thức nhân thích hợp để:

- *Biến đổi vế này thành vế kia*
- *Bến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng.*
- *Biến đổi đẳng thức tương đương với một đẳng thức đúng, …*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.45 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^3 x.\sin x-\sin^3 x.\cos x=\frac{1}{4}\sin 4x$ b) $\cot a-\tan a=2\cot 2a$ c) $\tan\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=\tan x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 1.46 Chứng minh $\cos 3x.\sin^3 x+\sin 3x.\cos^3 x=\frac{3}{4}\sin 4x$

Suy ra giá trị của $A=\cos 22°30'.\sin^3 172°30'-\sin 22°30'.\cos^3 172°30'$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.55 Chứng minh:

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

2) $\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1=\sin^4 x+\cos^4 x-6\sin^2 x.\cos^2 x$

3) $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{64}\cos 8x+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{35}{64}$

4) $\cot x-\tan x-2\tan 2x-4\tan 4x=8\cot 8x$

5) $\cos 3x.\sin^3 x-\sin 3x.\cos^3 x=\frac{3}{4}\sin 4x$

6) $\cos 3x.\cos^3 x-\sin 3x.\sin^3 x=\cos^3 2x$

7) $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=2\tan 2x$

8) $\left(\tan 2x-\tan x\right)\left(\sin 2x-\tan x\right)=\tan^2 x$

9) $\frac{2\cos^2 x-1}{4\tan^2\left(45°-x\right).\sin^2\left(45°+x\right)}=\frac{1}{2}$

10) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{3+\cos 4x}{2}$

11) $4\cos^4 x-2\cos 2x=\frac{3+\cos 4x}{2}$

12) $\cot x-\tan x=2\cot 2x$

13) $\cos^3 x.\sin x-\sin^3 x.\cos x=\frac{1}{4}\sin 4x$

14) $\cos^2 2x-\sin^2 x=\cos x.\cos 3x$

15) $3-4\cos 2x+\cos 4x=8\sin^2 x$

16) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\tan x$

17) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x$

18) $\frac{1-2\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}=\cos 4x$

19) $\tan 2x+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{1-2\sin^2 x}{1-\sin 2x}$

20) $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=8\cos 2x$

21) $\cot x+\tan x=\frac{1}{\sin 2x}$

22) $\frac{6+2\cos 4x}{1-\cos 4x}=\tan^2 x+\cot^2 x$

23) $\cot x-\cot 2x=\frac{1}{\sin 2x}$

24) $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\cot x$

25) $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=1-\frac{\sin 2x}{2}$

26) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\cot^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

27) $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

28) $\frac{1-\tan^2\left(45°-x\right)}{1+\tan^2\left(45°-x\right)}=\sin 2x$

29) $\tan 2x\left(\frac{1}{\cos 4x}+1\right)=\tan 4x$

30) $\frac{\sin 2x.\cos x}{\left(1+\cos x\right)\left(1+\cos 2x\right)}=\tan\frac{x}{2}$

31) $\frac{\sin 2x-2\sin x}{\sin 2x+2\sin x}=-\tan^2\frac{x}{2}$

32) $\tan^2 x+\cot^2 x=\frac{6-2\cos 4x}{1-\cos 4x}$

33) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

34) $\left(\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)^2=\frac{4}{1-2\tan x.\cot 2x}$

35) $\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos x}-\tan x$

1.56 Chứng minh: $\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos 4x=\frac{1}{8}\sin 8x$

<u>Áp dụng tính:</u> $A=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$ $B=\sin 6°.\sin 42°.\sin 66°.\sin 78°$

1.57 Chứng minh: $\tan x=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$. <u>Áp dụng tính:</u> $A=\tan 37°30'$; $B=\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{3\pi}{12}+\tan^2\frac{3\pi}{12}$

Dạng 3. Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc đối số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Chứng minh một biểu thức lượng giác M không phụ thuộc vào giá trị đối số x của góc đang xét ta rút gọn biểu thức M cho đến khi trong biểu thức không còn x.*
- *Như vậy: biểu thức M không phụ thuộc vào đối số x.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.47 CMR giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A = 8\sin^4 x + 4\cos 2x - \cos 4x - 5$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.58 Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc biến:

$A = \sin 8x + 2\cos 2(45° + 4x)$

$B = \dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$

$C = \sqrt{\left(\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}\right)} \cdot \sin x, (0 < x < \pi)$

$D = \sin^6 x.\cos^2 x + \sin^2 x.\cos^6 x + \dfrac{1}{8}\cos^4 2x$

$E = 1 + \sin 2x - \sqrt{2}\cos(x - 45°)$

$F = \cos^2 x + \cos^2(x + a) - 2\cos x.\cos a.\cos(x + a)$

$G = \sin^4 x + \sin^4(x + 45°) + \sin^4(x + 90°) + \sin^4(x + 135°)$

1.59 CMR: nếu $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{b}$ thì biểu thức $A = a\sin x + b\cos x$ không phụ thuộc vào giá trị của x.

1.60 Cho α, β, γ thỏa: $\cos\alpha = \dfrac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{a+c}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{b+a}$. Chứng minh rằng biểu thức $E = \tan^2\dfrac{\alpha}{2} + \tan^2\dfrac{\beta}{2} + \tan^2\dfrac{\lambda}{2}$ không phụ thuộc vào a, b, c.

Vấn đề 5. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Dạng 1. Biến đổi các biểu thức thành tổng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Áp dụng các công thức biến tích thành tổng để biến đổi*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.48 Rút gọn biểu thức: $A=2\sin x\left(\cos x+\cos 3x+\cos 5x\right)$. Suy ra giá trị $T=\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}$

VD 1.49 Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a) $A=\sin 7x.\sin 3x$

b) $B=\sin\left(x+y\right).\cos\left(x-y\right)$

c) $C=\cos 15^\circ\sin 75^\circ$

d) $D=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

VD 1.50 Biến đổi thành tổng các biểu thức sau:

a) $A = 2\sin x.\sin 3x.\sin 5x$ b) $B = 8\cos x.\sin 2x.\sin 3x$

c) $C = \cos x.\cos(x+60°).\cos(x-60°)$ d) $D = 4\cos(a-b).\cos(b-c).\cos(c-a)$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.61 Biến đổi thành tổng:

$A = \sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}$ $B = \cos 5x.\cos 3x$

$C = 2\sin(a+b).\cos(a-b)$ $D = 2\cos(a+b).\cos(a-b)$

$E = 4\sin 3x.\sin 2x.\cos x$ $F = 2\sin x.\sin 2x.\sin 3x$

$G = \cos 2x.\cos 6x.\cos 8x$ $H = \sin 2x.\cos 4x.\cos 6x.\sin 8x$

$I = \sin^3 2x.\cos 4x$ $J = \cos^3 x.\sin 8x$

Dạng 2. Biến đổi các biểu thức thành tích

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Áp dụng các công thức biến tổng thành tích để biến đổi*
- *Chú ý một số hệ quả quả trọng (chúng minh tước khi dùng):*

① $1+\sin kx=1+2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2}=\left(\sin\frac{kx}{2}+\cos\frac{kx}{2}\right)^2$

② $1-\sin kx=1-2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2}=\left(\sin\frac{kx}{2}-\cos\frac{kx}{2}\right)^2\left(\cos\frac{kx}{2}-\sin\frac{kx}{2}\right)^2$

③ $1+\cos kx=2\cos^2\frac{kx}{2}$ ④ $1-\cos kx=2\sin^2\frac{kx}{2}$

⑤ $\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{4}\pm\cos x.\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$

⑥ $\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{4}\pm\sin x.\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.51 Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a) $A=\cos^2 2x-\cos^2 2y$ b) $B=1-\sin x-\cos 2x$

c) $C=\cos 5x+\cos 3x$ d) $D=\sin 7x-2\sin 4x+\sin x$

e) $E=1-2\cos x$ f) $F=\sqrt{3}-2\sin x$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.62 Biến đổi thành tích:

$A = \cos 4x + \cos 3x$ $B = \cos 3x - \cos 6x$

$C = \sin 5x + \sin x$ $D = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

$E = \tan(a+b) + \tan a$ $F = \tan 2x - \tan x$

$G = \sin a + \cos b$ $H = \cos^2 x - \cos^2 y$

$I = \tan^2 x - \tan^2 y$ $J = \sin a + \sin b + \sin(a+b)$

$K = 1 - \sin x$ $L = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

$M = \sin 2x + \cos 3x$ $N = \cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1$

$O = \sqrt{3} + 2\sin x$ $P = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$

$Q = 2 + \cos a + \sqrt{3}\sin a$ $R = 1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a$

$S = 1 + \sin a + \cos a$ $T = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

$U = 1 - \cos x + \cos 2x$ $V = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$

$W = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$ $X = \sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25°$

Dạng 3. Áp dụng công thức biến đổi để tính hay rút gọn một biểu thức lượng giác

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Áp dụng các công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng thích hợp ta có thể tính giá trị hay rút gọn các biểu thức lượng giác.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.52 Tính giá trị của biểu thức: $A = \sin^2 10° + \cos 70°.\cos 50°$

.....

.....

.....

VD 1.53 Rút gọn:

a) $A = \dfrac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$ b) $B = \dfrac{\sin a - 2\sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 3\cos 2a + \cos 3a}$

c) $C = \dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$ d) $D = \dfrac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a}$

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.63 Tính:

$A = \cos 75°.\cos 15°$

$B = \sin\frac{\pi}{12}.\sin\frac{5\pi}{12}$

$C = \cos\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}$

$D = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

$E = \cos\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}$

$F = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$

$G = \cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$

$H = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$

$I = \sin 20°.\sin 40°.\sin 80°$

$J = \sin 20°.\cos 50°.\cos 10°$

$K = \cos 10°.\cos 30°.\cos 50°.\cos 70°$

$L = \cos 110° + \cos 10° + \cos 130°$

$M = \frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$

$N = \frac{1}{2\sin 10°} - 2\sin 70°$

1.64 Tính giá trị của các biểu thức:

$A = \sin\frac{x}{4}.\sin\frac{5x}{4}$ biết $x = 60°$.

$B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$ biết $a = 20°$

$C = \frac{\cos a.\cos 13a}{\cos 3a + \cos 5a}$ biết $a = \frac{\pi}{7}$

1.65 Cho $a = \frac{\pi}{11}$. Tính giá trị của các biểu thức:

$A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$

$B = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \cos 5a$

$C = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$

$D = \cos a + \cos\left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$

1.66 Rút gọn:

$A = 4\sin\frac{x}{3}.\sin\frac{x+\pi}{3}.\sin\frac{x-\pi}{3}$

$B = 4\cos\frac{x}{3}.\cos\frac{x+\pi}{3}.\cos\frac{x-\pi}{3}$

$C = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$

$D = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)$

$E = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$

$F = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$

$G = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$

$H = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$

$\frac{\sin(a+b).\sin(a-b)}{\cos a + \cos b}$

$J = \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)}$

$K = \frac{\sin 2x + \sqrt{2}\sin x}{\sin 2x - \sqrt{2}\sin x}$

$L = \frac{\frac{1}{2}+\cos x}{\frac{1}{2}-\cos x}$

$M = \frac{\cos x - \cos 2x - \cos 3x + \cos 4x}{\sin x - \sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}$

$N = 1 + 4\cos x + 2\cos 2x + 4\cos 3x + \cos 4x$

$O = \sqrt{1-\sin 2x} + \sqrt{1+\sin 2x}$ với $-45° < x < 45°$

$P = \sin x\left(1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x\right)$

1.67 Rút gọn. Với $n \in \mathbb{N}^*$:

$A = \frac{1}{\cos a.\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a.\cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos na.\cos(n+1)a}$

$B = \frac{1}{\sin a.\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a.\sin 3a} + ... + \frac{1}{\sin na.\sin(n+1)a}$

$C = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \frac{1}{\sin 5a} + ... + \frac{1}{\sin 2^n a}$

$D = \tan a.\tan 2a + \tan 2a.\tan 3a + \ldots + \tan(n-1)a.\tan na$

$E = \cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n+1)a$

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Để chứng minh đẳng thức $A = B$ ta có thể sử dụng các phương pháp như đã trình bày ở phần trước.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.54 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos 3a = 4\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

b) $\sin^2 b - \cos^2(a-b) + 2\cos a.\cos b.\cos(a-b) = \cos^2 a$

.....

.....

VD 1.55 Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x và y:

$$A=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2x.\cos 2y$$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.68 Chứng minh:

a) $\sin 10°.\sin 50°.\sin 70°=\frac{1}{8}$

b) $\cos 10°.\cos 50°.\cos 70°=\frac{\sqrt{3}}{8}$

c) $\tan 10°.\tan 50°.\tan 70°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin 10°.\sin 40°.\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{8}$

e) $\cos 20°.\cos 40°.\cos 80°=\frac{1}{8}$

f) $\tan 20°.\tan 40°.\tan 80°=\sqrt{3}$

g) $\sin^2\frac{\pi}{7}.\sin^2\frac{2\pi}{7}.\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{64}$

h) $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$

i) $\tan\frac{\pi}{7}.\tan\frac{2\pi}{7}.\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$

j) $\tan 55°.\tan 65°.\tan 75°=\tan 85°$

1.69 Chứng minh:

a) $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=0$

b) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

c) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$

d) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1\cos\frac{2\pi}{5}$ suy ra $\frac{\pi}{5}$

e) $\cos 24°+\cos 48°\cos 84°-\cos 12^{°0}=-1$

f) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

g) $\cos 12°+\cos 18°-4\cos 15°.\cos 21°.\cos 24°=\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$

h) $\tan 30°+\tan 40°+\tan 50°+\tan 60°=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20°$

i) $\tan 9°-\tan 27°-\tan 63°+\tan 81°=4$

j) $\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{2\pi}{9}+\tan\frac{5\pi}{18}+\tan\frac{\pi}{3}=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\frac{7\pi}{18}$

k) $\tan 20°+\tan 40°+\tan 80°-\tan 60°=4\sin 40°$

1.70 Chứng minh:

a) $\cos x.\cos(60°-x).\cos(60°+x)=\frac{1}{4}\cos 3x$

b) $\sin x.\sin(60°-x).\sin(60°+x)=\frac{1}{4}\sin 3x$

c) $\tan x.\tan(60°-x).\tan(60°+x)=\tan 3x$

Áp dụng tính:

$A=\sin 10°.\sin 50°.\sin 70°$ $B=\cos 10°.\cos 50°.\cos 70°$

$C=\tan 20°.\tan 40°.\tan 80°$ $D=\tan\frac{\pi}{18}.\tan\frac{7\pi}{18}.\tan\frac{13\pi}{18}$

1.71 Chứng minh:

1) $\cos 5x.\cos 3x+\sin 7x.\sin x=\cos 2x.\cos 4x$

2) $\sin 5x-2\sin x(\cos 2x+\cos 4x)=\sin x$

3) $\sin 6x.\sin 4x-\sin 15x.\sin 13x+\sin 19x.\sin 9x=0$

4) $\sin x(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x)=\sin 7x$

5) $\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}.\sin\frac{x}{2}=\cos x.\cos 2x$

6) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=4\cos\frac{3x}{2}.\cos x.\sin\frac{x}{2}$

7) $2\cos x-\cos 3x\ -\cos 5x=16\sin^2 x.\cos^3 x$

8) $\sin x+2\sin 3x+\sin 5x=4\sin 3x.\cos^2 x$

9) $\sin^2 x+\sin^2(60°-x)+\sin x.\sin(60°-x)=\frac{3}{4}$

10) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\sin 2x$

11) $\cos x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$

12) $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

13) $\frac{\sin x-\sin 3x+\sin 5x}{\cos x-\cos 3x+\cos 5x}=\tan 3x$

14) $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

15) $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\tan 3x$

16) $\frac{\cos 5x-\cos x}{\sin 4x+\sin 2x}=-2\sin x$

17) $\frac{\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x}{2(1-\cos x)}=\cos^4\frac{x}{2}$

18) $\frac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{2(1-\cos x)}=\cos^4\frac{x}{2}$

19) $\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=2\cos x$

20) $\frac{\sin^2 4x}{2\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=2\sin x.\sin 2x$

21) $\frac{2\sin 2x-\sin 4x}{2(\cos 3x.\cos x)}=\tan 2x.\tan x.\sin x$

22) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c}+\frac{\sin(c-a)}{\cos c.\cos a}=0$

23) $\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=4\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{b+c}{2}.\sin\frac{c+a}{2}$

24) $\cos(a+b).\sin(a-b)+\cos(b+c).\sin(b-c)+\cos(c+a).\sin(c-a)=0$

1.72 Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$A=\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ $\qquad$ $B=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}\cdot\cot x$

Dạng 5. Hệ thức lượng trong tam giác

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- *Cho ΔABC, ta có các kết quả sau:*
  - ✓ $\boxed{A+B+C=\pi} \Rightarrow 0<A,B,C<\pi$
  - ✓ $\boxed{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$
  - ✓ *$A+B$ và C; $B+C$ và A; $A+C$ và B là các cặp góc bù nhau.*
  - ✓ *$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2}$; $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}$ và $\frac{A}{2}$; $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$ và $\frac{B}{2}$ là các cặp góc phụ nhau.*
- *Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác khi cần thiết.*

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1.56 Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Biến đổi thành tích các biểu thức sau:
a) $M=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ b) $N=\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C-1$

VD 1.57 Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$

VD 1.58 Tam giác ABC là tam giác gì nếu $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)=0$

VD 1.59 Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C$

c) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos A.\cos B.\cos C$

d) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\sin A.\cos B.\cos C+\sin B.\cos C.\cos A+\sin C.\cos A.\cos A=\sin A.\sin B.\sin C$

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.73 Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

1) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\sin A.\sin B.\sin C$

2) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A.\cos B.\cos C$

3) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$

4) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$

5) $\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}=2+2\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

6) $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1-4\sin\dfrac{3A}{2}.\sin\dfrac{3B}{2}.\sin\dfrac{3C}{2}$

7) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\dfrac{3A}{2}.\cos\dfrac{3B}{2}.\cos\dfrac{3C}{2}$

8) $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=4\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C$

9) $\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{\cos A+\cos B-\cos C+1}=\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$ (ΔABC nhọn)

10) $\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C+3}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$

1.74 Cho ΔABC, R bán kính đường tròn ngoại tiếp, r bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích. Chứng minh rằng:

1) $S=2R^2\sin A.\sin B.\sin C$

2) $b.\cos B+c.\cos C=a.\cos(B-C)$

3) $r=4R.\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

4) $2S=R(a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C)$

1.75 Biến đổi về dạng tích:

1) $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C$

2) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C$

3) $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C$

4) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C-1$

1.76 1) Cho ΔABC thỏa: $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=0$. CMR: ΔABC vuông.

2) Cho ΔABC thỏa: $a.\cos B-b.\cos A=a.\sin A-b.\sin B$.
Tìm tính chất của ΔABC.

3) Cho ΔABC thỏa: $\begin{cases}b^2+c^2=a^2\\ \sin A+\sin B+\sin C=1+\sqrt{2}\end{cases}$.
Tính các góc của ΔABC. *(ĐS: $\hat{A}=90^0$, $B=C=45^0$)*

4) Cho ΔABC thỏa: $\cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{3}{2}$.
Chứng minh rằng: ΔABC đều.

5) Cho ΔABC thỏa: $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$. CMR: ΔABC vuông.

6) Cho ΔABC thỏa: $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$. Chứng minh rằng ΔABC vuông hoặc cân.

7) Cho ΔABC thỏa: $\dfrac{\sin B}{\sin C}=2\cos A$. CMR: ΔABC cân.

8) Cho ΔABC thỏa: $\tan^2 A+\tan^2 B=2\tan^2\dfrac{A+B}{2}$. Chứng minh rằng: ΔABC cân.

9) Cho ΔABC thỏa: $\cos A.\cos B.\cos C=\dfrac{1}{8}$. CMR: ΔABC đều.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

A - ĐỀ BÀI

Bài 1: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Cho trước một trục số d, có gốc là điểm A và đường tròn tâm O bán kính R tiếp xúc với d tại điểm A. Mỗi điểm N trên đường thẳng d.

A. xác định duy nhất một điểm N' trên đường tròn sao cho độ dài dây cung AN' bằng độ dài đoạn AN.

B. có hai điểm N' và N'' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN' và AN'' bằng độ dài đoạn AN.

C. có bốn điểm N', N'', N''' và N'''' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''' bằng độ dài đoạn AN.

D. có vô số điểm N', N'', N''' và N'''',... trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''',... bằng độ dài đoạn AN.

Câu 2. Cho trước một trục số d, có gốc là điểm A và đường tròn tâm O bán kính R tiếp xúc với d tại điểm A. Mỗi điểm N trên đường tròn tâm (O).

A. xác định duy nhất một điểm N' trên đường tròn sao cho độ dài đoạn thẳng AN' bằng độ dài dây cung AN.

B. có hai điểm N' và N'' trên đường thẳng sao cho độ dài các đoạn thẳng AN' và AN'' bằng độ dài dây cung AN.

C. có bốn điểm N', N'', N''' và N'''' trên đường thẳng sao cho độ dài các đoạn thẳng AN', AN'', AN''' và AN'''' bằng độ dài dây cung AN.

D. có vô số điểm N', N'', N''' và N'''',... trên đường thẳng sao cho độ dài các đoạn thẳng AN', AN'', AN''' và AN'''',... bằng độ dài dây cung AN.

Câu 3. Cho trước một trục số d, có gốc là điểm A và đường tròn tâm O bán kính R tiếp xúc với d tại điểm A. Mỗi tia AN trên đường thẳng d.

A. xác định duy nhất một điểm N' trên đường tròn sao cho độ dài dây cung AN' bằng độ dài tia AN.

B. có hai điểm N' và N'' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN' và AN'' bằng độ dài tia AN.

C. có bốn điểm N', N'', N''' và N'''' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''' bằng độ dài tia AN.

D. có vô số điểm N', N'', N''' và N'''',... trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''',... bằng độ dài tia AN.

Câu 4. Cho trước một trục số d, có gốc là điểm A và đường tròn tâm O bán kính $R=1$ tiếp xúc với d tại điểm A. Mỗi số thực dương t trên đường thẳng d.

A. xác định duy nhất một điểm N trên đường tròn sao cho độ dài dây cung AN bằng t.

B. có hai điểm N' và N'' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN' và AN'' bằng t.

C. có bốn điểm N', N'', N''' và N'''' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''' bằng t.

D. có vô số điểm N', N'', N''' và N'''',... trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''',... bằng t.

Câu 5. Cho trước một trục số d, có gốc là điểm A và đường tròn tâm O bán kính $R=1$ tiếp xúc với d tại điểm A. Mỗi số thực âm t.

A. xác định duy nhất một điểm N trên đường tròn sao cho độ dài dây cung AN bằng t.

B. có hai điểm N' và N'' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN' và AN'' bằng t.

C. có bốn điểm N', N'', N''' và N'''' trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''' bằng t.

D. có vô số điểm N', N'', N''' và N'''',... trên đường tròn sao cho độ dài các dây cung AN', AN'', AN''' và AN'''',... bằng t.

Câu 6. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa.

A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.

B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.

C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.

D. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Câu 7. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa, đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn.

A. chỉ một chiều chuyển động.

B. chỉ một chiều chuyển động gọi là chiều dương.

C. chỉ có một chiều chuyển động gọi là chiều âm.

D. một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm.

Câu 8. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa, quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là

A. luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.

B. luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.

C. có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.

D. không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Câu 9. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa,.

A. mỗi cung hình học AB đều là cung lượng giác.

B. mỗi cung hình học AB xác định duy nhất cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$.

C. mỗi cung hình học AB xác định hai cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AB}$.

D. mỗi cung hình học AB xác định vô số cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$.

Câu 10. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa, với hai điểm A, B trên đường tròn định hướng ta có.

A. Chỉ một cung lượng giác cố điểm đầu là A, điểm cuối là B.

B. Đúng hai cung lượng giác cố điểm đầu là A, điểm cuối là B.

C. Đúng bốn cung lượng giác cố điểm đầu là A, điểm cuối là B.

D. Vô số cung lượng giác cố điểm đầu là A, điểm cuối là B.

Câu 11. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa, trên đường tròn định hướng.

A. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ xác định một góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB.

B. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ xác định hai góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB.

C. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ xác định bốn góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB.

D. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ xác định vô số góc lượng giác tia đầu OA tia cuối OB.

Câu 12. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa,.

A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.

B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.

D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Câu 13. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa,.

A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, cung hình học AB xác định một góc lượng giác $\overset{\text{þ}}{AOB}$.

B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, cung hình học AB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B xác định góc lượng giác $\overset{\text{þ}}{AOB}$.

C. Trên đường tròn định hướng, cung hình học AB xác định góc lượng giác $\overset{\text{þ}}{AOB}$.

D. Trên đường tròn định hướng, cung lượng giác AB xác định góc lượng giác $\overset{\text{þ}}{AOB}$.

Câu 14. Theo định nghĩa trong sách giáo khoa,.

A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.

B. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$ là một đường tròn lượng giác.

C. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Câu 15. Cho biết câu nào sai trong số các câu sau đây? Theo định nghĩa trong sách giáo khoa trên đường tròn lượng giác.

A. Mỗi góc $\widehat{MON}$ với M,N thuộc đường tròn đều là góc lượng giác.

B. Mỗi góc $\widehat{MON}$ với M,N thuộc đường tròn đều là góc lượng giác và có phân biệt điểm M là điểm đầu, N là điểm cuối đều là góc lượng giác.

C. Mỗi góc $\widehat{MON}$ với M,N thuộc đường tròn đều là góc lượng giác và có phân biệt tia đầu OM, tia cuối ON là điểm cuối đều là góc lượng giác. .

D. Mỗi góc $\widehat{MON}$ với $A(1;0)$ và N thuộc đường tròn đều là góc lượng giác.

Câu 16. Góc lượng giác tạo bởi cung lượng giác. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là

A. Cung có độ dài bằng 1.
B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60^0.
C. Cung có độ dài bằng đường kính.
D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Câu 17. Theo sách giáo khoa ta có:

A. 1 rad $=1°$.
B. 1 rad $=60°$.
C. 1 rad $=180°$.
D. 1 rad $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Câu 18. Theo sách giáo khoa ta có:

A. π rad $=1°$.
B. π rad $=60°$.
C. π rad $=180°$.
D. π rad $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Câu 19. Trên đường tròn bán kính $r=5$, độ dài của cung đo $\dfrac{\pi}{8}$ là

A. $l=\dfrac{\pi}{8}$.
B. $l=\dfrac{r\pi}{8}$.
C. $l=\dfrac{5\pi}{8}$.
D. kết quả khác.

Câu 20. Trên đường tròn bán kính $r=15$, độ dài của cung có số đo $50°$ là

A. $l=750$. **B.** $l=15.\dfrac{180}{\pi}$ **C.** $l=\dfrac{15\pi}{180}$. **D.** $l=15.\dfrac{180}{\pi}.50$

Câu 21. Trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối B chỉ có một số đo.

B. cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối B chỉ có hai số đo sao cho tổng của chúng bằng 2π..

C. cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối B chỉ có hai số đo hơn kém nhau 2π.

D. cung lượng giác có điểm đầu A và điểm cuối B có vô số đo sai khác nhau 2π.

Câu 22. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc A, cung lượng giác có số đo 55^0 có điểm đầu A xác định.

A. chỉ có một điểm cuối M. **B.** đúng hai điểm cuối M.

C. đúng 4 điểm cuối M. **D.** vô số điểm cuối M.

Câu 23. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A, cung AN, có điểm đầu là A, điểm cuối là N.

A. chỉ có một số đo. **B.** có đúng hai số đo.

C. có đúng 4 số đo. **D.** có vô số số đo.

Câu 24. Lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn lượng giác có gốc là A, các đỉnh lấy theo thứ tự đó và các điểm B,C có tung độ dương. Khi đó góc lượng giác có tia đầu OA, tia cuối OC bằng

A. $120°$. **B.** $-240°$.

C. $120°$ hoặc $-240°$. **D.** $120°+k360°, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 25. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo $45°$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox, số đo cung lượng giác AN bằng

A. $-45°$. **B.** $315°$.

C. $45°$ hoặc $315°$. **D.** $-45°+k360°, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 26. Trên đường tròn với điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo $60°$. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy, số đo cung AN là

A. $120°$. **B.** $-240°$.

C. $-120°$ hoặc $240°$. **D.** $120°+k360°, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 27. Trên đường tròn lượng giác vớ điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo $75°$. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O, số đo cung lượng giác AN bằng

A. $255°$. **B.** $-105°$.

C. $-105°$ hoặc $255°$. **D.** $-105°+k360°, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 28. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A, điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $135°$. Gọi N là điểm đối xứng của M qua trục Oy, số đo cung $\overset{\frown}{AN}$ là

A. $-45°$. **B.** $315°$.

C. $-45°$ hoặc $315°$. **D.** $45°+k360°$, $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 29. Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha=-\dfrac{5\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{25\pi}{3}$, $\delta=\dfrac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau:

A. α và β; γ và δ. **B.** β và γ; α và δ. **C.** α,β,γ. **D.** β,γ,δ.

Câu 30. Biết một số đo của góc $\angle(Ox,\ Oy)=\frac{3\pi}{2}+2001\pi$. Giá trị tổng quát của góc $\angle(Ox,\ Oy)$ là

A. $\angle(Ox,\ Oy)=\frac{3\pi}{2}+k\pi.$ **B.** $\angle(Ox,\ Oy)=\pi+k2\pi.$

C. $\angle(Ox,\ Oy)=\frac{\pi}{2}+k\pi.$ **D.** $\angle(Ox,\ Oy)=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$

Câu 31. Cho $\alpha=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Để $\alpha\in(19;\ 27)$ thì giá trị của k là

A. $k=2;\ k=3.$ **B.** $k=3;\ k=4.$ **C.** $k=4;\ k=5.$ **D.** $k=5;\ k=6.$

Câu 32. Cho góc lượng giác (OA,OB) có số đo bằng $\frac{\pi}{5}$. Hỏi trong các số sau, số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối?

A. $\frac{6\pi}{5}.$ **B.** $-\frac{11\pi}{5}.$ **C.** $\frac{9\pi}{5}.$ **D.** $\frac{31\pi}{5}.$

Câu 33. Cung α có mút đầu là A và mút cuối là M thì số đo của α là

A. $\frac{3\pi}{4}+k\pi.$ **B.** $-\frac{3\pi}{4}+k\pi.$ **C.** $\frac{3\pi}{4}+k2\pi.$ **D.** $-\frac{3\pi}{4}+k2\pi.$

Câu 34. Góc có số đo $108°$ đổi ra rađian là

A. $\frac{3\pi}{5}.$ **B.** $\frac{\pi}{10}.$ **C.** $\frac{3\pi}{2}.$ **D.** $\frac{\pi}{4}.$

Câu 35. Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là

A. $240°.$ **B.** $135°.$ **C.** $72°.$ **D.** $270°.$

Câu 36. Cho $\angle(Ox,\ Oy)=22°30'+k360°$. Với k bằng bao nhiêu thì $\angle(Ox,\ Oy)=1822°30'$?

A. $k\in\varnothing.$ **B.** $k=3.$ **C.** $k=-5.$ **D.** $k=5.$

Câu 37. Góc có số đo $\frac{\pi}{9}$ đổi sang độ là

A. $15°.$ **B.** $18°.$ **C.** $20°.$ **D.** $25°.$

Câu 38. Góc có số đo $\frac{\pi}{24}$ đổi sang độ là

A. $7°.$ **B.** $7°30'.$ **C.** $8°.$ **D.** $8°30'.$

Câu 39. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và một trục (i) đi qua O. Xác định số đo góc giữa tia OA với trục (i) biết trục (i) đi qua trung điểm I của cạnh AB.

A. $15°+k360°$ **B.** $45°+k360°$ **C.** $135°+k360°$ **D.** $155°+k360°$

Câu 40. Góc có số đo $120°$ đổi sang rađian là

A. $\frac{\pi}{10}$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{2\pi}{3}$

Câu 41. Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều.
Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với B hoặc M hoặc N. Tính số đo của α ?

A. $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}$ **B.** $\alpha=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$ **C.** $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}$ **D.** $\alpha=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$

Câu 42. Cho L, M, N, P lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA. Cung α có mút đầu trùng với A và số đo $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$. Mút cuối của α ở đâu ?

A. L hoặc N **B.** M hoặc P **C.** M hoặc N **D.** L hoặc P

Câu 43. Cung nào sau đây có mút trung với B hoặc B' ?

A. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ **B.** $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ **C.** $a = 90° + k360°$ **D.** $a = -90° + k180°$

Câu 44. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

A. $30°$ **B.** $40°$ **C.** $50°$ **D.** $60°$

Câu 45. Số đo góc $22^0 30'$ đổi sang rađian là

A. $\frac{\pi}{8}$ **B.** $\frac{7\pi}{12}$ **C.** $\frac{\pi}{6}$ **D.** $\frac{\pi}{5}$

Câu 46. Đổi số đo góc $105°$ sang rađian.

A. $\frac{5\pi}{12}$ **B.** $\frac{7\pi}{12}$ **C.** $\frac{9\pi}{12}$ **D.** $\frac{5\pi}{8}$

Câu 47. Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với một trong bốn điểm M, N, P, Q. Số đo của α là

A. $a = 45° + k180°$ **B.** $a = 135° + k360°$ **C.** $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$ **D.** $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Câu 48. Cho $a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$

A. $k = 4$ **B.** $k = 6$ **C.** $k = 7$ **D.** $k = 5$

Câu 49. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và một trục (ℓ) đi qua O. Xác định số đo của các góc giữa tia OA với trục (ℓ), biết trục (ℓ) đi qua đỉnh A của hình vuông.

A. $180° + k360°$. **B.** $90° + k360°$. **C.** $-90° + k360°$. **D.** $k360°$.

Câu 50. Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi}$cm. Tìm độ dài của cung $\frac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

A. 10cm. **B.** 5cm. **C.** $\frac{20}{\pi^2}$cm. **D.** $\frac{\pi^2}{20}$cm.

Câu 51. Một đường tròn có bán kính $R = 10$cm. Độ dài cung $40°$ trên đường tròn gần bằng

A. 7cm. **B.** 9cm. **C.** 11cm. **D.** 13cm.

Bài 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

Câu 52. Giá trị $\cot\frac{89\pi}{6}$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 53. Giá trị của $\tan 180°$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** Không xác định.

Câu 54. Biết $\tan\alpha=2$ và $180°<\alpha<270°$. Giá trị $\cos\alpha+\sin\alpha$ bằng

A. $-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **B.** $1-\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 55. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}$, ta được kết quả là

A. $A=\cos x+\sin x$. **B.** $A=\cos x-\sin x$. **C.** $A=\cos 2x-\sin 2x$. **D.** $A=\cos 2x+\sin 2x$.

Câu 56. Biết $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai**?

A. $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$. **B.** $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{7}{8}$. **D.** $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=12$.

Câu 57. Tính giá trị của biểu thức $A=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$.

A. $A=-1$. **B.** $A=1$. **C.** $A=4$. **D.** $A=-4$.

Câu 58. Biểu thức $A=\dfrac{\left(1-\tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 59. Biểu thức $B=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}-\cot^2 x\cot^2 y$ không phụ thuộc vào x, y và bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 60. Cho $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Giá trị của $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ lần lượt là

A. $-\dfrac{5}{13};\ \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{5}{12}$. **C.** $-\dfrac{5}{13};\ \dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{13};\ -\dfrac{5}{12}$.

Câu 61. Biểu thức $C=2\left(\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^8 x+\cos^8 x\right)$ có giá trị không đổi và bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 62. Cho $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin\alpha>0;\ \cos\alpha>0$. **B.** $\sin\alpha<0;\ \cos\alpha<0$.

C. $\sin\alpha>0;\ \cos\alpha<0$. **D.** $\sin\alpha<0;\ \cos\alpha>0$.

Câu 63. Cho $2\pi<\alpha<\dfrac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

A. $\tan\alpha>0;\ \cot\alpha>0$. **B.** $\tan\alpha<0;\ \cot\alpha<0$.

C. $\tan\alpha>0;\ \cot\alpha<0$. **D.** $\tan\alpha<0;\ \cot\alpha>0$.

Câu 64. Hệ thức nào **sai** trong bốn hệ thức sau:

A. $\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\tan x.\tan y$ **B.** $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}\right)^2=4\tan^2 a$

C. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{2}{1-\cot^2\alpha}$ **D.** $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha+1}$

Câu 65. Biểu thức $D=\cos^2 x.\cot^2 x+3\cos^2 x-\cot^2 x+2\sin^2 x$ không phụ thuộc x và bằng

A. 2 **B.** –2 **C.** 3 **D.** –3

Câu 66. Nếu biết $3\sin^4 x+2\cos^4 x=\dfrac{98}{81}$ thì giá trị biểu thức $A=2\sin^4 x+3\cos^4 x$ bằng

A. $\dfrac{101}{81}$ hay $\dfrac{601}{405}$ **B.** $\dfrac{103}{81}$ hay $\dfrac{603}{405}$ **C.** $\dfrac{105}{81}$ hay $\dfrac{605}{405}$ **D.** $\dfrac{107}{81}$ hay $\dfrac{607}{405}$

Câu 67. Cho biết $\cot x=\dfrac{1}{2}$. Giá trị biểu thức $A=\dfrac{2}{\sin^2 x-\sin x.\cos x-\cos^2 x}$ bằng

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Câu 68. Nếu $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ thì $3\sin x+2\cos x$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{7}}{4}$ hay $\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$ **B.** $\dfrac{5-\sqrt{5}}{7}$ hay $\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$

C. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{5}$ hay $\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$ **D.** $\dfrac{3-\sqrt{2}}{5}$ hay $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5}$

Câu 69. Đơn giản biểu thức $A=\left(1-\sin^2 x\right)\cot^2 x+\left(1-\cot^2 x\right)$ ta có:

A. $A=\sin^2 x$ **B.** $A=\cos^2 x$ **C.** $A=-\sin^2 x$ **D.** $A=-\cos^2 x$

Câu 70. Biết $\tan x=\dfrac{2b}{a-c}$. Giá trị của biểu thức $A=a\cos^2 x+2b\sin x.\cos x+c\sin^2 x$ bằng

A. $-a$. **B.** a. **C.** $-b$. **D.** b.

Câu 71. Nếu biết $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ thì biểu thức $A=\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{(a+b)^2}$ **B.** $\dfrac{1}{a^2+b^2}$ **C.** $\dfrac{1}{(a+b)^3}$ **D.** $\dfrac{1}{a^3+b^3}$

Câu 72. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^0-a)=-\cos a$. **B.** $\sin(180^0-a)=-\sin a$.

C. $\sin(180^0-a)=\sin a$. **D.** $\sin(180^0-a)=\cos a$.

Câu 73. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$. **B.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$.

C. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$. **D.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cot x$.

Câu 74. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sin(-234°)-\cos 216°}{\sin 144°-\cos 126°}.\tan 36°$, ta được

A. $A=2$. **B.** $A=-2$. **C.** $A=1$. **D.** $A=-1$.

Câu 75. Biểu thức $B=\dfrac{(\cot 44°+\tan 226°).\cos 406°}{\cos 316°}-\cot 72°.\cot 18°$, ta được

A. $B=-1$. **B.** $B=\mathbf{1}$. **C.** $B=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $B=\dfrac{1}{2}$.

Câu 76. Giá trị của biểu thức $C=\dfrac{\cos 750^\circ+\sin 420^\circ}{\sin(-330^\circ)-\cos(-390^\circ)}$ bằng

A. $-3-\sqrt{3}$. **B.** $2-3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. **D.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Câu 77. Giá trị của biểu thức $D=\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** **–1**.

Câu 78. Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là sai:

A. $\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$. **B.** $\cos\dfrac{A+C}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B)=\sin C$. **D.** $\cos(A+B)=\cos C$.

Câu 79. Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$, ta được:

A. $A=\cos\alpha+\sin\alpha$. **B.** $A=2\sin\alpha$. **C.** $A=\sin\alpha-\cos\alpha$. **D.** $A=0$.

Câu 80. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sin 515^\circ.\cos(-475^\circ)+\cot 222^\circ.\cot 408^\circ}{\cot 415^\circ.\cot(-505^\circ)+\tan 197^\circ.\tan 73^\circ}$, ta được:

A. $\dfrac{1}{2}\sin^2 25^\circ$. **B.** $\dfrac{1}{2}\cos^2 55^\circ$. **C.** $\dfrac{1}{2}\cos^2 25^\circ$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sin^2 65^\circ$.

Câu 81. Rút gọn biểu thức $A=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, ta được:

A. $A=2\sin\alpha$. **B.** $A=2\cos\alpha$. **C.** $A=\sin\alpha-\cos\alpha$. **D.** $A=0$.

Câu 82. Với mọi α, biểu thức $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)+...+\cos\left(\alpha+\dfrac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 83. Giá trị của biểu thức $A=\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^2\dfrac{2\pi}{8}+\sin^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{4\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\sin^2\dfrac{7\pi}{8}$ bằng

A. $A=6$. **B.** $A=3$. **C.** $A=\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Câu 84. Biểu thức $A=\dfrac{\sin(-328^0)^\circ.\sin 958^\circ}{\cot 572^\circ}-\dfrac{\cos(-508^0)^\circ.\cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$ có kết quả rút gọn bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 85. Biểu thức

$A=\cos(\alpha+26\pi)-2\sin(\alpha-7\pi)-\cos(1,5\pi)-\cos\left(\alpha+2003\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos(\alpha-1,5\pi).\cot(\alpha-8\pi)$

có kết quả thu gọn bằng

A. $-\sin\alpha$. **B.** $\sin\alpha$. **C.** $-\cos\alpha$. **D.** $\cos\alpha$.

Câu 86. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{1}{\tan 368^\circ}+\dfrac{2\sin 2550^\circ.\cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ+\cos 98^\circ}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 87. Cho tam giác ABC và các mệnh đề:

(I) $\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$. (II) $\tan\dfrac{A+B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}=1$. (III) $\cos(A+B-C)-\cos 2C=0$.

Mệnh đề đúng là

A. Chỉ I. **B.** II và III. **C.** I và II. **D.** Chỉ III.

Câu 88. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức **sai**:

A. $\sin\dfrac{A+B+3C}{2}=\cos C$. **B.** $\cos(A+B-C)=-\cos 2C$.

C. $\tan\dfrac{A+B-2C}{2}=\cot\dfrac{3C}{2}$. **D.** $\cot\dfrac{A+B+2C}{2}=\tan\dfrac{C}{2}$.

Câu 89. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức **sai**:

A. $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$. **B.** $\cos(A+B+2C)=-\cos C$.

C. $\sin(A+C)=-\sin B$. **D.** $\cos(A+B)=-\cos C$.

Câu 90. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{(\cot 44^\circ+\tan 226^\circ).\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ}-\cot 72^\circ.\cot 18^\circ$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 91. Kết quả rút gọn của biểu thức $A=\dfrac{\cos(-288^\circ).\cot 72^\circ}{\tan(-162^0)^\circ.\sin 108^\circ}-\tan 18^\circ$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 92. Giá trị $\sin\dfrac{47\pi}{6}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 93. Giá trị $\cos\dfrac{37\pi}{3}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 94. Giá trị $\tan\dfrac{29\pi}{4}$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 95. Cho $\tan\alpha=-\dfrac{4}{5}$ với $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Khi đó

A. $\sin\alpha=-\dfrac{4}{\sqrt{41}};\ \cos\alpha=-\dfrac{5}{\sqrt{41}}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}};\ \cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

C. $\sin\alpha=-\dfrac{4}{\sqrt{41}};\ \cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}};\ \cos\alpha=-\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

Câu 96. Cho $\tan x=\dfrac{-3}{4}$ và góc x thỏa mãn $90°<x<180°$. Khi đó.

A. $\cot x=\dfrac{4}{3}$. **B.** $\cos x=\dfrac{3}{5}$. **C.** $\sin x=\dfrac{3}{5}$. **D.** $\sin x=\dfrac{-4}{5}$.

Câu 97. Cho $\sin x=\dfrac{3}{5}$ và góc x thỏa mãn $90°<x<180°$. Khi đó.

A. $\cot x=\dfrac{4}{3}$. **B.** $\cos x=\dfrac{4}{5}$. **C.** $\tan x=\dfrac{3}{4}$. **D.** $\cos x=\dfrac{-4}{5}$.

Câu 98. Cho $\cos x=\dfrac{-4}{5}$ và góc x thỏa mãn $90°<x<180°$. Khi đó.

A. $\cot x=\dfrac{4}{3}$. **B.** $\sin x=\dfrac{3}{5}$. **C.** $\tan x=\dfrac{4}{5}$. **D.** $\sin x=\dfrac{-3}{5}$.

Câu 99. Cho $\cot x=\dfrac{3}{4}$ và góc x thỏa mãn $0°<x<90°$. Khi đó.

A. $\tan x=\dfrac{-4}{3}$. **B.** $\cos x=\dfrac{-3}{5}$. **C.** $\sin x=\dfrac{4}{5}$. **D.** $\sin x=\dfrac{-4}{5}$.

Câu 100. Gọi $M=\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\sin^2 50°+\sin^2 60°+\sin^2 70°+\sin^2 80°$ thì M bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 101. Gọi $M=\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50^O+\cos^2 60^O+\cos^2 70°+\cos^2 80°$ thì M bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 102. Giá trị của biểu thức:

$M=\cos^2 23°+\cos^2 27°+\cos^2 33°+\cos^2 37°+\cos^2 43°+\cos^2 47°+\cos^2 53°+\cos^2 57°+.$
$+\cos^2 63°+\cos^2 67°$ bằng

A. 1. **B.** 5.
C. 10. **D.** Một kết quả khác với các kết quả đã nêu.

Câu 103. Giá trị của biểu thức:

$M=\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\cos^2 40°+\cos^2 50^0+\cos^2 60°+\cos^2 70°+\cos^2 80°+.$
$+\cos^2 90°+\cos^2 100°+\cos^2 110°+\cos^2 120°+\cos^2 130°+\cos^2 140°+\cos^2 150°+\cos^2 160°+.$
$+\cos^2 170°+\cos^2 180°$ bằng

A. 0. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 18.

Câu 104. Giá trị của biểu thức $M=\dfrac{\tan^2 30°+\sin^2 60°-\cos^2 45°}{\cot^2 120°+\cos^2 150°}$ bằng

A. $\dfrac{2}{7}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $\dfrac{5-\sqrt{6}}{6+\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{7}{13}$.

Câu 105. Biết $\tan x=2$, giá trị của biểu thức $M=\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5\cos x+7\sin x}$ bằng

A. $-\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{19}$. **C.** $-\dfrac{4}{19}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Câu 106. Biết $\tan x=\frac{1}{2}$, giá trị của biểu thức $M=\frac{2\sin^2 x+3\sin x.\cos x-4\cos^2 x}{5\cos^2 x-\sin^2 x}$ bằng

A. $-\frac{8}{13}$. **B.** $\frac{2}{19}$. **C.** $-\frac{2}{19}$. **D.** $-\frac{8}{19}$.

Câu 107. Biết A,B,C là các góc của tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sin(A+C)=-\sin B$. **B.** $\cos(A+C)=-\cos B$.

C. $\tan(A+C)=\tan B$. **D.** $\cot(A+C)=\cot B$.

Câu 108. Biết A,B,C là các góc của tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sin(A+C)=-\sin B$. **B.** $\cos(A+C)=\cos B$.

C. $\tan(A+C)=-\tan B$. **D.** $\cot(A+C)=\cot B$.

Câu 109. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC, khi đó.

A. $\sin C=-\sin(A+B)$. **B.** $\cos C=\cos(A+B)$.

C. $\tan C=\tan(A+B)$. **D.** $\cot C=-\cot(A+B)$.

Câu 110. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC, khi đó.

A. $\sin C=\sin(A+B)$. **B.** $\cos C=\cos(A+B)$.

C. $\tan C=\tan(A+B)$. **D.** $\cot C=-\cot(A+B)$.

Câu 111. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC, khi đó.

A. $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$. **B.** $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$.

C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\frac{C}{2}$. **D.** $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$.

Câu 112. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC, khi đó.

A. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$. **B.** $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=-\cos\frac{C}{2}$.

C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$. **D.** $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$.

Câu 113. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC, khi đó.

A. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\frac{C}{2}$. **B.** $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=-\tan\frac{C}{2}$.

C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$. **D.** $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=-\cot\frac{C}{2}$.

Câu 114. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC, khi đó.

A. $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$. **B.** $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=-\sin\frac{C}{2}$.

C. $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$. **D.** $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=-\cos\frac{C}{2}$.

Câu 115. Với góc x bất kì.

A. $\sin x+\cos x=1$. **B.** $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. **C.** $\sin^3 x+\cos^3 x=1$. **D.** $\sin^4 x+\cos^4 x=1$.

Câu 116. Với góc x bất kì. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\sin^2 x+\cos^2 2x=1$. **B.** $\sin\left(x^2\right)+\cos\left(x^2\right)=1$.

C. $\sin^2 x+\cos^2\left(180°-x\right)=1$. **D.** $\sin^2 x-\cos^2\left(180°-x\right)=1$.

Câu 117. Cho $M=\tan 10°.\tan 20°.\tan 30°.\tan 40°.\tan 50°.\tan 60°.\tan 70°.\tan 80°$. Giá trị của M bằng

A. $M=0$. **B.** $M=1$. **C.** $M=4$. **D.** $M=8$.

Câu 118. Biết $\tan x=2$ và $M=\dfrac{2\sin x-3\cos x}{4\sin x+7\cos x}$. Giá trị của M bằng

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{1}{15}$. **C.** $M=-\dfrac{1}{15}$. **D.** $M=-\dfrac{2}{9}$.

Câu 119. Biết $\tan x=2$ và $M=\dfrac{2\sin^2 x+3\sin x.\cos x+4\cos^2 x}{5\sin^2 x+6\cos^2 x}$. Giá trị của M bằng

A. $M=\dfrac{9}{13}$. **B.** $M=\dfrac{9}{65}$. **C.** $M=-\dfrac{9}{65}$. **D.** $M=\dfrac{24}{29}$.

Câu 120. Biết $\tan x=3$ và $M=\dfrac{2\sin^2 x+3\sin x.\cos x+4\cos^2 x}{5\tan^2 x+6\cot^2 x}$. Giá trị của M bằng

A. $M=\dfrac{31}{47}$. **B.** $M=\dfrac{93}{137}$. **C.** $M=\dfrac{93}{1370}$. **D.** $M=\dfrac{31}{51}$.

Câu 121. Cho $M=\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x-\cos x\right)^2$. Biểu thức nào sau đây là biểu thức rút gọn của M ?

A. $M=1$. **B.** $M=2$. **C.** $M=4$. **D.** $M=4\sin x.\cos x$.

Câu 122. Cho $M=\left(\sin x+\cos x\right)^2-\left(\sin x-\cos x\right)^2$. Biểu thức nào sau đây là biểu thức rút gọn của M ?

A. $M=2$. **B.** $M=4$. **C.** $M=2\sin x.\cos x$. **D.** $M=4\sin x.\cos x$.

Câu 123. Gọi $M=\left(\tan x+\cot x\right)^2$, ta có.

A. $M=2$. **B.** $M=\dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$. **C.** $M=\dfrac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}$. **D.** $M=4$.

Câu 124. Cho $\tan x+\cot x=m$, gọi $M=\tan^3 x+\cot^3 x$. Khi đó.

A. $M=m^3$. **B.** $M=m^3+3m$. **C.** $M=m^3-3m$. **D.** $M=m\left(m^2-1\right)$.

Câu 125. Cho $\sin x+\cos x=m$, gọi $M=\left|\sin x-\cos x\right|$. Khi đó.

A. $M=2-m$. **B.** $M=2-m^2$. **C.** $M=m^2-2$. **D.** $M=\sqrt{2-m^2}$.

Câu 126. Cho $M=5-2\sin^2 x$. Khi đó giá trị lớn nhất của M là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 127. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=7\cos^2 x-2\sin^2 x$ là

A. -2. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 16.

Câu 128. Cho $M=6\cos^2 x+5\sin^2 x$. Khi đó giá trị lớn nhất của M là

A. 1. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 11.

Câu 129. Cho $M = 3\sin x + 4\cos x$. Chọn khẳng định đúng.
A. $M \le 5$. **B.** $5 < M$. **C.** $M \ge -5$. **D.** $-5 \le M \le 5$.

Câu 130. Giá trị lớn nhất của $M = \sin^4 x + \cos^4 x$ bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 131. Giá trị lớn nhất của $N = \sin^4 x - \cos^4 x$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 132. Giá trị lớn nhất của $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$ bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 133. Giá trị lớn nhất của $M = \sin^6 x - \cos^6 x$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 134. Giá trị của biểu thức $P = 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)$ là
A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 135. Biểu thức thu gọn của $M = \tan^2 x - \sin^2 x$ là
A. $M = \tan^2 x$. **B.** $M = \sin^2 x$. **C.** $M = \tan^2 x.\sin^2 x$. **D.** $M = 1$.

Câu 136. Biểu thức thu gọn của $M = \cot^2 x - \cos^2 x$ là
A. $M = \cot^2 x$. **B.** $M = \cos^2 x$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = \cot^2 x.\cos^2 x$.

Câu 137. Nếu $M = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x}$, $\left(x \ne k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right)$ thì M bằng
A. $\tan^4 x$. **B.** $\cot^4 x$. **C.** $\dfrac{1}{4}\cos^2 2x$. **D.** $\dfrac{1}{4}\sin^2 2x$.

Câu 138. Giá trị của $M = \cos 20°.\cos 40°.\cos 80°$ là
A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 139. Nếu $M = \sin^4 x + \cos^4 x$ thì M bằng
A. $1 + 2\sin^2 x.\cos^2 x$. **B.** $1 + \sin^2 2x$. **C.** $1 - \sin^2 2x$. **D.** $1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

Câu 140. Nếu $M = \sin^6 x + \cos^6 x$ thì M bằng
A. $1 + 3\sin^2 x.\cos^2 x$. **B.** $1 - 3\sin^2 x$. **C.** $1 - \dfrac{3}{2}\sin^2 2x$. **D.** $1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x$.

Câu 141. Giá trị nhỏ nhất của $M = \sin^4 x + \cos^4 x$ là
A. 0. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 142. Giá trị nhỏ nhất của $M = \sin^6 x + \cos^6 x$ là
A. 0. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 143. Cho biểu thức $M = \dfrac{1 + \tan^3 x}{\left(1 + \tan x\right)^3}$, $\left(x \ne -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$, mệnh đề nào trong các mệnh đề sau ***đúng***?
A. $M < 1$. **B.** $M \le 1$. **C.** $M \ge \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{4} \le M \le 1$.

Câu 144. Cho $\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$. Xác định kết quả **sai**.

A. $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

B. $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

C. $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\tan^2 15^\circ + \cot^2 15^\circ = 14$.

Câu 145. Nếu $\tan\alpha + \cot\alpha = 5$ thì $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$ bằng

A. 100. **B.** 110. **C.** 112. **D.** 115.

Câu 146. Cho $\tan x = -\dfrac{4}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ thì giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x - \cos^2 x}$ bằng

A. $\dfrac{34}{11}$. **B.** $\dfrac{32}{11}$. **C.** $\dfrac{31}{11}$. **D.** $\dfrac{30}{11}$.

Câu 147. Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ bằng

A. 12. **B.** 14. **C.** 16. **D.** 18.

Câu 148. Tìm đẳng thức **sai**.

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$.

B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$.

C. $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x.\cos^2 x$.

D. $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{1-\cos x} = \dfrac{2\cos x}{\sin x + \cos x + 1}$.

Câu 149. Tìm đẳng thức **sai** trong các đẳng thức:

A. $1 - \sin^2 x - \cot^2 x \sin^2 x = \cos^2 x$.

B. $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$.

C. $\dfrac{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha} = \tan^6\alpha$.

D. $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2 = 4$.

Câu 150. Biểu thức $A = \cos^2 x.\cot^2 x + 3\cos^2 x - \cot^2 x + 2\sin^2 x$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 151. Biểu thức $B = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 4. **B.** -4

C. 2. **D.** -2.

Câu 152. Biểu thức $C = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x.\cot^2 y$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 153. Nếu $\tan x = 5$ thì $\sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $\dfrac{9}{13}$. **B.** $\dfrac{10}{13}$. **C.** $\dfrac{11}{13}$. **D.** $\dfrac{12}{13}$.

Câu 154. Nếu $3\cos x + 2\sin x = 2$ và $\sin x < 0$ thì giá trị đúng của $\sin x$ là

A. $-\dfrac{5}{13}$. **B.** $-\dfrac{7}{13}$. **C.** $-\dfrac{9}{13}$. **D.** $-\dfrac{12}{13}$.

Câu 155. Chọn hệ thức **sai** trong các hệ thức sau:

A. $\sin^2 a.\tan a+\cos^2 a.\cot a+2\sin a.\cos a=\tan a+\cot a$.

B. $3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)=1$.

C. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1-\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$.

D. $\dfrac{1+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}$.

Câu 156. Biểu thức $D=\dfrac{\cot^2 x-\cos^2 x}{\cot^2 x}+\dfrac{\sin x.\cos x}{\cot x}$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 157. trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\dfrac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{\tan^2\alpha.\tan^2\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta}$.

B. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\sin\alpha-\cos\alpha$.

C. $\left(\dfrac{\sin\alpha+\cot\alpha}{1+\sin\alpha.\tan\alpha}\right)^2=\dfrac{\sin^2\alpha+\cot^2\alpha}{1+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha}$.

D. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\tan^2\beta.\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\tan^2\beta$.

Câu 158. Chọn hệ thức **sai** trong các hệ thức sau:

A. $\dfrac{\sin^2\alpha+1}{2\left(1-\sin^2\alpha\right)}+\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2\left(1-\cos^2\alpha\right)}+1=\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)^2$.

B. $\dfrac{1-4\sin^2 x.\cos^2 x}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=\dfrac{1+\tan^4 x-2\tan^2 x}{4\tan^2 x}$.

C. $\dfrac{\sin x+\tan x}{\tan x}=1+\sin x+\cot x$.

D. $\tan x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{1}{\cos x}$.

Câu 159. Chọn hệ thức **sai** trong các hệ thức sau:

A. $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.\dfrac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}=\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$.

B. $\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{\cos x\left(1+\cos x\right)}$.

C. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\tan\alpha=\left(1+\cos\alpha\right)\left(1+\tan\alpha\right)$.

D. $\dfrac{\sin x.\sin y}{\cos x.\cos y}.\tan x.\cot y+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 160. Biểu thức $E=2\left(\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 x.\sin^2 x\right)^2-\left(\sin^8 x+\cos^8 x\right)$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 161. Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ thì biểu thức $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 162. Khi $\alpha=\frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ có giá trị bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $-2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\sqrt{3}$.

Câu 163. Khi $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ thì biểu thức $\frac{1}{\sin\alpha-\sqrt{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha}}$ có giá trị bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\sqrt{3}$.

Câu 164. Để $\sin x\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}}=\sqrt{2}$ thì các giá trị của x có thể là

I. $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. II. $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. III. $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. IV. $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời nào đúng?

A. I và II. **B.** I và III. **C.** II và IV. **D.** I và IV..

Câu 165. Cho biết $\sin a-\cos a=\frac{1}{2}$. Kết quả nào sau đây **sai**?

A. $\sin a.\cos a=\frac{3}{8}$. **B.** $\sin a+\cos a=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $\sin^4 a+\cos^4 a=\frac{21}{32}$. **D.** $\tan^2 a+\cot^2 a=\frac{14}{3}$.

Câu 166. Nếu $\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$ thì biểu thức $M=\frac{\sin^{10}\alpha}{a^4}+\frac{\cos^{10}\alpha}{b^4}$ bằng

A. $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}$. **B.** $\frac{1}{(a+b)^5}$. **C.** $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}$. **D.** $\frac{1}{(a+b)^4}$.

Câu 167. Biết $\tan x=\frac{2b}{a-c}$ thì giá trị của biểu thức $A=a\sin^2 x-2b\sin x\cos x+c\cos^2 x$ bằng

A. $A=a$. **B.** $A=b$. **C.** $A=c$. **D.** Một kết quả khác..

Câu 168. Một tam giác ABC có các góc A,B,C thỏa mãn $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}=0$ thì tam giác đó có gì đặc biệt?

A. Không có gì đặc biệt. **B.** Tam giác đó vuông.

C. Tam giác đó đều. **D.** Tam giác đó cân.

Câu 169. Biểu thức $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)+\frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{4}}-\tan^2\frac{3\pi}{4}$ có giá trị đúng bằng

A. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 170. Biểu thức $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)-\frac{1}{\cos^2\frac{16\pi}{3}}+\cot\frac{23\pi}{4}$ có giá trị đúng bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}-5$. **B.** $5-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}-3$. **D.** $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 171. Nếu biết $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{13\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 172. Nếu $\cot 1,25.\tan\left(4\pi+1,25\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(6\pi-x\right)=0$ thì $\tan x$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** Giá trị khác..

Câu 173. Nếu $\cot\left(x+\pi\right)-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(-1445°\right)+\cos^2\left(1085°\right)$ thì $\sin x$ bằng

A. $\pm\frac{1}{5}$. **B.** $\pm\frac{2}{5}$. **C.** $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 174. Biểu thức $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(10\pi+x\right)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos\left(8\pi-x\right)\right]^2$ có giá trị không phụ thuộc vào x bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 175. Kết quả rút gọn biểu thức: $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot\left(7\pi-x\right)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $\frac{2}{\sin^2 x}$. **D.** $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Câu 176. $\left[1+\tan^2\left(\frac{11\pi}{2}-x\right)\right]\left[1+\cot^2\left(x-3\pi\right)\right].\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).\sin\left(11\pi-x\right).\cos\left(x-\frac{13\pi}{2}\right).\sin\left(x-7\pi\right)$ có kết quả rút gọn bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 177. Biểu thức: $\cos\left(270°-x\right)-2\sin\left(x-450°\right)+\cos\left(x+900°\right)+2\sin\left(270°-x\right)+\cos\left(540°-x\right)$ có kết quả rút gọn bằng

A. $3\cos x$. **B.** $-2\cos x-\sin x$. **C.** $-2\cos x+\sin x$. **D.** $-3\sin x$.

Câu 178. A, B, C, là ba góc của một tam giác. Hãy xác định hệ thức **sai**:

A. $\sin A=\sin\left(B+C\right)$. **B.** $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$.

C. $\cos\left(3A+B+C\right)=\cos 2A$. **D.** $\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$.

Câu 179. A, B, C, là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **sai**:

A. $\sin A=-\sin\left(2A+B+C\right)$. **B.** $\sin A=-\cos\frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C=\sin\frac{A+B+3C}{2}$. **D.** $\sin C=\sin\left(A+B+2C\right)$.

Câu 180. A, B, C, là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ hệ thức **sai**:

A. $\tan\left(\frac{A+B+6C}{2}\right)=-\cot\frac{5C}{2}$. **B.** $\cot\left(\frac{4A+B+C}{2}\right)=-\tan\frac{3A}{2}$.

C. $\cos\left(\frac{A-2B+C}{2}\right)=-\sin B$. **D.** $\sin\left(\frac{A+B-3C}{2}\right)=\cos 2C$.

Câu 181. Biểu thức: $\dfrac{\tan(-432°)}{\cot 18°}+\dfrac{\cos(-302°)}{\dfrac{1}{\cos 508°}}-\dfrac{\cos 32°}{\dfrac{1}{\cos 122°}}$ có giá trị đúng bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 182. Biểu thức: $\dfrac{\sin(-385°)}{\dfrac{1}{\sin 1555°}}-\dfrac{\sin(-295°)}{\dfrac{1}{\sin 4165°}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos(-1050°)}}$ có giá trị đúng bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 183. Cho $A=\dfrac{\sin 515°.\cos(-475°)+\cot 222°.\cot 408°}{\cot 415°.\cot(-505°)+\tan 197°.\tan 73°}$. Biểu thức rút gọn của A bằng

A. $\dfrac{1}{2}\cos^2 25°$. **B.** $-\dfrac{1}{2}\cos^2 25°$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sin^2 25°$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\sin^2 25°$.

Câu 184. Cho $B=\dfrac{\cos^2 696°+\tan(-260°).\tan 530°-\cos^2 156°}{\tan^2 252°+\cot^2 342°}$. Biểu thức thu gọn nhất của B là

A. $\dfrac{1}{2}\tan^2 24°$. **B.** $\dfrac{1}{2}\cot^2 24°$. **C.** $\dfrac{1}{2}\tan^2 18°$. **D.** $\dfrac{1}{2}\cot^2 18°$.

Câu 185. Cho $C=\dfrac{\sin(-328°).\sin 958°}{\cot 572°}-\dfrac{\cos(-508°).\cos(-1022°)}{\tan(-212°)}$. Rút gọn C thì được kết quả nào trong bốn kết quả sau:

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 186. Biểu thức $\dfrac{\cos 750°+\sin 420°}{\sin(-330°)-\cos(-390°)}-\dfrac{1+\cos 1800°.\tan(-420°)}{\tan 420°}$. Có giá trị đúng bằng

A. $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{6-4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 187. Biểu thức $\dfrac{1}{\tan 368°}+\dfrac{2\sin 2550°.\cos(-188°)}{2\cos 638°+\cos 98°}$ có giá trị đúng bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 188. Biểu thức $\left[\dfrac{\sin(-560°)}{\sin 470°}-\dfrac{\tan(-1010°)}{\cot 200°}\right].\cos(-700°)$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\sin 20°+\cos 20°$. **B.** $\sin 20°-\cos 20°$. **C.** $-\sin 20°-\cos 20°$. **D.** $\cos 20°-\sin 20°$.

Câu 189. Biểu thức $\dfrac{\left[1+\sin 500°.\cos(-320°)\right].\cos 2380°}{(1-\cos 410°.\cos 2020°).\sin(-580°).\cot^2(-310°)}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $-\tan^3 40^0$. **B.** $-\tan^3 50^0$. **C.** $-\cot^2 40^0$. **D.** $-\cot^2 50^0$.

Câu 190. Biểu thức $\tan(-3,1\pi).\cos(5,9\pi)-\sin(-3,6\pi).\cot(-5,6\pi)$ có kết quả rút gọn bằng

A. $-\sin 0,1\pi$. **B.** $2\sin 0,1\pi$. **C.** $-\sin 0,1\pi$. **D.** $2\cos 0,1\pi$.

Câu 191. Biểu thức $\dfrac{\sin(-3,4\pi)+\sin 5,6\pi.\cos^2(-8,1\pi)}{\sin^3(-8,9\pi)+\sin 8,9\pi}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\cot 0,1\pi$. **B.** $-\cot 0,1\pi$. **C.** $\tan 0,1\pi$. **D.** $-\tan 0,1\pi$.

Câu 192. Biểu thức $\dfrac{\sin(-4,8\pi).\sin(-5,7\pi)}{\cot(-5,2\pi)}+\dfrac{\cos(-6,7\pi).\cos(-5,8\pi)}{\tan(-6,2\pi)}$ có kết quả rut gọn bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 193. Biểu thức $\left[\tan(\pi-x).\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right).\dfrac{1}{\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right).\dfrac{1}{\sin(\pi-x)}\right]\sin^2(2\pi-x)$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\sin^2 x$. **B.** $\cos^2 x$. **C.** $\tan^2 x$. **D.** $\cot^2 x$.

Bài 3: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Câu 194. Hãy xác định kết quả **sai**:

A. $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos 285°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

C. $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sin\dfrac{103\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Câu 195. Nếu biết $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, $\cos\beta=\dfrac{3}{5}\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos(\alpha-\beta)$ là

A. $\dfrac{16}{65}$. **B.** $-\dfrac{16}{65}$. **C.** $\dfrac{18}{65}$. **D.** $-\dfrac{18}{65}$.

Câu 196. Nếu biết $\sin a=\dfrac{8}{17},\tan b=\dfrac{5}{12}$ và a,b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a-b)$ là

A. $\dfrac{20}{220}$. **B.** $-\dfrac{20}{220}$. **C.** $\dfrac{21}{221}$. **D.** $\dfrac{22}{221}$.

Câu 197. Nếu $\tan x=0,5;\ \sin y=\dfrac{3}{5}\ (0°<y<90°)$ thì $\tan(x+y)$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 198. Biết $\cot x=\dfrac{3}{4},\cot y=\dfrac{1}{7}$, x,y đều là góc dương, nhọn thì:

A. $x+y=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $x+y=\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $x+y=\dfrac{3\pi}{4}$. **D.** $x+y=\dfrac{5\pi}{6}$.

Câu 199. Nếu biết $\begin{cases}\tan a+\tan b=2\\ \tan(a+b)=4\end{cases}$ thì các giá trị của $\tan a,\tan b$ bằng

A. $\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}$ hoặc ngược lại. **B.** $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}$ hoặc ngược lại.

C. $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc ngược lại. **D.** $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc ngược lại.

Câu 200. Với x,y là hai góc nhọn, dương và $\tan x=3\tan y$ thì hiệu số $x-y$ sẽ:

A. Lớn hơn hoặc bằng $30°$. **B.** Nhỏ hơn hoặc bằng $30°$.

C. Lớn hơn hoặc bằng $45°$. **D.** Nhỏ hơn hoặc bằng $45°$.

Câu 201. Giá trị đúng của biểu thức $\dfrac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ.\cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\sqrt{3}$.

Câu 202. Nếu α, β, γ là ba góc dương và nhọn, $\tan(\alpha+\beta).\sin\gamma = \cos\gamma$ thì:

A. $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

C. $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 203. Nếu $\sin\alpha.\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta$ với $\alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+l\pi,\ (k,l\in\mathbb{Z})$ thì:

A. $\tan(\alpha+\beta) = 2\cot\alpha$. **B.** $\tan(\alpha+\beta) = 2\cot\beta$.

C. $\tan(\alpha+\beta) = 2\tan\beta$. **D.** $\tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha$.

Câu 204. Nếu $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ và $\cot\alpha+\cot\gamma = 2\cot\beta$ thì $\cot\alpha.\cot\gamma$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 205. Biểu thức $\tan x.\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\tan x$ có giá trị không phụ thuộc vào x. Giá trị đó bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 206. Nếu $\tan(a+b)=7,\ \tan(a-b)=4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

A. $-\dfrac{11}{27}$. **B.** $\dfrac{11}{27}$. **C.** $-\dfrac{13}{27}$. **D.** $\dfrac{13}{27}$.

Câu 207. Nếu $A>0,\ A>\cos b,\ a+b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\sin a = A.\sin(a+b)$ thì $\tan(a+b)$ bằng

A. $\dfrac{\sin b}{\cos b - A}$. **B.** $\dfrac{\sin b}{A-\cos b}$. **C.** $\dfrac{\cos b}{\sin b - A}$. **D.** $\dfrac{\cos b}{A-\sin b}$.

Câu 208. Hãy chỉ ra công thức sai, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác.

A. $\cos B.\cos C - \sin B.\sin C + \cos A = 0$.

B. $\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$.

C. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1$.

D. $\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$.

Câu 209. A, B, C là ba góc của một tam giác. Trong bốn công thức sau, có một công thức sai. Hãy chỉ rõ:

A. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.

B. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A.\cot B.\cot C$.

C. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$.

D. $\cot A.\cot B+\cot B\cot C+\cot C.\cot A=1$.

Câu 210. Trong bốn công thức sau, có một công thức sai. Hãy chỉ rõ:

A. $\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 b-\sin^2 a$.

B. $\dfrac{\sin(a+b).\sin(a-b)}{1-\tan^2 a.\cot^2 b}=-\cos^2 a.\sin^2 b$.

C. $\cos(17^0+a).\cos(13^0-a)-\sin(17^0+a).\sin(13^0-a)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=2\sin\alpha.\sin\beta.\cos(\alpha+\beta)$.

Câu 211. Biểu thức $\sin^2 x+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$ không phụ thuộc vào x và có kết quả rút gọn bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 212. trong bốn công thức sau, có một công thức sai. Hãy chỉ rõ:

A. $\sin^2(a-b)+\sin^2 b+2\sin(a-b).\sin b.\cos a=\sin^2 a$.

B. $\sin 15°+\tan 30°.\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\cos 40°+\tan\alpha.\sin 40°=\dfrac{\sin(50°+\alpha)}{\cos\alpha}$.

D. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)=\sqrt{2}\sin a$.

Câu 213. trong bốn công thức sau, có một công thức sai. Hãy chỉ rõ:

A. $\dfrac{\tan^2 x-\tan^2 y}{1-\tan^2 x.\tan^2 y}=\tan(x+y).\tan(x-y)$.

B. $\dfrac{\tan(a-b)+\tan b}{\tan(a+b)-\tan b}=\dfrac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}$.

C. $\tan(a+b)+\tan a+\tan b=\tan(a+b).\tan a.\tan b$.

D. $\dfrac{\sin(a-b)+2\cos a.\sin b}{2\cos a.\cos b-\cos(a-b)}=\tan(a+b)$.

Câu 214. Hãy chỉ ra công thức sai:

A. $\dfrac{\tan a+\tan b}{\tan(a+b)}-\dfrac{\tan a-\tan b}{\tan(a-b)}=-2\tan a.\tan b$. **B.** $\dfrac{1+\tan a.\tan b}{1-\tan a.\tan b}=\dfrac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}$.

C. $\dfrac{\cos(a+b).\cos(a-b)}{\cos^2 a.\cos^2 b}=1-\tan^2 a.\tan^2 b$. **D.** $\tan^2 a-\tan^2 b=\dfrac{\sin(a+b).\sin(a+b)}{\cos^2 a.\cos^2 b}$.

Câu 215. Biết rằng $\tan\alpha,\tan\beta$ là các nghiệm của phương trình $x^2-px+q=0$ thế thì giá trị của biểu thức: $A=\cos^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha+\beta)+q\sin^2(\alpha+\beta)$ bằng

A. p. **B.** q. **C.** 1. **D.** $\dfrac{p}{q}$.

Câu 216. Biểu thức $\sin^2(45°+\alpha)-\sin^2(30°-\alpha)-\sin 15°.\cos^2(15°+2\alpha)$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\sin 2\alpha$. **B.** $\cos 2\alpha$. **C.** $2\sin\alpha$. **D.** $2\cos\alpha$.

Câu 217. Nếu $\sin\beta=\frac{4}{5},0<\beta<\frac{\pi}{2},\alpha\neq k\pi$ thì giá trị của biểu thức $A=\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)-\frac{4}{3}\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ không phụ thuộc vào α và bằng

A. $\frac{5}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 218. Biểu thức rút gọn của: $A=\cos^2\alpha+\cos^2(a+b)-2\cos a.\cos b.\cos(a+b)$ bằng

A. $\sin^2 a$. **B.** $\sin^2 b$. **C.** $\cos^2 a$. **D.** $\cos^2 b$.

Câu 219. Hãy xác định hệ thức **sai**:

A. $\sin x.\cos^3 x-\cos x\sin^3 x=\frac{\sin 4x}{4}$. **B.** $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3+\cos 4x}{4}$.

C. $\frac{1+\sin x}{\cos x}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. **D.** $\cot^2 x+\tan^2 x=\frac{2\cos 4x+6}{1-\cos 4x}$.

Câu 220. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$. **B.** $4\sin a.\cos a(1-2\sin^2 a)=\sin 4a$.

C. $\cos 4a=8\cos^4 a-8\cos^2 a+1$. **D.** $\cos 4a-4\cos 2a+3=8\cos^4 a$.

Câu 221. Hãy chỉ rõ hệ thức sai:

A. $\frac{\sin^2 3a}{\sin^2 a}-\frac{\cos^2 3a}{\cos^2 a}=8\sin 2a$. **B.** $\cos 4a=\sin^4 a+\cos^4 a-6\sin^2 a.\cos^2 a$.

C. $\cot a-\tan a-2\tan 2a-4\tan 4a=8\cot 8a$. **D.** $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Câu 222. Nếu $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ thì giá trị của $\cos 4a$ là

A. $\frac{527}{625}$. **B.** $-\frac{527}{625}$. **C.** $\frac{524}{625}$. **D.** $-\frac{524}{625}$.

Câu 223. Nếu biết $\tan\alpha=\frac{1}{2}(0<a<90°),\tan b=-\frac{1}{3}(90°<b<180°)$ thì $\cos(2a-b)$ có giá trị đúng bằng

A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 224. Nếu $\sin a-\cos a=\frac{1}{5}(135°<a<180°)$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

A. $-\frac{20}{7}$. **B.** $\frac{20}{7}$. **C.** $\frac{24}{7}$. **D.** $-\frac{24}{7}$.

Câu 225. Nếu a,b là các góc dương và nhọn, $\sin a=\frac{1}{3},\sin b=\frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị đúng bằng

A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$. **B.** $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$. **D.** $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Câu 226. Biểu thức $\frac{1+\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha+\cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\sin 2\alpha$. **B.** $\cos 2\alpha$. **C.** $\tan 2\alpha$. **D.** $\cot 2\alpha$.

Câu 227. Biểu thức $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $2\tan^4\alpha$. **B.** $\dfrac{1}{2}\tan^4\alpha$. **C.** $2\cot^4\alpha$. **D.** $\dfrac{1}{2}\cot^4\alpha$.

Câu 228. Biểu thức $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $-\tan^4\alpha$. **B.** $\tan^4\alpha$. **C.** $-\cot^4\alpha$. **D.** $\cot^4\alpha$.

Câu 229. Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Câu 230. Biểu thức $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{4\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Câu 231. Giá trị đúng của biểu thức $M=\cos\dfrac{\pi}{15}.\cos\dfrac{2\pi}{15}.\cos\dfrac{3\pi}{15}.\cos\dfrac{4\pi}{15}.\cos\dfrac{5\pi}{15}.\cos\dfrac{6\pi}{15}.\cos\dfrac{7\pi}{15}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** $\dfrac{1}{128}$.

Câu 232. Biểu thức $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin^4\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ không phụ thuộc vào x và có kết quả rút gọn bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 233. Biết rằng $0<x<\pi$ và $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$. Giá trị đúng của $\tan\dfrac{x}{4}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$.

Câu 234. Nếu $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{a}{b}$ thì biểu thức $a\sin x+b\cos x$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** $\dfrac{a+b}{a}$. **D.** $\dfrac{a+b}{b}$.

Câu 235. Biết rằng $90°<a<180°$; $0°<b<90°$ và $\cos\left(a-\dfrac{b}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$, $\sin\left(\dfrac{a}{2}-b\right)=\dfrac{1}{3}$ thì giá trị gần đúng của $\cos(a+b)$ là

A. $\dfrac{49+2\sqrt{120}}{72}$. **B.** $\dfrac{49-2\sqrt{120}}{72}$. **C.** $\dfrac{-49-2\sqrt{120}}{72}$. **D.** $\dfrac{-49+2\sqrt{120}}{72}$.

Câu 236. Nếu $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\dfrac{\sin x}{2-3\cos x}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 237. Nếu $\tan\frac{x}{2}=2$ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{3-2\cos x+5\tan x}$ bằng

A. $\frac{12}{37}$. **B.** $-\frac{12}{37}$. **C.** $\frac{11}{37}$. **D.** $-\frac{11}{37}$.

Câu 238. Biết $\sin 2x=-\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$. Tìm mệnh đề ***sai*** trong các mệnh đề sau.

A. $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin x-\cos x=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

C. $2\sin x-3\cos x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\tan 2x=\frac{4}{3}$.

Câu 239. Biết $\sin x=\frac{1}{3}$ và $90°<x<180°$ thì biểu thức $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ có giá trị bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **C.** $-2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 240. Hãy chỉ ra hệ thức sai:

A. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

C. $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$. **D.** $\frac{\cos 2\alpha}{cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2\alpha$.

Câu 241. Nếu $\tan\frac{\beta}{2}=3\tan\frac{\alpha}{2}$ thì $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ tính theo α bằng

A. $\frac{2\cos\alpha}{2\sin a-1}$. **B.** $\frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}$. **C.** $\frac{2\cos\alpha}{2\sin a+1}$. **D.** $\frac{2\sin\alpha}{2\sin a-1}$.

Câu 242. Hãy chỉ ra hệ thức **sai** :

A. $4\cos(\alpha-\beta).\cos(\beta-\alpha).\cos(\gamma-\alpha)=\cos 2(\alpha-\beta)+\cos 2(\beta-\gamma)+\cos 2(\gamma-\alpha)$.

B. $\cos 2x.\sin 5x.\cos 3x=\frac{\sin 10x+\sin 6x+\sin 4x}{4}$.

C. $\sin 40°\cos 10°.\cos 8°=\frac{\sin 58°+\sin 42°+\sin 8°}{4}$.

D. $\sin\alpha.\sin 2\alpha.\sin 3\alpha=\frac{\sin 4\alpha-\sin 6\alpha+\sin 2\alpha}{4}$.

Câu 243. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề nào ***sai.***

A. $4\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right).\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{3\alpha}{2}$.

B. $\cos 10°.\cos 30°.\cos 50°.\cos 70°=\frac{\sqrt{3}}{16}$.

C. $4\sin\frac{a}{3}.\sin\frac{\pi+a}{3}.\sin\frac{\pi-a}{3}=\sin a$.

D. $4\cos\frac{a}{3}.\cos\frac{\pi+a}{3}.\cos\frac{\pi-a}{3}=\cos a$.

Câu 244. trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

A. $\sin 20°.\sin 40°.\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

C. $\tan 9°-\tan 27°-\tan 63°+\tan 81°=4$. **D.** $\frac{1}{\sin 10°}-4\sin 70°=-2$.

Câu 245. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\sqrt{3}-2\cos x = 4\sin\left(\frac{x}{2}+15°\right).\sin\left(\frac{x}{2}-15°\right)$. **B.** $\tan^2 x-3=\frac{4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2 x}$.

C. $\sin^2 7x-\cos^2 5x=\cos 12x.\cos 2x$. **D.** $1+\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 246. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $1+\cos x+\cos 2x=4\cos x.\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

B. $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=4\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}.\cos x$.

C. $3+4\cos 4x + \cos 8x = 4\cos^2 2x$.

D. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 247. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sin 2x+\sqrt{3}}{4}$.

B. $\sin\frac{\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$.

C. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\ \cos 2x=\frac{1}{4}\ \cos 2x-\frac{1}{8}\ \cos 4x-\frac{1}{8}$.

D. $8\cos x.\sin 2x.\sin 3x=2\left(\cos 2x-\cos 4x-\cos 6x+1\right)$.

Câu 248. **t**rong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $3 + 4\cos^2 x=4\sin\left(x-60°\right).\sin\left(x+60°\right)$.

B. $\sin^2 x-3=4\cos\left(x+30°\right).\cos\left(x+150°\right)..$

C. $3 - \cot^2 x=\frac{4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2 x}$.

D. $\tan^2 a - \tan^2 b=\frac{\sin\left(a+b\right).\sin\left(a-b\right)}{\cos^2 a.\cos^2 b}$.

Câu 249. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\sin 10°+\sin 11°+\sin 15°+\sin 16°=4\sin 13°.\cos 2°30'.\cos 0°30'$.

B. $\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\sin 4a=4\sin a.\sin\frac{5a}{2}.\cos\frac{a}{2}$.

C. $\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cos 4a=4\cos a.\cos\frac{5a}{2}.\cos\frac{a}{2}$.

D. $1+\sin a+\cos a+\tan a=\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{a}{2}.\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos a}$.

Câu 250. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\frac{1}{2\sin 10°}-2\sin 70°=2$. **B.** $\sin 10°\sin 50°.\sin 70°=\frac{1}{8}$.

C. $\cos 10°.\cos 50°.\cos 70°=\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\tan 10°.\cot 40°.\cot 20°=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 251. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

A. $\sin 20°.\sin 40°.\sin 80° = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

B. $\cos 20°.\cos 40°.\cos 80° = \frac{1}{8}$.

C. $\cos 36°.\cos 72° = \frac{1}{2}$.

D. $\cot 70°.\cot 50°.\cot 10° = \sqrt{3}$.

Câu 252. Kết quả biến đổi nào dưới đây là kết quả **sai**?

A. $\sin 70° - \sin 20° + \sin 50° = 4\cos 10°.\cos 35°.\cos 65°$.

B. $\cos 46° - \cos 22° - 2\cos 78° = 8\sin 32°.\sin 12°.\sin 2°$.

C. $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4\cos\frac{a+b}{2}.\cos\left(\frac{b}{2} - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $1 + \sin x - \cos 2x = 4\sin x.\sin\left(\frac{x}{2} + 15°\right).\cos\left(\frac{x}{2} - 15°\right)$.

Câu 253. Kết quả biến đổi nào dưới đây là kết quả **sai**?

A. $1 + 2\cos x + \cos 2x = 4\cos x.\cos^2\frac{x}{2}$.

B. $\sin x.\cos 3x + \sin 4x.\cos 2x = \sin 5x.\cos x$.

C. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 = 2\cos 3x.\cos 2x.\cos x$

D. $\sin^2 x - \sin^2 2x - \sin^2 3x = 2\sin 3x.\sin 2x.\sin x$.

Câu 254. Trong bốn kết quả A, B, C, D có một kết quả **sai**. Hãy chỉ rõ.

A. $\frac{\tan 30° + \tan 40° + \tan 50° + \tan 60°}{\cos 20°} = \frac{4}{\sqrt{3}}$..

B. $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

C. $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

D. $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$.

Câu 255. Chọn kết quả **sai** trong 4 kết quả rút gọn các biểu thức sau:

A. $\frac{2\left(\sin 2x + 2\cos^2 x - 1\right)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x} = \frac{1}{\cos x}$.

B. $\tan x + \tan 3x + \cot x + \cot 3x = \frac{8\cos^2 2x}{\sin 6x}$.

C. $\frac{\cot^2 x - \cot^2 3x}{1 + \cot^2 3x} = 8\cos 2x.\cos^2 x$.

D. $\frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y.\cos z} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z.\cos x} = 0$.

Câu 256. Hãy chỉ ra hệ thức biến đổi **sai**:

A. Nếu $a + b = c$ thì $\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$.

B. $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = 4\cos^2\frac{x-y}{2}$.

C. $\sin x + \cos x - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$.

D. $\cos 36^o - \sin 18^o = \frac{1}{2}$.

Câu 257. Nếu $\sin\alpha + \sin\beta = a, \cos\alpha + \cos\beta = b\left(|a| \le \sqrt{2}, |b| \le \sqrt{2}\right)$ thì biểu thức $\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}$ có giá trị bằng

A. $\frac{2a}{a^2 + b^2 + b}$.

B. $\frac{2b}{a^2 + b^2 + a}$.

C. $\frac{4a}{a^2 + b^2 + 2b}$.

D. $\frac{4b}{a^2 + b^2 + 2a}$.

Câu 258. Trong bốn kết quả thu gọn sau, có một kết quả **sai**. Đó là kết quả nào?

A. $2\cot 2A.\cot A=\cot^2 A-1$.

B. $\cot\frac{\pi}{7}.\cot\frac{2\pi}{7}+\cot\frac{2\pi}{7}.\cot\frac{4\pi}{7}+\cot\frac{4\pi}{7}.\cot\frac{\pi}{7}=1$.

C. $\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin^2\frac{4\pi}{7}}+\frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}}=4$.

D. $\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{4\pi}{7}=\tan\frac{\pi}{7}.\tan\frac{2\pi}{7}.\tan\frac{4\pi}{7}$.

Câu 259. Nếu $a=2b$ và $a+b+c=\pi$ thì.... Hãy chọn kết quả **đúng**.

A. $\sin b(\sin b+\sin c)=\cos 2a$.

B. $\sin b(\sin b+\sin c)=\sin 2a$.

C. $\sin b(\sin b+\sin c)=\sin^2 a$.

D. $\sin b(\sin b+\sin c)=\cos^2 a$.

Câu 260. A, B, C là 3 góc của một tam giác. Trong 4 hệ thức sau có 1 hệ thức sai. Đó là hệ thức nào ?

A. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

B. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

C. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$.

D. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=4\cos A.\cos B.\cos C$.

Câu 261. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức **sai**:

A. $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$.

B. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1+2\cos A\cos B\cos C$.

C. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(\frac{\pi-A}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi-B}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$.

D. $\frac{\cos A.\cos C+\cos(A+B).\cos(B+C)}{\cos A.\sin C-\sin(A+B).\cos(B+C)}=\cot C$.

Câu 262. Tính $\sin 105°$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **B.** $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 263. Tính $\cos 105°$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **B.** $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 264. Tính $\tan 105°$ ta được:

A. $-(2+\sqrt{3})$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $-(2-\sqrt{3})$.

Câu 265. Tính $\sin 165°$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **B.** $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 266. Tính $\cos 165°$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **B.** $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 267. Tính $\tan 165°$ ta được:

A. $-2-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $-2+\sqrt{3}$.

Câu 268. Tính $M=\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ ta được M là

A. $M=\dfrac{1}{16}\cos 10^\circ$. **B.** $M=\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}\cos 10^\circ$. **D.** $M=\dfrac{1}{8}\cos 10^\circ$.

Câu 269. Gọi $M=\cos^4 15^\circ-\sin^4 15^\circ$ thì:

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}$. **D.** $M=0$.

Câu 270. Gọi $M=\cos^6 15^\circ-\sin^6 15^\circ$ thì:

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{1}{2}$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}$. **D.** $M=\dfrac{15\sqrt{3}}{32}$.

Câu 271. Gọi $M=\left(\cos^4 15^\circ-\sin^4 15^\circ\right)-\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)$ thì:

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{1}{2}$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}$. **D.** $M=0$.

Câu 272. Gọi $M=\left(\cos^4 15^\circ-\sin^4 15^\circ\right)+\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)$ thì:

A. $M=\sqrt{3}$. **B.** $M=\dfrac{1}{2}$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}$. **D.** $M=0$.

Câu 273. Gọi $M=1+\sin 2x+\cos 2x$ thì:

A. $M=2\cos x.\left(\sin x-\cos x\right)$. **B.** $M=\cos x.\left(\sin x+\cos x\right)$.

C. $M=\sqrt{2}\cos x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $M=2\sqrt{2}\cos x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 274. Gọi $M=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$ thì:

A. $M=2\cos 2x\left(\cos x+1\right)$. **B.** $M=4\cos 2x.\left(\dfrac{1}{2}+\cos x\right)$.

C. $M=2\cos 2x.\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right).\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **D.** $M=4\cos 2x.\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right).\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Câu 275. Gọi $M=\tan x-\tan y$ thì:

A. $M=\tan\left(x-y\right)$. **B.** $M=\dfrac{\sin\left(x+y\right)}{\cos x.\cos y}$. **C.** $M=\dfrac{\sin\left(x-y\right)}{\cos x.\cos y}$. **D.** $M=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$.

Câu 276. Gọi $M=\tan x+\tan y$ thì:

A. $M=\tan x+\tan y$. **B.** $M=\dfrac{\sin\left(x+y\right)}{\cos x.\cos y}$. **C.** $M=\dfrac{\sin\left(x-y\right)}{\cos x.\cos y}$. **D.** $M=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$.

Câu 277. Gọi $M=\cot x-\cot y$ thì:

A. $M=\cot\left(x-y\right)$. **B.** $M=\dfrac{\sin\left(x+y\right)}{\sin x.\text{siny}}$. **C.** $M=\dfrac{\sin\left(y-x\right)}{\sin x.\sin y}$. **D.** $M=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$.

Câu 278. Gọi $M=\cot x+\cot y$ thì:

A. $M=\cot\left(x-y\right)$. **B.** $M=\dfrac{\sin\left(x+y\right)}{\sin x.\text{siny}}$. **C.** $M=\dfrac{\sin\left(y-x\right)}{\sin x.\text{siny}}$. **D.** $M=\dfrac{\cot y.\cot x-1}{\cot y-\cot x}$.

Câu 279. Gọi $M=\dfrac{1}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}+\dfrac{1}{\cos 20^\circ.\cos 30^\circ}+\dfrac{1}{\cos 30^\circ.\cos 40^\circ}$ thì:

A. $M=\dfrac{1}{\sin 20^\circ.\cos 40^\circ}$.

B. $M=\tan 40^\circ-\tan 20^\circ$.

C. $M=\dfrac{1}{2\cos 10^\circ.\cos 40^\circ}$.

D. M có kết quả khác với các kết quả nêu trên.

Câu 280. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC thì:

A. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A.\cos B.\cos C$.

B. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=-4\cos A.\cos B.\cos C$.

C. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$.

D. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$.

Câu 281. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC (không phải tam giác vuông) thì:

A. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}$.

B. $\tan A+\tan B+\tan C=-\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}$.

C. $\tan A+\tan B+\tan C=-\tan A.\tan B.\tan C$.

D. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.

Câu 282. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC (không phải tam giác vuông) thì:

A. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$.

B. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=-\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$.

C. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot A.\cot B.\cot C$.

D. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=-\cot A.\cot B.\cot C$.

Câu 283. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC thì $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}.\tan\dfrac{A}{2}=$.

A. 1.

B. -1.

C. $\left(\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}\right)^2$.

D. Một kết quả khác các kết quả đã nêu trên.

Câu 284. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC (không là tam giác vuông) thì $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=$.

A. 1.

B. -1.

C. $\left(\cot A.\cot B.\cot C\right)^2$.

D. Một kết quả khác các kết quả đã nêu trên.

Câu 285. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC thì:

A. $\cos A+\cos B+\cos C=1-4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.

B. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.

C. $\cos A+\cos B+\cos C=1-4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$.

D. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$.

Câu 286. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC thì.

A. $\sin 2A+\sin 2B \le 2\sin C$.
B. $\sin 2A+\sin 2B \ge 2\sin C$.
C. $\sin 2A+\sin 2B = 2\sin C$.
D. $\sin 2A+\sin 2B > 2\sin C$.

Câu 287. Gọi $M=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$ thì:

A. $M=0$.
B. $M=-\dfrac{1}{2}$.
C. $M=1$.
D. $M=2$.

Câu 288. Gọi $M=\cos(a+b).\cos(a-b)-\sin(a+b).\sin(a-b)$ thì :

A. $M=1-2\cos^2 a$.
B. $M=1-2\sin^2 a$.
C. $M=\cos 4a$.
D. $M=\sin 4a$.

Câu 289. Gọi $M=\cos(a+b).\cos(a-b)+\sin(a+b).\sin(a-b)$ thì :

A. $M=1-2\sin^2 b$.
B. $M=1+2\sin^2 b$.
C. $M=\cos 4b$.
D. $M=\sin 4b$.

Câu 290. Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ\cos 4^\circ-\cos 36^\circ\cos 86^\circ$, ta được:

A. $\cos 50^\circ$.
B. $\cos 58^\circ$.
C. $\sin 50^\circ$.
D. $\sin 58^\circ$.

Câu 291. Rút gọn biểu thức $\sin(a-17^\circ).\cos(a+13^\circ)-\sin(a+13^\circ).\cos(a-17^\circ)$, ta được

A. $\sin 2a$.
B. $\cos 2a$.
C. $-\dfrac{1}{2}$.
D. $\dfrac{1}{2}$.

Câu 292. Rút gọn biểu thức $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ta được

A. $\sqrt{2}\sin x$.
B. $-\sqrt{2}\sin x$.
C. $\sqrt{2}\cos x$.
D. $-\sqrt{2}\cos x$.

Câu 293. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hệ thức nào sau đây **sai?**

A. $\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$.
B. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.
C. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A.\cot B.\cot C$.
D. $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}.\tan\dfrac{A}{2}=1$.

Câu 294. Cho biểu thức $A=\sin^2(a+b)-\sin^2 a-\sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng

A. $A=2\cos a.\sin b.\sin(a+b)$.
B. $A=2\sin a.\cos b.\cos(a+b)$.
C. $A=2\cos a.\cos b.\cos(a+b)$.
D. $A=2\sin a.\sin b.\cos(a+b)$.

Câu 295. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1+\cos A.\cos B.\cos C$.
B. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos A.\cos B.\cos C$.
C. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1+2\cos A.\cos B.\cos C$.
D. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A.\cos B.\cos C$.

Câu 296. Cho A, B, C là ba là các góc nhọn và $\tan A=\dfrac{1}{2}$, $\tan B=\dfrac{1}{5}$, $\tan C=\dfrac{1}{8}$. Tổng $A+B+C$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{6}$.
B. $\dfrac{\pi}{5}$.
C. $\dfrac{\pi}{4}$.
D. $\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 297. Biết $\sin\beta=\frac{4}{5}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ và $\alpha\neq k\pi$. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)-\dfrac{4\cos(\alpha+\beta)}{\sqrt{3}}}{\sin\alpha}$ không phụ thuộc vào α và bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 298. Giá trị của biểu thức $\cos\frac{37\pi}{12}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **C.** $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Câu 299. Cho hai góc nhọn a và b với $\tan a=\frac{1}{7}$ và $\tan b=\frac{3}{4}$. Tính $a+b$

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 300. Cho $\cot a=15$, giá trị $\sin 2a$ bằng

A. $\frac{11}{113}$ **B.** $\frac{13}{113}$ **C.** $\frac{15}{113}$ **D.** $\frac{17}{113}$

Câu 301. Cho hai góc nhọn a và b với $\sin a=\frac{1}{3},\sin b=\frac{1}{2}$. Giá trị của $\sin 2(a+b)$ là

A. $\frac{2\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ **C.** $\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$ **D.** $\frac{5\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$

Câu 302. Nếu $\tan\frac{\beta}{2}=4\tan\frac{\alpha}{2}$ thì $\tan\frac{\beta-\alpha}{2}$ bằng

A. $\frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$ **B.** $\frac{3\sin\alpha}{5+3\cos\alpha}$ **C.** $\frac{3\cos\alpha}{5-3\cos\alpha}$ **D.** $\frac{3\cos\alpha}{5+3\cos\alpha}$

Câu 303. Biểu thức $A=\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}$ có kết quả rút gọn là

A. $\frac{\cos(4\alpha+30°)}{\cos(4\alpha-30°)}$ **B.** $\frac{\cos(4\alpha-30°)}{\cos(4\alpha+30°)}$ **C.** $\frac{\sin(4\alpha+30°)}{\sin(4\alpha-30°)}$ **D.** $\frac{\sin(4\alpha-30°)}{\sin(4\alpha+30°)}$

Câu 304. Biểu thức $A=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ không phụ thuộc x và bằng

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 305. Kết quả nào sau đây **sai** ?

A. $\sin 33°+\cos 60°=\cos 3°$

B. $\frac{\sin 9°}{\sin 48°}=\frac{\sin 12°}{\sin 81°}$

C. $\cos 20°+2\sin^2 55°=1+\sqrt{2}\sin 65°$

D. $\frac{1}{\cos 290°}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250°}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 306. Giá trị đúng của $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Câu 307. Tổng $A=\tan 9^\circ+\cot 9^\circ+\tan 15^\circ+\cot 15^\circ-\tan 27^\circ-\cot 27^\circ$ bằng

A. 4 **B.** –4 **C.** 8 **D.** –8

Câu 308. Nếu $5\sin\alpha=3\sin(\alpha+2\beta)$ thì:

A. $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\beta$ **B.** $\tan(\alpha+\beta)=3\tan\beta$

C. $\tan(\alpha+\beta)=4\tan\beta$ **D.** $\tan(\alpha+\beta)=5\tan\beta$

Câu 309. Biết $\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}$ và $\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)>0$; $\sin\left(\frac{a}{2}-b\right)=\frac{3}{5}$ và $\cos\left(\frac{a}{2}-b\right)>0$. Giá trị $\cos(a+b)$ bằng

A. $\frac{24\sqrt{3}-7}{50}$ **B.** $\frac{7-24\sqrt{3}}{50}$ **C.** $\frac{22\sqrt{3}-7}{50}$ **D.** $\frac{7-22\sqrt{3}}{50}$

Câu 310. Cho $\cot\alpha=-3\sqrt{2}$ với $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Khi đó giá trị $\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}$ bằng

A. $2\sqrt{19}$. **B.** $-2\sqrt{19}$. **C.** $\sqrt{19-}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Câu 311. Cho $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Giá trị của $\tan 15^\circ$ bằng

A. $\sqrt{3}-2$. **B.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 312. Biểu thức rút gọn của $A=\frac{\tan^2 a-\sin^2 a}{\cot^2 a-\cos^2 a}$ bằng

A. $\tan^6\alpha$. **B.** $\cos^6\alpha$. **C.** $\tan^4\alpha$. **D.** $\sin^6\alpha$.

Câu 313. Giá trị của các hàm số lượng giác $\sin\frac{5\pi}{4};\sin\frac{5\pi}{3}$ lần lượt bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 314. Giá trị của $\cot 1485^\circ$ là

A. 1. **B.** –1. **C.** 0. **D.** Không xác định.

Câu 315. Cho $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Giá trị của $\cos\alpha$ là

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $-\frac{4}{5}$. **C.** $\pm\frac{4}{5}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 316. Cho $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ và $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Giá trị của biểu thức $E=\frac{\cot\alpha-2\tan\alpha}{\tan\alpha+3\cot\alpha}$ là

A. $\frac{2}{57}$. **B.** $-\frac{2}{57}$. **C.** $\frac{4}{57}$ **D.** $-\frac{4}{57}$.

Câu 317. Cho $\tan\alpha=2$. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ là

A. 5. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Câu 318. Rút gọn biểu thức $P=\cos(120°+x)+\cos(120°-x)-\cos x$ ta được kết quả là

A. 0. **B.** $-\cos x$.
C. $-2\cos x$. **D.** $\sin x-\cos x$.

Câu 319. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$. **B.** $\cos 2a=1-2\cos^2 a$.
C. $\cos 2a=1-2\sin^2 a$. **D.** $\cos 2a=2\cos^2 a-1$.

Câu 320. Cho $\cos a=\dfrac{3}{4};\sin a>0$ và $\sin b=\dfrac{3}{5};\cos b<0$. Giá trị của $\cos(a+b)$ là

A. $\dfrac{3}{5}\left(1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$. **B.** $-\dfrac{3}{5}\left(1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$. **C.** $\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$. **D.** $-\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

Câu 321. Cho $\sin a=\dfrac{3}{5};\cos a<0$ và $\cos b=\dfrac{3}{4};\sin b>0$. Giá trị của $\sin(a-b)$ là

A. $-\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}+\dfrac{9}{4}\right)$. **B.** $-\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}-\dfrac{9}{4}\right)$.
C. $\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}+\dfrac{9}{4}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}-\dfrac{9}{4}\right)$.

Câu 322. Cho hai góc nhọn a và b. Biết $\cos a=\dfrac{1}{3};\ \cos b=\dfrac{1}{4}$ Giá trị của $P=\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng

A. $\dfrac{-113}{144}$. **B.** $\dfrac{-115}{144}$. **C.** $\dfrac{-117}{144}$. **D.** $\dfrac{-119}{144}$.

Câu 323. Biểu thức $M=\cos(-53°).\sin(-337°)+\sin(307°).\sin(113°)$ có giá trị bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 324. Giá trị đúng của $\tan\dfrac{\pi}{24}+\tan\dfrac{7\pi}{24}$ bằng

A. $2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$. **B.** $2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$.
C. $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$. **D.** $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Câu 325. Biểu thức $A=\dfrac{1}{2\sin 10°}-2\sin 70°$ có giá trị đúng bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 326. Tích số $\cos 10°\cos 30°\cos 50°\cos 70°$ bằng

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{3}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 327. Tích số $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$ bằng

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 328. Biết $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ và $\cot\alpha,\cot\beta,\cot\gamma$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tích số $\cot\alpha.\cot\gamma$ bằng

A. 2. **B.** –2. **C.** 3. **D.** –3.

Câu 329. Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa $\cot x=\frac{3}{4},\cot y=\frac{1}{7}$. Tổng $x+y$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 330. Giá trị đúng của biểu thức $A=\frac{\tan 30^\circ+\tan 40^\circ+\tan 50^\circ+\tan 60^\circ}{\cos 20^\circ}$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{6}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$

Câu 331. Giá trị của biểu thức $A=\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}$ bằng

A. 14. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 10.

Câu 332. Xác định hệ thức sai trong các hệ thức sau:

A. $\cos 40^\circ+\tan\alpha.\sin 40^\circ=\frac{\cos(40^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$.

B. $\sin 15^\circ+\tan 30^\circ.\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\cos^2 x-2\cos a.\cos x.\cos(a+x)+\cos^2(a+x)=\sin^2 a.$

D. $\sin^2 x+2\sin(a-x).\sin x.\cos a+\sin^2(a-x)=\cos^2 a.$

Câu 333. Biểu thức $\frac{\sin x+\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x+\cos\frac{x}{2}}$ bằng

A. $\tan\frac{x}{2}$. **B.** $\cot x$. **C.** $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. **D.** $\sin x$.

B - BẢNG ĐÁP ÁN.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	A	A	A	D	D	B	D	D	D	D	D	D	A	D	D	C	C	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	D	D	D	A	D	D	B	D	B	D	D	A	C	D	C	B	B	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	A	D	C	A	B	D	D	D	B	A	B	B	A	B	D	B	B	D	D

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	A	D	A	D	A	A	A	B	C	C	D	A	B	A	C	D	D	C

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	C	D	A	B	D	C	D	C	B	C	D	C	A	C	C	D	B	C	C

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
C	B	B	D	B	D	B	C	D	A	B	C	C	C	B	C	C	B	A	C

121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	D	B	C	D	B	C	C	D	A	B	A	B	C	C	D	D	B	D	D

141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
C	B	C	C	B	C	B	D	A	C	D	B	D	A	C	A	B	C	D	A

161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
D	B	C	A	C	D	C	D	B	C	C	C	D	B	C	B	B	C	D	C

181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
C	B	A	C	B	D	D	B	B	A	C	B	B	D	B	C	A	C	D	B

201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
C	C	D	C	B	A	B	B	B	C	A	B	C	B	C	A	A	B	C	D

221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
A	B	A	C	D	C	D	B	C	A	D	C	C	B	C	D	B	C	C	D

241	242	243	2244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
B	A	B	D	C	C	C	A	B	A	C	B	D	A	A	B	C	C	C	D

261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
B	A	B	A	A	D	D	D	B	D	D	A	D	D	C	D	C	B	A	C

281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
D	A	A	A	B	A	B	B	A	B	C	B	C	D	D	C	B	C	B	C

301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
C	C	C	C	A	B	C	C	A	A	C	A	D	A	B	B	C	C	B	B

321	322	323	324	325	326	326	328	329	330	331	332	333							
C	D	A	A	A	C	A	C	B	D	A	D	A							

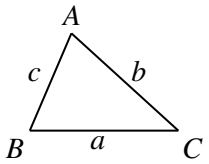
Chủ đề 7 TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

Vấn đề 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Qui ước kí hiệu dùng cho ΔABC *:*

- *Độ dài các cạnh:* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$
- *Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh* A, B, C *:* m_a, m_b, m_c.
- *Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh* A, B, C *:* h_a, h_b, h_c
- *Độ dài các đường phân giác vẽ từ các đỉnh* A, B, C *:* l_a, l_b, l_c
- *Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác:* R, r
- *Nửa chu vi tam giác:* p
- *Diện tích tam giác:* S



1. Định lí cosin:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$ *hay* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos B$ *hay* $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC\cos C$ *hay* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

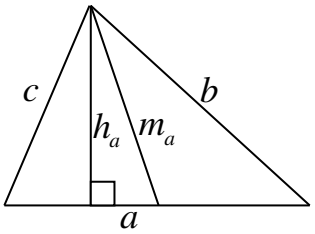
Hệ quả: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

2. Định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

3. Độ dài trung tuyến: $m_a = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}; m_b = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}; m_c = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

4. Diện tích tam giác:

$$S = \begin{cases} \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c \\ \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C \\ \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (Herông) \end{cases}$$



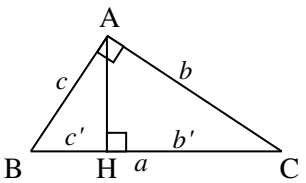
❖ **Một số kiến thức cần nhớ:**

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

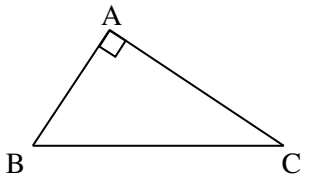
① $AB^2 = BH.BC$ ② $AC^2 = CH.BC$ ③ $AH^2 = HB.HC$

④ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ⑤ $AH.BC = AB.AC$

⑥ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ ⑦ $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$



6. Tỉ số lượng giác của góc nhọn:



① $\sin B = \dfrac{doi}{huyen} = \dfrac{AC}{BC}$ ② $\cos B = \dfrac{ke}{huyen} = \dfrac{AB}{BC}$

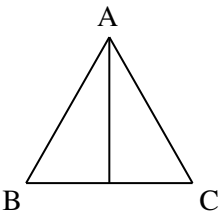
③ $\tan B = \dfrac{doi}{ke} = \dfrac{AC}{AB}$ ④ $\cot B = \dfrac{ke}{doi} = \dfrac{AB}{AC}$

✍ *B và C là hai góc phụ nhau:* $\sin B = \cos C$, $\cos B = \sin C$, $\tan B = \cot C$, $\cot B = \tan C$

7. Một số tam giác, tứ giác đặc biệt

a) Tam giác đều

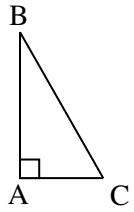
Cho ΔABC đều có độ dài cạnh là a, đường cao $AH = h$:



① $h = \dfrac{(canh)\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ② $S = \dfrac{(canh)^2\times\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Tam giác nửa đều

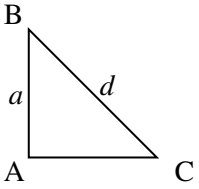
Cho ΔABC là nửa tam giác đều có độ dài cạnh là a:



① $AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ② $AC = \dfrac{a}{2}$ ③ $S = \dfrac{(canh)^2\times\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

c) Tam giác vuông cân

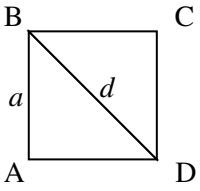
Cho ΔABC vuông cân tại A có độ dài cạnh bằng a, cạnh huyền d:



① $d = a\sqrt{2}$ ② $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ ③ $S = \dfrac{a^2}{2}$

d) Hình vuông

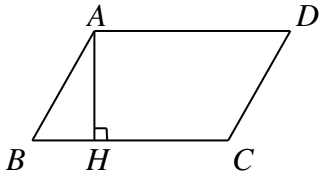
Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, đường chéo d:



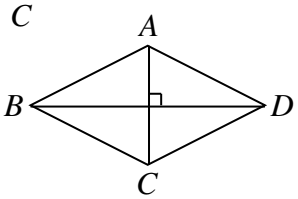
① $d = a\sqrt{2}$ ② $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ ③ $S = a^2$

e) Hình bình hành:

Diện tích: $S_{ABCD} = BC.AH = AB.AD.\sin A$



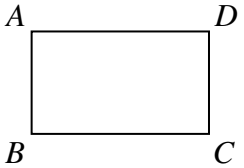
f) Hình thoi:



- *Diện tích:* $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = AB.AD.\sin A$
- *Đặc biệt: khi* $\widehat{ABC} = 60°$ *hoặc* $\widehat{BAC} = 120°$ *thì các tam giác ABC, ACD đều.*

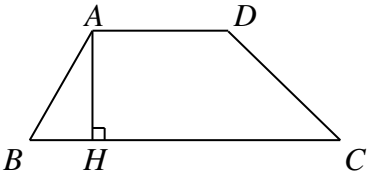
g) Hình chữ nhật:

$S_{ABCD} = AB.AD$



h) Hình thang:

$S_{ABCD} = \dfrac{(AD+BC).AH}{2}$



B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tính toán các đại lượng

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ✓ *Vận dụng các định lí sin, cossin, trung tuyến, diện tích.*
- ✓ *Chú ý các quan hệ trực tiếp và quan hệ trung gian giữa các đại lượng cho và đại lượng cần tính, các tam giác đặc biệt.*

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120°$, $AB=1$ và $AC=2$.

a) Tính BC. b) Trên tia CA kéo dài lấy điểm D sao cho $BD=2$. Tính AD.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $a=7$, $b=24$ và $c=23$. Tính góc A.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có các cạnh thỏa $a\left(a^2-b^2\right)=c\left(b^2-c^2\right)$. Tính góc B.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB=6$, $AC=8$ và $\widehat{A}=60°$.

a) Tính diện tích ΔABC.

b) Gọi I là tâm đương tròn ngoại tiếp ΔABC. Tính diện tích ΔIBC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

d) Tính độ dài đường phân giác trong của $\widehat{A}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=45°$, $\widehat{C}=75°$ và đường phân giác trong $AD=4$. Tính cạnh AC, BC, AB và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $m_b = 4$, $m_c = 2$ và $a = 3$. Tính độ dài các cạnh AB và AC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ΔABC, biết:

a) $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$. Tính $\cos A$ và góc A.

b) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, h_a và l_a.

c) $c = 3\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$. Tính S, h_a và R.

d) $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$. Tính m_a, S, h_a.

e) $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính các góc của tam giác, R, m_a.

f) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$. Tính $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, R, S.

g) $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Tính r.

h) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Tính S, h_b, R, r.

i) $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính S, h_a, r, m_a.

j) $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 45°$, $b = 4$. Tính a và c.

k) $\widehat{A} = 60°$, $a = 6$. Tính R.

l) $\widehat{A} = 60°$, $b = 20$, $c = 25$. Tính S, h_a, R, r.

m) $\widehat{A} = 60°$, $AB = 5\,\text{cm}$, $BC = 7\,\text{cm}$. Tính AC, R, r, h_a.

n) $\widehat{A} = 120°$, $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 10\,\text{cm}$. Tính BC, R, S.

o) $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = 0{,}6$. Tính S, R và r.

p) $AB = 3$, $AC = 4$, $S = 3\sqrt{3}$. Tính BC.

q) $\widehat{A} = 120°$, $BC = 7\,\text{cm}$, $AC = 5\,\text{cm}$. Tính AB, R, r, m_a, l_a.

r) $AC = 13\,\text{cm}$, $AB + BC = 22\,\text{cm}$, $\widehat{B} = 60°$. Tính AB, BC.

Bài 2. ΔABC có $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Lấy D đối xứng với B qua C. Tính AD.

Bài 3. Cho ΔABC. Biết $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$. Tính góc lớn nhất và đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

Bài 4. Cho ΔABC. Biết $AB + BC = 11\,\text{cm}$ ($AB > BC$), $\widehat{B} = 60°$. Bán kính đường tròn nội tiếp trong ΔABC là $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$. Tính độ dài đường cao AH.

Bài 5. Cho ΔABC có $AB=8$, $AC=9$, $BC=10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM=7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=4$, $BC=5$, $BD=7$. Tính AC.

Bài 7. Cho ΔABC có độ dài 3 trung tuyến bằng 15, 18, 27.

a) Tính diện tích của ΔABC. b) Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại A có $AB=5$, $AC=12$, đường cao AH.

a) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC.

b) Vẽ phân giác trong AD. Tính DB, DC, AD.

Bài 9. Cho ΔABC vuông tại A có $\widehat{B}=60°$, $\widehat{C}=45°$, $BC=a$.

a) Tính AB, AC. b) Chứng minh: $\cos 75°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Dạng 2. Chứng minh hệ thức

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ✓ *Vận dụng các phương pháp chung để chứng minh đẳng thức; biến đổi vế này sang vế kia, biến đổi tương đương hoặc so sánh với biểu thức trung gian, tỉ lệ thức, …*
- ✓ *Sử dụng các định cơ bản về tam giác, tam giác vuông: định lí Pitago, định lí đường trung tuyến trong tam giác vuông, …*

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}$.

b) Biết $a=4$, $b=5$, $c=6$. Tính giá trị của $\sin A-2\sin B+\sin C$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm M, N. C/m $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AN}{AC}$.

Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BD = m$ và $AC = n$. Cmr: $m^2 + n^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.

Ví dụ 10. Cho ΔABC. Chứng minh:

a) $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 10. Cho ΔABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

a) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

b) $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Bài 11. Cho ΔABC. Chứng minh:

a) $b^2-c^2=a\left(b.\cos C-c.\cos B\right)$.

b) $\left(b^2-c^2\right)\cos A=a\left(c.\cos C-b.\cos B\right)$.

Bài 12. Cho ΔABC có $b-c=\frac{a}{2}$. Chứng minh:

a) $\sin A=2\sin B-2\sin C$.

b) $\frac{1}{2h_a}=\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$.

Bài 13. Cho ΔABC có $b+c=2a$. Chứng minh:

a) $2\sin A=\sin B+\sin C$.

b) $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

Dạng 3. Dạng tam giác

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

✓ ΔABC *vuông tại* $A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A}=90^\circ\\ \cos A=0\\ a^2=b^2+c^2\end{array}\right.$

✓ ΔABC *cân tại* $A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=c\\ \widehat{B}=\widehat{C}\\ \sin B=\sin C\\ \cos B=\cos C\end{array}\right.$

✓ ΔABC *đều* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=c\\ \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}\\ a=b \text{ và } 1 \text{ góc}=60^\circ\end{array}\right.$

✓ ΔABC *nhọn* $\Leftrightarrow A$, B, C *đều nhọn*

> ✍ ***Chú ý**: Sử dụng phối hợp các hệ thức cơ bản về tam giác, biến đổi về tích số bằng 0, biến đổi tổng bình phương, các bất đẳng thức cơ bản, so sánh, …*

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 11. Cho ΔABC. Chứng minh các khẳng định sau:

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2<b^2+c^2$.

b) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2=b^2+c^2$.

c) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2>b^2+c^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Tam giác ABC thỏa hệ thức: $c^4-2\left(a^2+b^2\right)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$. Chứng minh rằng: ΔABC có $\widehat{C}=60°$ hoặc $\widehat{C}=120°$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13. Cho ΔABC thỏa mãn: $a^3=b^3+c^3$. Chứng minh ΔABC có 3 góc nhọn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Tam giác ABC thỏa hệ thức: $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)$. CMR: ΔABC cân tại A hay $\widehat{A}=120°$.

Bài 15. Tính góc A của ΔABC thỏa: $b\left(a^2-b^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)$.

Bài 16. Cho ΔABC có $a=2\sqrt{2}$, $b=2$ và $\widehat{C}=30°$. Chứng minh tam giác ABC cân. Tính diện tích và chiều cao h_a.

Bài 17. Cho $a=x^2+x+1$, $b=2x+1$, $c=x^2-1$. Định x để a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Với x vừa tìm được, chứng minh rằng tam giác có 1 góc bằng $120°$.

Bài 18. a) Cho ΔABC biết $a=7$, $b=8$, $c=5$. Chứng minh ΔABC có 1 góc $60°$.

b) Cho ΔABC biết $\widehat{A}=60°$, $a=10$, $r=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh ΔABC đều.

Bài 19. Tính các góc của ΔABC nếu có $\dfrac{\sin A}{1}-\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin C}{2}$.

Bài 20. Chứng minh rằng ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \\ a=2b\cos C \end{cases}$

Bài 21. Xét dạng ΔABC nếu có:

a) $\dfrac{1+\cos B}{\sin^2 B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ b) $\begin{cases} \dfrac{a^3+c^3-b^3}{a+c-b}=b^2 \\ \sin A.\sin C=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ c) $S=p\left(p-a\right)$

Dạng 4. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ✓ *Giải tam giác là tìm các các cạnh và các góc còn lại sau khi biết các giả thiết: cho ba cạnh, hai cạnh và một góc, một cạnh và hai góc. Vận dụng các định lí sin, cosin với chú ý* $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$ *để tính toán.*
- ✓ *Ứng dụng thực tế là chuyển các bài toán thực tế thành bài toán tam giác, cho biết yếu tố xác định rồi tìm đại lượng nào đó.*

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC. Biết $a=17,4$; $\widehat{B}=44°30'$, $\widehat{C}=64°$. Tính góc $\widehat{A}$ và các cạnh b, c.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC. Biết $a=6,3$; $b=6,3$; $\widehat{C}=54°$. Tính góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và cạnh c.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC. Biết $a=14$; $b=18$; $c=20$. Tính các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 17. Để lập đường dây cao thế từ vị trí A đến vị trí B, ta phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài $10\,\text{km}$ rồi nối từ vị trí C thẳng đến vị trí B dài $8\,\text{km}$. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là $75°$. Hỏi so với việc nối thẳng từ A đến người ta tốn thêm bao nhiêu km dây?

.....

.....

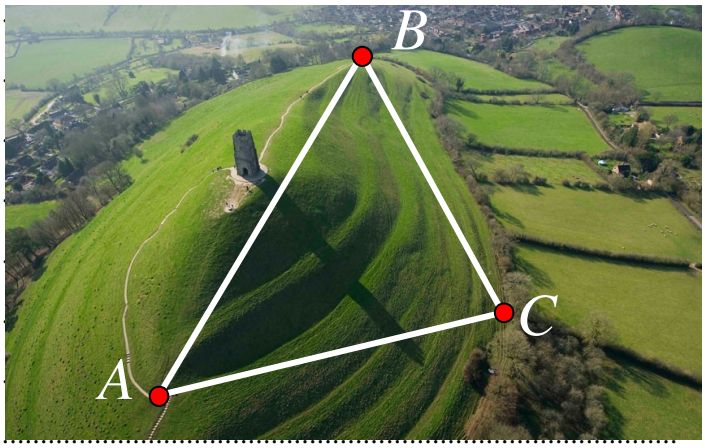
.....

.....

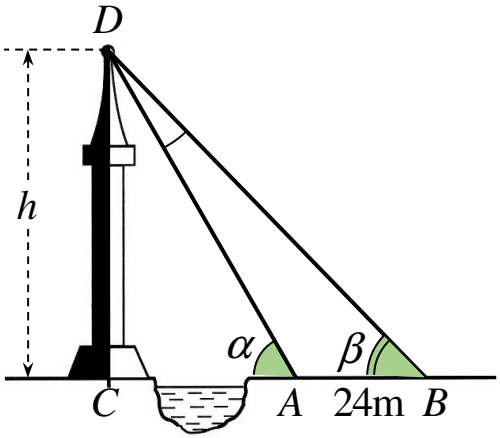
.....

.....

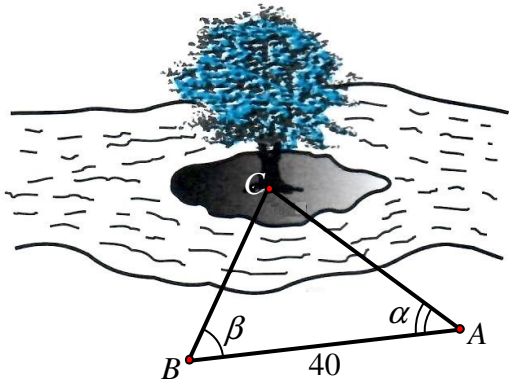
.....



Ví dụ 18. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo khoảng cách AB và các góc $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = \alpha = 63°$, $\widehat{CBD} = \beta = 48°$. Tính chiều cao của tháp.



Ví dụ 19. Để đo khoảng cách từ một điểm A đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Biết $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = \alpha = 45°$, $\widehat{CBA} = \beta = 70°$. Tính khoảng cách từ một điểm A đến gốc cây C.



Ví dụ 20. Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Por Klong Garai ở tỉnh Ninh Thuận, người ta laayshai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49°$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35°$. Tính chiều cao CD của tháp đó.

.....

.....

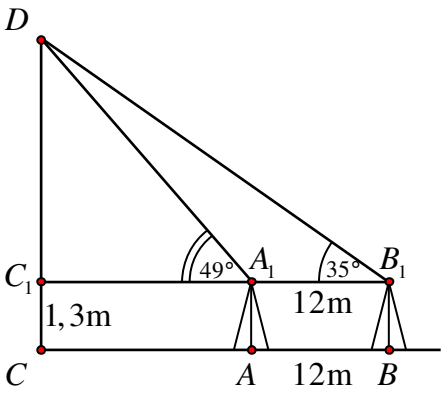
.....

.....

.....

.....

.....





.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 21. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc $60°$. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hait lí một giờ . Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí ?

.....

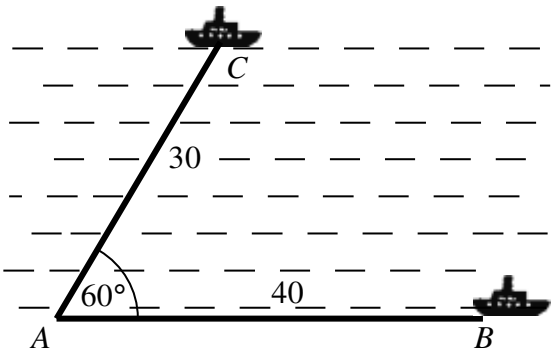
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c=14$; $\widehat{A}=60°$; $\widehat{B}=40°$.

b) $b=4,5$; $\widehat{A}=45°$; $\widehat{C}=75°$

c) $c=35$; $\widehat{A}=40°$; $\widehat{C}=120°$

d) $a=137,5$; $\widehat{B}=60°$; $\widehat{C}=40°$.

Bài 23. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a=6,3$; $b=6,3$; $\widehat{C}=54°$

b) $b=32$; $c=45$; $\widehat{A}=87°$

c) $a=7$; $b=23$; $\widehat{C}=130°$

d) $b=14$; $c=10$; $\widehat{A}=145°$

Bài 24. Giải tam giác ABC, biết:

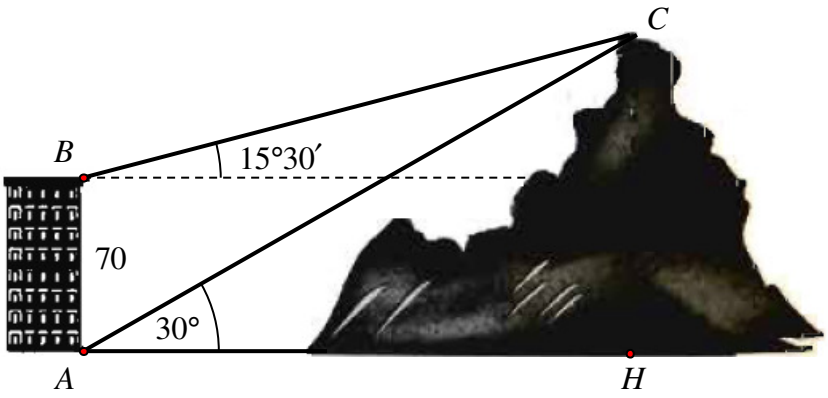
a) $a=14; b=18; c=20$

b) $a=6; b=7,3; c=4,8$

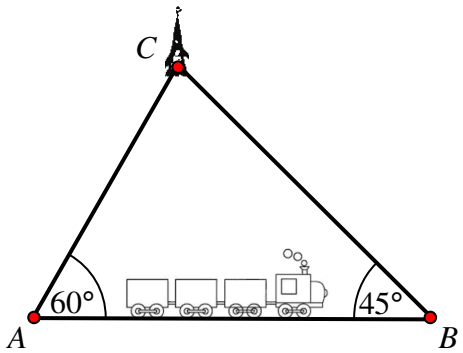
c) $a=4$; $b=5$; $c=7$

d) $a=2\sqrt{3}$; $b=2\sqrt{2}$; $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

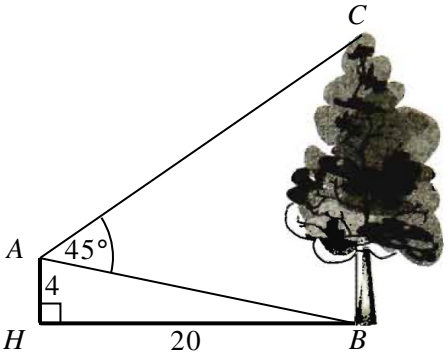
Bài 25. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng 70 m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc $30°$ phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15°30'$. Hỏi ngọn núi đó cao bao nhiêu mét so với mặt đất?



Bài 26. Một người ngồi trên tàu hỏa đi từ ga A đến ga B. Khi tàu đỗ ở ga A, qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C (*hình a*). Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi tàu một góc $60°$. Khi tàu đỗ ở ga B, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C, hướng nhìn từ người đó đến tháp tại với hướng ngược với hướng đi của tàu một góc $45°$. Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với ga B dài 8 km. Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu?



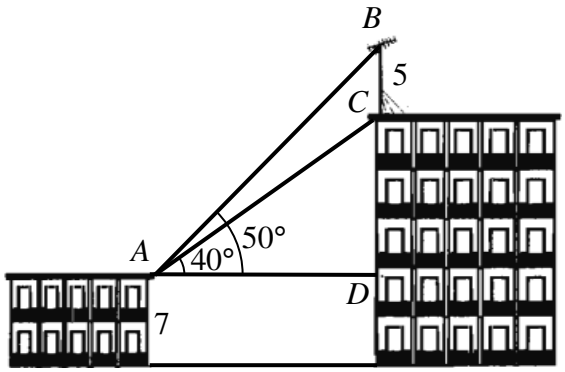
Hình a.



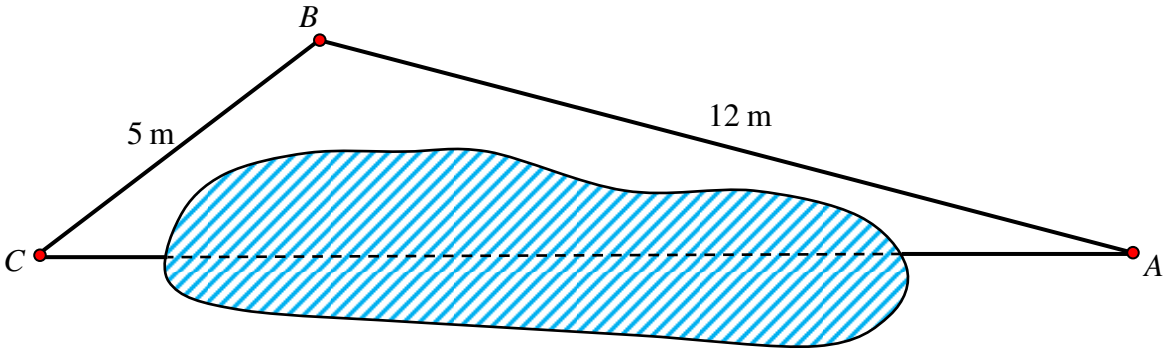
Hình b.

Bài 27. Từ vị trí A, người ta quan sát một cây cao (*hình b*). Biết $AH=4$ m, $HB=20$ m, $\widehat{BAC}=45°$. Tính chiều cao của cây.

Bài 28. Trên nóc tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc $50°$ và $40°$ so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà (*hình bên dưới*)



Bài 29. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy nên nugowif ta làm như sau: Xác định một điểm B có khoảng cách $AB = 12$ km và đo được góc $\widehat{ACB} = 37°$. Hãy tính khoảng cách AC biết rằng $BC = 5$ km.



Bài 30. Biết 2 lực cùng tác dụng vào một vật và tạo với nhau một góc $40°$. Cường độ của 2 lực đó bằng 3 N và 4 N. Tính cường độ của lực tổng hợp.

Bài 31. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300 m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35°$ và $\widehat{BQA} = 48°$. Tính chiều cao của tháp.

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3

Bài 32. Cho ΔABC, biết $b = 7$, $c = 9$, $\cos A = \frac{5}{13}$. Tính h_a, R.

Bài 33. Cho ΔABC, biết $a = 9$, $b = 10$, $c = 13$. Tính h_a, m_a, S, r.

Bài 34. Cho ΔABC có: $m_a = 5$, $m_b = 4$, $m_c = 3$.

a) Tính a, b, c.

b) Chứng minh rằng $\widehat{A} < 45°$.

Bài 35. Tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = d$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Bài 36. Cho ΔABC có $\sin A > \sin B > \sin C$. Chứng minh $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$.

Bài 37. Chứng minh trong mọi tam giác ABC:

a) $b = a\cos C + c\cos A$ b) $\sin B = \sin A\cos C + \cos A\sin C$ c) $\dfrac{\tan A}{\tan B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$

Bài 38. Chứng minh rằng: nếu G là trọng tâm ΔABC thì $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \dfrac{1}{18}\left(b^2 + c^2 - 5a^2\right)$.

Bài 39. Cho ΔABC với $AB = 2\,\text{cm}$, trung tuyến $BD = 1\,\text{cm}$, $\widehat{BDA} = 30°$. Tính AD, BC và diện tích ΔABC.

Bài 40. Cho ΔABC cân tại A với $\widehat{A} = 30°$, $AB = AC = 5\,\text{cm}$. Đường thẳng qua B và tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt AC tại D. Tính BD.

Bài 41. Cho ΔABC với $AB = 8\,\text{cm}$ và $\widehat{A} = 60°$ nội tiếp trong đường tròn (O) bán kính $R = 7\sqrt{3}/3$. Tính độ dài các cạnh BC, AC và diện tích ΔABC.

Bài 42. Cho ΔABC đều, N là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \dfrac{1}{3}AC$. Tính tỉ số các bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABN và ΔABC.

Bài 43. Cho ΔABC đều cạnh $4a$, lấy $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ sao cho $BD = x$ $(0 < x < 4a)$, $AE = a$, $AF = 3a$.

a) Tính EF. b) Định x để tam giác DEF vuông tại F.

Bài 44. Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy bằng 20, đường cao ứng với cạnh bên bằng 24. Tính các cạnh của tam giác cân đó.

Bài 45. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$.

a) Tính $\widehat{BAC}$. b) Tính độ dài các đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 46. Cho ΔABC cân tại A, có $\widehat{A} = \alpha$, $AB = a$.

a) Tính BC theo a và α. b) Gọi D là điểm trên BC, xác định bởi $BC = 3BD$. Tính AD.

Bài 47. Tam giác ABC có hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ hợp với nhau một góc $120°$. Tính các cạnh của tam giác đó.

Bài 48. Cho ΔABC cân tại A, $BC = a$, đường cao $AH = 2a$. M là trung điểm AB.

a) Tính độ dài đường trung tuyến CM. b) Tính khoảng cách từ A đến CM.

Bài 49. Cho $ABCD$ là hình thang có đáy lớn $AB = 3a$, đáy nhỏ CD và cạnh AD bằng a, $\widehat{A} = 60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh đáy. Tính BC và MN.

Bài 50. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O, M là trung điểm AB. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OMC.

Bài 51. Cho ΔABC vuông ở A, D là hình chiếu của A trên BC; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Chứng minh:

a) $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = \dfrac{DB}{DC}$ và $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3 = \dfrac{BE}{CF}$ b) $AD^3 = BC.EB.CF$

Bài 52. Cho ΔABC. Chứng minh:

a) $a^2 - c^2 = b\left(a\cos C - c\cos A\right)$ b) $b = r\left(\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)$ c) $\tan A = \dfrac{a\sin B}{c - a\cos B}$

Bài 53. Cho ΔABC. Chứng minh:

a) Nếu $m_a = m_b$ thì tam giác cân.

b) Nếu hai trung tuyến $AM \perp CN$ thì $\cot B = 2(\cot A + \cot C)$

Bài 54. Cho ΔABC có AM là trung tuyến. Biết $AM = AB$. Chứng minh:

a) $\sin A = 2\sin(B - A)$ b) $\cot C = 3\cot B$

Bài 55. Cho ΔABC có $a^4 + b^4 = c^4$. Chứng minh rằng: A, B, C nhọn và $2\sin^2 C = \tan A.\tan B$

Bài 56. Cho ΔABC có $m_a = c$. Chứng minh rằng:

a) $\tan B = 3\tan C$ b) $\sin A = 2\sin(B - C)$

Bài 57. Cho ΔABC có $bc = a^2$. Chứng minh:

a) $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. b) $h_b.h_c = h_a^2$.

Bài 58. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) $a = b\cos C + c\cos B$ b) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$

c) $h_a = 2R\sin B.\sin C$ d) $a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$.

Bài 59. Chứng minh trong ΔABC: $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

Bài 60. Chứng minh rằng:

a) Nếu ΔABC thỏa $\frac{\sin B}{\sin A} = 2\cos C$ thì ΔABC cân.

b) Nếu ΔABC thỏa $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ thì ΔABC cân.

c) Nếu ΔABC thỏa $\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{2bc}}$ thì ΔABC cân tại A.

d) Nếu ΔABC thỏa $\sin A = 2\sin B.\cos C$ thì ΔABC cân.

e) Nếu ΔABC thỏa $h_a = \sqrt{p(p-a)}$ thì ΔABC cân.

f) Nếu ΔABC thỏa $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$ thì một trong 3 góc của nó bằng $60°$.

g) Nếu 3 góc của ΔABC thỏa hệ thức $\sin A = 2\sin B\cos C$ thì ΔABC là tam giác cân.

h) Nếu ΔABC thỏa hệ thức $a + b + c = 2(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C)$ thì ΔABC đều.

Bài 61. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Bài 62. Cho ΔABC. Chứng minh:

a) $S = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$. b) $S = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Bài 63. Cho ΔABC có $AB = AC = a$, $\widehat{BAM} = \alpha$.

a) Tính BC theo a và α.

b) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh: $r = \frac{a\sin\alpha}{2\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$

Bài 64. Cho ΔABC vuông tại A, cạnh góc vuông là b, c. Lấy $M \in BC$ sao cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng: $AM = \dfrac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}$.

Bài 65. Cho ΔABC vuông tại A, AD là phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{AD}$.

Bài 66. Cho ΔABC vuông tại A, cạnh góc vuông là b, c. Chứng minh rằng:

a) Độ dài phân giác trong của góc A là $l_a = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. b) $r = \dfrac{1}{2}\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2}\right)$

Bài 67. Tam giác ABC và DEF cùng nội tiếp trong một đường tròn tâm. Chứng minh rằng: chu vi 2 tam giác bằng nhau khi và chỉ khi: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$

Bài 68. Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.

Bài 69. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

Bài 70. Gọi S là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Bài 71. Cho ΔABC có $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng $2\cot A = \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C} = \cot B + \cot C$.

Bài 72. Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD.

a) Chứng minh: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4\mathrm{IJ}^2$

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình bình hành.

Bài 73. Cho ΔABC có $\dfrac{abc}{a+b+c} = k$. Chứng minh: $R.r = \dfrac{k}{2}$.

Bài 74. Cho ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M. Chứng minh: $S_{\Delta KLM} = 2S_{\Delta ABC}.\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.

Bài 75. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = b$, 2 cạnh bên $AD = c$, $BC = d$ và hai đường chéo $AC = p$, $BD = q$. Chứng minh rằng: $p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.

Bài 76. Cho ΔABC có $a + c = 2b$. Chứng minh: $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = 2\cot\dfrac{B}{2}$

Bài 77. Tính diện tích ΔABC trong mỗi trường hợp sau:

a) $a = 5$, $b = 7$, $\widehat{C} = 135°$

b) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

c) $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 120°$, $c = 12$.

Bài 78. Cho ΔABC với $\widehat{A}=60°$, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{7}{\sqrt{3}}$ và bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\sqrt{3}$. Tính diện tích và chu vi ΔABC.

Bài 79. Cho ΔABC. Chứng minh:

a) $h_a h_b h_c = 8R^3 \sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C$.

b) $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}$

c) $S=\frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A\right)$

Bài 80. Các đường phân giác trong của ΔABC kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ở các điểm L, M, N. Chứng minh: $S_{MLN}=\frac{1}{2}p.R$.

Bài 81. Chứng minh rằng:

a) Nếu ΔABC thỏa $\sin A.\cos^3 B=\sin B.\cos^3 A$ thì ΔABC cân.

b) Nếu ΔABC thỏa $\frac{a}{m_a}=\frac{b}{m_b}=\frac{c}{m_c}$ thì ΔABC đều.

c) Nếu ΔABC thỏa $\sin A=2\sin B.\cos C$ thì ΔABC cân.

Bài 82. Cho ΔABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2+b^2+c^2<2\left(ab+bc+ca\right)$ b) $a^2+b^2-c^2<2ab$

c) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$ d) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$

e) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ f) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$

Bài 83. Cho ΔABC có $a<b<c$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{b}(a+c)<\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(a+c)$ b) $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}<\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}$

c) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)<0$ d) $(a+b+c)^2<9bc$

Bài 84. Cho ΔABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{3}{4}(a+b+c)<m_a+m_b+m_c<a+b+c$ b) $h_a+h_b+h_c\ge 9r$

c) $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ d) $a^4+b^4+c^4\ge 16S^2$

Bài 85. Cho ΔABC có góc $120°$ nếu đồng dạng với tam giác có độ dài 3 cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/2$.

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3

Câu 1. **[0H2-1]** Trong tam giác ABC, câu nào sau đây đúng?

A. $a^2=b^2+c^2+2bc.\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$.

C. $a^2=b^2+c^2+bc.\cos A$. **D.** $a^2=b^2+c^2-bc.\cos A$.

Câu 2. **[0H2-1]** Tam giác ABC có $A=120°$ thì câu nào sau đây đúng?

A. $a^2=b^2+c^2-3bc$. **B.** $a^2=b^2+c^2+bc$. **C.** $a^2=b^2+c^2+3bc$. **D.** $a^2=b^2+c^2-bc$.

Câu 3. **[0H2-1]** Tam giác ABC có $a=8, b=7, c=5$. Diện tích của tam giác là

A. $5\sqrt{3}$ **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $10\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Câu 4. **[0H2-1]** Tính diện tích tam giác ABC biết $A=60°, b=10, c=20$.

A. $50\sqrt{3}$. **B.** 50. **C.** $50\sqrt{2}$. **D.** $50\sqrt{5}$.

Câu 5. **[0H2-1]** Cho tam giác ABC có $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}+1$. Góc B là

A. $115°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $53°32'$.

Câu 6. **[0H2-1]** Cho tam giác ABC có $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}+1$. Tính góc A.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $68°$. **D.** $75°$.

Câu 7. **[0H2-1]** Tam giác ABC có $AB=12$, $AC=13$, $\widehat{A}=30°$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. 39. **B.** 78. **C.** $39\sqrt{3}$. **D.** $78\sqrt{3}$.

Câu 8. **[0H2-1]** Tính diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. **[0H2-1]** Tính diện tích tam giác có ba cạnh là $9, 10, 11$.

A. $50\sqrt{3}$. **B.** 44. **C.** $30\sqrt{2}$. **D.** 42.

Câu 10. **[0H2-1]** Tính diện tích tam giác ABC có ba cạnh là $13, 14, 15$.

A. 84. **B.** $\sqrt{6411}$. **C.** 168. **D.** $16\sqrt{24}$.

Câu 11. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC. Trung tuyến AM có độ dài:

A. $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **B.** $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **C.** $\sqrt{3a^2-2b^2-2c^2}$. **D.** $\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

Câu 12. **[0H2-2]** Nếu tam giác ABC có $a^2<b^2+c^2$ thì:

A. A là góc nhọn. **B.** A là góc tù. **C.** A là góc vuông. **D.** A là góc nhỏ nhất.

Câu 13. **[0H2-2]** Trong tam giác ABC, hệ thức nào sau đây sai?

A. $a=\frac{b.\sin A}{\sin B}$. **B.** $\sin C=\frac{c.\sin A}{a}$. **C.** $a=2R.\sin A$. **D.** $b=R.\tan B$.

Câu 14. **[0H2-2]** Tính góc C của tam giác ABC biết $a\neq b$ và $a\left(a^2-c^2\right)=b\left(b^2-c^2\right)$.

A. $C=150°$. **B.** $C=120°$. **C.** $C=60°$. **D.** $C=30°$.

Câu 15. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC, các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a=2h_b+h_c$ Tìm hệ thức giữa a, b, c.

A. $\frac{3}{a}=\frac{2}{b}-\frac{1}{c}$. **B.** $3a=2b+c$. **C.** $3a=2b-c$. **D.** $\frac{3}{a}=\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$.

Câu 16. **[0H2-2]** Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù.

B. Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$.

C. Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn.

D. Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông.

Câu 17. **[0H2-2]** Trong tam giác ABC, câu nào sâu đây đúng?

A. $m_a = \dfrac{b+c}{2}$. **B.** $m_a > \dfrac{b+c}{2}$. **C.** $m_a < \dfrac{b+c}{2}$. **D.** $m_a = b + c$.

Câu 18. **[0H2-2]** Trong tam giác ABC, nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì:

A. $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}$. **B.** $2\sin A = \sin B + \sin C$.

C. $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$. **D.** $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} - \dfrac{1}{\sin C}$.

Câu 19. **[0H2-2]** Trong tam giác ABC, nếu có $a^2 = b.c$ thì:

A. $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}$. **B.** $h_a^2 = h_b.h_c$. **C.** $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$. **D.** $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{2}{h_b} + \dfrac{2}{h_c}$.

Câu 20. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC có $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 21. **[0H2-2]** Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Cả I và II. **D.** Không có.

Câu 22. **[0H2-2]** Trong ΔABC, điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau là

A. $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$. **B.** $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$. **C.** $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$. **D.** $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Câu 23. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2. Giá trị $\sin A$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{9}$.

Câu 24. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 9$ cm. Giá trị $\cos A$ là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 25. **[0H2-2]** Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó tỉ số $\dfrac{R}{r}$ bằng

A. $1 + \sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 26. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $AC=12$ cm và $BC=15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là
A. 8 cm. **B.** 10 cm. **C.** 9 cm. **D.** 7,5 cm.

Câu 27. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng
A. $2S$. **B.** $3S$. **C.** $4S$. **D.** $6S$.

Câu 28. **[0H2-2]** Cho tam giác DEF có $DE=DF=10$ cm và $EF=12$ cm. Gọi I là trung điểm của cạnh EF. Đoạn thẳng DI có độ dài là
A. 6,5 cm. **B.** 7 cm. **C.** 8 cm. **D.** 4 cm.

Câu 29. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $\widehat{A}=60^{\circ}$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh BC?
A. $\sqrt{129}$. **B.** 7. **C.** 49. **D.** $\sqrt{69}$.

Câu 30. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $a=14$, $b=18$, $c=20$. Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất?
A. $\widehat{B}\approx 42°50'$. **B.** $\widehat{B}\approx 60°56'$. **C.** $\widehat{B}\approx 119^{\circ}04'$. **D.** $\widehat{B}\approx 90^{\circ}$.

Câu 31. **[0H2-2]** Nếu tam giác MNP có $MP=5$, $PN=8$ và $\widehat{MPN}=120°$ thì độ dài cạnh MN (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là
A. 11,4. **B.** 12,4. **C.** 7,0. **D.** 12,0.

Câu 32. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $BC=10$, $\widehat{A}=30°$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?
A. 5. **B.** 10. **C.** $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Câu 33. **[0H2-2]** Tam giác với ba cạnh là 5,12 và 13 có diện tích bằng bao nhiêu?
A. 30. **B.** $20\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{3}$. **D.** 20.

Câu 34. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?
A. $\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 35. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $\widehat{B}=60°$, $\widehat{C}=45°$, $AB=5$. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu?
A. $5\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$. **D.** 10.

Câu 36. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=2$ cm, $AC=1$ cm, $\widehat{A}=60^{\circ}$. Khi đó độ dài cạnh BC là
A. 1 cm. **B.** 2 cm. **C.** $\sqrt{3}$ cm. **D.** $\sqrt{5}$ cm.

Câu 37. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $a=5$ cm, $b=3$ cm, $c=5$ cm. Khi đó số đo của góc $\widehat{BAC}$ là
A. $\widehat{A}=45°$. **B.** $\widehat{A}=30°$. **C.** $\widehat{A}>60°$. **D.** $\widehat{A}=90°$.

Câu 38. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=8$ cm, $BC=10$ cm, $CA=6$ cm. Đường trung tuyến AM của tam giác đó có độ dài bằng
A. 4 cm. **B.** 5 cm. **C.** 6 cm. **D.** 7 cm.

Câu 39. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $a=\sqrt{3}$ cm, $b=\sqrt{2}$ cm, $c=1$ cm. Đường trung tuyến m_a có độ dài là

A. 1 cm. **B.** 1,5 cm. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** 2,5 cm.

Câu 40. **[0H2-2]** Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=AC=a$. Đường trung tuyến BM có độ dài là

A. $1,5a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 41. **[0H2-2]** Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Khi đó bán kính R bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 42. **[0H2-2]** Bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Câu 43. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu $b^2+c^2-a^2>0$ thì góc A nhọn. **B.** Nếu $b^2+c^2-a^2>0$ thì góc A tù.

C. Nếu $b^2+c^2-a^2<0$ thì góc A nhọn. **D.** Nếu $b^2+c^2-a^2<0$ thì góc A vuông.

Câu 44. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{A}=60°$, $AC=10$, $AB=6$. Tính cạnh BC

A. 76. **B.** $2\sqrt{19}$. **C.** 14. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 45. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{A}=120°$, $AC=10$, $AB=6$. Tính cạnh BC

A. 76. **B.** $2\sqrt{19}$. **C.** 14. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 46. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{B}=30°$, $BC=\sqrt{3}$, $AB=3$. Tính cạnh AC.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 1,5. **D.** 1,7.

Câu 47. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{C}=30°$, $AC=2$, $BC=\sqrt{3}$. Tính cạnh AB

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

Câu 48. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{C}=150°$, $BC=\sqrt{3}$, $AC=2$. Tính cạnh AB.

A. $\sqrt{13}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

Câu 49. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{B}=135°$, $BC=3$, $AB=\sqrt{2}$. Tính cạnh AC.

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** 2,25.

Câu 50. **[0H3-2]** Tam giác ABC có các góc $\widehat{B}=30°$, $\widehat{C}=45°$, $AB=3$. Tính cạnh AC.

.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 51. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{B}=60°$, $\widehat{C}=45°$, $AB=3$. Tính cạnh AC.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 52. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{A}=105°$, $\widehat{B}=45°$, $AC=10$. Tính cạnh AB.

A. $10\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{6}$. **C.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 53. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $\widehat{A}=75°$, $\widehat{B}=45°$, $AC=2$. Tính cạnh AB.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 54. **[0H3-2]** Tam giác ABC có tổng hai góc B và C bằng $135°$ và độ dài cạnh BC bằng a. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 55. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=5$, $AC=9$ và đường trung tuyến $AM=6$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $2\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{129}$. **D.** 22.

Câu 56. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=4$, $AC=10$ và đường trung tuyến $AM=6$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $2\sqrt{6}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{22}$. **D.** $2\sqrt{22}$.

Câu 57. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=4$, $AC=6$ và trung tuyến $BM=3$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 58. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 12, 13. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

A. $\frac{60}{13}$. **B.** $\frac{120}{13}$. **C.** $\frac{30}{13}$. **D.** 12.

Câu 59. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=1$, $AC=3$, $\widehat{A}=60°$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 60. **[0H2-2]** Tam giác ABC có góc B tù, $AB=3$, $AC=4$ và có diện tích bằng $3\sqrt{3}$. Góc A có số đo bằng bao nhiêu?

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Câu 61. **[0H2-2]** Tam giác ABC có $AB=10$, $AC=24$, diện tích bằng 120. Tính độ dài đường trung tuyến AM.

A. 13. **B.** $7\sqrt{3}$. **C.** 26. **D.** $11\sqrt{2}$.

Câu 62. **[0H2-2]** Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB=5$, $AC=8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 63. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 64. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là $1, 2, \sqrt{5}$. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $1,4$. **D.** $1,3$.

Câu 65. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là $5, 6, 7$. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 6.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 66. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là $7, 8, 9$. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 8.

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 67. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là $21, 22, 23$. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 22.

A. $\frac{4\sqrt{11}}{7}$. **B.** 27. **C.** $3\sqrt{10}$. **D.** $6\sqrt{10}$.

Câu 68. **[0H2-2]** Tam giác có ba cạnh $13, 14, 15$. Tính đường cao ứng với cạnh có độ dài 14.

A. 10. **B.** 12. **C.** 1. **D.** 15.

Câu 69. **[0H2-2]** Cho tam giác với ba cạnh $a=13$, $b=14$, $c=15$ Tính đường cao h_c.

A. $10\frac{1}{5}$. **B.** $11\frac{1}{5}$. **C.** $5\frac{3}{5}$. **D.** 12.

Câu 70. **[0H2-2]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là $5, 12, 13$.

A. 11. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $6,5$.

Câu 71. **[0H2-2]** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1.

A. $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.. **D.** $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 72. **[0H2-2]** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là $5, 12, 13$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 73. **[0H2-2]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có ba cạnh là $13, 14, 15$.

A. 8. **B.** $\frac{33}{4}$. **C.** $8\frac{1}{8}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 74. **[0H2-2]** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh là $13, 14, 15$.

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 75. **[0H2-2]** Cho tam giác ABC có diện tích S. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh BC và AC lên hai lần đồng thời giữ nguyên độ lớn của góc C thì diện tích của tam giác mới được tạo nên là

A. $2S$. **B.** $3S$. **C.** $4S$. **D.** $5S$.

Câu 76. **[0H2-3]** Cho tam giác ABC, xét các bất đẳng thức sau:

I. $|a-b|<c$. II. $a<b+c$. III. $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

Hỏi bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I, II. **B.** Chỉ II, III. **C.** Chỉ I, III. **D.** Cả I, II, III.

Câu 77. **[0H2-3]** Cho tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}$, $\widehat{EPF}$, $\widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP=q$, $PQ=m$, $PE=x$, $PF=y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

A. $ME=EF=FQ$. **B.** $ME^2=q^2+x^2-xq$.

C. $MF^2=q^2+y^2-yq$. **D.** $MQ^2=q^2+m^2-2qm$.

Câu 78. **[0H2-3]** Tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$ cm, $BC=10$ cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính r bằng

A. 1 cm. **B.** $\sqrt{2}$ cm. **C.** 2 cm. **D.** 3 cm.

Câu 79. **[0H2-3]** Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R=4$ cm có diện tích là

A. 13 cm^2. **B.** $13\sqrt{2}$ cm^2. **C.** $12\sqrt{3}$ cm^2. **D.** 15 cm^2.

Câu 80. **[0H2-3]** Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính r bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Câu 81. **[0H2-3]** Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện: $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. Khi đó số đo của góc C là

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 82. **[0H2-3]** Hình bình hành $ABCD$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=45°$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng

A. $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2. **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Câu 83. **[0H2-3]** Cho tam giác ABC có cạnh $BC=a$, cạnh $CA=b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

Câu 84. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $AC=3$, $BC=6$ và góc C nhọn. Tính cạnh AB.

A. $\sqrt{27}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 27. **D.** 8.

Câu 85. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $AC=3\sqrt{3}$, $AB=3$, $BC=6$. Tính số đo góc B.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $120°$.

Câu 86. **[0H3-2]** Tam giác ABC có $BC=5\sqrt{5}$, $AC=5\sqrt{2}$, $AB=5$. Tính $\widehat{A}$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $120°$.

Câu 87. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=4$ và $\tan A=2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC

A. $\sqrt{33}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 88. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=4$ và $\tan A=-2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** 7.

Câu 89. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$ và $\cot C=-2$. Tính cạnh AB.

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $\dfrac{9}{5}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 90. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$ và $\cot C=2$. Tính cạnh AB.

A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 91. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=7$, $AC=5$ và $\cos(B+C)=-\frac{1}{5}$. Tính BC.

A. $2\sqrt{15}$. **B.** $4\sqrt{22}$. **C.** $4\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{22}$.

Câu 92. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $\cos(A+B)=-\frac{1}{8}$, $AC=4$, $BC=5$. Tính cạnh AB.

A. $\sqrt{46}$. **B.** 11. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** 6.

Câu 93. **[0H3-3]** Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm cạnh BC, F là trung điểm cạnh AE. Tìm độ dài đoạn thẳng DF.

A. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 94. **[0H3-3]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{17}}{4}$. **D.** $-\frac{4}{25}$.

Câu 95. **[0H3-3]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\frac{7}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Câu 96. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=4$, $AC=5$, $BC=6$. Tính $\cos(B+C)$..

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $-0,125$. **D.** $0,75$.

Câu 97. **[0H3-3]** Tam giác ABC có các góc $\widehat{A}=105°$, $\widehat{B}=45°$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 98. **[0H3-3]** Tam giác ABC có các góc $\widehat{A}=75°$, $\widehat{B}=45°$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $1,2$.

Câu 99. **[0H3-3]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB=c$ và $\cos(A+B)=\frac{1}{3}$.

A. $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$. **D.** $\frac{3c}{2}$.

Câu 100. **[0H3-3]** Tìm chu vi tam giác ABC, biết rằng $AB=6$ và $2\sin A=3\sin B=4\sin C$.

A. 26. **B.** 13. **C.** $5\sqrt{26}$. **D.** $10\sqrt{6}$.

Câu 101. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $BC=10$ và $\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{3}$. Tìm chu vi của tam giác đó.

A. 12. **B.** 36. **C.** 24. **D.** 22.

Câu 102. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=9$, $BC=10$, $CA=11$. Gọi M là trung điểm BC và N là trung điểm AM. Tính độ dài BN.

A. 6. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{34}$.

Câu 103. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=5$, $BC=8$, $CA=6$. Gọi G là trọng tâm tam giá**C.** Độ dài đoạn thẳng CG bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{7}}{6}$. **D.** $\frac{13}{3}$.

Câu 104. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=5$, $BC=8$, $CA=6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng AG bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{58}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{58}}{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 105. **[0H3-3]** Tam giác ABC có $AB=5$, $BC=8$, $CA=6$. Gọi G là trọng tâm tam giá**C.** Độ dài đoạn thẳng BG bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{\sqrt{142}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{142}}{2}$.

Câu 106. **[0H2-3]** Hình bình hành có hai cạnh là 5 và 9, một đường chéo bằng 11. Tìm độ dài đường chéo còn lại.

A. $9{,}5$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{91}$. **D.** $3\sqrt{10}$.

Câu 107. **[0H2-3]** Hình bình hành có hai cạnh là 3 và 5, một đường chéo bằng 5. Tìm độ dài đường chéo còn lại.

A. $\sqrt{43}$. **B.** $2\sqrt{13}$. **C.** 8. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 108. **[0H2-3]** Hình bình hành có một cạnh là 5 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 5

A. 3. **B.** 1. **C.** $5\sqrt{6}$. **D.** 5.

Câu 109. **[0H2-3]** Hình bình hành có một cạnh là 4 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 4

A. $\sqrt{34}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{42}$. **D.** 5.

Câu 110. **[0H2-3]** Cho tam giác vuông, trong đó có một góc bằng trung bình cộng của hai góc còn lại. Cạnh lớn nhất của tam giác đó bằng a. Tính diện tích tam giác.

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{10}$.

Câu 111. **[0H2-3]** Tam giác có ba cạnh là 9, 10, 11. Tính đường cao lớn nhất của tam giác.

A. $\frac{60\sqrt{2}}{9}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{70}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 112. **[0H2-3]** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R, $AB=R$, $AC=R\sqrt{3}$. Tính góc $\widehat{A}$ nếu biết $\widehat{B}$ là góc tù.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 113. **[0H2-3]** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R, $AB=R$, $AC=R\sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{A}$ biết $\widehat{A}$ là góc tù.

A. $135°$. **B.** $105°$. **C.** $120°$ **D.** $150°$.

Câu 114. **[0H2-3]** Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Hãy tính giá trị $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$

A. $\dfrac{-a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{c^2+b^2}{2}$. **C.** $\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Câu 115. **[0H2-3]** Tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Tính $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

A. $-a^2$. **B.** $\dfrac{c^2+b^2}{2}$. **C.** $\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Câu 116. **[0H3-4]** Tam giác ABC vuông tại A có $AB=AC=a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM=\dfrac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{a\sqrt{17}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Câu 117. **[0H3-4]** Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A}=120°$ và $AB=AC=a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM=\dfrac{2BC}{5}$. Tính độ dài AM.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{11a}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 118. **[0H3-4]** Tam giác ABC có $BC=12$, $CA=9$, $AB=6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM=4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Câu 119. **[0H3-4]** Tam giác ABC có $AB=4$, $AC=6$, $\cos B=\dfrac{1}{8}$, $\cos C=\dfrac{3}{4}$. Tính cạnh BC.

A. 7. **B.** 5. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 2.

Câu 120. **[0H3-4]** Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC=b$, $AB=c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM}=30°$ Tính tỉ số $\dfrac{MB}{MC}$.

A. $\dfrac{b\sqrt{3}}{3c}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}c}{3b}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}c}{b}$. **D.** $\dfrac{b-c}{b+c}$.

Câu 121. **[0H3-4]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB=10$ và $\tan\left(A+B\right)=\dfrac{1}{3}$.

A. $\dfrac{5\sqrt{10}}{9}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Câu 122. **[0H3-4]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB=12$ và $\cot\left(A+B\right)=\dfrac{1}{3}$.

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 123. **[0H2-4]** Cho góc $\widehat{xOy}=30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB=2$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng

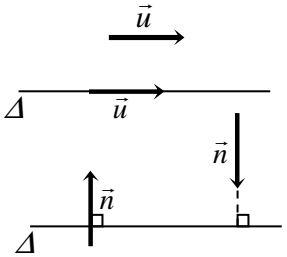
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Chủ đề 8 PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG OXY

1. ĐƯỜNG THẲNG

Tóm tắt lí thuyết

I. Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng:

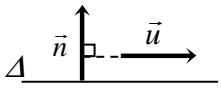


❖ **Vectơ chỉ phương (VTCP:** $\vec{u}=(u_1;u_2)$ là VTCP của Δ:

- ✓ $\vec{u}\neq\vec{0}$
- ✓ $\vec{u}$ có giá song song hoặc trùng với Δ
- ✓ $k.\vec{u}$ $(k\neq 0)$ cũng là một VTCP của Δ

❖ **Vectơ pháp tuyến (VTPT:** $\vec{n}=(n_1;n_2)$ là VTCP của Δ:

- ✓ $\vec{n}\neq\vec{0}$
- ✓ $\vec{n}$ có giá vuông góc với Δ
- ✓ $k.\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một VTPT của Δ



❖ **Quan hệ giữa VTCP và VTPT:**

- ✓ Nếu Δ có VTCP là $\vec{u}=(u_1;u_2)$ thì có VTPT là $\vec{n}=(-u_2;u_1)$ hoặc $\vec{n}=(u_2;-u_1)$
- ✓ Nếu Δ có VTPT là $\vec{n}=(A;B)$ thì có VTCP là $\vec{u}=(-B;A)$ hoặc $\vec{u}=(B;-A)$

II. Phương trình đường thẳng:

a) Phương trình tổng quát (PTTQ) $\boxed{\Delta: Ax+By+C=0}$ $(A^2+B^2\neq 0)$

Trong đó:
- VTPT $\vec{n}=(A;B)$
- VTCP $\vec{u}=(-B;A)$ hoặc $\vec{u}=(B;-A)$
- Hệ số góc $k=-\dfrac{A}{B}$
- $M(x_0;y_0)\in(\Delta)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+C=0$

b) Phương trình tham số (PTTS) của đường thẳng Δ qua $M(x_0;y_0)$ có VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2)$ có dạng: $\boxed{\Delta:\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0+u_2t\end{cases}}$ (với $u_1^2+u_2^2\neq 0, t\in\mathbb{R}$)

Trong đó:
- VTCP $\vec{u}=(u_1;u_2)$
- VTPT $\vec{n}=(-u_2;u_1)$; $\vec{n}=(u_2;-u_1)$
- Hệ số góc $k=\dfrac{u_2}{u_1}$
- $M(x;y)\in\Delta\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}:\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0+u_2t\end{cases}$ Hay $M(x_0+u_1t;y_0+u_2t)\in\Delta$

c) **Phương trình chính tắc** (PTCT) của đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$ có dạng:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}} \ (u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0)$$

✍ **Chú ý:** Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng Δ không có phương trình chính tắc.

III. Cách viết phương trình đường thẳng:

1. Phương trình tham số của Δ qua $M(x_M; y_M)$, VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_M + u_1 t \\ y = y_M + u_2 t \end{cases}} \ (\text{với } u_1^2 + u_2^2 \neq 0, t \in R)$$

2. Phương trình chính tắc của Δ qua $M(x_M; y_M)$, VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$:

$$\boxed{\frac{x-x_M}{u_1} = \frac{y-y_M}{u_2}} \qquad (u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0)$$

3. Phương trình tổng quát của Δ qua $M(x_M; y_M)$ có VTPT $\vec{n} = (A; B)$:

$$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0} \ (\text{với } A^2 + B^2 \neq 0)$$

4. Phương trình đường thẳng **qua hai điểm**:

✓ Hai điểm bất kì: $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$:

$$\boxed{\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}} \ (\text{với } x_B \neq x_A; y_B \neq y_A)$$

✓ Hai điểm có cùng hoành độ: $A(m; y_A)$ và $B(m; y_B)$:

$$\boxed{x = m \Leftrightarrow x - m = 0}$$

✓ Hai điểm có cùng tung độ: $A(x_A; k)$ và $B(x_B; k)$:

$$\boxed{y = k \Leftrightarrow y - k = 0}$$

✓ Hai điểm thuộc 2 trục tọa độ: $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ $(a, b \neq 0)$:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \ (\textbf{Phương trình đoạn chắn})$$

5. Phương trình đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k:

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \ (1)$$

✍ **Chú ý:**

✓ Phương trình (1) không chứa phương trình của đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc với Ox nên khi sử dụng ta cần để ý thêm đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc với Ox: $x = x_0$.

✓ Nếu chỉ biết hệ số góc k thì $\boxed{\Delta: y = kx + b} \Rightarrow kx - y + b = 0$.

✓ Nếu k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của Δ_1 và Δ_2 thì:

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

✓ Nếu Δ hợp với tia Ox một góc α thì $k = \tan\alpha$.

6. Phương trình Δ **qua** 1 **điểm** và **song song** hoặc **vuông góc** với một đường thẳng $d: Ax+By+C=0$, cho trước:

- $\Delta \,//\, d \Rightarrow \Delta: Ax+By+C'=0 \quad (C' \neq C)$
- $\Delta \perp d \Rightarrow \Delta: -Bx+Ay+m=0$ hay $\Delta: Bx-Ay+m=0$.

✍ **Chú ý:**

✓ Hai đường thẳng // với nhau thì có cùng VTCP và cùng VTPT.

✓ Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì VTCP của đường này là VTPT của đường kia và ngược lại.

7. Một số phương trình đặc biệt ($\vec{n}$: VTPT, $\vec{u}$: VTCP)

- Trục hoành (Ox: $\boxed{y=0}$ có $\vec{n}=(0;1)$ và $\vec{u}=(1;0)$
- Trục tung (Oy: $\boxed{x=0}$ có $\vec{n}=(1;0)$ và $\vec{u}=(0;1)$
- Song song Oy ($k\neq 0$): $\boxed{x=k}$ có $\vec{n}=(1;0)$ và $\vec{u}=(0;1)$
- Song song Ox ($m\neq 0$): $\boxed{y=m}$ có $\vec{n}=(0;1)$ và $\vec{u}=(1;0)$
- $\Delta // Ox$ hoặc $\Delta \equiv Ox$: $\boxed{by+c=0}$ có $\vec{n}=(0;1)$ và $\vec{u}=(1;0)$
- $\Delta // Oy$ hoặc $\Delta \equiv Oy$: $\boxed{ax+c=0}$ có $\vec{n}=(1;0)$ và $\vec{u}=(0;1)$
- Đi qua gốc tọa độ: $\boxed{ax+by=0}$ có $\vec{n}=(a;b)$ và $\vec{u}=(-b;a)$
- Phân giác thứ 1: $\boxed{x-y=0}$ có $\vec{n}=(1;-1)$ và $\vec{u}=(1;1)$
- Phân giác thứ 2: $\boxed{x+y=0}$ có $\vec{n}=(1;1)$ và $\vec{u}=(1;-1)$

IV. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Cho $d_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $d_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

1. Nếu cần tìm giao điểm của d_1 và d_2 thì:

Tọa độ giao điểm M (nếu có) của d_1 và d_2 là nghiệm hệ phương trình:

$$(I): \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ldots \\ y=\ldots \end{cases} \Rightarrow M(\ldots;\ldots)$$

(Lưu ý khi dùng máy tính để giải hệ này)

- d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất.
- d_1 // d_2 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I) vô nghiệm.
- d_1 trùng d_2 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I) có vô số nghiệm.

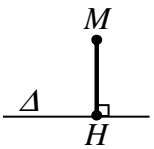
2. Nếu chỉ xét vị trí tương đối (A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 khác 0) thì:

- d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$
- d_1 // $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
- $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

V. Khoảng cách:

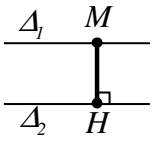
- Khoảng cách từ điểm $M(x_M;\, y_M)$ đến $\Delta: Ax+By+C=0$ là:

$$MH=d(M,\Delta)=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



✍ **Chú ý:** $\boxed{d(M,Ox)=|y_M|}$, $\boxed{d(M,Oy)=|x_M|}$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.



☞ Nếu Δ_1 và Δ_2 cắt hoặc trùng nhau thì $d(\Delta_1,\Delta_2)=0$.

☞ Nếu Δ_1 // Δ_2 thì: $\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=d(M,\Delta_2)=MH}$ với $M\in\Delta_1$.

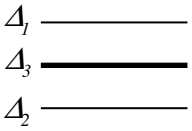
☺ **Chú ý:**

Cho hai đường thẳng song song Δ_1 và Δ_2.

Biết $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

Đường thẳng Δ_3 song song và cách đều Δ_1 và Δ_2 có dạng:

$$\boxed{Ax+By+\frac{C_1+C_2}{2}=0}$$



VI. Góc giữa hai đường thẳng:

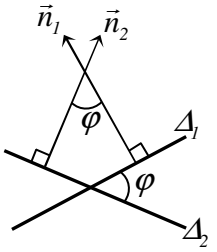
Cho $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ có $\vec{n}_1=(A_1;B_1)$

$\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ có $\vec{n}_2=(A_2;B_2)$

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

✍ **Chú ý:** $0°\le(\Delta_1,\Delta_2)\le 90°$.

VII. Phương trình phân giác:



- Cho $\Delta: Ax+By+C=0$ và $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_n)$.

Đặt $\Delta_M=Ax_M+By_M+C$ và $\Delta_N=Ax_N+By_N+C$, thì:

☞ Nếu $\Delta_M.\Delta_N>0\Rightarrow M$ và N nằm cùng phía với Δ.

☞ Nếu $\Delta_M.\Delta_N<0\Rightarrow M$ và N nằm khác phía với Δ.

- Cho $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$.

Phương trình hai phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 có dạng:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Hay $$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (d_1)$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (d_2)$$

Gọi $\vec{n}_1=(A_1;B_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2)$ lần lượt là 2 VTPT của Δ_1 và Δ_2

- Nếu $\vec{n}_1.\vec{n}_2>0$ thì: - d_1 là phân giác của góc tù,
  - d_2 là phân giác của góc nhọn.
- Nếu $\vec{n}_1.\vec{n}_2<0$ thì: - d_1 là phân giác của góc nhọn,
  - d_2 là phân giác của góc tù.

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Chuyển đổi PTTQ ↔ PTTS ↔ PTCT

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① **Bài toán 1: Từ PTTQ → PTTS:**
- Cách 1. Tìm PTTQ tìm 1 điểm và 1 VTCP ⇒ PTTS của d.
- Cách 2. Đặt $x=t$ ($y=t$) thay vào PTTQ tìm y (x) theo t ⇒ PTTS của d.

② **Bài toán 2: Từ PTTQ → PTCT:**
- Cách 1. Tìm PTTQ tìm 1 điểm và 1 VTCP ⇒ PTCT của d.
- Cách 2. Chuyển từ PTTQ → PTTS → PTCT

③ **Bài toán 3: Từ PTTS → PTTQ:**
- Cách 1. Tìm PTTS tìm 1 điểm và 1 VTPT ⇒ PTTQ của d.
- Cách 2. Từ PTTS khử t, thu gọn ⇒ PTTQ của d

④ **Bài toán 4: Từ PTTS → PTCT:**
- Cách 1. Tìm PTTS tìm 1 điểm và 1 VTCP ⇒ PTCT của d.
- Cách 2. Từ mỗi phương trình của PTTS rút t ⇒ PTCT của d.

⑤ **Bài toán 3: Từ PTCT → PTTQ:**
- Cách 1. Tìm PTCT tìm 1 điểm và 1 VTPT ⇒ PTTQ của d.
- Cách 2. Từ PTCT quy đồng khử mẫu, thu gọn ⇒ PTTQ của d

⑥ **Bài toán 4: Từ PTCT → PTTS:**
- Cách 1. Tìm PTCT tìm 1 điểm và 1 VTCP ⇒ PTTS của d.
- Cách 2. Đặt $\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=t$, rút x, y theo t ⇒ PTTS của d.

⑦ **Các trường hợp đặc biệt:**
- PTTS: $\begin{cases}x=x_0\\y=y_0+u_2t\end{cases}$ có PTTQ: $x=x_0\Leftrightarrow x-x_0=0$ ($\Delta\perp Ox$)
- PTTS: $\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0\end{cases}$ có PTTQ: $y=y_0\Leftrightarrow y-y_0=0$ ($\Delta\perp Oy$)

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1. Chuyển đổi các phương trình sau đây sang 2 dạng còn lại (nếu có):

① $d: x-2y+1=0$ ② $d:\begin{cases}x=2\\y=3-4t\end{cases}$ ③ $d:\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-1}$

④ $d: 3x-6=0$ ⑤ $d:\begin{cases}x=1-2t\\y=4t\end{cases}$ ⑥ $d:\frac{x+9}{3}=\frac{y-21}{10}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chuyển đổi các phương trình sau đây sang 2 dạng còn lại (nếu có):

① $d: 2x+3y+1=0$ ② $d: 4x+5y-6=0$ ③ $d: \begin{cases} x=4+2t \\ y=-7+3t \end{cases}$

④ $d: \begin{cases} x=5+t \\ y=3 \end{cases}$ ⑤ $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}$ ⑥ $d: \dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-3}{21}$

Bài 2. Viết phương trình tham số của các đường thẳng:

① $2x+3y-6=0$ ② $y=-4x+5$ ③ $x=3$

④ $4x+5y+6=0$ ⑤ $y=5$ ⑥ $2x-3y+3=0$

Bài 3. Cho đường thẳng d có phương trình $2x-3y+1=0$.

① Hãy tìm véctơ pháp tuyến và véctơ chỉ phương của d.

② Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của d.

Dạng 2. Vị trí tương đối: đường-đường, điểm-đường

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① *Vị trí tương đối của hai đường thẳng:*

Cho $d_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $d_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

a) Nếu cần tìm giao điểm của d_1 và d_2 thì:

Tọa độ giao điểm M (nếu có) của d_1 và d_2 là nghiệm hệ phương trình:

$$(I): \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ldots \\ y=\ldots \end{cases} \Rightarrow M(\ldots;\ldots)$$

(Lưu ý khi dùng máy tính để giải hệ này)

- d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất.
- d_1 // d_2 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I) vô nghiệm.
- d_1 trùng d_2 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I) có vô số nghiệm.

✎ Chú ý: Nếu đề cho d_1 và d_2 dưới dạng PTTS:

b) Nếu chỉ xét vị trí tương đối (A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 khác 0) thì:

- d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$
- $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
- d_1 trùng $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

c) Tìm m để d_1, d_2 và d_3 đồng quy:

- **Loại 1:** Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

✓ **Bước 1**: Tìm giao điểm A của d_1 và d_2

✓ **Bước 2**: Thế tọa độ A vào d_3 tìm m.

- **Loại 2**: Chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy tại một điểm.

✓ **Bước 1**: Tìm giao điểm A của d_1 và d_2

✓ **Bước 2**: Chứng minh $A \in d_3$.

② Vị trí tương đối của điểm với đường thẳng:

- $M(x_M; y_M) \in \Delta: Ax+By+C=0 \Leftrightarrow Ax_M+By_M+C=0$
- $M(x_M; y_M) \notin \Delta: Ax+By+C=0 \Leftrightarrow Ax_M+By_M+C\neq 0$

③ Vị trí tương đối của hai điểm đối với đường thẳng:

Cho $\Delta: Ax+By+C=0$ và $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_n)$.

Đặt $\Delta_M = Ax_M+By_{M+}C$ và $\Delta_N = Ax_N+By_{N+}C$, thì:

☞ Nếu $\Delta_M.\Delta_N > 0$ thì M và N nằm cùng phía với Δ.

☞ Nếu $\Delta_M.\Delta_N < 0$ thì M và N nằm khác phía với Δ.

B. VÍ DỤ MẪU

VD 2. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau thì tìm tọa độ giao điểm của chúng:

① $2x+3y+1=0$ và $4x+5y-6=0$ ② $\begin{cases} x=5+t \\ y=-3+2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x=4+2t' \\ y=-7+3t' \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 3. Tìm m để ba đường thẳng sau đồng qui: $d_1: 2x+y=4$; $d_2: 5x-2y+3=0$; $d_3: mx+3y=2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

① $d_1: 4x-10y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-3-2t \end{cases}$

② $d_1: 6x-3y+5=0$ và $d_2: \begin{cases} x=5+t \\ y=3+2t \end{cases}$

③ $d_1: 4x+5y-6=0$ và $d_2: \begin{cases} x=-6+5t \\ y=6-4t \end{cases}$

④ $d_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+3t' \\ y=-4-6t' \end{cases}$

⑤ $d_1: \begin{cases} x=5+t \\ y=-1 \end{cases}$ và $d_2: x+y-5=0$

⑥ $d_1: x=2$ và $d_2: x+2y-4=0$

⑦ $d_1: 4x-y+2=0$ và $d_2: -8x+2y+1=0$

Bài 5. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng:

① $d_1: mx+y+2=0$ và $d_1: (m-2)x+(m-6)y+m-1=0$

② $d_2: x+my+m+1=0$ và $d_2: (m-4)x+(2m-3)y+m-5=0$

Bài 6. Cho phương trình tổng quát của $d: 4x-y+5=0$

① Viết phương trình tham số của d.

② Tìm m để $\vec{u}=(m+3;m-3)$ là một VTCP của d.

Bài 7. Cho đường thẳng $d: x+(m-3)y+2m-7=0$.

① Tìm m để $d//\Delta_1$, với $\Delta_1: mx+4y+m=0$.

② Tìm m để $d \perp \Delta_2$, với $\Delta_1: 2mx-3y+8m=0$.

Bài 8. Cho đường thẳng $d: 3x-my+1=0$ và $M(2;\ 1)$, $N(-1;\ 2)$. Tìm m để d cắt đường thẳng MN tại A nằm giữa hai điểm M, N.

Bài 9. Cho hai đường thẳng $d: mx+(m-2)y+2=0$ và $d¢: (m+1)x+my+m-2=0$. Tùy theo giá trị của m, hãy xét vị trí tương đối của d và d'. Trong trường hợp chúng cắt nhau tại $A(x;\ y)$, tìm $m \in \mathbb{Z}$ để x, y nguyên.

Bài 10. Cho phương trình tham số của $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=9+4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

① Viết phương trình tổng quát của d.

② Tìm t để d đi qua $N(3;\ 5)$.

Bài 11. Cho hai đường thẳng: $d_1:\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2-2t'\end{cases}$

① Viết phương trình tổng quát của d_1 và d_2. ② Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2.

Bài 12. Tìm m để ba đường thẳng sau đồng qui:

① $d_1: y=2x-1$ $d_2: 3x+5y=8$ $d_3: (m+8)x-2my=3m$

② $d_1: y=-x+1$ $d_2: y=x-1$ $d_3: (m+1)x-(m-1)y=m+1$

③ $d_1: y=2x-m$ $d_2: y=-x+2m$ $d_3: mx-(m-1)y=2m-1$

④ $d_1: 5x+11y=8$ $d_2: 10x-7y=74$ $d_3: 4mx+(2m-1)y=m+2$

⑤ $d_1:\begin{cases}x=m+t\\y=2-t\end{cases}$ $d_2:\begin{cases}x=2+mt'\\y=m-2-t'\end{cases}$ d_3: Trục Ox

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng dạng cơ bản)

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Phương trình tổng quát: $d:\begin{cases}Qua\,M\left(x_0;y_0\right)\\VTPT\ \vec{n}_d=\left(A;B\right)\end{cases}\Rightarrow PTTQ\ d:\boxed{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0}$

② Phương trình tham số: $d:\begin{cases}Qua\,M\left(x_0;y_0\right)\\VTCP\,\vec{u}_d=\left(u_1;u_2\right)\end{cases}\Rightarrow PTTS\ d:\boxed{\begin{cases}x=x_0+u_1t\\y=y_0+u_2t\end{cases}}\ (t\in\mathbb{R})$

③ Phương trình chính tắc: $d:\begin{cases}Qua\,M\left(x_0;y_0\right)\\VTCP\,\vec{u}_d=\left(u_1;u_2\right)\end{cases}\Rightarrow PTCT\ d:\boxed{\dfrac{x-x_0}{u_1}=\dfrac{y-y_0}{u_2}}$

④ Phương trình đoạn chắn (PTĐC: $d:\begin{cases}Qua\,A\left(a;0\right)\\Qua\,B\left(0;b\right)\end{cases}\Rightarrow$ PTĐC: $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$

⑤ Qua 2 điểm $A\left(x_A;\,y_A\right)$ và $B\left(x_B;\,y_B\right)$:

VTCP: $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)\Rightarrow$ PTCT $d:\boxed{\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}}$

⑥ Phương trình qua 1 điểm và biết hệ số góc (HSG:

$d:\begin{cases}Qua\,M\left(x_0;y_0\right)\\HSG:k\end{cases}\Rightarrow d:\boxed{y-y_0=k\left(x-x_0\right)}$

Chú ý: d có hệ số góc $k\Rightarrow$ VTPT $d:\ \vec{n}=\left(k;-1\right)$, VTCP $d:\ \vec{u}=\left(1;k\right)$

⑦ Cùng phương với Ox $d:\begin{cases}Qua\,M\left(x_0;y_0\right)\\d//\equiv Ox\end{cases}\Rightarrow d:\boxed{y-y_0=0}$

⑧ Cùng phương với Oy $d:\begin{cases}Qua\,M\left(x_0;y_0\right)\\d//\equiv Oy\end{cases}\Rightarrow d:\boxed{x-x_0=0}$

⑨ Qua điểm $M\left(x_0;\,y_0\right)$ và song song với $\Delta:Ax+By+C=0$

✓ **Cách 1**: ◆ $\Delta:Ax+By+C=0$ có VTPT $\vec{n}_\Delta=\left(A;B\right)$

◆ Vì $d//\Delta\Rightarrow d$ có VTPT $\vec{n}_d=\vec{n}_\Delta=\left(A;B\right)$

◆ PTTQ $d:A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$

✓ **Cách 2**: ◆ Vì $d//\Delta:Ax+By+C=0\Rightarrow d:Ax+By+C'=0\ (C'\neq C)$

◆ d qua $M\left(x_0;\,y_0\right)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+C'=0\Rightarrow C'$

⑩ Qua điểm $M\left(x_0;\,y_0\right)$ và vuông góc với $\Delta:Ax+By+C=0$

✓ **Cách 1**: ◆ Δ có VTPT $\vec{n}_\Delta=\left(A;B\right)\Rightarrow$ VTCP $\vec{u}_\Delta=\left(B;-A\right)$

◆ Vì $d\perp D\Rightarrow d$ có VTPT $\vec{n}_d=\vec{u}_\Delta=\left(B;-A\right)$

◆ PTTQ $d:B\left(x-x_0\right)-A\left(y-y_0\right)=0$

✓ **Cách 2**: ◆ Vì $d\perp\Delta:Ax+By+C=0\Rightarrow d:Bx-Ay+C'=0$

◆ d qua $M\left(x_0;\,y_0\right)\Leftrightarrow Bx_0-Ay_0+C'=0\Rightarrow C'$

⑪ Các dạng đặc biệt khác: xem phần tóm tắt lí thuyết.

B. VÍ DỤ MẪU

VD 4. Viết PTTQ, PTTS, PTCT (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

① Δ qua $M(2;\ 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;\ 4)$.

② Δ qua $M(-2;\ 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;\ 1)$.

③ Δ qua $M(2;\ 4)$ và có hệ số góc $k=2$.

④ Δ qua $M(1;\ 5)$ và tạo với trục Ox một góc $30°$.

⑤ Δ qua hai điểm $A(3;\ 5)$, $B(6;\ 2)$.

⑥ Δ qua $M(5;\ 1)$ và song song với $d: x-3y=7=0$.

⑦ Δ qua $M(3;\ 7)$ và vuông góc với đường thẳng $d: 2x-y+1=0$.

VD 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(5;1)$, $B(3;-5)$, $C(1;-3)$.

① Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm A và B.

② Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua điểm C và vuông góc với đường thẳng AB.

③ Tìm phương trình tổng quát của đường trung trực đoạn BC.

VD 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(1;-5)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 13. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

① Δ qua $M(3;\ 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;\ 1)$.

② Δ qua $M(-2;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;\ 6)$.

③ Δ qua $M(-5;-8)$ và có hệ số góc $k=-3$.

④ Δ qua hai điểm $A(2;\ 1)$, $B(-4;\ 5)$.

Bài 14. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua điểm A và có véctơ chỉ phương $\vec{u}$:

① $A\equiv O(0;0)$, $\vec{u}=(1;-3)$ ② $A(-2;3)$, $\vec{u}=(5;-1)$ ③ $A(3;-1)$, $\vec{u}=(-2;-5)$

④ $A(2;\ 0)$, $\vec{u}=(3;\ 4)$ ⑤ $A(-1;2)$, $\vec{u}=(-4;6)$ ⑥ $A(1;1)$, $\vec{u}=(1;5)$

⑦ $A(2;-3)$, $\vec{u}=(4;-1)$ ⑧ $A(-3;\ 5)$, $\vec{u}=(0;\ -2)$ ⑨ $A(7;-3)$, $\vec{u}=(0;\ 3)$

Bài 15. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua điểm A và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}$:

① $A(0;\ 1)$, $\vec{n}=(1;\ 2)$ ② $A(-2;\ 3)$, $\vec{n}=(5;-1)$ ③ $A(3;\ 4)$, $\vec{n}=(4;-3)$

④ $A(-1;\ 2)$, $\vec{n}=(-2;\ 3)$ ⑤ $A(1;\ 3)$, $\vec{n}=(3;-4)$ ⑥ $A(3;\ -1)$, $\vec{n}=(-2;-5)$

⑦ $A(2;\ 0)$, $\vec{n}=(-1;-1)$ ⑧ $A(1;\ 2)$, $\vec{n}=(5;\ 0)$ ⑨ $A(7;\ -3)$, $\vec{n}=(0;\ 3)$

Bài 16. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua điểm A và có hệ số góc k:

① $A(2;\ 4)$, $k=2$ ② $A(-3;\ 1)$, $k=-2$ ③ $A(-5;\ -8)$, $k=-3$

④ $A(-3;\ 1)$, $k=3$ ⑤ $A(5;\ 2)$, $k=1$ ⑥ $A(-3;\ -5)$, $k=-1$

⑦ $A(2;\ -4)$, $k=0$ ⑧ $A(-4;\ 0)$, $k=-9$ ⑨ $A\equiv O(0;\ 0)$, $k=4$

Bài 17. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua hai điểm A và B:

① $A(2;\ 1)$, $B(-4;\ 5)$ ② $A(-2;\ 4)$, $B(1;\ 0)$ ③ $A(5;\ 3)$, $B(-2;-7)$

④ $A(3;\ 5)$, $B(3;\ 8)$ ⑤ $A(3;\ 5)$, $B(6;\ 2)$ ⑥ $A(4;\ 0)$, $B(3;\ 0)$

Bài 18. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d:

① $A(2;3)$, $d:4x-10y+1=0$ ② $A(5;\ 7)$, $d:x-2y+6=0$ ③ $A(-1;\ 2)$, $d:5x+1=0$

④ $A(-1;-7))$, $d:y-2=0$ ⑤ $A(2;\ 3)$, $d:\begin{cases}x=1-2t\\y=3+4t\end{cases}$ ⑥ $A(-5;\ 3)$, $d:\begin{cases}x=-1-3t\\y=-3+5t\end{cases}$

⑦ $A(0;\ 3)$, $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$ ⑧ $A(5;\ 2)$, $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}$ ⑨ $A(-1;\ 2)$, $d\equiv Ox$

Bài 19. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d:

① $A(4;-1)$, $d:3x-5y+2015=0$ ② $A(2;-3)$, $d:x+3y-11=0$

③ $A(4;5)$, $d:-x+5y-1=0$ ④ $A(5;5)$, $d\equiv Ox$

⑤ $A(-4;-1)$, $d\equiv Oy$ ⑥ $A(-7;15)$, $d:15x-3y+11=0$

⑦ $A(1;-4)$, $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+4}{2}$ ⑧ $A(4;-6)$, $d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-10}$

⑨ $A(1;0)$, $d:\begin{cases}x=2t\\y=1-4t\end{cases}$ ⑩ $A(0;7)$, $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=-t\end{cases}$

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có các đỉnh tương ứng sau. Hãy lập:

① $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$ ② $A(2;0)$, $B(2;-3)$, $C(0;-1)$

③ $A(-4;5)$, $B(-1;1)$, $C(6;-1)$ ④ $A(1;4)$, $B(3;-1)$, $C(6;2)$

⑤ $A(-1;-1)$, $B(1;9)$, $C(9;1)$ ⑥ $A(4;-1)$, $B(-3;2)$, $C(1;6)$

Bài 21. Cho ΔABC, biết phương trình ba cạnh của tam giác. Viết phương trình các đường cao AA', BB', CC' của tam giác đó, với:

① $AB:2x-3y-1=0$, $BC:x+3y+7=0$, $CA:5x-2y+1=0$

② $AB:2x+y+2=0$, $BC:4x+5y-8=0$, $CA:4x-y-8=0$

Bài 22. Viết phương trình các cạnh và các trung trực của ΔABC biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB lần lượt là các điểm M, N, P với:

① $M(1;1)$, $N(5;7)$, $P(-1;4)$ ② $M(2;1)$, $N(5;3)$, $P(3;-4)$

③ $M\left(2;\dfrac{-3}{2}\right)$, $N\left(1;\dfrac{-1}{2}\right)$, $P(1;-2)$ ④ $M\left(\dfrac{3}{2};2\right)$, $N\left(\dfrac{7}{2};3\right)$, $P(1;4)$

⑤ $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{-5}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{-7}{2}\right)$, $P(2;-4)$ ⑥ $M(-1;-1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$

Bài 23. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1:2x-y+5=0$, $d_2:3x+2y-3=0$ và thỏa một trong các điều kiện sau:

① Δ đi qua điểm $A(-3;-2)$

② Δ cùng phương với đường thẳng $d_3:x+y+9=0$

③ Δ vuông góc với đường thẳng $d_4:x+3y+1=0$.

Bài 24. Cho ba điểm A, B, C. Biết $A(1;4)$, $B(3;-1)$, $C(6;2)$

① Chứng minh rằng ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

② Viết phương trình các cạnh của ΔABC.

③ Viết phương trình đường cao AH và trung tuyến AM.

Bài 25. Cho ΔABC có trung điểm các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M, N, và P. Biết $M(-1;-1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$

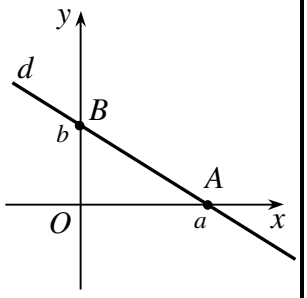
① Viết phương trình các đường trung trực của ba cạnh.

② Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Dạng 4. Phương trình đoạn chắn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Đường thẳng d cắt trục Ox tại $A(a;\ 0)$ và cắt trục Oy tại $B(0;\ b)$ có phương trình là: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow bx+ay-ab=0}$



② Khi đường thẳng d cắt Ox, Oy tại A, B có liên quan đến độ dài OA, OB, diện tích, chu vi tam giác OAB thì ta dùng dạng phương trình đoạn chắn.

③ **Chú ý:**

- Khoảng cách từ A đến trục Oy: $OA=|a|$
- Khoảng cách từ B đến trục Ox: $OB=|b|$
- $|a|=|b| \Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ hoặc $a=-b$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 7. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d qua $A(4;\ 0)$ và $B(0;\ 2)$.

.....

.....

VD 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(3;\ 4)$ và cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân tại O.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 9. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(9;\ 1)$ sao cho d cắt Ox tại $A(a;\ 0)$, cắt Oy tại $B(0;\ b)$, $(a,\ b>0)$ thỏa $OA+OB$ nhỏ nhất.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của Δ đi qua hai điểm A và B:

① $A(3;0)$, $B(0;-2)$ ② $A(3;0)$, $B(0;5)$

③ $A(0;4)$, $B(-3;0)$ ④ $A(-2;0)$, $B(0;-6)$

Bài 27. Viết phương trình của đường thẳng qua M và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn có độ dài bằng nhau, với:

① $M(-4;10)$ ② $M(2;1)$ ③ $M(-3;-2)$ ④ $M(2;-1)$

Dạng 5. Khoảng cách - Góc

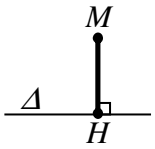
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Khoảng cách:

➢ Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là độ dài đoạn vuông góc hạ từ M đến Δ.

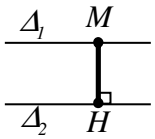
➢ Khoảng cách từ $M(x_M;y_M)$ đến $\Delta: Ax+By+C=0$ là:

$$\boxed{MH=d(M,\Delta)=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$



✍ **Chú ý:** $\boxed{d(M,Ox)=|y_M|}$, $\boxed{d(M,Oy)=|x_M|}$

➢ Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2



☞ Nếu Δ_1 và Δ_2 cắt hoặc trùng nhau thì $d(\Delta_1,\Delta_2)=0$.

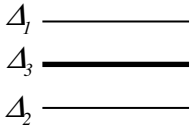
☞ Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ thì: $\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=d(M,\Delta_2)=MH}$ với $M\in(D_1)$

➢ Cho hai đường thẳng song song Δ_1 và Δ_2.

Biết $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ và $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

Đường thẳng Δ_3 song song và cách đều Δ_1 và Δ_2 có dạng:

$$\boxed{Ax+By+\frac{C_1+C_2}{2}=0}$$

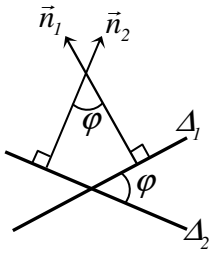


② Góc:

➢ Cho $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ có VTPT $\vec{n}_1=(A_1;B_1)$

$\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ có VTPT $\vec{n}_2=(A_2;B_2)$

$$\boxed{\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}$$



✍ **Chú ý:** $0°\le(\Delta_1,\Delta_2)\le 90°$.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 10. Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng d trong các trường hợp sau:

① $M(3;\ 1)$, $d:\begin{cases}x=1+4t\\y=2-3t\end{cases}$ ② $M(3;-1)$, $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}$

③ $M(3;\ 5)$, $d:4x+3y+1=0$ ④ $M(1;-2)$, $d:3x-4y-26=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 11. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng: $d_1:2x-3y-1=0$ và $d_2:6x-9y+19=0$

.....

.....

.....

.....

.....

VD 12. Tìm m để khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 2, biết:

$$d_1:\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\end{cases} \text{ và } d_2:\begin{cases}x=m+2t'\\y=2m-1-2t'\end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

VD 13. Lập phương trình đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:3x-2y+1=0$ và $d_2:3x-2y-7=0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 14. Lập phương trình đường thẳng d qua $H(2;\ 1)$ và d cách điểm $A(4;\ 5)$ một khoảng lớn nhất.

VD 15. Tính góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

① $d_1: 2x-y+5=0$ và $d_2: x-3y-1=0$ ② $d_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-7t \\ y=t \end{cases}$

VD 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+y-3=0$.

① Tính góc giữa hai đường thẳng d và d', biết d' có phương trình $x+3y+5=0$.

② Tìm m để đường thẳng $\Delta: mx+y+m-2=0$ tạo với đường thẳng d một góc $45°$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng:

① $d_1: Ax+By+C=0$ và $d_2: Ax+By+C'=0$

② $d_1: 48x+14y-21=0$ và $d_2: 24x+7y-28=0$

③ $d_1: 2x-3y-6=0$ và $d_2: 4x-6y+1=0$

Bài 29. Tìm các khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, với:

① $M(3;-2)$, $\Delta: 3x+4y-11=0$

② $M(4-5)$, $\Delta: 3x-4y+8=0$

③ $A(3;5)$, $\Delta: x+y+1=0$

④ $M(4;-5)$, $\Delta: \begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases}$

⑤ $M(3;5)$, $\Delta: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}$

⑥ $M(-3;7)$, $\Delta: x=0$

Bài 30. Tìm bán kính của đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với.

① $I(-2;-2)$, $\Delta: 5x+12y-10=0$

② $I(-5;3)$, $\Delta: 2x-y+3=0$

Bài 31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình hai cạnh là: $2x-3y+5=0$ và $3x+2y-7=0$, đỉnh $A(2;-3)$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

Bài 32. Tính diện tích hình vuông có bốn đỉnh nằm trên hai đường thẳng song song:

$$d_1: 3x-4y+6=0,\ d_2: 6x-8y-13=0$$

Bài 33. Cho ΔABC. Tính diện tích ΔABC, với:

① $A(-1;-1)$, $B(2;-4)$, $C(4;3)$

② $A(-2;14)$, $B(4;-2)$, $C(5;-4)$

Bài 34. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

① $d_1: 2x-y+3=0$ và $d_2: x-3y+1=0$

② $d_1: 7x-y-4=0$ và $d_2: 3x-4y+3=0$

③ $d_1: y=-3x+2=0$ và $d_2: y=2x-5$

④ $d_1: x-2y-1=0$ và $d_2: x+3y+11=0$

⑤ $d_1: 2x-y-4=0$ và $d_2: 3x+y+3=0$

⑥ $d_1: 3x-7y+1=0$ và $d_2: 2x+5y-13=0$

Bài 35. Tính số đo của các góc trong ΔABC, với:

① $A(-3;-5)$, $B(4;-6)$, $C(3;1)$

② $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$

③ $AB: 2x-3y+21=0$, $BC: 2x+3y+9=0$, $CA: 3x-2y-6=0$

④ $AB: 4x+3y+12=0$, $BC: 3x-4y-24=0$, $CA: 3x+4y-6=0$

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng và . Tìm m để góc tạo bởi d_1 và d_2 bằng $60°$.

Bài 37. Cho hai đường thẳng d và Δ. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α:

① $d: 2mx+(m-3)y+4m-1=0$, $\Delta: (m-1)x+(m+2)y+m-2=0$, $\alpha=45°$

② $d: (m+3)x-(m-1)y+m-3=0$, $\Delta: (m-2)x+(m+1)y-m-1=0$, $\alpha=90°$

③ $d: mx+2y=0$, $\Delta: 3x+my+1=0$, $\alpha=45°$.

Bài 38. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α, với:

① $A(6;2)$, $D: 3x+2y-6=0$, $\alpha=45°$

② $A(-2;0)$, $D: x+3y-3=0$, $\alpha=45°$

③ $A(2;5)$, $D: x+3y+6=0$, $\alpha=60°$

④ $A(1;3)$, $D: x-y=0$, $\alpha=30°$

Dạng 6. Cách lập phương trình đường thẳng liên quan đến góc và khoảng cách

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Dạng 1: Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và cách điểm $A(x_A;y_A)$ một khoảng bằng h cho trước:

➢ **Cách 1: Dùng phương trình tổng quát:**

✓ Bước 1: PTTQ của đường thẳng d qua $M(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(a;b)$ có dạng: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$)

✓ Bước 2: $d(A,d)=\dfrac{|a(x_A-x_0)+b(y_A-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=h$ thu gọn đưa về phương trình chứa a và b, từ đó chọn a và tìm b.

➢ **Cách 2: Dùng phương trình có hệ số góc k:**

✓ Bước 1: Phương trình đường thẳng d qua $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k có dạng:

$$y-y_0=k(x-x_0)\Leftrightarrow k(x-x_0)-y+y_0=0$$

✓ Bước 2: $d(A,d)=\dfrac{|k(x_A-x_0)-y_A+y_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=h$ giải phương trình, tìm k.

✓ Bước 3: Trường hợp d qua M và song song trục Oy thì $d:x=x_0$

Tính $d(A;d)$, nếu bằng h thì nhận $x=x_0$, ngược lại loại.

② Dạng 2: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và tạo với đường thẳng $d':Ax+By+C=0$ một góc α:

➢ **Cách 1: Dùng phương trình tổng quát:**

✓ Bước 1: PTTQ của đường thẳng d qua $M(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(a;b)$ có dạng:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \text{ (với } a^2+b^2\neq 0)$$

✓ Bước 2: $\cos(d,d')=\dfrac{|aA+bB|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\alpha$ thu gọn đưa về phương trình chứa a và b, từ đó chọn a và tìm b.

➢ **Cách 2: Dùng phương trình có hệ số góc k:**

✓ Bước 1: Phương trình đường thẳng d qua $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k có dạng:

$$y-y_0=k(x-x_0)\Leftrightarrow k(x-x_0)-y+y_0=0$$

✓ Bước 2: $\cos(d,d')=\dfrac{|kA+B|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\alpha$ giải phương trình, tìm k.

✓ Bước 3: Trường hợp d qua M và song song trục Oy thì $d:x=x_0$

Tính $\cos(d;d')$, nếu bằng $\cos\alpha$ thì nhận $x=x_0$, ngược lại loại.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 17. Lập phương trình đường thẳng d qua $A(3;4)$ và cách $B(-1;1)$ một khoảng bằng 4.

VD 18. Lập phương trình đường thẳng d qua $A(1;2)$ cách đều hai điểm $M(5;1)$ và $N(3;-1)$.

VD 19. Lập phương trình đường thẳng d qua $A(1;3)$ và tạo với đường thẳng $\Delta:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}-2=0$ một góc $30°$.

VD 20. Cho ΔABC cân có cạnh đáy $BC:2x-y-2=0$, cạnh bên $AB:x+y=4$. Viết phương trình cạnh AC, biết AC đi qua điểm $N(0;5)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 39. Cho đường thẳng $d: 3x-2y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng δ đi qua điểm $M(1;2)$ và tạo với d một góc $45°$.

Bài 40. Cho ΔABC cân tại A. Biết cạnh $BC: 2x-3y-5=0$ và $AB: x+y+1=0$. Viết phương trình cạnh AC biết rằng nó đi qua $M(1;1)$.

Bài 41. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(4;-1)$ và cạnh $AB: x+2y-1=0$. Hãy viết phương trình hai đường chéo của hình vuông.

Bài 42. Viết phương trình d đi qua điểm $M(2;7)$ và cách điểm $N(1;2)$ một khoảng bằng 1.

Bài 43. Viết phương trình đường thẳng d qua M và cách đều hai điểm P, Q với:

① $M(2;5)$, $P(-1;2)$, $Q(5;4)$ ② $M(1;5)$, $P(-2;9)$, $Q(3;-2)$

③ $M(2;2)$, $P(1;1)$, $Q(3;4)$ ④ $M(1;2)$, $P(2;3)$, $Q(4;-5)$

③ $M(10;2)$, $P(3;0)$, $Q(-5;4)$ ④ $M(2;3)$, $P(3;-1)$, $Q(3;5)$

Bài 44. Cho hai đường thẳng $x-3y+10=0$, $2x+y-8=0$ và điểm $P(0;1)$. Tìm phương trình đường thẳng đi qua P và cắt hai đường thẳng đã cho tại hai điểm sao cho P là trung điểm của đoạn thẳng nối hai giao điểm đó.

Bài 45. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đường thẳng Δ một khoảng bằng h, với:

① $\Delta: 2x-y+3=0, h=\sqrt{5}$ ② $\Delta: \begin{cases} x=3t \\ y=2+4t \end{cases}, h=3$

③ $\Delta: y-3=0, h=5$ ④ $\Delta: x-2=0, h=4$

Bài 46. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cách A một khoảng bằng h, với:

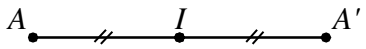
① $\Delta: 3x-4y+12=0$, $A(2;3)$, $h=2$ ② $\Delta: x+4y-2=0$, $A(-2;3)$, $h=3$

③ $\Delta: y-3=0$, $A(3;-5)$, $h=5$ ④ $\Delta: x-2=0$, $A(3;1)$, $h=4$

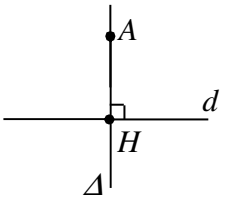
Dạng 7. Tìm hình chiếu và điểm đối xứng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Hai điểm A, A' đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AA'.



② Cho điểm A và đường thẳng d.



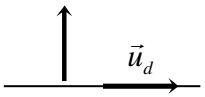
➢ ***Cách tìm điểm H là hình chiếu của A lên d:***

✓ **<u>Cách 1</u>: Dùng hình chiếu:**

○ <u>Bước 1</u>: Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và $\Delta \perp d$.

○ <u>Bước 2</u>: Gọi H là hình chiếu của A lên d. Tọa độ H là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} d:... \\ \Delta:... \end{cases}$ giải hệ tìm H.

✓ **<u>Cách 2</u>: Dùng phương trình tham số:**



○ <u>Bước 1</u>: Chuyển d về dạng tham số.

Giả sử: $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

○ <u>Bước 2</u>: Gọi H là hình chiếu của A lên $d \Rightarrow H(x_0 + at; y_0 + bt)$

○ <u>Bước 3</u>: Tính tọa độ $\overrightarrow{AH} = (x_0 + at - x_A; y_0 + bt - y_A)$

○ <u>Bước 4</u>: d có VTCP $\vec{u}_d = (a;b)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d = 0$

$\Leftrightarrow a(x_0 + at - x_A) + b(y_0 + bt - y_A) = 0$ (*)

Giải (*) tìm t suy ra H.

➢ ***Cách tìm điểm A' là điểm đối xứng với điểm A qua d:***

✓ <u>Bước 1</u>: Tìm hình chiếu H của A lên d (tìm như trên)

✓ <u>Bước 2</u>: Vì A' là điểm đới xứng với A qua d nên H là trung điểm AA'

$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(...;...)$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 21. Cho đường thẳng $d: x + 2y - 7 = 0$ và điểm $A(-5;3)$, $B(4;4)$.

① Tìm điểm K là hình chiếu của A lên d. ② Tìm điểm I là hình chiếu của B lên d.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 22. Tìm điểm A' đối xứng với $A(-2;3)$ qua đường thẳng $d: 4x-5y-18=0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 47. Cho $d: 3x-2y+5=0$ và điểm $M(-4;3)$. Tìm hình chiếu I của điểm M lên d. Từ đó tìm điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d.

Bài 48. Cho $E(5;14)$ và $F(13;-32)$.

① Tìm E' đối xứng với E qua trục Ox. ② Tìm F' đối xứng với F qua trục Oy.

Bài 49. Cho $A(4;2)$ và $B(-1;-3)$, d là đường thẳng qua A và song song với trục Ox, Δ là đường thẳng qua B và song song với trục Oy.

① Tìm A' đối xứng với A qua trục d. ② Tìm B' đối xứng với B qua trục Δ.

Bài 50. Tìm hình chiếu của M lên đường thẳng d và điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d, với:

① $M(2;1)$, $d: 2x+y-3=0$ ② $M(3;-1)$, $d: 2x+5y-30=0$

③ $M(4;1)$, $d: x-2y+4=0$ ④ $M(-5;13)$, $d: 2x-3y-3=0$

Bài 51. Cho đường thẳng $d: 2x+y-4=0$ và 2 điểm $M(3;3)$, $N(-5;19)$. Hạ $MK \perp d$ và gọi P là điểm đối xứng của M qua d.

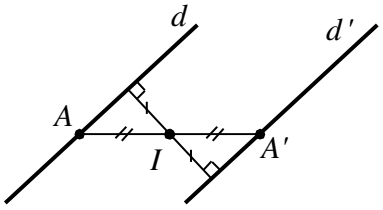
① Tìm tọa độ của K và P.

② Tìm điểm A trên d sao cho $AM+AN$ có giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Dạng 8. Phương trình đường thẳng đối xứng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Bài toán 1: Cho điểm I và đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua I



❖ **Cơ sở lý thuyết:**

✓ d' đối xứng với d qua tâm $I \Rightarrow d' // d$.

✓ $d(I,d)=d(I,d')$.

❖ **Phương pháp giải:**

✓ **Cách 1:** ◆ Lấy $A(x_0;y_0)\in d$ (cho $x_0=\ldots\Rightarrow y_0$)

◆ Tìm A' đối xứng với A qua I dùng tọa độ trung điểm)

◆ d' qua $A'(x_{A'},y_{A'})$ và $d' // d$

$\Rightarrow d': a(x-x_{A'})+b(y-y_{A'})=0$

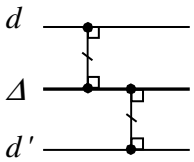
✓ **Cách 2:** ◆ Vì d' đối xứng với d qua $I \Rightarrow d' // d$

$\Rightarrow d': ax+by+c'=0 \ (c'\neq c)$

◆ $d(I,d)=d(I,d')$

Giải phương trình này tìm $c \Rightarrow$ phương trình d'.

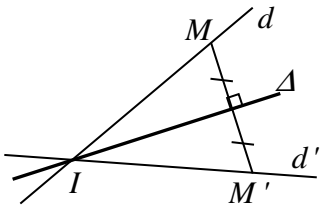
② Bài toán 2: Cho hai đường thẳng d và Δ. Viết phương trình đường thẳng d′ đối xứng với d qua Δ.



❖ **Cơ sở lý thuyết:**

✓ Nếu $d // \Delta$ thì d, d', Δ là 3 đường thẳng song song và cách đều.
Khi đó ta có: $d(d,\Delta)=d(d',\Delta)$.

✓ Nếu d cắt Δ tại I thì d', d và Δ đồng quy tại I và Δ **là đường phân giác của góc tạo bởi** d **và** d'. Do đó nếu lấy $M\in d$ và $M'\in d'$ sao cho M' đối xứng với M qua Δ thì $M\in d'$.



❖ **Phương pháp giải:**

✓ **Nếu d // Δ:** $\begin{cases} d' // d \\ d(d,\Delta)=d(d',\Delta) \end{cases}$

✓ **Nếu d cắt Δ tại I:** ◆ Tìm giao điểm I

◆ Lấy điểm $M\in d$

◆ Tìm M' đối xứng với M qua Δ

◆ Viết d' qua hai điểm I và M'

B. CÁC VÍ DỤ

VD 23. Cho đường thẳng $\Delta: 2x-3y+6=0$ và điểm $I(1;-3)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I.

VD 24. Tìm phương trình đường thẳng Δ_2 đối xứng với $\Delta_1: 2x-3y+1=0$ qua $\Delta: 2x-3y+6=0$.

VD 25. Cho $d: x+y-1=0$ và điểm $A(-3;0)$, $B(-4;-4)$. Tìm đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng AB qua d.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 52. Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua đường thẳng Δ, với:

① $d: 2x-y+1=0,\ \Delta: 3x-4y+2=0$ ② $d: x-2y+4=0,\ \Delta: 2x+y-2=0$

③ $d: x+y-1=0,\ \Delta: x-3y+3=0$ ④ $d: 2x-3y+1=0,\ \Delta: 2x-3y-1=0$

Bài 53. Cho điểm $M(2;5)$ và đường thẳng $d: x+2y-2=0$.

① Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d.

② Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua M.

Dạng 9. Bài toán phân giác

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

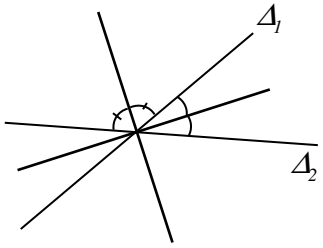
- Cho $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Phương trình hai phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 có dạng:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Hay $\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ (d_1)

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$ (d_2)

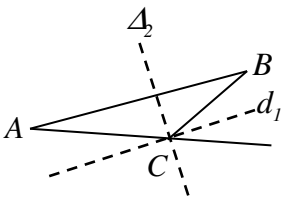


① Bài toán 1: Phân biệt phân giác góc nhọn, góc tù:

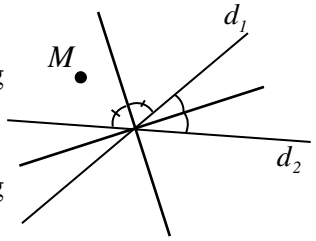
- Gọi $\vec{n}_1 = (A_1 ; B_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2 ; B_2)$ là 2 VTPT của Δ_1 và Δ_2
- Tính $\vec{n}_1.\vec{n}_2$, nếu:
  - + $\vec{n}_1.\vec{n}_2 > 0$ thì: ◆ d_1 là phân giác của góc tù,
    ◆ d_2 là phân giác của góc nhọn.
  - + $\vec{n}_1.\vec{n}_2 < 0$ thì: ◆ d_1 là phân giác của góc nhọn,
    ◆ d_2 là phân giác của góc tù.

② Bài toán 2: Phân biệt phân giác góc trong, góc ngoài tại C của ΔABC:

- **Cách 1:** ◆ Tính xem $\widehat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ là góc tù hay nhọn.
  - ◆ Từ đó phân biệt phân giác góc nhọn goác tù giữa 2 đường thẳng CA, CB.
  - ◆ Kết luận phân giác nào ứng với góc C.
- **Cách 2:**
  - ◆ Lập phương trình 2 đường phân giác Δ_1 và Δ_2 của góc giữa hai cạnh CA, CB.
  - ◆ Nếu A và B nằm khác phía đối với Δ_1 thì:
    - ✓ Δ_1 là phân giác trong của góc C
    - ✓ Δ_2 là phân giác ngoài của góc C
  - ◆ Nếu A và B nằm cùng phía đối với Δ_1 thì:
    - ✓ Δ_1 là phân giác ngoài của góc C
    - ✓ Δ_2 là phân giác trong của góc C



③ **Bài toán 3: Cho $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ cắt nhau chia mặt phẳng thành 4 góc và điểm M nằm ở một trong 4 góc đó. Viết phương trình đường phân giác của góc chứa điểm M:**



- Kiểm tra đối với đường thẳng d_1, miền chứa điểm M mang dấu gì ? Bằng cách tính $f_1(M)=a_1x+b_1y+c_1$.
- Kiểm tra đối với đường thẳng d_2, miền chứa điểm M mang dấu gì? Bằng cách tính $f_2(M)=a_2x+b_2y+c_2$.
- Tính $f_1(M)\times f_2(M)$. Nếu:
  - $f_1(M)\times f_2(M)>0$ thì phương trình phân giác của góc chứa M là:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=+\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

  - $f_1(M)\times f_2(M)<0$ thì phương trình phân giác của góc chứa M là:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

④ **Bài toán 4: Tìm tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC:**

- Viết d_1 là đường phân giác trong của góc A
- Viết d_2 là đường phân giác trong của góc B

$\Rightarrow$ Tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC là giao điểm của d_1 và d_2.

⑤ **Bài toán 5: Quỹ tích các điểm M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2:**

Nhắc lại: "Tập hợp các điểm cách đều 2 đường thẳng là đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường thẳng đó."

B. CÁC VÍ DỤ

VD 26. Viết phương trình đường phân giác của góc giữa hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$, $d_2: 7x-y+3=0$. Chỉ rõ đường nào là phân giác góc nhọn ? Đường nào là phân giác góc tù ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 27. Cho ΔABC có $A(-1;-2)$, $B(2;1)$, $C(9;0)$. Viết phương trình đường phân giác của góc trong lớn nhất của ΔABC.

VD 28. Cho 2 đường thẳng $d:3x+4y-10=0$ và $d':8x+6y+1=0$ và điểm $M(3;-1)$. Viết phương trình các đường phân giác của góc giữa d, d'. Chỉ rõ đường nào là phân giác của góc chứa điểm M ?

VD 29. Cho ΔABC có phương trình chứa các cạnh $AB:x-y+4=0$, $AC:7x+y-12=0$, $BC:x+y=0$. Tìm tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

VD 30. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ cách đều 2 đường thẳng $d:3x+4y+5=0$ và $d':3x+4y-1=0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 54. Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng:

① $d_1:3x-4y+12=0$, $d_2:12x+5y-7=0$ ② $d_1:x-y+4=0$, $d_2:x+7y-12=0$

③ $d_1:3x+4y=0$, $d_2:12x-5y-3=0$ ④ $d_1:2x+y+3=0$, $d_2:4x-5y-7=0$

Bài 55. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng có phương trình $8x+15y-120=0$.

Bài 56. Cho ΔABC. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với:

① $A(-3;-5)$, $B(4;-6)$, $C(3;1)$

② $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$

③ $AB:2x-3y+21=0$, $BC:2x+3y+9=0$, $CA:3x-2y-6=0$

④ $AB:4x+3y+12=0$, $BC:3x-4y-24=0$, $CA:3x+4y-6=0$

Bài 57. Cho ΔABC biết $A(2;6)$, $B(-3;-4)$, $C(5;0)$. Viết phương trình đường:

① Phân giác trong của góc A. ② Phân giác ngoài của góc A.

Dạng 10. Bài toán tìm điểm trên đường thẳng. Một ứng dụng của phương trình tham số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài toán: "Tìm điểm M trên đường thẳng d để ..."

- Nếu d cho dưới dạng tham số: $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

  thì $M\in d\Rightarrow M\left(x_0+a_1t;y_0+a_2t\right)$
- Nếu d cho dưới dạng tổng quát: $ax+by+c=0$
  - ✓ **Cách 1**: Chuyển d về dạng tham số rồi làm như trên.
  - ✓ **Cách 2**: Chọn x (hoặc y) làm tham số rồi rút y (hoặc x) theo x (hoặc y) ta được tọa độ điểm M.

    Ví dụ: ◆ $M\in d:2x-y+3=0\Rightarrow M\left(m;2m+3\right),\ m\in\mathbb{R}$

    ◆ $B\in d:x+3y-7=0\Rightarrow B\left(7-3b;b\right),\ b\in\mathbb{R}$

    Mách nhỏ: ta nên chọn tham số trùng với tên điểm cho dễ nhớ, chẳng hạn như điểm M ta chọn m, điểm B ta chọn b, …

B. CÁC VÍ DỤ

VD 31. Cho hai đường thẳng $d:2x-y-3=0$, $d':x+3y-1=0$ và điểm $I\left(3;0\right)$. Tìm đường thẳng Δ qua I sao cho Δ cắt d và d' lần lượt tại A, B.

① $IA=IB$ ② $IA=4IB$

VD 32. Cho đường thẳng $d: x-y+2=0$.

① Tìm $M \in d$ cách đều $\Delta: 7x+y-8=0$, $\Delta': x+7y-8=0$.

② Cho A, B là 2 điểm cố định trên $d': 2x-y+9=0$, biết đoạn $AB=2\sqrt{5}$. Tìm $M \in d$ sao cho diện tích ΔMAB bằng 5 đơn vị.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 58. Cho điểm $A(1;2)$, $B(3;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=9+4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

① Tìm $M \in d$ sao cho $AM=36$.

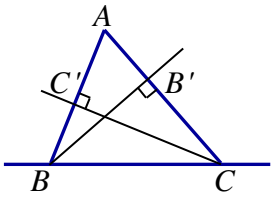
② Tìm $N \in d$ sao cho BN nhỏ nhất. Tìm GTNN đó.

Bài 59. Cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;1)$. Tìm điểm C trên $\Delta: x-2y+8=0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 17 đơn vị.

Dạng 11. Giải các bài toán về đường trong tam giác

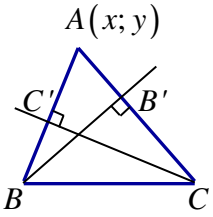
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Loại 1. Cho cạnh BC và phương trình hai đường cao BB′, CC′:



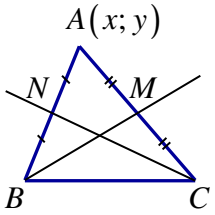
- ✓ Tìm $B = BC \cap BB'$, $C = BC \cap CC'$
- ✓ Viết AB: qua B và $AB \perp CC'$
- ✓ Viết AC: qua C và $AC \perp BB'$
- ✓ Xác định A: $A = AB \cap AC$

2. Loại 2. Cho điểm A và phương trình hai đường cao BB′, CC′:



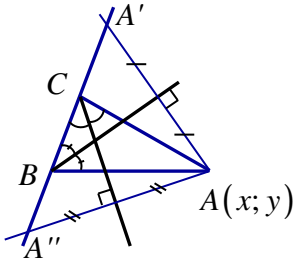
- ✓ Viết AB: qua A và $AB \perp CC'$
- ✓ Viết AC: qua A và $AC \perp BB'$
- ✓ Xác định B, C:
  $B = BC \cap BB'$, $C = AC \cap CC'$

3. Loại 3. Cho điểm A và phương trình hai đường trung tuyến BM, CN:



- ✓ Tìm C:
  - $M \in BM \Rightarrow M$ có tọa độ theo tham số t
  - M là trung điểm $AC \Rightarrow$ tọa độ C theo t
  - Thay tọa độ C vào $CN \Rightarrow t \Rightarrow C$
- ✓ Tìm B:
  - $N \in CN \Rightarrow N$ có tọa độ theo tham số t'
  - N là trung điểm $AB \Rightarrow$ tọa độ B theo t'
  - Thay tọa độ B vào $BM \Rightarrow t' \Rightarrow B$

4. Loại 4. Cho điểm A và phương trình hai đường phân giác BD, CF:



- ✓ Gọi A' đối xứng với A qua BD
  $\Rightarrow A' \in BC$. Tìm A'
- ✓ Gọi A'' đối xứng với A qua CF
  $\Rightarrow A'' \in BC$. Tìm A''
- ✓ Viết phương trình cạnh BC
- ✓ Xác định B, C: $B = BC \cap BD$, $C = BC \cap CF$.

✍ ***Chú ý:*** Các bài toán cho kết hợp giữa đường cao, phân giác, trung tuyến đều dựa vào các giải các bài toán trên.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(2;2)$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $x + y + 2 = 0$. Viết phương trình cạnh AC của tam giác đã cho.

.....

.....

.....

.....

VD 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đỉnh $A(1;1)$. Các đường cao hạ từ B và C lần lượt là $d_1: 2x-y+8=0$ và $d_2: 2x+3y-6=0$. Lập phương trình đường cao hạ từ A và xác định tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

VD 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x-4y-2=0$, cạnh BC song song với d và đường cao vẽ từ B có phương trình $x+y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C; biết điểm $M(1;1)$ là trung điểm cạnh AC.

VD 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $C(-1;-2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đỉnh $A(3;9)$ và phương trình các đường trung tuyến kẻ từ B và C lần lượt là $3x-4y+9=0$ và $y-6=0$. Tìm tọa độ hai đỉnh còn lại của tam giác ABC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 38. Cho ΔABC, biết phương trình cạnh BC và hai đường cao BB' và CC' lần lượt là $4x+y-2=0$; $5x-4y-15=0$; $2x+2y-9=0$. Viết phương trình các cạnh AB, AC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 39. Cho ΔABC, biết đỉnh $A(3;0)$, phương trình hai đường cao BB' và CC' lần lượt là $2x+2y-9=0$; $3x-12y-1=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó.

VD 40. Cho ΔABC, biết đỉnh $A(1;3)$, phương trình hai đường trung tuyến BM và CN lần lượt là $x-2y+1=0$; $y-1=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó.

VD 41. Cho ΔABC, biết đỉnh $A(1;3)$, phương trình hai đường trung tuyến BM và CN lần lượt là $x-2y+1=0$; $y-1=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó.

VD 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(2;-1)$, đường cao qua A và đường phân giác trong của góc C có phương trình lần lượt là $3x-4y+27=0$ và $x+2y-5=0$. Tìm tọa độ của A và C.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến vẽ từ B và đường phân giác trong của góc C có phương trình lần lượt là $2x+y+1=0$ và $x+y-1=0$. Lập phương trình đường thẳng BC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đỉnh $A(-1;5)$, đường trung trực của đoạn AC và đường phân giác ngoài của B có phương trình lần lượt là $x+2y-3=0$ và $x-3y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 60. Cho ΔABC, biết phương trình một cạnh và hai đường cao. Viết phương trình hai cạnh còn lại, với:

① $BC: 5x-3y+2=0$, $BB': 4x-3y+1=0$, $CC': 7x+2y-22=0$

② $BC: x-y+2=0$, $BB': 2x-7y-6=0$, $CC': 7x-2y-1=0$

③ $BC: 5x-3y+2=0$, $BB': 2x-y-1=0$, $CC': x+3y-1=0$

Bài 61. Cho ΔABC, biết tọa độ một đỉnh và phương trình hai đường cao. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với:

① $A(1;0)$, $BB': x-2y+1=0$, $CC': 3x+y-1=0$

Bài 62. Cho ΔABC, biết tọa độ một đỉnh và phương trình hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với:

① $A(3;9)$, $BM: 3x-4y+9=0$, $CN: y-6=0$

Bài 63. Cho ΔABC, biết phương trình một cạnh AB và hai đường trung tuyến AM, BN. Viết phương trình hai cạnh còn lại, với:

① $AB: x-2y+7=0$, $AM: x+y-5=0$, $BN: 2x+y-11=0$

② $AB: x-y+1=0$, $AM: 2x+3y=0$, $BN: 2x+6y+3=0$

Bài 64. Cho ΔABC, biết phương trình hai cạnh AB, AC và tọa độ trung điểm M của cạnh thứ ba. Viết phương trình cạnh thứ ba, với:

① $AB: 2x+y-2=0$, $AC: x+3y-3=0$, $M(-1;1)$

② $AB: 2x-y-2=0$, $AC: x+y+3=0$, $M(3;0)$

③ $AB: x-y+1=0$, $AC: 2x+y-1=0$, $M(2;1)$

④ $AB: x+y-2=0$, $AC: 2x+6y+3=0$, $M(-1;1)$

Bài 65. Cho ΔABC, biết tọa độ một đỉnh A, phương trình một đường cao BH và phương trình một đường trung tuyến BM. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó:

① $A(4;-1)$, $BH: 2x-3y+12=0$, $BM: 2x+3y=0$

② $A(2;-7)$, $BH: 3x+y+11=0$, $CN: x+2y+7=0$

③ $A(0;-2)$, $BH: x-2y+1=0$, $CN: 2x-y+2=0$

④ $A(-1;2)$, $BH: 5x-2y-4=0$, $CN: 5x+7y-20=0$

Dạng 12. Giải các bài toán về đường thẳng liên quan đến tứ giác

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng các tính chất về cạnh, góc, đường cháo và tính chất đối xứng của các tứ giác đặc biệt.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(4;-1)$ và phương trình các đường thẳng BC và BD lần lượt là $x-3y=0$ và $2x+5y+6=0$. Tìm tọa độ 3 đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.

VD 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình các đường thẳng AB và AD lần lượt là $x-3y-2=0$ và $2x+5y+7=0$. Viết phương trình đường thẳng BC biết $I(1;2)$ là tâm hình bình hành $ABCD$.

VD 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết hai đỉnh $A(1;0)$, $B(0;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình các đường thẳng AB và AD của một hình vuông $ABCD$ biết $A(-4;5)$ và phương trình đường thẳng BD là $7x-y+8=0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là giao điểm hai đường chéo và $M(3;0)$ là trung điểm cạnh AD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho, biết đỉnh A có tung độ dương.

Bài 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ biết AB và BD có phương trình lần lượt là $x-2y+1=0$ và $x-7y+14=0$, đường chéo AC đi qua điểm $M(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Bài 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

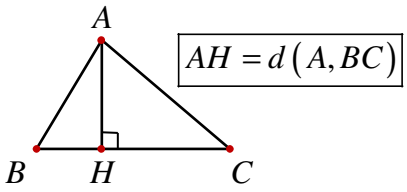
Dạng 13. Diện tích tam giác

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho tam giác ABC biết tọa độ 3 đỉnh. Tính diện tích tam giác ABC.

Phương pháp:

- Viết phương trình đường thẳng BC (nếu chưa có).
- Tính $d\left(A,BC\right)$ và tính BC.
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}BC.d\left(A,BC\right)$.



B. CÁC VÍ DỤ

VD 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết các đường thẳng AB, BC, CA có phương trình lần lượt là $x-y-2=0$, $3x-y+5=0$, $x-4y-1=0$. Tính diện tích ΔABC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A\left(2;5\right)$, $B\left(4;-3\right)$, $C\left(0;1\right)$. Tính $S_{\Delta ABC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(0;1)$ và đường cao vẽ từ B và C có phương trình lần lượt là $2x-y-1=0$ và $x+3y-1=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đỉnh $B(1;3)$, đường trung tuyến và đường cao cùng vẽ từ A có phương trình lần lượt là $y=1$, $x-2y+3=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đỉnh $C(-2;-4)$, $M(2;0)$ là trung điểm đoạn BC và $G(0;4)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết hai đường thẳng AB và AC lần lượt có phương trình $x-y-2=0$ và $2x+6y+3=0$. Tính diện tích tam giác ABC, biết điểm $M(-1;1)$ là trung điểm đoạn BC.

Bài 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết hai đường thẳng AB và AC lần lượt có phương trình $2x-3y+1=0$ và $4x+y-5=0$. Tính diện tích tam giác ABC, biết điểm $G(3;5)$ là trọng tâm tam giác ABC.

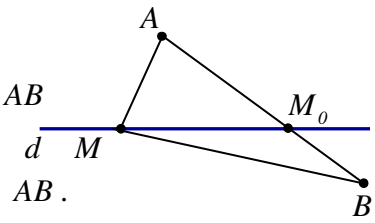
Bài 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết hai đường thẳng AB và AC lần lượt có phương trình $5x-2y+6=0$ và $4x+7y-21=0$. Tính diện tích tam giác ABC, biết gốc tọa độ là trực tâm tam giác ABC.

Dạng 14. Tìm điểm M trên đường d thỏa điều kiện

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

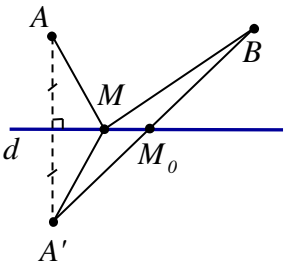
Bài toán 1: Cho điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M ∈ d sao cho MA+MB nhỏ nhất.

1. Trường hợp 1: Hai điểm A và B nằm khác phía đối với d:



- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có: $MA + MB \geq AB$
  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0$
  $\Leftrightarrow$ M, A, B thẳng hàng $\Rightarrow$ M là giao điểm của d và AB.

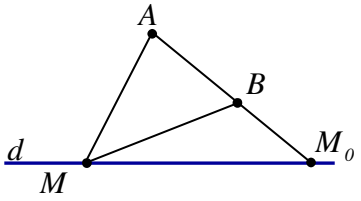
2. Trường hợp 2: Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với d:



- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
  $MA' + MB \geq A'B \Leftrightarrow MA + MB \geq A'B$
  $\Rightarrow (MA+MB)_{\min} \Leftrightarrow (MA'+MB) = A'B$
  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0$
  $\Leftrightarrow$ M, A', B thẳng hàng $\Rightarrow$ M là giao điểm của d và $A'B$.

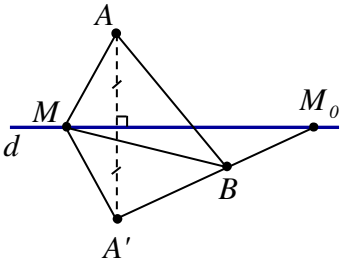
Bài toán 2: Cho điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M ∈ d sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

1. Trường hợp 1: Hai điểm A và B nằm khác phía đối với d:



- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
  $|MA-MB| \leq AB \Leftrightarrow |MA-MB|_{\max} = AB$
  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0$
  $\Leftrightarrow$ M, A, B thẳng hàng $\Rightarrow$ M là giao điểm của d và AB.

2. Trường hợp 2: Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với d:



- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
  $|MA'-MB| \leq A'B \Leftrightarrow |MA-MB| \leq A'B$
  $|MA-MB|_{max} \Leftrightarrow |MA'-MB|_{\max} = AB$
  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0$
  $\Leftrightarrow$ M, A', B thẳng hàng $\Rightarrow$ M là giao điểm của d và $A'B$.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 52. Cho đường thẳng $d: 2x+y-4=0$ và $A(4;1)$, $B(1;-6)$, $C(7;0)$.

① Tìm điểm $M \in d$ thỏa $MA+MB$ nhỏ nhất.

② Tìm điểm $M \in d$ thỏa $MA+MC$ nhỏ nhất.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 53. Cho $A(3;4)$, $B(-2;1)$, $E(1;0)$, $F(0;3)$. Tìm điểm M thẳng hàng với 2 điểm E, F sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 74. Cho đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$ và các điểm $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(-2;2)$.

① Chứng minh đường thẳng Δ cắc đoạn thẳng AB.

② Chứng minh hai điểm O, A nằm khác phía đối với đường thẳng Δ.

③ Tìm O' đối xứng với O qua Δ

④ Trên Δ, tìm điểm M sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

Bài 75. Cho hai điểm $A(3;3)$ và $B(0;2)$. Tìm điểm M thuộc $d: x+y-4=0$ nhìn đoạn AB dưới một góc: a) $90°$ b) $45°$.

Dạng 15. Tìm GTNN của hàm số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dùng phương pháp tọa độ để tìm:

- Giá trị lớn nhất của biểu thức: $T_1=\left|\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}-\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}\right|$
- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T_2=\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}+\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}$

  Sử dụng **dạng 12** bằng cách chọn các điểm A, B, M thích hợp.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 54. Cho hàm số $y=\sqrt{5x^2-6x+2}+\sqrt{5x^2-14x+17}$. Tìm x để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 55. Cho hàm số $y=\left|\sqrt{13x^2-26x+26}-\sqrt{13x^2-10x+13}\right|$. Tìm x để hàm số đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 76. Tìm GTNN của $y=\sqrt{5x^2-14x+10}+\sqrt{5x^2-14x+17}$

Bài 77. Tìm GTNN của $y=\sqrt{29x^2-56x+37}+\sqrt{29x^2+2x+10}$

Bài 78. Tìm GTLN của $y=\left|\sqrt{10x^2-14x+5}-\sqrt{10x^2-24x+25}\right|$

Bài 79. Tìm GTLN của $y=\left|\sqrt{13x^2-10x+2}-\sqrt{13x^2-10x+13}\right|$

Dạng 16. Phương trình đường thẳng có tham số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

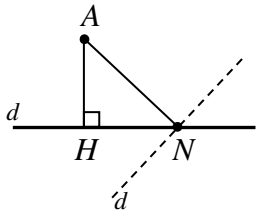
Dạng 1. Tìm điểm số định của họ đường thẳng:

- **Bước 1**: Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của họ đường d_m đi qua:
  Ta có: $ax_0+by_0+c=0$, $(*)$ $\forall m$
- **Bước 2**: Biến đổi (*) về một trong 2 dạng sau (m là ẩn số):
  $Am+B=0$ **(1)** hoặc $Am^2+Bm+C=0$ **(2)**
- **Bước 2**: Tọa độ điểm cố định:
  - ✓ Nếu $(*)$ được biến đổi về dạng (1) thì tọa độ thỏa: $\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$
  - ✓ Nếu $(*)$ được biến đổi về dạng (2) thì tọa độ thỏa: $\begin{cases}A=0\\B=0\\C=0\end{cases}$

Dạng 2. Bài toán khoảng cách lớn nhất từ điểm A đến họ đường thẳng d:

Cho đường thẳng d và điểm A. Tìm m để khoảng cách từ A đến d lớn nhất.

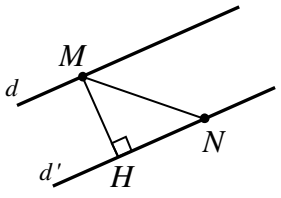
- **Bước 1**: Tìm điểm cố định mà d_m đi qua. Giả sử là điểm N.
- **Bước 2**: Vẽ $AH\perp d$ tại H
  $\Rightarrow d(A,d)=AH$ và ΔAHN vuông tại H
  Ta có: $AH\le AN\Rightarrow AH_{\max}=AN$ khi $N\equiv H$



Khi đó d là đường thẳng vuông góc với $AN\Rightarrow$ VTPT d : $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$.
Từ điều kiện 2 véctơ cùng phương, suy ra m.

Dạng 3. Bài toán khoảng cách lớn nhất giữa d và d′ (d//d′):

- **Bước 1**: Tìm điểm cố định của d và d'. Giả sử là điểm M và N.
- **Bước 2**: Vẽ $MH\perp d'$ tại H
  $\Rightarrow MH$ là khoảng cách giữa d và d'
  Xét ΔMNH vuông tại H, ta có: $MH\le MN$
  $\Rightarrow MH_{\max}=MN$ khi $N\equiv H$.
  Khi đó $MN\perp d$ và $MN\perp d'$.
  Vậy khoảng cách lớn nhất giữa d và d' là MN.



Dạng 4. Chứng minh họ đường thẳng d luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

- Gọi $I(x_0;y_0)$ và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn cố định mà d tiếp xúc với mọi m.
- Ta có: $d(I,d)=R$, $\forall m$.
- Biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai có vô số nghiệm m, từ đó suy ra x_0, y_0 và R.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 56. Tìm các điểm cố định mà họ đường $d_m : x+my-2m=0$ luôn đi qua.

VD 57. Tìm m để khoảng cách từ điểm $N(2;5)$ đến $d : x+my-2m=0$ lớn nhất.

VD 58. Cho $d : mx+(m-1)y+5m=0$ và $d' : mx+(m-1)y+2=0$. Tính khoảng cách lớn nhất giữa d và d'.

VD 59. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng sau đây luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định: $\Delta:\left(1-m^2\right)x+2my+m^2-4m+3=0$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 80. Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định tọa độ của điểm cố định đó.

① $(m-2)x-y+3=0$

② $mx-y+(2m+1)=0$

③ $mx-y-2m-1=0$

④ $(m+2)x-y+1-2m=0$

Bài 81. Cho phương trình: $mx+(m-2)y-m=0(1)$.

① Chứng minh: với mọi m thì phương trình (1) là phương trình của một đường thẳng gọi là họ đường d_m.

② Tìm điểm cố định mà họ d_m luôn đi qua.

Bài 82. Cho đường thẳng $d:2x-3my+4+6m=0$. Tìm m để khoảng cách từ gốc O đến d lớn nhất.

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 2

Bài 83. Cho ΔABC với $A(0;-1)$, $B(2;-3)$, $C(2;0)$.

① Viết phương trình các đường trung tuyến, phương trình các đường cao, phương trình các đường trung trực của ΔABC.

② Chứng minh các đường trung tuyến đồng qui, các đường cao đồng qui, các đường trung trực đồng qui.

Bài 84. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;5)$, $B(4;-1)$, $C(0;3)$.

① Viết phương trình tổng quát đường cao BH của tam giác ABC.

② Lập phương trình tham số đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

③ Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tìm phương trình chính tắc đường thẳng AD.

Bài 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;-1)$, $B(-3;2)$, $C(1;4)$. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua trung điểm M của cạnh và vuông góc với đường thẳng AB.

Bài 86. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;8)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ qua trọng tâm G của tam giác ABC và song song với đường cao CC' của tam giác ABC.

Bài 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;5)$, $B(4;-3)$, $C(0;1)$. Tìm phương trình các đường trung bình của tam giác ABC.

Bài 88. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $M(2;1)$, $N(5;3)$, $P(3;-4)$ lần lượt là trung điểm của 3 cạnh AB, BC, CA. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Bài 89. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;0)$, $B(1;3)$, $C(5;0)$. Viết phương trình đường phân giác ngoài của góc A của tam giác ABC.

Bài 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3)$ và cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA=2OB$.

Bài 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $4x+y-12=0$, đường cao kẻ từ A và B lần lượt có phương trình $2x+2y-9=0$ và $5x-4y-15=0$. Tìm phương trình hai cạnh còn lại của tam giác ABC.

Bài 92. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-4)$ và đường cao kẻ từ B và C lần lượt có phương trình $7x-2y-1=0$ và $2x-7y-6=0$. Lập phương trình ba cạnh của tam giác ABC.

Bài 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng BC là $x-3y+11=0$, đường cao kẻ từ B và C lần lượt có phương trình $3x+7y-15=0$ và $3x-5y+13=0$. Viết phương trình đường cao AA'.

Bài 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(4;-1)$, đường cao và đường trung tuyến cùng kẻ từ A có phương trình lần lượt là $2x-3y+12=0$ và $2x+3y=0$. Lập phương trình đường thẳng AB.

Bài 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh $A(1;2)$ và hai đường trung tuyến có phương trình $2x-y+1=0$ và $x+3y-3=0$.

Bài 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét tam giác ABC có phương trình đường thẳng AB là $x-2y+7=0$, các đường trung tuyến kẻ từ A và B lần lượt có phương trình là $x+y-5=0$ và $2x+y-11=0$. Viết phương trình đường thẳng AC và BC.

Bài 97. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường thẳng AC đi qua điểm $M(0;-1)$, đường phân giác của góc A và đường cao vẽ từ C có phương trình lần lượt là $x-y=0$ và $2x+y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $AB=2AM$.

Bài 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $C(4;3)$, đường phân giác trong và đường trung tuyến vẽ từ A có phương trình lần lượt là $x+2y-5=0$ và $4x+13y-10=0$. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Bài 99. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết hai cạnh AB và BC có phương trình lần lượt là $4x+3y-4=0$ và $x-y-1=0$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x+2y-6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 100. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M(1;4)$ là trung điểm AB. Đường phân giác trong của góc B và đường cao qua C có phương trình lần lượt là $x-2y+2=0$ và $3x+4y-15=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 101. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đỉnh $A(2;1)$, đường trung trực của đoạn BC và đường trung tuyến kẻ từ C có phương trình lần lượt là $x+y-3=0$ và $2x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

Bài 102. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đỉnh $A(5;2)$, đường trung trực của đoạn BC và đường trung tuyến kẻ từ C có phương trình lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.

Bài 103. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 điểm $A(3;-1)$, $B(-1;1)$ và đường thẳng $d: x-2y+5=0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho tam giác ABM cân tại M.

Bài 104. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 điểm $A(-1;3)$, $B(4;4)$ và đường thẳng $d: 3x-2y-1=0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho tam giác ABM cân tại M.

Bài 105. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=3+t\end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách điểm A một khoảng bằng 5.

Bài 106. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;-1)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+3t\\y=5+t\end{cases}$. Tìm tọa độ điểm A trên đường thẳng d sao cho độ dài AM là ngắn nhất.

Bài 107. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-2;1)$ và đường thẳng Δ có phương trình $y=2x-1$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.

Bài 108. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;-3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1+4t\\y=2-3t\end{cases}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

Bài 109. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(3;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=1\end{cases}$. Tính bán kính đường tròn (C), biết đường thẳng Δ tiếp xúc với (C).

Bài 110. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1:2x-y+3=0$ và $\Delta_2:2x-y+8=0$.

Bài 111. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách từ điểm $M(3;-2)$ đến đường thẳng d có phương trình:

a. $d:y=\dfrac{3}{4}x-2$ b. $d:\begin{cases}x=3+2t\\y=1-t\end{cases}$ c. $d:\begin{cases}x=-4\\y=5-3t\end{cases}$

Bài 112. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính bán kính đường tròn (C) tâm $I(-2;-3)$, biết (C) tiếp xúc với:

a. trục Ox b. trục Oy c. đường thẳng d d. đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-2+t\\y=3-2t\end{cases}$.

Bài 113. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=2-3t\\y=1+4t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-1+3t\\y=5-4t\end{cases}$.

Bài 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng song song $\Delta_1:+By+C_1=0$ và $\Delta_2:+By+C_2=0$. Chứng minh $d(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Bài 115. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta:3x+4y-1=0$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ bằng 2.

Bài 116. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta:2x+y-1=0$ và $d:x+y-3=0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d bằng $\sqrt{2}$.

Bài 117. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng $d:x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB là 6.

Bài 118. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 3 đường thẳng $\Delta_1: 6x-2y-1=0$, $\Delta_2: x+3y-1=0$ và $d: 2x-y=0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2.

Bài 119. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AB và BD lần lượt là $x-2y-1=0$ và $x-7y+14=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết đường thẳng AC đi qua điểm $M(2;1)$.

Bài 120. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có các đỉnh B và D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x+y-8=0$ và $d_2: x-2y+3=0$. Đường thẳng AC có phương trình $x+7y-31=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$, biết diện tích $ABCD$ bằng 75 và điểm A có hoành độ âm.

Bài 121. Viết phương trình của đường thẳng qua M và cùng với hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích S, với:

① $M(-4;10)$, $S=2$ ② $M(2;1)$, $S=4$ ③ $M(-3;-2)$, $S=3$ ④ $M(1;-1)$, $S=4$

Bài 122. Viết phương trình đường thẳng d qua $M(3;\ 1)$ sao cho d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B thỏa mãn:

① Tam giác OAB cân.

② Diện tích tam giác OAB bằng 8 đơn vị, biết A thuộc phần dương của trục Ox và B thuộc phần dương của trục Oy.

③ Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất, biết A thuộc phần dương trục Ox và B thuộc phần dương trục Oy.

④ $\dfrac{3}{OA^2}+\dfrac{4}{OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 123. Viết phương trình đường thẳng d qua A và cách B một đoạn bằng d.

① $A(2;2)$, $B(3;5)$, $d=2$ ② $A(-1;3)$, $B(4;2)$, $d=5$

③ $A(5;1)$, $B(2;-3)$, $d=5$ ④ $A(3;0)$, $B(0;4)$, $d=4$

Bài 124. Viết phương trình đường thẳng d cách điểm A một khoảng bằng h và cách điểm B một khoảng bằng k, với:

① $A(1;1)$, $B(2;3)$, $h=2$, $k=4$ ② $A(2;5)$, $B(-1;2)$, $h=1$, $k=3$

Bài 125. Cho ΔABC biết phương trình cạnh $AB: 4x+y-12=0$, phương trình đường cao $BH: 5x-4y-15=0$, đường cao $AH: 2x+2y-9=0$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.

Bài 126. Cho ΔABC, biết $A(1;3)$ và hai trung tuyến xuất phát từ B và C lần lượt là có phương trình: $x-2y+1=0$ và $y-1=0$.

① Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

② Tìm tọa độ trung điểm P của cạnh BC.

③ Viết phương trình của đường thẳng chứa các cạnh của ΔABC.

Bài 127. Tìm điểm có tung độ bằng 2 trên đường thẳng đi qua $A(0;4)$ và $B(3;-2)$.

Bài 128. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ΔABC. Biết BC có trung điểm $M(0;5)$, hai cạnh còn lại có phương trình là $2x+y-12=0$ và $x+4y-6=0$.

① Xác định tọa độ đỉnh A.

② Gọi C là đỉnh nằm trên đường thẳng $x+4y-6=0$. Điểm N là trung điểm của AC. Xác định tọa độ điểm N, rồi tính các tọa độ đỉnh C và B của ΔABC.

Bài 129. Cho ΔABC có đỉnh $A(2;2)$. Viết phương trình các cạnh của tam giác, biết rằng phương trình các đường cao kẻ từ B và C lần lượt là: $9x-3y-4=0$ và $x+y-2=0$.

Bài 130. Cho ΔABC, biết $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$.

① Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

② Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{DABM}=\frac{1}{3}S_{DABC}$.

Bài 131. Cho hai điểm $A(3;1)$ và $B(-1;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+1=0$.

① Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng d sao cho ΔABC cân tại A.

② Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng d sao cho ΔABC vuông tại C.

Bài 132. Viết phương trình đường thẳng đi qua $P(2;-1)$ sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng $d_1: 2x-y+5=0$ và $d_2: 3x+6y-1=0$ tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bài 133. Tìm các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và cạnh $AB=2AD$. Biết ràng đỉnh A có hoành độ âm.

Bài 134. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(4;-1)$ và phương trình cạnh AB là $x+2y-1=0$. Lập phương trình hai đường chéo của hình vuông. *ĐS:* $3x+y-11=0$; $x-3y-7=0$

Bài 135. Cho đường thẳng $d: mx+y-m-4=0$ và điểm $A(2;0)$. Tìm m để khoảng cách từ A đến d lớn nhất.

Bài 136. Cho ΔABC cân tại A có phương trình hai cạnh $BC: 2x-3y-5=0$; $AB: x+y+1=0$ và cạnh AC qua $M(1;1)$. Lập phương trình cạnh AC.

Bài 137. Lập phương trình bốn cạnh của hình vuông $ABCD$ biết $A(-4;5)$ và một đường chéo là: $7x-y+8=0$.

Bài 138. Lập phương trình các cạnh của tam giác đều ABC biết $A(1;1)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $y=3$ và C thuộc trục hoành.

Bài 139. Cho $d_1: (3+a)x-5y+4=0$; $d_2: 5x-(4+b)y-5=0$.

① Tìm a, b để d_1 trùng d_2.

② Khi $d_1 // d_2$, tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

③ Tìm a, b để d_1 cắt d_2, tính $\cos\varphi$, với φ là góc giữa d_1 và d_2.

Bài 140. Tìm khoảng cách lớn nhất giữa d và d':

① $d: 2x+my-m-4=0$ và $d': 2x+my-m+2=0$

② $d: mx+y-m-4=0$ và $d': mx+y-2m+2=0$

Bài 141. Chứng minh rằng đường thẳng $d: \left(m^2-1\right)x+2my+3\left(m^2+1\right)=0$ (m là tham số), luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0;0)$ khi m hay đổi.

Bài 142. Cho hai đường thẳng $d_1: mx-y+3=0$ và $d_2: x+my-5=0$.

① Tìm các điểm cố định của d_1 và d_2.

② Chứng minh hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau. Suy ra quỹ tích các giao điểm.

Bài 143. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y-9=0$ và $\Delta': 3x-2y-5=0$

① Tìm tọa độ giao điểm A của Δ và Δ'.

② Viết phương trình đường thẳng đi qua A và $B(2;4)$

③ Gọi C là giao điểm của Δ với trục tung. Chứng minh rằng: ΔABC vuông cân.

④ Viết phương trình đường thẳng qua A và tạo với trục Ox một góc $60°$.

Bài 144. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(4;-1)$ và phương trình một cạnh là $3x-y+5=0$.

① Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông.

② Tìm tọa độ bốn đỉnh của hình vuông.

Bài 145. Cho hình bình hành $ABCD$, biết hai cạnh có phương trình $x-3y=0$, $2x+5y+6=0$, đỉnh $C(4;-1)$.Viết phương trình hai cạnh còn lại.

Bài 146. Tìm tập hợp điểm:

① Tìm tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: -2x+5y-1=0$ một khoảng bằng 3.

② Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 5x+3y-3=0$ và $\Delta: 5x+3y+7=0$.

③ Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d: 4x-3y+2=0$ và $\Delta: y-3=0$.

④ Tìm tập hợp các điểm có tỉ số các khoảng cách đến hai đường thẳng sao bằng $\frac{5}{13}$, $d: 5x-12y+4=0$ và $\Delta: 4x-3y-10=0$.

2. ĐƯỜNG TRÒN

Tóm tắt lí thuyết

1. Phương trình đường tròn:

Dạng 1: $\boxed{(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$.

Tâm $I(a;b)$, bán kính R.

Dạng 2: $\boxed{(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$

Điều kiện: $a^2+b^2-c>0$. Tâm $I(a;b)$, Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

2. Vị trí tương đối:

a. Giữa điểm M và đường tròn (C) tâm I, bán kính R.

Vị trí	Điều kiện	Số tiếp tuyến qua M
M nằm trong (C)	$IM<R$	0
M nằm trên (C)	$IM=R$	1
M nằm ngoài (C)	$IM>R$	2

b. Giữa đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) tâm I, bán kính R.

Vị trí	Điều kiện	Số điểm chung
Δ không cắt (C)	$d(I,\Delta)>R$	0
Δ tiếp xúc (C)	$d(I,\Delta)=R$	1
Δ cắt (C) tại 2 điểm	$d(I,\Delta)<R$	2

c. Giữa (C_1) tâm I_1, bán kính R_1 và (C_2) tâm I_2, bán kính R_2 ($R_1>R_2$). Đặt $I_1I_2=d$.

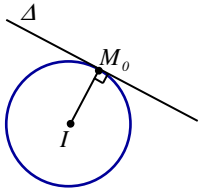
Vị trí	Điều kiện	Số điểm chung	Số t.t chung
(C_1) và (C_2) đồng tâm	$d=0$	0	0
(C_1) đựng (C_2)	$d<R_1-R_2$	0	0
(C_1) và (C_2) tiếp xúc trong	$d=R_1-R_2$	1	1
(C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm	$R_1-R_2<d<R_1+R_2$	2	2
(C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài	$d=R_1+R_2$	1	3
(C_1) và (C_2) ở ngoài nhau	$d>R_1+R_2$	0	4

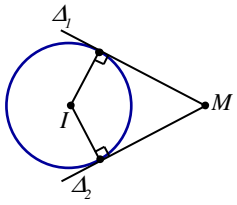
3. Tiếp tuyến:

a. Phương trình tiếp tuyến tại một điểm trên đường tròn:

Cho $M_0(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M có dạng:

$$\Delta:(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$





b. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn qua một điểm $M(x_M; y_M)$ ở ngoài đường tròn:

☞ Viết phương trình đường thẳng qua $M\left(x_M; y_M\right)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B)$.

☞ Dùng điều kiện tiếp xúc để tìm A, B.

☞ Ngoài ra ta có thể dùng phương trình đường thẳng qua $M\left(x_M; y_M\right)$ với hệ số góc k:

$$\boxed{y-y_M=k\left(x-x_M\right)}$$

✍ **Chú ý:** Có 2 tiếp tuyến trong trương hợp này.

c. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn biết phương (song song, vuông góc) của tiếp tuyến:

Phương trình tiếp tuyến $\Delta: Ax+By+C=0$

☞ Dùng điều kiện phương của tiếp tuyến (song song hay vuông góc với một đường thẳng khác) để tìm A, B.

☞ Dùng điều kiện tiếp xúc để tìm C.

d. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

☞ Trước tiên xét vị trí tương đối của hai đường tròn xem có bao nhiêu tiếp tuyến chung.

☞ Cho (C_1) tâm I_1, bán kính R_1 và (C_2) tâm I_2, bán kính R_2 và $\Delta: Ax+By+C=0$.

$$\boxed{\Delta \text{ là tiếp tuyến chung của } (C_1) \text{ và } (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d\left(I_1, \Delta\right)=R_1 \\ d\left(I_2, \Delta\right)=R_2 \end{cases}}$$

4. Chu vi đường tròn. Diện tích hình tròn:

✓ Chu vi đường tròn: $\boxed{C=2\pi R}$.

✓ Diện tích hình tròn: $\boxed{S=\pi R^2}$

Dạng 1. Phương trình đường tròn (C)

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Bài toán 1: Xác định tâm và bán kính của đường tròn:

➢ Nếu (C) có dạng: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$ thì (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.

➢ Nếu (C) có dạng: $\boxed{x^{20}+y^2-2ax-2by+c=0}$ với a, b, c thỏa $a^2+b^2-c>0$ thì (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

② Bài toán 2: Điều kiện để (C_m) là đường tròn - tìm quỹ tính tâm:

➢ Bước 1. Xác định a, b, c. Tính a^2+b^2-c.

➢ Bước 2. Để (C_m) là phương trình đường tròn thì $a^2+b^2-c>0$ $(*)$

➢ Bước 3: Xác định tâm $I: \begin{cases} x_I=f(m) \\ y_I=g(m) \end{cases}$

➢ Bước 4: Từ hệ trên, khử tham số m ta được biểu thức liên hệ giữa x_I, y_I: $F\left(x_I; y_I\right)=0$.

Khi đó tâm I nằm trên đường có phương trình $F(x;y)=0$ (T).

➢ Bước 5: Tìm giới hạn của điểm I dựa vào điều kiên $(*)$.

➢ Bước 6: Kết luận.

B. VÍ DỤ MẪU

VD 1. Xác định tâm và bán kính của các đường tròn sau:

① $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

② $16x^2+16y^2+16x-8y-11=0$

③ $x^2+y^2-4x+6y-3=0$

④ $x^2+y^2-4x-6y-3=0$

⑤ $(x+2)^2+(y-5)^2=16$

⑥ $(x-m)^2+(y+2m)^2=25$

⑦ $2x^2+2y^2-5x-4y+1-m^2=0$

⑧ $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 2. Cho $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+2(m-2)y+m^2+8=0$

① Tìm m để (C_m) là phương trình đường tròn.

② Tìm quỹ tích tâm I.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tâm và bán kính của các đường tròn sau:

① $2(x-3)^2+2(y+1)^2=9$ ② $(x+2)^2+(y-5)^2=16$

③ $x^2+y^2-6x+8y+30=0$ ④ $x^2+y^2-4x-6y+2=0$

⑤ $7x^2+9y^2-4x+6y-1=0$ ⑥ $7x^2+7y^2-4x+6y-1=0$

Bài 2. Cho $(C_\alpha): x^2+y^2-2(\sin\alpha)x+2(\cos\alpha-2)y-3=0$, α là tham số.

① Chứng minh rằng (C_α) là phương trình đường tròn với mọi giá trị α.

② Tìm quỹ tích tâm I.

Bài 3. Cho $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+2(m-2)y+m^2=0$, m là tham số.

① CMR (C_m) luôn là phương trình đường tròn. Tìm m để R nhỏ nhất.

② Tìm m để (C_m) có diện tích bằng 5π.

③ Tìm m để (C_m) có độ dài bằng $2\sqrt{5}\pi$.

Bài 4. Cho (C_m). Tìm m để (C_m) là phương trình đường tròn, tìm quỹ tích tâm I.

① $(C_m): x^2+y^2-4mx-2y+4m=0$

② $(C_m): x^2+y^2+mx-2(m+1)y+1=0$

Bài 5. Cho $(C_m): x^2+y^2-2mx-2(\mathrm{m}-1)y+4m=0$

① Với giá trị nào của m để (C_m) là phương trình đường tròn.

② Chứng minh rằng các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Bài 6. Cho $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$

① Chứng minh rằng (C_m) là phương trình đường tròn với mọi m.

② Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

③ Tìm những điểm trong mặt phẳng tọa độ mà họ đường tròn (C_m) không đi qua dù m lấy bất kì giá trị nào.

Bài 7. Cho ΔABC với các đường thẳng chứa các cạnh $AB: 2x-3y+7=0$; $BC: 2x-y+1=0$; $CA: x-y+3=0$. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2+MC^2=4$.

Bài 8. Cho hai điểm $A(1;1)$, $B(9;7)$.

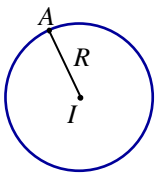
① Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2+MB^2=90$

② Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $2MA^2-3MB^2=k^2$ $(k\in\mathbb{R})$

Dạng 2. Lập phương trình đường tròn (C)

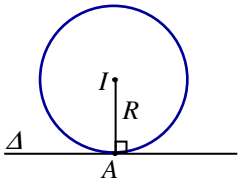
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

① Loại 1. (C) có tâm I(a; b) và đi qua điểm A:



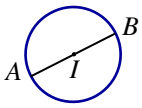
- Bán kính: $R = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2}$
- Viết $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

② Loại 2. (C) có tâm I(a; b) và tiếp xúc với đường thẳng Δ:



- Bán kính: $R = d(I;\Delta)$
- Viết $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

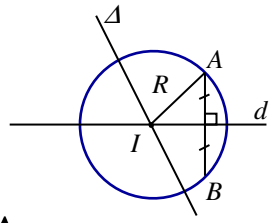
③ Loại 3. (C) có đường kính AB:



- Tâm I là trung điểm AB.

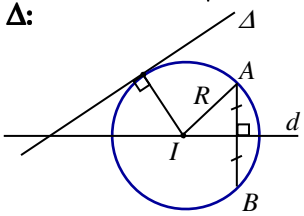
  $\Rightarrow$ Tọa độ I: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}; y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
- Bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$.

④ Loại 4. (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng Δ:



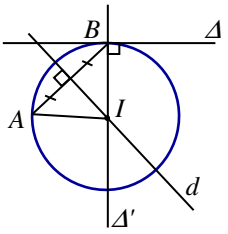
- Viết phương trình trung trực d của đoạn AB.
- Tâm I của (C) là giao điểm của d với Δ.
- Bán kính $R = IA$.

⑤ Loại 5. (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ:



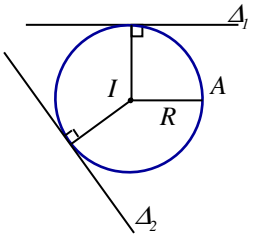
- Viết phương trình trung trực d của đoạn AB.
- Tâm I của (C) thỏa điều kiện $\begin{cases} I \in d \\ d(I;\Delta) = IA \end{cases}$
- Bán kính $R = IA$.

⑥ Loại 6. (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại B:



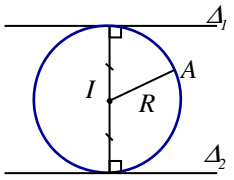
- Viết phương trình trung trực d của đoạn AB.
- Viết phương trình Δ' qua B và vuông góc với Δ.
- Tâm I của (C) là giao điểm của d với Δ'.
- Bán kính $R = IA$.

⑦ Loại 7a. (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau:



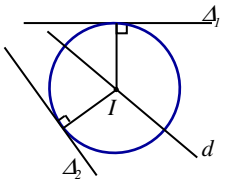
- Tâm I của (C) thỏa $\begin{cases} d(I;\Delta_1) = d(I;\Delta_2) \\ d(I;\Delta_1) = IA \end{cases}$
- Bán kính $R = IA$.

Loại 7b. (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 ($\Delta_1 // \Delta_2$):



➢ Tâm I của (C) thỏa $\begin{cases} d(I;\Delta_1) = d(I;\Delta_2) \\ R = \dfrac{1}{2} d(\Delta_1, \Delta_2) = IA \end{cases}$

⑧ Loại 8. (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm thuộc d:

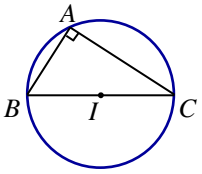


➢ Tâm I của (C) thỏa $\begin{cases} I \in d \\ d(I;\Delta_1) = d(I;\Delta_2) \end{cases}$

➢ Bán kính $R = d(I, \Delta_1)$.

⑨ Loại 9. (C) đi qua ba điểm A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác):

❖ **<u>Trường hợp 1: ΔABC vuông (giả sử vuông tại A):</u>**

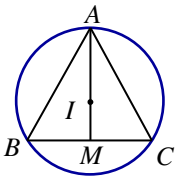


➢ Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow I$ là tâm của C.

➢ Bán kính $R = \dfrac{BC}{2}$

❖ **<u>Trường hợp 2: ΔABC đều</u>:**

➢ Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp
$\Rightarrow I$ là trọng tâm của ΔABC.

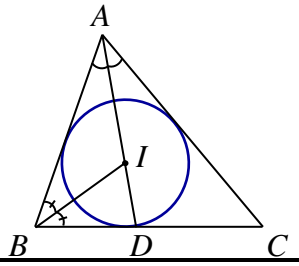


➢ Bán kính $R = \dfrac{2}{3} AM$ (với M là trung điểm BC)

❖ **<u>Trường hợp 3: ΔABC thường:</u>**

- **Cách 1**: Dùng phương trình tổng quát:
  - ➢ Phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $a^2 + b^2 - c > 0$
  - ➢ Lần lượt thay tọa độ của A, B, C vào ta được hệ phương trình với 3 ẩn a, b, c.
  - ➢ Giải hệ trên ta tìm được a, b, $c \Rightarrow$ phương trình (C).
- **Cách 2**: Dùng tọa độ điểm:
  - ➢ Tâm I của (C) thỏa mãn: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$
  - ➢ Bán kính $R = IA = IB = IC$.

⑩ Loại 10. (C) nội tiếp tam giác ABC:



➢ Viết phương trình hai đường phân giác trong của hai góc trong của tam giác ABC.
➢ Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.
➢ Bán kính $R = d(I, AB)$.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 3. Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau đây:

① (C) có tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;-3)$.

② (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

③ (C) có đường kính AB, với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

④ (C) đi qua $A(2;3)$, $B(1;-1)$ và có tâm thuộc $\Delta: x-3y-11=0$

⑤ (C) đi qua $A(1;1)$, $B(1;4)$ và tiếp xúc với trục Ox.

⑥ (C) đi qua $A(-2;6)$ và tiếp xúc với $\Delta: 3x-4y-15=0$ tại $B(1;-3)$.

⑦ a) (C) đi qua $A(2;1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ.

b) (C) qua $O(0;0)$, tiếp xúc với $\Delta_1: x+y-4=0$, $\Delta_2: x+y+4=0$

⑧ (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-y=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: 3x+2y+3=0$, $\Delta_2: 2x-3y+15=0$.

⑨ a) (C) đi qua ba điểm $A(1;-2)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$.

b) (C) đi qua ba điểm $A(-2;-1)$, $B(1;-3)$, $C(2;5)$.

⑩ (C) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình các cạnh: $AB: 3x+4y-6=0$, $AC: 4x+4y-1=0$, $BC: y-1=0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với:

① $I(2;4)$, $A(-1;3)$ ② $I(-3;2)$, $A(1;-1)$ ③ $I(-1;0)$, $A(3;-11)$

④ $I(1;2)$, $A(5;2)$ ⑤ $I(3;5)$, $A(7;2)$ ⑥ $I\equiv O(0;0)$, $A(4;4)$

Bài 10. Viết phương trình đường tròn tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với:

① $I(3;4)$, $\Delta: 4x-3y+15=0$ ② $I(2;3)$, $\Delta: 5x-12y-7=0$

③ $I(-3;2)$, $\Delta\equiv Ox$ ④ $I(-3;-5)$, $\Delta\equiv Oy$

⑤ $I(-1;2)$, $\Delta: x-2y+7=0$ ⑥ $I\equiv O(0;0)$, $\Delta: y-2x=0$

Bài 11. Viết phương trình đường tròn đường kính AB, với:

① $A(-2;3)$, $B(6;5)$ ② $A(0;1)$, $B(5;1)$ ③ $A(-3;4)$, $B(7;2)$

④ $A(5;2)$, $B(3;6)$ ⑤ $A(1;1)$, $B(7;5)$ ⑥ $A(1;5)$, $B(-1;1)$

Bài 12. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng Δ, với:

① $A(0;4)$, $B(2;6)$, $\Delta: x-2y+5=0$ ② $A(2;2)$, $B(8;6)$, $\Delta: 5x-3y+6=0$

③ $A(-1;0)$, $B(1;2)$, $\Delta: x-y-1=0$ ④ $A(-1;2)$, $B(3;0)$, $\Delta: 7x+y-6=0$

⑤ $A \equiv O(0;0)$, $B(1;2)$, $\Delta: x-y=0$

Bài 13. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ, với:

① $A(1;2)$, $B(3;4)$, $\Delta: 3x+y-3=0$ ② $A(6;3)$, $B(3;2)$, $\Delta: x-2y-2=0$

③ $A(-1;-2)$, $B(2;1)$, $\Delta: 2x-y+2=0$ ④ $A(2;0)$, $B(4;2)$, $\Delta \equiv Oy$

Bài 14. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với:

① $A(-2;1)$, $\Delta: 3x-2y-6=0$, $B(4;3)$ ② $A(6;-2)$, $\Delta \equiv Ox$, $B(6;0)$

③ $A(4;-3)$, $\Delta: x+2y-3=0$, $B(3;0)$

Bài 15. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, với:

① $A(2;3)$, $\Delta_1: 3x-4y+1=0$, $\Delta_2: 4x+3y-7=0$.

② $A(1;3)$, $\Delta_1: x+2y+2=0$, $\Delta_2: 2x-y+9=0$.

③ $A(3;-6)$, $\Delta_1 \equiv Ox$, $\Delta_2 \equiv Oy$.

Bài 16. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d với:

① $\Delta_1: x+y+4=0$, $\Delta_2: 7x-y+4=0$, $d: 4x+3y-2=0$.

② $\Delta_1: 4x-3y-16=0$, $\Delta_2: 3x+4y+3=0$, $d: 2x-y+3=0$.

③ $\Delta_1: 4x+y-2=0$, $\Delta_2: x+4y+17=0$, $d: x-y+5=0$. .

Bài 17. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với:

① $A(2;0)$, $B(0;-3)$, $C(5;-3)$ ② $A(5;3)$, $B(6;2)$, $C(3;-1)$

③ $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(-3;-1)$ ④ $A(-1;-7)$, $B(-4;-3)$, $C \equiv O(0;0)$

⑤ $AB: x-y+2=0$, $BC: 2x+3y-1=0$, $CA: 4x+y-17=0$

⑥ $AB: x+2y-5=0$, $BC: 2x+y-7=0$, $CA: x-y+1=0$

Bài 18. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với:

① $A(2;6)$, $B(-3;-4)$, $C(5;0)$ ② $A(2;0)$, $B(0;-3)$, $C(5;-3)$

③ $AB: 2x-3y+21=0$, $BC: 3x-2y-6=0$, $CA: 2x+3y+9=0$

④ $AB: 7x-y+11=0$, $BC: x+y-15=0$, $CA: 7x+17y+65=0$

Dạng 3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

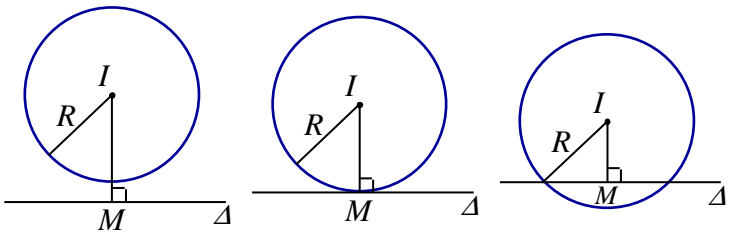
Cho đường thẳng Δ và đường tròn (C):

- $\Delta: Ax+By+C=0$
- $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có tâm $I(a;b)$ và bán kính R

Để xét vị trí tương đối của d và (C) ta thực hiện theo 1 trong 2 cách sau:

① So sánh khoảng cách từ tâm I đến d với R:

- Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của (C)
- Tính $d(I,\Delta)$. Nếu:
  - $d(I,\Delta)<R \Leftrightarrow$ Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
  - $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow$ Δ tiếp xúc với (C) (Δ là tiếp tuyến của (C)).
  - $d(I,\Delta)>R \Leftrightarrow$ Δ và (C) không có điểm chung.
  - $d(I,\Delta)\le R \Leftrightarrow$ Δ và (C) có điểm chung.



② Cần tìm tọa độ giao điểm của Δ và (C):

- Tọa độ giao điểm của Δ và (C) (nếu có) là nghiệm của hệ:

$$(*)\ \begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \end{cases}$$

- Giải hệ trên, nếu:
  - (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
  - (*) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ tiếp xúc với (C) (Δ là tiếp tuyến của (C)).
  - (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ và (C) không có điểm chung.
  - (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ và (C) có điểm chung.

Chú ý: Khi Δ cắt (C) tại hai điểm A, B thì:

- ✓ $HI \perp AB \Leftrightarrow H$ là trung điểm AB
- ✓ Dây AB dài nhất khi AB là đường kính (I thuộc AB)
- ✓ Dây AB ngắn nhất khi IH dài nhất.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 4. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d và đường tròn (C):

① $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \end{cases}$ và $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=16$

② $d: x+y-2=0$ và $(C): x^2+y^2-4x+2y-20=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 5. Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ với đường tròn (C) sau đây:

$\Delta: 3x+y+m=0$ và $(C): x^2+y^2-4x+2y+1=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ có điểm chung với đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y+3=0$.

Bài 20. Chứng minh đường thẳng $\Delta:x+(m-1)y+m=0$ không tiếp xúc với đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+8y-5=0$ với mọi m.

Bài 21. Biện luận theo m số giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn (C):

① $\Delta:mx-y-3m-3=0$ và $(C):x^2+y^2-4x-2y=0$

② $\Delta:2x-y+m=0$ và $(C):x^2+y^2-6x+2y+5=0$

③ $\Delta:x+y-1=0$ và $(C):x^2+y^2-2(2m+1)x-4y+4-m=0$

④ $\Delta:\mathrm{m}x+y-4m=0$ và $(C):x^2+y^2-2x-4y-4=0$

Bài 22. Cho $(C):x^2+y^2-4x+6y+3=0$ và $\Delta:3x-y+m=0$. Tìm m để:

① Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C).

② Đường thẳng Δ cắt với đường tròn (C).

③ Đường thẳng Δ và đường tròn (C) không có điểm chung.

Bài 23. Cho $(C):x^2+y^2-4x+2y-m^2+2m=0$ và $d:3x-4y+5=0$

① Với giá trị nào của m thì (C) là phương trình đường tròn ?

② Khi (C) là đường tròn, biện luận theo m số giao điểm của (C) và d.

③ Tìm m để (C) cắt d theo một dây có độ dài bằng 4.

Bài 24. Cho $(C):x^2+y^2-2x+4y-20=0$

① Chứng minh rằng đường thẳng $d:4x-3y-6=0$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn AB.

② Viết phương trình đường tròn (C') qua 2 điểm A, B và có tâm nằm trên trục Ox.

Bài 25. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d qua $N(2;1)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho:

① Dây cung AB dài nhất. ② N là trung điểm của đoạn AB. ③ Dây cug AB ngắn nhất.

Bài 26. Chứng minh rằng đường thẳng $d:x+my-m-3=0$ luôn cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ tại hai điểm A, B. Tìm m để AB ngắn nhất.

Bài 27. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-2y-14=0$ và điểm $M(2;2)$.

① Chứng minh rằng điểm M nằm trong đường tròn (C).

② Đường thẳng d qua M cắc (C) tại hai điểm A, B sao cho $MA=3MB$. Tính khoảng cách từ tâm đến d.

Dạng 4. Vị trí tương đối giữa hai đường tròn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. Phương pháp 1: So sánh độ dài đoạn nối tâm với các bán kính:

Cho hai đường tròn: (C) có tâm I và bán kính R

(C') có tâm I' và bán kính R' $(R > R')$

① (C) và (C') cắt nhau $\Leftrightarrow$ $R - r < II' < R + R'$

② (C) và (C') tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow$ $II' = R + R'$

③ (C) và (C') tiếp xúc trong $\Leftrightarrow$ $II' = R - R'$

④ (C) và (C') ở ngoài nhau $\Leftrightarrow$ $II' > R + R'$

⑤ (C) và (C') đựng nhau $\Leftrightarrow$ $II' < R - R'$

⑥ (C) và (C') đồng tâm $\Leftrightarrow$ $II' = 0$

II. Phương pháp 2: Phương pháp đại số:

Cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$(C'): x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$

Tọa độ các giao điểm (nếu có) của (C) và (C') là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Hệ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) và (C') cắt nhau tại hai điểm
- Hệ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) và (C') tiếp xúc nhau tại một điểm
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) và (C') không có điểm chung

B. CÁC VÍ DỤ

VD 6. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn sau:

① $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y - 4 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 2x = 0$

② $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 34 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 7. Tìm tọa độ giao điểm của: $(C_1): x^2+y^2+2x+2y+1=0$ và $(C_2): x^2+y^2-2x+2y-7=0$

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn sau:

① $(C_1): x^2+y^2+2x+2y+1=0$ và $(C_2): x^2+y^2-2x+2y-7=0$

② $(C_1): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-6y+5=0$

③ $(C_1): x^2+y^2+12x-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6y+5=0$

④ $(C_1): (x+1)^2+(y+2)^2-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-36=0$

Bài 29. Cho hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c=0$ và $(C_2): x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c=0$. Giả sử chúng cắt nhau tại hai điểm M, N. Viết phương trình đường thẳng MN.

Bài 30. Chứng minh (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm H. Nếu:

① $(C_1): x^2+y^2-4x+2y-4=0$, $(C_2): x^2+y^2-10x-6y+30=0$

② $(C_1): x^2+y^2-4x+6y-3=0$, $(C_2): x^2+y^2-4x-6y+5=0$

Bài 31. Tìm m để (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau, với:

① $(C_1): (x-2)^2+(y-2)^2=10$, $(C_2): x^2+y^2-2x+2y+2m=0$

② $(C_1): (x-1)^2+y^2=4$, $(C_2): x^2+y^2-10x-8y+23=0$

③ $(C_1): x^2+y^2=1$, $(C_2): x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$

④ $(C_1): x^2+y^2-2mx+4my+5m^2-1=0$, $(C_2): x^2+y^2-2x+4y+1=0$

Bài 32. Tìm m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt, với:

① $(C_1): x^2+y^2+6x+8y+m+10=0$, $(C_2): x^2+y^2-4x-2y+m-5=0$

② $(C_1): x^2+y^2-2mx+4my+5m^2-1=0$, $(C_2): x^2+y^2=1$

Bài 33. Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB. Nếu:

① $(C_1): x^2+y^2-2x-4y-4=0$, $(C_2): x^2+y^2+2x-2y-14=0$

② $(C_1): x^2+y^2-4x-9=0$, $(C_2): x^2+y^2+2y-14=0$

③ $(C_1): x^2+y^2-7x-7=0$, $(C_2): x^2+y^2-x-7y-18=0$

Bài 34. Cho $(C_1): (x+2)^2+(y-2)^2=2$ và $(C_2): (x-3)^2+(y-2)^2=1$

① Chứng minh (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.

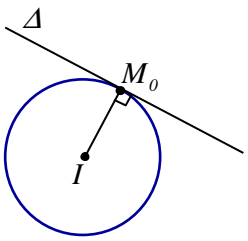
② Cho $M(1;2)$. Hãy tìm điểm $A\in(C_1)$, $B\in(C_2)$ sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Dạng 5. Tiếp tuyến với đường tròn

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

Điều kiện để Δ tiếp xúc với (C) là: $\boxed{d(I,\Delta)=R}$



① Loại 1. Tiếp tuyến tại một điểm $M_0(x_0;y_0)$ trên đường tròn:

- **Bước 1**: Tìm tâm $I(a;b)$ của (C)
- **Bước 2**: Tính $\overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-b)$
- **Bước 3:** Phương trình tiếp tuyến tại M có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}$ có dạng:

$$\boxed{(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0}$$

② Loại 2. Tiếp tuyến có phương cho trước:

❖ Cách 1: Dùng khi không cần tìm tọa độ tiếp điểm:

- **Bước 1**: Viết phương trình của Δ có phương cho trước
- **Bước 2**: Dựa vào điều kiện tiếp xúc $\boxed{d(I,\Delta)=R}$ để tìm phần còn lại. Từ đó suy ra phương trình của tiếp tuyến Δ.

✍ Một số dạng thường gặp:

✓ $\Delta // d: Ax+By+C=0 \Rightarrow \boxed{\Delta: Ax+By+C=0}, C'\neq C$

✓ $\Delta \perp d: Ax+By+C=0 \Rightarrow \boxed{\Delta: Bx-Ay+C'=0}$

✓ Δ có hệ số góc k: $\boxed{y=kx+m \Leftrightarrow kx-y+m=0}$

✓ Tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc α, khi đó ta linh hoạt sử dụng một trong hai công thức:

- $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_d.\vec{n}_\Delta|}{|\vec{n}_d|.|\vec{n}_\Delta|}$, trong đó $\vec{n}_d,\vec{n}_\Delta$ là VTPT của d và Δ.
- $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_d-k_\Delta}{1+k_dk_\Delta}\right|$, trong đó k_d,k_Δ hệ số góc của d và Δ.

❖ Cách 2: Dùng khi cần tìm tọa độ tiếp điểm:

- **Bước 1**: Giả sử $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm: $M\in(C)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0$ (1)

  Hoặc: $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$
- **Bước 2**: Sử dụng điều kiện của giả thiết để lập thêm một phương trình theo x_0, y_0, kí hiệu là phương trình (3).
- **Bước 3**: Giải hệ tạo bởi (1) và (2) ta được tọa độ tiếp điểm M rồi viết như dạng 1.

③ Loại 3. Tiếp tuyến qua một điểm $N(x_N;y_N)$ nằm ngoài đường tròn:

❖ Cách 1: Dùng khi không cần tìm tọa độ tiếp điểm:

- **Bước 1**: Xác định tọa độ tâm $I(a;b)$ và tính bán kính R của (C).
- **Bước 2**: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua N và có VTPT $\vec{n}=(A;B)$:

$$\boxed{A(x-x_N)+B(y-y_N)=0}$$

- **Bước 3**: Dùng điều kiện tiếp xúc để thiết lập mối quan hệ giữa A và B:

$$\boxed{\Delta \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R}$$

- **Bước 4**: Giải phương trình trên, tìm A, B suy ra phương trình Δ.

✍ **Chú ý**: Ta có thể dùng dạng đường thẳng Δ qua N với hệ số góc k, rồi sau đó xét thêm trường hợp $x=x_N$.

❖ **Cách 2: Dùng khi cần tìm tọa độ tiếp điểm:**

- **Bước 1**: Giả sử $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm: $M\in(C)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c=0$ (1)

  Hoặc: $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$

- **Bước 2**: Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;y_0)$:

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

- **Bước 3**: $N(x_N;y_N)\in\Delta$ nên ta có $\boxed{(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0}$ (2)

- **Bước 4**: Giải hệ (1) và (2) ta được tọa độ tiếp điểm. Từ đó suy ra tiếp tuyến Δ.

③ ***Loại 4. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2):***

- **Bước 1**: Xác định tâm và bán kính của (C_1) và (C_2):
  - ✓ (C_1) có tâm I_1 và bán kính R_1
  - ✓ (C_2) có tâm I_2 và bán kính R_2
- **Bước 2**: Giả sử phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn có dạng: $\boxed{\Delta: Ax+By+C=0}$ $(A^2+B^2\neq 0)$
- **Bước 3**: Vì Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) nên $\boxed{\begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases}}$
- **Bước 4**: Giải hệ trên tìm A, B rồi suy ra phương trình Δ.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 8. Cho đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ và điểm $M_0(x_0;y_0)\in(C)$. Chứng minh rằng tiếp tuyến Δ của đường tròn (C) tại M_0 có phương trình $\boxed{(x_0-1)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 9. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn (C) trong các trường hợp:

① $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=5$, tiếp tuyến tại điểm $M(2;3)$

② $(C):x^2+y^2-2x-8y-8=0$, tiếp tuyến qua $M(-4;-6)$

③ $(C):x^2+y^2-2x-6y+9=0$, tiếp tuyến $\Delta \perp d:3x-4y+2018=0$

④ $(C):x^2+y^2-2x+4y-4=0$, tiếp tuyến $\Delta // d:3x-y+2018=0$

⑤ $(C):(x-4)^2+(y-5)^2=10$, tiếp tuyến Δ có hệ số góc bằng 3.

VD 10. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+8x+4y-5=0$ và điểm $A(2;1)$.

① Chứng tỏ qua điểm A vẽ được hai tiếp tuyến với (C).

② Viết phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 11. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=4$ và điểm $A(-2;3)$.

① Chứng tỏ điểm A ở ngoài đường tròn. Lập phương trình 2 tiếp tuyến kẻ từ A.

② Tính khoảng cách từ A đến hai tiếp tuyến và khoảng cách giữa hai tiếp điểm T và T'.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VD 12. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) *và* (C_2):

$$(C_1): x^2+y^2=1 \text{ và } (C_2): (x-8)^2+(y-6)^2=16$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 35. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M \in (C)$, với:

① $(C): x^2+y^2=25$ và $M(3;4)$

② $(C): x^2+y^2=50$ và $M(5;-5)$

③ $(C): (x-3)^2+(y+4)^2=169$ và $M(8;-16)$

④ $(C): x^2+y^2+4x-9=0$ và $M(1;2)$

⑤ $(C): x^2+y^2+4x+4y+3=0$ và $M(-3;0)$

⑥ $(C): x^2+y^2-2x-8y-8=0$ và $M(4;0)$

Bài 36. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C)

① tại A có hoành độ là 0.

② tại các giao điểm của (C) với Oy

③ tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $d: x+y=0$.

Bài 37. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) kẻ từ một điểm A cho trước:

① $(C): x^2+y^2-4x+2y+2=0$ và $A(3;1)$

② $(C): x^2+y^2+4x-4y-1=0$ và $A(0;-1)$

③ $(C): x^2+y^2+2x-4y+4=0$ và $A(3;5)$

④ $(C): x^2+y^2-2x-8y-8=0$ và $A(-4;-6)$

⑤ $(C): x^2+y^2+2x-8y+13=0$ và $A(1;1)$

⑥ $(C): x^2+y^2-6x-4y+8=0$ và $A(8;7)$

Bài 38. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x-6y+17=0$.

① Chứng tỏ $M(6;5)$ nằm trên (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại M.

② Chứng tỏ $N(0;-1)$ nằm ngoài (C). Viết phương trình tiếp tuyến qua N.

Bài 39. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=25$.

① Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C).

② Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(5;3)$.

③ Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d_1: 5x-12y+2=0$.

④ Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d_2: 3x+4y-7=0$.

⑤ Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua A(3; 6).

Bài 40. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+2y+5=0$.

① Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C).

② Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d_1: 4x+2y+2018=0$.

③ Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d_2: 2x-y-7=0$.

Bài 41. Cho đường tròn. Hãy viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc α trong các trường hợp sau:

① $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=10$, $\alpha=45°$, $d: 2x+y-4=0$

② $(C): x^2+y^2+4x-8y+10=0$, $\alpha=60°$, $d: 2x-3y+1=0$

Bài 42. Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2).

- Tìm tâm và bán kính của (C_1) và (C_2)
- Xét vị trí tương đối của của (C_1) và (C_2)
- Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

① $(C_1): x^2+y^2=9$ và $(C_2): x^2+y^2-2x-3=0$.

② $(C_1): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-4y+16=0$

③ $(C_1): x^2+y^2-10x=0$ và $(C_2): x^2+y^2+4x-2y-20=0$

④ $(C_1): x^2+y^2-4x-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$

Bài 43. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-4)^2=4$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn biết rằng tiếp tuyến đó:

① tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

② tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài 44. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y=0$ và đường thẳng $d: x-y+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d mà từ đó có thể kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB}=60°$.

Bài 45. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn sao cho ΔPAB đều.

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3

Bài 46. Trong các phương trình dưới đây xét xem phương trình nào là phương trình của đường tròn, tìm tâm và bán kính nếu có:

① $x^2+y^2-2x-4y+9=0$ ② $x^2+y^2-6x+4y-13=0$

③ $x^2+y^2-4x-2y-3=0$ ④ $x^2+y^2-12x-6y+44=0$

Bài 47. Viết phương trình tổng quát của đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

① Tâm là $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$.

② Đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-5)$

③ Đi qua ba điểm $A(-2;4)$, $B(5;5)$ và $C(6;-2)$

④ Đi qua ba điểm $A(2;1)$, $B(2;5)$ và $C(-2;1)$

⑤ Có tâm $I(2;-5)$ và tiếp xúc với trục Ox

⑥ Có tâm $I(1;3)$ và tiếp xúc với trục Oy

⑦ Qua $A(9;9)$ và tiếp xúc với trục Ox tại điểm $M(6;0)$

⑧ Tiếp xúc với Ox tại $A(2;0)$ và khoảng cách từ tâm đến $B(6;4)$ bằng 5

⑨ Qua $M(2;1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ

⑩ Tiếp xúc với hai trục tọa độ và có tâm nằm trên $d: 4x-2y-8=0$

⑪ Qua $A(2;3)$, $B(-2;1)$ và có tâm nằm trên trục hoành.

⑫ Qua hai điểm $A(2;0)$, $B(3;1)$ và bán kính $R=5$

⑬ Qua hai điểm $A(-1;1)$, $B(0;2)$ và có tâm nằm trên $d: 2x+3y=0$

⑭ Tiếp xúc với đường thẳng $d_1: x-2y+3=0$ tại $M(1;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d_2: x-5y-5=0$.

⑮ Tiếp xúc với đường thẳng $d_1: 3x-4y-31=0$ tại $M(1;-7)$ và có bán kính $R=5$.

⑯ Qua $A(5;3)$ và tiếp xúc với $d: x+3y+2=0$ tại $M(1;-1)$

⑰ Đối xứng với $(C'): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ qua $d: x-y-1=0$

⑱ Đối xứng với $(C'): x^2+y^2-2x-4y+3=0$ qua $d: x-2=0$

⑲ Đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d: 2x+y-1=0$ và $d': 2x-y+2=0$.

⑳ Đi qua điểm $A(1;1)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d: 7x+y-3=0$ và $d': x+7y-3=0$.

Bài 48. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm $A(3;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $2x+y-3=0$ tại điểm $B(1;1)$.

Bài 49. Viết phương trình của đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x+3y-2=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d: x+y+4=0$ và $d': 7x-y+4=0$.

Bài 50. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với đường thẳng $x-7y+10=0$ tại điểm $A(4;2)$, biết tâm đường tròn này nằm trên đường thẳng $2x+y=0$.

Bài 51. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(1;-2)$ và các giao điểm của đường thẳng $x-7y+10=0$ với đường tròn: $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Bài 52. Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2+4x+4y-17=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) biết:

① d tiếp xúc với (C) tại điểm $M(2;1)$.

② d đi qua điểm $A(2;6)$.

③ d song song với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-192=0$.

④ d vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x-y+1=0$.

Bài 53. Cho đường tròn có phương trình: $x^2+y^2-4x+8y-5=0$.

① Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn.

② Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi qua điểm $A(-1;0)$.

③ Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi qua điểm $B(3;-11)$.

④ Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với đường thẳng $x+2y=0$.

⑤ Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn song song với đường thẳng $3x-y+2=0$.

⑥ Tìm điều kiện của m để đường thẳng $x+(m-1)y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn.

Bài 54. Cho đường (C_m) có phương trình: $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$

① Tìm điều kiện của m để (C_m) là phương trình của đường tròn.

② Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Bài 55. Cho điểm $A(3;1)$.

① Tìm tọa độ điểm B và C sao cho $OABC$ là hình vuông và điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất.

② Viết phương trình hai đường chéo và tìm tâm của hình vuông $OABC$.

③ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp hình vuông $OABC$.

Bài 56. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-6x+5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-12x-6y+44=0$

① Xác định tâm và bán kính của các đường tròn (C_1) và (C_2).

② Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Bài 57. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x-8y+11=0$ và $(C_2): x^2+y^2-2x-2y-2=0$

① Xác định tâm và bán kính của các đường tròn (C_1) và (C_2).

② Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Bài 58. Cho ΔABC, các cạnh BC, CA và AB có phương trình $BC: x+2y-5=0$, $CA: 2x-y-5=0$ và $AB: 2x+y+5=0$.

① Tìm các góc của ΔABC.

② Tìm phương trình các đường phân giác trong của góc A và B.

③ Tính tọa độ tâm, bán kính và viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.

Bài 59. Cho ΔABC có $A(0,25;0)$, $B(2;0)$, $C(-2;2)$.

① Tìm góc C của tam giác ABC.

② Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.

③ Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp ΔABC biết tiếp tuyến này song song với cạnh BC. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(2;4)$, $B(1;-1)$ và $C(4;1)$.

① Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

② Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn ấy tại điểm A và C.

③ Tìm góc tạo bởi hai tiếp tuyến ấy.

Bài 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(12;0)$ và $B(0;5)$.

① Viết phương trình đường tròn (C_1) nội tiếp tam giác OAB.

② Viết phương trình đường tròn (C_2) đi qua ba trung điểm của ba cạnh của tam giác OAB.

③ Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C_2) đi qua điểm O.

④ Chứng tỏ rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) không cắt nhau.

Bài 62. Cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m-1)x-4my+3m+11=0$

① Với giá trị nào của m thì (C_m) là một đường tròn.

② Xác định tâm cà bán kính của đường tròn với m = 3.

③ Tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Bài 63. Cho đường cong $(C_m): x^2+y^2-4mx-2y+4m=0$

① Chứng minh rằng (C_m) là đường tròn với mọi giá trị của m. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó theo m.

② Tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Bài 64. Cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2+2mx-4(m+1)y-1=0$

① Tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

② Chứng tỏ các đường tròn này đi qua 2 điểm cố định khi m thay đổi.

③ Cho $m=3$ và điểm $A(0;-1)$. Viết các tiếp tuyến của đường tròn (C_3) kẻ từ điểm A.

Bài 65. Cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-1=0$ và $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$

① Tìm tập hợp tâm của các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

② Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_1) và (C_2) trong các đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường tròn (C).

③ Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Bài 66. Cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2-(m-2)x+2my-1=0$

① Tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

② Chứng tỏ các đường tròn này đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi.

③ Cho $m=-2$ và điểm $A(0;-1)$. Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C_{-2}) kẻ từ điểm A.

Bài 67. Cho phương trình: $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ (1)

① Chứng minh rằng (1) là phương trình của đường tròn (C), xác định tâm và bán kính.

② Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) xuất phát từ điểm $A(5;7)$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 68. Xét đường thẳng $d: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$ và hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x+2y-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-10x-6y+30=0$ có tâm lần lượt là I và J.

① Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm tọa độ tiếp điểm H.

② Gọi d là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2). Tìm tọa độ giao điểm K của d và đường thẳng IJ.

③ Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H.

Bài 69. Cho đường tròn (T) có phương trình: $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.

① Chứng minh đường thẳng OA với $A(-4;-3)$ tiếp xúc với (T).

② Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc trục Ox và tiếp xúc với đường thẳng OA tại A.

Bài 70. Cho điểm $I(-1;2)$ và đường thẳng $\Delta: 3x+2y+12=0$.

① Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với Δ.

② CMR $d: x-5y-2=0$ cắt (C) tại 2 điểm A và B. Tính AB.

③ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) song song với $d: 2x-3y+1=0$.

④ CMR điểm $M(1;3)$ nằm trong đường tròn (C). Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung của (C) nhận M làm trung điểm.

Bài 71. Cho hai điểm $I(0;5)$ và $M(3;1)$.

① Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và đi qua điểm M.

② Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) kẻ từ $A(5;-2)$.

③ Định m để đường thẳng $d: y=x+m$ và đường tròn (C) có giao điểm.

④ CMR $N(5;5)$ thuộc đường tròn. Tìm điểm P trên (C) sao cho ΔMNP vuông tại M.

Bài 72. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho hai điểm $I(-1;2)$ và $M(-3;5)$.

① Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và đi qua M.

② Định m để đường thẳng $\Delta: 2x+3y+m=0$ tiếp xúc với (C).

③ Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại hai giao điểm A, B của đường tròn (C) với đường thẳng $x-5y-2=0$.

④ Tìm điểm C sao cho ΔABC là tam giác vuông nội tiếp đường tròn (C).

Bài 73. Cho đường thẳng $\Delta: y+2x+3=0$ và hai điểm $A(-5;1)$ và $B(-2;4)$.

① Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và có tâm I thuộc Δ.

② Viết phương trình tiếp tuyến tại A với đường tròn (C). Tìm tọa độ giao điểm của tiếp tuyến này với trục Ox.

③ Viết phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến qua $E(1;2)$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 74. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x-4y-12=0$ và điểm $A(0,5;4,5)$.

① Xác định tâm và bán kính của đường tròn đã cho.

② Chứng tỏ điểm A ở trong đường tròn.

③ Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung qua A sao cho dây cung ngắn nhất.

Bài 75. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-2(m-1)y=0$ (1).

① Chứng minh rằng với mọi m (1) là phương trình của đường tròn.

② Tìm bán kính và giá trị nhỏ nhất của bán kính của đường tròn trên.

③ Tìm tập hợp tâm của đường tròn (1) khi m thay đổi.

④ Chứng tỏ các đường tròn này đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi.

⑤ Tìm m để đường tròn (1) tiếp xúc với đường thẳng: $x+y-1=0$.

Bài 76. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-2)^2=9$ và điểm $M(-4;-1)$.

① Chứng minh rằng điểm M nằm ngoài đường tròn (C).

② Viết phương trình đường thẳng d qua M cắc (C) tại hai điểm A, B sao cho $MA=2MB$.

Bài 77. Cho hình chữa nhật $ABCD$. Gọi $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp. Phương trình chứa cạnh $AB: x-2y+2=0$, $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết A có hoành độ âm.

Bài 78. Cho hai đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2-13=0$ và $(C'):(x+3)^2+(y-1)^2-36=0$

① Chứng tỏ hai đường tròn trên cắt nhau.

② Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung chung.

③ Tính độ dài đoạn dây cung chung.

Bài 79. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

① Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

② Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, AB, OB. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

③ Chứng minh hai đường tròn trên tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 80. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C') có tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 81. Cho ΔABC có $A(1;0)$, $B(0;2)$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua các giao điểm của đường tròn (C) và đường tròn ngoại tiếp ΔOAB.

Bài 82. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+3y+m+3=0 & (1) \\ x^2+y^2-2x-15=0 & (2) \end{cases}$

① Chứng minh rằng hệ luôn có hai nghiệm với mọi m.

② Gọi $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ là 2 nghiệm của hệ. Tìm GTLN - GTNN của biểu thức $F=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.

Bài 83. Cho hai số thức x, y thỏa $x^2+4x+y^2-5=0$. Tìm GTLN - GTNN của biểu thức $T=3x+4y$.

3. ELIP

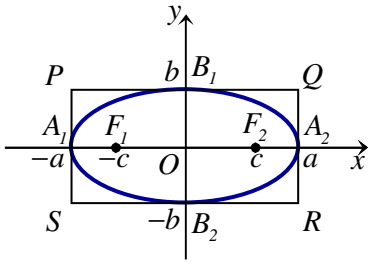
Tóm tắt lí thuyết

1. Định nghĩa:

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$:

$$\boxed{M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a} \quad (a > c)$$

F_1, F_2: các tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$: tiêu cự



2. Phương trình chính tắc của elip:

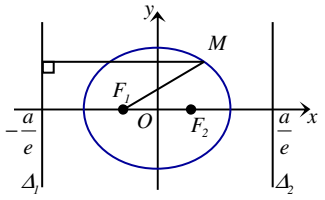
- Phương trình chính tắc: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $(a > b > 0,\ b^2 = a^2 - c^2)$
- Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$
- Với $M(x_M; y_M) \in (E)$:
  - ✓ $\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$, $-a \le x_M \le a$, $-b \le y_M \le b$.
  - ✓ MF_1, MF_2 bán kính qua tiêu điểm: $MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M$.

3. Hình dạng elip:

- (E) nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- **Tọa độ các đỉnh**: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
- **Độ dài** các trục: <u>trục lớn</u> $A_1A_2 = 2a$; <u>trục nhỏ</u> $B_1B_2 = 2b$
- **Tâm sai** của (E): $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ $(0 < e < 1)$
- Hình chữ nhật cơ sở (ngoại tiếp elip) $PQRS$: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. Đường chuẩn của elip:

- Phương trình các đường chuẩn Δ_1, Δ_2 ứng với các tiêu điểm F_1, F_2 là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$
- Với $M \in (E)$, ta có: $\boxed{\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e}$ $(e < 1)$



Phương pháp giải toán

Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chuyển (E) về dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.
  Xác định a, b $\Rightarrow c^2=a^2-b^2$.
- Các yếu tố:
  - Độ dài trục lớn: $2a$, trục nhỏ: $2b$
  - Tiêu cự $2c$
  - Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
  - Tâm sai $e=\frac{c}{a}<1$
  - Phương trình các đường chuẩn: $x\pm\frac{a}{e}=0$.
  - Phương trình bốn cạnh hình chữ nhật cơ sở: $x=\pm a$, $y=\pm b$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 1. Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình:

① $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ② $16x^2+25y^2=400$ ③ $9x^2+25y^2=1$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình:

① $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ② $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ③ $x^2+4y^2=4$

④ $x^2+9y^2=9$ ⑤ $4x^2+9y^2=5$ ⑥ $x^2+4y^2=1$

Dạng 2. Lập phương trình elip

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- **Bước 1**: Phương trình elip có dạng $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- **Bước 2**: Thiết lập hệ phương trình chứa a, b để tìm a và b.

Chú ý các kết quả sau:

✓ $a^2=b^2+c^2$

✓ Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $\frac{2a^2}{c}$

✓ Bốn cạnh hình chữ nhật cơ sở: $x=\pm a,\ y=\pm b$

B. CÁC VÍ DỤ

VD 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết:

① Độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 8 và 6.

② Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6

③ Độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ Đi qua điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$.

⑤ Một tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết:

① Độ dài trục lớn là 6, trục nhỏ bằng 4.

② Độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4

③ Độ dài trục lớn bằng 8 và độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự

④ Một tiêu điểm $F_1(1;0)$ và độ dài trục nhỏ bằng 2.

⑤ Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$

⑥ Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$.

⑦ Một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

⑧ Một tiêu điểm $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

⑨ Đi qua hai điểm $M(1;0)$ và $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

⑩ Đi qua hai điểm $M(4;-\sqrt{3})$ và $N\left(2\sqrt{2};3\right)$

⑪ Đi qua hai điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$

⑫ Độ dài trục lớn bằng 10 và tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

⑬ Độ dài trục nhỏ là 6, phương trình các đường chuẩn là $x\sqrt{7}\pm16=0$

⑭ Đi qua điểm $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$

⑮ Có tiêu cự bằng 4 và tỉ số độ dài hai trục bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$

⑯ Đi qua $M\left(3;2\sqrt{3}\right)$ và có bán kính qua tiêu điểm trái của M bằng 20.

⑰ Có phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở $x=\pm 9$, $y=\pm 3$.

⑱ Hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng $x-2=0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.

⑲ Có đỉnh $A_1(-5;0)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có dạng $x^2+y^2=34$.

⑳ Có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

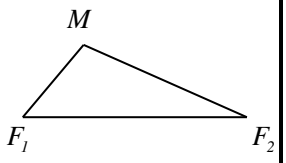
Dạng 3. Tìm điểm trên elip- Tương giao

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tìm điểm M trên hypebol (H):

- Bán kính qua tiêu điểm: $MF_1=a+e.x_M=a+\frac{c}{a}\cdot x_M$; $MF_2=a-e.x_M=a-\frac{c}{a}\cdot x_M$
- Định lí hàm số cosin: $F_1F_2^2=F_1M^2+F_2M^2-2F_1M.F_2M.\cos\widehat{F_1MF_2}$
- Điểm $M(x_M;y_M)\in(E)$:

$$M(x_M;y_M)\in(E)\Leftrightarrow\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\frac{x_M^2}{a^2}\le 1\\ \frac{y_M^2}{b^2}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\le x\le a\\ -b\le x\le b\end{cases}$$



2. Tương giao giữa đường thẳng d và elip (E):

Cho đường thẳng $d: Ax+By+C=0$ và elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

- Từ phương trình d, rút y theo x (hoặc x theo y) thế vào phương trình (E) ta được phương trình bậc hai, kí hiệu là **phương trình (1)**.
- Số điểm chung (nếu có) của d và (E) là số nghiệm của (1).
  - ✓ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ d và (E) không có điểm chung
  - ✓ (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ d và (E) tiếp xúc nhau
  - ✓ (1) có hai nghiệm phân biện $\Leftrightarrow$ d cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

B. CÁC VÍ DỤ

VD 3. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Tìm những điểm nằm trên (E) sao cho số đo $\widehat{F_1MF_2}=60°$.

VD 4. Tìm những điểm trên elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có bán kính qua tiêu điểm bằng $\frac{5}{2}$.

VD 5. Cho elip $(E): x^2+9y^2=9$

① Tìm điểm M trên (E) sao cho $MF_1=2MF_2$.

② Tìm điểm M trên (E) sao cho $3MF_1=MF_2$.

③ Tìm điểm M trên (E) sao cho $\frac{1}{MF_1}+\frac{1}{MF_2}=\frac{6}{F_1F_2}$.

VD 6. Cho elip $(E):16x^2+25y^2=100$ và $d:y=x+b$.

① Tìm b để d và (E) có điểm chung.

② Khi d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm b để AB dài nhất.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3. Tìm những điểm M trên elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ sao cho hiệu số hai bán kính qua tiêu điểm bằng $\frac{32}{5}$.

Bài 4. Cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Tìm những điểm nằm trên (E) sao cho số đo $\widehat{F_1MF_2}$ là:

① $90°$ ② $30°$.

Bài 5. Cho elip $(E): 4x^2+9y^2=36$. Tìm những điểm nằm trên (E) sao cho số đo $\widehat{F_1MF_2}$ là:

① $90°$ ② $60°$ ③ $30°$.

Bài 6. Cho elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho:

① $MF_2=4MF_1$ ② Nhìn F_1 và F_2 dưới một góc vuông.

Bài 7. Cho elip (E). Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho:

ⓐ $MF_1=MF_2$ ⓑ $MF_2=3MF_1$ ⓒ $MF_1=4MF_2$

① $9x^2+25y^2=225$ ② $9x^2+16y^2=144$ ③ $7x^2+16y^2=112$

Bài 8. Cho elip (E). Tìm điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông:

① $9x^2+25y^2=225$ ② $9x^2+16y^2=144$ ③ $7x^2+16y^2=112$

Bài 9. Cho elip (E) và đường thẳng d vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm bên phải F_2 cắt (E) tại hai điểm phân biệt M, N.

ⓐ Tìm tọa độ các điểm M, N. ⓑ Tính MF_1, MF_2, MN.

① $9x^2+25y^2=225$ ② $9x^2+25y^2=1$ ③ $7x^2+16y^2=112$

Bài 10. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M trên $d: x+5=0$ sao cho M cách đều tiêu điểm trái và đỉnh trên của elip (E).

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 2

Bài 11. Cho elip (E). Tìm những điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ và $120°$, với (E) có phương trình:

① $9x^2+25y^2=225$ ② $9x^2+16y^2=144$ ③ $7x^2+16y^2=112$

Bài 12. Cho elip $(E): 16x^2+25y^2=400$.

① Biết $M \in (E)$ sao cho $MF_1=3$. Tìm MF_2 và tìm tọa độ điểm M.

② Dây cung AB thay đổi đi qua tiêu điểm F_1 nhưng không đi qua tiêu điểm F_2 của (E). Chứng minh rằng chu vi tam giác ABF_2 không đổi.

Bài 13. Cho elip $(E): 9x^2+16y^2=144$ và đường thẳng $d: 3x+4y-12=0$.

① Chứng minh rằng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

② Tìm tọa độ điểm $C \in (E)$ sao cho:

ⓐ ΔABC có diện tích bằng 6. ⓑ ΔABC có diện tích lớn nhất. ⓒ ΔABC vuông.

Bài 14. Cho elip $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d:3x-y-m=0$.

① Với giá trị nào của m thì d cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?

② Với giá trị nào của m thì d cắt (E) tại một điểm duy nhất?

Bài 15. Cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Lập phương trình đường thẳng d qua điểm $M(-1;-1)$ và d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Bài 16. Lập phương trình đường thẳng d qua điểm $M(3;0)$ sao cho d cắt $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ tại 2 điểm phân biệt A, B nhận M làm trung điểm.

Bài 17. Cho elip $(E):16x^2+25y^2=100$ và $d:y=x+b$.

① Tìm b để d và (E) có điểm chung.

② Khi d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm b để AB dài nhất.

Bài 18. Chứng minh elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ và $(E'):2x^2+8y^2=16$ cắt nhau tại 4 điểm. Lập phương trình đường tròn qua bốn điểm đó.

Bài 19. Cho elip $(E):16x^2+25y^2=100$ và $d:y=x+b$.

① Tìm b để d và (E) có điểm chung.

② Khi d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm b để AB dài nhất.

Bài 20. Cho elip $(E):9x^2+25y^2=225$ và $d:y=x+b$.

① Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai và độ dài các trục của (E).

② Đường thẳng d qua tiêu điểu F_1, vuông góc với trục Ox và cắt (E) tại hai điểm M, N. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

③ Lấy P, Q thuộc elip (E) sao cho $PF_1+QF_2=6$. Tính QF_1+PF_2.

④ Cho điểm $K\in(E)$. Tính $KF_1.KF_2+OK^2$, với O là gốc tọa độ.

Bài 21. Cho elip $(E):9x^2+16y^2=144$ và $d:y=x+b$.

① Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai và độ dài các trục của (E).

② Gọi M là điểm di động trên (E). Chúng minh $OM^2+MF_1.MF_2$ là một hằng số.

③ Tìm điểm N thuộc (E) sao cho ΔNF_1F_2 vuông tại N.

④ Cho A, B là hai điểm nằm trên (E) với $AF_1+BF_2=8$. Tính AF_2+BF_1.

4. TRÍCH ĐỀ ĐH-CĐ-THPTQG

A – ĐƯỜNG THẲNG

4.1 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét ΔABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

ĐH Khối A -02 <u>ĐS</u>: $G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right), G_2\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

4.2 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

ĐH Khối B -02 <u>ĐS</u>: $A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$

4.3 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC và điểm $M(-1;1)$ là trung điểm của AB. Hai cạnh AC và BC theo thứ tự nằm trên hai đường thẳng $2x+y-2=0$ và $x+3y-3=0$.

① Xác định tọa độ ba đỉnh của ΔABC, viết phương trình đường cao CH.

② Tính diện tích của ΔABC.

CĐ SP Vĩnh Phúc -02 <u>ĐS</u>: *a)* $A(1;0)$, $B(-3;2)$, $C(3/5;4/5)$ *b)* $10x-5y-2=0$

4.4 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $AB=AC$, $\widehat{BAC}=90°$. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm ΔABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐH Khối B -03 <u>ĐS</u>: $A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)$

4.5 Cho ΔABC có đỉnh $A(1;0)$ và hai đường thẳng lần lượt chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là $x-2y+1=0$ và $3x+y-1=0$. Tính diện tích của ΔABC.

DB1 Khối D -03 <u>ĐS</u>: $S_{\Delta ABC}=14$

4.6 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$. Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB.

ĐH Khối A -04 <u>ĐS</u>: $H\left(\sqrt{3};-1\right)$, $I\left(-\sqrt{3};1\right)$

4.7 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1)$ và $B(4;-3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng $AB=6$.

ĐH Khối B -04 <u>ĐS</u>: $C_1(7;3), C_2(-43/11;-27/11)$

4.8 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có các đỉnh $A(-1;0)$, $B(4;0)$, $C(0;m)$, với m khác 0. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác GAB theo m. Xác định m để ΔABC vuông tại G.

ĐH Khối D -04 <u>ĐS</u>: $G(1;m/3)$, $m=\pm 3\sqrt{6}$

4.9 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có các đỉnh $A(0;1)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là $2x-y-1=0$ và $x+3y-1=0$. Tính diện tích ΔABC.

CĐ Điều dưỡng -04 *ĐS: $S_{\Delta ABC}=14$ (đvdt)*

4.10 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x+3y+1=0$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình của các đường thẳng đi qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc $45°$.

CĐ KTKT I -04 *ĐS: $5x+y-6=0$; $x-5y+4=0$*

4.11 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh $A(3;9)$ và hai đường thẳng chứa các đường trung tuyến BM và CN có phương trình tương ứng là $3x-4y+9=0$ và $y-6=0$. Viết phương trình đường trung tuyến còn lại.

ĐH Hùng Vương hệ CĐ -04 *ĐS: $3x+2y-27=0$*

4.12 Cho hai đường thẳng: $d_1: x-y+1=0$, $d_2: 2x+y-1=0$ và điểm $P(2;1)$.

① Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm P và giao điểm I của hai đường thẳng d_1, d_2.

② Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm P và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho P là trung điểm của AB.

CĐ SP Hải Phòng -04 *ĐS: a) $y-1=0$ b) $4x-y-7=0$*

4.13 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có phương trình đường thẳng AB là $x-2y+7=0$, các đường trung tuyến kẻ từ A, B lần lượt có phương trình là $x+y-5=0$ và $2x+y-11=0$.

① Hãy tính diện tích của ΔABC.

② Viết phương trình đường thẳng AC, BC.

CĐ SP NT-MG TW1 -04 *ĐS: a) $S_{\Delta ABC}=45/2$ (đvdt)*

b) $AC: 16x+13y-68=0$, $BC: 17x+11y-106=0$

4.14 Cho ΔABC có $A(-6;-3)$, $B(-4;3)$, $C(9;2)$.

① Viết phương trình các cạnh của ΔABC.

② Viết phương trình đường phân giác trong của góc A của ΔABC.

③ Tìm điểm M trên cạnh AB và tìm điểm N trên cạnh AC sao cho $MN \parallel BC$ và $AM=CN$.

CĐ Khối A -04 *ĐS: a) $AB: 3x-y+15=0$, $AC: x-3y-3=0$, $BC: x+13y-35=0$*

b) $x-y+3=0$ c) $M(-32/7;9/7)$, $N(33/7;4/7)$

4.15 Cho điểm $I(-2;3)$. Tìm phương trình đường thẳng qua I và cách đều hai điểm $A(3;-1)$, $B(3;5)$.

CĐ KTKT CN I -04 *ĐS: $\Delta_1: x+2=0; \Delta_2: x+5y-13=0$*

4.16 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;1)$, $B(-2;3)$, $C(4;5)$. Hãy viết phương trình các đường thẳng cách đều ba điểm A, B, C.

CĐ TCKT IV -04 <u>ĐS</u>: $x-3y+6=0$; $x+2y-9=0$; $2x-y+2=0$

4.17 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x-y=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

ĐH Khối A -05 <u>ĐS</u>: $A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0) \vee A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)$

4.18 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC cân tại đỉnh A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x-2y-4=0$ và phương trình đường thẳng BG là $7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của ΔABC.

DB1 Khối B -05 <u>ĐS</u>: $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$

4.19 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$. Hãy viết phương trình các đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng 1.

CĐ KT Cao Thắng -05 <u>ĐS</u>: $\Delta_1: 3x+4y-4=0, \Delta_2: 3x+4y+6=0$

4.20 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng: $d_1: x+y+3=0$, $d_2: x-y-4=0$ và $d_3: x-2y=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

ĐH Khối A -06 <u>ĐS</u>: $M_1(-22;-11) \vee M_2(2;1)$

4.21 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x-4y-2=0$, cạnh BC song song với d. Phương trình đường cao $BH: x+y+3=0$ và trung điểm của cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

DB2 Khối A -06 <u>ĐS</u>: $A(-2/3;-2/3), B(-4;1), C(8/3;8/3)$

4.22 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại B, với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Điểm B nằm trên đường thẳng $d: 2x-y=0$. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.

DB1 Khối B -06 <u>ĐS</u>: $AB: 23x-y-24=0, BC: 19x-13y+8=0$

4.23 Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(2;1)$, đường cao qua đỉnh B có phương trình là $x-3y-7=0$ và đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình là $x+y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của ΔABC.

DB2 Khối B -06 <u>ĐS</u>: $B(-2;-3), C(4;-5)$

4.24 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng: $d_1: 2x-3y+1=0$ và $d_2: 4x+y-5=0$. Gọi A là giao điểm của d_1, d_2. Tìm điểm B trên d_1 và điểm C trên d_2 sao cho tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(3;5)$.

CĐ BC Hoa Sen -06 <u>ĐS</u>: $B(61/7;43/7), C(-5/7;55/7)$

4.25 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+y-3=0$ và hai điểm $A(1;1)$, $B(-3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

CĐ Điện lực -06 <u>ĐS:</u> $M_1(0;3), M_2(10;-7)$

4.26 Cho ba điểm $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(4;3)$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân. Viết phương trình các đường cao của tam giác đó.

CĐ KTKT CN I -06

<u>ĐS:</u> *a)* ΔABC *cân tại* B *b)* $AH: x+2y-5=0, BI: 3x+y-10=0, CK: 2x-y-5=0$

4.27 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(-2;1)$ và đường thẳng d có phương trình là $3x-4y=0$.

① Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với d.

② Viết phương trình tập hợp các điểm mà qua đó vẽ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

CĐ Kinh tế TPHCM -06 <u>ĐS:</u>

4.28 Cho hình thoi $ABCD$ có phương trình hai cạnh và một đường chéo là $AB: 7x-11y+83=0$, $CD: 7x-11y-53=0$, $BD: 5x-3y+1=0$. Tìm tọa độ của B và D. Viết phương trình đường chéo AC rồi suy ra tọa độ của A và C.

CĐ GTVT III -06 <u>ĐS:</u>

4.29 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;2)$ và các đường thẳng: $d_1: x+y-2=0$ và $d_2: x+y-8=0$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

ĐH Khối B -07 <u>ĐS:</u> $B(-1;3), C(3;5) \vee B(3;-1), C(5;3)$

4.30 Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có trọng tâm $G(-2;0)$ biết phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là $4x+y+14=0$; $2x+5y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

DB2 Khối A -07 <u>ĐS:</u>. $A(-4;2), B(-3;-2), C(1;0)$.

4.31 Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;1)$ lấy điểm B thuộc trục Ox có hoành độ $x \geq 0$ và điểm C thuộc trục Oy có trung độ $y \geq 0$ sao cho ΔABC vuông tại A. Tìm B, C sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

DB1 Khối D -07 *ĐS:* $B(0;0), C(0;5)$

4.32 Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(0;1)$ $B(2;-1)$ và các đường thẳng $d_1: (m-1)x+(m-2)y+2-m=0$, $d_2: (2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi $P=d_1 \cap d_2$. Tìm m sao cho $PA+PB$ lớn nhất.

DB2 Khối D -07 <u>ĐS:</u> $m=1 \vee m=2$

4.33 Viết phương trình các cạnh của ΔABC biết đỉnh $A(1;1)$, đường trung tuyến và đường cao đi qua đỉnh B lần lượt có phương trình: $3x+4y-27=0$ và $2x+y-8=0$.

CĐ Xây dựng 2 -07 *ĐS:* $AB: x-1=0, AC: x-2y+1=0, BC: x+8y-49=0$

4.34 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(2;2)$, $B(8;6)$ và $C(1;-1)$.

① Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của ΔABC.

② Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng $d: 5x-3y+6=0$.

③ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cách điểm B một khoảng bằng 6.

CĐ SP TW TPHCM -07 *ĐS: a)* $H(3;1)$ *b)* $(C): (x-3)^2+(y-7)^2=26$

c) $\Delta_1: x-2=0, \Delta_2: 5x+12y-34=0$

4.35 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(2;-7)$, phương trình trung tuyến $CM: x+2y+7=0$ và đường cao $BK: 3x+y+11=0$. Viết phương trình các cạnh AC và BC.

CĐ CN Thực phẩm -07 *ĐS:* $AC: x-3y-23=0, BC: 7x+9y+19=0$

4.36 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của ΔABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

ĐH Khối B -08 *ĐS:* $C(-10/3;3/4)$

4.37 Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, tìm điểm thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x-2y+3=0$.

CĐ Khối A,B,D -08 *ĐS:* $A(2;0)$, $B(0;4)$

4.38 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC các đường cao kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là $3x+4y+10=0$ và $x-y+1=0$; điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách điểm C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

DB1 A -08 *ĐS:* $A(4;5), B\left(-3;-\frac{1}{4}\right), C(1;1) \vee A(4;5), B\left(-3;-\frac{1}{4}\right), C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$

4.39 Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết rằng đường thẳng AB, đường cao kẻ từ A và đường trung tuyến kẻ từ B lần lượt có phương trình là $AB: x+4y-2=0$, $AH: 2x-3y+7=0$ và $BM: 2x+3y-9=0$.

DB2 Khối D -08 *ĐS:* $A(-2;1).B(6;-1), C(2;5)$

4.40 Cho tam giác ABC với $AB=\sqrt{5}$, $C(-1;-1)$, đường thẳng AB có phương trình $x+2y-3=0$ và trọng tâm của tam giác ABC thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh A và B.

DB1 Khối B -08 *ĐS:* $A(4;-1/2), B(6;-3/2)$

4.41 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

ĐH Khối A -09 (CB) ĐS: $AB_1: y-5=0, AB_2: x-4y+19=0$

4.42 Cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

ĐH Khối D -09 (CB) ĐS: $AC: 3x-4y+5=0$

4.43 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $C(-1;-2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.

CĐ Khối A,B,D -09 (CB) ĐS: $A(1;4), B(5;0)$

4.44 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $\Delta_1: x-2y-3=0$, $\Delta_2: x+y+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ_2 bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

CĐ Khối A,B,D -09 (NC) ĐS: $M_1(1;-1), M_2(-1/3;-5/3)$

4.45 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

ĐH Khối A - 10 (NC) ĐS: $B(0;-4), C(-4;0) \vee B(-6;2), C(2;-6)$

4.46 Cho ΔABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

ĐH Khối B - 10 (CB) ĐS: $BC: 3x-4y+16=0$

4.47 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

ĐH Khối D - 10 (NC) ĐS: $\Delta: (\sqrt{5}-1)x-2\sqrt{\sqrt{5}-2}\,y=0 \vee \Delta: (\sqrt{5}-1)x+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\,y=0$

4.48 Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC có phương trình các cạnh là $AB: x+3y-7=0$, $BC: 4x+5y-7=0$, $CA: 3x+2y-7=0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

CĐ Khối A,B,D - 11 (NC) ĐS: $AH: 5x-4y+3=0$

4.49 Cho đường thẳng $d: x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2;-4)$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng $45°$.

CĐ Khối A,B,D - 11 (CB) *ĐS:* $\Delta_1: y+4=0; \Delta_2: x-2=0$

4.50 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$ và $d: 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM.ON=8$.

ĐH Khối B - 11 (CB) *ĐS:* $N(0;-2) \vee N(6/5;2/5)$

4.51 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E và F. Cho $D(3;1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

ĐH Khối B - 11 (NC) *ĐS:* $A(3;13/3)$

4.52 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

ĐH Khối D - 11 (CB) *ĐS:* $A(4;3), C(3;-1)$

4.53 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

ĐH Khối D - 11 (NC) *ĐS:* $\Delta: y-1=0 \vee \Delta: y+3=0$

4.54 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC. Các đường thẳng BC, BB', $B'C'$ lần lượt có phương trình là $y-2=0$, $x-y+2=0$, $x-3y+2=0$; với B', C' tương ứng là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC.

CĐ Khối A, A1, B, D - 12 *ĐS:* $AC: x+y+2=0$; $AB: 2x-y+2=0$

4.55 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng $N(5;-4)$.

ĐH Khối A, A1 - 13 (CB) *ĐS:* $B(-4;-7), C(1;-7)$

4.56 Cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

ĐH Khối B - 13 (CB) *ĐS:* $C(-1;6), D(4;1) \vee C(-1;6), D(-8;7)$

4.57 Cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

ĐH Khối B - 13 (NC) *ĐS:* $C(9;11)$

4.58 Cho ΔABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(-2;4)$ và điểm $I(-1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

ĐH Khối D - 13 (CB) <u>ĐS</u>: $C(4;1) \vee C(-1;6)$

4.59 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại $A(-3;2)$ và có trọng tâm là $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Đường cao kẻ từ đỉnh A của ΔABC đi qua điểm $P(-2;0)$. Tìm tọa độ các điểm B và C.

CĐ Khối A,A1,B,D - 13 (NC) <u>ĐS</u>: $B(7;2), C(-3;-3) \vee B(-3;-3), C(7;2)$

4.60 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

ĐH Khối A,A1 - 14 <u>ĐS</u>: $y+2=0;\ 3x-4y-15=0$

4.61 Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm $G\left(\frac{4}{3};3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B và D.

ĐH Khối B - 14 <u>ĐS</u>: $B(-2;3),\ D(2;0)$

4.62 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm $D(1;-1)$. Đường thẳng AB có phương trình $3x+2y-9=0$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC có phương trình $x+2y-7=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

ĐH Khối D - 14 <u>ĐS</u>: $BC: x-2y-3=0$

4.63 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;5)$ và đường thẳng d: $3x-4y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho $AM=5$.

Cao đẳng - 14 <u>ĐS</u>: $\Delta: 4x+3y-7=0;\ M(1;1)$

4.64 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có đỉnh A và B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và điểm $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC=AO$ và các điểm C, B nằm khác phía nhau so với điểm A. Biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$. Tìm tọa độ của các đỉnh A, B.

THPT Quốc gia (đề minh họa) - 2015 <u>ĐS</u>: $A(3;0),\ B(0;4)$

4.65 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, K là hình chiếu vuông góc của B lên AI. Giả sử $A(2;5)$, $I(1;2)$, điểm B thuộc đường thẳng $3x+y+5=0$, đường thẳng HK có phương trình $x-2y=0$. Tìm tọa độ các điểm B, C.

THPT Quốc gia (đề dự bị) - 2015 <u>ĐS</u>: $B(-2;1),\ C(4;1)$

4.66 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;-5)$, $K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A.

THPT Quốc gia - 2015 ĐS: $A(-15;5)$

4.67 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A và B.

THPT Quốc gia - 2016 ĐS: $P(5/2;3/2)$, $A(0;-1)$, $B(-1;4)$

B – ĐƯỜNG TRÒN

4.68 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB}=60°$.

DB1 Khối A - 02 ĐS: $M_1(3;4), M_2(-3;-2)$

4.69 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn

$$(C_1): x^2+y^2-4y-5=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

DB1 Khối B - 02 ĐS: $d_1: 2x+y+3\sqrt{5}-2=0, d_2: 2x+y-3\sqrt{5}-2=0$
$d_3: y+1=0, d_4: 4x-3y-9=0$

4.70 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn:

$$(C_1): x^2+y^2-10x=0 \text{ và } (C_2): x^2+y^2+4x-2y-20=0$$

① Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (C_1), (C_2) và có tâm nằm trên đường thẳng $d: x+6y-6=0$.

② Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

DB2 Khối D - 02 ĐS: *1)* $(C'): (x-12)^2+(y+1)^2=125$
2) $d_1: x+7y-5+25\sqrt{2}=0, d_4: x+7y-5-25\sqrt{2}=0$

4.71 Cho đường tròn: $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(2;4)$.

① Chứng tỏ rằng điểm M nằm ngoài đường tròn (C).

② Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB.

③ Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng AB.

CĐ SP Hà Tĩnh Khối AB - 02 ĐS: *2)* $x+y-6=0$ *3)* $(x-3)^2+(y-5)^2=4$

4.72 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn: $(C): x^2+y^2=9$ và điểm $A(1;2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng chứa dây cung của (C) đi qua A sao cho độ dài dây cung đó ngắn nhất.

CĐ Sư phạm Khối A - 02 ĐS: $x+2y-5=0$

4.73 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y-1=0$ và đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d. Tìm tọa độ giao điểm cùa (C) và (C').

ĐH Khối D - 03 ĐS: $(C'): (x-3)^2+y^2=4; (C)\cap(C'): A(1;0), B(3;2)$

4.74 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-7y+10=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: 2x+y=0$ và tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm $A(4;2)$.

DB1 Khối B - 03 ĐS: $(C): (x-6)^2+(y+12)^2=200$

4.75 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y=0$.

① Viết phương trình đường thẳng vuông góc với d và tiếp xúc với (C).

② Viết phương trình đường thẳng song song với d và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 2.

③ Tìm tọa độ điểm T trên d sao cho qua T kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại hai điểm A, B và $\widehat{ATB}=60°$.

CĐ Sư phạm MG TW3 - 04 ĐS: *1)* $x+y-1\pm\sqrt{10}=0$ *2)* $x-y+3\pm2\sqrt{2}=0$ *3)* $T_1(3;4)$, $T_2(-3;-2)$

4.76 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(3;1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

CĐ KTKT Thái Bình - 04 ĐS: $(x-5/2)^2+(y-5/2)^2=5/2$

4.77 Cho đường cong $(C_m): x^2+y^2-4mx+2(m+2)y+6m^2-1=0$.

① Xác định m để (C_m) là đường tròn. Khi đó, xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của (C_m).

② Tìm m để (C_m) là đường tròn có tâm nằm trên $(P): y=x^2-7$.

CĐ GTVT III - 04 ĐS: *1)* $-1<m<5$ *2)* $I(2m;-m-2)$, $R=\sqrt{-m^2+4m+5}$ *b)* $m=1$

4.78 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A với $B(-3;0)$, $C(7;0)$, bán kính đường tròn nội tiếp $r=2\sqrt{10}-5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC, biết điểm I có hoành độ dương.

CĐ Công nghiệp IV - 04 ĐS: $(I_1(2+\sqrt{10};2\sqrt{10}-5), I_2(2-\sqrt{10};2\sqrt{10}-5)$

4.79 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có hai cạnh AB, AC theo thứ tự có phương trình $x+y-2=0$ và $2x+6y+3=0$, cạnh BC có trung điểm $M(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

CĐ Công nghiệp HN - 04 <u>ĐS:</u> $(x-1/2)^2+(y+3/2)^2=85/8$

4.80 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;4)$. Viết phương trình đường trung trực d của đoạn OA, từ đó suy ra phương trình đường tròn (C) có tâm I ở trên Ox và đi qua 2 điểm O và A (O là góc tọa độ).

CĐ Lương thực - Thực phẩm - 04 <u>ĐS:</u> $x+2y-5=0$, $(x-5)^2+y^2=25$

4.81 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

ĐH Khối B– 05 <u>ĐS:</u> $(C_1):(x-2)^2+(y-1)^2=1 \vee (C_1):(x-2)^2+(y-7)^2=49$

4.82 Cho đường tròn có phương trình (C): $x^2+y^2-12x-4y+36=0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

DB2 Khối A - 05 <u>ĐS:</u> $(C_1):(x-2)^2+(y-2)^2=4$
$\vee (C_2):(x-18)^2+(y-18)^2=18 \vee (C_3):(x-6)^2+(y+6)^2=36$

4.83 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=9$ và $(C_2):x^2+y^2-2x-2y-23=0$. Viết phương trình trục đẳng phương d của hai đường tròn (C_1) và (C_2). Chứng minh rằng nếu K thuộc d thì khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C_2).

DB2 Khối B - 05

4.84 Cho đường tròn có phương trình $(C):x^2+y^2-4x-6y-12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d:2x-y+3=0$ sao cho $MI=2R$, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

DB1 Khối D - 05 <u>ĐS:</u> $M_1(-4;-5), M_2(24/5;63/5)$

4.85 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;5)$, $B(2;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R=\sqrt{10}$.

DB2 Khối D - 05 <u>ĐS:</u> $(C_1):(x+1)^2+(y-2)^2=10 \vee (C_2):(x-3)^2+(y-6)^2=10$

4.86 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và hai đường thẳng $d_1:2x-y-2=0$, $d_2:x+y+3=0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua A và cắt các đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm I, J sao cho A là trung điểm của IJ.

CĐ Kinh tế Kỹ thuật CN II - 05 <u>ĐS:</u> $8x-y-24=0$

4.87 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(6;10)$, trọng tâm $G(2;4)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $x-y=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $2x+y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

CĐ Xây dựng II - 05 <u>ĐS</u>: $B(-1;-1), C(1;3)$

4.88 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$. Viết phương trình các đường thẳng song song với đường thẳng d và cách d một khoảng bằng 1.

CĐ Kỹ thuật Cao Thắng - 05 <u>ĐS</u>: $3x-4y-4=0,\ 3x-4y+6=0$

4.89 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$. Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

ĐH Khối B - 06 <u>ĐS</u>: $T_1T_2: 2x+y-3=0$

4.90 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+3=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

ĐH Khối D - 06 <u>ĐS</u>: $M_1(1;4), M_2(-2;1)$

4.91 Cho đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$ và điểm $A(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, O và tiếp xúc với d, với O là gốc tọa độ.

DB1 Khối D - 06 <u>ĐS</u>: $(C): x^2+y^2-2y=0$

4.92 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C): x^2+y^2-4x+8y-5=0$.

① Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn, biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x+2y=0$.

② Tìm điều kiện của m để đường thẳng $x+(m-1)y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn (C).

CĐ KT Cao Thắng - 06 <u>ĐS</u>: *1)* $d_{1,2}: 2x-y-8\pm5\sqrt{5}=0$ *2) Không có* m.

4.93 Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Lập phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng $d: x-2=0$.

CĐ KTKT CN II - 06 <u>ĐS</u>: $(C'): (x-3)^2+(y-2)^2=2$

4.94 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và đường thẳng d có phương trình $3x-4y+16=0$. Viết phương trình đường tròn tâm A và tiếp xúc với d.

<u>*CĐ*</u> *Kinh tế Công nghệ - 06* <u>ĐS</u>: $(x-3)^2+y^2=25$

4.95 Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Lập phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) biết rằng tiếp tuyến đó qua $A(-4;3)$.

CĐ TC Hải quan - 06 <u>ĐS</u>: $d_1: 3x+y+9=0, d_2: 3x+y-5=0$

4.96 Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y+1=0$. Lập phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) biết rằng tiếp tuyến đó qua $A(0;3)$.

CĐ Xây dựng 3 - 06 <u>ĐS:</u> $d_1: x=0, d_2: 3x+4y-12=0$

4.97 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 2x+y-1=0$ và $d_2: 2x-y+2=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên trục Ox đồng thời tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2.

CĐ Kỹ thuật Y tế I - 06 <u>ĐS:</u> $(x+1/4)^2+y^2=9/20$

4.98 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2)$, $B(-2;-2)$ và $C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

ĐH Khối A - 07 <u>ĐS:</u> $(C): x^2+y^2-x+y-2=0$

4.99 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

ĐH Khối D - 07 <u>ĐS:</u> $m=19 \vee m=-41$

4.100 Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x+6y+21=0$ và đường thẳng $d: x+y-1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp (C) biết $A \in d$.

DB1 Khối B - 07 <u>ĐS:</u> $A(2;-1), B(2;-5), C(6;-5), D(6;-1)$

Hoặc $A(6;-5), B(6;-1), C(2;-1), D(2;-5)$

4.101 Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C') tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

DB1 Khối A - 07 <u>ĐS:</u> $AB_1: x+y+1=0, AB_2: x+y-1=0$

4.102 Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5,1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

DB2 Khối B - 07 <u>ĐS:</u> $(C_1'): (x-5)^2+(y-1)^2=13, (C_2'): (x-5)^2+(y-1)^2=43$

4.103 Cho điểm A(2; 1) và hai đường thẳng $d_1: x-y-1=0$, $d_2: x-2y-6=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với d_1 tại A và có tâm thuộc d_2.

Hệ CĐ- ĐH SG Khối A,B - 07 <u>ĐS:</u> $(C): (x-4)^2+(y+1)^2=8$

4.104 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2.

CĐ KTKT CN II - 07 <u>ĐS:</u> $(C_1): (x-10)^2+y^2=49, (C_2): \left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\frac{49}{1849}$

4.105 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$. Tìm các giá trị thực của m để trên đường thẳng $y=m$ tồn tại đúng hai điểm mà từ mỗi điểm có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng $60°$.

DB2 Khối A - 08 ĐS: $-2<m<-2/\sqrt{3} \vee 2/\sqrt{3}<m<2$

4.106 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp ΔOAB tiếp xúc với đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của ΔOAB.

DB2 Khối B - 08

4.107 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-4)^2+y^2=4$ và điểm $E(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (với A, B là các tiếp điểm) sao cho đường thẳng AB đi qua điểm E.

DB1 Khối D - 08 ĐS: $M(0;4)$

4.108 Cho đường tròn (C) và đường thẳng Δ có phương trình $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và $\Delta: x+my-2m+3=0$ $(m\in\mathbb{R})$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

ĐH Khối A - 09 (NC) ĐS: $M(0;1;-3) \vee M(18/35;53/35;3/35)$

4.109 Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn: $(C):(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$, $\Delta_2: x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

ĐH Khối B - 09 (CB) ĐS: $K(8/5;4/5), R=2\sqrt{2}/5$

4.110 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định tọa độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

ĐH Khối B - 09 (NC) ĐS: $B\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right), C\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right) \vee B\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right), C\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

4.111 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO}=30°$.

ĐH Khối D - 09 (NC) ĐS: $M_1(3/2;\sqrt{3}/2), M_2(3/2;-\sqrt{3}/2)$

4.112 Cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x+y=0$, $d_2: \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

ĐH Khối A - 10 (CB) ĐS: $(T):\left(x+1/2\sqrt{3}\right)^2+(y+3/2)^2=1$

4.113 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

ĐH Khối D - 10 (CB) <u>ĐS</u>: $C\left(-2+\sqrt{65};3\right)$

4.114 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

ĐH Khối A - 11 (CB) <u>ĐS</u>: $M(2;-4) \vee M(-3;1)$

4.115 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và đường thẳng $d: 4x-3y+m=0$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{AIB}=120°$, với I là tâm của (C).

CĐ Khối A, A1, B, D - 12 <u>ĐS</u>: $m=7 \vee m=-3$

4.116 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt ? tại hai điểm A và B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

ĐH Khối A, A1 - 13 (NC) <u>ĐS</u>: $(C): (x-5)^2+(y-3)^2=0$

4.117 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

ĐH Khối D - 13 (NC) <u>ĐS</u>: $P(-1;3) \vee P(3;3)$

4.118 Cho các đường thẳng $d: x+y-3=0$, $\Delta: x-y+2=0$ và điểm $M(-1;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua M, có tâm thuộc d, cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB=3\sqrt{2}$.

CĐ Khối A,A1,B,D - 13 (CB) <u>ĐS</u>: $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=5$

C – ELIP

4.119 Cho Elip $(E): \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{12}=1$. Xét một hình vuông ngoại tiếp Elip (tức là các cạnh của hình vuông đều tiếp xúc với Elip). Viết phương trình các cạnh của hình vuông đó.

ĐH Lâm nghiệp - 95 <u>ĐS</u>: $d_{1,2}: x+y\pm 6=0, d_{3,4}: x-y\pm 6=0$

4.120 Cho Elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

① Chứng minh rằng với mọi điểm $M \in (E)$ ta đều có $b<OM<a$.

② Gọi A là giao điểm của $d: y=kx$ với Elip (E). Tính OA theo a, b, k.

③ Gọi B là điểm thuộc (E) sao cho OA vuông góc với OB. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ có giá trị không đổi.

ĐH Huế - 95

4.121 Cho Elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

① Gọi E là điểm tùy ý thuộc (E), chứng tỏ rằng $b<OE<a$.

② A, B là hai điểm thuộc (E) sao cho $OA\perp OB$. Hãy xác định vị trí A, B trên (E) để ΔOAB có diện tích lớn nhất và nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

ĐH Xây dựng - 96 *ĐS: 2)* $S_{\min}=ab/2\Leftrightarrow OA, OB$ *là hai bán trục của* (E)

$S_{\max}=a^2b^2/(a^2+b^2)\Leftrightarrow OA, OB$ *nằm trên hai phân giác thứ nhất và thứ 2*

4.122 Cho $(E):9x^2+25y^2=225$.

① Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai. Vẽ (E) dựa trên hình chữ nhật cơ sở.

② Viết phương trình đường thẳng qua $M(1;1)$ cắt (E) tại M_1, M_2 sao cho M là trung điểm M_1M_2.

ĐH NN I HN - 96 *ĐS: 1)* $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, $e=4/5$ *2)* $9x-25y+16=0$

4.123 Viết phương trình của (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10};0)$, $F_2(\sqrt{10};0)$ và độ dài trục lớn là $2\sqrt{18}$.

ĐH Hàng hải - 97 *ĐS:* $(E):x^2/18+y^2/8=1$

4.124 Cho $(E):4x^2+16y^2=64$.

① Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai. Vẽ (E).

② M là điểm bất kì trên (E). Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm phải F_2 và tới đường thẳng $y=\frac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

ĐH NN I HN - 97 *ĐS: 1)* $F_1(-2\sqrt{3};0)$, $F_2(2\sqrt{3};0)$, $e=\sqrt{3}/2$ *2)* $MF_2/MH=\sqrt{3}/2$

4.125 Cho Elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d:x-\sqrt{2}y+2=0$. Biết d cắt (E) tại hai điểm phân biệt B và C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

ĐH Ngoại thương - 97 *ĐS:* $A(2;-\sqrt{2})$

4.126 Cho Elip $(E):4x^2+9y^2=36$ và điểm $M(1;1)$. Lập phương trình đường thẳng qua M và cắt (E) tại hai điểm M_1, M_2 sao cho: $MM_1=MM_2$.

ĐH QG TpHCM - 97 *ĐS:* $\Delta_1:4x+9y-13=0$, $\Delta_2:x-1=0$

4.127 Cho hai Elip $(E_1):\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ và $(E_2):\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai Elip (E_1) và (E_2).

ĐH Mở Hà Nội - 97 *ĐS:* (E_1) *không cắt* $(E_2)\Rightarrow$ *không có đường tròn*

4.128 Cho Elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với tiêu điểm $F(-c;0)$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho độ dài FM nhỏ nhất.

HV BCVT TPHCM - 99 <u>ĐS</u>: $M(-a;0)$

4.129 Cho Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

① Tìm tọa độ tiêu điểm, các đỉnh và tìm tân sai của (E).

② Tìm M thuộc (E) sao cho $MF_1=4MF_2$.

ĐH DL Duy Tân - 00 <u>ĐS</u>: *1)* $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, $e=3/5$ *2)* $M(5;0)$

4.130 Cho Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Hãy viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E) đã cho với Elip $(E'):\frac{x^2}{16}+y^2=1$.

ĐH Nông nghiệp I khối B - 00 <u>ĐS</u>: $(C):x^2+y^2=92/11$

4.131 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elíp $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai đường thẳng $d:ax-by=0$, $d':bx+ay=0$, với $a^2+b^2>0$. Gọi M, N là các giao điểm của d với (E); Gọi P, Q là các giao điểm của d' với (E).

① Tính diện tích tứ giác $MPNQ$ theo a và b.

② Tìm điều kiện đối với a, b để diện tích tứ giác $MPNQ$ nhỏ nhất.

ĐH Y Dược TPHCM - 01

<u>ĐS</u>: *1)* $S_{MPNQ}=\frac{72(a^2+b^2)}{\sqrt{(9a^2+4b^2)(4a^2+9b^2)}}$ *2)* $\min S_{MPNQ}=\frac{144}{13}$ *khi* $|a|=|b|$

4.132 Cho hai Elip $(E_1):\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ và $(E_2):\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai Elip.

CĐ SPKT Vinh - 01 <u>ĐS</u>: $x^2+y^2=12/5$

4.133 Cho elíp $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $d_m:mx-y-1=0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng d_m luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

DB1 Khối D - 02

4.134 Cho hai điểm $A(4;-\sqrt{3})$, $B(2\sqrt{2};3)$.

① Viết phương trình chính tắc của Elip (E) đi qua 2 điểm A và B.

② Xác định tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai của Elip trên.

CĐ KTKT CN II - 04 *ĐS: a)* $(E):\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$ *b)* $F_1(-\sqrt{5};0), F_2(\sqrt{5};0)$, $2c=2\sqrt{5}$, $e=1/2$.

4.135 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elíp $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và điểm $C(2;0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

ĐH Khối D - 05 <u>ĐS</u>: $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right),B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)\vee A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right),B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

4.136 Lập phương trình chính tắc của elíp (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên 1 đường tròn.

DB1 Khối D - 06 <u>ĐS</u>: $(H):x^2/8+y^2/4=1$

4.137 Cho hai Elip $(E_1):x^2+\frac{y^2}{16}=1$ và $(E_2):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{8}=1$. Chứng minh rằng (E_1) và (E_2) có bốn điểm chung cùng thuộc một đường tròn (C). Viết phương trình của (C).

Hệ CĐ ĐHSG Khối D - 07 <u>ĐS</u>: $(C):x^2+y^2=23/3$

4.138 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho elip $(E):4x^2+9y^2=36$.

① Tìm tọa độ các tiêu điểm của (E).

② Tìm điểm M trên (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

CĐ Nguyễn Tất Thành - 07 <u>ĐS</u>: *1)* $F_1\left(-\sqrt{5};0\right),F_2\left(\sqrt{5};0\right)$

2) $M_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right),M_2\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{-4}{\sqrt{5}}\right),M_3\left(\frac{-3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right),M_4\left(\frac{-3}{\sqrt{5}};\frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$

4.139 Hãy viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

ĐH Khối A - 08 <u>ĐS</u>: $(E):x^2/9+y^2/4=1$

4.140 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(2;3)$ và elip $(E):\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

ĐH Khối B - 10 (NC) <u>ĐS</u>: $(T):(x-1)^2+\left(y-2\sqrt{3}/3\right)^2=4/3$

4.141 Cho elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

ĐH Khối A - 11 (NC) ĐS: $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vee A\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

A - CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Câu 1. [0H3-1] Tìm vectơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục Ox.
A. $(0;\ 1)$. **B.** $(1;\ 0)$. **C.** $(1;\ 1)$. **D.** $(-1;\ 0)$.

Câu 2. [0H3-1] Đường thẳng $12x-7y+5=0$ không đi qua điểm trong các điểm nào sau?
A. $(-1;-1)$. **B.** $(1;\ 1)$. **C.** $\left(-\frac{5}{12};0\right)$. **D.** $\left(1;\frac{17}{7}\right)$.

Câu 3. [0H3-1] Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(-3;2)$ và $B(1;\ 4)$.
A. $(2;\ 1)$. **B.** $(-1;\ 2)$. **C.** $(-2;\ 6)$. **D.** $(1;\ 1)$.

Câu 4. [0H3-1] Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=12-5t\\y=3+6t\end{cases}$. Điểm nào sau đây nằm trên Δ?
A. $(12;\ 0)$. **B.** $(7;\ 5)$. **C.** $(20;\ 9)$. **D.** $(-13;\ 33)$.

Câu 5. [0H3-21]Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của đường phân giác của góc xOy.
A. $(0;1)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 6. [0H3-1] Tìm vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt $A(a;0)$ và $B(0;b)$.
A. $(b;-a)$. **B.** $(-b;a)$. **C.** $(b;a)$. **D.** $(a;b)$.

Câu 7. [0H3-1] Đường thẳng $51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?
A. $\left(-1;\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{4}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$.

Câu 8. [0H3-1] Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Oy.
A. $(0;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 9. [0H3-1] Tìm vectơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục Oy.
A. $(1;1)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 10. [0H3-1] Tìm vectơ pháp tuyến của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và điểm $A(a;b)$ (với a, b khác không).
A. $(1;0)$. **B.** $(-a;b)$. **C.** $(b;-a)$. **D.** $(a;b)$.

Câu 11. [0H3-1] Tìm vectơ pháp tuyến của đường phân giác của góc xOy.
A. $(1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 12. [0H3-1] Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $M(a;\ b)$.
A. $(0;a+b)$. **B.** $(a;b)$. **C.** $(a;-b)$. **D.** $(-a;b)$.

Câu 13. [0H3-1] Một đường thẳng có bao nhiêu vectơ pháp tuyến?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 14. **[0H3-1]** Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}t\\ y=-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}t\end{cases}$. Điểm nào sau đây không nằm trên Δ?

A. $\left(12+\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{2}\right)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $\left(1+\sqrt{3};1-\sqrt{2}\right)$.

Câu 15. **[0H3-1]** Một đường thẳng có bao nhiêu vectơ chỉ phương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 16. **[0H3-1]** Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox.

A. $(0;-1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 17. **[0H3-2]** Tìm tọa độ vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(-3;2)$ và $B(1;4)$.

A. $(4;2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(2;-1)$.

Câu 18. **[0H3-1]** Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt $A(a;0)$ và $B(0;b)$.

A. $(a;-b)$. **B.** $(b;a)$. **C.** $(a;b)$. **D.** $(-b;a)$.

Câu 19. **[0H3-1]** Đường thẳng $2x+y-1=0$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào?

A. $\vec{n}=(2;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1)$. **C.** $\vec{n}=(2;1)$. **D.** $\vec{n}=(-1;2)$.

Câu 20. **[0H3-1]** Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A=(-3;2)$, $B=(-3;3)$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào?

A. $\vec{n}=(6;5)$. **B.** $\vec{n}=(0;1)$. **C.** $\vec{n}=(-3;5)$. **D.** $\vec{n}=(-1;0)$.

Câu 21. **[0H3-1]** Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của đường thẳng có phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3-t\end{cases}$?

A. $\vec{n}=(2;-1)$. **B.** $\vec{n}=(-1;2)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(1;2)$.

Câu 22. **[0H3-2]** Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=5-\dfrac{1}{2}t\\ y=-3+3t\end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ là

A. $(-1;6)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$. **C.** $(5;-3)$. **D.** $(-5;3)$.

Câu 23. **[0H3-1]** Trong các điểm sau đây, điểm nào nằm trên đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}$.

A. $(1;1)$. **B.** $(0;-2)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 24. **[0H3-1]** Cho đường thẳng $d:3x+5y+2018=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. d có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;5)$. **B.** d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(5;-3)$.

C. d có hệ số góc $k=\dfrac{5}{3}$. **D.** d song song với đường thẳng $3x+5y=0$

B - PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Câu 25. [0H3-2] Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-7)$ và $B(1;-7)$.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=7 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-7t \\ y=1-7t \end{cases}$.

Câu 26. [0H3-2] Cho 2 điểm $A(4;-1)$, $B(1;-4)$. Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $x+y=0$. **B.** $x-y=1$. **C.** $x+y=1$. **D.** $x-y=0$.

Câu 27. [0H3-1] Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1)$ và $B(1;\ 5)$.

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=-1-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=5-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+3t \end{cases}$.

Câu 28. [0H3-1] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1)$ và $B(1;\ 5)$.

A. $3x-y+6=0$. **B.** $3x+y-8=0$. **C.** $-x+3y+6=0$. **D.** $3x-y+10=0$.

Câu 29. [0H3-3] Cho tam giác ABC có $A(1;\ 1)$, $B(0;-2)$, $C(4;\ 2)$. Viết phương trình tổng quát của trung tuyến AM.

A. $2x+y-3=0$. **B.** $x+2y-3=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x-y=0$.

Câu 30. [0H3-3] Cho tam giác ABC có $A(2;\ -1)$, $B(4;5)$, $C(-3;\ 2)$. Viết phương trình tổng quát của đường cao AH.

A. $3x+7y+1=0$. **B.** $7x+3y+13=0$. **C.** $-3x+7y+13=0$. **D.** $7x+3y-11=0$.

Câu 31. [0H3-3] Đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và vuông góc với vectơ $\vec{n}=(2;3)$ có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$. **C.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$.

Câu 32. [0H3-3] Cho hai điểm $A(1;-4)$, $B(1;\ 2)$. Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $y-1=0$. **B.** $x-4y=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y+1=0$.

Câu 33. [0H3-3] Cho tam giác ABC có $A(1;\ 1)$, $B(0;-2)$, $C(4;\ 2)$. Viết phương trình tổng quát của trung tuyến CM.

A. $3x+7y-26=0$. **B.** $2x+3y-14=0$. **C.** $6x-5y-1=0$. **D.** $5x-7y-6=0$.

Câu 34. [0H3-2] Cho ΔABC có $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Viết phương trình tổng quát của trung tuyến BM.

A. $3x+y-2=0$. **B.** $-7x+5y+10=0$. **C.** $7x+7y+14=0$. **D.** $5x-3y+1=0$.

Câu 35. [0H3-2] Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=15 \\ y=6+7t \end{cases}$. Viết phương trình tổng quát của Δ.

A. $x+15=0$. **B.** $6x-15y=0$. **C.** $x-15=0$. **D.** $x-y-9=0$.

Câu 36. **[0H3-3]** Cho 2 điểm $A(1;-4)$, $B(3;2)$. Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $x+3y+1=0$. **B.** $3x+y+1=0$. **C.** $3x-y+4=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Câu 37. **[0H3-2]** Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3-5t\\y=1+4t\end{cases}$. Viết phương trình tổng quát của Δ.

A. $4x+5y-17=0$. **B.** $4x+5y+17=0$. **C.** $4x-5y+17=0$. **D.** $4x-5y-17=0$.

Câu 38. **[0H3-2]** Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $O(0;0)$ và song song với đường thẳng $\Delta:3x-4y+1=0$.

A. $\begin{cases}x=4t\\y=1+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-3t\\y=4t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\y=-4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4t\\y=3t\end{cases}$.

Câu 39. **[0H3-2]** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-7)$ và $B(1;-7)$.

A. $x+y+4=0$. **B.** $y-7=0$. **C.** $x+y+6=0$. **D.** $y+7=0$.

Câu 40. **[0H3-2]** Cho ΔABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$, $C(-3;2)$. Viết phương trình tổng quát của đường cao CH.

A. $x+3y-3=0$. **B.** $2x+6y-5=0$. **C.** $3x-y+11=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Câu 41. **[0H3-2]** Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=5+t\\y=-9-2t\end{cases}$. Phương trình tổng quát của d là

A. $x+2y-2=0$. **B.** $x+2y+2=0$. **C.** $2x+y+1=0$. **D.** $2x+y-1=0$.

Câu 42. **[0H3-1]** Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(3;-1)$, $B(6;-2)$.

A. $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-6-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2t\end{cases}$.

Câu 43. **[0H3-1]** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(3;-1)$, $B(6;-2)$.

A. $x+y-2=0$. **B.** $x+3y=0$. **C.** $3x-y=0$. **D.** $3x-y+10=0$.

Câu 44. **[0H3-2]** Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta:\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=1$ là

A. $\begin{cases}x=5+5t\\y=-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5+5t\\y=7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=5-7t\\y=5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=5+7t\\y=5t\end{cases}$.

Câu 45. **[0H3-2]** Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3-5t\\y=14\end{cases}$. Viết phương trình tổng quát của Δ.

A. $x+y-17=0$. **B.** $y-14=0$. **C.** $y+14=0$. **D.** $x-3=0$.

Câu 46. **[0H3-2]** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta:5x-13y-31=0$.

A. $\begin{cases}x=1-13t\\y=-2+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+13t\\y=-2+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1+13t\\y=2+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2-13t\end{cases}$.

Câu 47. [0H3-3] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $O(0;0)$, $M(1;-3)$.

A. $3x+y=0$. **B.** $x-3y=0$. **C.** $3x+y+1=0$. **D.** $3x-y=0$.

Câu 48. Cho hai điểm $A(4;7)$, $B(7;4)$. Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $x-y=1$. **B.** $x-y=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $x+y=1$.

Câu 49. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(1;1)$ và song song với đường thẳng có phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)x+y+1=0$.

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)x+y=0$. **B.** $x+\left(\sqrt{2}+1\right)y-2\sqrt{2}=0$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)x-y+2\sqrt{2}-1=0$. **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)x+y-\sqrt{2}=0$.

Câu 50. Phương trình nào dưới đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng đi qua 2 điểm $O(0;\ 0)$ và $M(1;-3)$.

A. $\begin{cases}x=1-2t\\y=-3+6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-3-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-t\\y=3t\end{cases}$.

Câu 51. Cho 2 điểm $A(1;-4)$, $B(3;-4)$. Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $x+y-2=0$. **B.** $y-4=0$. **C.** $y+4=0$. **D.** $x-2=0$.

Câu 52. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$.

A. $\begin{cases}x=2\\y=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases}x=2t\\y=-6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases}x=2+t\\y=5+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases}x=1\\y=2+6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$..

Câu 53. [0H3-2] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(0;-5)$ và $B(3;0)$.

A. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$. **B.** $-\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$. **D.** $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$.

Câu 54. [0H3-1] Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(3;0)$ và $B(0;-5)$.

A. $\begin{cases}x=3+3t\\y=-5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-5+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-5-5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=5t\end{cases}$.

Câu 55. [0H3-2] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$.

A. $x+y-1=0$. **B.** $x-2=0$. **C.** $2x-7y+9=0$. **D.** $x+2=0$.

Câu 56. [0H3-2] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(0;1)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0$

A. $-x+\left(3+2\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}=0$. **B.** $\left(1-\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{2}+1\right)y+1-2\sqrt{2}=0$.

C. $\left(1-\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{2}+1\right)y+1=0$. **D.** $-x+\left(3+2\sqrt{2}\right)y-3-\sqrt{2}=0$.

Câu 57. **[0H3-2]** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x-y+4=0$.

A. $-x+2y-5=0$. **B.** $x+2y-3=0$. **C.** $x+2y=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Câu 58. **[0H3-2]** Cho ΔABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$, $C(-3;2)$. Viết phương trình tổng quát của đường cao BH.

A. $3x+5y-37=0$. **B.** $3x-5y-13=0$. **C.** $5x-3y-5=0$. **D.** $3x+5y-20=0$.

Câu 59. **[0H3-2]** Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: 2x-6y+23=0$ là

A. $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=\dfrac{11}{2}+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=5-3t \\ y=\dfrac{11}{2}+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=5+3t \\ y=\dfrac{11}{2}-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0,5+3t \\ y=4+t \end{cases}$.

Câu 60. **[0H3-1]** Đường thẳng đi qua $A(-1;2)$, nhận $\vec{n}=(2;-4)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình là

A. $x-2y-4=0$. **B.** $x+y+4=0$. **C.** $-x+2y-4=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Câu 61. **[0H3-2]** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $O(0;0)$ và song song với đường thẳng có phương trình $6x-4y+1=0$.

A. $4x+6y=0$. **B.** $3x-y-1=0$. **C.** $3x-2y=0$. **D.** $6x-4y-1=0$.

Câu 62. **[0H3-2]** Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x-y+4=0$.

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+-2t \end{cases}$.

Câu 63. **[0H3-2]** Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1;2)$, $B(3;1)$, và $C(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ A?

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $3x-2y-5=0$. **C.** $5x-6y+7=0$. **D.** $3x-2y+5=0$.

Câu 64. **[0H3-2]** Cho tam giác ABC với các đỉnh là $A(-1;1)$, $B(3;7)$, $C(3;-2)$, M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Phương trình tham số của trung tuyến CM là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+3t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-3t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=4+2t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-2+4t. \end{cases}$

Câu 65. **[0H3-2]** Cho phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x=5+t \\ y=-9-2t. \end{cases}$ Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của d?

A. $2x+y-1=0$. **B.** $2x+3y+1=0$. **C.** $x+2y+2=0$. **D.** $x+2y-2=0$

Câu 66. **[0H3-2]** Đường thẳng đi qua điểm $M(1;0)$ và song song với đường thẳng $d: 4x+2y+1=0$ có phương trình tổng quát là

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+y+4=0$. **C.** $2x+y-2=0$. **D.** $x-2y+3=0$.

Câu 67. **[0H3-2]** Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng $x-y+3=0$?

A. $\begin{cases} x=t \\ y=3+t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=3 \\ y=t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=3-t. \end{cases}$

Câu 68. [0H3-3] Lập phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x-2y+12=0$ và cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{13}$, ta được một kết quả là

A. $3x-2y+12=0$. **B.** $3x-2y-12=0$. **C.** $6x-4y-12=0$. **D.** $3x-4y-6=0$.

Câu 69. [0H3-2] Đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $d: 4x+2y+1=0$ có phương trình tổng quát là

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+y+4=0$. **C.** $2x+y-4=0$. **D.** $x-2y+3=0$.

Câu 70. [0H3-3] Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(2;2)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$.

Câu 71. [0H3-1] Phương trình tham số của đường thẳng qua $M(-2;3)$ và song song với đường thẳng $\dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y+5}{5}$ là

A. $\begin{cases} x=-2-t \\ y=3+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=5-2t \\ y=-1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-t \\ y=5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+5t \\ y=-2-t \end{cases}$.

Câu 72. [0H3-1] Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $2x+3y-12=0$.

A. $2x+3y-8=0$. **B.** $2x+3y+8=0$. **C.** $4x+6y+1=0$. **D.** $4x-3y-8=0$.

C - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 73. [0H3-2] Cho bốn điểm $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(3;5)$, $D(-3;-1)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

A. Song song. **B.** Vuông góc nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Trùng nhau.

Câu 74. [0H3-2] Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=4+2t \\ y=1-3t \end{cases}$ và $\Delta_2: 3x+2y-14=0$.

A. Trùng nhau.
B. Cắt nhau nhưng không vuông góc.
C. Song song nhau.
D. Vuông góc nhau.

Câu 75. [0H3-2] Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 11x-12y+1=0$ và $\Delta_2: 12x+11y+9=0$. Khi đó hai đường thẳng này

A. Vuông góc với nhau.
B. Cắt nhau nhưng không vuông góc.
C. Trùng nhau.
D. Song song với nhau.

Câu 76. [0H3-2] Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1: 5x+2y-14=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=4+2t \\ y=1-5t \end{cases}$.

A. Cắt nhau nhưng không vuông góc.
B. Vuông góc nhau.
C. Trùng nhau.
D. Song song với nhau.

Câu 77. [0H3-3] Với giá trị nào của m thì 2 đường thẳng sau đây vuông góc?

$$\Delta_1: \begin{cases} x=1+\left(m^2+1\right)t \\ y=2-mt \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x=2-3t' \\ y=1-4mt' \end{cases}.$$

A. $m=\pm\sqrt{3}$. **B.** $m=-\sqrt{3}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** Không có m.

Câu 78. **[0H3-2]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng sau đây:

$\Delta_1:\left(\sqrt{3}+1\right)x+y-1=0$ và Δ_2: $2x+\left(\sqrt{3}-1\right)y+1-\sqrt{3}=0$.

A. Song song. **B.** Trùng nhau. **C.** Vuông góc nhau. **D.** Cắt nhau.

Câu 79. **[0H3-2]** Cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ và $\Delta_2:3x+4y-10=0$. Khi đó hai đường thẳng này:

A. Cắt nhau nhưng không vuông góc. **B.** Vuông góc với nhau.

C. Song song với nhau. **D.** Trùng nhau.

Câu 80. **[0H3-2]** Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng sau đây:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=22+2t\\y=55+5t\end{cases} \text{ và } \Delta_2:2x+3y-19=0.$$

A. $(2;\ 5)$. **B.** $(10;\ 25)$. **C.** $(5;\ 3)$. **D.** $(-1;\ 7)$.

Câu 81. **[0H3-3]** Cho 4 điểm $A(1;\ 2)$, $B(-1;\ 4)$, $C(2;\ 2)$, $D(-3;\ 2)$. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng AB và CD.

A. $(1;\ 2)$. **B.** $(5;-5)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(0;-1)$.

Câu 82. **[0H3-1]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng sau đây:

$$\Delta_1:x-2y+1=0 \text{ và } \Delta_2:-3x+6y-10=0.$$

A. Song song. **B.** Trùng nhau. **C.** Vuông góc nhau. **D.** Cắt nhau.

Câu 83. **[0H3-3]** Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây vuông góc nhau?

$\Delta_1:mx+y-19=0$ và $\Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0$.

A. Mọi m. **B.** $m=2$. **C.** Không có m. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 84. **[0H3-1]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=-3+4t\\y=2-6t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=1-2t'\\y=4+3t'\end{cases}$.

A. Song song nhau. **B.** Trùng nhau.

C. Vuông góc nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 85. **[0H3-3]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng:

$$\Delta_1:7x+2y-1=0 \text{ và } \Delta_2:\begin{cases}x=4+t\\y=1-5t\end{cases}.$$

A. Song song nhau. **B.** Trùng nhau.

C. Vuông góc nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 86. **[0H3-3]** Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây song song?

$\Delta_1:2x+\left(m^2+1\right)y-50=0$ và $\Delta_2:mx+y-100=0$.

A. $m=-1$. **B.** Không có m. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 87. **[0H3-3]** Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây song song?

$$\Delta_1:\begin{cases}x=8+(m+1)t\\y=10-t\end{cases} \text{ và } \Delta_2:mx+6y-76=0.$$

A. $m=-3$. **B.** $m=2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-3\end{array}\right.$. **D.** Không m nào.

Câu 88. [0H3-1] Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng sau đây:

$\Delta_1 : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ và $\Delta_2 : 6x - 2y - 8 = 0$.

A. Cắt nhau. **B.** Vuông góc nhau. **C.** Trùng nhau. **D.** Song song.

Câu 89. [0H3-3] Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây song song?

$\Delta_1 : 2x + \left(m^2 + 1\right) y - 3 = 0$ và $\Delta_2 : x + my - 100 = 0$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$ hoặc $m = 2$. **C.** $m = 1$ hoặc $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Câu 90. [0H3-3] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $\Delta_1 : 3mx + 2y + 6 = 0$ và $\Delta_2 : \left(m^2 + 2\right) x + 2my - 6 = 0$ song song với nhau.

A. $m = -1$ hoặc $m = 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$ và $m = 1$. **D.** Không có m.

Câu 91. [0H3-2] Cho 4 điểm $A(-3;1)$, $B(-9;-3)$, $C(-6;0)$, $D(-2;4)$. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng AB và CD.

A. $(-6;-1)$. **B.** $(-9;3)$. **C.** $(-9;-3)$. **D.** $(0;4)$.

Câu 92. [0H3-1] Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta : 4x - 3y - 26 = 0$ và đường thẳng $d : 3x + 4y - 7 = 0$.

A. $(5;2)$. **B.** Không có giao điểm.

C. $(2;-6)$. **D.** $(5;-2)$.

Câu 93. [0H3-2] Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây cắt nhau?

$\Delta_1 : 2x - 3my + 10 = 0$ và $\Delta_2 : mx + 4y + 1 = 0$.

A. $1 < m < 10$. **B.** $m = 1$. **C.** Không có m. **D.** Mọi m.

Câu 94. [0H3-3]Phần đường thẳng $\Delta : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ nằm trong góc xOy có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 7. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 12. **D.** 5.

Câu 95. [0H3-2] Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây trùng nhau?

$\Delta_1 : 2x - 3y + m = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + mt \end{cases}$

A. Không có m. **B.** $m = -3$. **C.** $m = \frac{4}{3}$. **D.** $m = 1$.

Câu 96. [0H3-3] Với giá trị nào của m thì 2 đường thẳng sau đây vuông góc?

$\Delta_1 : (2m - 1)x + my - 10 = 0$ và $\Delta_2 : 3x + 2y + 6 = 0$

A. $m = 0$. **B.** Không m nào. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \frac{3}{8}$.

Câu 97. [0H3-2] Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + 5t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = -6 - 3t' \end{cases}$.

A. $(1;7)$. **B.** $(1;-3)$. **C.** $(3;1)$. **D.** $(-3;-3)$.

Câu 98. **[0H3-2]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=3+\dfrac{3}{2}t\\ y=-1+\dfrac{4}{3}t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=\dfrac{9}{2}+9t'\\ y=\dfrac{1}{3}+8t'\end{cases}$.

A. Song song nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Vuông góc nhau. **D.** Trùng nhau.

Câu 99. **[0H3-3]** Đường thẳng $\Delta:5x+3y=15$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 15. **C.** $7,5$. **D.** 5.

Câu 100. **[0H3-3]** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}$.

A. $(5;1)$. **B.** $(1;7)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(1;-3)$.

Câu 101. **[0H3-2]** Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta:15x-2y-10=0$ và trục tung Oy.

A. $(-5;0)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(0;-5)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{3};5\right)$.

Câu 102. **[0H3-2]** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=12+4t'\\ y=-15-5t'\end{cases}$.

A. $(6;5)$. **B.** $(0;0)$. **C.** $(-5;4)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 103. **[0H3-1]** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta:7x-3y+16=0$ và $d:x+10=0$.

A. $(10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(-10;-18)$.

Câu 104. **[0H3-3]** Cho 4 điểm $A(4;-3)$, $B(5;1)$, $C(2;3)$, $D(-2;2)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

A. Trùng nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Song song. **D.** Vuông góc nhau.

Câu 105. **[0H3-2]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=3+\sqrt{2}t\\ y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=2+\sqrt{3}t'\\ y=1+\sqrt{2}t'\end{cases}$.

A. Song song nhau. **B.** Cắt nhau nhưng không vuông góc.
C. Trùng nhau. **D.** Vuông góc nhau.

Câu 106. **[0H3-2]** Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)t\\ y=-\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)t\end{cases}\text{ và }\Delta_2:\begin{cases}x=-\sqrt{3}+t'\\ y=-\sqrt{3}+\left(5-2\sqrt{6}\right)t'\end{cases}$$

A. Trùng nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Song song. **D.** Vuông góc.

Câu 107. Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng: $\Delta_1:\begin{cases}x=2+5t\\ y=3-6t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=7+5t'\\ y=-3+6t'\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

A. Trùng nhau. **B.** Vuông góc nhau.
C. Cắt nhau nhưng không vuông góc. **D.** Song song nhau.

Câu 108. Hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=0$ và $\Delta_2:\sqrt{2}x-2\left(\sqrt{2}+1\right)y=0$ là

A. Cắt nhau nhưng không vuông góc. **B.** Song song với nhau.
C. Vuông góc nhau. **D.** Trùng nhau.

Câu 109. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: 5x-2y+12=0$ và đường thẳng $d: y+1=0$.

A. $(1;-2)$. **B.** $(-1;\ 3)$. **C.** $\left(\frac{-14}{5};-1\right)$. **D.** $\left(-1;\frac{14}{5}\right)$.

Câu 110. Cho 4 điểm $A(0;1)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$, $D(3;1)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

A. Song song. **B.** Trùng nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Vuông góc nhau.

Câu 111. Với giá trị nào của m hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=m+2t \\ y=1+\left(m^2+1\right)t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=1+mt \\ y=m+t \end{cases}$ trùng nhau?

A. Không có m. **B.** $m=\frac{4}{3}$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Câu 112. Cho 4 điểm $A(1;2)$, $B(4;0)$, $C(1;-3)$, $D(7;-7)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.
C. Cắt nhau nhưng không vuông góc. **D.** Vuông góc nhau.

Câu 113. Xác định m để hai đường thẳng $\Delta_1: 2x-3y+4=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ vuông góc.

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\pm\frac{9}{8}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=-\frac{9}{8}$.

Câu 114. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: 5x+2y-10=0$ và trục hoành Ox.

A. $(0;2)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(2;0)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 115. Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=4+t \\ y=1-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ và $\Delta_2: 2x-10y+15=0$.

A. Vuông góc nhau. **B.** Song song nhau.
C. Cắt nhau nhưng không vuông góc. **D.** Trùng nhau.

Câu 116. [0H3-2] Tìm tất cả giá trị m để hai đường thẳng sau đây song song.

$\Delta_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases}$ và $\Delta_2: mx-2y-14=0$.

A. Không có m nào. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=1$.

Câu 117. [0H3-1] Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng sau:

$$\Delta_1: \begin{cases} x=1+\left(1-\sqrt{2}\right)t \\ y=2+\sqrt{2}t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}-2\right)t' \\ y=1+2t' \end{cases}$$

A. Vuông góc. **B.** Song song. **C.** Cắt nhau. **D.** Trùng nhau.

Câu 118. [0H3-2] Với giá trị nào của m hai đường thẳng sau đây trùng nhau?

$$\Delta_1: 3x+4y-1=0 \text{ và } \Delta_2: (2m-1)x+m^2y+1=0$$

A. $m=2$. **B.** Mọi m. **C.** Không có m. **D.** $m=\pm1$.

Câu 119. [0H3-1] Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=3+\sqrt{2}t \\ y=1-\sqrt{3}t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2+\sqrt{3}t' \\ y=1-\sqrt{2}t' \end{cases}$.

A. Song song nhau. **B.** Cắt nhau nhưng không vuông góc.
C. Vuông góc nhau. **D.** Trùng nhau.

Câu 120. **[0H3-3]** Cho 4 điểm $A(0;-2)$, $B(-1;0)$, $C(0;-4)$, $D(-2;0)$. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng AB và CD

A. $(1;-4)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** Không có giao điểm

Câu 121. **[0H3-3]** Cho hai đường thẳng $d_1: 2x+y+4-m=0$ và $d_2:(m+3)x+y-2m-1=0$. d_1 song song với d_2 khi:

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 122. **[0H3-1]** Đường thẳng nào không cắt đường thẳng $2x+3y-1=0$?

A. $2x+3y+1=0$. **B.** $x-2y+5=0$. **C.** $2x-3y+3=0$. **D.** $4x-6y-2=0$.

Câu 123. **[0H3-1]** Đường thẳng nào song song với đường thẳng $x-3y+4=0$?

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+3t.\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+3t.\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=2+t.\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t.\end{cases}$.

Câu 124. **[0H3-2]** Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\end{cases}$?

A. $\begin{cases}x=5+t\\y=2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=5+t\\y=-2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=5-2t\\y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=5+4t\\y=2t\end{cases}$.

Câu 125. **[0H3-2]** Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$?

A. $\begin{cases}x=4t\\y=-3-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4t\\y=-3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-4t\\y=-3-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=8t\\y=-3+t\end{cases}$.

Câu 126. **[0H3-2]** Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=-1+2t\end{cases}$?

A. $2x+y+1=0$. **B.** $x+2y+1=0$. **C.** $4x-2y+1=0$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}$.

Câu 127. **[0H3-2]** Cho 3 đường thẳng $d_1: 2x+y+1=0$, $d_2: x+2y+2=0$, $d_3: 3x-6y-5=0$. Chọn khẳng định đúng:

A. $d_1 \perp d_2$. **B.** $d_3 \perp d_2$. **C.** $d_1 \perp d_3$. **D.** $d_1 // d_2$.

Câu 128. **[0H3-2]** Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng sau song song nhau: $d_1: 2x+(m^2+1)y-50=0$ và $d_2: x+my-100=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=1$ và $m=-1$.

Câu 129. **[0H3-2]** Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1:(2m-1)x+my-10=0$ và $d_2: 3x+2y+6=0$ vuông góc nhau?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=-\frac{3}{8}$. **C.** $m=\frac{3}{8}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 130. **[0H3-2]** Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng phân biệt $d_1: 3mx+2y+6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my+6=0$ cắt nhau?

A. $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq 1$ và $m\neq -1$.

Câu 131. [0H3-2] Cho tam giác ΔABC, với $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(-1;5)$ và đường thẳng $d: 2x-3y+6=0$. Đường thẳng d cắt cạnh nào của tam giác ΔABC?

A. Cạnh AB. **B.** Cạnh BC. **C.** Cạnh AC. **D.** Không cạnh nào.

Câu 132. [0H3-3] Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 2x-3y-10=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1-4mt \end{cases}$ vuông góc nhau?

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{9}{8}$. **C.** $m=-\frac{9}{8}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 133. [0H3-3] Cho ba đường thẳng $d_1: 3x-2y+5=0$, $d_2: 2x+4y-7=0$, $d_3: 3x+4y-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2, và song song với d_3 là

A. $24x+32y-53=0$. **B.** $24x+32y+53=0$. **C.** $32x-24y+53=0$. **D.** $32x-24y-53=0$.

D - GÓC

Câu 134. [0H3-2] Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 10x+5y-1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$.

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 135. [0H3-2] Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: x+2y-\sqrt{2}=0$ và $\Delta_2: x-y=0$.

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 136. [0H3-2] Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi 2 đường thẳng $\Delta_1: 3x+4y+1=0$ và $\Delta_2: x-2y+4=0$.

A. $\left(3+\sqrt{5}\right)x+2\left(2-\sqrt{5}\right)y+1+4\sqrt{5}=0$ và $\left(3-\sqrt{5}\right)x+2\left(2+\sqrt{5}\right)y+1+4\sqrt{5}=0$.

B. $\left(3+\sqrt{5}\right)x+2\left(2-\sqrt{5}\right)y+1+4\sqrt{5}=0$ và $\left(3-\sqrt{5}\right)x+2\left(2+\sqrt{5}\right)y+1-4\sqrt{5}=0$.

C. $\left(3-\sqrt{5}\right)x+2\left(2-\sqrt{5}\right)y+1+4\sqrt{5}=0$ và $\left(3+\sqrt{5}\right)x+2\left(2+\sqrt{5}\right)y+1-4\sqrt{5}=0$.

D. $\left(3+\sqrt{5}\right)x+2\left(2+\sqrt{5}\right)y+1+4\sqrt{5}=0$ và $\left(3-\sqrt{5}\right)x+2\left(2-\sqrt{5}\right)y+1-4\sqrt{5}=0$.

Câu 137. [0H3-1] Tìm côsin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x+3y-10=0$ và $\Delta_2: 2x-3y+4=0$.

A. $\frac{7}{13}$. **B.** $\frac{6}{13}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Câu 138. [0H3-1] Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x+2\sqrt{3}y+\sqrt{5}=0$ và $\Delta_2: y-\sqrt{6}=0$

A. $60°$. **B.** $125°$. **C.** $145°$. **D.** $30°$.

Câu 139. [0H3-2] Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \end{cases}$ và 2 điểm $A(1;2)$, $B(-2;m)$. Định m để A và B nằm cùng phía đối với d.

A. $m<13$. **B.** $m\geq 13$. **C.** $m>13$. **D.** $m=13$.

Câu 140. [0H3-1] Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $\Delta_2: x+10=0$.

A. $45°$. **B.** $125°$ **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Câu 141. **[0H3-1]** Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x-y-10=0$ và $\Delta_2: x-3y+9=0$

A. $60°$. **B.** $0°$. **C.** $90°$ **D.** $45°$.

Câu 142. **[0H3-1]** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: x+2y-7=0$ và $\Delta_2: 2x-4y+9=0$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 143. **[0H3-2]** Cho đoạn thẳng AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$ và đường thẳng $d: 4x-7y+m=0$. Định m để d và đoạn thẳng AB có điểm chung.

A. $10 \le m \le 40$. **B.** $m>40$ hoặc $m<10$.

C. $m>40$. **D.** $m<10$.

Câu 144. **[0H3-2]** Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi đường thẳng $\Delta: x+y=0$ và trục hoành Ox.

A. $\left(1+\sqrt{2}\right)x+y=0;\ x-\left(1-\sqrt{2}\right)y=0$. **B.** $\left(1+\sqrt{2}\right)x+y=0;\ x+\left(1-\sqrt{2}\right)y=0$.

C. $\left(1+\sqrt{2}\right)x-y=0;\ x+\left(1-\sqrt{2}\right)y=0$. **D.** $x+\left(1+\sqrt{2}\right)y=0;\ x+\left(1-\sqrt{2}\right)y=0$.

Câu 145. **[0H3-2]** Cho đoạn thẳng AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=m+2t \\ y=1-t \end{cases}$. Định m để d cắt đoạn thẳng AB.

A. $m<3$. **B.** $m=3$. **C.** $m>3$. **D.** $m \ge 3$.

Câu 146. **[0H3-1]** Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 6x-5y+15=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}$.

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $0°$ **D.** $45°$.

Câu 147. **[0H3-1]** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 3x+4y+1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

A. $\frac{56}{65}$. **B.** $\frac{63}{13}$. **C.** $\frac{6}{65}$. **D.** $\frac{33}{65}$.

Câu 148. **[0H3-1]** Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi 2 đường thẳng $\Delta_1: x+2y-3=0$ và $\Delta_2: 2x-y+3=0$.

A. $3x+y=0$ và $x-3y=0$. **B.** $3x+y=0$ và $x+3y-6=0$.

C. $3x+y=0$ và $-x+3y-6=0$. **D.** $3x+y+6=0$ và $x-3y-6=0$.

Câu 149. **[0H3-1]** Cho đường thẳng $d: 3x+4y-5=0$ và 2 điểm $A(1;3)$, $B(2;m)$. Định m để A và B nằm cùng phía đối với d.

A. $m<0$. **B.** $m>-\frac{1}{4}$. **C.** $m>-1$. **D.** $m=-\frac{1}{4}$.

Câu 150. **[0H3-2]** Cho ΔABC với $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(-1;5)$ và đường thẳng $d: 2x-3y+6=0$. Đường thẳng d cắt cạnh nào của ΔABC?

A. Cạnh AC. **B.** Không cạnh nào. **C.** Cạnh AB. **D.** Cạnh BC.

Câu 151. **[0H3-2]** Cho $(d_1): x+2y+4=0$ và $(d_2): 2x-y+6=0$. Số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 152. [0H3-2] Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x+2y+4=0$ và $\Delta_2: y=-10$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 là

A. 45°. **B.** 30°. **C.** $63°26'$. **D.** $26°33'$.

Câu 153. [0H3-3] Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x+2y+4=0$, $\Delta_2: x-3y+6=0$ có số đo là

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $23°12'$.

Câu 154. [0H3-3] Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$, $\Delta_2: \sqrt{3}x-y=0$, góc giữa Δ_1 và Δ_2 có số đo là

A. $30°$. **B.** $15°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Câu 155. [0H3-1] Góc giữa hai đường thẳng $2x-3y+1=0$ và $x+4y=0$ là

A. $47°44'$. **B.** $132°16'$. **C.** $26°34'$. **D.** $153°26'$.

Câu 156. [0H3-1] Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $d_1: 3x+4y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

A. $\frac{56}{65}$. **B.** $\frac{63}{65}$. **C.** $\frac{33}{65}$. **D.** $-\frac{33}{65}$.

Câu 157. [0H3-2] Cho $d: \sqrt{3}x-y=0$ và $d': mx+y-1=0$. Tìm m để $\cos(d,d')=\frac{1}{2}$.

A. $m=\pm\sqrt{2}$. **B.** $m=0$.
C. $m=-\sqrt{3}$ hay $m=0$. **D.** $m=\sqrt{3}$ hay $m=0$.

Câu 158. [0H3-4] Cho hai đường thẳng $d_1: 2x-5y-4=0$,. Phương trình đường thẳng d_2 qua $M(0;2)$ và tạo với d_1 một góc $\frac{\pi}{4}$ cắt $d_1: 2x-5y-4=0$ tại $N(a;b)$ biết $b<0$. Giá trị của $a-2b$:

A. $\frac{66}{29}$. **B.** $-\frac{14}{29}$. **C.** $\frac{50}{29}$. **D.** $\frac{82}{29}$.

E - KHOẢNG CÁCH - HÌNH CHIẾU - ĐỐI XỨNG

Câu 159. [0H3-2] Khoảng cách từ điểm $M(15;1)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2+3t \\ y=t \end{cases}$ là

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

Câu 160. [0H3-1] Khoảng cách từ điểm $M(5;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+2y+13=0$ là

A. $\frac{13}{\sqrt{2}}$. **B.** 2. **C.** $\frac{28}{\sqrt{13}}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Câu 161. [0H3-2] Cho $A(0;1)$, $B(12;5)$, $C(3;2)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều 3 điểm A, B, C?

A. $\Delta_1: 5x-y+1=0$. **B.** $\Delta_2: x-y-10=0$. **C.** $\Delta_3: x+y=0$. **D.** $\Delta_4: x-3y+4=0$.

Câu 162. [0H3-3] Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục Ox và cách đều hai đường thẳng $\Delta_1: 3x-2y-6=0$ và $\Delta_2: 3x-2y+3=0$

A. $(0;\sqrt{2})$. **B.** $\left(\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(\sqrt{2};0)$.

Câu 163. **[0H3-1]** Cho hai điểm $A(1;-2)$, $B(-1;2)$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+y=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Câu 164. **[0H3-2]** Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\end{cases}$ là

A. $\frac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 165. **[0H3-1]** Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-4y-17=0$ là

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **C.** 2. **D.** $-\frac{18}{5}$.

Câu 166. **[0H3-2]** Cho đường thẳng $\Delta:21x-11y-10=0$. Trong các điểm $M(21;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$, $Q(1;5)$ điểm nào gần đường thẳng Δ nhất?

A. N. **B.** M. **C.** P. **D.** Q.

Câu 167. **[0H3-2]** Tính diện tích ΔABC biết $A(2;-1)$, $B(1;2)$, $C(2;-4)$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{37}}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 168. **[0H3-1]** Khoảng cách từ điểm $M(-1;1)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-4y-3=0$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{4}{25}$.

Câu 169. **[0H3-3]** Cho đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1)$, $B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho khoảng cách từ M tới đường thẳng AB bằng 1.

A. $(1;0)$ hoặc $(3,5;0)$. **B.** $(\sqrt{13};0)$. **C.** $(4;0)$. **D.** $(2;0)$.

Câu 170. **[0H3-3]** Cho đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;0)$, $B(0;-4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Oy sao cho diện tích ΔMAB bằng 6.

A. $(0;1)$. **B.** $(0;0)$ hoặc $(0;-8)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(0;8)$.

Câu 171. **[0H3-2]** Cho đường thẳng $\Delta:7x+10y-15=0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(8;0)$, $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng Δ nhất?

A. M. **B.** P. **C.** Q. **D.** N.

Câu 172. **[0H3-1]** Khoảng cách từ điểm $M(0;1)$ đến đường thẳng $\Delta:5x-12y-1=0$ là

A. $\frac{11}{13}$. **B.** $\frac{13}{17}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 173. **[0H3-2]** Cho 2 điểm $A(2;3)$, $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều 2 điểm A, B?

A. $x+y-1=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $2x-2y+10=0$. **D.** $x-y+100=0$.

Câu 174. **[0H3-2]** Khoảng cách giữa 2 đường thẳng $\Delta_1:7x+y-3=0$ và $\Delta_2:7x+y+12=0$

A. $\frac{9}{\sqrt{50}}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 15.

Câu 175. [0H3-1] Khoảng cách từ điểm $M(1;3)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ là

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 176. [0H3-3] Cho ΔABC với $A(1;2)$, $B(0;3)$, $C(4;0)$. Chiều cao tam giác ứng với cạnh BC bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 177. [0H3-1] Tìm khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ tới đường thẳng $\Delta: \frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$.

A. $4,8$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{48}{\sqrt{14}}$. **D.** $\frac{1}{14}$.

Câu 178. [0H3-3] Tính diện tích ΔABC biết $A(3;2)$, $B(0;1)$, $C(1;5)$.

A. $\frac{11}{\sqrt{17}}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** 11. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 179. [0H3-2] Cho đường thẳng đi qua 2 điểm $A(1;2)$, $B(4;6)$, tìm tọa độ điểm M thuộc Oy sao cho diện tích ΔMAB bằng 1.

A. $(0;1)$. **B.** $(0;0)$ và $\left(0;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 180. [0H3-2] Tính diện tích ΔABC biết $A(3;-4)$, $B(1;5)$, $C(3;1)$.

A. 10. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 181. [0H3-2] Khoảng cách giữa 2 đường thẳng $\Delta_2: 3x-4y=0$ và $\Delta_2: 6x-8y-101=0$.

A. $1,01$. **B.** $\sqrt{101}$. **C.** $10,1$. **D.** 101.

Câu 182. [0H3-2] Bán kính của đường tròn tâm $I(0;-2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-23=0$ là

A. 15. **B.** 5. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** 3.

Câu 183. [0H3-3] Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha+y\sin\alpha+3(2-\sin\alpha)=0$ là

A. $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** $3\sin\alpha$. **D.** $\frac{3}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Câu 184. [0H3-1]Khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến đường thẳng $4x-3y-5=0$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** -5. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 185. [0H3-3] Đường tròn (C) có tâm là gốc $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 8x+6y+100=0$. Bán kính của đường tròn (C) là

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 186. [0H3-1] Công thức tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ là

A. $d(M;\Delta)=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **B.** $d(M;\Delta)=\frac{|ax_0+by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. $d(M;\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}$. **D.** $d(M;\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu 187. [0H3-1] Khoảng cách từ điểm $M(2;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-12=0$ là

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $-\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** 2..

Câu 188. [0H3-2] Khoảng cách từ $M(4;-5)$ đến đường thẳng $\begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases}$ là

A. $\frac{4\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$

Câu 189. [0H3-2] Khoảng cách giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 7x+y-3=0$ và $\Delta_2: 7x+y+12=0$ là

A. $\frac{9}{\sqrt{50}}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 15.

Câu 190. [0H3-2] Cho $M(2;-3)$ và $\Delta: 3x+4y-m=0$. Tìm m để $d(M,\Delta)=2$:

A. $m=-4$ hay $m=-16$. **B.** $m=-4$ hay $m=16$.
C. $m=4$ hay $m=16$. **D.** $m=4$ hay $m=-16$.

Câu 191. [0H3-2] Cho đường thẳng $d: 7x+10y-15=0$ và các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(8;0)$, $Q(1;5)$. Điểm nào cách xa đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Câu 192. [0H3-2] Khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến đường thẳng $d: \frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ là

A. $\frac{14}{5}$. **B.** $\frac{13}{5}$. **C.** $\frac{34}{5}$. **D.** $\frac{17}{240}$.

Câu 193. [0H3-2] Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;3)$, $C(4;0)$. Tính chiều cao của tam giác ứng với cạnh BC.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{11}{5}$.

Câu 194. [0H3-3] Cho đường thẳng $d: 3x+4y-5=0$ và hai điểm $A(1;-3)$, $B(2;m+1)$. Định m để A, B nằm cùng phía đối với d.

A. $m>-\frac{1}{2}$. **B.** $m<-\frac{5}{4}$. **C.** $m<-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-\frac{5}{4}$.

Câu 195. [0H3-2] Cho $A(3;-1)$, $B(0;3)$. Tìm $M \in Ox$ sao cho khoảng cách từ M đến AB bằng 1.

A. $\left(-\frac{7}{3};0\right)$ và $\left(-\frac{17}{3};0\right)$. **B.** $\left(\frac{4}{3};0\right)$ và $\left(\frac{14}{3};0\right)$.

C. $(1;0)$ và $\left(\frac{7}{2};0\right)$. **D.** $(5;0)$ và $\left(\frac{5}{2};0\right)$.

Câu 196. [0H3-3] Cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(1;2)$, $C(2;-4)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $\frac{19}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{37}}{37}$.

Câu 197. [0H3-3] Tìm điểm $M(a;b)$ với $a<0$ nằm trên $\Delta: x+y-1=0$ và cách $N(-1;3)$ một khoảng bằng 5. Giá trị của $a-b$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** -11. **D.** 1.

Câu 198. [0H3-3] Tọa độ điểm $M \in Oy$ sao cho M cách đều hai đường thẳng $\sqrt{5}x-2y+1=0$ và $\sqrt{3}x-y+7=0$ là

A. $M(0;-19)$ và $M\left(0;\frac{23}{7}\right)$. **B.** $M\left(\frac{23}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}};0\right)$ và $M\left(\frac{19}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}};0\right)$

C. $M(19;0)$ và $M\left(-\frac{23}{7};0\right)$. **D.** $M(0;19)$ và $M\left(0;-\frac{23}{7}\right)$

Câu 199. [0H3-3] Cho điểm $M(1;2)$ và đường thẳng $d: 2x+y-5=0$.Toạ độ của điểm đối xứng với điểm M qua d là:

A. $\left(\frac{9}{5};\frac{12}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{3}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{5};-5\right)$.

Câu 200. [0H3-3] Hình chiếu vuông góc của $M(1;4)$ xuống đường thẳng $\Delta: x-2y+2=0$ có tọa độ là

A. $(3;0)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(2;2)$. **D.** $(2;-2)$.

Câu 201. [0H3-3] Cho hai đường thẳng $d_1: x+3y-1=0$, $d_2: x-2y+4=0$. Phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2 là

A. $x+3y-11=0$. **B.** $3x-y+7=0$. **C.** $3x+y-1=0$. **D.** $3x+y-7=0$.

Câu 202. [0H3-4] Cho hai đường thẳng $d_1: x-2y+3=0$ và hai điểm $A(1;3)$ và $B(-2;4)$. Điểm $M(x;y) \in d_1$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x+2y$ là

A. $-\frac{19}{5}$. **B.** $\frac{123}{25}$. **C.** $\frac{19}{5}$. **D.** $\frac{19}{10}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A - CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Câu 203. [0H3-2] Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

Câu 204. [0H3-1] Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-x-y+9=0$. **B.** $x^2+y^2-x=0$.

C. $x^2+y^2-2xy-1=0$. **D.** $x^2-y^2-2x+3y-1=0$.

Câu 205. [0H3-1] Phương trình nào sau đây không phải là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-x+y+4=0$. **B.** $x^2+y^2-y=0$.

C. $x^2+y^2-2=0$. **D.** $x^2+y^2-100y+1=0$.

Câu 206. [0H3-1] Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **B.** $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$

C. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. **D.** $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$.

Câu 207. [0H3-1]Phương trình $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ là phương trình của đường tròn nào?

A. Đường tròn có tâm $(-1;2)$, bán kính $R=1$. **B.** Đường tròn có tâm $(1;-2)$, bán kính $R=2$.

C. Đường tròn có tâm $(2;-4)$, bán kính $R=2$. **D.** Đường tròn có tâm $(1;-2)$, bán kính $R=1$.

Câu 208. **[0H3-3]** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y-20=0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. (C) có tâm $I(1;2)$.
B. (C) có bán kính $R=5$.
C. (C) đi qua điểm $M(2;2)$.
D. (C) không đi qua điểm $A(1;1)$.

Câu 209. **[0H3-1]** Đường tròn $(C): x^2+y^2-x+y-1=0$ có tâm I và bán kính R là

A. $I(-1;1)$, $R=1$.
B. $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
C. $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
D. $I(1;-1)$, $R=\sqrt{6}$.

Câu 210. **[0H3-2]** Cho điểm $M(0;4)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-8x-6y+21=0$. Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

A. M nằm ngoài (C).
B. M nằm trên (C).
C. M nằm trong (C).
D. M trùng với tâm của (C).

Câu 211. **[0H3-3]** Phương trình nào trong các phương trình sau đây không là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-4=0$.
B. $x^2+y^2+x+y+2=0$.
C. $x^2+y^2+x+y=0$.
D. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

Câu 212. **[0H3-1]**Đường tròn $x^2+y^2-10x-11=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 6.
B. 2.
C. 36.
D. $\sqrt{6}$.

Câu 213. **[0H3-1]** Đường tròn nào dưới đây đi qua điểm $A(4;2)$?

A. $x^2+y^2-2x+6y-24=0$.
B. $x^2+y^2-4x+7y-8=0$.
C. $x^2+y^2-6x-2y+9=0$.
D. $x^2+y^2+2x-20=0$.

Câu 214. **[0H3-1]** Đường tròn $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $(2;1)$.
B. $(3;-2)$.
C. $(-1;3)$.
D. $(4;-1)$.

Câu 215. **[0H3-1]** Đường tròn nào dưới đây đi qua hai điểm $A(1;0)$, $B(3;4)$?

A. $x^2+y^2+8x-2y-9=0$.
B. $x^2+y^2-3x-16=0$.
C. $x^2+y^2-x+y=0$.
D. $x^2+y^2-4x-4y+3=0$.

Câu 216. **[0H3-1]** Đường tròn $x^2+y^2-6x-8y=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 10.
B. 25.
C. 5.
D. $\sqrt{10}$.

Câu 217. **[0 H3-1]** Đường tròn $x^2+y^2-5y=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{5}$.
B. 25.
C. $\frac{5}{2}$.
D. $\frac{25}{2}$.

Câu 218. **[0H3-1]** Đường tròn $x^2+y^2+\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}=0$ có tâm là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
B. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$.
C. $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.
D. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};0\right)$.

Câu 219. **[0H3-1]** Đường tròn $2x^2+2y^2-8x+4y-1=0$ có tâm là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(8;-4)$. **C.** $(-8;4)$. **D.** $(2;-1)$.

Câu 220. **[0H3-1]** Đường tròn $3x^2+3y^2-6x+9y-9=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Câu 221. **[0H3-1]** Tìm m để (C_m): $x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$ là phương trình đường tròn?

A. $m<-\frac{5}{3}$ hoặc $m>1$. **B.** $m<-\frac{5}{3}$. **C.** $m>1$. **D.** $-\frac{3}{5}<m<1$.

Câu 222. **[0H3-3]** Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây là phương trình sau đây là phương trình của đường tròn $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$?

A. $1<m<2$. **B.** $-2\le m\le 1$. **C.** $m<1$ hoặc $m>2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Câu 223. **[0H3-2]** Phương trình $x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m<-3-\sqrt{3}$ hoặc $m>-3+\sqrt{3}$.

C. $m>1$. **D.** $m<-1$ hoặc $m>1$.

Câu 224. **[0H3-1]** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=3$. Tâm và bán kính của (C) là

A. $I(-1;2)$, $R=3$. **B.** $I(1;-2)$, $R=3$. **C.** $I(1;-2)$, $R=\sqrt{3}$. **D.** $I(-1;2)$, $R=\sqrt{3}$.

Câu 225. **[0H3-1]** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+6y-3=0$. Tâm và bán kính của (C) là

A. $I(-2;3), R=\sqrt{10}$. **B.** $I(2;-3), R=\sqrt{10}$. **C.** $I(2;-3), R=4$. **D.** $I(-2;3), R=\sqrt{11}$.

Câu 226. **[0H3-1]** Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn:

A. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-10xy-2=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

Câu 227. **[0H3-2]** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn có phương trình $x^2+y^2-8x+4y+10=0$. Diện tích của đường tròn bằng:

A. 70π. **B.** 10π. **C.** 30π. **D.** 100π.

Câu 228. **[0H3-4]**Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+6y+7=0$ và hai điểm $A(4;1)$ và $B(6;-1)$. Điểm M thuộc (C). Giá trị lớn nhất của $P=MA^2+MB^2$ là

A. $2\sqrt{10}+\sqrt{3}$. **B.** 95. **C.** $3+\sqrt{5}$. **D.** $60+20\sqrt{3}$.

Câu 229. **[0H3-4]** Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ điểm $A(3;7)$ và trực tâm $H(-1;1)$, tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(1;2)$. Trung điểm M của BC có tọa độ là bao nhiêu?

A. $M\left(-\frac{1}{3};0\right)$. **B.** $M(-1;0)$. **C.** $M(-1;-1)$. **D.** $M(-3;-4)$.

B – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 230. [0H3-3] Cho hai điểm $A(1;1)$ và $B(7;5)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

A. $x^2+y^2+8x+6y+12=0$. **B.** $x^2+y^2-8x+6y+12=0$.

C. $x^2+y^2-8x-6y-12=0$. **D.** $x^2+y^2+8x+6y-12=0$.

Câu 231. [0H3-3] Đường tròn đi qua ba điểm $A(0;2)$, $B(-2;0)$ và $C(2;0)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2=8$. **B.** $x^2+y^2+2x+4=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8=0$. **D.** $x^2+y^2-4=0$.

Câu 232. [0H3-1] Phương trình nào là phương trình của đường tròn có tâm $I(-3;4)$ và bán kính $R=2$?

A. $(x+3)^2+(y-4)^2-4=0$. **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

C. $(x+3)^2+(y+4)^2=4$. **D.** $(x+3)^2+(y-4)^2=2$.

Câu 233. [0H3-3] Cho ba điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$, $C(5;4)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $(2;5)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $(9;10)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 234. [0H3-3] Cho ba điểm $A(-2;0)$, $B(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $C(2;0)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là

A. $x^2+y^2-4=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$.

C. $x^2+y^2+4x-4y+4=0$. **D.** $x^2+y^2=2$.

Câu 235. [0H3-3] Cho hai điểm $A(3;0)$, $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2=2$.

C. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2-6x-8y+25=0$.

Câu 236. [0H3-3] Đường tròn đi qua ba điểm $A(0;3)$, $B(-3;0)$, $C(3;0)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2=3$. **B.** $x^2+y^2-6x-6y+9=0$.

C. $x^2+y^2-6x+6y=0$. **D.** $x^2+y^2-9=0$.

Câu 237. [0H3-2] Tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$.

A. $(0;0)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 238. [0H3-2] Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;4)$, $B(3;4)$, $C(3;0)$.

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 239. [0H3-2] Tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;5)$, $B(3;4)$, $C(4;3)$

A. $(6;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(3;1)$. **D.** $(0;0)$.

Câu 240. [0H3-2] Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;0)$, $B(0;6)$, $C(8;0)$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 241. [0H3-2] Đường tròn nào dưới đây đi qua 3 điểm $A(2;0)$, $B(0;6)$, $O(0;0)$?

A. $x^2+y^2-3y-8=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-6y+1=0$.

C. $x^2+y^2-2x+3y=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-6y=0$.

Câu 242. [0H3-1]Một đường tròn có tâm là điểm $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x+y-4\sqrt{2}=0$. Hỏi bán kính đường tròn đó bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 243. [0H3-2] Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$

A. $x^2+y^2-2ax-by=0$. **B.** $x^2+y^2-ax-by+xy=0$.

C. $x^2+y^2-ax-by=0$. **D.** $x^2-y^2-ay+by=0$.

Câu 244. [0H3-2] Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;2), B(2;2), C\left(1;1+\sqrt{2}\right)$.

A. $x^2+y^2+2x+2y-\sqrt{2}=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y-2=0$. **D.** $x^2+y^2+2x-2y+\sqrt{2}=0$.

Câu 245. [0H3-2] Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(11;8)$, $B(13;8)$, $C(14;7)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 246. [0H3-2] Tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua 3 điểm $A(1;2)$, $B(2;3)$, $C(4;1)$.

A. $(0;-1)$. **B.** $(0;0)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(3;0,5)$.

Câu 247. [0H3-2] Một đường tròn có tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{5}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 15.

Câu 248. [0H3-3] Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(3;1)$, $C(1;3)$.

A. $x^2+y^2-2x-2y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+2x-2y=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y+2=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+2y-2=0$.

Câu 249. [0H3-1] Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính R có dạng:

A. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. **B.** $(x+a)^2+(y+b)^2=R^2$.

C. $(x-a)^2+(y-b)^2=R$. **D.** $(x+a)^2+(y+b)^2=R$.

Câu 250. [0H3-1] Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=4$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

Câu 251. [0H3-1] Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) có tâm $I(3;2)$ và đường kính bằng 6 có phương trình là

A. $(x-3)^2+(y-2)^2=3$. **B.** $(x-3)^2+(y-2)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y+2)^2=3$. **D.** $(x+3)^2+(y+2)^2=9$.

Câu 252. **[0H3-2]**Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn có tâm $I(-1;3)$ và đi qua điểm $A(1;2)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2-2x+6y+5=0$. **B.** $x^2+y^2+2x-6y+5=0$.

C. $x^2+y^2-2x-4y=0$. **D.** $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

C – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI – TIẾP TUYẾN

Câu 253. **[0H3-2]** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+6x+8y=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1;-7)$ là

A. $7x+y=0$. **B.** $4x-3y-25=0$. **C.** $x-7y-50=0$. **D.** $3x+4y+25=0$.

Câu 254. **[0H3-2]** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$. Tọa độ giao điểm của (C) và d là

A. $A(2;0)$ và $B(1;1)$. **B.** $A(3;-1)$ và $B\left(\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$.

C. $A(2;0)$ và $B\left(\frac{13}{5};\frac{-1}{3}\right)$ **D.** $A(1;3)$ và $B\left(\frac{13}{5};\frac{-1}{5}\right)$

Câu 255. **[0H3-2]** Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn có tâm $I(1;2)$ tiếp xúc với đường thẳng $d:3x-4y-10=0$ có phương trình là

A. $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **B.** $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

C. $(C):(x+1)^2+(y+2)^2=3$. **D.** $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=3$.

Câu 256. **[0H3-3]** Cho hai đường tròn: $(C_1):x^2+y^2+2x-6y+6=0$, $(C_2):x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (C_1) cắt (C_2). **B.** (C_1) không có điểm chung với (C_2).

C. (C_1) tiếp xúc trong với (C_2). **D.** (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

Câu 257. **[0H3-3]** Tiếp tuyến với đường tròn $(C):x^2+y^2=2$ tại điểm $M(1;1)$ có phương trình là

A. $x+y-2=0$. **B.** $x+y+1=0$. **C.** $2x+y-3=0$. **D.** $x-y=0$.

Câu 258. **[0H3-3]** Số đường thẳng đi qua điểm $M(5;6)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 259. **[0H3-3]** Có bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn $(C):x^2+y^2-8x-4y=0$ đi qua gốc tọa độ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 260. **[0H3-4]** Với giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta:\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $x^2+y^2=1$?

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\sqrt{2}$. **D.** $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 261. [0H3-2] Đường tròn $x^2+y^2+4y=0$ không tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $x-2=0$. **B.** $x+y-3=0$. **C.** $x+2=0$. **D.** Trục hoành.

Câu 262. [0H3-2] Đường tròn $x^2+y^2-1=0$ tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $x+y=0$. **B.** $3x+4y-1=0$. **C.** $3x-4y+5=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Câu 263. [0H3-3] Tìm giao điểm 2 đường tròn (C_1): $x^2+y^2-4=0$ và (C_2): $x^2+y^2-4x-4y+4=0$

A. $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$. **B.** $(0;2);(0;2)$.

C. $(2;0)$;$(0;2)$. **D.** $(2;0)$;$(-2;0)$.

Câu 264. [0H3-3] Tìm giao điểm 2 đường tròn (C_1): $x^2+y^2=5$ và (C_2): $x^2+y^2-4x-8y+15=0$.

A. $(1;2)$ và $(\sqrt{2};\sqrt{3})$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;2)$ và $(\sqrt{3};\sqrt{2})$. **D.** $(1;2)$ và $(2;1)$.

Câu 265. [0H3-2] Đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$ không cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

A. Đường thẳng đi qua điểm $(2;6)$ và điểm $(45;50)$.

B. Đường thẳng có phương trình $y-4=0$.

C. Đường thẳng đi qua điểm $(3;2)$ và điểm $(19;33)$.

D. Đường thẳng có phương trình $x-8=0$.

Câu 266. [0H3-3] Vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2=4$ và $(C_2):(x+10)^2+(y-16)^2=1$ là

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Câu 267. [0H3-2] Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta:4x+3y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C):x^2+y^2-9=0$?

A. $m=3$. **B.** $m=3$ và $m=3$. **C.** $m=3$. **D.** $m=15$ và $m=15$.

Câu 268. [0H3-1] Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox ?

A. $x^2+y^2-2x-10y=0$. **B.** $x^2+y^2+6x+5y+9=0$.

C. $x^2+y^2-10y=0$. **D.** $x^2+y^2-5=0$.

Câu 269. [0H3-1] Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Oy ?

A. $x^2+y^2-10y+1=0$. **B.** $x^2+y^2+6x+5y-1=0$.

C. $x^2+y^2-2x=0$. **D.** $x^2+y^2-5=0$.

Câu 270. [0H3-2] Tâm đường tròn $x^2+y^2-10x+1=0$ cách trục Oy bao nhiêu?

A. 15. **B.** 0. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 271. [0H3-2] Đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ cắt đường thẳng $x+y-a-b=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $2R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **D.** R.

Câu 272. **[0H3-1]** Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y=0$.

A. $(3;3)$ và $(-1;1)$. **B.** $(-1;1)$ và $(3;-3)$. **C.** $(3;3)$ và $(1;1)$. **D.** $(2;1)$ và $(2;-1)$.

Câu 273. **[0H3-2]** Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x=0$ và $(C_2): x^2+y^2+8y=0$.

A. Tiếp xúc trong. **B.** Không cắt nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Tiếp xúc ngoài.

Câu 274. **[0H3-2]** Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: x+y-7=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-25=0$.

A. $(3;4)$ và $(-4;3)$. **B.** $(4;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(3;4)$ và $(4;3)$.

Câu 275. **[0H3-2]** Đường thẳng $\Delta: x+y-7=0$ cắt đường tròn $(C): x^2+y^2-25=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 276. **[0 H3-2]** Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Oy ?

A. $x^2+y^2-10x+2y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-4y-5=0$.

C. $x^2+y^2-1=0$. **D.** $x^2+y^2+x+y-3=0$.

Câu 277. **[0 H3-1]** Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2=0$ và $(C_2): x^2+y^2-2x=0$.

A. $(2;0),(0;2)$. **B.** $(\sqrt{2};1),(1;-\sqrt{2})$. **C.** $(1;-1),(1;1)$. **D.** $(-1;0),(0;-1)$.

Câu 278. **[0 H3-2]** Đường tròn $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. Trục tung. **B.** $4x+2y-1=0$. **C.** Trục hoành. **D.** $2x+y-4=0$.

Câu 279. **[0H3-1]** Cho đường tròn $x^2+y^2+5x+7y-3=0$. Tìm khoảng cách từ tâm đường tròn tới trục Ox.

A. 5. **B.** 7. **C.** $3,5$. **D.** $2,5$.

Câu 280. **[0H3-1]** Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: y=x$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x=0$.

A. $(0;0)$. **B.** $(0;0)$ và $(1;1)$. **C.** $(2;0)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 281. **[0H3-2]** Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: 3x+4y+3=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-m)^2+y^2=9$.

A. $m=0$ và $m=1$. **B.** $m=4$ và $m=-6$. **C.** $m=2$. **D.** $m=6$.

Câu 282. **[0H3-1]** Tìm tọa độ giao điểm của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \end{cases}$.

A. $(1;2)$ và $(2;1)$. **B.** $(1;2)$ và $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(1;0)$ và $(0;1)$.

Câu 283. [0H3-2] Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$ và $(C_2): (x-3)^2+(y-4)^2=25$.

A. Không cắt nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Câu 284. [0H3-2] Đường tròn $x^2+y^2-6x=0$ không tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. $y-2=0$. **B.** $x-6=0$. **C.** Trục tung. **D.** $y+3=0$.

Câu 285. [0H3-3] Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường thẳng $\Delta: x+2y+1=0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Δ đi qua tâm của (C). **B.** Δ cắt (C) tại hai điểm.

C. Δ tiếp xúc với (C). **D.** Δ không có điểm chung với (C).

Câu 286. [0H3-3] Đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ khi:

A. $m=3$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 287. [0H3-2] Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3;4)$ với đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y-3=0$ là

A. $x+y-7=0$. **B.** $x+y+7=0$. **C.** $x-y-7=0$. **D.** $x+y-3=0$.

Câu 288. [0H3-1] Một đường tròn có tâm $I(3;2)$ tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x+5y+1=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{14}{\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{7}{13}$.

Câu 289. [0H3-3] Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+6y-12=0$ và đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$. Tiếp tuyến của (C) và song song với đường thẳng d có phương trình là

A. $6x-8y+38=0$ và $3x-4y-31=0$. **B.** $3x-4y-1=0$ và $3x-4y-11=0$.

C. $3x-4y+31=0$ và $3x-4y-19=0$. **D.** $4x+3y+43=0$ và $4x+3y-8=0$.

Câu 290. [0H3-3] Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$. Tiếp tuyến của (C) và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $3x-4y+2=0$ và $3x-4y-38=0$. **B.** $4x+3y+19=0$ và $4x+3y-21=0$.

C. $-4x-3y+18=0$ và $-4x-3y-22=0$. **D.** $4x+3y+21=0$ và $4x+3y-19=0$.

Câu 291. [0H3-3] Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2+2x+4y-31=0$ và điểm $M(9;-2)$. Tiếp tuyến của (C) và đi qua điểm M có phương trình là

A. $3x-4y-35=0$ và $3x+4y-19=0$. **B.** $4x-3y-42=0$ và $4x+3y-30=0$.

C. $5x-12y-69=0$ và $5x+12y-21=0$. **D.** $x-y-11=0$ và $x+y-7=0$.

Câu 292. **[0H3-4]** Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+6y-3=0$ và điểm $A(1;-1)$. Đường thẳng đi qua điểm A và cách tâm I của đường tròn khoảng cách lớn nhất có phương trình là

$2x+y-1=0$. **B.** $-x+2y+3=0$. **C.** $x-y+5=0$. **D.** $3x-4y-7=0$.

Câu 293. **[0H3-4]** Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+6y-6=0$ và điểm $A(1;0)$. Đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn tại hai điểm M, N sao cho diện tích IMN lớn nhất.

A. $2x+y-2=0$ và $x-y-1=0$, **B.** $y=0$.

C. $x+2\sqrt{2}y-1=0$ và $x-2\sqrt{2}y-1=0$. **D.** $3x+4y-3=0$ và $3x-4y-3=0$.

Câu 294. **[0H3-4]** Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-8y+15=0$ và đường thẳng $d:x+y-1=0$. Giả sử $A\in(C)$ và $B\in d$ sao cho đường thẳng AB song song với trục Ox và khoảng cách A và B lớn nhất. Tính AB.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $4+\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 12.

§3. ELIP

A - CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Câu 295. **[0H3-3]** Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và cho các mệnh đề:

(I) (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$;

(II) (E) có tỉ số $\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$;

(III) (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$;

(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. (I) và (II). **B.** (II) và (III). **C.** (I) và (III). **D.** (II) và (IV).

Câu 296. **[0H3-3]** Cho elip $(E):x^2+4y^2=1$ và cho các mệnh đề:

(I) (E) có trục lớn bằng 1; (II) (E) có trục nhỏ bằng 4;

(III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (I). **B.** (II) và (IV). **C.** (I) và (III). **D.** (IV).

Câu 297. **[0H3-2]** Một elip có trục lớn bằng 26, tỉ số $\dfrac{c}{a}=\dfrac{12}{13}$. Trục nhỏ của elip bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 24.

Câu 298. **[0H3-3]** Cho elip $(E):4x^2+9y^2=36$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. (E) có trục lớn bằng 6. **B.** (E) có trục nhỏ bằng 4.

C. (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{5}$. **D.** (E) có tỉ số $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 299. **[0H3-3]** Dây cung của elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<a)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là

A. $\frac{2c^2}{a}$. **B.** $\frac{2b^2}{a}$. **C.** $\frac{2a^2}{c}$. **D.** $\frac{a^2}{c}$.

Câu 300. **[0H3-1]** Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$?

A. $F_{1;2}=(\pm1;0)$. **B.** $F_{1;2}=(\pm3;0)$. **C.** $F_{1;2}=(0;\pm1)$. **D.** $F_{1;2}=(1;\pm2)$.

Câu 301. **[0H3-1]** Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ có tâm sai bằng bao nhiêu?

A. $e=\frac{3}{2}$. **B.** $e=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $e=\frac{2}{3}$. **D.** $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 302. **[0H3-1]** Cho elip $(E):\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$ với $p>q>0$, khi đó tiêu cự của elip (E) bằng

A. $p+q$. **B.** p^2-q^2. **C.** $p-q$. **D.** $2\sqrt{p^2-q^2}$.

Câu 303. **[0H3-1]** Cho elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 và có độ dài trục lớn bằng $2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $2a=F_1F_2$. **B.** $2a>F_1F_2$. **C.** $2a<F_1F_2$. **D.** $4a=F_1F_2$.

Câu 304. **[0H3-1]** Cho một elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Gọi $2c$ là tiêu cự của (E). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $c^2=a^2+b^2$. **B.** $b^2=a^2+c^2$. **C.** $a^2=b^2+c^2$. **D.** $c=a+b$.

Câu 305. **[0H3-2]** Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. Trong các điểm có tọa độ sau đây điểm nào là tiêu điểm của elip (E)?

A. $(10;0)$. **B.** $(6;0)$. **C.** $(4;0)$. **D.** $(-8;0)$.

Câu 306. **[0H3-1]** Tâm sai của Elip $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** 0, 4. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 0,2.

Câu 307. **[0H3-3]** Cho Elip có phương trình $(E):9x^2+25y^2=225$. Lúc đó hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng

A. 15. **B.** 40. **C.** 60. **D.** 30.

Câu 308. **[0H3-2]** Đường thẳng nào dưới đây là một đường chuẩn của Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

A. $x+\frac{4}{3}$. **B.** $x+2=0$. **C.** $x-\frac{3}{4}=0$. **D.** $x+8=0$.

Câu 309. **[0H3-2]** Đường Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ có một tiêu điểm là

A. $(0;3)$. **B.** $\left(0;\sqrt{3}\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{3};0\right)$. **D.** $(3;0)$.

Câu 310. **[0H3-2]** Đường Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

A. 18. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 311. **[0H3-3]** Một Elip có trục lớn bằng 26, tâm sai $e=\frac{12}{13}$ Trục nhỏ của elip có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 10. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 5.

Câu 312. **[0H3-2]** Đường Elip $(E):\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ có tiêu cự bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 1.

Câu 313. Đường thẳng nào dưới đây là một đường chuẩn của Elip $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$.

A. $x+4\sqrt{5}=0$. **B.** $x-4=0$. **C.** $x+2=0$. **D.** $x+4=0$

Câu 314. Đường Elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** $\frac{9}{16}$. **D.** $\frac{6}{7}$.

Câu 315. Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có tâm sai bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 316. **[0H3-1]**Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của elip:

A. $4x^2+8y^2=32$. **B.** $\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. **C.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=-1$. **D.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 317. **[0H3-1]** Cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Chọn khẳng định **sai**:

A. Điểm $A(-3;0)\in(E)$. **B.** (E) có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$.

C. Trục lớn của (E) có độ dài bằng 6. **D.** (E) có tâm sai bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B – PHƯƠNG TRÌNH ELIP

Câu 318. **[0H3-2]** Phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh là $(-3;0)$, $(3;0)$ và hai tiêu điểm là $(-1;0)$, $(1;0)$ là

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. **B.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **D.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 319. **[0H3-3]** Cho elip (E) có tiêu điểm $F_1(4;0)$ và có một đỉnh là $A(5;0)$. Phương trình chính tắc của (E) là

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$.

Câu 320. **[0H3-3]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có trục lớn gấp đôi trục bé và có tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{24}=1$. **C.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 321. **[0H3-2]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ và trục lớn bằng 6

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.

Câu 322. **[0H3-3]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có một đường chuẩn là $x+4=0$ và một tiêu điểm là điểm $(1;0)$

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=0$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 323. **[0H3-3]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5;0)$.

A. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **B.** $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 324. **[0H3-2]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có trục lớn gấp đôi trục bé và đi qua điểm $(2;2)$

A. $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

Câu 325. **[0H3-3]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $M(4;3)$

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 326. **[0H3-2]** Phương trình của Elip có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là

A. $9x^2+16y^2=144$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $9x^2+16y^2=1$. **D.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$.

Câu 327. **[0H3-2]** Tìm phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm $(6;0)$ và có tâm sai bằng $\frac{1}{2}$.

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. **B.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. **C.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. **D.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$.

Câu 328. **[0H3-2]** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một elíp có khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\frac{50}{3}$ và tiêu cự 6 ?

A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{64}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

Câu 329. **[0H3-2]** Tìm phương trình chính tắc của Elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 330. Phương trình chính tắc của Elip có tâm sai $e=\frac{4}{5}$, độ dài trục nhỏ bằng 12 là

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$. **D.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$.

Câu 331. Tìm phương trình chính tắc của Elip có một đường chuẩn là $x+5=0$ và đi qua điểm $(0;-2)$.

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **B.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 332. Tìm phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm $(2;1)$ và có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$.

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. **B.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 333. **[0H3-2]**Phương trình chính tắc của elip đi qua $A(0;-4)$ và có tiêu điểm $F(3;0)$ là

A. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 334. **[0H3-2]** Phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $A\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ và $B\left(2;\sqrt{2}\right)$ là

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. **C.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $8x^2+4y^2=32$.

Câu 335. **[0H3-1]**Elip (E) có độ dài trục bé bằng 8 và độ dài trục lớn bằng 12 có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=-1$. **D.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{64}=1$.

Câu 336. **[0H3-3]**Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 12 và tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **C.** $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{128}=1$.

Câu 337. **[0H3-3]**Elip (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 338. **[0H3-3]**Elip (E) có tiêu điểm $F\left(2\sqrt{3};0\right)$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 32 có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=-1$.

C – ĐIỂM THUỘC ELIP

Câu 339. [0H3-3] Cho elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<a)$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm và cho điểm $M(0;-b)$. Giá trị nào sau đây bằng giá trị biểu thức $MF_1.MF_2-OM^2$?

A. c^2. **B.** $2a^2$. **C.** $2b^2$. **D.** a^2-b^2.

Câu 340. [0H3-2]Cho elip có các tiêu điểm $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ và đi qua $A(-5;0)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc elip đã cho có các bán kính qua tiêu điểm là bao nhiêu?

A. $MF_1=5+\frac{3}{5}x,\ MF_2=5-\frac{3}{5}x$. **B.** $MF_1=5+\frac{4}{5}x,\ MF_2=5-\frac{4}{5}x$.

C. $MF_1=3+5x,\ MF_2=-3-5x$. **D.** $MF_1=5+4x,\ MF_2=5-4x$

Câu 341. [0H3-1] Cho điểm $M(2;3)$ nằm trên đường elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Trong các điểm sau đây điểm nào không nằm trên (E):

A. $M_1(-2;3)$. **B.** $M_2(2;-3)$. **C.** $M_3(-2;-3)$. **D.** $M_4(3;2)$.

Câu 342. [0H3-3] Cho Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. M là điểm nằm trên (E). Lúc đó đoạn thẳng OM thoả

A. $4\le OM\le 5$. **B.** $OM\ge 5$. **C.** $OM\le 3$. **D.** $3\le OM\le 4$.

Câu 343. [0H3-3] Biết Elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7};0)$, $F_2(\sqrt{7};0)$ và đi qua $M\left(-\sqrt{7};\frac{9}{4}\right)$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua gốc toạ độ. Khi đó:

A. $NF_1+MF_2=\frac{9}{2}$. **B.** $NF_2+MF_1=\frac{23}{2}$. **C.** $NF_2-NF_1=\frac{7}{2}$. **D.** $NF_1+MF_1=8$.

Câu 344. [0H3-3] Cho Elíp có phương trình $16x^2+25y^2=100$. Tính tổng khoảng cách từ điểm thuộc Elíp có hoành độ $x=2$ đến hai tiêu điểm.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 345. [0H3-2] Cho Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu điểm M có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng

A. $4\pm\sqrt{2}$. **B.** 3 và 5. **C.** 3,5 và 4,5. **D.** $4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 346. [0H3-4] Đường thẳng qua $M(1;1)$ và cắt Elíp (E): $4x^2+9y^2=36$ tại hai điểm M_1, M_2 sao cho $MM_1=MM_2$ có phương trình là

A. $2x+4y-5=0$. **B.** $4x+9y-13=0$. **C.** $x+y+5=0$. **D.** $16x-15y+100=0$.

Câu 347. [0H3-3] Cho Elip $(E):\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu điểm M có hoành độ bằng 13 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng

A. 8 và 18. **B.** $13\pm\sqrt{5}$. **C.** 10 và 16. **D.** $13\pm\sqrt{10}$.

Câu 348. Cho Elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và một điểm M nằm trên (E) biết rằng chu vi của tam giác MF_1F_2 bằng 18. Lúc đó tâm sai của (E) là

A. $e=-\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{4}{9}$. **C.** $e=\frac{4}{18}$. **D.** $e=\frac{4}{5}$.

Câu 349. **[0H3-4]** Cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, với tiêu điểm F_1, F_2. Lấy hai điểm A, $B\in(E)$ sao cho $AF_1+BF_1=8$. Khi đó, AF_2+BF_2 bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 350. **[0H3-4]** Cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm toạ độ điểm $M\in(E)$ sao cho M nhìn F_1, F_2 dưới một góc vuông:

A. $(-5;0)$. **B.** $\left(4;-\frac{9}{5}\right)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right)$.

Câu 351. **[0H3-2]** Cho đường tròn (C) tâm F_1 bán kính $2a$ và một điểm F_2 ở bên trong của (C). Tập hợp tâm M của các đường tròn (C') thay đổi nhưng luôn đi qua F_2 và tiếp xúc (C) là đường nào sau đây?

A. Đường thẳng. **B.** Đường tròn. **C.** Elip. **D.** Parabol.

Câu 352. **[0H3-3]** Khi cho t thay đổi, điểm $M(5\cos t;4\sin t)$ đi động trên đường nào sau đây?

A. Elip. **B.** Đường thẳng. **C.** Parabol. **D.** Đường tròn.

D – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 353. **[0H3-3]** Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ và đường tròn $(C):x^2+y^2=25$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 354. **[0H3-3]** Cho Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Đường thẳng $d:x=-4$ cắt (E) tại hai điểm M, N. Khi đó:

A. $MN=\frac{9}{25}$. **B.** $MN=\frac{18}{25}$. **C.** $MN=\frac{18}{5}$. **D.** $MN=\frac{9}{5}$.

Câu 355. **[0H3-2]** Đường thẳng $d:y=kx$ cắt Elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tại hai điểm

A. đối xứng nhau qua trục Oy. **B.** đối xứng nhau qua trục Ox.

C. đối xứng nhau qua gốc toạ độ O. **D.** Các khẳng định trên đều sai.

Câu 356. **[0H3-3]** Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta:y+3=0$. Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến đường thẳng Δ bằng giá trị nào sau đây:

A. 16. **B.** 9. **C.** 81. **D.** 7.

Câu 357. **[0H3-3]** Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $\Delta:y=3$. Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến Δ bằng giá trị nào sau đây?

A. 16. **B.** 9. **C.** 81. **D.** 7.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	A	D	D	C	D	A	B	C	C	B	D	A	D	D	C	A	C	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	A	A	C	C	A	A	B	C	D	C	D	D	B	C	A	A	D	D	A
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	B	B	B	B	C	A	B	D	C	D	A	C	D	B	B	B	C	D	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	A	C	A	C	A	C	C	D	A	A	D	A	A	D	A	B	B	A
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	A	C	A	D	C	A	C	D	A	C	D	D	D	A	D	D	D	C	B
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
C	B	D	B	D	A	C	C	C	B	A	B	D	C	A	C	B	C	B	D
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	A	D	B	A	B	C	A	C	D	D	C	A	C	A	B	D	D	A	D
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
D	A	A	D	B	A	D	C	B	B	D	D	C	B	A	C	D	C	C	D
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
D	B	C	B	C	D	D	B	A	B	C	C	A	C	B	B	A	D	B	B
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
C	D	B	B	D	D	A	D	C	D	D	A	B	B	C	C	A	A	A	C
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
B	C	D	B	A	C	B	A	B	A	B	A	A	D	D	C	C	B	D	D
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
A	C	D	C	C	D	B	D	C	C	D	A	D	B	B	D	D	C	D	B
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
D	C	C	B	C	C	C	A	A	A	B	B	B	D	A	B	A	C	B	A
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
B	C	C	B	D	B	D	C	C	D	A	A	C	D	B	A	C	A	C	B
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
B	B	B	A	C	B	A	C	A	D	A	B	C	C	D	D	B	C	B	A
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
D	D	B	C	D	C	C	D	C	B	A	A	A	B	A	A	D	C	C	D
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
B	A	C	D	A	A	A	C	D	B	B	D	D	A	B	A	C	B	D	A
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
D	D	D	C	C	B	A	D	C	D	C	A	C	C	C	B	B			